

## Sistemas de Control (EYAG-1005): Evaluación 02

Semestre: 2017-2018 Término I

Instructor: Luis Reyes, Jonathan León

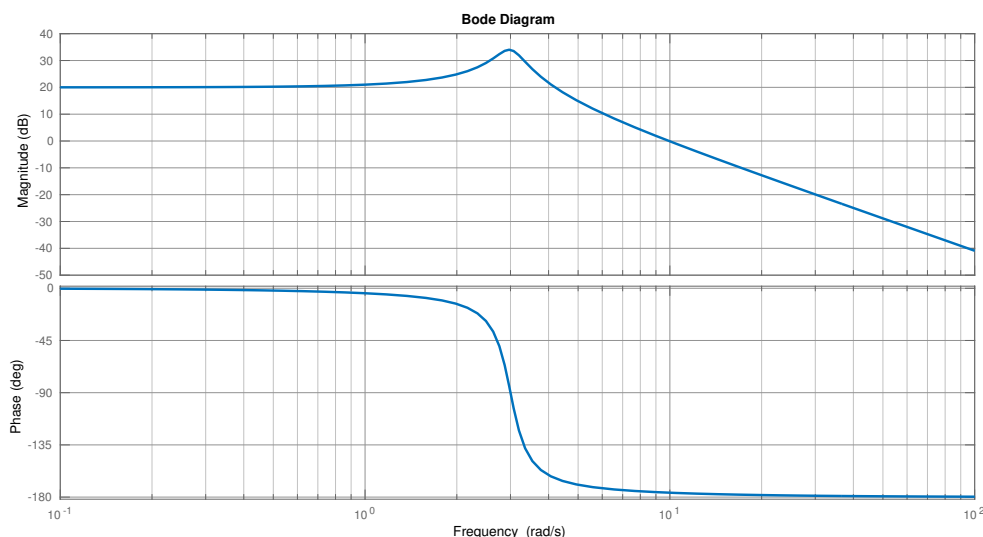
### COMPROMISO DE HONOR

Yo, \_\_\_\_\_ al firmar este compromiso, reconozco que la presente evaluación está diseñada para ser resuelta de manera individual, que puedo usar un lápiz o pluma y una calculadora científica, que solo puedo comunicarme con la persona responsable de la recepción de la evaluación, y que cualquier instrumento de comunicación que hubiere traído debo apagarlo. También estoy conciente que no debo consultar libros, notas, ni materiales didácticos adicionales a los que el instructor entregue durante la evaluación o autorice a utilizar. Finalmente, me comprometo a desarrollar y presentar mis respuestas de manera clara y ordenada.

Firmo al pie del presente compromiso como constancia de haberlo leído y aceptado.

Firma: \_\_\_\_\_ Número de matrícula: \_\_\_\_\_

**Problema 2.1.** El siguiente Diagrama de Bode muestra la respuesta de la frecuencia de un sistema de segundo orden sub-amortiguado.



Complete las siguientes actividades:

- **[2 Puntos]** Determine la veracidad o falsedad del siguiente enunciado: El margen de ganancia es no mayor a 15 decibeles, *i.e.*,  $G_M \leq 15$  dB.  
*Solución:* Falso, el margen de ganancia no existe porque no existe ninguna frecuencia  $\omega$  para la cual  $\phi(\omega) = -180^\circ$ .
- **[2 Puntos]** Determine la veracidad o falsedad del siguiente enunciado: El margen de fase es no menor de  $40^\circ$ , *i.e.*,  $\phi_M \geq 40^\circ$  dB.  
*Solución:* Falso, pues es claro de la figura que cuando  $M(\omega) = 0$  dB es el caso que  $\phi(\omega) \leq -160^\circ$ , lo que implica que  $\phi_M \leq 20^\circ$ .
- **[2 Puntos]** Estime el ancho de banda del sistema.  
*Solución:* Dado que la asíntota de baja frecuencia tiene un valor de 20 dB, para estimar el ancho de banda buscamos la frecuencia  $\omega_{BW}$  para la cual  $M(\omega_{BW}) = 20 \text{ dB} - 3 \text{ dB} = 17 \text{ dB}$ . En particular,  $\omega_{BW} \approx 4.5 \text{ rad/s}$ .
- **[4 Puntos]** Encuentre la función de transferencia del sistema.

---

*Solución:* Dado que la asíntota de baja frecuencia tiene un valor de 20 dB, y que la máxima magnitud es de 35 dB, reconocemos que la magnitud del pico es de unos 15 dB, *i.e.*:

$$M_p = 15 \text{ dB} = 5.62$$

Adicionalmente:

$$M_p = \frac{1}{2\zeta \sqrt{1-\zeta^2}} \implies 4\zeta^2(1-\zeta^2) = M_p^{-1} \implies \zeta \approx 0.089$$

Además, reconociendo que la frecuencia pico  $\omega_p \approx 3 \text{ rad/s}$  tenemos que:

$$\omega_p = \omega_n \sqrt{1-2\zeta^2} \implies \omega_n = \frac{\omega_p}{\sqrt{1-2\zeta^2}} = 3.012 \text{ rad/s}$$

Finalmente, si expresamos la función de transferencia como

$$G(s) = \frac{K}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

entonces para la asíntota de baja frecuencia tenemos:

$$20 \text{ dB} = 10 = \frac{K}{\omega_n^2} \implies K = 91.44$$

En conclusión:

$$G(s) = \frac{91.44}{s^2 + 0.536s + 9.144}$$

**Problema 2.2. [10 Puntos]** Considere el siguiente compensador de atraso de fase:

$$G_C(s) = K \frac{(s+z)}{(s+p)},$$

Encuentre valores para los parámetros  $K$ ,  $z$  y  $p$  de tal manera que su asíntota de baja frecuencia sea de +30 dB, su asíntota de alta frecuencia sea de -10 dB, y su fase sea de  $-45^\circ$  cuando su frecuencia es de 10 rad/s.

*Sugerencia:* Para escribir la ecuación asociada con el último requerimiento recuerde que cuando la fase es de  $-45^\circ$  la parte real de  $G(j\omega)$  es igual al negativo de su parte imaginaria.

*Solución:* Para la asíntota de baja frecuencia tenemos:

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} G(j\omega) = \frac{Kz}{p} = 30 \text{ dB} = 31.6 \implies Kz = 31.6p$$

Con respecto a la asíntota de alta frecuencia, tenemos:

$$\begin{aligned} G(j\omega) &= K \frac{z+j\omega}{p+j\omega} \cdot \frac{(p-j\omega)}{(p-j\omega)} = K \frac{(zp+\omega^2) + j\omega(p-z)}{p^2+\omega^2} \\ \implies \lim_{\omega \rightarrow \infty} G(j\omega) &= \lim_{\omega \rightarrow \infty} K \frac{(zp+\omega^2) + j\omega(p-z)}{p^2+\omega^2} \cdot \frac{(1/\omega^2)}{(1/\omega^2)} = -10 \text{ dB} = 0.316 \\ \implies K &= 0.316 \end{aligned}$$

Adicionalmente, para la condición de fase, obtenemos:

$$G(10j) = K \frac{(zp + 100) + 10j(p - z)}{p^2 + 100} \implies zp + 100 = 10(z - p)$$

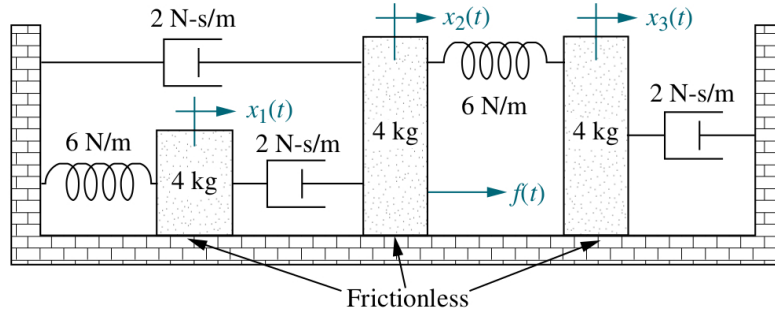
Finalmente, combinando las tres ecuaciones anteriores vemos que:

$$Kz = 31.6p \implies z = 100p \implies p = 0.0102$$

En conclusión, el compensador debe ser de la forma:

$$G_C(s) = 0.316 \frac{(s + 1.02)}{(s + 0.0102)}$$

**Problema 2.3. [10 Puntos]** Construya un modelo de espacio de estados que represente al mecanismo mostrado en la figura de abajo suponiendo que las salidas son las posiciones de los bloques de masa.



*Solución:* Las ecuaciones de movimiento de los bloques de masa son:

$$\begin{aligned} 4\ddot{x}_1(t) &= -6x_1(t) + 2(\dot{x}_2(t) - \dot{x}_1(t)) \\ 4\ddot{x}_2(t) &= f(t) - 2\dot{x}_2(t) - 2(\dot{x}_2(t) - \dot{x}_1(t)) + 6(x_3(t) - x_2(t)) \\ 4\ddot{x}_3(t) &= -6(x_3(t) - x_2(t)) - 2\dot{x}_3(t) \end{aligned}$$

Equivalentemente:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1(t) &= -(3/2)x_1(t) - (1/2)\dot{x}_1(t) + (1/2)\dot{x}_2(t) \\ \ddot{x}_2(t) &= +(1/2)\dot{x}_1(t) - (3/2)x_2(t) - \dot{x}_2(t) + (3/2)x_3(t) + (1/4)f(t) \\ \ddot{x}_3(t) &= +(3/2)x_2(t) - (3/2)x_3(t) - (1/2)\dot{x}_3(t) \end{aligned}$$

Ahora elegimos la estructura del vector de estado, del vector de entrada y del vector de salida. En nuestro caso:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= (x_1(t), \dot{x}_1(t), x_2(t), \dot{x}_2(t), x_3(t), \dot{x}_3(t)) \\ \mathbf{u}(t) &= f(t) \\ \mathbf{y}(t) &= (x_1(t), x_2(t), x_3(t)) \end{aligned}$$

Entonces nuestras ecuaciones de estado son:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -(3/2) & -(1/2) & 0 & +(1/2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & +(1/2) & -(3/2) & -1 & +(3/2) & +(1/4) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & +(3/2) & 0 & -(3/2) & -(1/2) \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ +(1/4) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \mathbf{u}(t)$$

---

Y nuestras ecuaciones de salida son:

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} \mathbf{u}(t)$$

**Problema 2.4. [10 Puntos]** Para el siguiente modelo de espacio de estados encuentre la función de transferencia equivalente.

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} -1 & +4 \\ -4 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} +2 \\ -1 \end{bmatrix} \mathbf{u}(t)$$

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t)$$

*Solución:*

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \frac{1}{s^2 + 2s + 17} \begin{bmatrix} s+1 & +4 \\ -4 & s+1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} = \frac{1}{s^2 + 2s + 17} \begin{bmatrix} 2s-2 \\ -s-9 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow G(s) = \mathbf{C} (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} = \frac{s-11}{s^2 + 2s + 17}$$