Programación Entera para Ingeniería (INDG-1019): **Juego de Diapositivas 01**

Luis I. Reyes Castro

Escuela Superior Politécnica del Litoral (ESPOL)
Guayaquil - Ecuador

2018 - Término I

Restricciones Lógicas y Combinatoriales

Considere un problema de decisión que contiene $m \geq 10$ variables binarias

$$x_1,\, x_2,\, x_3,\, \ldots,\, x_m \in \{0, 1\}$$

junto con otras variables adicionales. En los siguientes literales expresaremos una diversidad de reglas logicas y combinatoriales utilizando el lenguague de la Programación Lineal Entera (PLE) mediante la introducción de restricciones lineales de desigualdad y de igualdad.

Por favor considere que cada literal es independiente de todos los otros.

Restricciones Lógicas y Combinatoriales

- *Regla:* El O-inclusivo (`OR`) de las variables evalúa en uno, *i.e.*, se requiere que $x_i = 1$ para al menos un índice i.

  Implementación: Introducimos la restricción lineal:

$$\sum_{i=1}^{m} x_i \ \geq \ 1$$

- *Regla:* El O-exclusivo (`XOR`) de las variables evalúa en uno, *i.e.*, se requiere que $x_i = 1$ para exactamente un índice i.

  Implementación: Introducimos la restricción lineal:

$$\sum_{i=1}^{m} x_i \ = \ 1$$

Restricciones Lógicas y Combinatoriales

Para los siguientes literales suponga que $2 \leq n < m$.

- *Regla:* $x_i = 1$ al menos n veces.

  Implementación: Introducimos la restricción lineal:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \ \geq \ n$$

- *Regla:* $x_i = 1$ no más de n veces.

  Implementación: Introducimos la restricción lineal:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \ \leq \ n$$

Restricciones Lógicas y Combinatoriales

- *Regla:* $x_i = 1$ exactamente n veces.

  Implementación: Introducimos la siguiente restricción lineal de igualdad:

  $$\sum_{i=1}^{n} x_i \; = \; n$$

  Implementación equivalente: Introducimos el siguiente par de restricciones lineales de desigualdad:

  $$n \; \leq \; \sum_{i=1}^{n} x_i \; \leq \; n$$

Restricciones Lógicas y Combinatoriales

Para los siguiente literales suponga que $y \in \{0, 1\}$ y que $2 \leq n < m$.

- *Regla:* Si $y = 1$ entonces el O-inclusivo (`OR`) de las variables evalúa en uno.

  Implementación: Introducimos la restricción lineal:

$$y \leq \sum_{i=1}^{m} x_i$$

- *Regla:* Si $y = 1$ entonces el O-exclusivo (`XOR`) de las variables evalúa en uno.

  Implementación: Introducimos el siguiente par de restricciones lineales:

$$y \leq \sum_{i=1}^{m} x_i \leq m - (m-1)\, y$$

Restricciones Lógicas y Combinatoriales

- *Regla:* Si $y = 1$ entonces $x_i = 1$ para al menos n índices i.

  Implementación: Introducimos la restricción lineal:

$$n\,y \;\leq\; \sum_{i=1}^{m} x_i$$

- *Regla:* Si $y = 1$ entonces $x_i = 1$ para no más de n índices i.

  Implementación: Introducimos la restricción lineal:

$$\sum_{i=1}^{m} x_i \;\leq\; m - (m - n)\,y$$

- *Regla:* Si $y = 1$ entonces $x_i = 1$ para exactamente n de los índices i.

  Implementación: Introducimos el siguiente par de restricciones lineales:

$$n\, y \;\leq\; \sum_{i=1}^{m} x_i \;\leq\; m - (m - n)\, y$$

Restricciones Lógicas y Combinatoriales

- *Regla:* Si el O-inclusivo (`OR`) de las variables evalúa en uno entonces $y = 1$.

  Implementación: Introducimos la restricción lineal:

$$\sum_{i=1}^{m} x_i \;\leq\; m\, y$$

- *Regla:* Si $x_i = 1$ para al menos n índices i entonces $y = 1$.

  Implementación: Introducimos la restricción lineal:

$$\sum_{i=1}^{m} x_i \;\leq\; (n-1) + (m-n+1)\, y$$

Restricciones Lógicas y Combinatoriales

- *Regla:* Si $x_i = 1$ para no más de n índices i entonces $y = 1$.

  Implementación: Introducimos la restricción lineal:

$$\sum_{i=1}^{m} x_i \;\geq\; (n+1) - (n+1)\,y$$

- *Regla:* Si $x_i = 1$ para exactamente n índices i entonces $y = 1$.

  Implementación: Introducimos el par de restricciones lineales:

$$(n+1) - (n+1)\,y \;\leq\; \sum_{i=1}^{m} x_i \;\leq\; (n-1) + (m-n+1)\,y$$

Restricciones Lógicas y Combinatoriales

- *Regla:* $y = 1$ si y solo si $x_i = 1$ para exactamente n de los índices i.

  Implementación:

  - Introducimos un par de restricciones que causan que $y = 1$ fuerce a que $x_i = 1$ para exactamente n de los índices i.

  $$n\, y \;\leq\; \sum_{i=1}^{m} x_i \;\leq\; m - (m - n)\, y$$

  - Introducimos un par de restricciones que causan que $x_i = 1$ para exactamente n de los índices i fuerce a que $y = 1$.

  $$\sum_{i=1}^{m} x_i \;\leq\; (n-1) + (m-n+1)\, y$$
  $$\sum_{i=1}^{m} x_i \;\geq\; (n+1) - (n+1)\, y$$

- *Regla:* Si $y = 1$ entonces el Y (`AND`) de las variables evalúa en uno.

  Implementación A: Introducimos el juego de restricciones lineales:

  $$\forall\, i \in [\![m]\!] \,:\; y \leq x_i$$

  Implementación B: Introducimos la restricción lineal:

  $$m\,y \;\leq\; \sum_{i=1}^{m} x_i$$

  Observación: Esta vez las dos implementaciones presentadas no son equivalentes. De hecho, desde el punto de vista de la PLE la primera implementación es más apretada que la segunda. Esto se debe a que las restricciones de la primera implementación implican la única restricción de la segunda implementación, pero el reverso no es cierto.

- *Regla:* Si el Y (`AND`) de las variables evalúa en uno entonces $y = 1$.

  Implementación: Introducimos la restricción:

$$\sum_{i=1}^{m} x_i \;\leq\; (m-1) + y$$

Restricciones entre Subconjuntos de Índices

Considere un problema de decisión que contiene $m \geq 10$ variables binarias

$$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_m \in \{0, 1\}$$

junto con otras variables adicionales. En este programa S y T son dos subcojuntos de índices de las variables x_i (*i.e.*, $S, T \subseteq [\![m]\!]$), cuyas cardinalidades se escriben como $|S|$ y $|T|$, respectivamente.

En los siguientes literales expresaremos una diversidad de reglas lógicas y combinatoriales entre las variables cuyos índices pertenecen a S y a T utilizando el lenguague de la Programación Lineal Entera (PLE) mediante la introducción de variables adicionales y de restricciones lineales.

Por favor considere que cada literal es independiente de todos los otros.

Restricciones entre Subconjuntos de Índices

- *Regla:* Si $x_i = 1$ para algún $i \in S$ entonces $x_j = 0$ para todo $j \in T$.
  Implementación:

  1. Introducimos las variables binarias $a_S, a_T \in \{0, 1\}$.
  2. Introducimos un juego de restricciones que fuerza $a_S = 1$ cuando $x_i = 1$ para al menos un $i \in S$:
     $$\forall\, i \in S \,:\; x_i \leq a_S$$
  3. Introducimos un juego de restricciones que fuerza a que $x_j = 0$ para todo $j \in T$ cuando $a_T = 0$.
     $$\forall\, j \in T \,:\; x_j \leq a_T$$
  4. Introducimos una restricción que fuerza $a_T = 0$ cuando $a_S = 1$:
     $$a_T \leq 1 - a_S$$

Restricciones entre Subconjuntos de Índices

- *Regla:* Si $x_i = 1$ para algún $i \in S$ entonces $x_j = 0$ para todo $j \in T$, y vice-versa.

  Implementación:

  1. Introducimos las variables binarias $a_S, a_T \in \{0, 1\}$.
  2. Introducimos un juego de restricciones que fuerza $a_S = 1$ cuando $x_i = 1$ para al menos un $i \in S$:
  $$\forall\, i \in S \;:\; x_i \leq a_S$$
  3. Introducimos un juego de restricciones que fuerza $a_T = 1$ cuando $x_j = 1$ para al menos un $j \in T$:
  $$\forall\, j \in T \;:\; x_j \leq a_T$$
  4. Agregamos una restricción que impide que a_S y a_T puedan tomar el valor uno al mismo tiempo:
  $$a_S + a_T \leq 1$$

Restricciones entre Subconjuntos de Índices

- *Regla:* Si $x_i = 1$ para algún $i \in S$ entonces $x_j = 1$ para algún $j \in T$.
  Implementación:
  1. Introducimos las variables binarias $a_S, a_T \in \{0, 1\}$.
  2. Introducimos un juego de restricciones que fuerza $a_S = 1$ cuando $x_i = 1$ para al menos un $i \in S$:
  $$\forall\, i \in S \;:\; x_i \leq a_S$$
  3. Introducimos una restricción que fuerza $a_T = 1$ cuando $a_S = 1$:
  $$a_S \leq a_T$$
  4. Introducimos una restricción que fuerza a que $x_j = 1$ para al menos un $j \in T$ cuando $a_T = 1$.
  $$a_T \;\leq\; \sum_{j \in T} x_j$$

Restricciones entre Subconjuntos de Índices

En los siguientes literales suponga que $w \in \{0, 1\}$.

- *Regla:* Si $x_i = 1$ para al menos un índice $i \in S$ entonces $w = 1$.

  Implementación: Introducimos la restricción:

$$\sum_{i \in S} x_i \;\leq\; |S|\, w$$

- *Regla:* Si $x_i = 1$ para todo índice $i \in S$ entonces $w = 1$.

  Implementación: Introducimos la restricción:

$$\sum_{i \in S} x_i \;\leq\; (|S| - 1) + w$$

Restricciones entre Subconjuntos de Índices

- *Regla:* Si $x_i = 1$ para más índices $i \in S$ que $i \in T$ entonces $w = 1$.

  Implementación: Introducimos la restricción:

$$\sum_{i \in S} x_i \; - \; |S| \, w \; \leq \; \sum_{j \in T} x_j$$

- *Regla:* Si $x_i = 1$ para al menos un índice $i \in S$ y $x_j = 0$ para todo índice $j \in T$, o vice-versa, entonces $w = 1$.

  Implementación:

  1. Introducimos las variables binarias $a_S, a_T \in \{0, 1\}$.
  2. Introducimos un juego de restricciones que fuerza $a_S = 1$ cuando $x_i = 1$ para al menos un $i \in S$:

$$\forall \, i \in S \; : \; x_i \leq a_S$$

Restricciones entre Subconjuntos de Índices

3. Introducimos un juego de restricciones que fuerza $a_T = 1$ cuando $x_j = 1$ para al menos un $j \in T$:
$$\forall\, j \in T \;:\; x_j \leq a_T$$

4. Agregamos un par de restricciones que fuerzan a que $w = 1$ cuando $a_S = 1$ y $a_T = 0$ o cuando $a_S = 0$ y $a_T = 1$:
$$a_S + (1 - a_T) \leq 1 + w$$
$$(1 - a_S) + a_T \leq 1 + w$$

Restricciones Temporales

Considere un problema de planificación sobre $T \geq 10$ períodos que contiene las series temporales de variables binarias $\{x_t\}_{t=1}^{T}$ y $\{y_t\}_{t=1}^{T}$, junto con otras variables adicionales. En este modelo cada serie temporal está asociada con un evento de interés de tal manera que los unos y ceros de sus variables representan la historia de ocurrencias o no-ocurrencias del evento.

En los siguientes literales expresaremos una diversidad de reglas temporales utilizando el lenguague de la Programación Lineal Entera (PLE) mediante la introducción de restricciones lineales de desigualdad y de igualdad. Por favor considere que cada literal es independiente de todos los otros.

Restricciones Temporales

- *Regla:* Eventualmente $x = 1$.

  Implementación: Introducimos la restricción:

$$\sum_{t=1}^{T} x_t \; \geq \; 1$$

- *Regla:* Eventualmente $x = 1$ por dos períodos consecutivos.

  Implementación:

  1. Introducimos el juego de variables binarias $\{z_t\}_{t=1}^{T-1}$.
  2. Introducimos dos juegos de restricciones:

$$\begin{aligned} \forall\, t \in [\![T-1]\!] \;:\;\; & z_t \leq x_t \\ \forall\, t \in [\![T-1]\!] \;:\;\; & z_t \leq x_{t+1} \end{aligned}$$

Restricciones Temporales

3. Agregamos la restricción:

$$\sum_{t=1}^{T-1} z_t \; \geq \; 1$$

- *Regla:* Si $x = 1$ entonces $x = 1$ para todo periodo posterior.

  Implementación: Introducimos el juego de restricciones:

$$\forall \, t \in [\![T - 1]\!] \; : \; x_t \leq x_{t+1}$$

- *Regla:* Si $x = 1$ entonces $y = 1$ para todo periodo posterior.

  Implementación: Introducimos el juego de restricciones:

$$\forall \, t \in [\![T - 1]\!], \forall \, \tau \in [\![T - t]\!] \; : \; x_t \leq \; y_{t+\tau}$$

Restricciones Temporales

- *Regla:* Si $x = 1$ entonces $y = 1$ después de k períodos.

  Implementación: Introducimos el juego de restricciones:

$$\forall\, t \in [\![T - k]\!] \;:\; x_t \leq y_{t+k}$$

- *Regla:* Si $x = 1$ entonces eventualmente $y = 1$.

  Implementación: Introducimos el juego de restricciones:

$$\forall\, t \in [\![T - 1]\!] \;:\; x_t \;\leq\; \sum_{k=t+1}^{T} y_t$$