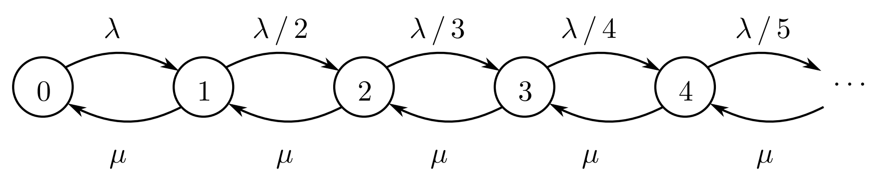
Modelos Estocásticos (INDG-1008): Trabajo Autónomo 03

Semestre: 2017-2018 Término II **Instructor:** Luis I. Reyes Castro

Problema 3.1. Considere la variante del modelo M/M/1 mostrada en la siguiente figura, donde la tasa de arribo decae harmónicamente con el número de clientes en el sistema.



Tomando $\rho = \lambda \,/\, \mu$ como es usual, complete las siguientes actividades:

a) 3 Puntos: Encuentre la probabilidad estacionaria de los estados uno, dos y tres en función de ρ y de la probabilidad estacionaria del estado cero, *i.e.*, exprese π_1, π_2 y π_3 en función de ρ y π_0.

b) 2 Puntos: Demuestre que si existe algún $n \geq 1$ tal que

$$\forall\, k \in \{\, 1, \, \ldots, \, n \,\} \, : \; \pi_k \;=\; \frac{\rho^k \, \pi_0}{k!}$$

entonces es el caso que:

$$\pi_{n+1} \;=\; \frac{\rho^{n+1} \, \pi_0}{(n+1)!}$$

c) 1 Punto: Existe alguna condición sobre ρ (aparte de ser positivo) que se debe cumplir para que el sistema tenga una distribución estacionaria?

d) 1 Punto: Calcule la distribución estacionaria del sistema, en los casos cuando existe, como función de ρ y k.

e) 2 Puntos: Calcule las métricas de desempeño L y L_q.

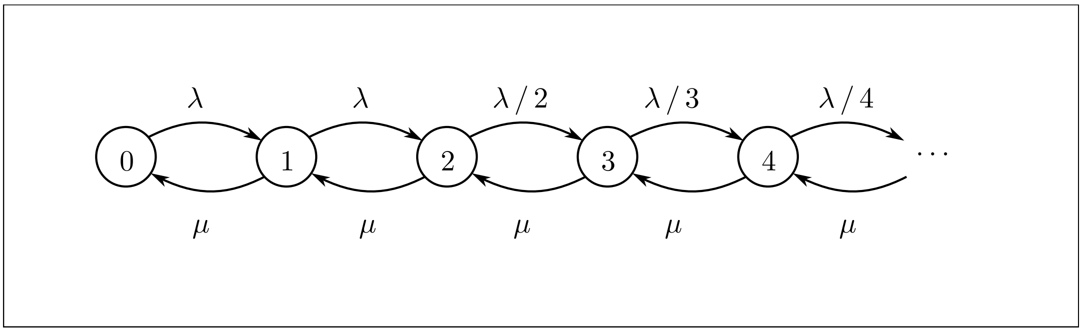
f) 2 Puntos: Calcule la tasa de arribo promedio

$$\bar{\lambda} \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k \, \pi_k$$

junto con las métricas de desempeño W y W_q.

Problema 3.2. Considere la variante del modelo M/M/1 mostrada en la siguiente figura, donde la tasa de arribo decae harmónicamente con el número de clientes en cola. Tomando $\rho = \lambda \,/\, \mu$ como es usual, complete las siguientes actividades:

a) 3 Puntos: Calcule la distribución estacionaria del sistema, en los casos cuando existe, como función de ρ y k.



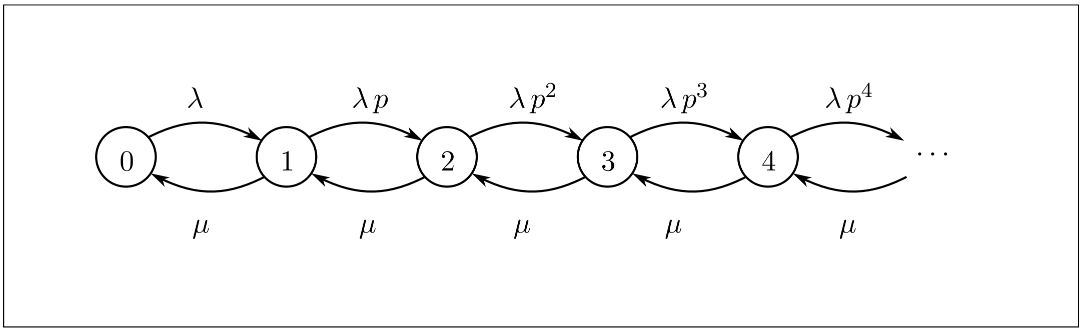
b) 2 Puntos: Calcule las métricas de desempeño L y L_q.

c) 2 Puntos: Calcule la tasa de arribo promedio

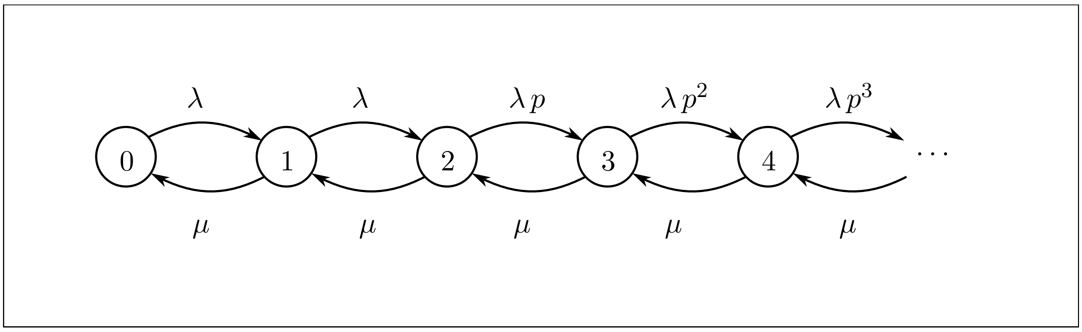
$$\bar{\lambda} \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k \, \pi_k$$

junto con las métricas de desempeño W y W_q.

Problema 3.3. [7 Puntos] Considere la siguiente variante del modelo M/M/1, donde $p \in (0,1)$ y la tasa de arribo decae geométricamente con el número de clientes en el sistema. Tomando $\rho = \lambda \,/\, \mu$, complete las mismas tres actividades del Problema 3.2.

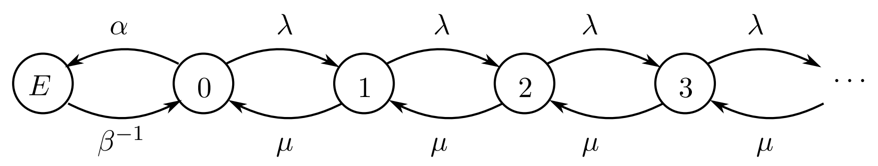


Problema 3.4. [7 Puntos] Considere la siguiente variante del modelo M/M/1, donde $p \in (0,1)$ y la tasa de arribo decae geométricamente con el número de clientes en cola. Tomando $\rho = \lambda \,/\, \mu$, complete las mismas tres actividades del Problema 3.2.



Problema 3.5. Considere la siguiente variante del modelo M/M/1 para una aplicación en telecomunicaciones digitales. En este modelo, cada vez que el sistema se vacía, *i.e.*, que se queda

sin paquetes que transmitir, se activa un reloj exponencial con parámetro α por milisegundo. Si no llega un nuevo paquete antes del primer tick del reloj entonces el sistema entra en modo de enfriamiento, el cual tiene una duración exponencial con media de β milisegundos. Cuando el sistema está en modo de enfriamiento todos los paquetes que arriban son rechazados.



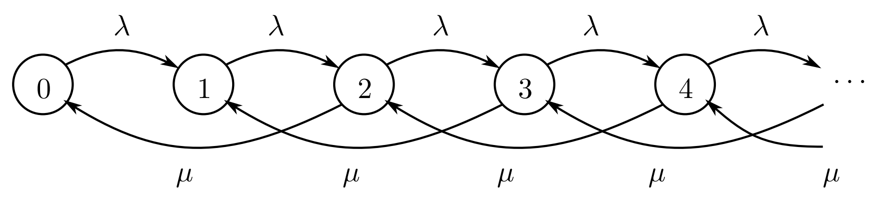
Tomando $\rho = \lambda \,/\, \mu$ como es usual, complete las siguientes actividades:

a) **3 Puntos:** Calcule la distribución estacionaria del sistema, en los casos cuando existe, como función de α, β, ρ, y k.

b) **2 Puntos:** Calcule las métricas de desempeño L y L_q, W y W_q.

c) **1 Punto:** Calcule el número esperado de paquetes rechazados por milisegundo.

Problema 3.6. Considere la siguiente variante del modelo M/M/2. En este modelo un único servidor atiene a los clientes en pares a una tasa de μ por período, pero no puede atender clientes de manera individual, *e.g.,* si el sistema está vacío y llega un cliente, se debe esperar hasta la llegada del siguiente cliente para empezar el servicio.



Tomando $\rho = \lambda \,/\, \mu$ como es usual, complete las siguientes actividades:

a) **3 Puntos:** Calcule la distribución estacionaria del sistema, en los casos cuando existe, como función de ρ, y k.

b) **2 Puntos:** Calcule las métricas de desempeño L y L_q, W y W_q.