Modelos Estocásticos (INDG-1008): Examen 02

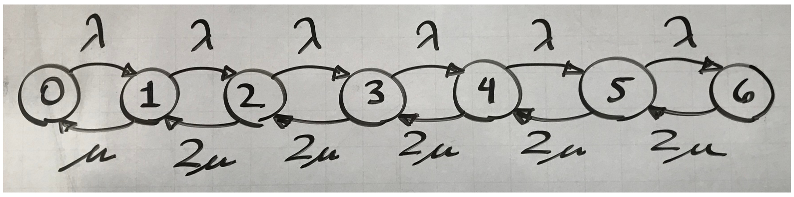
Semestre: 2017-2018 Término II **Instructor:** Luis I. Reyes Castro

Problema 2.1. La sala de emergencias de un pequeño hospital cuenta con dos doctores, quienes cuentan con sus propios consultorios y quirófanos, además de cuatro camillas de espera. Los pacientes arriban a una tasa promedio de 1.8 por hora y son atendidos por orden de arribo. Todo paciente que arriba cuando todas las camillas de espera están ocupadas es enviado directamente a otro hospital. Los tiempos que necesitan los doctores para atender a los pacientes están exponencialmente distribuidos, con un promedio de 40 minutos. Después de ser atendido, cada paciente es referido a otra área de especialidad del hospital o dado de alta.

Con esto en mente, complete las siguientes actividades:

a) 1 Punto: Indique, utilizando notación de Kendall, qué tipo de sistema de cola es este, y bosqueje la Cadena de Markov en Tiempo Continuo correspondiente.

Solución: Este sistema de colas es del tipo M/M/2/6, y la cadena correspondiente se muestra en la siguiente fotografía.



b) 4 Puntos: Encuentre la distribución estacionaria del sistema.

Solución: Dado que la tasa de arribo es $\lambda = 1.8$ pacientes por hora y la tasa de servicio por doctor es de $\mu = 1.5$ pacientes por hora, si definimos $\rho \triangleq \lambda/2\mu = 0.6$ como de costumbre las ecuaciones de balance son:

$$
\begin{aligned}
&E_0 : \ \lambda\,\pi_0 \ = \ \mu\,\pi_1 \quad \Longrightarrow \quad \pi_1 \ = \ 2\,\rho\,\pi_0 \\
&E_1 : \ (\lambda+\mu)\,\pi_1 \ = \ \lambda\,\pi_0 + 2\,\mu\,\pi_2 \quad \Longrightarrow \quad \pi_2 \ = \ 2\,\rho^2\,\pi_0 \\
&E_2 : \ (\lambda+2\mu)\,\pi_2 \ = \ \lambda\,\pi_1 + 2\,\mu\,\pi_3 \quad \Longrightarrow \quad \pi_3 \ = \ 2\,\rho^3\,\pi_0 \\
&\ldots \\
&E_k : \ (\lambda+2\mu)\,\pi_k \ = \ \lambda\,\pi_{k-1} + 2\,\mu\,\pi_{k+1} \quad \Longrightarrow \quad \pi_{k+1} \ = \ 2\,\rho^{k+1}\,\pi_0 \\
&\ldots
\end{aligned}
$$

Ahora normalizamos para hallar la probabilidad del estado cero:

$$
\pi_0 + 2\,\pi_0 \sum_{k=1}^{6} \rho^k \ = \ 1 \quad \Longrightarrow \quad \pi_0 \ = \ \left(1 + 2\sum_{k=1}^{6}\rho^k\right)^{-1} \ = \ 0.259
$$

Consecuentemente, la distribución estacionaria del sistema es:

Estado i	π_i
0	0.259
1	0.311
2	0.186
3	0.112
4	0.067
5	0.040
6	0.024

c) 2 Puntos: Calcule el número esperado de pacientes en cola, junto con el tiempo esperado de espera en cola.

Solución: Puesto que este sistema cuenta con dos servidores, el número esperado de clientes en cola es:

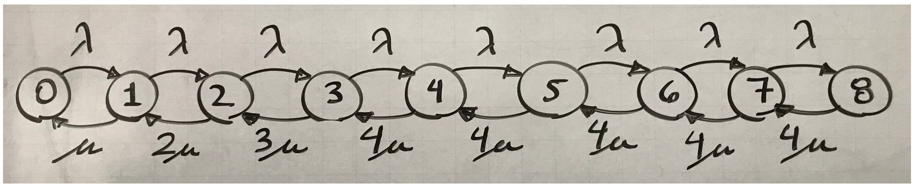
$$\overline{L_q} \;=\; \mathbb{E}[\max\{0,\, X_t - 2\}] \;=\; \sum_{k=2}^{6} (k-2)\,\pi_k \;=\; 0.464$$

Ahora calculamos el tiempo esperado de espera en cola utilizando la Ley de Little:

$$\overline{L_q} \;=\; \lambda\,\overline{W_q} \quad\Longrightarrow\quad \overline{W_q} \;=\; \frac{\overline{L_q}}{\lambda} \;=\; 0.258 \text{ horas} \;\equiv\; 15.47 \text{ minutos}$$

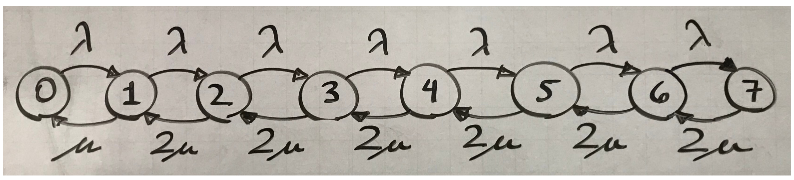
d) 1 Punto: En el enunciado del problema original, suponga que hubiere cuatro doctores en vez de dos, cada uno con su propio consultorio y quirófano. Indique, utilizando notación de Kendall, qué tipo de sistema de cola es este, y bosqueje la Cadena de Markov en Tiempo Continuo correspondiente.

Solución: Este sistema de colas es del tipo M/M/4/8, y la cadena correspondiente se muestra en la siguiente fotografía.



e) 1 Punto: En el enunciado del problema original, suponga que hubiere cinco camillas de espera en vez de cuatro. Indique, utilizando notación de Kendall, qué tipo de sistema de cola es este, y bosqueje la Cadena de Markov en Tiempo Continuo correspondiente.

Solución: Este sistema de colas es del tipo M/M/2/7, y la cadena correspondiente se muestra en la siguiente fotografía.



∎

Problema 2.2. **[8 Puntos]** El Prof. Reyes entrenó una red neuronal convolucional para detectar barcos en imágenes satelitales, la cual (por falta de imaginación) bautizó como *BarcoNet*. Este modelo fue entrenado para clasificar imágenes de acuerdo a *(i)* la ausencia de barcos, *(ii)* la presencia de barcos de turismo, *(iii)* la presencia de barcos de pesca o *(iv)* la presencia de barcos de guerra. El entrenamiento se llevó a cabo utilizando un juego de imágnes artificialmente generadas, donde cada una de las clases anteriormente descritas ocurría con la misma probabilidad. Como resultado del entrenamiento, se obtuvo un modelo de clasificación con la siguiente matriz de confusión:

	Clase Predecida Y			
Clase Real X	**Nada**	**B-Turismo**	**B-Pesca**	**B-Guerra**
Nada	0.96	0.02	0.01	0.01
B-Turismo	0.01	0.88	0.08	0.03
B-Pesca	0.03	0.07	0.85	0.05
B-Guerra	0.02	0.03	0.04	0.91

Ahora, suponga que *BarcoNet* es probada por la Marina en las Galápagos. Para esto, se llevó a cabo un muestreo de imágenes satelitales del archipiélago, donde se encontró que cada una de las clases aparece con la frencuencia mostrada en la siguiente tabla.

Clase Real X	**Nada**	**B-Turismo**	**B-Pesca**	**B-Guerra**
Frecuencia	0.82	0.10	0.06	0.02

Con todo esto en mente, calcule la distribución posterior predictiva de *BarcoNet* con respecto a la distribución de imágenes de las Galápagos.

Solución: Primero recordamos cómo se calcula la distribución posterior:

$$\forall y : \mathbb{P}(Y = y) = \sum_{\text{clases } x} \mathbb{P}(X = x)\,\mathbb{P}(Y = y \mid X = x)$$

Entonces la distribución posterior es:

Clase Predecida Y	**Nada**	**B-Turismo**	**B-Pesca**	**B-Guerra**
Frecuencia	0.7904	0.1092	0.0680	0.0324

Luego recordamos cómo se calcula la distribución posterior predictiva:

$$\forall x, \forall y : \mathbb{P}(X = x \mid Y = y) = \frac{\mathbb{P}(X = x)\,\mathbb{P}(Y = y \mid X = x)}{\mathbb{P}(Y = y)}$$

Finalmente, la distribución posterior predictiva es:

	Clase Real X			
Clase Predecida Y	**Nada**	**B-Turismo**	**B-Pesca**	**B-Guerra**
Nada	0.9960	0.0013	0.0023	0.0005
B-Turismo	0.1502	0.8059	0.0385	0.0055
B-Pesca	0.1206	0.1176	0.7500	0.0118
B-Guerra	0.2531	0.0926	0.0926	0.5617

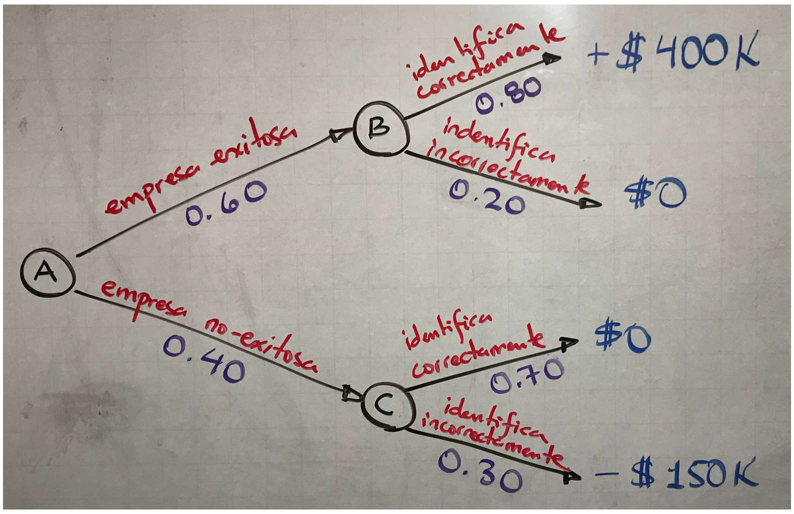
■

Problema 2.3. [6 Puntos] Un acaudalado inversionista tiene una empresa que se dedica a identificar *start-ups* prometedoras. De las empresas que él usualmente evalúa, se sabe que generalmente solo el 40% tendrá éxito. Actualmente, el inversionista logra identificar correctamente a empresas exitosas con probabilidad del 80% y a empresas no-exitosas con probabilidad del 70%. Cuando él acierta, su utilidad asciende a los \$400K, mientras que cuando se equivoca pierde alrededor de \$150K.

Suponga que un consultor dice poder predecir correctamente el futuro de una empresa con probabilidad del 95%. Cuánto es el máximo honorario por evaluación que el consultor puede cobrarle al inversionista para que lo contrate?

Clarificación: Este problema tiene dos posibles soluciones, dependiendo de cómo usted interpretó la estructura de utilidades y costos. Ambas soluciones se consideran válidas, aunque la primera es mucho más natural que la segunda.

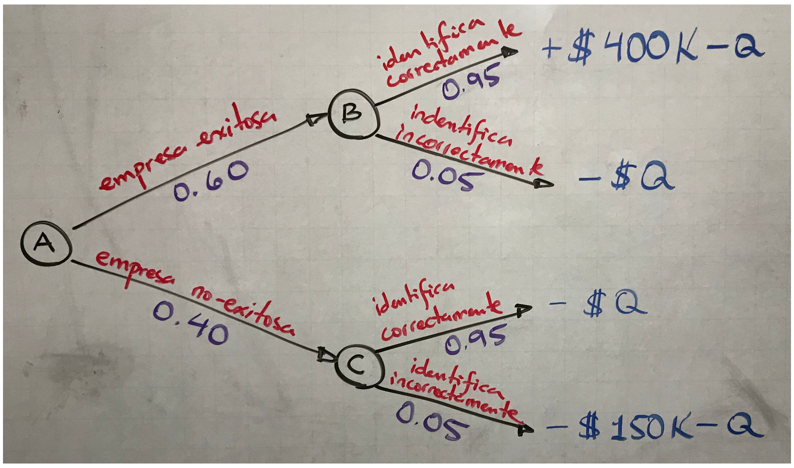
Solución A: Primero supongamos que el inversionista no contrata al consultor. Entonces su árbol de probabilidad luce como el que se muestra en la siguiente fotografía.



Ahora podamos el árbol, calculando la utilidad de los nodos B y C, para luego calcular la utilidad del nodo A.

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[B] &= (+\$400K)(0.80) + (\$0)(0.20) = +\$320K \\
\mathbb{E}[C] &= (\$0)(0.70) + (-\$150K)(0.30) = -\$45K \\
\implies \mathbb{E}[A] &= (+\$320K)(0.60) + (-\$45K)(0.40) = +\$174K
\end{aligned}
$$

Luego suponemos que el inversionista contrata al consultor. Entonces su árbol de probabilidad luce como el que se muestra en la siguiente fotografía.



Ahora podamos el árbol, calculando la utilidad de los nodos B y C, para luego calcular la utilidad del nodo A.

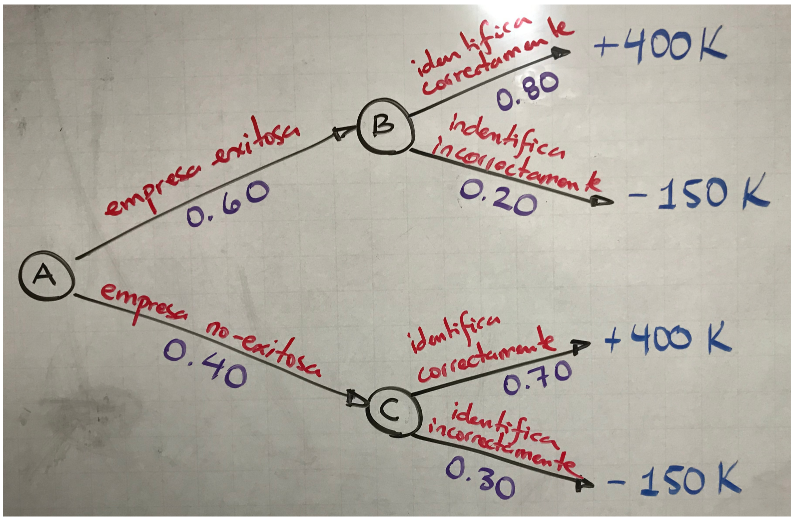
$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[B] &= (+\$400K - Q)(0.95) + (-\$Q)(0.05) = +\$380K - Q \\
\mathbb{E}[C] &= (-\$Q)(0.95) + (-\$150K - Q)(0.05) = -\$7.5K - Q \\
\implies \mathbb{E}[A] &= (+\$380K - Q)(0.60) + (-\$7.5K - Q)(0.40) = +\$225K - Q
\end{aligned}$$

Con estos estimados a la mano, vemos que el inversionista contratará al consultor si:

$$\$225K - Q \geq \$174K \implies Q \leq \$51K$$

Es conclusión, el máximo honorario que puede cobrar el consultor es de $51K. ■

Solución B: Primero supongamos que el inversionista no contrata al consultor. Entonces su árbol de probabilidad luce como el que se muestra en la siguiente fotografía.

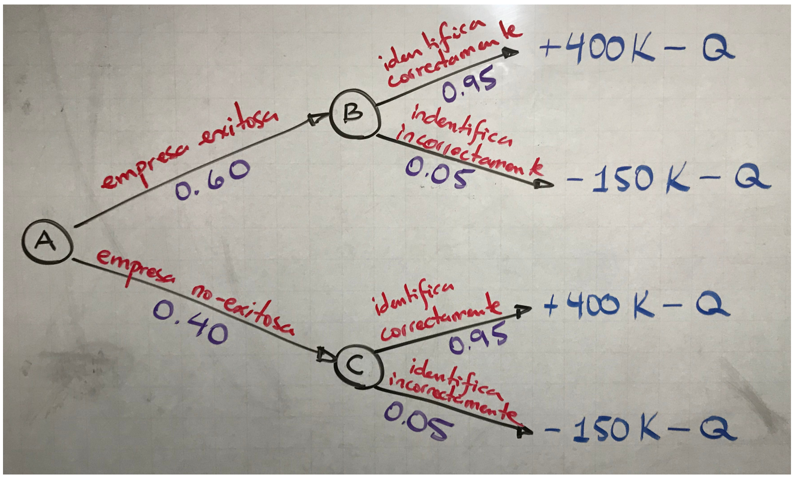


Ahora podamos el árbol, calculando la utilidad de los nodos B y C, para luego calcular la utilidad del nodo A.

$$\mathbb{E}[B] = (+\$400K)(0.80) + (-\$150K)(0.20) = +\$290K$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[C] \;&=\; (+\$400K)(0.70) + (-\$150K)(0.30) \;=\; +\$235K \\ \Longrightarrow\; \mathbb{E}[A] \;&=\; (+\$290K)(0.60) + (+\$235K)(0.40) \;=\; +\$268K \end{aligned}$$

Luego suponemos que el inversionista contrata al consultor. Entonces su árbol de probabilidad luce como el que se muestra en la siguiente fotografía.



Ahora podamos el árbol, calculando la utilidad de los nodos B y C, para luego calcular la utilidad del nodo A.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[B] \;=\; \mathbb{E}[C] \;&=\; (+\$400K - Q)(0.95) + (-\$150K - Q)(0.05) \;=\; +\$372.5K - Q \\ \Longrightarrow\; \mathbb{E}[A] \;&=\; (+\$372.5K - Q)(0.60) + (+\$372.5K - Q)(0.40) \;=\; +\$372.5K - Q \end{aligned}$$

Con estos estimados a la mano, vemos que el inversionista contratará al consultor si:

$$\$372.5K - Q \;\geq\; \$268K \quad\Longrightarrow\quad Q \;\leq\; \$104.5K$$

Es conclusión, el máximo honorario que puede cobrar el consultor es de \$104.5K. ■