Modelos Estocásticos (INDG-1008): Taller 02

Semestre: 2017-2018 Término I **Instructor:** Luis I. Reyes Castro

Integrantes del Grupo:

Problema 2.1. [10 Puntos] En un supermercado los clientes entran al área de cajas a una tasa de cuatro por minuto y son atendidos por cada cajero a una tasa de un cliente por minuto. Encuentre el mínimo número de servidores (*i.e.*, cajeros) que se requieren para asegurar que el tiempo de espera en cola promedio por cliente no exceda los cinco minutos. Para esto, considere las siguientes opciones y calcule el tiempo promedio de espera en cola para cada una.

- $s = 5$ servidores
- $s = 6$ servidores
- $s = 8$ servidores

Solución: Dado que no se han especificado las distribuciones de los tiempos entre arribos ni de los tiempos de servicios, supondremos un modelo $M/M/s$ y haremos uso de las fórmulas para modelos basados en Cadenas de Markov en Tiempo Continuo con tasa de arribo $\lambda = 4$ por minuto y tasa de servicio $\mu = 1$ por minuto. En particular:

- Para $s = 5$ servidores tenemos $\rho = 4/5 = 0.80$. Consecuentemente:

$$P_0 \;=\; \left[\left(\sum_{n=0}^{s-1} \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} \right) + \frac{(\lambda/\mu)^s}{s!(1-\rho)} \right]^{-1} \;=\; \left(\frac{103}{3} + \frac{128}{3} \right)^{-1} \;=\; 0.0130$$

$$\implies L_q \;=\; P_0 \, \frac{(\lambda/\mu)^s \, \rho}{s! \, (1-\rho)^2} \;=\; 2.22 \qquad \implies W_q \;=\; \frac{L_q}{\lambda} \;=\; 0.555 \text{ min}$$

- Para $s = 6$ servidores tenemos $\rho = 4/6 = 0.67$. Consecuentemente:

$$P_0 \;=\; \left[\left(\sum_{n=0}^{s-1} \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} \right) + \frac{(\lambda/\mu)^s}{s!(1-\rho)} \right]^{-1} \;=\; \left(\frac{643}{15} + \frac{256}{15} \right)^{-1} \;=\; 0.0167$$

$$\implies L_q \;=\; P_0 \, \frac{(\lambda/\mu)^s \, \rho}{s! \, (1-\rho)^2} \;=\; 0.570 \qquad \implies W_q \;=\; \frac{L_q}{\lambda} \;=\; 0.143 \text{ min}$$

- Para $s = 8$ servidores tenemos $\rho = 4/8 = 0.50$. Consecuentemente:

$$P_0 \;=\; \left[\left(\sum_{n=0}^{s-1} \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} \right) + \frac{(\lambda/\mu)^s}{s!(1-\rho)} \right]^{-1} \;=\; \left(\frac{16319}{315} + \frac{1024}{315} \right)^{-1} \;=\; 0.0182$$

$$\implies L_q \;=\; P_0 \, \frac{(\lambda/\mu)^s \, \rho}{s! \, (1-\rho)^2} \;=\; 0.0592 \qquad \implies W_q \;=\; \frac{L_q}{\lambda} \;=\; 0.0148 \text{ min}$$