Modelos Estocásticos (INDG-1008): Banco de Problemas 01

Semestre: 2018-2019 Término I **Instructor:** Luis I. Reyes Castro

Problema 1.1. Un fabricante tiene un par de máquinas complicadas. Al comienzo de cada día si la máquina principal está operativa entonces con probabilidad p la misma se descompondrá durante el día y los técinos serán llamados para arreglarla al día siguiente. Puesto que los técnicos siempre se toman dos días para arreglar la máquina, el fabricante tiene una máquina de repuesto que utiliza solamente cuando la máquina principal está descompuesta. Similar al caso de la máquina principal, si al comienzo de cualquier día la máquina de repuesto está operativa entonces con probabilidad q se descompondrá durante el día y los técnicos serán llamados a repararla al día siguiente. Nuevamente, los técnicos se tomarán dos días en arreglar la máquina.

Modele esta nueva situación como una cadena de Markov y construya la matriz de transición en función de p y q. No necesita bosquejar el grafo de la cadena ni calcular probabilidades en estado estable.

Sugerencia: En clase vimos un ejemplo similar, el cual corresponde a una máquina considerada individualmente; en este caso para cada máquina el modelo tendría tres estados. Partiendo de este modelo de tres estados para la máquina principal, junto con un modelo similar de tres estado para la máquina de repuesto, usted deberá tomar el "producto" de estos dos modelos para construir una Cadena de Markov con nueve estados. Más precisamente, para cada par $k, \ell \in \{0, 1, 2\}$ introduzca un estado (k, ℓ) que modele días cuando la máquina principal lleva k mañanas dañada y la máquina de repuesto lleva ℓ mañanas dañada.

Problema 1.2. Suponga que usted trabaja en una concesionaria de maquinaria industrial y para la construcción. Usted ha sido encargado con calcular un precio para la garantía de tres años para excavadoras que ofrece la empresa. Para lograrlo usted ha investigado los archivos del departamento de ventas, lo cual condujo a las siguientes observaciones:

- El 4% de los clientes solicitan la garantía en el primer año.
- El 3% de los clientes que no tuvieron problemas con su máquina en el primer año solicitan la garantía en el segundo año.
- El 8% de los clientes que no tuvieron problemas con su máquina en el primer y segundo año solicitan la garantía en el tercer año.

Suponiendo que cada excavadora se vende en 180 mil dólares, calcule el precio mínimo de una garantía de tres años.

Problema 1.3. Suponga que usted ha sido encargado con del manejo del inventario de algunos productos no-perecederos en un supermercado que abre todos los días a sus clientes por la misma cantidad de tiempo. Para mantener una consistencia en el manejo de inventario a través de los varios productos que se venden en el supermercado, el gerente ha dispuesto que todos los inventarios se controlen mediante políticas de punto de reposición.

Más precisamente, al final de cada día se cuenta el inventario del producto y si este es menor o igual a I_{rep} unidades se hace un pedido de reposición por Q_{rep} unidades al proveedor, el cual es entregado por el mismo al comienzo del siguiente día antes de la hora de apertura de la tienda; caso contrario, no se hace un pedido de reposición. Fíjese que bajo estas suposiciones el máximo inventario posible es:

$$I_{max} = I_{rep} + Q_{rep}$$

Adicionalmente,como es de costumbre en este campo de estudio, usted hace la suposición simplificatoria que las demandas del producto D_1, D_2, ... constituyen una secuencia de variables aleatorias i.i.d. con distribución Poisson con parámetro λ. Más aún, si para cada día t denotamos a I_t como el inventario a la hora de apertura de la tienda del t^{avo} día, a D_t como la demanda del día, *i.e.,* la cantidad que se vendería ese día si el inventario fuere inagotable, a R_t como la cantidad repuesta entre la noche del t^{avo} día y la hora de apertura del $(t+1)^{\text{avo}}$ día, tenemos que:

$$I_{t+1} \;=\; \max\{\,0,\, I_t - D_t\,\} + R_t\,; \qquad R_t \;=\; \begin{cases} Q_{rep}, & \text{si } 0 \le I_t \le I_{rep}\,; \\ 0, & \text{caso contrario;} \end{cases}$$

Con todo esto en mente, para cada problema de manejo de inventario con demanda λ y política de punto de reposición (I_{rep}, Q_{rep}) podemos construir una Cadena de Markov con $n = I_{max} + 1$ estados (cada uno asociado a un nivel de inventario).

a) Construya la matriz de transición para el problema para cada uno de los siguientes casos: Por favor presente sus matrices como tablas con los decimales redondeados a tres dígitos.

Caso	$\boldsymbol{\lambda}$	$\boldsymbol{I_{rep}}$	$\boldsymbol{Q_{rep}}$
Producto 1 - Política A	0.8	1	1
Producto 1 - Política B	0.8	2	1
Producto 2 - Política A	1.5	1	3
Producto 2 - Política B	1.5	2	2

b) Calcule la distribución en estado estable para cada uno de los cuatro casos de la actividad anterior. Por favor presente sus resultados en dos tablas separados, una para cada producto, de tal manera que se pueda apreciar la influencia de la política de manejo de inventario sobre la distribución estacionaria de la cadena.

c) Para comparar las políticas necesitamos una función de utilidad. En nuestro caso, la función de utilidad será la diferencia entre la ganancia por ventas y el costo de retención de la mercadería, puesto que el supermercado gana u dólares por unidad de producto vendida pero afronta un costo de c dólares por unidad de producto en inventario.

El número esperado de unidades de un producto que se venden depende del nivel de inventario. En particular, si para un día t y un nivel de inventario I_t denotamos al número esperado de unidades que se venderán ese día como $v(I_t)$ podemos ver que:

$$v(I_t) \;=\; (0)\,\mathbb{P}(D_t = 0) + (1)\,\mathbb{P}(D_t = 1) + \cdots + (I_t)\,\mathbb{P}(D_t \ge I_t)$$

Entonces la utilidad diaria esperada de un nivel de inventario $I_t \in \{\,0,\,1,\,\ldots,\,I_{max}\,\}$ se calcula de la siguiente manera:

$$\text{Utilidad}(I_t) \;=\; u\,v(I_t) - c\,I_t$$

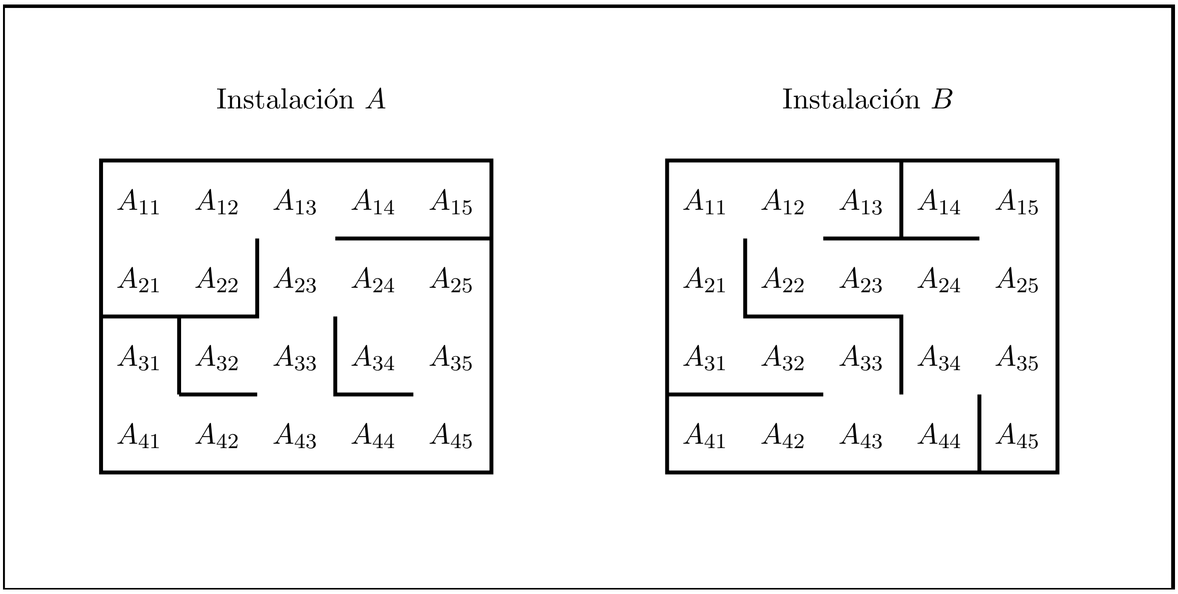
Con esto en mente, es evidente que podemos evaluar el desempeño de una política α ponderando las utilidades de los niveles de inventario por la distribución estacionaria:

$$\text{Utilidad}\,(\alpha) \;=\; \sum_{i=0}^{I_{max}} \pi^*_\alpha(i) \cdot \text{Utilidad}(i)$$

Finalmente, suponiendo que el Producto A produce una ganancia de $u = \$7.25$ por unidad y tiene un costo de retención por unidad por día de $c = \$0.16$, calcule la utilidad de cada una de las dos políticas propuestas e indique cuál de las dos es mejor. Luego repita el ejercicio para el Producto B suponiendo que $u = \$2.55$ y que $c = \$0.10$.

■

Problema 1.4. Busque en YouTube el video *"Can a Chess Piece Explain Markov Chains?"* del canal PBS Infinite Series. Estudie el truco que el la presentadora utilizó para calcular la distribución estacionaria de un caballo que se mueve sobre un tablero de ajedrez de manera aleatoria. Luego, considere un conjunto de instalaciones industriales vigiladas por robots; los mapas de las instalaciones se muestran en la figura de abajo. En cada instalación, el robot empieza en un área aleatoria y hace transiciones a otras áreas adjacentes (o a la misma área) con probabilidad uniforme.



Complete las siguientes actividades:

a) Aprovechando el truco para el caballo, calcule, para cada instalación mostrada en la figura, la frecuencia de visitas a las áreas A_{ij} en el largo plazo y preséntelas sobre un mapa de la instación. Adicionalmente, indique cuáles son las áreas más seguras y las áreas más vulnerables.

b) Empezando con la política aleatoria uniforme, modifique las probabilidades de transición del robot del tal manera que a largo plazo todas las áreas A_{ij} sean visitadas con la misma frecuencia. (Obviamente, respetando las paredes). En particular, para cada instalación presente el grafo de la nueva cadena.
Sugerencia: Imite el truco explicado por el instructor que consistía en disponer el mismo número de 'robots virtuales' en cada área y luego elegir probablidades de transición en cada estado que cumplan con las ecuaciones de balance.
Nota: Esta última actividad no tiene una respuesta correcta única.

Problema 1.5. **[4 Puntos]** Una Cadena de Markov tiene la siguiente matriz de transición:

$$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.6 & 0.4 \\ 0.8 & 0 & 0.2 & 0 \\ 0.6 & 0 & 0.4 & 0 \end{bmatrix}$$

Suponga que se acumulan recompensas en cada estado de acuerdo a la siguiente tabla:

Estado: i	1	2	3	4
Recompensa: $R(i)$	$+2$	± 0	$+4$	-1

Complete las siguientes actividades:

a) Calcule la recompensa esperada por periodo, a largo plazo.

b) Para una tasa de interés $r = 12\%$ encuentre el Valor Actual Neto (VAN) de la recompensa total esperada suponiendo que la cadena arranca del estado uno.

■

Problema 1.6. Un transmisor digital tiene un *buffer* con capacidad para tres paquetes. En cada ciclo que empieza con al menos un paquete en el buffer el transmisor intenta enviar un paquete. El paquete es enviado con éxito con probabilidad p, caso contrario será necesario re-intentar el envío en el siguiente período. Además, en cada ciclo que empieza con dos o menos paquetes el transmisor recibe un nuevo paquete con probabilidad q. Suponga que en cada ciclo primero se intenta enviar un paquete, si hay al menos uno en el buffer, y luego se receptan nuevos paquetes si hay espacio en el buffer.

Con esto en mente:

a) Modele el número de paquetes en el buffer como una Cadena de Markov con cuatro estados. En particular, provea el grafo de la cadena.

b) Suponiendo que $p = 0.9$ y $q = 0.6$, y que actualmente el buffer está lleno, encuentre el número esperado de ciclos que transcurrirán hasta la primera vez que el buffer este vacío.

c) Ahora suponga que se cambia la disciplina del transmisor, de tal manera que en cada ciclo primero se pueden receptar nuevos paquetes si hay espacio en el buffer y luego se intenta enviar un paquete (a menos que el buffer esté vacío). Bosqueje el grafo de la nueva cadena.

Problema 1.7. Investigue el algoritmo PageRank y explique brevemente (*e.g.,* en un párrafo) cómo se relaciona con los modelos de Cadenas de Markov. ■

Problema 1.8. Considere un proceso estocástico Markoviano X_0, X_1, X_2, … cuyos estados son los enteros no-negativos. El proceso evoluciona de la siguiente manera:

- Si el estado $X_t = 0$ entonces:

$$\text{el estado } X_{t+1} \;=\; \begin{cases} 1, & \text{con probabilidad } p \\ 0, & \text{con probabilidad } 1-p \end{cases}$$

- Si el estado $X_t = k > 0$ entonces:

$$\text{el estado } X_{t+1} \;=\; \begin{cases} k+1, & \text{con probabilidad } p \\ k-1, & \text{con probabilidad } q \\ k, & \text{con probabilidad } 1-p-q \end{cases}$$

Con todo esto en mente:

a) Construya un modelo de Cadena de Markov de nacimiento-muerte para este proceso. Para esto bosqueje el grafo para los primeros estados y para un estado típico $k \geq 2$.

b) Escriba las ecuaciones de balance para los primeros dos estados. Luego, escriba las ecuaciones de balance para el caso de un estado típico $k \geq 2$.

c) Escriba las probabilidades estacionarias de los estados uno y dos (*i.e.*, π_1 y π_2) en función de la probabilidad estacionaria del estado cero (π_0). Luego, formule una hipótesis inductiva para la forma general de las probabilidades estacionarias de un estado típic k (π_k) en función de la probabilidad estacionaria del estado cero (π_0) y demuéstrela.

■