

Modelos Estocásticos (INDG-1008): Lección 02

Semestre: 2017-2018 Término I

Instructor: Luis I. Reyes Castro

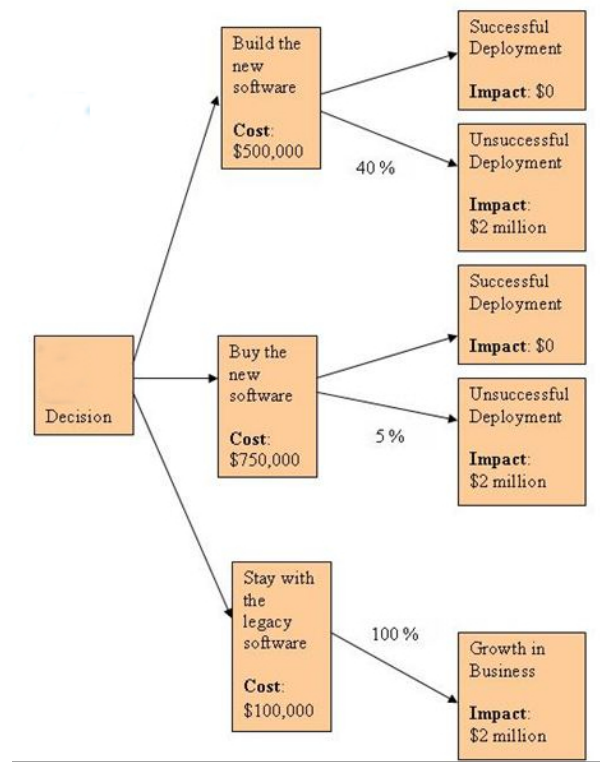
COMPROMISO DE HONOR

Yo, _____ al firmar este compromiso, reconozco que la presente lección está diseñada para ser resuelta de manera individual, que puedo usar un lápiz o pluma y una calculadora científica, que solo puedo comunicarme con la persona responsable de la recepción de la lección, y que cualquier instrumento de comunicación que hubiere traído debo apagarlo. También estoy conciente que no debo consultar libros, notas, ni materiales didácticos adicionales a los que el instructor entregue durante la lección o autorice a utilizar. Finalmente, me comprometo a desarrollar y presentar mis respuestas de manera clara y ordenada.

Firmo al pie del presente compromiso como constancia de haberlo leído y aceptado.

Firma: _____ Número de matrícula: _____

Problema 2.1. [3 Puntos] Una empresa está tratando de decidir qué hacer con el software que usa para su operación principal. Tal como se muestra en el siguiente árbol de decisión, la empresa puede desarrollar su propio software, comprarlo, o seguir utilizando el mismo que tiene actualmente. Determine la decisión óptima.



Solución: Analizamos el valor esperado de cada decisión:

- Si la empresa desarrolla su propio software su costo es:
 - \$500,000 con probabilidad del 60%
 - \$2,500,000 con probabilidad del 40%

Consecuentemente su costo esperado es de:

$$(\$500,000)(0.6) + (\$2,500,000)(0.4) = \$1,300,000$$

- Si la empresa compra el software su costo es:
 - \$750,000 con probabilidad del 95%
 - \$2,750,000 con probabilidad del 5%

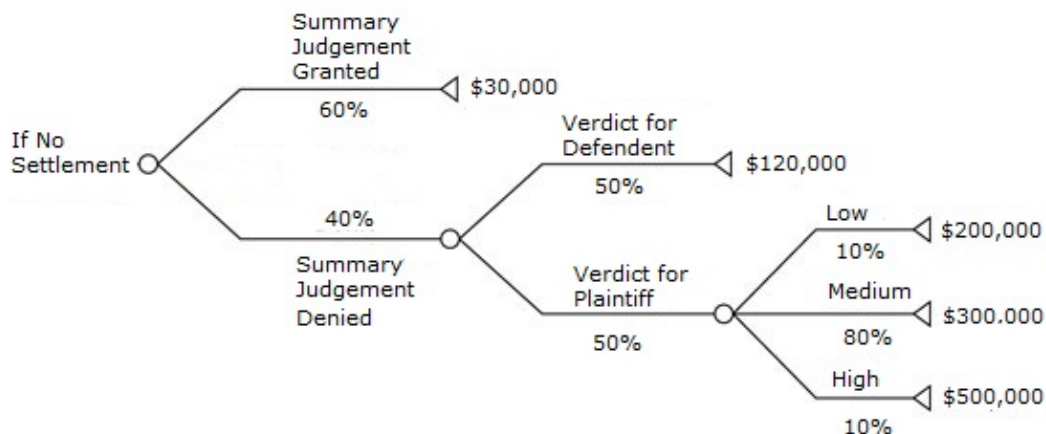
Consecuentemente su costo esperado es de:

$$(\$750,000)(0.95) + (\$2,750,000)(0.05) = \$850,000$$

- Si la empresa sigue utilizando el mismo software entonces su costo es de \$2,100,000 con probabilidad unitaria. Consecuentemente su costo esperado es el mismo.

En conclusión, la decisión óptima es comprar el software.

Problema 2.2. [3 Puntos] Considere el siguiente modelo de litigio en cortes estadounidenses, el cual es basado en un modelo publicado en la página web *Settlement Perspectives* del abogado John DeGroot en un artículo titulado “Decision Tree Analysis in Litigation: The Basics” y publicado el 4 de enero del 2009. El modelo especifica un árbol de probabilidad que representa los diferentes escenarios de un litigio desde el punto de vista de la parte acusadora. Con esto en mente, calcule la ganancia esperada de la parte acusadora.



Solución: Procedemos por etapas:

1. Evaluamos la utilidad del nodo ‘Verdict for Plaintiff’:

$$(0.1)(\$200,000) + (0.8)(\$300,000) + (0.1)(\$500,000) = \$310,000$$

2. Evaluamos la utilidad del nodo ‘Summary Judgement Denied’:

$$(0.5)(\$120,000) + (0.5)(\$310,000) = \$215,000$$

3. Evaluamos la utilidad del nodo ‘If No Settlement’:

$$(0.6)(\$30,000) + (0.4)(\$215,000) = \$104,000$$

En conclusión, la ganancia esperada de la parte acusadora es de \$104,000.

Problema 2.3. Una empresa está contemplando el lanzamiento de un nuevo producto. Si el producto tiene éxito, lo cual se cree que ocurrirá con una probabilidad del 65%, la empresa logrará acumular alrededor de \$60,000 dólares en ganancias; en cambio, si el producto fracasa, la empresa perderá alrededor de \$40,000. Se sobre-entiende que la empresa también puede optar por no lanzar el producto. Usted se dedica a organizar *focus groups* para evaluar nuevos productos, los cuales predicen correctamente el éxito o fracaso de un nuevo producto el 90% de las veces. Actualmente, usted cobraría unos \$1,200 por evaluar el nuevo producto de la empresa antes mencionada.

Con esto en mente, complete las siguientes actividades:

- [4 Puntos] Suponiendo que usted le ofrece sus servicios al gerente de la empresa, modele el problema de decisión del gerente como un árbol.
- [4 Puntos] Calcule la utilidad esperada de la empresa y describa la política óptima.

Solución: Definimos las siguientes variables aleatorias:

- $X \in \{0, 1\}$ denota si el producto fracasa o es exitoso
- $Y \in \{0, 1\}$ denota si el focus group predice éxito o fracaso

Empezamos calculando las probabilidades posteriores:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y = 1) &= \mathbb{P}(X = 1) \cdot \mathbb{P}(Y = 1|X = 1) + \mathbb{P}(X = 0) \cdot \mathbb{P}(Y = 1|X = 0) \\ &= (0.65)(0.90) + (0.35)(0.10) = 0.62 \\ \implies \mathbb{P}(Y = 0) &= 0.38\end{aligned}$$

Luego calculamos las probabilidades priores condicionales en las posteriores:

- Para el caso cuando el focus group predice éxito, tenemos:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X = 1 | Y = 1) &= \frac{\mathbb{P}(X = 1) \cdot \mathbb{P}(Y = 1 | X = 1)}{\mathbb{P}(Y = 1)} \\ &= \frac{(0.65)(0.90)}{(0.62)} = 0.94 \\ \implies \mathbb{P}(X = 0 | Y = 1) &= 0.06\end{aligned}$$

- Para el caso cuando el focus group predice fracaso, tenemos:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X = 1 | Y = 0) &= \frac{\mathbb{P}(X = 1) \cdot \mathbb{P}(Y = 0 | X = 1)}{\mathbb{P}(Y = 0)} \\ &= \frac{(0.65)(0.10)}{(0.38)} = 0.17 \\ \implies \mathbb{P}(X = 0 | Y = 0) &= 0.83\end{aligned}$$

Con todas las probabilidades calculadas podemos ahora construir el árbol de decisión:

- Decisión: No contratar el focus group
 - Decisión: Lanzar el producto
 - * Escenario con probabilidad $\mathbb{P}(X = 1) = 0.65$: Producto es exitoso

$$\text{Utilidad} = +\$60,000$$

* Escenario con probabilidad $\mathbb{P}(X = 0) = 0.35$: Producto fracasa

$$\text{Utilidad} = -\$40,000$$

– Decisión: No lanzar el producto

$$\text{Utilidad} = \$0$$

• Decisión: Contratar el focus group

– Escenario con probabilidad $\mathbb{P}(Y = 1) = 0.62$: Focus group predice éxito

* Decisión: Lanzar el producto

· Escenario con probabilidad $\mathbb{P}(X = 1 \mid Y = 1) = 0.94$: Producto es exitoso

$$\text{Utilidad} = +\$58,800$$

· Escenario con probabilidad $\mathbb{P}(X = 0 \mid Y = 1) = 0.06$: Producto fracasa

$$\text{Utilidad} = -\$41,200$$

* Decisión: No lanzar el producto

$$\text{Utilidad} = -\$1,200$$

– Escenario con probabilidad $\mathbb{P}(Y = 0) = 0.38$: Focus group predice fracaso.

* Decisión: Lanzar el producto

· Escenario con probabilidad $\mathbb{P}(X = 1 \mid Y = 0) = 0.17$: Producto es exitoso

$$\text{Utilidad} = +\$58,800$$

· Escenario con probabilidad $\mathbb{P}(X = 0 \mid Y = 0) = 0.83$: Producto fracasa

$$\text{Utilidad} = -\$41,200$$

* Decisión: No lanzar el producto

$$\text{Utilidad} = -\$1,200$$

Primera iteración de programación dinámica:

• Decisión: No contratar el focus group

– Decisión: Lanzar el producto

$$\mathbb{E}(\text{Utilidad}) = (0.65)(+\$60,000) + (0.35)(-\$40,000) = +\$25,000$$

– Decisión: No lanzar el producto

$$\text{Utilidad} = \$0$$

-
- Decisión: Contratar el focus group

- Escenario con probabilidad $\mathbb{P}(Y = 1) = 0.62$: Focus group predice éxito

- * Decisión: Lanzar el producto

$$\mathbb{E}(\text{Utilidad}) = (0.94)(+\$58,800) + (0.06)(-\$41,200) = +\$52,800$$

- * Decisión: No lanzar el producto

$$\text{Utilidad} = -\$1,200$$

- Escenario con probabilidad $\mathbb{P}(Y = 0) = 0.38$: Focus group predice fracaso.

- * Decisión: Lanzar el producto

$$\mathbb{E}(\text{Utilidad}) = (0.17)(+\$58,800) + (0.83)(-\$41,200) = -\$24,200$$

- * Decisión: No lanzar el producto

$$\text{Utilidad} = -\$1,200$$

Segunda iteración de programación dinámica:

- Decisión: No contratar el focus group y lanzar el producto

$$\mathbb{E}(\text{Utilidad}) = +\$25,000$$

- Decisión: Contratar el focus group

- Escenario con probabilidad $\mathbb{P}(Y = 1) = 0.62$: Focus group predice éxito y se lanza el producto

$$\mathbb{E}(\text{Utilidad}) = +\$52,800$$

- Escenario con probabilidad $\mathbb{P}(Y = 0) = 0.38$: Focus group predice fracaso y no se lanza el producto

$$\mathbb{E}(\text{Utilidad}) = -\$1,200$$

Tercera iteración de programación dinámica:

- Decisión: No contratar el focus group y lanzar el producto

$$\mathbb{E}(\text{Utilidad}) = +\$25,000$$

- Decisión: Contratar el focus group y lanzar el producto si el focus group predice éxito (caso contrario, no lanzar el producto)

$$\mathbb{E}(\text{Utilidad}) = +\$32,280$$

En conclusión, la política óptima, la cual tiene una utilidad esperada de +\$32,280 es: “Contratar el focus group y lanzar el producto si el focus group predice éxito; caso contrario, no lanzar el producto.”