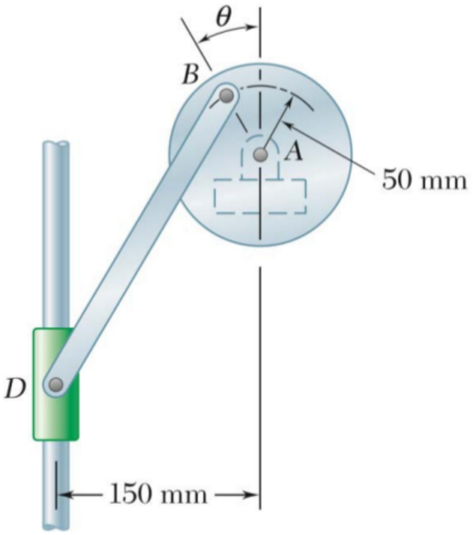
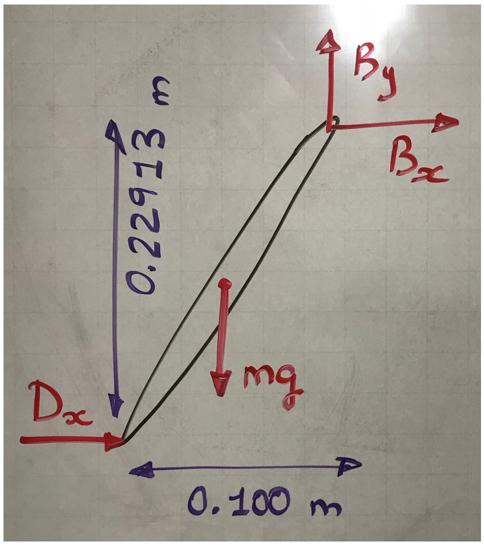
Mecánica Vectorial (MECG-1001): Trabajo Autónomo 05

Semestre: 2017-2018 Término II **Instructor:** Luis I. Reyes Castro **Paralelo:** 08

Problema 5.1. [**4 Puntos**] La barra uniforme BD de 250 mm y 5 kg de masa está conectada como se muestra al disco A y a un collarín de masa despreciable, el cual puede deslizarse libremente a lo largo de una barra vertical. Si se sabe que el disco A gira en sentido contrario al de las manecillas del reloj a la velocidad constante de 500 rpm, determine, para el caso cuando $\theta = 90°$, *(i)* la aceleración angular de la barra y *(ii)* la reacción en D.





Solución: Empezamos tomando datos:

$$\begin{aligned}
m &= 5\text{ kg} \quad \Longrightarrow \quad m\,g = 49.05\text{ N} \\
I_G &= (1/12)\,m\,\ell^2 = 0.026\text{ kg-m}^2 \\
\boldsymbol{r_{BD}} &= (\,-0.100,\ -0.2291\,) \\
\boldsymbol{r_{GB}} &= (\,+0.050,\ +0.1145\,) \\
\boldsymbol{r_{GD}} &= (\,-0.050,\ -0.1145\,) \\
\boldsymbol{r_{AB}} &= (\,-0.050,\ 0\,) \\
\boldsymbol{\omega_{AB}} &= +52.36\,\widehat{\boldsymbol{k}}\text{ rad/s}
\end{aligned}$$

Primero calculamos $\boldsymbol{v_B}$ y $\boldsymbol{a_B}$.

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{v_B} &= \boldsymbol{v_A} + \boldsymbol{\omega_{AB}} \times \boldsymbol{r_{AB}} = \boldsymbol{0} + \boldsymbol{\omega_{AB}} \times \boldsymbol{r_{AB}} \\
&= (\,0,\ -2.618\,)\text{ m/s} \\
\boldsymbol{a_B} &= \boldsymbol{a_A} + \boldsymbol{\alpha_{AB}} \times \boldsymbol{r_{AB}} + \boldsymbol{\omega_{AB}} \times (\boldsymbol{\omega_{AB}} \times \boldsymbol{r_{AB}}) \\
&= \boldsymbol{0} + \boldsymbol{0} \times \boldsymbol{r_{AB}} - \omega_{AB}^2\,\boldsymbol{r_{AB}} \\
&= (\,+137.08,\ 0\,)\text{ m/s}^2
\end{aligned}$$

Luego, reconociendo que $\boldsymbol{v_D} = +v_D\,\widehat{\boldsymbol{j}}$, tenemos:

$$\boldsymbol{v_D} = \boldsymbol{v_B} + \boldsymbol{\omega_{BD}} \times \boldsymbol{r_{BD}}$$

$$\Longrightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ +v_D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2.618 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} +0.2291\,\omega_{BD} \\ -0.100\,\omega_{BD} \end{bmatrix}$$

$$\Longrightarrow\; 0 = +0.2291\,\omega_{BD} \qquad \Longrightarrow\; \boldsymbol{\omega_{BD}} \;=\; \mathbf{0}\ \text{rad/s}$$

Similarmente, reconociendo que $\boldsymbol{a_D} = +a_D\,\widehat{\boldsymbol{j}}$, tenemos:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{a_D} &= \boldsymbol{a_B} + \boldsymbol{\alpha_{BD}} \times \boldsymbol{r_{BD}} + \boldsymbol{\omega_{BD}} \times (\boldsymbol{\omega_{BD}} \times \boldsymbol{r_{BD}}) \\
&= \boldsymbol{a_B} + \boldsymbol{\alpha_{BD}} \times \boldsymbol{r_{BD}} + \mathbf{0} \\
\Longrightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ +a_D \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} +137.08 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} +0.2291\,\alpha_{BD} \\ -0.100\,\alpha_{BD} \end{bmatrix} \\
\Longrightarrow\; 0 &= +137.08 + 0.2291\,\omega_{BD} \qquad \Longrightarrow\; \boldsymbol{\alpha_{BD}} \;=\; -598.34\,\widehat{\boldsymbol{k}}\ \text{rad/s}^2
\end{aligned}$$

Consecuentemente:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{a_G} &= \boldsymbol{a_B} + \boldsymbol{\alpha_{BD}} \times \boldsymbol{r_{BG}} + \boldsymbol{\omega_{BD}} \times (\boldsymbol{\omega_{BD}} \times \boldsymbol{r_{BG}}) \\
&= \boldsymbol{a_B} + \boldsymbol{\alpha_{BD}} \times \boldsymbol{r_{BG}} + \mathbf{0} \\
\Longrightarrow \begin{bmatrix} (\boldsymbol{a_G})_x \\ (\boldsymbol{a_G})_y \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} +137.08 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} +0.2291\,(-598.34) \\ -0.100\,(-598.34) \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0.0 \\ +59.8 \end{bmatrix}\ \text{m/s}^2
\end{aligned}$$

Ahora bosquejamos el diagrama de cuerpo libre (DCL) de la barra AB, tal como se muestra en la fotografía a la derecha de la figura del problema. Las sumatorias de fuerzas y momentos externos son:

$$\begin{aligned}
m\,(\boldsymbol{a_G})_x &= B_x + D_x \\
&\Longrightarrow \quad 0 \;=\; B_x + D_x \quad \Longrightarrow \quad B_x \;=\; -D_x \\
m\,(\boldsymbol{a_G})_y &= B_y - mg \\
&\Longrightarrow \quad B_y \;=\; m\,(\,(\boldsymbol{a_G})_y + g\,) \;=\; 348.05\ \text{N} \\
I\,\alpha &= +0.1145\,(+D_x - B_x) + 0.050\,B_y \\
&\Longrightarrow \quad (0.026)(-598.34) \;=\; +0.1145(+2D_x) + 0.050(348.05) \\
&\Longrightarrow \quad D_x \;=\; -143.93\ \text{N}
\end{aligned}$$

En conclusión:

$$\boldsymbol{\alpha_{BD}} \;=\; -598.34\,\widehat{\boldsymbol{k}}\ \text{rad/s}^2 \qquad\qquad \boldsymbol{D} \;=\; (\,-143.93,\ 0\,)\ \text{N}$$

■

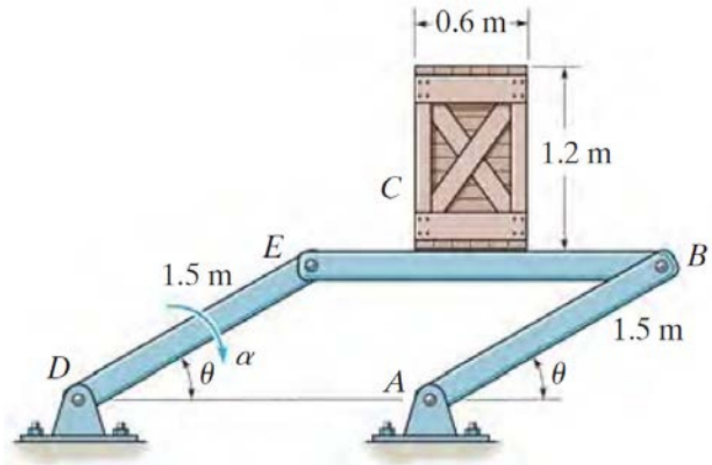
Problema 5.2. [4 Puntos] La caja uniforme C de 100 kg descansa sobre el piso del elevador donde el coeficiente de fricción estática es $\mu = 0.4$. Determine la mayor aceleración angular inicial α, comenzando desde el reposo en $\theta = 90\,°$, sin causar deslizamiento de la caja. Suponga que no es posible que la caja se vuelque.

Solución: Es evidente de la figura que la barra EB sobre la cual descansa la caja está en translación curvilínea, *i.e.*, $\boldsymbol{\omega_{EB}} = \mathbf{0}$ rad/s y $\boldsymbol{\alpha_{EB}} = \mathbf{0}$ rad/s. Esto implica que:

$$\boldsymbol{a_C} \;=\; \boldsymbol{a_B} + \boldsymbol{\alpha_{EB}} \times \boldsymbol{r_{BC}} + \boldsymbol{\omega_{EB}} \times (\boldsymbol{\omega_{EB}} \times \boldsymbol{r_{BC}})\boldsymbol{a_B} + \mathbf{0} + \mathbf{0} \;=\; \boldsymbol{a_B}$$

Adicionalmente, podemos reconocer que $\boldsymbol{\omega_{AB}} = \boldsymbol{\omega_{DE}} = \mathbf{0}$ y que $\boldsymbol{\alpha_{AB}} = \boldsymbol{\alpha_{DE}} = -\alpha\,\widehat{\boldsymbol{k}}$. Consecuentemente:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{a_C} \;=\; \boldsymbol{a_B} &= \boldsymbol{a_A} + \boldsymbol{\alpha_{AB}} \times \boldsymbol{r_{AB}} + \boldsymbol{\omega_{AB}} \times (\boldsymbol{\omega_{AB}} \times \boldsymbol{r_{AB}}) \\
&= \mathbf{0} + \boldsymbol{\alpha_{AB}} \times \boldsymbol{r_{AB}} + \mathbf{0} \;=\; +r_{AG}\,\alpha\,\widehat{\boldsymbol{\imath}}
\end{aligned}$$



Ahora, como nos han dicho que supongamos que la caja no se puede volcar, la podemos modelar como una partícula cuya aceleración es igual a $\boldsymbol{a_C}$. Entonces, suponiendo que la fuerza de fricción $f = \mu\, N = \mu\, m\, g$ abastece para mover la caja, la sumatoria de fuerzas externas en el eje-x para la misma es:

$$m\,(\boldsymbol{a_C})_x \;=\; \mu\, m\, g \qquad \Longrightarrow \qquad r_{AG}\,\alpha \;=\; \mu\, g \qquad \Longrightarrow \qquad \alpha \;=\; \frac{\mu\, g}{r_{AC}}$$

De esta manera, la mayor aceleración angular inicial posible es:

$$\alpha \;=\; \frac{(0.4)(9.81)}{1.5} \;=\; 2.616\ \mathrm{rad/s^2}$$

Nota: Es curioso el hecho de que la respuesta no depende en la masa de la caja.

■