Modelos Estocásticos (INDG-1008): Examen 02

Semestre: 2017-2018 Término I **Instructor:** Luis I. Reyes Castro

COMPROMISO DE HONOR

Yo, ____________________ al firmar este compromiso, reconozco que la presente evaluación está diseñada para ser resuelta de manera individual, que puedo usar un lápiz o pluma y una calculadora científica, que solo puedo comunicarme con la persona responsable de la recepción de la evaluación, y que cualquier instrumento de comunicación que hubiere traído debo apagarlo. También estoy conciente que no debo consultar libros, notas, ni materiales didácticos adicionales a los que el instructor entregue durante la evaluación o autorice a utilizar. Finalmente, me comprometo a desarrollar y presentar mis respuestas de manera clara y ordenada.

Firmo al pie del presente compromiso como constancia de haberlo leído y aceptado.

Firma: ____________________ Número de matrícula: ____________________

Problema 2.1. [6 Puntos] La compañía 6M tiene un torno como pieza central de trabajo. Los trabajos llegan según un proceso Poisson con tasa media de dos por día y el tiempo de procesado de cada trabajo tiene distribución exponencial con media de seis horas. Como los trabajos son grandes se utiliza una bodega localizada a cierta distancia de la máquina para almacenar los trabajos en espera. Sin embargo, para ahorrar tiempo al moverlos el gerente de producción propone adecuar espacio junto al torno para tres trabajos. De esta manera, siempre se utilizaría primero el nuevo espacio para almacenamiento, y de haber más de tres trabajos en espera se pondrían los trabajos excedentes en la bodega. Con esta propuesta, qué porcentaje del tiempo será necesario utilizar el nuevo espacio pero no la bodega?

Solución: Modelamos este sistema como una cola $M/M/1$ con tasa de arribo $\lambda = 2$ por día y tasa de servicio $\mu = 4$ por día, lo que resulta en un factor de utilización $\rho = \lambda/\mu = 0.5$. Entonces, el porcentaje del tiempo que será necesario utilizar el nuevo espacio pero no la bodega es la probabilidad en estado estable del evento de que el número de clientes en cola sea menor o igual a tres, la cual es igual a la probabilidad de que el número de clientes en el sistema sea menor o igual a cuatro (puesto que $s = 1$). *I.e.:*

$$\sum_{n=0}^{4} P_n \;=\; \sum_{n=0}^{4} (1-\rho)\,\rho^n \;=\; 0.96875$$

Problema 2.2. [4 Puntos] El Security & Trust Bank tiene cuatro cajeros para atender a sus clientes, los cuales llegan según un proceso de arribo Poisson. En vista de que el negocio está en crecimiento la gerencia pronostica que la tasa de arribo será de 3.5 clientes por minuto dentro de un año. El tiempo de transacciones entre el cajero y el cliente tiene distribución exponencial con media de un minuto. La gerencia ha establecido los siguientes lineamientos para lograr un nivel de servicio satisfactorio:

- El número promedio de clientes en cola no debe exceder dos.
- El tiempo promedio de espera en cola no debe exceder los cinco minutos.

Con esto en mente, determine si el siguiente año el banco podrá cumplir con sus lineamientos de nivel de servicio.

Solución: Modelamos este sistema como una cola $M/M/4$ con tasa de arribo $\lambda = 3.5$ por minuto y tasa de servicio $\mu = 1$ por minuto, lo que resulta en un factor de utilización $\rho = \lambda/\mu = 0.875$.

Para estas métricas, tenemos:

$$P_0 \;=\; \left[\left(\sum_{n=0}^{s-1} \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} \right) + \frac{(\lambda/\mu)^s}{s!(1-\rho)} \right]^{-1} \;=\; \left(\frac{853}{48} + \frac{2401}{48} \right)^{-1} \;=\; 0.01475$$

$$\Longrightarrow\; L_q \;=\; P_0 \, \frac{(\lambda/\mu)^s \, \rho}{s! \, (1-\rho)^2} \;=\; 5.165 \qquad \Longrightarrow\; W_q \;=\; \frac{L_q}{\lambda} \;=\; 1.476 \text{ min}$$

Consecuentemente, el siguiente año el banco no podrá cumplir con sus lineamientos de nivel de servicio actuales.

Problema 2.3. [6 Puntos] Considere el siguiente modelo de su desempeño en este examen. El nivel de entendimiento que usted tiene de esta materia se clasifica en muy satisfactorio (MS), satisfactorio (S) e insatisfactorio (I). Usted puede obtener una calificación alta (C_1), moderada (C_2), aceptable (C_3) o inaceptable (C_4). La siguiente tabla provee las probabilidades de su calificación condicional en su nivel de entendimiento.

	Probabilidad Condicional de Calificación			
Entendimiento	$\mathbb{P}(Y = C_1 \mid X)$	$\mathbb{P}(Y = C_2 \mid X)$	$\mathbb{P}(Y = C_3 \mid X)$	$\mathbb{P}(Y = C_4 \mid X)$
$X = MS$	0.35	0.25	0.25	0.15
$X = S$	0.22	0.38	0.24	0.16
$X = I$	0.12	0.18	0.28	0.42

Suponiendo que su nivel de entiendimiento está uniformement distribuido, *i.e.,* que

$$\mathbb{P}(X = MS) \;=\; \mathbb{P}(X = S) \;=\; \mathbb{P}(X = I) \;=\; 1/3\,,$$

calcule la distribución de su nivel de entendimiento condicional en su calificación.

Solución: Primero calculamos las probabilidades de las calificaciones:

$$\begin{aligned} \forall\, C_i \,:\; \mathbb{P}(\,Y = C_i\,) \;&=\; \mathbb{P}(\,X = MS\,) \cdot \mathbb{P}(\,Y = C_i \mid X = MS\,) \\ &+\; \mathbb{P}(\,X = S\,) \cdot \mathbb{P}(\,Y = C_i \mid X = S\,) \\ &+\; \mathbb{P}(\,X = I\,) \cdot \mathbb{P}(\,Y = C_i \mid X = I\,) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Longrightarrow\; \mathbb{P}(\,Y = C_1\,) \;&=\; 0.230 \\ \mathbb{P}(\,Y = C_2\,) \;&=\; 0.270 \\ \mathbb{P}(\,Y = C_3\,) \;&=\; 0.257 \\ \mathbb{P}(\,Y = C_4\,) \;&=\; 0.243 \end{aligned}$$

Finalmente calculamos las probabilidades de los niveles de entendimiento condicionales en las calificaciones utilizando el Teorema de Bayes:

$$\forall\, C_i, \forall\, \text{Nivel} \,:\; \mathbb{P}(\,X = \text{Nivel} \mid Y = C_i\,) \;=\; \frac{\mathbb{P}(\,X = \text{Nivel}\,) \cdot \mathbb{P}(\,Y = C_i \mid X = \text{Nivel}\,)}{\mathbb{P}(\,Y = C_i\,)}$$

Los resultados se muestran en la siguiente tabla.

	Probabilidad Condicional de Entendimiento		
Calificación	$\mathbb{P}(X = MS \mid Y)$	$\mathbb{P}(X = S \mid Y)$	$\mathbb{P}(X = I \mid Y)$
$Y = C_1$	0.507	0.319	0.174
$Y = C_2$	0.309	0.469	0.222
$Y = C_3$	0.325	0.312	0.364
$Y = C_4$	0.205	0.219	0.575

Problema 2.4. [**4 Puntos**] Una Cadena de Markov tiene la siguiente matriz de transición:

$$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.6 & 0.4 \\ 0.8 & 0 & 0.2 & 0 \\ 0.6 & 0 & 0.4 & 0 \end{bmatrix}$$

Suponga que se acumulan recompensas en cada estado de acuerdo a la siguiente tabla:

Estado: i	1	2	3	4
Recompensa: $R(i)$	$+2$	0	$+4$	-1

Para un factor de descuento $\gamma = 0.95$ encuentre el Valor Actual Neto (VAN) de la recompensa total esperada suponiendo que la cadena arranca del estado uno.

Solución: Para cada estado i denotaremos al valor actual neto de la recompensa recibida si se arranca desde ese estado como $V(i)$. Entonces:

$$\forall \text{estado } i : \; V(i) \; = \; R(i) \; + \; \gamma \sum_{\text{estados } j} P(i,j)\, V(j)$$

Más precisamente, las ecuaciones de valor de los estados son:

$$\begin{aligned} V(1) &= +2 + 0.95\,(\,0.2\,V(1) + 0.8\,V(2)\,) \\ V(2) &= +0 + 0.95\,(\,0.6\,V(3) + 0.4\,V(4)\,) \\ V(3) &= +4 + 0.95\,(\,0.8\,V(1) + 0.2\,V(3)\,) \\ V(4) &= -1 + 0.95\,(\,0.6\,V(1) + 0.4\,V(3)\,) \end{aligned}$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones lineales encontramos que:

Estado: i	1	2	3	4
Valor: $V(i)$	+32.308	+31.802	+35.252	+30.811

Consecuentemente, el Valor Actual Neto (VAN) de la recompensa total esperada suponiendo que la cadena arranca del estado uno es +32.308 unidades.