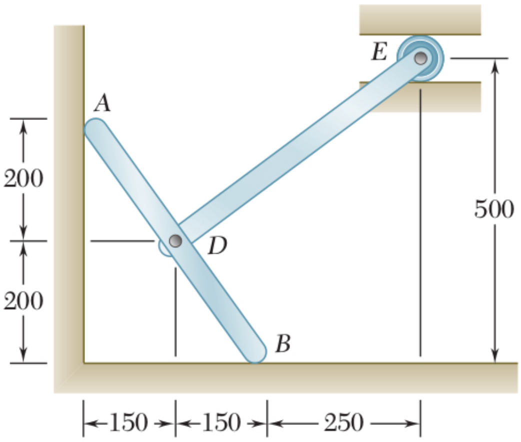
Mecánica Vectorial (MECG-1001): Lección 02

Semestre: 2017-2018 Término II **Instructor:** Luis I. Reyes Castro **Paralelo:** 09

Problema 2.1. Dos varillas de 500 mm están conectadas mediante un pasador en D como lo indica la figura de abajo, donde todas las dimensiones se muestran en milimetros. El punto B se mueve hacia la izquierda con una velocidad constante de 360 mm/s.



Complete las siguientes actividades:

a) 3 Puntos: Encuentre la velocidad angular de la barra AB.

Solución: Primero tomamos datos:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{v_B} &= (-0.360,\, 0) \text{ m/s} \\
\boldsymbol{v_A} &= (0,\, +v_A) \text{ m/s} \\
\boldsymbol{v_E} &= (+v_E,\, 0) \text{ m/s} \\
\boldsymbol{r_{BA}} &= (-0.300,\, +0.400) \text{ m} \\
\boldsymbol{r_{BD}} &= (-0.150,\, +0.200) \text{ m} \\
\boldsymbol{r_{DE}} &= (+0.400,\, +0.300) \text{ m}
\end{aligned}$$

Las velocidades en A y B están relacionadas con la velocidad angular de la barra AB de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{v_A} &= \boldsymbol{v_B} + \boldsymbol{\omega_{AB}} \times \boldsymbol{r_{BA}} \\
\implies \begin{bmatrix} 0 \\ +v_A \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -0.360 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0.400\,\omega_{AB} \\ -0.300\,\omega_{AB} \end{bmatrix} \\
\implies 0 &= -0.360 - 0.400\,\omega_{AB} \\
\implies \boldsymbol{\omega_{AB}} &= -0.75\,\widehat{\boldsymbol{k}} \text{ rad/s}
\end{aligned}$$

b) 2 Puntos: Encuentre la velocidad en D.

Solución: Las velocidades en B y D están relacionadas con la velocidad angular de la barra AB de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{v_D} &= \boldsymbol{v_B} + \boldsymbol{\omega_{AB}} \times \boldsymbol{r_{BD}} \\
&= \begin{bmatrix} -0.360 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0.200\,(-0.75) \\ -0.150\,(-0.75) \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$= \begin{bmatrix} -0.21 \\ +0.1125 \end{bmatrix} \text{ m/s} \equiv 0.2382 \text{ m/s} \measuredangle 151.82^\circ$$

c) 3 Puntos: Encuentre la velocidad angular de la barra DE.

Solución: Las velocidades en D y E están relacionadas con la velocidad angular de la barra DE de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v_E} &= \boldsymbol{v_D} + \boldsymbol{\omega_{DE}} \times \boldsymbol{r_{DE}} \\ \Longrightarrow \begin{bmatrix} +v_E \\ 0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -0.21 \\ +0.1125 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0.300\,\omega_{DE} \\ +0.400\,\omega_{DE} \end{bmatrix} \\ \Longrightarrow 0 &= +0.1125 + 0.400\,\omega_{DE} \\ \Longrightarrow \boldsymbol{\omega_{DE}} &= -0.281\,\widehat{\boldsymbol{k}} \text{ rad/s} \end{aligned}$$

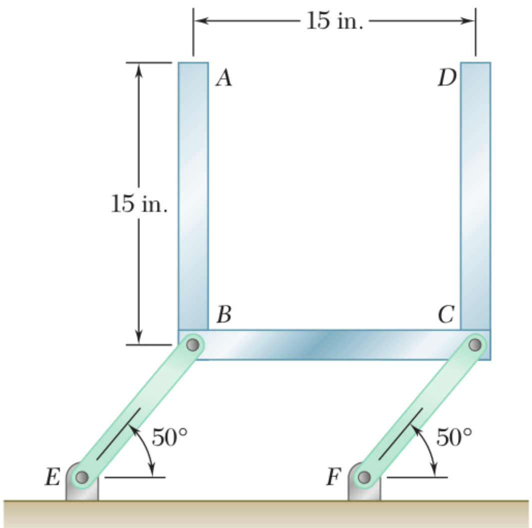
d) 2 Puntos: Encuentre la velocidad en E.

Solución: De la expresión anterior tenemos:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v_E} &= \begin{bmatrix} -0.21 \\ +0.1125 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0.300\,(-0.281) \\ +0.400\,(-0.281) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -0.1257 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ m/s} \equiv 0.1257 \text{ m/s} \measuredangle \pm 180^\circ \end{aligned}$$

■

Problema 2.2. Tres barras, cada una con un peso de 8 lb, están soldadas entre si y se encuentran conectadas mediante pasadores a los dos eslabones BE y CF, los cuales tienen peso despreciable y longitud de 10 in.



Complete las siguientes actividades:

a) 1 Punto: Encuentre la locación del centro de masa del ensamble $ABCD$.

Solución: Es evidente que como el ensamble es simétrico entonces la coordenada x de su centro de masa es igual a la coordenada x del punto medio de la barra BC. Para hallar la coordenada y definimos a δ como la distancia desde el punto medio de la barra BC hasta el centro de masa del ensamble. Entonces tenemos:

$$\delta \;=\; \frac{(8)(0.0) + 2(8)(7.5)}{3(8)} \;=\; 5.0 \text{ in} \;=\; 0.4167 \text{ ft}$$

b) **2 Puntos:** Encuentre la aceleración del centro de masa del ensamble $ABCD$ en función de la aceleración angular de la barra BE.

Solución: Primero tomamos algunos datos:

$$\begin{aligned}
\widehat{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{EB}} &= (\,+\cos(50^\circ),\, +\sin(50^\circ)\,) \\
\boldsymbol{r}_{\boldsymbol{EB}} &= 0.8333\,\widehat{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{EB}} \text{ ft} \\
\boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{BE}} &= \boldsymbol{0} \text{ rad/s} \\
\boldsymbol{\alpha}_{\boldsymbol{BE}} &= \alpha_{BE}\,\widehat{\boldsymbol{k}} \text{ rad/s}^2
\end{aligned}$$

Empezamos reconociendo que el ensamble $ABCD$ se encuentra en translación curvilínea, por lo que en todo momento tanto su velocidad angular como su aceleración angular son exactamente cero. Consecuentemente:

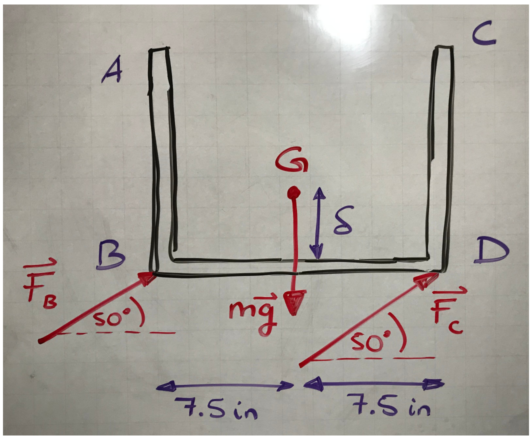
$$\begin{aligned}
\boldsymbol{a}_{\boldsymbol{G}} \;=\; \boldsymbol{a}_{\boldsymbol{B}} &= \boldsymbol{a}_{\boldsymbol{E}} + \boldsymbol{\alpha}_{\boldsymbol{BE}} \times \boldsymbol{r}_{\boldsymbol{EB}} + \boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{BE}} \times (\boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{BE}} \times \boldsymbol{r}_{\boldsymbol{EB}}) \\
&= \boldsymbol{0} + \boldsymbol{\alpha}_{\boldsymbol{BE}} \times \boldsymbol{r}_{\boldsymbol{EB}} + \boldsymbol{0} \\
&= \begin{bmatrix} -0.8333\,\sin(50^\circ)\,\alpha_{BE} \\ +0.8333\,\cos(50^\circ)\,\alpha_{BE} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

c) **5 Puntos:** Determine la fuerza en cada eslabón inmediatamente después de que el sistema se suelta desde el reposo.

Solución: Primero tomamos algunos datos:

$$\begin{aligned}
m &= 0.7459 \text{ slug} \\
\ell/2 &= 7.5/12 \text{ ft} \;=\; 0.625 \text{ ft}
\end{aligned}$$

El diagrama de cuerpo libre (DCL) se muestra en la siguiente fotografía.



Las sumatorias de fuerzas y torques externos resultan en:

$$m\,(\boldsymbol{a}_{\boldsymbol{G}})_x \;=\; +(F_B + F_C)\,\cos(50^\circ)$$

$$
\begin{aligned}
m\,(\boldsymbol{a_G})_y &= +(F_B + F_C)\,\sin(50^\circ) - mg \\
0 &= +(\ell/2)\,(F_C - F_B)\,\sin(50^\circ) + \delta\,(F_B + F_C)\,\cos(50^\circ)
\end{aligned}
$$

De esta manera arribamos al siguiente sistema de tres ecuaciones lineales donde las incógnitas son α_{BE}, F_B y F_C.

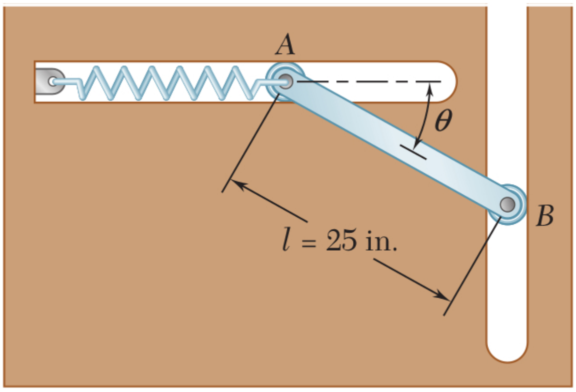
$$
\begin{aligned}
-0.6216\,\sin(50^\circ)\,\alpha_{BE} &= +(F_B + F_C)\,\cos(50^\circ) \\
+0.6216\,\cos(50^\circ)\,\alpha_{BE} &= +(F_B + F_C)\,\sin(50^\circ) - 24 \\
0 &= +0.625\,(F_C - F_B)\,\sin(50^\circ) + 0.4167\,(F_B + F_C)\,\cos(50^\circ)
\end{aligned}
$$

Resolviendo el sistema, obtenemos:

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\alpha_{BE}} &= -24.82\,\widehat{\boldsymbol{k}}\ \text{rad/s}^2 \\
\boldsymbol{F_B} &= +14.34\,\widehat{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{EB}}\ \text{lb} \\
\boldsymbol{F_C} &= +4.050\,\widehat{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{EB}}\ \text{lb}
\end{aligned}
$$

■

Problema 2.3. [6 Puntos] Los extremos de una barra AB de 9 lb están restringidos a moverse a lo largo de ranuras cortadas en una placa vertical en la forma que se indica. Un resorte de constante $k = 3$ lb/in. se fija al extremo A de manera tal que su tensión es cero cuando $\theta = 0^\circ$. La barra se suelta desde el reposo cuando $\theta = 50^\circ$, determine la velocidad angular de la barra y la velocidad del extremo B cuando $\theta = 0^\circ$.



Solución: Primero tomamos algunos datos:

$$
\begin{aligned}
m &= 0.2797\ \text{slug} \\
I &= 0.1012\ \text{slug-ft}^2 \\
\ell &= 2.0833\ \text{ft} \\
k &= 36\ \text{lb/ft}
\end{aligned}
$$

Consideraremos que el primer estado del sistema sucede cuando la barra está a $\theta = 50^\circ$ y que el segundo estado sucede cuando la barra regresa a $\theta = 0^\circ$. Entonces en el segundo estado, tenemos:

$$
\begin{aligned}
\widehat{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{AG}} &= (+1,\,0) \\
\boldsymbol{r_{AG}} &= (\ell/2)\,\widehat{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{AG}} = 1.0417\,\widehat{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{AG}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{r_{AB}} &= \ell\, \widehat{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{AG}} = 2.0833\, \widehat{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{AG}} \\
\boldsymbol{v_A} &= (\,-v_A,\, 0\,)\ \text{ft/s} \\
\boldsymbol{v_B} &= (\,0,\, +v_B\,)\ \text{ft/s}
\end{aligned}
$$

Ahora, la deflección del resorte y el cambio de altura como función de θ puede ser calculados de la siguiente manera:

$$
\begin{aligned}
\Delta x(\theta) &= \ell - \ell\,\cos(\theta) = 2.0833\,(1-\cos(\theta))\ \text{ft} \\
\Delta h_G(\theta) &= (\ell/2)\,\sin(\theta) = 1.0417\,\sin(\theta)\ \text{ft}
\end{aligned}
$$

También podemos observar que las velocidades de A y B se relacionan por medio de la velocidad angular de la barra. Esto implica que:

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{v_B} &= \boldsymbol{v_A} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r_{AB}} \\
\implies \begin{bmatrix} 0 \\ +v_B \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -v_A \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ +\ell\,\omega \end{bmatrix} \\
\implies \boldsymbol{v_A} &= \boldsymbol{0}\ \text{ft/s}
\end{aligned}
$$

Consecuentemente:

$$
\boldsymbol{v_G} = \boldsymbol{v_A} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r_{AG}} = \boldsymbol{0} + \begin{bmatrix} 0 \\ +(\ell/2)\,\omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ +1.0417\,\omega \end{bmatrix}\ \text{ft/s}
$$

Es así que la energía cinética del cuerpo en el segundo estado es:

$$
\begin{aligned}
K_2 &= (1/2)\,m\,v_G^2 + (1/2)\,I\,\omega^2 \\
&= (1/2)\,[\,(0.2797)(1.0417^2) + 0.1012\,]\,\omega^2 = 0.2023\,\omega^2
\end{aligned}
$$

Con todo esto en mente podemos finalmente aplicar el Principio de Trabajo-Energía. Puesto que ninguna fuerza externa no-conservativa actúa sobre el sistema, la energía del sistema no puede cambiar entre estados. En el primer estado la energía total está concentrada en la deflección del resorte:

$$
E_1 = (1/2)\,k\,\Delta x(\theta = 50^\circ)^2 = 13.40\ \text{lb-ft}
$$

En el segundo estado no hay energía del resorte, sino solamente energía potencial gravitacional y energía cinética:

$$
E_2 = mg\,\Delta h_G(\theta = 50^\circ) + K_2 = 7.182 + 0.2023\,\omega^2
$$

Igualando las energías en los dos estados, y fijándonos que en el segundo estado la velocidad angular de la barra es contraria al sentido de las manecillas del reloj, tenemos:

$$
\boldsymbol{\omega} = +5.544\,\widehat{\boldsymbol{k}}\ \text{rad/s} \qquad \implies \qquad \boldsymbol{v_B} = +11.55\,\widehat{\boldsymbol{\jmath}}\ \text{ft/s}
$$

■