



UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
Curso de Graduação em Engenharia Mecatrônica
Controle de Sistemas Lineares



Projeto Final

Prof. Pedro Augusto Queiroz de Assis

Luis Felipe Costa Fernandes de Menezes (11921EMT017)

Uberlândia – 2023

1. Introdução e objetivos

O presente relatório tem como objetivo apresentar o controle de um sistema dinâmico, especificamente um aeropêndulo. O aeropêndulo é um sistema físico composto por uma massa pendurada, dada pelo motor, em uma haste, que pode ser controlada por meio de uma rotação aplicada no motor, como na Figura 1. O objetivo do controle do aeropêndulo é manter a massa em um determinado ângulo θ , ou seja, na posição de equilíbrio desejada, utilizando técnicas de controle linear.

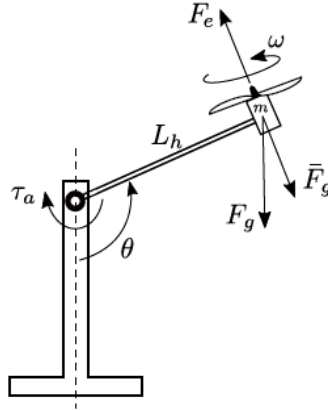


Figura 1 - Diagrama esquemático do aeropêndulo.

Para realizar o controle do aeropêndulo, primeiro partiu-se dos dados, na Figura 2, e do modelo matemático, na Equação 1, fornecidos do sistema, além da condição de equilíbrio especificada, $\theta = 80^\circ$.

Constante	Significado	Valor
b	Coefficiente de atrito viscoso rotacional	$0,006856 \text{ N}(\text{rad/s})^{-1}$
m	Massa do conjunto propulsivo (motor + hélice)	$0,3182 \text{ kg}$
g	Aceleração gravitacional	$9,81 \text{ m/s}^2$
I	Momento de inércia	$0,0264 \text{ kgm}^2$
k_h	Coefficiente de empuxo	$2,12829 \times 10^{-5} \text{ N}/(\text{rad/s})^2$
L_h	Distância do motor ao centro de rotação	$0,32 \text{ m}$

Figura 2 – Dados do diagrama esquemático do aeropêndulo.

$$\ddot{\theta}(t) = \frac{L_h k_h}{I} \omega^2(t) - \frac{L_h m g}{I} \sin(\theta(t)) + \frac{b}{I} \dot{\theta}(t) \quad (1)$$

Vale citar também as limitações dadas do próprio motor do aeropêndulo, sendo elas o atraso de 10 ms na entrada do motor e a limitação deste a uma rotação de 400 rad/s.

Com estes recursos e considerações, iniciou-se então o processo de linearização do modelo no ponto de equilíbrio desejado, para que, dessa forma, as técnicas de controle linear pudessem ser aplicadas.

2. Linearização e função transferência

Para controlar um sistema não linear com as técnicas desta disciplina, é necessário utilizar técnicas de linearização para simplificar o problema. O processo de linearização consiste em aproximar o comportamento do sistema não linear por meio de um modelo linear ao redor de um ponto de equilíbrio desejado.

Nesta linearização é necessário primeiramente encontrar a entrada para o ponto de equilíbrio desejado. O ponto de equilíbrio é aquele em que o sistema se encontra em repouso, ou seja, as derivadas da saída são nulas. Diremos que neste ponto a entrada e saída assumirão valores denominados, respectivamente, $\bar{\theta}$ e $\bar{\omega}$. Com a Equação 1 e as considerações, é possível escrever:

$$\begin{aligned}\bar{\theta} &= 80^\circ = 1,3963 \text{ rad} \\ \ddot{\theta} &= \dot{\theta} = 0 \\ \frac{L_h k_h}{I} \bar{\omega}^2 &= \frac{L_h m g}{I} \sin(\bar{\theta}) \\ \bar{\omega} &= \sqrt{\frac{m g \sin(\bar{\theta})}{k_h}} \approx 380,05 \text{ rad/s}\end{aligned}$$

Os valores $\bar{\theta}$ e $\bar{\omega}$ permitem a utilização da linearização por série de Taylor, na Equação 2, para isto é necessário encontrar as derivadas parciais da função da Equação 1, em relação às suas variáveis no ponto de equilíbrio. Em geral, é utilizada apenas a primeira derivada parcial, pois ela é suficiente para aproximar o comportamento do sistema linearmente. Aqui, algumas constantes foram definidas para facilitar a implementação em código:

$$\begin{aligned}c_1 &= \frac{L_h k_h}{I}; \quad c_2 = \frac{L_h m g}{I}; \quad c_3 = \frac{b}{I} \\ \left. \frac{\partial \ddot{\theta}}{\partial \omega} \right|_{PE} &= 2 \frac{L_h k_h}{I} \bar{\omega} = 2c_1 \bar{\omega} \\ \left. \frac{\partial \ddot{\theta}}{\partial \theta} \right|_{PE} &= -\frac{L_h m g}{I} \cos \bar{\theta} = -c_2 \cos \bar{\theta} \\ \left. \frac{\partial \ddot{\theta}}{\partial \dot{\theta}} \right|_{PE} &= -\frac{b}{I} = -c_3\end{aligned}$$

$$\ddot{\theta}(t) \approx \ddot{\theta}|_{PE} + 2c_1 \bar{\omega}(\omega(t) - \bar{\omega}) - c_2 \cos \bar{\theta}(\theta(t) - \bar{\theta}) - c_3 (\dot{\theta}(t) - \dot{\bar{\theta}})$$

Além disso, para que o resultado seja realmente linearizado, duas substituições são realizadas:

$$\phi(t) = \theta(t) - \bar{\theta}; \quad \dot{\phi}(t) = \dot{\theta}(t); \quad \ddot{\phi}(t) = \ddot{\theta}(t); \quad u(t) = \omega(t) - \bar{\omega}$$

Obtendo-se, portanto, a linearização da função da Equação 1.

$$\ddot{\phi}(t) = 2c_1 \bar{\omega} u(t) - c_2 \cos \bar{\theta} \phi(t) - c_3 \dot{\phi}(t) \quad (2)$$

Por fim, aplica-se a transformada de Laplace no modelo linearizado, na Equação 3, em mérito da obtenção da função transferência do sistema, ou seja, a saída sobre a entrada.

$$\begin{aligned}
 s^2\Phi(s) &= 2c_1\bar{\omega}U(s) - c_2\cos\bar{\theta}\Phi(s) - c_3s\Phi(s) \\
 \Phi(s)(s^2 + c_3s + c_2\cos\bar{\theta}) &= 2c_1\bar{\omega}U(s) \\
 G(s) = \frac{\Phi(s)}{U(s)} &= \frac{2c_1\bar{\omega}}{s^2 + c_3s + c_2\cos\bar{\theta}} = \frac{0,1961}{s^2 + 0,2597s + 6,57} \quad (3)
 \end{aligned}$$

Sobre esta função transferência serão aplicadas as análises e técnicas de controle de sistemas lineares, vale notar que estas análises serão válidas apenas para condições próximas o suficiente do ponto de equilíbrio escolhido anteriormente.

3. Análise do comportamento em malha aberta

A função transferência permite não só projetar controladores de uma forma mais simples, como também analisar o comportamento em malha aberta do sistema. Na $G(s)$ obtida na Equação 3, é possível observar que não há de raízes do numerador, ou seja, zeros de malha aberta e que há duas raízes no denominador, ou seja, polos de malha aberta, dados por:

$$p_{12} = -0.1298 \pm 2,56j$$

No diagrama de Bode de $G(s)$ da Figura 3, é possível observar que não há corte no 0 db, no gráfico de magnitude, ou no -180° , no gráfico de fase. Isso indica que não há frequência de corte definida, bem como o fato de a margem de ganho ser infinita.

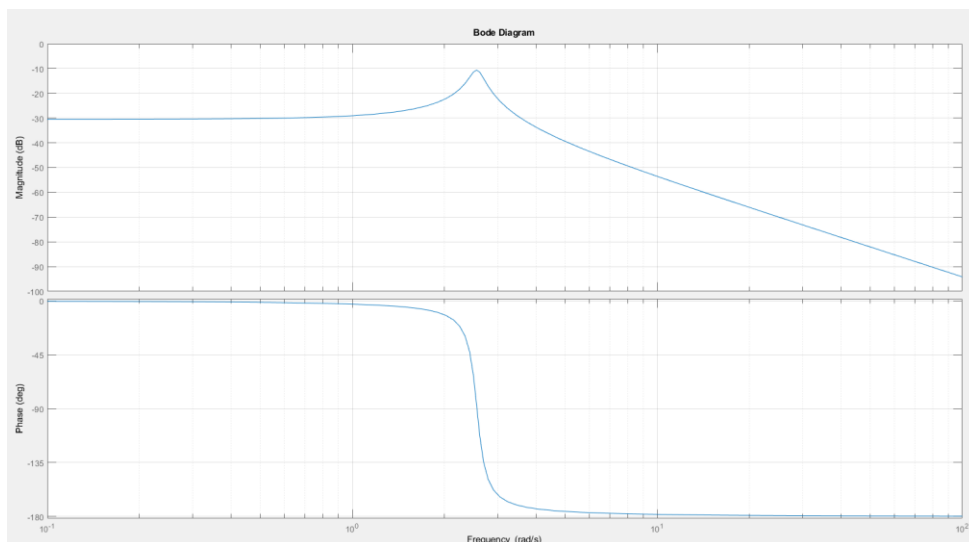


Figura 3 - Diagrama de Bode da função transferência.

4. Simulação do aeropêndulo com modelo não linear

Antes de partir para os requisitos de projeto e o projeto dos controladores, uma simulação do modelo não linear do aeropêndulo foi montada no Matlab Simulink, na Figura 4, apesar da obtenção do modelo linearizado. Isso foi feito para trazer fornecer uma simulação mais apropriada do sistema, que possa se aproximar mais dos resultados que seriam obtidos em bancada.

Esta simulação foi então colocada em um subsistema, o qual será inserido na malha de controle, no lugar da função transferência, contando, portanto, com uma entrada para a velocidade de rotação do motor e uma saída para o ângulo de interesse, além de uma outra entrada utilizada para configurar a angulação inicial do aeropêndulo, o que trará mais facilidade aos testes no futuro.

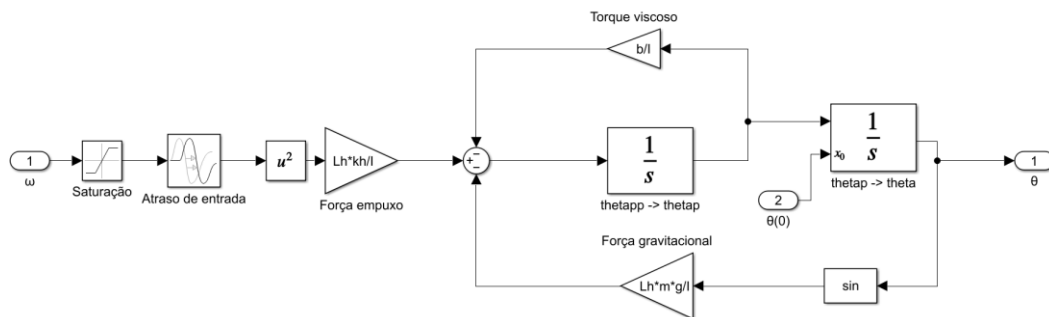


Figura 4 - Subsistema da simulação com modelo não linear.

Vale notar a adição das limitações especificadas do sistema na simulação: o atraso e a saturação de entrada.

Este subsistema é então utilizado para a simulação da malha fechada, dada como na Figura 5, nela, como o controlador será desenvolvido para a partir da entrada $U(s)$ obter-se uma saída $\Phi(s)$, ao fechar a malha deve-se subtrair e adicionar os valores de $\bar{\theta}$ e $\bar{\omega}$ para garantir que cada bloco receba a entrada esperada, além de rastrear uma referência $\phi(t) = 0$ para que $\theta(t) = \bar{\theta}$.

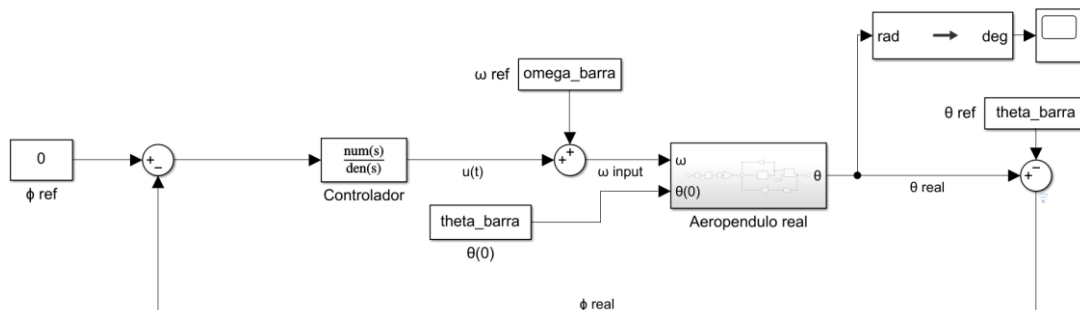


Figura 5 - Simulação da malha fechada do aeropêndulo com modelo não linear.

Por fim, um “scope” é adicionado após a conversão da saída do sistema real de radiano para graus, para verificação dos resultados durante os testes dos controladores.

5. Projeto do controlador com LGR

Para projetar o controlador, devemos, primeiramente, especificar os requisitos de projeto e, posteriormente, transformá-los em parâmetros matemáticos para projeto utilizando alguma das técnicas da disciplina (LGR, resposta em frequência, etc.). Como sugestão nas instruções do projeto final, inicialmente foram adotados os seguintes requisitos de projeto:

- Erro em regime estacionário nulo para referências do tipo degrau;
- Máximo sobressinal menor que 20%;
- Tempo de pico máximo de 2 segundos.

Após a construção do controlador com estes requisitos, verificou-se que, apesar do tempo de pico ter sido satisfeito, o sistema ainda demorava muito para se estabelecer e, portanto, um novo requisito de tempo de estabelecimento de 5 segundos foi adotado.

Em seguida, de acordo com os novos requisitos, os parâmetros matemáticos foram obtidos, iniciando pela necessidade de $e_{ss} = 0$ para referências do tipo degrau, o qual solicita ao menos um integrador (polo na origem) na função transferência ou no controlador, como não há na função transferência, este foi colocado no integrador, resultando na Equação 4.

$$C(s) = \frac{1}{s} \quad (4)$$

Para os outros dois requisitos, foram utilizadas suas fórmulas para transformá-los em parâmetros de fator de amortecimento e frequência natural, como segue-se abaixo:

$$\xi = \sqrt{\frac{(\ln(MS))^2}{\pi^2 + (\ln(MS))^2}} \approx 0,4559$$

$$t_s = \frac{4}{\xi \omega_n} \Rightarrow \omega_n = \frac{4}{\xi t_s} \approx 1,7546$$

Com o objetivo de satisfazer estes parâmetros, a ferramenta *sisotool* do Matlab foi utilizada, aplicando-a na função transferência, adicionando o polo na origem já determinado e transformando o fator de amortecimento e frequência natural em uma região geométrica para os polos de malha fechada, resultando no LGR da Figura 6.

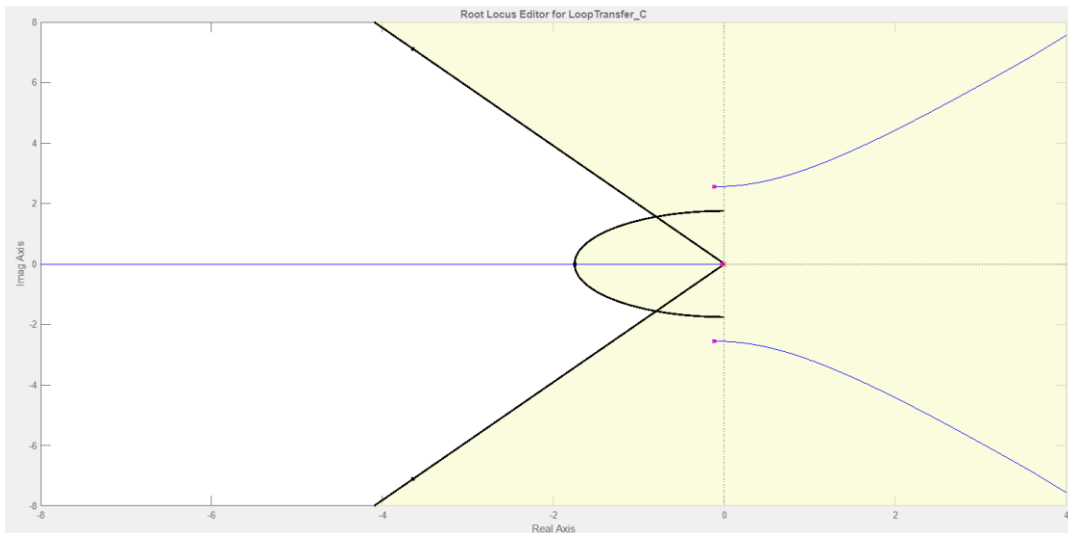


Figura 6 - LGR de $G(s)$ com integrador e restrições geométricas para os polos de MF.

Por fim, com o conhecimento teórico do funcionamento do LGR e alguns testes práticos, os polos de malha fechada foram alocados na região desejada com a inserção de um par de zeros complexos conjugados e um polo distante o suficiente, além de um grande ganho, como demonstra a Figura 7.

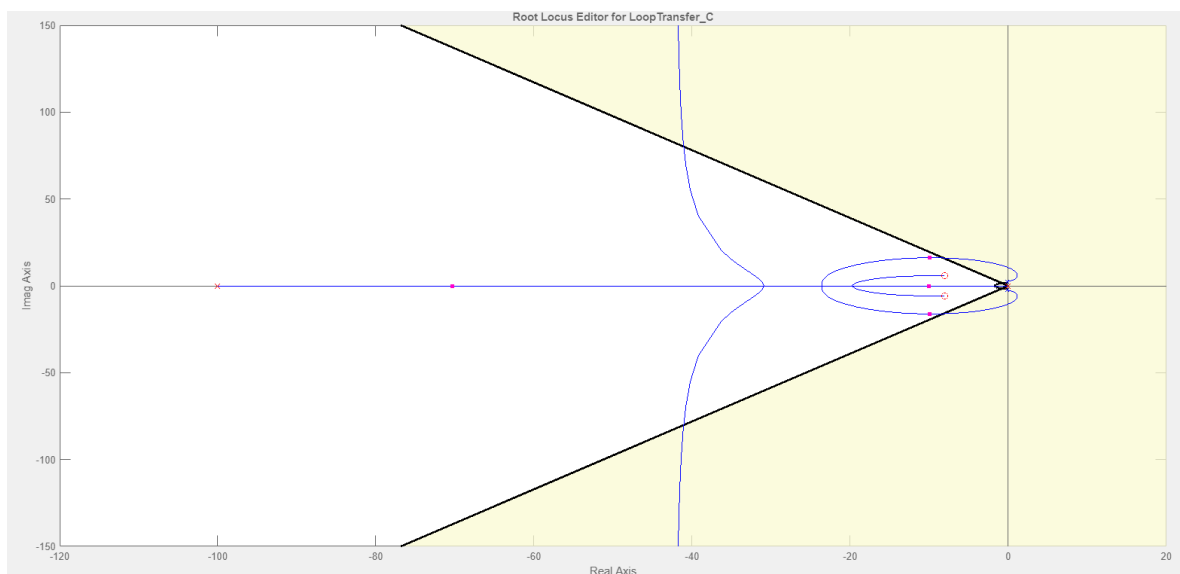


Figura 7 - LGR de $G(s)$ e controlador alocando os polos de malha fechada na região desejada.

Desta configuração foi retirada então a versão final do controlador projetado no LGR, dado na Equação 5.

$$C(s) = \frac{130s^2 + 2210s + 13000}{0.01s^2 + s} \quad (5)$$

6. Simulação com modelo não linear e controlador do LGR

Com a finalidade de testar o desempenho do controlador projetado e verificar se este atendeu os requisitos de projeto selecionados, a simulação no modelo não linear, da Figura 5, foi realizada, resultando na simulação da Figura 8.

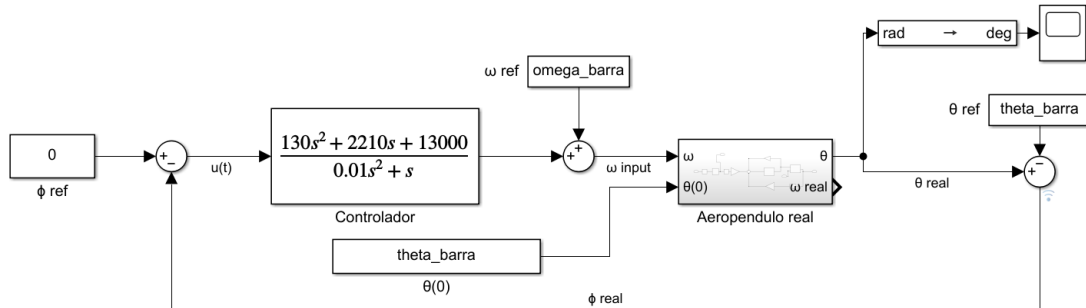


Figura 8 - Simulação do modelo não linear com controlador do LGR.

Desta simulação, rastreando um $\phi = 0$, ou seja, $\theta = 80^\circ$ e iniciando nesta condição, mediu-se o resultado da Figura 9, nela é possível observar todos os requisitos de projeto sendo satisfeitos.

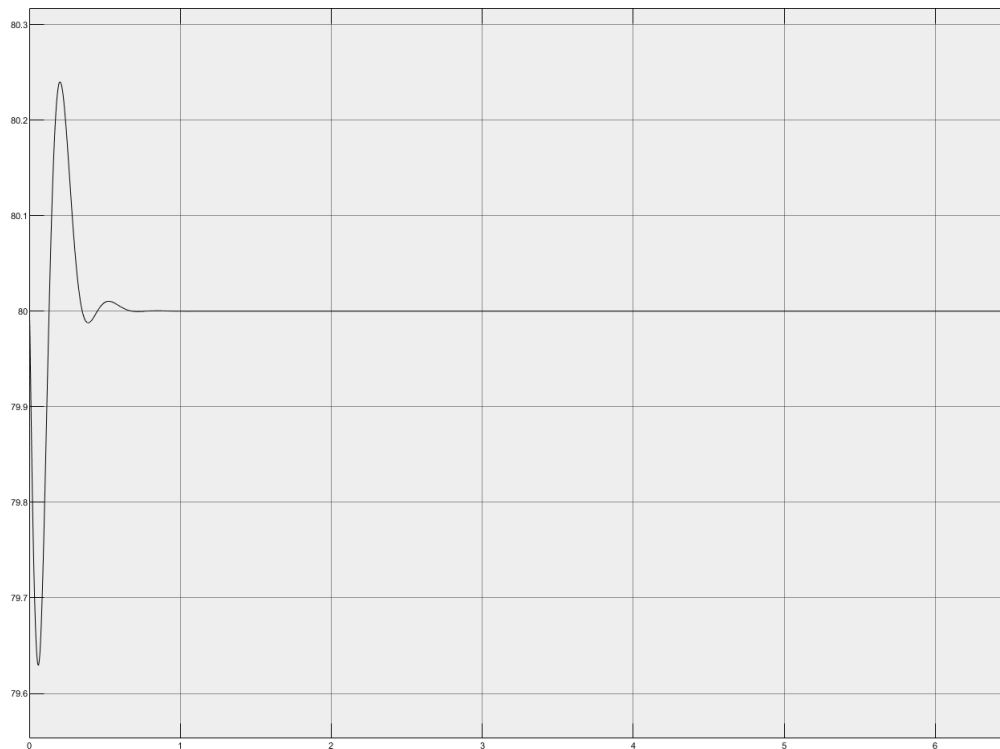


Figura 9 - Saída do modelo não linear com controlador do LGR.

Além disso, também foram testados o rastreamento de outras referências, ainda com a condição inicial $\theta = 80^\circ$, nesses testes verificou-se que o sistema controlado ainda apresentava um comportamento adequado rastreando ângulos de 76° a 86° , com o resultado dos casos extremos disponibilizados na Figura 10.

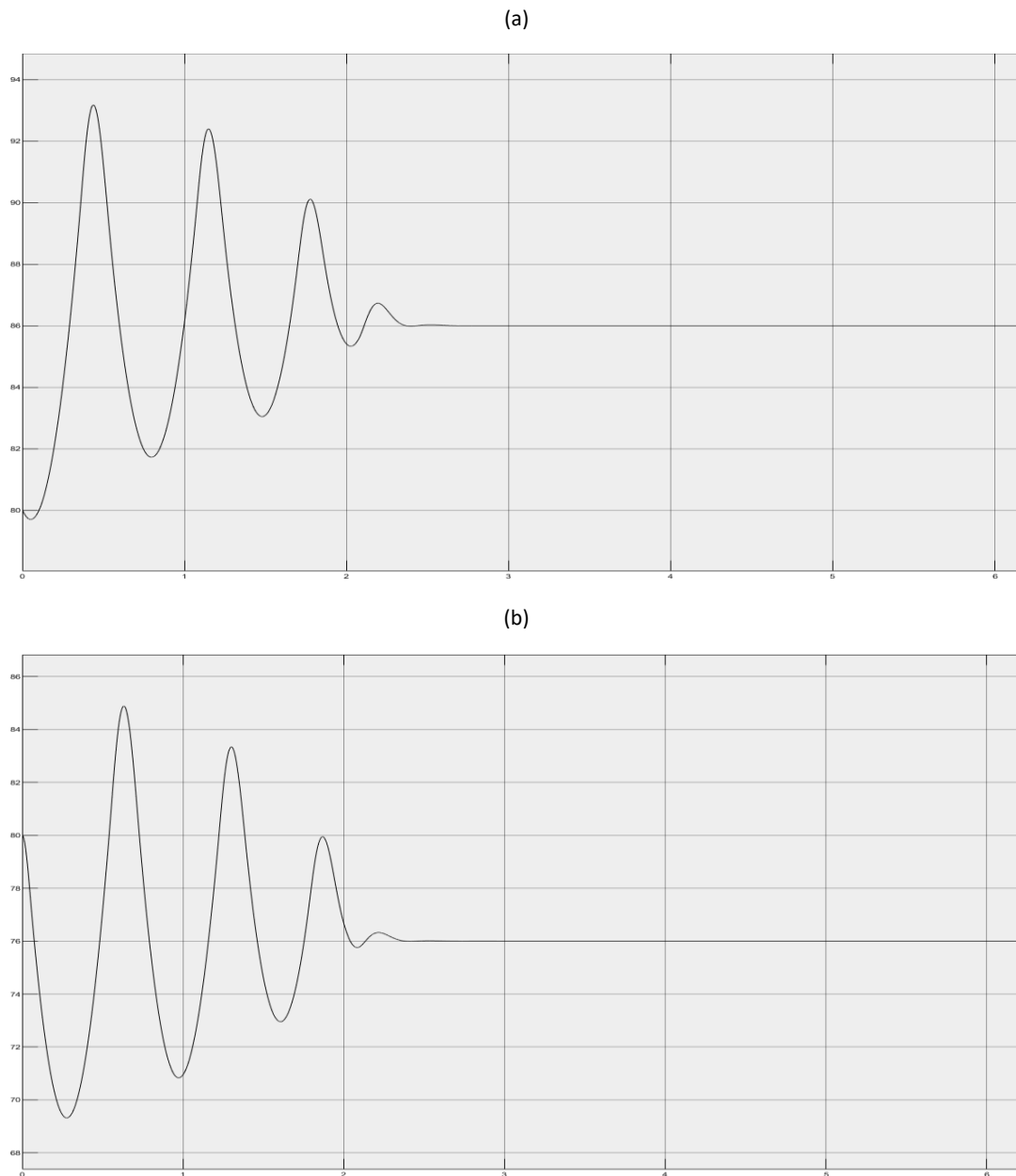


Figura 10 - (a) Resultado da simulação rastreando 86° graus. (b) Resultado da simulação rastreando 76° graus.

Para valores de rastreamento fora da faixa citada, o controlador apresentou resultado inadequado, estourando a saída do sistema à resultados na ordem de 10^7 . Esta faixa de 10 graus na qual a operação do controlador no sistema é satisfatória é esperada, devido à natureza da linearização realizada no início, a qual aproxima a função desejada apenas para valores próximos ao ponto de equilíbrio escolhido.

Neste caso, para controlar todos os possíveis pontos de operação do sistema, ou seja, toda a faixa de valores que o ângulo formado pela haste e a referência poderia assumir, uma possibilidade seria alternar entre controladores projetados para outras condições.

7. Projeto do controlador PID

O controlador Proporcional-Integral-Derivativo é muito utilizado na indústria devido a sua simplicidade e aplicação nos mais variados tipos de sistemas. Esta seção do projeto dedica-se, portanto, ao projeto de um controlador deste tipo para o sistema do aeropêndulo, verificando, assim, sua aplicabilidade, simplicidade de ajuste e qualidade de resposta.

Como no projeto do controlador anterior, deve-se iniciar definindo os requisitos de resposta do sistema, os quais serão os mesmos utilizados anteriormente:

- Erro em regime estacionário nulo para referências do tipo degrau;
- Máximo sobressinal menor que 20%;
- Tempo de estabelecimento máximo de 5 segundos.

Além disso, deve-se também definir o tipo de controlador PID dentre os disponíveis na literatura, sendo selecionado o utilizado no método de ajuste baseado no ITAE, na Equação 6.

$$C_{PID}(s) = K_p \left(\frac{T_i s + 1}{T_i s} \right) \left(\frac{T_d s + 1}{0,1 T_d s + 1} \right) \quad (6)$$

Aqui já pode-se constatar que o requisito de erro em regime estacionário nulo foi atendido, devido à ação integral. Já para satisfazer os outros dois requisitos de projeto, será utilizado o conhecimento teórico do efeito causado pela variação dos parâmetros K_p , T_i , T_d e simulações com o modelo não linear para verificar as alterações na resposta do sistema, como na Figura 11.

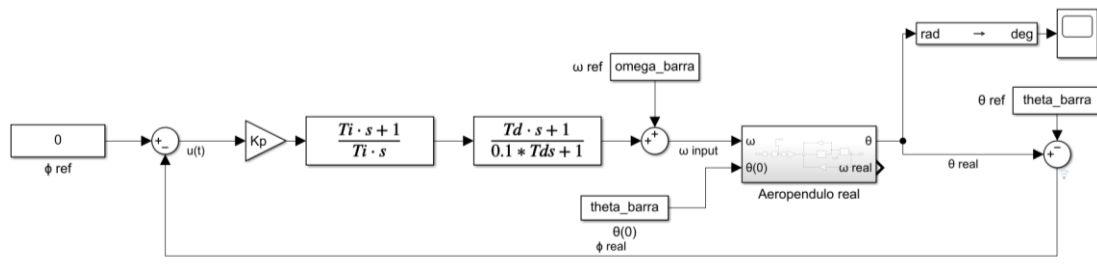


Figura 11 - Simulação com modelo não linear para ajuste do PID.

Por fim, com o conhecimento de que com o aumento de K_p aumenta-se a velocidade de resposta e que com o aumento de T_d aumenta-se o amortecimento da resposta, diversos testes no simulador foram realizados até a obtenção de uma saída satisfatória, a qual se deu pelo controlador PID da Equação 7.

$$C_{PID}(s) = 50 \left(\frac{0,7s + 1}{0,7s} \right) \left(\frac{0,5s + 1}{0,05s + 1} \right) \quad (7)$$

Provou-se, portanto, a simplicidade de ajuste do controlador PID, sendo esta realizada com alguns poucos conhecimentos teóricos sobre a ação de cada termo do controlador e algumas execuções da simulação.

8. Simulação com modelo não linear e controlador PID

Como o projeto do PID se deu com auxílio da simulação com modelo não linear, a resposta do sistema com o controlador implementado já foi validada para o ponto de equilíbrio escolhido e provou-se satisfatória, na Figura 12.

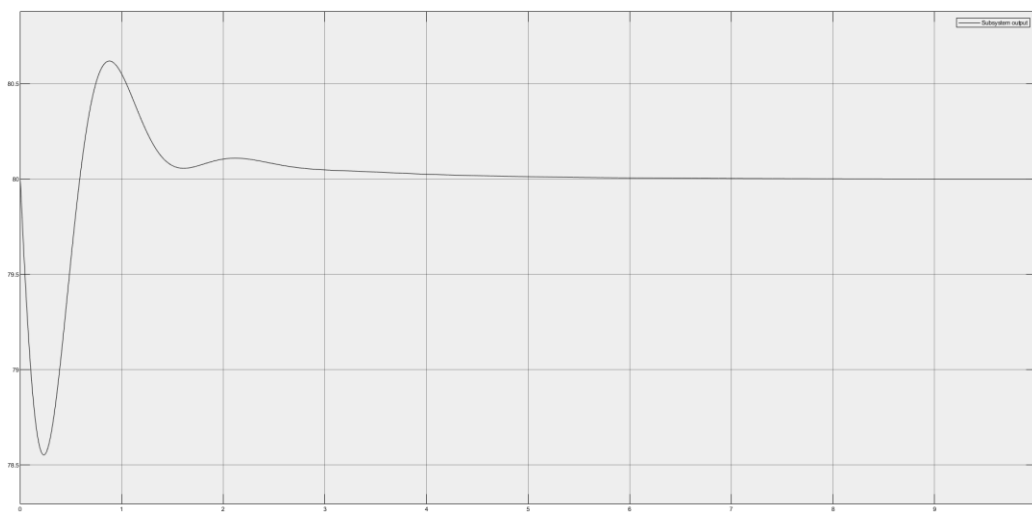


Figura 12 - Resposta do sistema com controlador PID para o ponto de equilíbrio.

Além disso, o efeito wind-up, o qual acontece quando o erro continua a ser integrado após a saturação do atuador, também foi monitorado, constatando que, como o atuador não atinge seu limite, não há necessidade da implementação de técnicas como a integração condicional. A entrada do sistema determinada pelo controlador, ou seja, a rotação do atuador encontra-se na Figura 13.



Figura 13 – Entrada do sistema determinada pelo controlador.

Por fim, a robustez do controlador PID foi testada, o qual, apesar de sua simplicidade de ajuste, mostrou-se mais robusto que o projetado no LGR, sendo capaz de rastrear ângulos de 0° à 100° , aumentando, no entanto, seu tempo de estabelecimento à medida que a referência se distanciava de 80° , como na Figura 14 que demonstra o rastreamento de 90° e 40° , respectivamente.

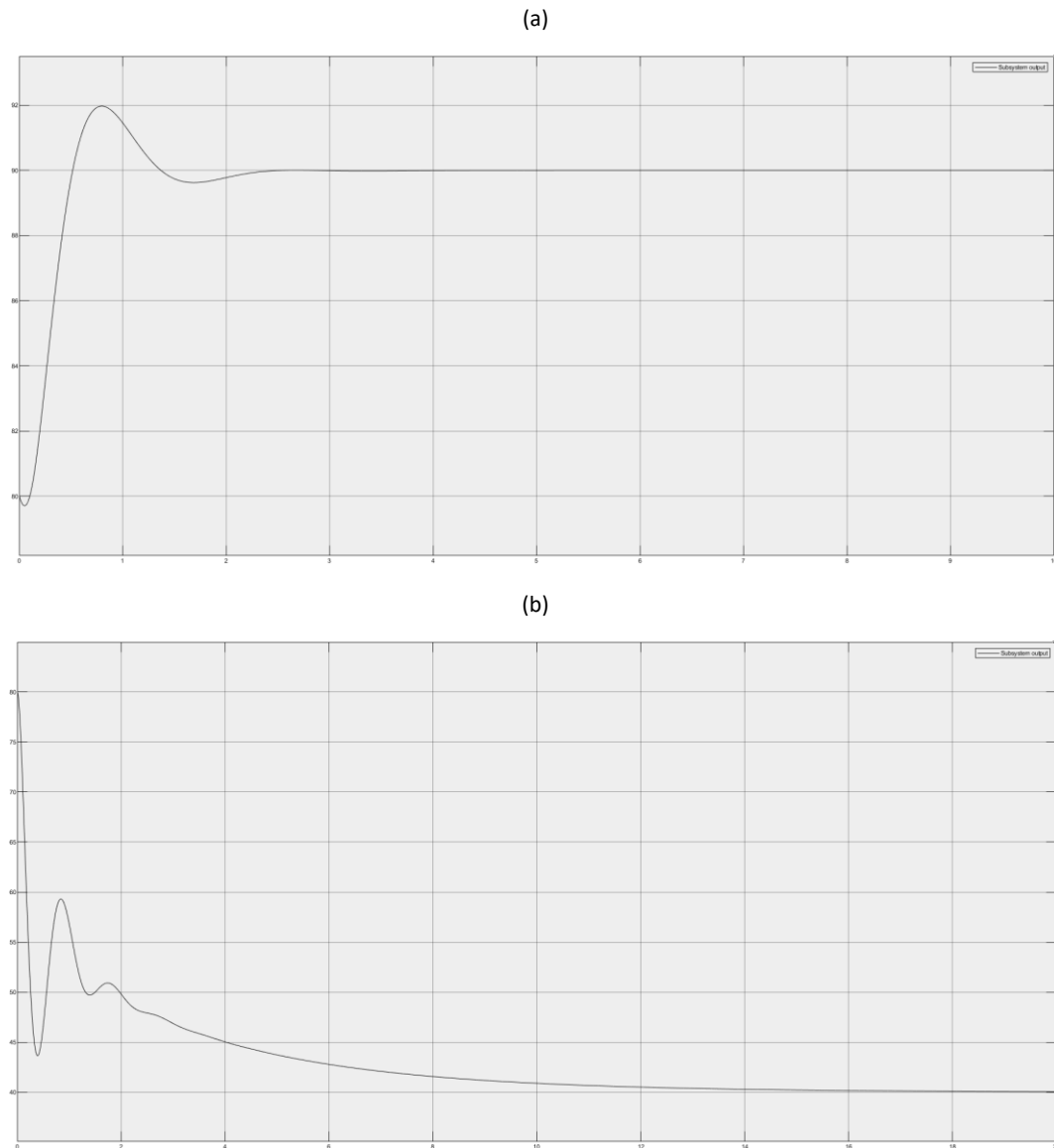


Figura 14 - (a) Desempenho do PID rastreamento 90° . (b) Desempenho do PID rastreamento 40° .

Em ambas as situações o efeito de wind-up não se mostrou presente, mais uma vez sem a necessidade da aplicação de uma técnica para evitá-lo.

9. Conclusões

O projeto do controlador utilizando o LGR, mesmo com o uso de ferramentas computacionais do Matlab, mostrou indispensável a aplicação dos conhecimentos teóricos obtidos ao longo da disciplina. A faixa de operação

deste controlador, mesmo que reduzida quando comparada à faixa do PID, foi satisfatória, pois poderia ser aumentada com a estratégia da troca de controladores projetados especificamente pra outras faixas, os quais podem ser projetados com o mesmo processo utilizado para este.

Já o controlador PID mostrou a motivação de sua ampla aplicação na indústria, com a maior faixa de operação observada e sua extrema simplicidade de ajuste, processo este rapidamente replicável para outros tipos de sistemas.

Apêndice A. Códigos e simulações do projeto

O repositório disponibilizado abaixo conta com todos os arquivos utilizados para o desenvolvimento e testes deste projeto, dentre eles o código que define as variáveis utilizadas nos simuladores, a simulação utilizada para testes do controlador do LGR e do controlador PID, além do arquivo para carregamento no sisotool, utilizado para alocação dos polos de malha fechada no LGR. Todos os códigos foram desenvolvidos para o Matlab R2021a.

<https://github.com/luis-cmenezes/CSL-projeto-aeropendulo>