Modelos Estocásticos (INDG-1008): Lección 03

Semestre: 2017-2018 Término II **Instructor:** Luis I. Reyes Castro

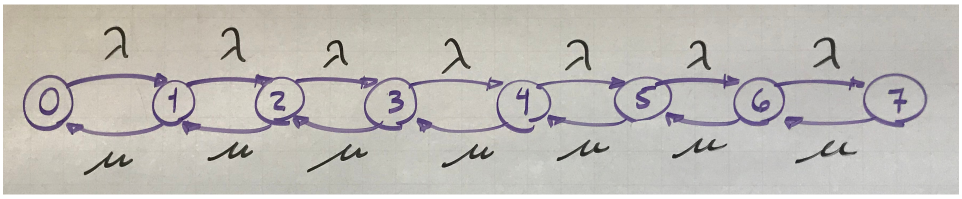
Problema 3.1. El aeropuerto internacional de Centerville tiene dos pistas, una solo para despegues y otra solo para aterrizajes. Los aviones llegan al espacio aéreo del aeropuerto, el cual tiene una capacidad para $C = 7$ aeronaves, para pedir instrucciones de aterrizaje según un proceso de Poisson con tasa media de λ por hora. El tiempo que se requiere para realizar un aterrizaje después de la aprobación tiene distribución exponencial con media de 3 minutos, proceso que debe estar terminado antes de aprobar otro aterrizaje. Los aviones en espera de pista vuelan en círculos.

La FAA (Administración de Aviación Federal, por sus siglas en ingés) tiene varios criterios respecto del nivel seguro de congestión de aviones en espera para aterrizar. Estos criterios dependen de varios factores en cada aeropuerto, como el número de pistas disponibles. En el caso de Centerville los criterios son *(i)* el número promedio de aviones en espera no debe exceder de 1, *(ii)* el 95% del tiempo, el número real de aviones en espera no debe exceder de 4, y *(iii)* para el 99% de los aviones, el tiempo que vuelan en círculos antes de aterrizar no debe exceder de 30 minutos.

Complete las siguientes actividades:

a) 2 Puntos: Calcule la distribución estacionaria del sistema para los casos cuando la tasa de arribo es de $\lambda = 10$ por hora, $\lambda = 15$ por hora, y $\lambda = 25$ por hora.

Solución: Primero reconocemos que como solo hay una pista de aterrizaje, este problema corresponde a un modelo M/M/1/7 cuya tasa de servicio por pista es de $\mu = 20$ aeronaves por hora. Luego podemos bosquejar la Cadena de Markov correspondiente, tal como se muestra en la siguiente fotografía.



Para esta cadena, definiendo $\rho \triangleq \lambda/\mu$, tenemos:

$$\begin{aligned} \lambda = 10 &\implies \rho = 0.50 \\ \lambda = 15 &\implies \rho = 0.75 \\ \lambda = 25 &\implies \rho = 1.25 \end{aligned}$$

Las ecuaciones de balance son:

$$\begin{aligned}
&E_0 : \lambda\,\pi_0 = \mu\,\pi_1 \implies \pi_1 = \rho\,\pi_0 \\
&E_1 : (\lambda+\mu)\,\pi_1 = \lambda\,\pi_0 + \mu\,\pi_2 \implies \pi_2 = \rho^2\,\pi_0 \\
&E_2 : (\lambda+\mu)\,\pi_2 = \lambda\,\pi_1 + \mu\,\pi_3 \implies \pi_3 = \rho^3\,\pi_0 \\
&\vdots \\
&E_k : (\lambda+\mu)\,\pi_k = \lambda\,\pi_{k-1} + \mu\,\pi_{k+1} \implies \pi_{k+1} = \rho^{k+1}\,\pi_0 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Ahora normalizamos para hallar la probabilidad del estado cero:

$$\pi_0 \sum_{k=0}^{7} \rho^k \;=\; 1 \quad\Longrightarrow\quad \pi_0 \;=\; \left(\sum_{k=0}^{7} \rho^k\right)^{-1}$$

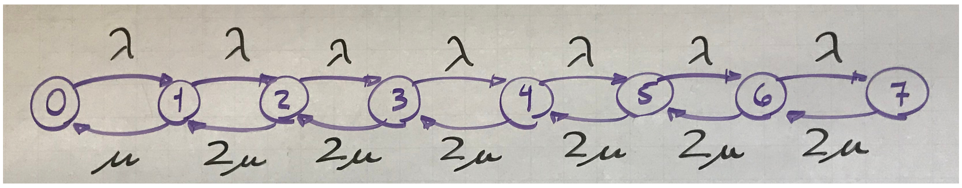
Consecuentemente:

Estado i	$\boldsymbol{\pi_i}$ $(\lambda = 10)$	$\boldsymbol{\pi_i}$ $(\lambda = 15)$	$\boldsymbol{\pi_i}$ $(\lambda = 25)$
0	0.502	0.278	0.050
1	0.251	0.209	0.063
2	0.126	0.156	0.078
3	0.063	0.117	0.098
4	0.031	0.088	0.122
5	0.016	0.066	0.153
6	0.008	0.045	0.191
7	0.004	0.037	0.238

b) 2 Puntos: Para cada uno de los tres casos anteriores, evalúe si se cumplen o no los requisitos de la FAA.

c) 2 Puntos: Suponga que se construye otra pista de aterrizaje. Recalcule la distribución estacionaria del sistema para los casos cuando la tasa de arribo es de $\lambda = 10$ por hora, $\lambda = 15$ por hora, y $\lambda = 25$ por hora.

Solución: Como ahora hay dos pistas de aterrizaje, este problema corresponde a un modelo M/M/2/7 cuya tasa de servicio por pista es de $\mu = 20$ aeronaves por hora. Luego podemos bosquejar la Cadena de Markov correspondiente, tal como se muestra en la siguiente fotografía.



Para esta cadena, definiendo $\rho \triangleq \lambda/(2\mu)$, tenemos:

$$\begin{aligned}
\lambda = 10 \quad &\Longrightarrow \quad \rho = 0.250 \\
\lambda = 15 \quad &\Longrightarrow \quad \rho = 0.375 \\
\lambda = 25 \quad &\Longrightarrow \quad \rho = 0.625
\end{aligned}$$

Las ecuaciones de balance son:

$$\begin{aligned}
&E_0 : \; \lambda \pi_0 \;=\; \mu \pi_1 \quad\Longrightarrow\quad \pi_1 \;=\; 2\rho\pi_0 \\
&E_1 : \; (\lambda + \mu)\pi_1 \;=\; \lambda\pi_0 + 2\mu\pi_2 \quad\Longrightarrow\quad \pi_2 \;=\; 2\rho^2\pi_0 \\
&E_2 : \; (\lambda + 2\mu)\pi_2 \;=\; \lambda\pi_1 + 2\mu\pi_3 \quad\Longrightarrow\quad \pi_3 \;=\; 2\rho^3\pi_0 \\
&\vdots \\
&E_k : \; (\lambda + 2\mu)\pi_k \;=\; \lambda\pi_{k-1} + 2\mu\pi_{k+1} \quad\Longrightarrow\quad \pi_{k+1} \;=\; 2\rho^{k+1}\pi_0 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Ahora normalizamos para hallar la probabilidad del estado cero:

$$\pi_0 + 2\,\pi_0 \sum_{k=1}^{7} \rho^k \;=\; 1 \quad\Longrightarrow\quad \pi_0 \;=\; \left(1 + 2\sum_{k=1}^{7} \rho^k\right)^{-1}$$

Consecuentemente:

Estado i	$\boldsymbol{\pi_i}$ $(\lambda = 10)$	$\boldsymbol{\pi_i}$ $(\lambda = 15)$	$\boldsymbol{\pi_i}$ $(\lambda = 25)$
0	0.600	0.455	0.238
1	0.300	0.341	0.298
2	0.075	0.128	0.186
3	0.019	0.048	0.116
4	0.005	0.018	0.073
5	0.001	0.007	0.045
6	0.000	0.003	0.028
7	0.000	0.001	0.018

d) 2 Puntos: Para cada uno de los tres casos anteriores, evalúe si se cumplen o no los requisitos de la FAA.

Problema 3.2. [**8 Puntos**] El lunes, cierta acción cerró a 10 dólares. El martes se espera que la acción cierre a 9, 10 u 11 dólares, con probabilidades respectivas de 0.3, 0.3 y 0.4. El miércoles, se espera que la acción cierre 10% abajo, sin cambio o 10% arriba del cierre del martes, con las siguientes probabilidades:

Cierre de hoy	**10% abajo**	**Sin cambio**	**10% arriba**
\$ 9	0.4	0.3	0.3
\$10	0.2	0.2	0.6
\$11	0.1	0.2	0.7

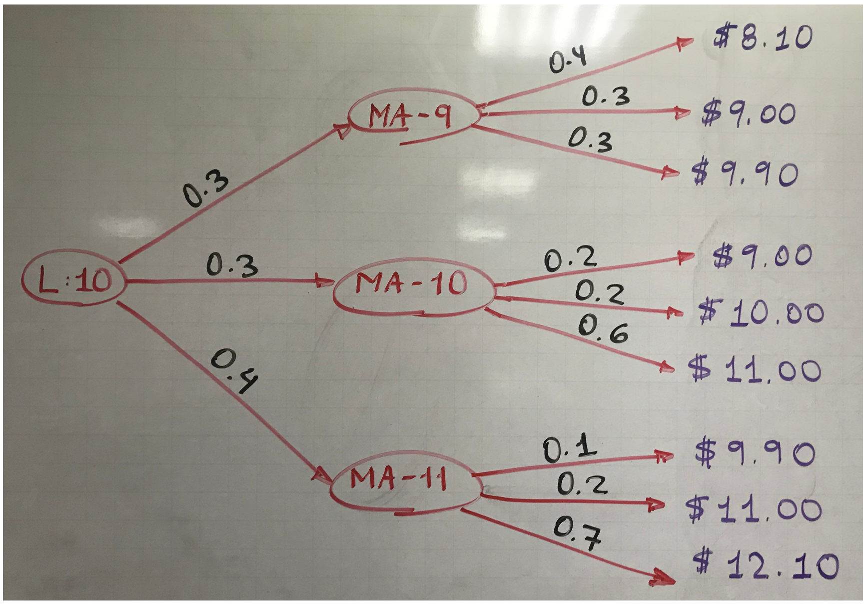
El martes recibe instrucciones de comprar 100 acciones antes del jueves. Todas las compras se hacen al final del día, al precio de cierre conocido de ese día, de manera que sus únicas opciones son comprar al final del martes o al final del miércoles. Usted quiere determinar una estrategia óptima: comprar el martes o aplazar la compra hasta el miércoles, dado el precio al cierre del martes, con el fin de minimizar el precio esperado de compra. Desarrolle y evalúe un árbol de decisión para determinar la estrategia óptima.

Solución: En este problema nuestro objetivo es minimizar el costo de compra de las acciones, *i.e.,* buscamos comprarlas al menor precio posible. Para esto, primero supongamos que se hace la compra el día martes. El precio esperado de cierre del martes es:

$$(\$9)(0.3) + (\$10)(0.3) + (\$11)(0.4) \;=\; \$10.10$$

Consecuentemente, el costo de la transacción sería de \$1010.

En cambio, si se espera hasta el miércoles, el árbol de probabilidad de precios de de cierre es como se muestra en la siguiente fotografía.



Ahora podamos el árbol calculando los costos esperados en los nodos MA-9, MA-10 y MA-11.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\text{MA-9}] &= (\$8.10)(0.4) + (\$9.00)(0.3) + (\$9.90)(0.3) = \$8.91 \\
\mathbb{E}[\text{MA-10}] &= (\$9.00)(0.2) + (\$10.00)(0.2) + (\$11.00)(0.6) = 10.40 \\
\mathbb{E}[\text{MA-11}] &= (\$9.90)(0.1) + (\$11.0)(0.2) + (\$12.10)(0.7) =
\end{aligned}$$