Dinámica: **Capítulo 11**

Luis I. Reyes Castro

Escuela Superior Politécnica del Litoral (ESPOL)
Guayaquil - Ecuador

Separación de Variables ("Magia Negra"):

- Supongamos que en un problema tenemos dos variables $a(t)$ y $b(t)$ que están relacionadas por una **ecuación diferencial separable**:

$$\frac{da}{db} = \overbrace{f(a)}^{\text{función de } a}\, \underbrace{g(b)}_{\text{función de } b}$$

- Entonces es posible hallar una relación (aunque no siempre una función) entre $a(t)$ y $b(t)$ si tratamos la derivada da/db como una fracción y re-escribimos la ecuación anterior de la siguiente manera:

$$\frac{1}{f(a)}\, da = g(b)\, db$$

- Para encontrar la relación simplemente integramos ambos lados de la ecuación anterior:

$$\int_{a_0}^{a(t)} \frac{1}{f(\alpha)}\, d\alpha \;=\; \int_{b_0}^{b(t)} g(\beta)\, d\beta$$

  - El lado izquierdo se integra con respecto a la primera variable (a) desde su valor inicial a_0 hasta su valor actual $a(t)$.
  - El lado derecho se integra con respecto a la segunda variable (b) desde su valor inicial b_0 hasta su valor actual $b(t)$.

- Una vez evaluada la última integral, obtenemos una relación entre las dos variables que no involucra derivadas, *i.e.*, el lado izquierdo es una función de $a(t)$ mientras que el lado derecho es una función de $b(t)$.
- Luego, dependiendo de la forma de esta relación, es posible que se pueda escribir a la variable $a(t)$ como una función de la variable $b(t)$.

§11.3: Determinación del Movimiento de una Partícula

Tres Casos:

1. La aceleración es una función del tiempo, *i.e.:*

$$a = f(t)$$

2. La aceleración es una función de la posición, *i.e.:*

$$a = f(x)$$

3. La aceleración es una función de la velocidad, *i.e.:*

$$a = f(v)$$

Caso 1: La Aceleración es una Función del Tiempo

- Se nos indica que $a(t) = f(t)$.
- Recordando que

$$a(\tau) \;=\; \left.\frac{dv}{dt}\right|_{t=\tau}$$

llegamos a la ecuación diferencial separable:

$$\frac{dv}{dt} \;=\; f(t)$$

- Aplicando separación de variables obtenemos:

$$dv = f(t)\,dt \qquad \Longrightarrow \qquad \int_{v_0}^{v(t)} d\nu = \int_0^t f(\tau)\,d\tau$$

$$\Longrightarrow \qquad v(t) - v_0 = \int_0^t f(\tau)\,d\tau$$

$$\Longrightarrow \qquad v(t) = v_0 + \int_0^t f(\tau)\,d\tau$$

- Similarmente, dado que

$$v(\tau) = \left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=\tau}$$

llegamos a la ecuación diferencial separable:

$$\frac{dx}{dt} = v(t)$$

- Aplicando separación de variables obtenemos:

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 + \int_0^t v(\tau)\, d\tau \\ &= x_0 + v_0\, t + \int_0^t \left(\int_0^\tau f(u)\, du \right) d\tau \end{aligned}$$

Caso 2: La Aceleración es una Función de la Posición

- Se nos indica que:

$$a(t) = f(\,x(t)\,)$$

- Recordamos que habíamos demostrado que:

$$a(\tau) \;=\; v(\tau)\,\frac{dv}{dx}\bigg|_{t=\tau}$$

- Igualando estas dos expresiones para la aceleración obtenemos:

$$v\,\frac{dv}{dx} \;=\; f(x)$$

- Reconocemos que tenemos una ecuación diferencial separable:

$$\frac{dv}{dx} = \left(\frac{1}{v}\right) f(x)$$

- Finalmente, integrando la ecuación anterior obtenemos:

$$v\,dv = f(x)\,dx \implies \int_{v_0}^{v(t)} \nu\,d\nu = \int_{x_0}^{x(t)} f(\xi)\,d\xi$$

$$\implies \frac{1}{2}v(t)^2 - \frac{1}{2}v_0^2 = \int_{x_0}^{x(t)} f(\xi)\,d\xi$$

$$\implies v(t) = \sqrt{v_0^2 + 2\int_{x_0}^{x(t)} f(\xi)\,d\xi}$$

Caso 3: La Aceleración es una Función de la Velocidad

- Se nos indica que:

$$a(t) = f(\, v(t)\,)$$

- Recordamos que habíamos demostrado que:

$$a(\tau) \;=\; v(\tau)\, \frac{dv}{dx}\bigg|_{t=\tau}$$

- Igualando estas dos expresiones para la aceleración obtenemos:

$$v\, \frac{dv}{dx} \;=\; f(v)$$

- Reconocemos que tenemos una ecuación diferencial separable:

$$\frac{dv}{dx} = \left(\frac{1}{v}\right) f(v)$$

- Finalmente, integrando la ecuación anterior obtenemos:

$$\frac{v}{f(v)}\,dv = dx \quad \Longrightarrow \quad \int_{v_0}^{v(t)} \frac{\nu}{f(\nu)}\,d\nu = \int_{x_0}^{x(t)} d\xi$$

$$\Longrightarrow \quad \int_{v_0}^{v(t)} \frac{\nu}{f(\nu)}\,d\nu = x(t) - x_0$$

$$\Longrightarrow \quad x(t) = x_0 + \int_{v_0}^{v(t)} \frac{\nu}{f(\nu)}\,d\nu$$

Tarea 01

Resuelva los problemas del texto guía (Pág. 613):

- Problemas 11.7 y 11.8
- Problemas 11.13 y 11.14
- Problemas 11.19 y 11.20
- Problema 11.24
- Problemas desde el 11.27 hasta el 11.30

Fecha de entrega: Martes 1 de Noviembre de 2016

- La aceleración es cero en todo momento, *i.e.:*

$$a(t) = 0$$

- Consecuentemente:
  - La velocidad es constante. En particular:

$$v(t) = v$$

  - La posición es una función lineal en el tiempo. En particular:

$$x(t) = x_0 + v\,t$$

§11.5: Movimiento Rectilíneo Uniformement Acelerado

- La aceleración es constante, *i.e.:*

$$a(t) \; = \; a$$

- Consecuentemente:
  - La velocidad es una función lineal en el tiempo. En particular:

$$v(t) \; = \; v_0 + a\,t$$

  - La posición es una función cuadrática en el tiempo. En particular:

$$x(t) \; = \; x_0 + v_0\,t + \frac{1}{2}\,a\,t^2$$

§11.6: Movimiento de Varias Partículas

Movimiento Relativo de Dos Partículas:

- Consideremos dos partículas, denotadas A y B.
  - La partícula A tiene posición x_A, velocidad v_A y aceleración a_A.
  - La partícula B tiene posición x_B, velocidad v_B y aceleración a_B.
- Definimos la posición relativa de la partícula B con respecto a la partícula A, denotada $x_{B/A}$, de tal manera que:

$$x_{B/A} = x_B - x_A \qquad \Longleftrightarrow \qquad x_B = x_A + x_{B/A}$$

- Similarmente, definimos la velocidad relativa de la partícula B con respecto a la partícula A, denotada $v_{B/A}$, de tal manera que:

$$v_{B/A} = v_B - v_A \qquad \Longleftrightarrow \qquad v_B = v_A + v_{B/A}$$

- Adicionalmente, definimos la aceleración relativa de la partícula B con respecto a la partícula A, denotada $a_{B/A}$, de tal manera que:

$$a_{B/A} = a_B - a_A \qquad \Longleftrightarrow \qquad a_B = a_A + a_{B/A}$$

Movimiento Dependiente (Problemas con Poleas):

- El truco es primero escribir la longitud de la cuerda en función de las posiciones de las partículas de interés.
- Luego diferenciamos la expresión para la longitud de la cuerda con respecto al tiempo para encontrar una relación entre las velocidades de las partículas de interés.
- Finalmente diferenciamos la relación anterior con respecto al tiempo para encontrar una relación entre las aceleraciones de las partículas de interés.

Ejemplo:

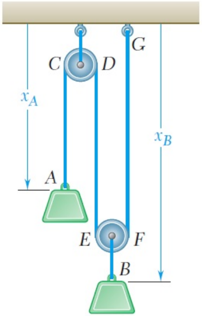

Figura 11.8

Si denotamos a la longitud de la cuerda como ℓ entonces:

$$\ell = x_A(t) + 2\,x_B(t)$$

Diferenciando la expresión anterior obtenemos:

$$0 = v_A(t) + 2\,v_B(t)$$

Diferenciando la expresión anterior obtenemos:

$$0 = a_A(t) + 2\,a_B(t)$$

Ejemplo:

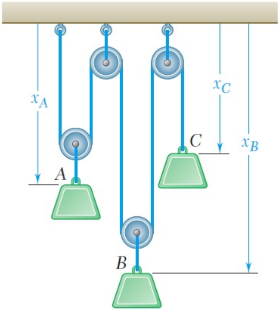

Figura 11.9

Si denotamos a la longitud de la cuerda como ℓ entonces:

$$\ell = 2\,x_A(t) + 2\,x_B(t) + x_C(t)$$

Diferenciando la expresión anterior obtenemos:

$$0 = 2\,v_A(t) + 2\,v_B(t) + v_C(t)$$

Diferenciando la expresión anterior obtenemos:

$$0 = 2\,a_A(t) + 2\,a_B(t) + a_C(t)$$

Ejercicio: Problemas 11.47, 11.48, 11.49, 11.50.

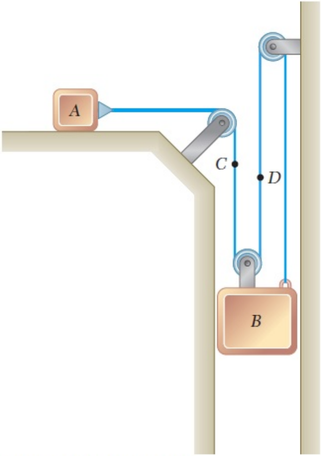

Figura P11.47 y P11.48

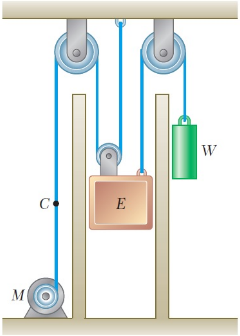

Figura P11.49 y P11.50

Ejercicio: Problemas 11.51, 11.52.

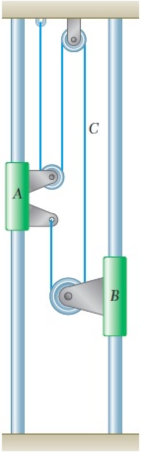

Figura *P11.51* y *P11.52*

Recordamos que:

$$v(\tau) = \left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=\tau} \qquad a(\tau) = \left.\frac{dv}{dt}\right|_{t=\tau}$$

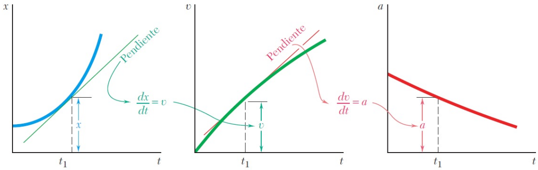

Figura 11.10

Recordamos que:

$$v(t_2) - v(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} a(\tau)\, d\tau$$

$$x(t_2) - x(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} v(\tau)\, d\tau$$

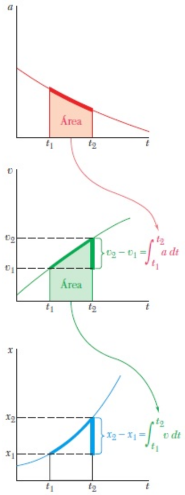

Figura 11.11

Tarea 02

Resuelva los siguientes problemas del texto guía:

- Problemas 11.38, 11.46, 11.48, 11.50, 11.52, 11.55.
- Problemas 11.122, 11.124.

Fecha de entrega: Martes 15 de Noviembre de 2016