Modelos Estocásticos para Manufactura y Servicios (INDG-1008): **Unidad 02**

Luis I. Reyes Castro

Escuela Superior Politécnica del Litoral (ESPOL)
Guayaquil - Ecuador

2017 - Primer Término

Modelamiento

Una **Cadena de Markov de Tiempo Continuo** es un modelo matemático de un proceso estocástico en tiempo continuo constituído por:

- Conjunto finito de n estados, donde cada estado es una representación de una posible situación de interés.
- Matriz de tasas de transición $\boldsymbol{Q} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, donde:
  - Para todo estado i suponemos que $\boldsymbol{Q}(i,i) = 0$
  - Para todo estado i definimos a la tasa del salida de ese estado como:

$$\boldsymbol{Q}(i) \triangleq \sum_{1 \leq j \leq n} \boldsymbol{Q}(i,j)$$

  - Para cada par de estados i, j:

$$\boldsymbol{P}(i,j) = \mathbb{P}(\text{ siguiente estado sea } j \mid \text{estado actual es } i\,) = \frac{\boldsymbol{Q}(i,j)}{\boldsymbol{Q}(i)}$$

Modelamiento

- Cada vez que la cadena ingresa a un estado i la duración del intervalo durante el cual la cadena permanece en ese estado, denotado T_i, es una variable aleatoria con distribución exponencial. Más precisamente:

$$T_i \sim \text{Exponencial}\left(\, \boldsymbol{Q}(i) \,\right)$$

- Observe además que para cualquier estado i la sumatoria de las tasas de transición $\boldsymbol{Q}(i,j)$ es positiva pero generalmente diferente de uno.

Modelamiento

Ejemplo:

Un taller tiene dos máquinas idénticas en operación continua excepto cuando se descomponen. Como lo hacen con bastante frecuencia, el taller dispone de un técnico contratado a tiempo completo para repararlas cuando es necesario.
El tiempo que se requiere para reparar una máquina tiene distribución exponencial con media de 0.5 días. Una vez que se termina la reparación, el tiempo que transcurre hasta la siguiente descompostura tiene distribución exponencial con media de un 1.0 días. Estas distribuciones son independientes.

Modele la situación descrita como una Cadena de Markov en Tiempo Continuo.

Distribución Estacionaria

Cálculo de la Distribución en Estado Estable:

1. Descartamos todos los estados transitorios.
2. Escribimos una ecuación de balance para cada uno de los n estados:

$$\forall \, \text{estado } x: \; \boldsymbol{\pi}(x) \, \boldsymbol{Q}(x) \; = \sum_{\text{estados } i} \boldsymbol{\pi}(i) \, \boldsymbol{Q}(i, x)$$

3. Desechamos arbitrariamente una de las n ecuaciones anteriores y la reemplazamos por:

$$\sum_{\text{estados } x} \boldsymbol{\pi}(x) \; = \; 1$$

4. Resolvemos el sistema de ecuaciones lineales resultante, el cual tiene n incógnitas y n ecuaciones linealmente independientes.

Distribución Estacionaria

Ejemplo:

Un taller tiene dos máquinas idénticas en operación continua excepto cuando se descomponen. Como lo hacen con bastante frecuencia, el taller dispone de un técnico contratado a tiempo completo para repararlas cuando es necesario.
El tiempo que se requiere para reparar una máquina tiene distribución exponencial con media de 0.5 días. Una vez que se termina la reparación, el tiempo que transcurre hasta la siguiente descompostura tiene distribución exponencial con media de un 1.0 días. Estas distribuciones son independientes.

Calcule el porcentaje del tiempo que el taller tiene:

- Las dos máquinas operativas.
- Una máquina operativa y una descompuesta.
- Las dos máquinas descompuestas.

Distribución Estacionaria

Ejemplo - Modelo M/M/1:

Un sistema de colas cuenta con un único servidor cuyo tiempo de servicio está exponencialmente distribuído con una tasa de μ por hora. Asumiendo que los clientes llegan de acuerdo a un proceso Poisson con tasa de arribo de λ por hora, encuentre:

- Las condiciones sobre μ y λ para que exista una distribución estacionaria.
- La distribución estacionaria en función de μ y λ.