# Programación Entera (INDG-1019): Guía de Estudio 01

**Semestre:** 2018-2019 Término I **Instructor:** Luis I. Reyes Castro

**Problema 1.1.** Considere un programa entero que contiene $m \geq 10$ variables binarias

$$x_1,\, x_2,\, x_3,\, \ldots,\, x_m \in \{0, 1\}$$

junto con otras variables adicionales. En cada uno de los siguientes literales, se le presentará un conjunto de suposiciones seguido de una regla o preferencia. Exprese cada una de las reglas o preferencias en el lenguaje de la programación lineal entera mediante la introducción de variables enteras y/o de restricciones lineales. Por favor considere que cada literal es independiente de todos los otros.

a) *Suposiciones:* $2 \leq n < m$ ; $y \in \{0, 1\}$.
*Regla o preferencia:* Si el número de índices $i \in [\![m]\!]$ tales que $x_i = 1$ es igual o mayor a $n$ entonces $y = 1$.

*Solución*: Introducimos la siguiente restricción lineal:

$$\sum_{i=1}^{m} x_i \;\leq\; (n-1) + (m-n+1)\, y$$

b) *Suposiciones:* $2 \leq n < m$ ; $y \in \{0, 1\}$.
*Regla o preferencia:* Si el número de índices $i \in [\![m]\!]$ tales que $x_i = 1$ es menor o igual a $n$ entonces $y = 1$.

c) *Suposiciones:* $2 \leq n < m$ ; $y \in \{0, 1\}$.
*Regla o preferencia:* La variable $y = 1$ si y solo si el número de índices $i \in [\![m]\!]$ tales que $x_i = 1$ es igual o mayor a $n$.

d) *Suposiciones:* $2 \leq n < m$ ; $y \in \{0, 1\}$.
*Regla o preferencia:* La variable $y = 1$ si y solo si el número de índices $i \in [\![m]\!]$ tales que $x_i = 1$ es exactamente igual a $n$.

e) *Suposiciones:* $z \in \{0, 1\}$ ; $2 \leq n < m$.
*Regla o preferencia:* Si $z = 1$ entonces el número de índices $i \in [\![m]\!]$ tales que $x_i = 1$ debe ser igual o mayor a $n$.

f) *Suposiciones:* $z \in \{0, 1\}$ ; $2 \leq n < m$.
*Regla o preferencia:* Si $z = 1$ entonces el número de índices $i \in [\![m]\!]$ tales que $x_i = 1$ debe ser exactamente igual a $n$.

g) *Suposiciones:* $S \subseteq [\![m]\!]$ es un subconjunto de índices; $w \in \{0, 1\}$.
*Regla o preferencia:* Si para cualquier índice $i \in S$ tenemos $x_i = 1$ entonces $w = 1$.

*Solución*: Introducimos el siguiente juego de restricciones lineales:

$$\forall\, i \in S \,:\; x_i \leq w$$

h) *Suposiciones:* $S \subseteq [\![m]\!]$ es un subconjunto de índices; $w \in \{0, 1\}$.
*Regla o preferencia:* Si para todo índice $i \in S$ tenemos $x_i = 1$ entonces $w = 1$.

i) *Suposiciones:* $S \subseteq [\![m]\!]$ es un subconjunto de índices; $w \in \{0, 1\}$.
*Regla o preferencia:* La variable $w = 1$ si y solo si para todo índice $i \in S$ tenemos $x_i = 1$.

j) *Suposiciones:* $S, T \subseteq [\![m]\!]$ son subconjuntos de índices.
*Regla o preferencia:* El número de índices $i \in S$ tales que $x_i = 1$ es mayor o igual al número de índices $j \in T$ tales que $x_j = 1$.

*Solución:* Introducimos la siguiente restricción lineal:

$$\sum_{i \in S} x_i \ \geq \ \sum_{j \in S} x_j$$

k) *Suposiciones:* $S, T \subseteq [\![m]\!]$ son subconjuntos de índices; $\ w \in \{0, 1\}$.
*Regla o preferencia:* Si el número de índices $i \in S$ para los cuales $x_i = 1$ es igual o mayor al número de índices $j \in S$ para los cuales $x_j = 1$ entonces $w = 1$.

l) *Suposiciones:* $S, T \subseteq [\![m]\!]$ son subconjuntos de índices.
*Regla o preferencia:* Si $x_i = 1$ para al menos un índice $i \in S$ entonces $x_j = 1$ para al menos un índice $j \in T$.

m) *Suposiciones:* $S, T \subseteq [\![m]\!]$ son subconjuntos de índices.
*Regla o preferencia:* Si $x_i = 1$ para al menos un índice $i \in S$ entonces $x_j = 0$ para todo índice $j \in T$.

n) *Suposiciones:* $S, T \subseteq [\![m]\!]$ son subconjuntos de índices.
*Regla o preferencia:* Si $x_i = 1$ para al menos un índice $i \in S$ entonces $x_j = 0$ para todo índice $j \in T$, y vice-versa (*i.e.,* si $x_j = 1$ para al menos un índice $j \in T$ entonces $x_i = 0$ para todo índice $i \in S$).

■

**Problema 1.2.** Considere un programa entero que contiene las series temporales de variables binarias $\{x_t\}_{t=1}^T \in \{0, 1\}$, $\{y_t\}_{t=1}^T \in \{0, 1\}$ y $\{z_t\}_{t=1}^T \in \{0, 1\}$, donde $T \geq 10$, junto con otras variables adicionales. En este modelo, las series temporales $\{x_t\}$, $\{y_t\}$ y $\{z_t\}$ representan la ocurrencia o no-ocurrencia de tres tipos diferentes de eventos de interés en un problema de planificación con un horizonte de $T$ períodos.

En cada uno de los siguientes literales, se le presentará una regla o preferencia, posiblemente precedida por un conjunto de suposiciones. Exprese cada una de las reglas o preferencias en el lenguaje de la programación lineal entera mediante la introducción de variables enteras y/o de restricciones lineales. Recuerde que cada literal es independiente de los otros.

a) *Regla o preferencia:* Si para algún periodo $k \in [\![T - q]\!]$ tenemos $x_k = 1$ entonces $x_{k+\ell} = 1$ para todo $\ell \geq 1$.

*Solución*: Introducimos el siguiente juego de restricciones lineales:

$$\forall\, t \in [\![T - 1]\!] \ : \ x_t \leq x_{t+1}$$

b) *Regla o preferencia:* Existe al menos un periodo $k \in [\![T - 1]\!]$ tal que $x_k = 1$ y $x_{k+1} = 1$.

c) *Suposiciones:* $2 \leq M < T$.
*Regla o preferencia:* Existe al menos un periodo $k \in [\![T - M]\!]$ tal que $x_{k+\ell} = 1$ para todo periodo $\ell \in \{0, 1, \ldots, M - 1\}$.

d) *Regla o preferencia:* Si para algún periodo $k \in [\![T - 1]\!]$ tenemos $x_k = 1$ entonces $y_{k+\ell} = 1$ para al menos un $\ell \geq 1$.

e) *Regla o preferencia:* Si para algún periodo $k \in [\![T - 1]\!]$ tenemos $x_k = 1$ entonces $y_{k+1} = 1$.

f) *Suposiciones:* $2 \leq M < T$.
*Regla o preferencia:* Si para algún periodo $k \in [\![T-M]\!]$ tenemos $x_k = 1$ entonces $y_{k+\ell} = 1$ para todo $\ell \in \{1, 2, \ldots, M\}$.

g) *Regla o preferencia:* Si para algún periodo $k \in [\![T-2]\!]$ tenemos $x_k = 1$ y $y_{k+1} = 1$ entonces $z_{k+2} = 1$.

h) *Regla o preferencia:* Si para algún periodo $k \in [\![T-1]\!]$ tenemos $x_k = 1$ y $y_k = 1$ entonces $z_{k+\ell} = 1$ para todo $\ell \geq 1$.

i) *Regla o preferencia:* Si para algún periodo $k \in [\![T-1]\!]$ tenemos $x_k = 1$ o $y_k = 1$ entonces $z_{k+\ell} = 1$ para al menos un $\ell \geq 1$.

■