Modelos Estocásticos (INDG-1008): Trabajo Autónomo 02

Semestre: 2017-2018 Término II **Instructor:** Luis I. Reyes Castro

Problema 2.1. Un fabricante tiene una máquina complicada. Al comienzo de cada día que la máquina está operativa el riesgo de que la misma se desconponga es p. Cuando la máquina se descompone se llama inmediatamente a la agencia de mantenimiento para agendar una visita para el día siguiente. Desafortunadamente para el fabricante, la visita de la agencia dura dos días y cuesta α dólares diarios. Cada visita sucede de la siguiente manera:

- Supongamos que la máquina empieza la mañana del día t operativa y que durante ese día la misma se descompone un par de horas antes del final de la jornada. El fabricante entonces llama a la agencia de mantenimiento para agendar una visita.
- La mañana del día $t+1$ llegan los técnicos de la agencia y empiezan a trabajar en la máquina. Trabajan todo el día.
- La mañana del día $t+2$ los técnicos de la agencia continúan su trabajo y le entregan la máquina operativa al fabricante para el final de la jornada.
- La mañana del día $t+3$ la máquina está operativa nuevamente, aunque se puede descomponer como siempre.

Con esto en mente:

a) 1 Punto: Modele la situación descrita como una Cadena de Markov con tres estados. En particular, presente el grafo de la cadena en función de p.

b) 6 Puntos: Escriba las ecuaciones de balance y encuentre la distribución estacionaria.

c) 3 Puntos: Calcule:

- El porcentaje del tiempo que la máquina opera toda la jornada sin problemas.
- El porcentaje del tiempo que la máquina empieza el día operativa pero se descompone durante algún momento de la jornada.
- El porcentaje del tiempo que la máquina recibe mantenimiento.

d) 1 Punto: Encuentre el costo diario esperado de mantenimiento de la máquina.

Problema 2.2. (9 Puntos) En el Problema 2.1, suponga que el fabricante tiene una máquina de repuesto que utiliza solamente cuando la máquina principal está descompuesta. Como en el caso de la máquina principal, si al comienzo de cualquier día la máquina de repuesto está operativa entonces con probabilidad q se descompondrá durante el día y los técnicos serán llamados a repararla al día siguiente. Nuevamente, los técnicos se tomarán dos días en arreglar la máquina, aunque ellos no interfieren con los técnicos de la máquina principal (y vice-versa). Modele esta nueva situación como una cadena de Markov con nueve estados y construya la matriz de transición en función de p y q. No necesita bosquejar el grafo de la cadena ni calcular probabilidades en estado estable.

Problema 2.3. Considere una máquina similar a la del Problema 2.1 pero cuyo mantenimiento requiere visitas de k días. Para este modelo:

a) 1 Punto: Modele la situación descrita como una Cadena de Markov con $k+1$ estados. En particular, presente el grafo de la cadena en función de p y k.

b) 4 Puntos: Escriba las ecuaciones de balance y encuentre la distribución estacionaria.

c) 2 Puntos: Calcule:

- El porcentaje del tiempo que la máquina opera toda la jornada sin problemas.
- El costo diario esperado de mantenimiento de la máquina.

Problema 2.4. Suponga que usted ha sido encargado con del manejo del inventario de algunos productos no-perecederos en un supermercado que abre todos los días a sus clientes por la misma cantidad de tiempo. Para mantener una consistencia en el manejo de inventario a través de los varios productos que se venden en el supermercado, el gerente ha dispuesto que todos los inventarios se controlen mediante políticas de punto de reposición.

Más precisamente, al final de cada día se cuenta el inventario del producto y si este es menor o igual a I_{rep} unidades se hace un pedido de reposición por Q_{rep} unidades al proveedor, el cual es entregado por el mismo al comienzo del siguiente día antes de la hora de apertura de la tienda; caso contrario, no se hace un pedido de reposición. Fíjese que bajo estas suposiciones el máximo inventario posible es:

$$I_{max} = I_{rep} + Q_{rep}$$

Adicionalmente,como es de costumbre en este campo de estudio, usted hace la suposición simplificatoria que las demandas del producto D_1, D_2, ... constituyen una secuencia de variables aleatorias i.i.d. con distribución Poisson con parámetro λ. Más aún, si para cada día t denotamos a I_t como el inventario a la hora de apertura de la tienda del t^{avo} día, a D_t como la demanda del día, *i.e.,* la cantidad que se vendería ese día si el inventario fuere inagotable, a R_t como la cantidad repuesta entre la noche del t^{avo} día y la hora de apertura del $(t+1)^{\text{avo}}$ día, tenemos que:

$$I_{t+1} = \max\{\, 0,\, I_t - D_t \,\} + R_t\,; \qquad R_t = \begin{cases} Q_{rep}, & \text{si } 0 \le I_t \le I_{rep}\,; \\ 0, & \text{caso contrario;} \end{cases}$$

Con todo esto en mente, para cada problema de manejo de inventario con demanda λ y política de punto de reposición (I_{rep}, Q_{rep}) podemos construir una Cadena de Markov con $n = I_{max} + 1$ estados (cada uno asociado a un nivel de inventario).

Primera Actividad (8 Puntos)

Construya la matriz de transición para el problema para cada uno de los siguientes casos:

Caso	$\boldsymbol{\lambda}$	$\boldsymbol{I_{rep}}$	$\boldsymbol{Q_{rep}}$
Producto 1 - Política A	0.8	1	1
Producto 1 - Política B	0.8	2	1
Producto 2 - Política A	1.5	1	3
Producto 2 - Política B	1.5	2	2

Por favor presente sus matrices como tablas con los decimales redondeados a tres dígitos.

Segunda Actividad (4 Puntos)

Calcule la distribución en estado estable para cada uno de los cuatro casos de la actividad anterior. Por favor presente sus resultados en dos tablas separados, una para cada producto, de tal manera que se pueda apreciar la influencia de la política de manejo de inventario sobre la distribución estacionaria de la cadena.

Tercera Actividad (4 Puntos)

Para comparar las políticas necesitamos una función de utilidad. En nuestro caso, la función de utilidad será la diferencia entre la ganancia por ventas y el costo de retención de la mercadería, puesto que el supermercado gana u dólares por unidad de producto vendida pero afronta un costo de c dólares por unidad de producto en inventario.

El número esperado de unidades de un producto que se venden depende del nivel de inventario. En particular, si para un día t y un nivel de inventario I_t denotamos al número esperado de unidades que se venderán ese día como $v(I_t)$ podemos ver que:

$$v(I_t) \;=\; (0)\,\mathbb{P}(D_t = 0) + (1)\,\mathbb{P}(D_t = 1) + \cdots + (I_t)\,\mathbb{P}(D_t \geq I_t)$$

Entonces la utilidad diaria esperada de un nivel de inventario $I \in \{\,0,\,1,\,\ldots,\,I_{max}\,\}$ se calcula de la siguiente manera:

$$\text{Utilidad}(I) \;=\; u \cdot v(I) - c \cdot I$$

Con esto en mente, es evidente que podemos evaluar el desempeño de una política α ponderando las utilidades de los niveles de inventario por la distribución estacionaria:

$$\text{Utilidad}\,(\alpha) \;=\; \sum_{I=0}^{I_{max}} \pi^*_\alpha(I) \cdot \text{Utilidad}(I)$$

Finalmente, suponiendo que el Producto A produce una ganancia de $u = \$7.25$ por unidad y tiene un costo de retención por unidad por día de $c = \$0.16$, calcule la utilidad de cada una de las dos políticas propuestas e indique cuál de las dos es mejor. Luego repita el ejercicio para el Producto B suponiendo que $u = \$2.55$ y que $c = \$0.10$.

Problema 2.5.

Problema 2.6.

Problema 2.7.

Problema 2.8.