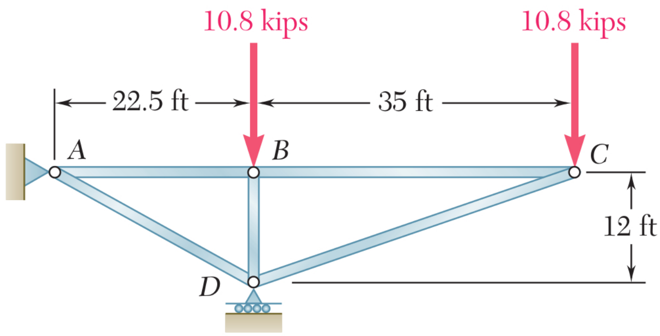
Mecánica Vectorial (MECG-1001): Lección 01

Semestre: 2017-2018 Término II **Instructor:** Luis I. Reyes Castro **Paralelo:** 09

Problema 1.1. Para la armadura mostrada en la siguiente figura:



a) 3 Puntos: Encuentre las reacciones en A y D.

Solución:

$$\sum F_x : \ A_x = 0 \text{ kips}$$

$$\sum F_y : \ A_y + D_y = 21.6$$

$$\sum M_A : \ +22.5 \cdot (D_y - 10.8) - 57.5 \cdot (10.8) = 0$$

$$\implies D_y = +38.4 \text{ kips}, \ A_y = -16.8 \text{ kips}$$

b) 4 Puntos: Escriba las ocho ecuaciones asociadas con los cuatro nodos de la armadura, denotando compresión con signo positivo y tensión con signo negativo.

Solución: Primero definimos:

$$\theta_{AD} = \arctan(12/22.5) = 28.07^\circ \qquad \theta_{CD} = \arctan(12/35) = 18.92^\circ$$

Nodo A:

$$\sum F_x : \ -F_{AB} - F_{AD}\cos(\theta_{AD}) = 0$$

$$\sum F_y : \ +F_{AD}\sin(\theta_{AD}) = +16.8$$

Nodo B:

$$\sum F_x : \ +F_{AB} - F_{BC} = 0$$

$$\sum F_y : \ +F_{BD} = +10.8$$

Nodo C:

$$\sum F_x : \ +F_{BC} + F_{CD}\cos(\theta_{CD}) = 0$$

$$\sum F_y : \ +F_{CD}\sin(\theta_{CD}) = +10.8$$

Nodo D:

$$\sum F_x : \quad + F_{AD} \cos(\theta_{AD}) - F_{CD} \cos(\theta_{CD}) \ = \ 0$$
$$\sum F_y : \quad - F_{AD} \sin(\theta_{AD}) - F_{BD} - F_{CD} \sin(\theta_{CD}) \ = \ -38.4$$

c) 2 Puntos: Calcule la fuerza interna en cada eslabón.

Solución: Primero, del Nodo A obtenemos:

$$F_{AD} \ = \ +35.7 \text{ kips} \qquad \Longrightarrow \qquad F_{AB} \ = \ -31.5 \text{ kips}$$

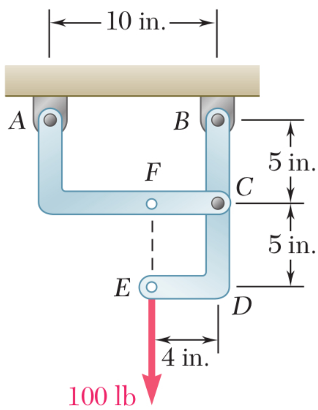
Luego, del Nodo B obtenemos:

$$F_{BC} \ = \ -31.5 \text{ kips} \qquad\qquad F_{BD} \ = \ +10.8 \text{ kips}$$

Finalmente, del Nodo C obtenemos:

$$F_{CD} \ = \ +33.3 \text{ kips}$$

Problema 1.2. Para el armazón mostrado en la siguiente figura:



a) 2 Puntos: Bosqueje los diagramas de cuerpo libre correspondientes.

Solución:

- Cuerpo AFC:

$$\sum F_x : \ A_x - C_x \ = \ 0$$
$$\sum F_y : \ A_y - C_y \ = \ 0$$
$$\sum M_A : \ -5 \cdot C_x - 10 \cdot C_y \ = 0$$

- Cuerpo $BCDE$:

$$\sum F_x : \ B_x + C_x \ = \ 0$$
$$\sum F_y : \ B_y + C_y \ = \ 100$$
$$\sum M_B : \ +5 \cdot C_x - 4 \cdot 100 \ = 0$$

b) 2 Puntos: Calcule la fuerza que la barra AFC ejerce sobre la barra $BCDE$ en C.

Solución: Resolviendo en el cuerpo $BCDE$ la sumatoria de momentos en B para C_x obtenemos:

$$C_x = +80 \text{ lb}$$

Finalmente, resolviendo en el cuerpo AFC la sumatoria de momentos en A para C_y obtenemos:

$$C_y = -40 \text{ lb}$$

c) 2 Puntos: Calcule las reacciones en A y B.

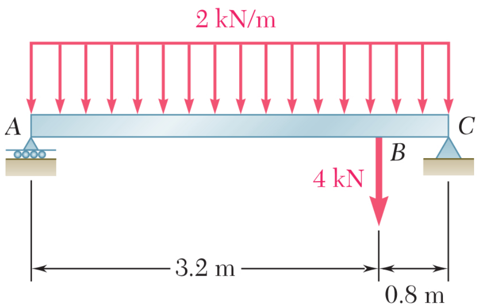
Solución: De las sumatorias de fuerzas en el cuerpo AFC obtenemos:

$$A_x = C_x = +80 \text{ lb}, \qquad A_y = C_y = -40 \text{ lb}$$

Luego, de las sumatorias de fuerzas en el cuerpo $BCDE$ obtenemos:

$$B_x = -C_x = -80 \text{ lb}, \qquad B_y = 100 - C_y = +140 \text{ lb}$$

Problema 1.3. 4 Puntos: Para la viga mostrada en la siguiente figura encuentre la fuerza cortante $V(x)$ y el momento flector $M(x)$ como función de la posición $x \in [0, 4]$.



Solución: Empezamos con las reacciones:

$$\sum F_x : \; C_x = 0 \text{ kN}$$

$$\sum F_y : \; A_y + C_y = 12$$

$$\sum M_A : \; -(1/2)(2)(4^2) - (3.2)(4) + 4\,C_y = 0$$

$$\Longrightarrow \; C_y = +7.2 \text{ kN}, \qquad A_y = +4.8 \text{ kN}$$

Para la sección donde $x \in [0, 3.2]$:

$$\sum F_x : \; F(x) = 0 \text{ kN}$$

$$\sum F_y : \; +4.8 - 2\,x - V(x) = 0 \quad \Longrightarrow \; V(x) = -2\,x + 4.8 \text{ kN}$$

$$\Longrightarrow \; M(x) = M(0) + \int_0^x (-2\,x + 4.8)\, dx = -x^2 + 4.8\,x \text{ kN-m}$$

$$\Longrightarrow \; M(3.2) = +5.12 \text{ kN-m}$$

Para la sección donde $x \in [3.2, 4]$:

$$\sum F_x : \; F(x) \;=\; 0 \text{ kN}$$

$$\sum F_y : \; +4.8 - 2x - 4 - V(x) \;=\; 0 \quad \Longrightarrow \; V(x) \;=\; -2x + 0.8 \text{ kN}$$

$$\Longrightarrow \; M(x) \;=\; M(3.2) + \int_{3.2}^{x} (-2x + 0.8)\, dx$$

$$= \; +5.12 - x^2 + 0.8x + 7.68 \;=\; -x^2 + 0.8x + 12.8 \text{ kN-m}$$

En conclusión:

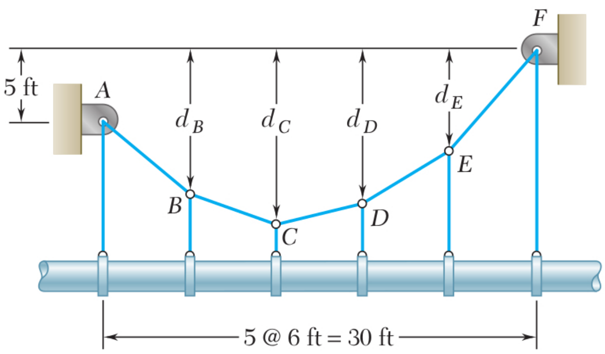
- Fuerza cortante:

$$V(x) \;=\; \begin{cases} -2x + 4.8 \text{ kN}, & \text{para todo } x \in [0, 3.2] \\ -2x + 0.8 \text{ kN}, & \text{para todo } x \in [3.2, 4] \end{cases}$$

- Momento flector:

$$M(x) \;=\; \begin{cases} -x^2 + 4.8x \text{ kN-m}, & \text{para todo } x \in [0, 3.2] \\ -x^2 + 0.8x + 12.8 \text{ kN-m}, & \text{para todo } x \in [3.2, 4] \end{cases}$$

Problema 1.4. El oleoducto mostrado en la siguiente figura está soportado cada 6 ft mediante suspensores verticales fijos a un cable como se muestra en la figura. Debido al peso combinado del ducto y su contenido, cada suspensor experimenta una tensión de 400 lb. Si se sabe que $d_C = 12$ ft, determine:



a) 3 Puntos: La altura d_B. *Nota:* Por favor ignore las cargas en A y F.

Solución: Primero consideramos el cable completo y sumamos momentos:

$$\sum M_F : \; +(6 + 12 + 18 + 24)(400) + 5A_x - 30A_y \;=\; 0$$

$$\Longrightarrow \; A_x - 6A_y + 4800 \;=\; 0 \;\Longrightarrow\; A_x \;=\; 6A_y - 4800 \;=\; 0$$

Luego consideramos la sección ABC y sumamos momentos:

$$\sum M_C : \; +6(400) - 7A_x - 12A_y \;=\; 0$$

$$\Longrightarrow \; 7A_x + 12A_y - 2400 \;=\; 0$$

$$\Longrightarrow A_x = -800 \text{ lb}, \quad A_y = +666.7 \text{ lb}$$

Finalmente, consideramos la sección AB y sumamos momentos:

$$\sum M_B : \; +(d_B - 5)(800) - (6)(666.7) = 0$$
$$\Longrightarrow d_B = 10.0 \text{ ft}$$

b) 2 Puntos: Las alturas d_D y d_E.

Solución: Considerando la sección $ABCD$ tenemos:

$$\sum M_D : \; +(6+12)(400) + (d_D - 5)(800) - (18)(667.7) = 0$$
$$\Longrightarrow d_D = 11.0 \text{ ft}$$

Luego, considerando la sección $ABCDE$ tenemos:

$$\sum M_E : \; +(6+12+18)(400) + (d_E - 5)(800) - (24)(667.7) = 0$$
$$\Longrightarrow d_E = 7.0 \text{ ft}$$

c) 2 Puntos: La tensión máxima en el cable.

Solución: Nótese que:

- En el segmento AB el cable desciende de 5 ft a 10 ft, *i.e.,* 5 ft.
- En el segmento BC el cable desciende de 10 ft a 12 ft, *i.e.,* 2 ft.
- En el segmento CD el cable asciende de 12 ft a 11 ft, *i.e.,* 1 ft.
- En el segmento DE el cable asciende de 11 ft a 7 ft, *i.e.,* 4 ft.
- En el segmento EF el cable asciende de 7 ft a 0 ft, *i.e.,* 7 ft.

Consecuentemente, la máxima tensión en la cuerda se encuentra en el segmento EF y es igual en magnitud a la reacción en F. De esta manera, sumando fuerzas en todo el cable obtenemos:

$$\sum F_x : \; -800 + F_x = 0 \quad \Longrightarrow F_x = +800 \text{ lb}$$
$$\sum F_y : \; +666.7 + F_y = 1600 \quad \Longrightarrow F_y = +933.3 \text{ lb}$$
$$\Longrightarrow T_{max} = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = 1229.25 \text{ lb}$$