Modelos Estocásticos (INDG-1008): Examen 01

Semestre: 2017-2018 Término II **Instructor:** Luis I. Reyes Castro

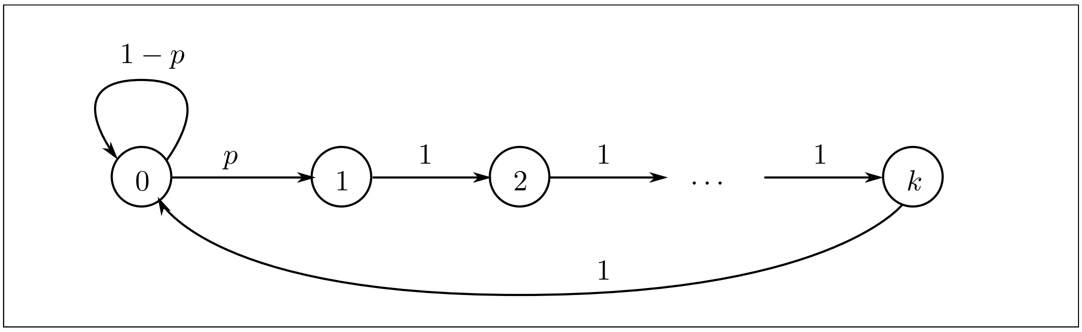
Problema 1.1. Un fabricante tiene una máquina complicada. Al comienzo de cada día que la máquina está operativa el riesgo de que la misma se desconponga es p. Cuando la máquina se descompone se llama inmediatamente a la agencia de mantenimiento para agendar una visita para el día siguiente. Desafortunadamente para el fabricante, la visita de la agencia dura k días y cuesta α dólares diarios. Cada visita sucede de la siguiente manera:

- Supongamos que la máquina empieza la mañana del día t operativa y que durante ese día la misma se descompone un par de horas antes del final de la jornada. El fabricante entonces llama a la agencia de mantenimiento para agendar una visita.
- La mañana del día $t+1$ llegan los técnicos de la agencia y empiezan a trabajar en la máquina. Trabajan todo el día.
- Los días $t+2$, $t+3$, $\ldots$, $t+k-1$, los técnicos de la agencia continúan su trabajo.
- La mañana del día $t+k$ los técnicos de la agencia continúan su trabajo y le entregan la máquina operativa al fabricante para el final de la jornada.
- La mañana del día $t+k+1$ la máquina está operativa nuevamente, aunque se puede descomponer como siempre.

Con esto en mente:

a) 2 Puntos: Modele la situación descrita como una Cadena de Markov. En particular, presente el grafo de la cadena en función de p y k.

Solución: Observe la siguiente figura.



b) 3 Puntos: Calcule:

- El porcentaje del tiempo que la máquina opera toda la jornada sin problemas.
- El porcentaje del tiempo que la máquina empieza el día operativa pero se descompone durante algún momento de la jornada.
- El porcentaje del tiempo que la máquina recibe mantenimiento.

Solución: Primero necesitamos calcular la distribución estacionaria de la cadena, para lo cual escribimos la ecuaciones de estado:

$$\begin{aligned} \pi_0 &= (1-p)\,\pi_0 + \pi_k \\ \pi_1 &= p\,\pi_0 \\ \pi_2 &= \pi_1 \end{aligned}$$

$$\vdots$$
$$\pi_k \;=\; \pi_{k-1}$$

Reconociendo el patrón que emerge para los estados 1 al k tenemos:

$$\forall\, i \in \{1, \ldots, k\} \,:\; \pi_i \;=\; p\,\pi_0$$

Recordando que las probabilidades de toda distribución suman a uno tenemos:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{k} \pi_i \;=\; 1 \quad &\implies (1-p)\,\pi_0 + p\,\pi_0 + \sum_{i=1}^{k} p\,\pi_0 \;=\; 1 \\ &\implies \pi_0\,(\,1 + k\,p\,) \;=\; 1 \quad \implies \pi_0 \;=\; \frac{1}{1+k\,p} \end{aligned}$$

Consecuentemente:

$$\forall\, i \in \{1, \ldots, k\} \,:\; \pi_i \;=\; \frac{p}{1+k\,p}$$

De esta manera:

- El porcentaje del tiempo que la máquina opera toda la jornada sin problemas es:

$$\pi_0\,(1-p) \;=\; \frac{1-p}{1+k\,p}$$

- El porcentaje del tiempo que la máquina empieza el día operativa pero se descompone durante algún momento de la jornada es:

$$\pi_0\,p \;=\; \frac{p}{1+k\,p}$$

- El porcentaje del tiempo que la máquina recibe mantenimiento es:

$$\sum_{i=1}^{k} \pi_i \;=\; \frac{k\,p}{1+k\,p}$$