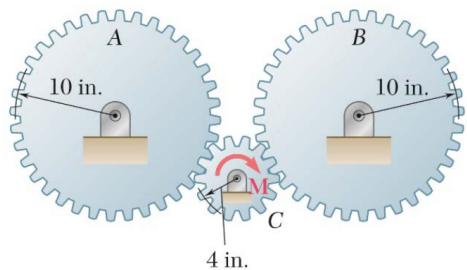


# Mecánica Vectorial (MECG-1001): Trabajo Autónomo 05

**Semestre:** 2017-2018 Término II      **Instructor:** Luis I. Reyes Castro      **Paralelo:** 09

**Problema 5.1. [4 Puntos]** Cada uno de los engranes A y B pesa 20 lbs y tiene un radio de giro de 7.5 in; el engrane C pesa 5 lb y tiene un radio de giro de 3 in. Si un par M de magnitud constante de 50 lb-in se aplica al engrane C, determine (i) la aceleración angular del engrane A, (ii) la fuerza tangencial que ejerce el engrane C sobre el engrane A.

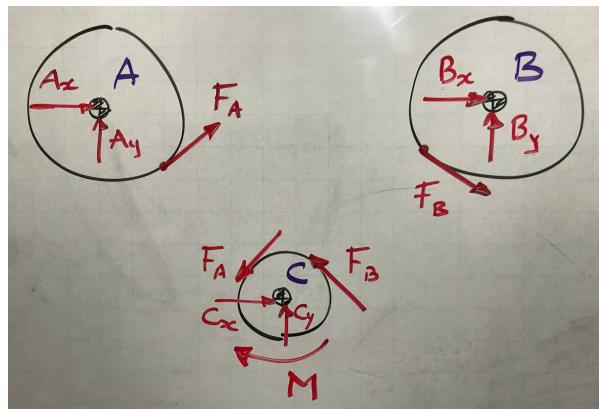


*Solución:* Primero calculamos los momentos de inercia:

$$I_{AB} = (20/32.2)(7.5/12)^2 = 0.2426 \text{ slug - ft}^2$$

$$I_C = (5/32.2)(3/12)^2 = 0.0097 \text{ slug - ft}^2$$

Luego bosquejamos los diagramas de cuerpo libre (DCL) de los engranes, tal como se muestra en la siguiente fotografía.



Tomando las sumatorias de torques externos sobre cada engrane, obtenemos:

$$+ r_{AB} F_A = I_{AB} \alpha_A$$

$$+ r_{AB} F_B = I_{AB} \alpha_B$$

$$+ r_C (F_A + F_B) - M = I_C \alpha_C$$

Ahora tomamos en cuenta la condición de rodadura:

$$r_{AB} \alpha_A = -r_C \alpha_C \quad r_{AB} \alpha_B = -r_C \alpha_C$$

Resolviendo para  $F_A$  y  $F_B$  en las sumatorias de torques externos, obtenemos:

$$F_A = F_B = -\frac{I_{AB} r_C \alpha_C}{r_{AB}^2}$$

Consecuentemente, la sumatoria de torques en el engrane  $C$  resulta en:

$$-2 I_{AB} \left( \frac{r_C}{r_{AB}} \right)^2 \alpha_C - M = I_C \alpha_C \implies \alpha_C = -572.53 \hat{\mathbf{k}} \text{ rad/s}^2$$

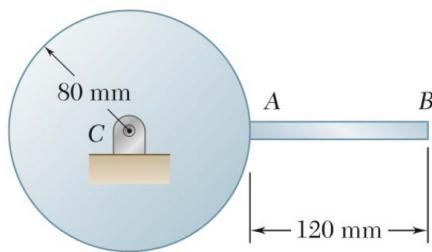
$$\implies \alpha_A = +229.01 \hat{\mathbf{k}} \text{ rad/s}^2$$

Finalmente, la fuerza tangencial deseada es:

$$F_A = F_B = 66.67 \text{ lbs}$$

■

**Problema 5.2. [4 Puntos]** Una barra ligera de 1.5 kg está soldada a un disco uniforme de 5 kg en la forma que se muestra. El ensamble oscila libremente alrededor de  $C$  en un plano vertical. Si en la posición indicada el ensamble es liberado con una velocidad angular de 10 rad/s en dirección de las manecillas del reloj, determine (i) la aceleración angular del ensamble, (ii) las componentes de la reacción en  $C$ .



*Solución:* Primero localizamos el centro de masa del ensamble. Para esto ubicamos el origen del sistema de referencia en  $C$  y definimos al centro de masa como  $\mathbf{r}_G = r_G \hat{\mathbf{i}}$ . Entonces:

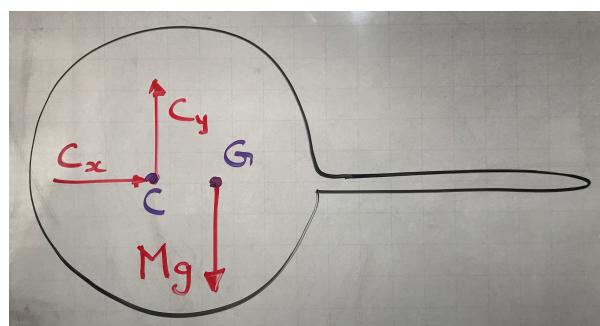
$$r_G = \frac{(5)(0) + (1.5)(0.140)}{5 + 1.5} = 0.0323 \text{ m} \implies \mathbf{r}_G = 0.0323 \hat{\mathbf{i}} \text{ m}$$

Después calculamos su momento de inercia utilizando el Teorema de Steiner:

$$I = (1/2)(5)(0.080)^2 + (5)(0.0323)^2 + (1/12)(1.5)(0.120)^2 + (1.5)(0.140 - 0.0323)^2$$

$$= 0.0404 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

Luego bosquejamos el diagrama de cuerpo libre (DCL) del ensamble, tal como se muestra en la siguiente fotografía.



Entonces, las sumatorias de fuerzas y torques externos son:

$$M(\mathbf{a}_G)_x = C_x$$

---


$$\begin{aligned} M(\mathbf{a}_G)_y &= C_y - Mg \\ I\alpha &= -r_G C_y \end{aligned}$$

Ahora debemos relacionar  $\mathbf{a}_G$  con  $\alpha$  utilizando restricciones cinemáticas. Recordando que la velocidad angular del ensamblaje es  $\boldsymbol{\omega} = -10 \hat{\mathbf{k}}$  rad/s, vemos que:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_G &= \mathbf{a}_C + \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}_{CG} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{CG}) \\ &= \mathbf{0} + \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}_G - \omega^2 \mathbf{r}_G \\ &= -100 r_G \hat{\mathbf{i}} + r_G \alpha \hat{\mathbf{j}} \text{ ft/s}^2 \end{aligned}$$

En vista de que  $(\mathbf{a}_G)_x = -100 r_G$ , de la sumatoria de fuerzas extenas en  $x$  obtenemos:

$$C_x = -100 r_G M = -21.0 \text{ N}$$

Puesto que  $(\mathbf{a}_G)_y = +r_G \alpha$ , la sumatoria de fuerzas extenas en  $y$ , junto con la sumatoria de torques externos, nos proveen de un sistema de dos ecuaciones en dos incógnitas:

$$\begin{aligned} M r_G \alpha &= C_y - Mg \\ I\alpha &= -r_G C_y \end{aligned}$$

Resolviendo dicho sistema, obtenemos  $\alpha = -43.65 \text{ rad/s}^2$  y  $C_y = +54.6 \text{ N}$ . En conclusión:

$$\boldsymbol{\alpha} = -43.65 \hat{\mathbf{k}} \text{ rad/s}^2 \quad \mathbf{C} = (-21.0, +54.6) \text{ N}$$