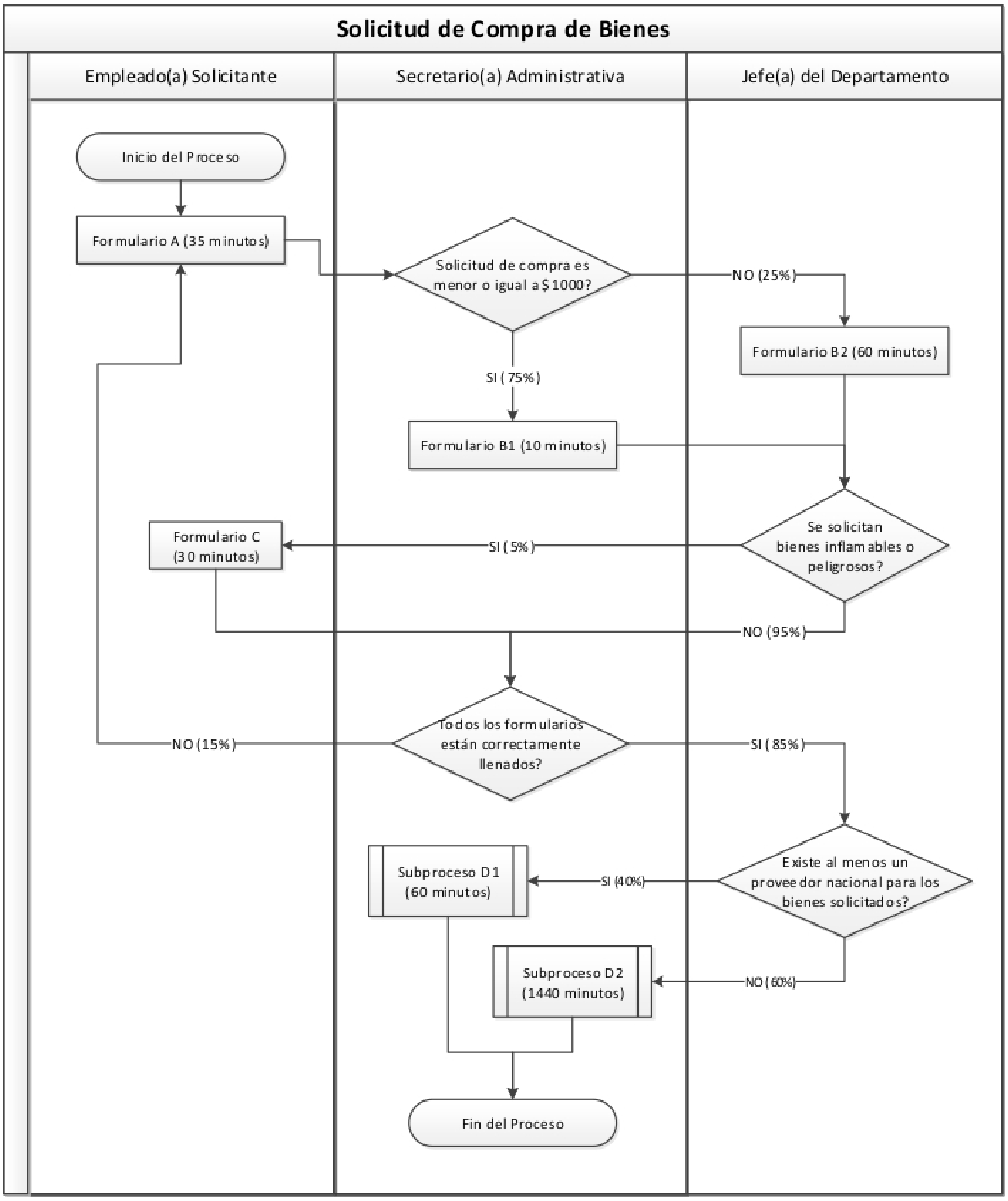
Modelos Estocásticos (INDG-1008): Examen 03

Semestre: 2018-2019 Término I **Instructor:** Luis I. Reyes Castro

Problema 3.1. Considere el trámite mostrado en el siguiente diagrama de flujo:



Con esto en mente, complete las siguientes actividades:

a) [**3 Puntos**] Modele el trámite como una Cadena de Markov en Tiempo Discreto.

b) [**12 Puntos**] Escriba, para cada estado, una ecuación cuya solución sea el tiempo esperado hasta el fin del proceso.

■

Problema 3.2. Un psiquiatra ha pasado años estudiando pacientes que sufren de Bipolaridad Tipo II. Gracias a esta experiencia, el médico ha desarrollado un modelo de Cadena de Markov de un paciente en particular. El modelo cuenta con tres estados: ánimo normal, depresión, e hipomanía. El modelo se comporta de la siguiente manera:

- Si el paciente amanece con ánimo normal, entonces, al día siguiente:
  - Amanecerá con ánimo normal con probabilidad del 85%.
  - Amanecerá deprimido con probabilidad del 9%.
  - Amanecerá hipomaníaco con probabilidad del 6%.
- Si el paciente amanece deprimido, entonces, al día siguiente:
  - Amanecerá deprimido con probabilidad del 67%.
  - Amanecerá con ánimo normal con probabilidad del 33%.
- Si el paciente amanece hipomaníaco, entonces, al día siguiente:
  - Amanecerá hipomaníaco con probabilidad del 35%.
  - Amanecerá con ánimo normal con probabilidad del 65%.

Con todo esto en mente:

a) [**4.5 Puntos**] Escriba las ecuaciones de balance de la cadena.

b) [**4.5 Puntos**] Encuentre la fracción del tiempo (*i.e.,* de los días) que el paciente amanece en cada uno de los tres estados.

c) [**5 Puntos**] Suponga que hoy el paciente amanece deprimido. Calcule el número esperado de días que transcurrirán hasta que el paciente amanezca hipomaníaco.

■

Problema 3.3. Un sistema de colas tiene cuatro servidores y una sala de espera con capacidad para cuatro clientes. Los clientes arriban de acuerdo a un proceso Poisson con tasa media de 40 por hora, y la probabilidad de que un cliente decida ingresar al sistema decae con el número de clientes en cola de acuerdo a la ley empírica:

$$\mathbb{P}(\text{nuevo cliente entra al sistema}) = 1 - 0.15\,(\text{número de clientes en cola})$$

Los tiempos de servicio tienen distribución exponencial con un valor esperado de 5 minutos.

Con todo esto en mente, complete las siguientes actividades:

a) [**9 Puntos**] Modele este sistema como una Cadena de Markov en Tiempo Continuo.

b) Suponga que usted calculó correctamente la distribución estacionaria de la cadena, *i.e.,* que usted ya tiene calculados los π's. Escriba expresiones, en términos de las probabilidades estacionarias, para las siguientes cantidades:

  i) [**2 Puntos**] El número esperado de clientes en el sistema.

  ii) [**2 Puntos**] El número esperado de clientes en cola.

  iii) [**2 Puntos**] La probabilidad de que un nuevo cliente que arriba tenga que esperar en cola antes de recibir servicio.

■