UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

ESCOLA POLITÉCNICA

MAP3122 - MÉTODOS NUMÉRICOS E APLICAÇÕES

Felipe Luís Korbes - 13682893

João Felipe de Souza Melo - 13682913

Professor: Alexandre Megiorin Roma

São Paulo

10 de março de 2024

Resumo

O objetivo deste relatório é analisar o comportamento da solução da órbita da Terra, Lua e o Sol. Para atingir esse propósito, serão exploradas três técnicas numéricas: integração numérica utilizando o método de Runge-Kutta de 4 passos, Splines Cúbicos para conectar os pontos da solução discretizada, e a implementação do Algoritmo de Thomas para encontrar soluções de um sistema linear tridiagonal, necessária para a técnica dos Splines Cúbicos. Inicialmente, será realizada a modelagem matemática, acompanhada da explicação da motivação por trás da escolha do tema deste relatório. Em seguida, o problema em questão será discretizado e as técnicas numéricas serão detalhadamente explicadas. Por fim, será conduzida uma depuração no código computacional para assegurar que a implementação foi feita de maneira correta, apresentando limitações, detalhes e aplicações relevantes para as técnicas e o problema selecionado.

1 Introdução

A compreensão de corpos celestes é fundamental para o para o mundo moderno. Um fruto desse estudo é a estruturação do calendário ocidental, chamado calendário gregoriano [1] que tem o objetivo de alinhar o calendário com o movimento em torno do Sol e ajustar as datas para coincidir com os equinócios e solstícios. A compreensão de orbitas de planetas e satélites permitiu o ser humano a criar satélites artificiais o que elevou o impacto das telecomunicações em um nível global.

Um problema famoso relacionado a orbitas celestes é o problema dos 3 corpos [11] [4], onde há 3 corpos situados no espaço e cada corpo sofre a influência gravitacional dos outros dois corpos.

Apesar de não haver uma solução geral para esse problema, Karl F. Sundman [3] apresentou, em 1912, uma solução analítica na forma de uma série de potências, caracterizada por uma convergência extremamente lenta.

Um exemplo de problema dessa classe é a Terra, Lua e Sol. Onde o sol pode ser considerado um astro fixo no espaço por conta da quantidade imensa de massa se comparado com a terra e a lua.

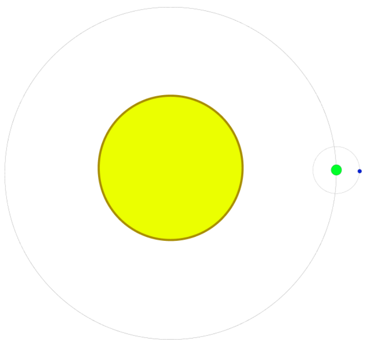

Figura 1: Problema dos 3 corpos terra-lua-sol fora de escala

É importante destacar que existem casos específicos do problema dos três corpos que possuem famílias de soluções conhecidas [6][9]. Contudo, por terem soluções exatas, esses casos também impõem restrições nas condições do sistema. O objetivo deste trabalho é utilizar um modelo genérico de três corpos, com as condições iniciais do sistema Terra, Lua e Sol, e aplicar métodos numéricos para aproximar suas órbitas.

Além disso, o problema dos três corpos pode ser generalizado para o caso de N corpos, ampliando significativamente sua aplicabilidade. Essa generalização é frequentemente empregada em diversas áreas, incluindo a detecção e monitoramento de asteroides [2], simulações em larga escala do universo, como a notável Simulação do Milênio [10], e outras aplicações pertinentes à astrofísica. Contudo, nesse trabalho, iremos nos restringir a apenas 3 corpos.

2 Modelagem Matemática

O problema dos três corpos, em sua forma mais básica, faz uso da equação da gravitação universal de Newton, que na sua forma mais simples, modelada como a força entre os corpos m_i e m_n, temos

$$\mathbf{F}_{gn} = -G\frac{m_i m_n}{r_{ni}^3}\mathbf{r}_{ni}. \tag{1}$$

Onde $r_{ni} = r_i - r_n$. O soma dos vetores $\mathbf{F}_g$, será a força gravitacional que age no corpo i, e pode ser escrita da forma

$$\mathbf{F}_g = -G\frac{m_i m_1}{r_{1i}^3}\mathbf{r}_{1i} - G\frac{m_i m_2}{r_{2i}^3}\mathbf{r}_{2i} - \cdots - G\frac{m_i m_n}{r_{ni}^3}\mathbf{r}_{ni}. \tag{2}$$

Para $i \neq j$.

Dessa maneira, a fórmula 2 pode ser escrita como o somatório

$$\mathbf{F}_g = Gm_i \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \frac{m_j}{r_{ji}^3}\mathbf{r}_{ni}. \tag{3}$$

Dividindo ambos os lados da equação por m_i, obtemos a aceleração, que se expressa em termos da derivada da posição obtemos a expressão

$$\ddot{\mathbf{r}}_{\mathbf{i}} = G \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \frac{m_j}{r_{ji}^3}\mathbf{r}_{ni}. \tag{4}$$

Especificamente, ao abordarmos o caso particular de três corpos, considerando a aceleração que cada corpo exerce sobre os outros presentes no sistema em cada novo instante, chegamos à tarefa de resolver um sistema de três equações diferenciais de segunda ordem, uma para cada corpo, conforme apresentado a seguir.

$$\begin{cases} \ddot{r}_1 &= -Gm_2\frac{(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)}{|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2|^3} - Gm_3\frac{(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_3)}{|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_3|^3} \\ \ddot{r}_2 &= -Gm_1\frac{(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1|^3} - Gm_3\frac{(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_3)}{|\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_3|^3} \\ \ddot{r}_3 &= -Gm_2\frac{(\mathbf{r}_3-\mathbf{r}_2)}{|\mathbf{r}_3-\mathbf{r}_2|^3} - Gm_1\frac{(\mathbf{r}_3-\mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r}_3-\mathbf{r}_1|^3} \end{cases} \tag{5}$$

É evidente que cada corpo que compõe nosso sistema introduz 6 variáveis de estado - 3 para a posição e 3 para a velocidade. Assim, em um sistema com 3 corpos, encontramos um total de 18 variáveis de estado.

3 Metodologia Numérica

3.1 Discretização do Problema

Para podermos aplicar alguma técnica de integração ao sistema 5, precisamos primeiro transforma-lo em um sistema de equações diferenciais de primeira ordem, chegando ao seguinte problema de Cauchy:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{r}}_\mathbf{1} = \mathbf{v_1} \\ \dot{\mathbf{v}}_\mathbf{1} = -Gm_2 \frac{(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3} - Gm_3 \frac{(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3)}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3|^3} \\ \\ \dot{\mathbf{r}}_\mathbf{2} = \mathbf{v_2} \\ \dot{\mathbf{v}}_\mathbf{2} = -Gm_1 \frac{(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3} - Gm_3 \frac{(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3)}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3|^3} \\ \\ \dot{\mathbf{r}}_\mathbf{3} = \mathbf{v_3} \\ \dot{\mathbf{v}}_\mathbf{3} = -Gm_2 \frac{(\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2)}{|\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2|^3} - Gm_1 \frac{(\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1|^3} \\ \\ r_1(t_0) = (x_{1;0}, y_{1;0}, z_{1;0}) \ ; \ v_1(t_0) = (v_{x_1;0}, v_{y_1;0}, v_{z_1;0}) \\ r_2(t_0) = (x_{2;0}, y_{2;0}, z_{2;0}) \ ; \ v_2(t_0) = (v_{x_2;0}, v_{y_2;0}, v_{z_2;0}) \\ r_3(t_0) = (x_{3;0}, y_{3;0}, z_{3;0}) \ ; \ v_3(t_0) = (v_{x_3;0}, v_{y_3;0}, v_{z_3;0}) \end{cases} \tag{6}$$

Dessa equação, $\mathbf{v_1}$, $\mathbf{v_2}$ e $\mathbf{v_3}$ representam os vetores velocidade de cada corpo, incluindo os três eixos cartesianos. Os valores $\dot{\mathbf{v}}_\mathbf{1}$, $\dot{\mathbf{v}}_\mathbf{2}$ e $\dot{\mathbf{v}}_\mathbf{3}$ indicam os vetores de aceleração de cada corpo. Além disso, G denota a constante da gravitação universal, m_1, m_2 e m_3 as massas individuais, $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$ e $\mathbf{r}_3$, não presentes no sistema acima, são os vetores de posição de cada corpo, e por fim, temos as condições iniciais para cada corpo do sistema. Todas as unidades estão no Sistema Internacional de medidas. Para o caso da Terra, Lua e Sol, as condições iniciais do sistema que serão usadas com um intervalo de tempo de 3600 segundos com duração de 1 ano são as seguintes:

- **Sol**:

  $\vec{r} = (0; 0; 0)$

  $\vec{v} = (0; 0; 0)$

  $m = 1,989 \times 10^{30}$

- **Terra**:

  $\vec{r} = (1,5 \times 10^{11};\ 0;\ 0)$

  $\vec{v} = (0;\ 3 \times 10^{5};\ 0)$

  $m = 5,972 \times 10^{24}$

- **Lua**:

$$\vec{r} = (1,5015 \times 10^{11};\ 0;\ 0)$$
$$\vec{v} = (0;\ 3 \times 10^{5};\ 0)$$
$$m = 7,3476 \times 10^{22}$$

A resolução desse sistema envolverá o cálculo das velocidades $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ e $\mathbf{v}_3$ e das posições $\mathbf{r_1}$, $\mathbf{r_2}$ e $\mathbf{r_3}$ dos corpos através do método de integração de Runge Kutta de 4 passos, onde nossa função $f(t, y)$ será a fórmula da lei de gravitação universal de Newton vista em 6.

3.2 Técnicas Numéricas

3.2.1 Método de Runge Kutta de 4 Passos

O método de Runge-Kutta de 4 passos proporciona uma integração numérica altamente precisa, com uma ordem de erro igual a 4 [7]. Isso significa que, à medida que diminuímos o passo de integração em nosso problema, o erro em relação à solução exata diminui com uma taxa de ordem 4. Este método é explicito, pois não depende de um valor futuro para o seu cálculo, e também é um método de passo único, pois não requer valores anteriores ao passo atual de integração. Para resolver o problema proposto na Equação 6, aplicaremos essa técnica de integração, expressa por:

$$\phi(t, r, h) = \frac{1}{6}(\kappa_1 + 2\kappa_2 + 2\kappa_3 + \kappa_4)\ \ e\ \begin{cases} \kappa_1 = f(t_k, y_k) \\ \kappa_2 = f(t_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2}\kappa_1) \\ \kappa_3 = f(t_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2}\kappa_2) \\ \kappa_4 = f(t_k + h, y_k + h\kappa_3) \end{cases} \tag{7}$$

Essa técnica será explicitamente utilizada em $\dot{\mathbf{v}}_\mathbf{i}$, que efetivamente retornará o valor de $\mathbf{v_i}$, através da seguinte fórmula:

$$\begin{cases} \mathbf{v_0} = \mathbf{v(t_0)} \\ \mathbf{v_{k+1}} = \mathbf{v_k} + h\phi(t, r, h) \end{cases} \tag{8}$$

Ao mesmo tempo em que é calculado o valor de $\mathbf{v_i}$, também será calculado o valor de $\dot{\mathbf{r}}_\mathbf{i}$ usando o método abaixo, resultando em $\mathbf{r}_i$.

$$\begin{cases} \mathbf{r_0} = \mathbf{r(t_0)} \\ \mathbf{r_{k+1}} = \mathbf{r_k} + h\mathbf{v_k} \end{cases} \tag{9}$$

Neste ponto, voltamos a 8 e 9, e o processo se repete novamente até $t = t_f$. Vale ressaltar que tanto 8 quanto 9 são calculados ao mesmo tempo.

3.2.2 Splines Cúbicos

O método dos Splines Cúbicos nos permite realizar a interpolação dos pontos discretos obtidos por meio do método de integração mencionado em 3.2.1. Essa técnica é particularmente interessante, pois permite a interpolação de uma quantidade arbitrária de pontos, evitando as oscilações nas bordas de um intervalo associadas ao fenômeno de Runge [8], que descreve oscilações nas extremidades de um intervalo quando utilizamos interpolação polinomial de ordens elevadas.

Para que um Spline Cúbico seja usado, precisamos que alguns critérios sejam satisfeitos:

1. $s_k(x_k) = y_k \ e \ s_k(x_{k+1}) = y_{k+1}$
2. $s_k(x_{k+1}) = s_{k+1}(x_{k+1})$
3. $s'_k(x_{k+1}) = s'_{k+1}(x_{k+1})$
4. $s''_k(x_{k+1}) = s''_{k+1}(x_{k+1})$

Resumindo, precisamos que cada polinômio passe por dois pontos consecutivos, duas equações consecutivas tem que coincidir no ponto que as conecta, a primeira derivada de duas equações consecutivas tem que ser iguais no ponto que as conecta, e a segunda derivada de duas equações consecutivas tem que ser iguais no ponto que as conecta.

O que resulta desse método são $n-1$ polinômios da forma:

$$s_k(x) = a_k + b_k(x - x_k) + c_k(x - x_k)^2 + d_k(x - x_k)^3. \tag{10}$$

Onde a_k, b_k, c_k e d_k são coeficientes a serem encontrados. Rescrevendo a fórmula acima na forma

$$h_{k-1}c_{k-1} + 2(h_{k-1} - h_k)c_k + h_k c_{k+1} = \frac{3}{h_k}(a_{k+1} - a_k) - \frac{3}{h_{k-1}}(a_k - a_{k-1}), \tag{11}$$

chegamos em $n-1$ equações onde os temos apenas os c_n coeficientes para encontrar, onde $h_k = x_{k+1} - x_k$, ou seja, a distância entre pontos consecutivos da nossa abcissa. Além disso, $a_k = y_k$, onde y_k são os valores das ordenadas para cada ponto. Assim, chegamos a um sistema de equações que sempre será possível e determinado, e que pode ser escrito na forma $AX = B$, onde, para um spline cúbico vinculado, com as condições de borda iguais a $s'_k(x_0) = f'(x_0)$ e $s'_k(x_n) = f'(x_n)$, onde f é a nossa equação de 6, temos

$$A = \begin{bmatrix} 2h_0 & h_0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ h_0 & 2(h_0+h_1) & h_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & h_1 & 2(h_1+h_2) & h_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & h_{n-2} & 2(h_n+h_{n-1} & h_{n-1}) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & h_{n-1} & 2h_{n-1} \end{bmatrix}, \quad (12)$$

$$X = \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_{n-1} \\ c_n \end{bmatrix}, \quad (13)$$

$$B = \begin{bmatrix} 3(a_1 - a0)/h_0 - 3f'(a) \\ 3(a_2 - a_1)/h_1 - 3(a_1 - a_0)/h_0 \\ 3(a_3 - a_2)/h_2 - 3(a_2 - a_1)/h_1 \\ \vdots \\ 3(a_n - a_{n-1})/h_{n-1} - 3(an - 1 - a_{n-2})/h_{n-2} \\ 3f'(b) - 3(a_n - a_{n-1})/h_{n-1} \end{bmatrix}. \quad (14)$$

Uma vez encontrados os coeficientes c_0 a c_n, conseguimos encontrar, b_k e d_k com as seguintes fórmulas

$$b_k = \frac{1}{h_k}(a_{k+1} - a_k) - \frac{h_k}{3}(2c_k + c_{k+1}) \quad (15)$$

e

$$d_k = \frac{c_{k+1-c_k}}{3h_k}. \quad (16)$$

Um algoritmo de implementação desse método se encontra abaixo:

Algorithm 1 Spline Cúbica Vinculada

ENTRADAS: $n : x_0, x_1, \ldots, x_n$; $a_0 = f(x_0)$, $a_1 = f(x_1), ..., a_n = f(x_n)$; $PO = f'(x_0)$; $UO = f'(x_n)$
procedure SplineCubicaVinculada(n, x_i, a_i, PO, UO)
    for $i = 0$ até $n-1$ **do**
        $h_i \leftarrow x_{i+1} - x_i$
    end for
    $\alpha_0 \leftarrow 3(a_1 - a_0)/h_0 - 3PO$
    $\alpha_n \leftarrow 3UO - 3(a_n - a_{n-1})/h_{n-1}$
    for $i = 1, 2, \ldots$ até $n-1$ **do**
        $\alpha_i \leftarrow \frac{3}{h_i}(a_{i+1} - a_i) - \frac{3}{h_{i-1}}(a_i - a_{i-1})$
    end for
    $l_0 \leftarrow 2h_0, \mu_0 \leftarrow 0.5, z_0 \leftarrow \alpha_0/l_0$
    for $i = 1, 2, \ldots$ até $n-1$ **do**
        $l_i \leftarrow 2(x_{i+1} - x_{i-1}) - h_{i-1}\mu_{i-1}$
        $\mu_i \leftarrow \frac{h_i}{l_i}, z_i \leftarrow \alpha_i - h_{i-1}z_{i-1}/l_i$
    end for
    $l_n \leftarrow h_{n-1}(2 - \mu_{n-1}), z_n \leftarrow \alpha_n - h_{n-1}z_{n-1}/l_n, c_n \leftarrow z_n$
    for $j = n-1, n-2, \ldots$ até 0 **do**
        $c_j \leftarrow z_j - \mu_j c_{j+1}$
        $b_j \leftarrow (a_{j+1} - a_j)/h_j - h_j(c_{j+1} + 2c_j)/3$
        $d_j \leftarrow (c_{j+1} - c_j)/3h_j$
    end for
    SAÍDA (a_j, b_j, c_j, d_j) para $j = 0, 1, \ldots, n-1$
    PARE.
end procedure

3.2.3 Método da Resolução de Matriz Tridiagonal

A abordagem para a resolução de uma matriz tridiagonal apresenta um algoritmo altamente eficiente na solução de sistemas lineares, devido à estrutura específica dessa matriz [5]. Uma matriz tridiagonal é caracterizada por ter valores na diagonal principal e nas duas diagonais adjacentes, assemelhando-se ao sistema $AX = B$ discutido na Seção 3.2.2.

O processo de resolução de uma matriz tridiagonal consiste fatorar a matriz principal A em duas matrizes L e U, conforme mostrado abaixo.

$$L = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & l_{n-1,n-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & l_{n,n-1} & l_{nn} \end{bmatrix} \tag{17}$$

$$U = \begin{bmatrix} 1 & u_{12} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & u_{23} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & u_{n-1,n} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{18}$$

A obtenção das matrizes 17 e 18 é realizada através das seguintes operações:

$$a_{11} = l_{11}; \tag{19}$$

$$a_{i,i-1} = l_{i,i-1}, \quad \text{para } i = 2, 3, \dots, n; \tag{20}$$

$$a_{ii} = l_{i,i-1}u_{i-1,i} + l_{ii}, \quad \text{para } i = 2, 3, \dots, n; \tag{21}$$

$$a_{i,i+1} = l_{ii}u_{i,i+1}, \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, n-1. \tag{22}$$

Aplicando as operações 19, 20, 21 e 22 na matriz A (12), chegamos aos sistemas $Lz = B$ e $Ux = z$, onde B é a matriz 14 e x são as soluções do nosso sistema. A seguir, são apresentados os dois sistemas em questão.

$$\begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & l_{n-1,n-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & l_{n,n-1} & l_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_{n-1} \\ z_n \end{bmatrix} = B \tag{23}$$

resolvendo o sistema para z_n com $n = 0, 1, 2, \dots, n$, e colocando-o no sistema $Ux = z$, temos

$$\begin{bmatrix} 1 & u_{12} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & u_{23} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & u_{n-1,n} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_{n-1} \\ z_n \end{bmatrix} \tag{24}$$

Onde x_n para $n = 0, 1, 2, \dots, n$ são as soluções do nosso sistema.

Uma implementação desse método se encontra no algoritmo abaixo.

Algorithm 2 Algoritmo para Resolver o Sistema $AX = B$

ENTRADAS: A dimensão n; as entradas de A.
procedure ResolveSistemaLinear(n, A)
    $l_{11} = a_{11}$;
    $u_{12} = a_{12}/l_{11}$;
    $z_1 = a_{1,n+1}/l_{11}$;
    for $i = 2, 3, \dots$ to $n - 1$ **do**
        $l_{i,i-1} = a_{i,i-1}$;
        $l_{ii} = a_{ii} - l_{i,i-1}u_{i-1,i}$;
        $u_{i,i+1} = a_{i,i+1}/l_{ii}$;
        $z_i = a_{i,n+1} - l_{i,i-1}z_{i-1}/l_{ii}$.
    end for
    $l_{n,n-1} = a_{n,n-1}$;
    $l_{nn} = a_{nn} - l_{n,n-1}u_{n-1,n}$;
    $z_n = (a_{n,n+1} - l_{n,n-1}z_{n-1})/l_{nn}$;
    $x_n = z_n$;
    for $i = n - 1, \dots$ até 1 **do**
        $x_i = z_i - u_{i,i+1}x_{i+1}$.
    end for
    SAÍDAS: $(x_1, \dots, x_n)$;
    PARE
end procedure

Referências

[1] Calendário gregoriano: o que é, como surgiu e características. `https://www.significados.com.br/calendario-gregoriano/`. Acessado em 29 de fevereiro de 2024.

[2] The spaceguard survey: Report of the nasa international near-earth-object detection workshop. Tech. Report 19920025001, NASA, January 1992.

[3] Barrow-Green, J. The dramatic episode of sundman. *Historia Mathematica 37* (2010), 164–203.

[4] Bate, R. R., Mueller, D. D., and White, J. E. *Fundamentals of Astrodynamics*. 1971.

[5] Burden, R. L., and Faires, J. D. *Numerical Analysis*, ninth ed. Brooks/Cole, Cengage Learning, 2011.

[6] Murray, C. D., and Dermott, S. F. *Solar System Dynamics*. Cambridge University Press, 2000.

[7] Roma, A. M., da Silva Bevilacqua, J., and Nós, R. L. Métodos para a solução numérica de equações diferenciais ordinárias a valores iniciais, December 27 2023. VERSÃO DE 27 de Dezembro de 2023.

[8] Runge, C. Über empirische funktionen und die interpolation zwischen äquidistanten ordinaten. *Zeitschrift für Mathematik und Physik 46* (1901), 224–243.

[9] Szebehely, V., and Peters, C. F. Complete solution of a general problem of three bodies. *Astronomical Journal 72* (September 1967), 876.

[10] The Virgo Consortium. The Millennium Simulation: A Universe of Galaxies. `https://wwwmpa.mpa-garching.mpg.de/millennium/`, 2006.

[11] Wikipedia contributors. N-body problem.