

Sistemas de Control (EYAG-1005): Lección 01

Semestre: 2017-2018 Término I

Instructor: Luis I. Reyes Castro

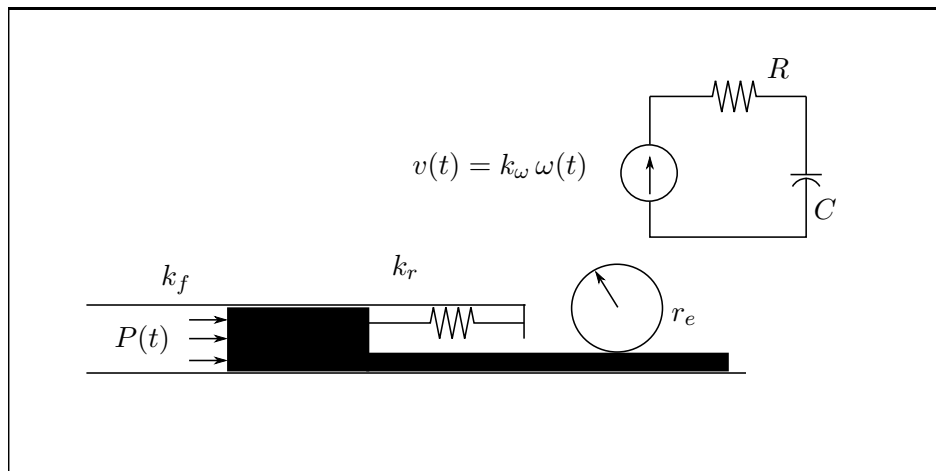
COMPROMISO DE HONOR

Yo, _____ al firmar este compromiso, reconozco que la presente lección está diseñada para ser resuelta de manera individual, que puedo usar un lápiz o pluma y una calculadora científica, que solo puedo comunicarme con la persona responsable de la recepción de la lección, y que cualquier instrumento de comunicación que hubiere traído debo apagarlo. También estoy conciente que no debo consultar libros, notas, ni materiales didácticos adicionales a los que el instructor entregue durante la lección o autorice a utilizar. Finalmente, me comprometo a desarrollar y presentar mis respuestas de manera clara y ordenada.

Firmo al pie del presente compromiso como constancia de haberlo leído y aceptado.

Firma: _____ Número de matrícula: _____

Problema 1.1. [10 Puntos] Considere el siguiente modelo de un tubo de pitot electrónico montado en la punta de la nariz de un aeroplano de alas fijas. El aire entra a una presión $p(t)$, el cual desplaza un tope de masa m y área frontal A que esta conectado a la estructura por un resorte con constante k_r . Además el tope experimenta una fuerza de fricción proporcional a su velocidad por una constante k_f . El tope hace girar un engranaje de radio r_e que está conectado a un micro-generador que produce un voltage proporcional a la velocidad angular del engranaje. El engranaje es muy ligero, así que podemos suponer que su momento de inercia es despreciable. Finalmente, el micro-generador está conectado a un circuito RC, como se muestra abajo.



Encuentre la función de transferencia cuya entrada es la presión y cuya salida sea el voltage sobre el capacitor, *i.e.*, si denotamos como $v_C(t)$ al voltage del capacitor entonces:

$$G(s) = \frac{V_C(s)}{P(s)}$$

Solución: Definiendo la dirección hacia la derecha como positiva, vemos que la sumatoria de fuerzas en el tope es

$$m \ddot{x}(t) = A p(t) - k_r x(t) - k_f \dot{x}(t), \quad (1)$$

donde el primer término del lado derecho es la fuerza debida a la presión, el segundo es la fuerza debida al resorte y el tercero es la fuerza debida a la fricción. Además, la relación

entre la velocidad del tope y la velocidad angular del engranaje es:

$$\dot{x}(t) = r_e \omega(t) \iff \omega(t) = (1/r_e) \dot{x}(t)$$

A su vez, dado que el micro-generador produce un voltage $v(t) = k_\omega \omega(t)$, vemos que:

$$v(t) = (k_\omega/r_e) \dot{x}(t) \quad (2)$$

Luego analizamos el circuito. Como el único elemento almacenador de energía es el capacitor, la única ecuación de estado es $\dot{v}_C(t) = (1/C) i(t)$. Además, usando la Ley de Voltajes de Kirchhoff vemos que:

$$v(t) = R i(t) + v_c(t) \implies i(t) = (1/R) (v(t) - v_C(t))$$

Consecuentemente la ecuación de estado es:

$$\dot{v}_C(t) = (1/RC) v(t) - (1/RC) v_C(t) \quad (3)$$

Después, tomamos la Transformación de Laplace de cada una de las tres ecuaciones diferenciales obtenidas anteriormente:

$$(m s^2 + k_f s + k_r) X(s) = A P(s) \quad (4)$$

$$V(s) = (k_\omega/r_e) s X(s) \quad (5)$$

$$s V_C(s) = (1/RC) (V(s) - V_C(s)) \quad (6)$$

Ahora despejamos para la función de transferencia. Si empezamos con la última ecuación y reemplazamos $V(s)$ usando la segunda ecuación, obtenemos:

$$\begin{aligned} (s + 1/RC) V_C(s) &= (1/RC) V(s) \\ \implies (s + 1/RC) V_C(s) &= (1/RC) (k_\omega/r_e) X(s) \end{aligned}$$

Finalmente, reemplazando para $X(s)$ usando la primera ecuación, tenemos:

$$(s + 1/RC) V_C(s) = \left(\frac{k_\omega}{r_e RC} \right) \left(\frac{A}{m s^2 + k_f s + k_r} \right) P(s)$$

En conclusión:

$$G(s) = \frac{A k_\omega}{(r_e RC) (s + 1/RC) (m s^2 + k_f s + k_r)}$$