Modelos Estocásticos (INDG-1008): Examen 01

Semestre: 2017-2018 Término I **Instructor:** Luis I. Reyes Castro

COMPROMISO DE HONOR

Yo, ______________________________ al firmar este compromiso, reconozco que la presente lección está diseñada para ser resuelta de manera individual, que puedo usar un lápiz o pluma y una calculadora científica, que solo puedo comunicarme con la persona responsable de la recepción de la lección, y que cualquier instrumento de comunicación que hubiere traído debo apagarlo. También estoy conciente que no debo consultar libros, notas, ni materiales didácticos adicionales a los que el instructor entregue durante la lección o autorice a utilizar. Finalmente, me comprometo a desarrollar y presentar mis respuestas de manera clara y ordenada.

Firmo al pie del presente compromiso como constancia de haberlo leído y aceptado.

Firma: ______________________________ Número de matrícula: ____________________

Problema 1.1. [**4 Puntos**] El call center de una empresa de servicios al consumidor recibe en promedio, $\lambda_1 = 11.9$ llamadas por hora para Servicio al Cliente y $\lambda_2 = 21.4$ llamadas por hora para Servicio Técnico. De los clientes que llaman para Servicio al Cliente el $p_{12} = 5.3\%$ es referido a Servicio Técnico, mientras que de los clientes que llaman a Servicio Técnico el $p_{21} = 17.6\%$ es referido a Servicio al Cliente. Con esto en mente, calcule el número promedio de clientes por hora que debe atender el departamento de Servicio al Cliente y el deparatamento de Servicio Técnico.

Sugerencia: Piense en términos de división y combinación de procesos.

Solución: Pensemos en las llamadas como siendo generadas por dos Procesos Poisson con intensidades λ_1 y λ_2. En este contexto, podemos pensar que en cada arribo al primer proceso se lanza una moneda sesgada con probabilidad de cara igual a p_{12}, independiente de todos los otros arribos. Si sale cara entonces el arribo es enviado al segundo proceso, caso contrario este se mantiene en el primer proceso. Con estas consideraciones en mente, recordando nuestros resultados para división y combinación de procesos Poisson vemos que el número promedio de clientes por hora que debe atender el departamento de Servicio al Cliente es:

$$\lambda_1 \, (1 - p_{12}) + \lambda_2 \, p_{21} \;=\; (11.9)(1 - 0.053) + (21.4)(0.176) \;=\; 15.04$$

Similarmente, el número promedio de clientes por hora que debe atender el departamento de Servicio Técnico es:

$$\lambda_1 \, p_{12} + \lambda_2 \, (1 - p_{21}) \;=\; (11.9)(0.053) + (21.4)(1 - 0.176) \;=\; 18.26$$

Problema 1.2. Una máquina caprichosa tiene el siguiente comportamiento:

- Si la máquina termina el día en buen estado, la misma terminará el siguiente día en buen estado con probabilidad p. Caso contrario terminará averiada.
- Si la máquina termina el día averiada entonces los técnicos se tomarán todo el siguiente día para intentar arreglarla. Con probabilidad q lograrán arreglar la máquina; caso contrario, tendrán que volverlo a intentar el siguiente día.

Con todo esto en mente:

a. [**2 Puntos**] Construya un modelo de Cadena de Markov del comporamiento de esta máquina. En particular, bosqueje el grafo y construya la matriz de transición.

b. [**4 Puntos**] Encuentre la distribución en estado estable de su modelo.

Solución al literal (a): Los estados son:

1. La máquina termina el día en buen estado.
2. La máquina termina el día averiada.

La matriz de transición es:

$$\boldsymbol{P} \;=\; \begin{bmatrix} p & 1-p \\ q & 1-q \end{bmatrix}$$

Solución al literal (b): La ecuación de estado estable para el primer estado es:

$$\pi_1 \;=\; p\,\pi_1 + q\,\pi_2$$

Consecuentemente:

$$\pi_2 \;=\; \left(\frac{1-p}{q}\right)\pi_1$$

A su vez, dado que $\pi_1 + \pi_2 = 1$, vemos que:

$$\left(1 + \frac{1-p}{q}\right)\pi_1 \;=\; 1 \qquad \Longrightarrow \qquad \pi_1 \;=\; \frac{q}{1-p+q} \qquad \Longrightarrow \qquad \pi_2 \;=\; \frac{1-p}{1-p+q}$$

Problema 1.3. [**7 Puntos**] Un operador de servicios de telefonía celular está en proceso de instalar una antena en un barrio promedio, donde se puede esperar que la antena reciba un paquete de datos para su transmisión durante cada ciclo (*e.g.,* durante cada milisegundo) con probabilidad $\lambda \in (0.99, 1)$. Para poder satisfacer esta demanda se instaló un buffer con capacidad para M paquetes de datos junto con n transmisores que operan en canales independientes pero ruidosos; en particular, cada transmisor que es encargado con el envío de un paquete logra transmitirlo exitosamente con probabilidad $\mu \in (0.94, 0.98)$. Cuando una transmisión fracasa se mantiene al paquete en el buffer y se reintenta la transmisión en el siguiente período.

Cada ciclo de operación, digamos el t^{avo} ciclo, avanza de la siguiente manera:

1. Se empieza el ciclo con X_{t-1} paquetes en el búffer.
2. Si el buffer no está lleno, se puede recibir un nuevo paquete con probabilidad λ, de tal manera que el nuevo número de paquetes en el buffer es:

$$\min\{\; X_{t-1} + D_t\,,\; M \;\}\,, \qquad \text{donde } D_t \sim \text{Bernoulli}(\lambda)$$

3. Los transmisores intentan enviar cuantos paquetes puedan. Si hay n paquetes o más en el buffer, entonces cada uno de los transmisores es asignado aleatoriamente a un único paquete, y cada transmisor logra enviar su paquete con éxito con probabilidad μ, independiente de los otros. Si hay menos de n paquetes en el buffer se opera de la misma manera, pero en este caso habrá uno o más transmisores a los que no será necesario asignarles paquetes durante este ciclo.

Con todo esto en mente, construya un modelo de Cadena de Markov de este proceso para el caso particular cuando $M = 5$ y $n = 3$. En particular, explique cuales son los estados y liste todas las probabilidades de transición positivas.

Nota: En vez de listar las probabilidades usted puede construir la matriz de transición siempre y cuando la desarrolle con suficiente espacio, *e.g.,* en una hoja vacía en formato retrato.

Sugerencia: La suma de k variables aleatorias i.i.d. con distribución Bernoulli(μ) es una variable aleatoria con distribución Binomial(k, μ).

Solución: Consideramos cada posible estado:

- Si $X_{t-1} = 0$ entonces:
  - Si $X_t = 0$ es porque hubo un arribo de paquete y una transmisión exitosa o porque no hubo un arribo de paquete, *i.e.:*

$$\boldsymbol{P}(0,0) \;=\; \lambda\,\mu + (1-\lambda)$$

  - Si $X_t = 1$ es porque hubo un arribo de paquete y una transmisión fallida, *i.e.:*

$$\boldsymbol{P}(0,1) \;=\; \lambda\,(1-\mu)$$

- Si $X_{t-1} = 1$ entonces:
  - Si $X_t = 0$ es porque hubo un arribo de paquete y dos de las dos transmisiones fueron exitosas o porque no hubo un arribo de paquete y la única transmisión fue exitosa, *i.e.:*

$$\boldsymbol{P}(1,0) \;=\; \lambda\,\mu^2 + (1-\lambda)\,\mu$$

  - Si $X_t = 1$ es porque hubo un arribo de paquete y una de las dos transmisiones fue exitosa o porque no hubo un arribo de paquete y la única transmisión fue fallida, *i.e.:*

$$\boldsymbol{P}(1,1) \;=\; \lambda\binom{2}{1}\mu\,(1-\mu) + (1-\lambda)\,(1-\mu)$$

  - Si $X_t = 2$ es porque hubo un arribo de paquete y dos de las dos transmisiones fueron fallidas, *i.e.:*

$$\boldsymbol{P}(1,2) \;=\; \lambda\,(1-\mu)^2$$

- Si $X_{t-1} = 2$ entonces:
  - Si $X_t = 0$ es porque hubo un arribo de paquete y tres de las tres transmisiones fueron exitosas o porque no hubo un arribo de paquete y dos de las dos transmisiones fueron exitosas, *i.e.:*

$$\boldsymbol{P}(2,0) \;=\; \lambda\,\mu^3 + (1-\lambda)\,\mu^2$$

  - Si $X_t = 1$ es porque hubo un arribo de paquete y dos de las tres transmisiones fueron exitosas o porque no hubo un arribo de paquete y una de las dos transmisiones fue exitosa, *i.e.:*

$$\boldsymbol{P}(2,1) \;=\; \lambda\binom{3}{2}\mu^2\,(1-\mu) + (1-\lambda)\binom{2}{1}\mu\,(1-\mu)$$

  - Si $X_t = 2$ es porque hubo un arribo de paquete y una de las tres transmisiones fue exitosa o porque no hubo un arribo de paquete y dos de las dos transmisiones fueron fallidas, *i.e.:*

$$\boldsymbol{P}(2,2) \;=\; \lambda\binom{3}{1}\mu\,(1-\mu)^2 + (1-\lambda)\,(1-\mu)^2$$

- Si $X_t = 3$ es porque hubo un arribo de paquete y tres de las tres transmisiones fueron fallidas, *i.e.:*

$$\boldsymbol{P}(2,3) \;=\; \lambda\,(1-\mu)^3$$

- Si $X_{t-1} = 3$ entonces:
  - Si $X_t = 0$ es porque no hubo un arribo de paquete y tres de las tres transmisiones fueron exitosas, *i.e.:*

$$\boldsymbol{P}(3,0) \;=\; (1-\lambda)\,\mu^3$$

  - Si $X_t = 1$ es porque hubo un arribo de paquete y tres de las tres transmisiones fueron exitosas o porque no hubo un arribo de paquete y dos de las tres transmisiones fueron exitosas, *i.e.:*

$$\boldsymbol{P}(3,1) \;=\; \lambda\,\mu^3 + (1-\lambda)\binom{3}{2}\mu^2\,(1-\mu)$$

  - Si $X_t = 2$ es porque hubo un arribo de paquete y dos de las tres transmisiones fueron exitosas o porque no hubo un arribo de paquete y una de las tres transmisiones fue exitosa, *i.e.:*

$$\boldsymbol{P}(3,2) \;=\; \lambda\binom{3}{2}\mu^2\,(1-\mu) + (1-\lambda)\binom{3}{1}\mu\,(1-\mu)^2$$

  - Si $X_t = 3$ es porque hubo un arribo de paquete y una de las tres transmisiones fue exitosa o porque no hubo un arribo de paquete y tres de las tres transmisiones fueron fallidas, *i.e.:*

$$\boldsymbol{P}(3,3) \;=\; \lambda\binom{3}{1}\mu\,(1-\mu)^2 + (1-\lambda)\,(1-\mu)^3$$

  - Si $X_t = 4$ es porque hubo un arribo de paquete y tres de las tres transmisiones fueron fallidas, *i.e.:*

$$\boldsymbol{P}(3,4) \;=\; \lambda\,(1-\mu)^3$$

- Si $X_{t-1} = 4$ entonces:
  - Si $X_t = 1$ es porque no hubo un arribo de paquete y tres de las tres transmisiones fueron exitosas, *i.e.:*

$$\boldsymbol{P}(4,1) \;=\; (1-\lambda)\,\mu^3$$

  - Si $X_t = 2$ es porque hubo un arribo de paquete y tres de las tres transmisiones fueron exitosas o porque no hubo un arribo de paquete y dos de las tres transmisiones fueron exitosas, *i.e.:*

$$\boldsymbol{P}(4,2) \;=\; \lambda\,\mu^3 + (1-\lambda)\binom{3}{2}\mu^2\,(1-\mu)$$

  - Si $X_t = 3$ es porque hubo un arribo de paquete y dos de las tres transmisiones fueron exitosas o porque no hubo un arribo de paquete y una de las tres transmisiones fue exitosa, *i.e.:*

$$\boldsymbol{P}(4,3) \;=\; \lambda\binom{3}{2}\mu^2\,(1-\mu) + (1-\lambda)\binom{3}{1}\mu\,(1-\mu)^2$$

– Si $X_t = 4$ es porque hubo un arribo de paquete y una de las tres transmisiones fue exitosa o porque no hubo un arribo de paquete y tres de las tres transmisiones fueron fallidas, *i.e.:*

$$\boldsymbol{P}(4,4) \;=\; \lambda \binom{3}{1} \mu\,(1-\mu)^2 + (1-\lambda)\,(1-\mu)^3$$

– Si $X_t = 5$ es porque hubo un arribo de paquete y tres de las tres transmisiones fueron fallidas, *i.e.:*

$$\boldsymbol{P}(4,5) \;=\; \lambda\,(1-\mu)^3$$

- Si $X_{t-1} = 5$ entonces:

  – Si $X_t = 2$ es porque tres de las tres transmisiones fueron exitosas, *i.e.:*

  $$\boldsymbol{P}(5,2) \;=\; \mu^3$$

  – Si $X_t = 3$ es porque dos de las tres transmisiones fueron exitosas, *i.e.:*

  $$\boldsymbol{P}(5,3) \;=\; \binom{3}{2} \mu^2\,(1-\mu)$$

  – Si $X_t = 4$ es porque una de las tres transmisiones fue exitosa, *i.e.:*

  $$\boldsymbol{P}(5,4) \;=\; \binom{3}{1} \mu\,(1-\mu)^2$$

  – Si $X_t = 5$ es porque tres de las tres transmisiones fueron fallidas, *i.e.:*

  $$\boldsymbol{P}(5,5) \;=\; (1-\mu)^3$$

Problema 1.4. Considere un proceso estocástico Markoviano X_0, X_1, X_2, ... cuyos estados son los enteros no-negativos. El proceso evoluciona de la siguiente manera:

- Si $X_t = 0$ entonces:

$$X_{t+1} \;=\; \begin{cases} 1, & \text{con probabilidad } p \\ 0, & \text{con probabilidad } 1-p \end{cases}$$

- Si $X_t > 0$ entonces:

$$X_{t+1} \;=\; \begin{cases} X_t + 1, & \text{con probabilidad } p \\ X_t - 1, & \text{con probabilidad } q \\ X_t, & \text{con probabilidad } 1-p-q \end{cases}$$

Con todo esto en mente:

a. [**2 Puntos**] Construya un modelo de Cadena de Markov de nacimiento-muerte para este proceso. En particular, bosqueje el grafo para los primeros cuatro estados.

b. [**3 Puntos**] Escriba las ecuaciones de estado estable para los primeros tres estados.

c. [**2 Puntos**] Escriba las probabilidades en estado estable de los números uno y dos en función de la probabilidad en estado estable del número cero.

d. [**3 Puntos**] Escriba una expresión para la probabilidad en estado estable de cualquier número $i \geq 1$ como función de la probabilidad en estado estable del número cero.