Programación Entera (INDG-1019): Examen 01-B

Semestre: 2018-2019 Término I **Instructor:** Luis I. Reyes Castro

Problema 1.1. Nacho es un empresario de la República del Banano que ya está harto de las rídiculas tasas arancelarias de su país, las cuales hacen que importar maquinaria para producir bienes o proveer servicios sea práctimante un lujo. Por esta razón Nacho ha decidido transladar la producción de su único producto a los Estados Unidos (EE.UU.), pero como él no dispone de instalaciones en ese país su plan consiste en alquilar contenedores a empresas de almacenamiento y usarlos tanto para producir como para almacenar. Por estos motivos el empresario ha calculado la demanda diaria esperada de su producto, la cual se encuentra resumida en la serie de tiempo $\{d_t\}_{t=1}^{T}$, y ha compilado los siguientes datos:

- Existe una empresa que alquila contendores a c_p dólares por día por cada contenedor. Sin embargo, vale recalcar que cada vez que se desea solicitar contenedores adicionales se tiene que incurrir un costo fijo de tramitación de c_f dólares, y solamente se puede solicitar hasta B_c contenedores adicionales. En cambio, devolver contenedores a la empresa no tiene costo.
- Cada contenedor puede ser utilizado para fabricar el producto o para almacenarlo, pero no para ambos propósitos. Adicionalmente:
  - Si se utiliza el contenedor para fabricar el producto se puede fabricar hasta B_p unidades al día a un costo de q_p dólares por unidad.
  - Si se utiliza el contenedor para almacenar entonces se pueden guardar hasta B_i unidades del producto terminado a la vez. Suponga que no hay costos de almacenamiento por unidad del producto por día adicionales al costo del alquiler de los contenedores.

Con todo esto en mente, modelaremos el problema conjunto de alquiler de contenedores y producción e inventario que enfrenta Nacho como una extensión del clásico modelo de producción e inventario con variables y restricciones enteras. Para esto primero introducimos, para cada día $t \in [\![T]\!]$, las siguientes variables:

- La variable entera x_t, que indica el número de contenedores alquilados en ese día.
- La variable entera y_t^1, que indica el número de contenedores que ese día se utilizaron para producción, junto con la variable entera y_t^2, que indica el número de contenedores que ese día se utilizaron para almacenamiento.
- La variable entera z_t^1, que indica el número total de unidades producidas ese día, junto con la variable entera z_t^2, que indica el número total de unidades en almacenamiento desde ese día hasta el siguiente.
- La variable binaria w_t, que indica si en ese día se solicitaron contenedores adicionales.

Ahora:

a) [**1 Punto**] Escriba las restricciones que hacen que cada contenedor alquilado solo pueda ser usado para producción o para almacenamiento.

b) [**1 Punto**] Escriba las restricciones que impiden que se produzca sin tener contenedores para hacerlo, junto con las restricciones que impiden que se almacene el producto terminado sin tener contenedores para hacerlo.

c) **[1 Punto]** Escriba las restricciones asociadas con la producción, almacenamiento y demanda del producto.

d) **[1 Punto]** Escriba las restricciones que fuerzan a que si en el periodo t se solicitan contenedores adicionales entonces la variable $w_t = 1$.

e) **[1 Punto]** Escriba la función de costo.

Problema 1.2. *The Daily Show with Trevor Noah* es un show de comedia y sátira política. Cada episodio del show termina con una entrevista de 15 minutos con un personaje famoso o con un comediante local. Actualmente, los productores se encuentran planificando las entrevistas para los siguientes E episodios. Para esto han contactado a P personajes famosos, pero como todos ellos tienen tantas cosas que hacer (*e.g.,* asistir a otras entrevistas) existe el problema de que no cualquier personaje puede ser entrevistado en cualquier episodio. Además, los personajes famosos son escasos y/o difíciles de contactar (*i.e.,* $P < E$). Aun asi, los productores fueron meticulosos en sus conversaciones con los personajes y marcaron todas los episodios que podrían ser asistidos por cada personaje. En particular, los productores tienen una tabla de disponibilidad D tal que para todo personaje $i \in [\![P]\!]$ y todo episodio $j \in [\![E]\!]$ la entrada $D_{ij} = 1$ si ese personaje tiene disponibilidad para ser entrevistado en ese episodio.

Con esta información disponible, los productores del show quieren determinar cuál es máximo número de episodios que pueden terminar con una entrevista con un personaje famoso, puesto que los comediantes locales ocasionalmente no lograr ser chistosos. Afortunadamente para ellos, los productores son ingeniosos y se dieron cuenta rápidamente de que este problema puede ser modelado como un problema de flujo máximo en redes de la siguiente manera:

1. Para cada personaje famoso $i \in [\![P]\!]$ se crea un nodo s_i, mientras que para cada episodio $j \in [\![E]\!]$ se crea un nodo t_j.
2. Para cada personaje famoso i que puede ser entrevistado en un episodio j, *i.e.,* para cada par (i, j) tal que $D_{ij} = 1$, se crea un arco desde s_i hasta t_j con capacidad unitaria.
3. Se impone la restricción de que cada flujo desde un nodo de personaje i hasta un nodo de episodio j, denotado x_{ij}, sea binario.
4. Se busca el máximo flujo desde el conjunto de nodos de personajes $S = \{s_1, s_2, \ldots, s_P\}$ hasta el conjunto de nodos de episodios $T = \{t_1, t_2, \ldots, t_E\}$.

Con todo esto en mente, complete las siguientes actividades:

a) **[4 Puntos]** Primero transformamos este problema de flujo máximo desde un conjunto hasta otro en un problema de flujo máximo desde un nodo hasta otro. Responda:

   i) Si introducimos un nodo de origen α, a cuáles nodos deberíamos conectarlo? Introduzca los arcos correspondientes.

   ii) Si introducimos un nodo de destinación ω, a cuáles nodos deberíamos conectarlo? Introduzca los arcos correspondientes.

   iii) Es necesario introducir un arco desde el nodo α hasta el nodo ω? Si la respuesta es en el afirmativo, indique si el arco debe tener una capacidad, y si esa otra respuesta también es en el afirmativo, indique la capacidad.

   iv) Es necesario introducir un arco desde el nodo ω hasta el nodo α? Si la respuesta es en el afirmativo, indique si el arco debe tener una capacidad, y si esa otra respuesta también es en el afirmativo, indique la capacidad.

b) [**1 Punto**] Escriba la forma general de las restricciones de conservación de flujo en los nodos de personajes $i \in [\![P]\!]$.

c) [**1 Punto**] Escriba la forma general de las restricciones de conservación de flujo en los nodos de episodios $j \in [\![E]\!]$.

d) [**1 Punto**] Escriba la función de utilidad del nuevo problema.

Problema 1.3. Considere el problema de planificar la operación de una máquina a lo largo de un horizonte de T períodos. En cada periodo la máquina puede estar ocupada fabricando un lote de alguno de los m productos diferentes que puede producir o puede estar recibiendo mantenimiento. Para representar estas actividades, introducimos dos series temporales de variables binarias:

- Para cada periodo $t \in [\![T]\!]$ y cada producto $k \in [\![m]\!]$ la variable $x_{tk} = 1$ si y solo si en ese periodo la máquina fabricó ese producto.
- Para cada periodo $t \in [\![T]\!]$ la variable $y_t = 1$ si y solo si la máquina recibió mantenimiento durante ese periodo.

Con todo esto en mente, escriba las siguientes restricciones temporales en el lenguage de la Progamación Lineal Entera (PLE).

a) [**1 Punto**] No se puede fabricar el producto $k = 1$ por más de 3 períodos consecutivos.

b) [**2 Puntos**] Si se fabrica el producto $k = 2$ por tres o cuatro periodos consecutivos entonces la máquina debe recibir mantenimiento en el siguiente periodo.

c) [**1 Punto**] Si se fabrica el producto $k = 3$ entonces eventualmente la máquina debe recibir mantenimiento.

d) [**2 Puntos**] Los productos $k \in \{5, 6\}$ deben ser eventualmente fabricados una sola vez (cada uno). Además, el producto $k = 5$ debe ser fabricado antes que el producto $k = 6$.

e) [**2 Puntos**] Si se fabrican los productos $k = 7$ y $k = 8$ uno tras otro, en ese orden, entonces la máquina debe recibir mantenimiento en los dos períodos sucesivos.