Modelos Estocásticos para Manufactura y Servicios (INDG-1008): **Unidad 01**

Luis I. Reyes Castro

Escuela Superior Politécnica del Litoral (ESPOL)
Guayaquil - Ecuador

2017 - Primer Término

Repaso de Variables Aleatorias

Valor Esperado:

- Si X es una variable aleatoria discreta entonces

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{x \,\in\, \text{soporte}(X)} x \, \mathbb{P}(x)$$

  donde la sumatoria es sobre todos los valores que puede tomar X.

- Si X es una variable aleatoria continua entonces

$$\mathbb{E}[X] = \int_{x \,\in\, \text{soporte}(X)} x \, f(x) \, dx$$

  donde la integración es sobre todos los valores que puede tomar X.

- Si X, Y son variables aleatorias y a, b son constantes entonces:

$$\mathbb{E}[\, aX + bY \,] = a \, \mathbb{E}[X] + b \, \mathbb{E}[Y]$$

Independecia de Variables Aleatorias:

- Decimos que las variables aleatorias discretas X, Y son independientes si para todo posible par de valores (x, y) que las variables aleatorias pueden tomar es el caso que:

$$\mathbb{P}(\,X = x,\; Y = y\,) \;=\; \mathbb{P}(\,X = x\,)\,\mathbb{P}(\,Y = y\,)$$

- Si X, Y son variables aleatorias independientes entonces:

$$\mathbb{E}[XY] \;=\; \mathbb{E}[X]\,\mathbb{E}[Y]$$

  Nótese que esta relación en general no es válida par variables aleatorias dependientes.

Repaso de Variables Aleatorias

- Si X, Y son dos variables aleatorias entonces la probabilidad del valor x de la primera variable condicional en el valor y de la segunda esta dado por:

$$\mathbb{P}(X = x \mid Y = y) = \frac{\mathbb{P}(X = x,\ Y = y)}{\mathbb{P}(Y = y)}$$

- Claramente, si X, Y son variables aleatorias independientes entonces para todo valor x de la primera variable y todo valor y de la segunda:

$$\mathbb{P}(X = x \mid Y = y) = \mathbb{P}(X = x)$$

Repaso de Variables Aleatorias

- Si X, Y son dos variables aleatorias entonces para todo valor y de la segunda variable aleatoria:

$$\mathbb{E}[\, X \mid Y = y \,] = \sum_{x \,\in\, \text{soporte}(X|Y=y)} x \, \mathbb{P}(\, X = x \mid \; Y = y)$$

- Si X, Y son dos variables aleatorias entonces:

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[\, \mathbb{E}[\, X \mid Y \,]\,] = \sum_{y \,\in\, \text{soporte}(Y)} \mathbb{E}[\, X \mid Y = y \,] \, \mathbb{P}(\, Y = y \,)$$

Variable Aleatoria Bernoulli:

- La variable aleatoria Bernoulli(p) representa la ocurrencia o no ocurrencia de algún evento de interés que sucede con probabilidad p, *e.g.*, el resultado de lanzar una moneda sesgada.

- Si $X \sim$ Bernoulli(p) entonces su distribucion es:

$$\mathbb{P}(\, X = 0 \,) = 1 - p \qquad\qquad \mathbb{P}(\, X = 0 \,) = p$$

- Adicionalmente, su valor esperado y varianza son:

$$\mathbb{E}[X] = p \qquad\qquad \mathrm{var}(X) = p\,(1 - p)$$

Variable Aleatoria Binomial:

- La variable aleatoria Binomial(n, p) representa el número de ensayos exitosos en un experimento que involucra n ensayos independientes donde uno de los cuales tiene éxito con probabilidad p.
- Alternativamente, puede ser reconocida como la suma de variables aleatorias Bernoulli independientes e idénticamente distribídas. *I.e.*, si $X_1, \ldots, X_n$ son variables i.i.d. con distribución Bernoulli(p) entonces:

$$Z = X_1 + \cdots + X_n \qquad \Longrightarrow \qquad Z \sim \text{Binomial}(n, p)$$

Repaso de Variables Aleatorias

- Si $Z \sim \text{Binomial}(n, p)$ entonces su distribucion es:

$$\forall\, k \in \{\, 0,\, 1,\, \ldots,\, n\} \,:\; \mathbb{P}(\, Z = k\,) \;=\; \binom{n}{k} p^k\,(1-p)^k$$

- Adicionalmente, su valor esperado y varianza son:

$$\mathbb{E}[X] \;=\; n\,p \qquad\qquad \text{var}(X) \;=\; n\,p\,(1-p)$$

Variable Aleatoria Geométrica:

- Tenemos dos tipos. Yo las denoto aquí como $\mathrm{Geo}(p)_0$ y $\mathrm{Geo}(p)_1$ pero son realmente la misma variable aleatoria pues:

$$\mathrm{Geo}(p)_0 + 1 \;\sim\; \mathrm{Geo}(p)_1$$

- Para interpretarlas consideraremos una secuencia de experimentos independientes, donde cada uno tiene éxito con probabilidad p, que concluye con el primer experimento exitoso.

Repaso de Variables Aleatorias

- La variable aleatoria $\mathrm{Geo}(p)_0$ representa el número de experimentos fallidos que transcurrieron antes del primer experimento exitoso.
  - Si $X \sim \mathrm{Geo}(p)_0$ entonces su distribucion es:

$$\forall\, k \geq 0 \,:\; \mathbb{P}(\, X = k \,) \;=\; (1-p)^k\, p$$

  - Adicionalmente, su valor esperado y varianza son:

$$\mathbb{E}[X] \;=\; \frac{1-p}{p} \qquad\qquad \mathrm{var}(X) \;=\; \frac{1-p}{p^2}$$

Repaso de Variables Aleatorias

- La variable aleatoria $\text{Geo}(p)_1$ representa la longitud de la secuencia de experimentos, *i.e.*, el número de experimentos realizados.
  - Si $X \sim \text{Geo}(p)_1$ entonces su distribucion es:

$$\forall\, k \geq 1 :\ \mathbb{P}(\, X = k \,) \;=\; (1-p)^{k-1}\, p$$

  - Adicionalmente, su valor esperado y varianza son:

$$\mathbb{E}[X] \;=\; \frac{1}{p} \qquad\qquad \text{var}(X) \;=\; \frac{1-p}{p^2}$$

Variable Aleatoria Exponencial:

- La variable aleatoria Exponencial(λ) es comúnmente utilizada para modelar los tiempos entre arribos o eventos de interés en un proceso estocástico en tiempo continuo.
- Si $X \sim$ Exponencial(λ) entonces su distribucion es:

$$\forall\, t \geq 0 \; : \; f_X(t) \; = \; \lambda\, e^{-\lambda t}$$

- Adicionalmente, su valor esperado y varianza son:

$$\mathbb{E}[X] \; = \; \frac{1}{\lambda} \qquad\qquad \text{var}(X) \; = \; \frac{1}{\lambda^2}$$

Ejercicio - H&L Problema 17.4-3:

El tiempo que requiere un mecánico para reparar una máquina tiene una distribución exponencial con media de 4 horas. Sin embargo, una herramienta especial reduciría esta media a 2 horas. Si el mecánico repara una máquina en menos de 2 horas, se le pagan \$100; de otra manera se le pagan \$80. Determine el aumento esperado en el pago del mecánico si usa esta herramienta especial.

Variable Aleatoria Poisson:

- La variable aleatoria Poisson(μ) es comúnmente utilizada para modelar el número de arribos o eventos de interés en un proceso estocástico a lo largo de un intervalo de tiempo.
- Si $X \sim \text{Poisson}(\mu)$ entonces su distribucion es:

$$\forall\, k \geq 0 : \ \mathbb{P}(\, X = k \,) \ = \ \frac{\mu^k \, e^{-\mu}}{k!}$$

- Adicionalmente, su valor esperado y varianza son:

$$\mathbb{E}[X] \ = \ \mu \qquad\qquad \text{var}(X) \ = \ \mu$$

Proceso Bernoulli

Ejemplo aleatorio:

En una fábrica una máquina tiene un componente que usualmente debe ser reemplazado. A pesar de que reemplazar el componente toma unos pocos minutos al final de la jornada de trabajo, cada día de operación de la máquina el componente se puede dañar con probabilidad p, independientemente de lo que haya pasado antes. Con esto en mente:

- Cuántas veces a la semana, en promedio, tendrán que reemplazar el componente?
- Si han pasado cuatro días desde la última vez que se cambió en componente, cuál es la probabilidad de que se dañe mañana?

Proceso Bernoulli

Proceso Bernoulli con parámetro p:

- Es una secuencia de variables aleatorias Bernoulli con parámetro p independientes e indénticamente distribuidas que representan la presencia o ausencia de arribos.
- Formalmente es una secuencia de variables aleatorias $X_1, X_2, X_3, X_4, \ldots$ donde:
  - Para todo índice i tenemos que $X_i \sim \text{Bernoulli}(p)$.
  - Para todo par de índices i, j es el caso que X_i es independiente de X_j.
- Consideramos que ocurre un arribo en el período t si $X_t = 1$; caso contrario no ocurrió un arribo en ese período.

Tiempo entre arribos:

- Para todo índice i la variable aleatoria T_i representa el número de períodos que transcurrieron desde el i^{avo} arribo hasta el $(i+1)^{\text{avo}}$ arribo.
  - Nótese que soporte$(T_i) = \mathbb{Z}_{\geq 0}$.
- Cuál es la distribución de T_1? *I.e.*, para cada valor $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, cuál es la probabilidad de que $T_1 = k$?
  - Claramente $k = 0$ con probabilidad p.
  - Si $k = 1$ entonces $X_1 = 0$ y $X_2 = 1$, *i.e.*, en el primer período no hubo un arribo y en el segundo período hubo un arribo, lo cual sucede con probabilidad $(1-p)\,p$.
  - Si $k = 2$ entonces $X_1 = 0$, $X_2 = 0$ y $X_3 = 1$, lo cual sucede con probabilidad $(1-p)^2\,p$.

Proceso Bernoulli

- Continuando por inducción matemática, vemos que:

$$\forall\, k \in \mathbb{Z}_{\geq 0} : \ \mathbb{P}(\, T_1 = k\,) \, = \, (1-p)^k\, p \quad \iff \quad T_1 \sim \mathrm{Geo}(p)_0$$

- Teorema: Para cada índice i es el caso que $T_i \sim \mathrm{Geo}(p)_0$.
- Corolario: En un proceso Bernoulli con parámetro p los tiempos entre arribos constituyen una secuencia de variables aleatorias independientes e identicamente distribuidas; en particular, con distribución $\sim \mathrm{Geo}(p)_0$.

Proceso Bernoulli

Número de arribos en un intervalo:

- Si para todo índice k denotamos a la variable aleatoria N_k como el número de arribos desde el comienzo del proceso hasta el k^{avo} periodo, entonces:

$$N_k = \sum_{t=1}^{k} X_t$$

- *I.e.*, la variable aleatoria N_k es la suma de k variables aleatorias Bernoulli con parámetro p independientes e identicamente distribuidas (IID).
- <u>Teorema:</u> Para cada índice k es el caso que $N_k \sim \text{Binomial}(k, p)$.
- <u>Corolario:</u> En un proceso Bernoulli con parámetro p el número de arribos a lo largo de un intervalo de k períodos es una variable aleatoria con distribución binomial con parámetros k y p.

Proceso Bernoulli

Combinación de Procesos Bernoulli:

- Supongamos que tenemos dos procesos Bernoulli independientes.
  - El primero tiene parámetro p.
  - El segundo tiene parámetro q.
- Consideremos un nuevo proceso donde se produce un arribo si y solo si ocurre un arribo en ambos procesos.
  - Los arribos en el nuevo proceso son independientes entre si, pues en cada período solo dependen en los arribos de los procesos generadores, los cuales no dependen de arribos en tiempos anteriores.
  - La probabilidad de un arribo en el nuevo proceso es el producto de las probabilidades de arribo en cada proceso generador, pues los procesos generadores son independientes.
  - En conclusión el nuevo proceso es un proceso Bernoulli con parámetro pq.

Proceso Bernoulli

- Consideremos un nuevo proceso donde se produce un arribo si y solo si ocurre un arribo en alguno de los dos procesos.
    - Los arribos en el nuevo proceso son independientes entre si, pues en cada período solo dependen en los arribos de los procesos generadores, los cuales no dependen de arribos en tiempos anteriores.
    - La probabilidad de un arribo en el nuevo proceso es uno menos la probabilidad de que no haya un arribo, la cual es el producto de las probabilidades de que no hayan arribos en cada uno de los procesos generadores, pues los procesos generadores son independientes.
    - En conclusión el nuevo proceso es un proceso Bernoulli con parámetro $1 - (1 - p)(1 - q)$.

División de Procesos Bernoulli:

- Supongamos que tenemos un proceso Bernoulli con parámetro p que genera dos procesos.
- En cada período:
  - Si el proceso principal produce un arribo, lanzamos una moneda sesgada con probabilidad de cara igual a q.
  - Si la moneda sale cara enviamos el arribo al primer proceso.
  - Si la moneda sale sello enviamos el arribo al segundo proceso.
- Entonces:
  - El primer proceso será un proceso Bernoulli con parámetro $p\,q$.
  - El segundo proceso será un proceso Bernoulli con parámetro $p\,(1-q)$.

Proceso Poisson

Proceso Poisson con parámetro λ:

- Es una secuencia de variables aleatorias exponenciales con parámetro λ independientes e indénticamente distribuidas que representan los tiempos entre arribos.
- Formalmente es una secuencia de variables aleatorias $X_1, X_2, X_3, X_4, \ldots$ donde:
  - Para todo índice i tenemos que $X_i \sim \text{Exponencial}(\lambda)$.
  - Para todo par de índices i, j es el caso que X_i es independiente de X_j.
- El proceso empieza en el tiempo cero, *i.e.,* $t = 0$, el primer arribo ocurre en el tiempo $t = X_1$, el segundo en el tiempo $t = X_1 + X_2$, y así sucesivamente; *i.e.,* el i^{avo} arribo ocurre en:

$$t = X_1 + \cdots + X_i$$

Propiedades estadísticas:

- Falta de memoria:
  En cada instante del proceso, la distribución del tiempo que falta para el siguiente arribo es independiente del tiempo transcurrido desde el último arribo. Más formalmente, para todo índice de arribo i:

$$\forall\ t, \tau > 0 :\ \mathbb{P}(\, X_i > t + \tau \mid X_i > t\,) \ =\ \mathbb{P}(\, X_i > \tau\,)$$

- Número de arribos en un intervalo:
  En un proceso Poisson con parámetro λ el número de arribos en un intervalo de τ unidades es una variable aleatoria Poisson con parámetro $\lambda\,\tau$.

- Arribos en intervalos disjuntos:
  Si dos intervalos de tiempo son disjuntos entonces el número de arribos durante esos intervalos son estadísticamente independientes.

Proceso Poisson

Ejercicio - Taha Problema 18.3A-3:

El tiempo entre llegadas a la Oficina Estatal de Hacienda es exponencial, con valor medio de .05 horas. La oficina abre a las 8:00 A.M.

1. Cuál es la distribución del tiempo entre llegadas?
2. Encuentre la probabilidad de que hasta las 8:15 todavía no haya llegado ningun cliente.
3. En este momento son las 8:35. El último cliente llegó a la oficina a la 8:26. Cuál es la probabilidad de que el siguiente cliente llegue antes de las 8:38? De que no llegue alrededor de las 8:40?
4. Cuál es el promedio de clientes que llegan entre las 8:10 y las 8:45?

Ejercicio - H&L Problema 17.4-2:

Los trabajos que deben realizarse en una máquina específica llegan de acuerdo con un proceso de entradas de Poisson con tasa media de 2 por hora. Suponga que la máquina se descompone y su reparación tardará 1 hora. Cuál es la probabilidad de que el número de trabajos que lleguen durante este tiempo sea:

- Cero?
- Dos?
- Cinco o más?

Ejercicio - Taha Problema 18.3A-7:

Ann y Jim, dos empleados en un restaurante de comida rápida, efectúan el siguiente juego mientras esperan que lleguen clientes: Jim le paga a Ann 2 centavos si el siguiente cliente no llega dentro de 1 minuto; de lo contrario, Ann le paga a Jim 2 centavos. Determine la ganancia promedio de Jim en un periodo de 8 horas. El tiempo entre llegadas es exponencial con media de 1.5 minutos.

Ejercicio - Taha Problema 18.3A-10:

Un cliente que llega a un restaurante de comida rápida McBurger dentro de 4 minutos del cliente inmediatamente anterior recibirá 10% de descuento. Si el tiempo entre llegadas es de entre 4 y 5 minutos, el descuento es de 6%. Si el tiempo entre llegadas es de m'as de 5 minutos, el cliente obtiene 2% de descuento. El tiempo entre llegadas es exponencial con una media de 6 minutos.

Ejercicio - Taha Problema 18.3A-12:

La U de A opera dos líneas de autobuses en el campus: roja y verde. La línea roja presta servicio al norte del campus, y la verde al sur del campus, con una estación de transferencia que une las dos rutas. Los autobuses verdes llegan al azar (tiempo entre llegadas exponencial) a la estación de transferencia cada 10 minutos. Los autobuses rojos también lo hacen al azar cada 7 minutos.

Con esto en mente:

- Cuál es la distribución del tiempo de espera de un estudiante que llega en la línea roja para abordar la línea verde?
- Cuál es la distribución del tiempo de espera de un estudiante que llega en la línea verde para abordar la línea roja?

Combinación de Procesos Poisson:

- Supongamos que tenemos dos procesos independientes.
  - El primero es un proceso Poisson con parámetro λ_1.
  - El segundo es un proceso Poisson con parámetro λ_2.
- Entonces, si consideremos un nuevo proceso que combina los arribos de los dos procesos anteriores, el nuevo proceso es de hecho un proceso Poisson con parámetro:

$$\lambda_1 + \lambda_2$$

- Lo mismo aplica para la combinación de cualquier número de procesos independientes siempre y cuando cada uno sea un proceso Poisson.

Proceso Poisson

División de Procesos Poisson:

- Supongamos que tenemos un proceso Poisson con parámetro λ que genera dos procesos de tal manera que en cada instante:
  - Si el proceso principal produce un arribo, lanzamos una moneda sesgada con probabilidad de cara igual a p.
  - Si la moneda sale cara enviamos el arribo al primer proceso.
  - Si la moneda sale sello enviamos el arribo al segundo proceso.
- Entonces:
  - El primer proceso será un proceso Poisson con parámetro $\lambda\, p$.
  - El segundo proceso será un proceso Poisson con parámetro $\lambda\, (1 - p)$.

Proceso Poisson

Ejercicio - H&L Problema 17.4-5:

Un sistema de colas tiene tres servidores con tiempos de servicio esperados de 30, 20 y 15 minutos. Los tiempos de servicio tienen una distribución exponencial. Cada servidor ha estado ocupado con el cliente actual durante 10 minutos.

Determine el tiempo esperado que falta para la siguiente terminación de un servicio.

Ejercicio - H&L Problema 17.4-6:

Considere un sistema de colas con dos tipos de clientes. Los clientes tipo 1 llegan de acuerdo con un proceso de Poisson a una tasa media de 5 por hora, mientras que los clientes tipo 2 llegan de acuerdo a un proceso de Poisson a una tasa media de 5 por hora. El sistema tiene dos servidores, que atienden a ambos tipos de clientes. Para los dos tipos el tiempo de servicio tiene una distribución exponencial con media de 10 minutos. El servicio es tipo primero en entrar, primero en salir.

Cuál es la distribución (y su media) del tiempo entre llegadas consecutivas de clientes de cualquier tipo?

Ejercicio:

El call center de una empresa de servicios al consumidor recibe en promedio, $\lambda_1 = 11.9$ llamadas por hora para Servicio al Cliente y $\lambda_2 = 21.4$ llamadas por hora para Servicio Técnico. De los clientes que llaman para Servicio al Cliente el $p_{12} = 5.3\%$ es referido a Servicio Técnico, mientras que de los clientes que llaman a Servicio Técnico el $p_{21} = 17.6\%$ es referido a Servicio al Cliente.

Con esto en mente, calcule el número promedio de clientes por hora que debe atender el departamento de Servicio al Cliente y el deparatamento de Servicio Técnico.

Modelamiento

Una **Cadena de Markov** es un modelo matemático de un proceso estocástico en tiempo discreto constituído por:

- Conjunto finito de n estados, donde cada estado es una representación de una posible situación de interés.
- Matriz de transición $\boldsymbol{P} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, donde:
  - Para cada par de estados i, j:

$$\boldsymbol{P}(i,j) \;=\; \mathbb{P}\,(\,\text{siguiente estado sea } j \mid \text{estado actual es } i\,)$$

  - Cada una de las filas de la matriz suman a uno.

Ejercicio - H&L Sección 16.1 (Ejemplo del Clima):

El clima en el pueblo de Centerville puede cambiar con rapidez de un día a otro. Sin embargo, las posibilidades de tener clima seco (sin lluvia) mañana es de alguna forma mayor si hoy está seco, es decir, si no llueve. En particular, la probabilidad de que mañana este seco es de 0.8 si hoy está seco, pero es de solo 0.6 si hoy llueve. Estas probabilidades no cambian si se considera la información acerca del clima en los días anteriores a hoy.

Modele este proceso climático como una Cadena de Markov.

Modelamiento

Estados:

1. Está seco
2. Llueve

Matriz de transición:

$$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.6 & 0.4 \end{bmatrix}$$

Ejercicio - H&L Sección 16.1 (Ejemplo de Inventarios):

La tienda de fotografía de Dave se admministra semanalmente y está abierta al público desde el lunes en la mañana hasta el sábado en la noche. Dave tiene en almacén un modelo especial de cámara que se vende relativamente bien.
Sean D_1, D_2, $D_3, \ldots$ las demandas semanales de la cámara en unidades, *i.e.,* el número de unidades que se venderían si el inventario fuere inagotable.
Más precisamente, suponga que las demandas D_t son variables aleatorias i.i.d. que siguen una distribución Poisson con parámetro $\lambda = 1$.

Dave maneja el inventario de acuerdo a la siguiente política:

- Si no hay unidades de la cámara en inventario, se hace un pedido al proveedor por tres unidades. En este caso, el proveedor entregará el pedido el lunes a primera hora, justo antes de que la tienda abra.
- Caso contrario, no se hace un pedido.

Modelamiento

Definiendo a los cuatro posibles número de cámaras en inventario al final de cada semana como los estados, modele la política de inventario descrita como una Cadena de Markov.

Por si acaso, el orden de las actividades de la t^{ava} semana es:

1. Si se hizo un pedido al proveedor de las cámaras al final de la $(t-1)^{\text{ava}}$ semana se reciben las unidades que se pidieron.
2. Se abre la tienda desde el lunes en la mañana hasta el sábado en la noche. Durante este tiempo se venden entre cero y tres cámaras.
3. Se cierra la tienda.
4. De ser necesario, se hace un pedido al proveedor de las cámaras.

Modelamiento

Estados:

1. Quedan 0 unidades en inventario al final de la semana
2. Quedan 1 unidades en inventario al final de la semana
3. Quedan 2 unidades en inventario al final de la semana
4. Quedan 3 unidades en inventario al final de la semana

Matriz de transición:

$$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} 0.08 & 0.18 & 0.37 & 0.37 \\ 0.63 & 0.37 & 0 & 0 \\ 0.26 & 0.37 & 0.37 & 0 \\ 0.08 & 0.18 & 0.37 & 0.37 \end{bmatrix}$$

Modelamiento

Ejercicio - H&L Sección 16.2 (Ejemplo de Acciones 1):

En un mercado de valores existe una acción que solo puede subir o bajar de precio. Si la acción subió hoy, la probabilidad de que suba mañana es de 0.7. En cambio, si la acción bajó hoy, la probabilidad de que suba mañana es de solo 0.5.

Modele el comportamiento de esta acción como una Cadena de Markov.

Ejercicio - H&L Sección 16.2 (Ejemplo de Acciones 2):

Suponga ahora que el modelo del mercado de acciones se cambia de manera que el precio de la acción mañana depende del precio de ayer y de hoy. En particular, si la acción subió los dos días, ayer y hoy, la probabilidad de que suba mañana es de 0.9. Si la acción bajó ayer pero hoy subió, la probabilidad de que mañana suba es de 0.6. Si la acción subió ayer pero hoy bajó, la probabilidad de que mañana suba es de 0.5. Por último, si bajó durante estos dos días, la probabilidad de que mañana suba es de 0.3.

Modele el comportamiento de esta acción como una Cadena de Markov.

Ejercicio:

Un operador de servicios de telefonía celular está en proceso de instalar una antena en un barrio promedio, donde se puede esperar que la antena reciba un paquete de datos para su transmisión durante cada ciclo (*e.g.*, durante cada milisegundo) con probabilidad $\lambda \in (0.99, 1)$. Para poder satisfacer esta demanda se instaló un buffer con capacidad para M paquetes de datos junto con n transmisores que operan en canales independientes pero ruidosos; en particular, cada transmisor que es encargado con el envío de un paquete logra transmitirlo exitosamente con probabilidad $\mu \in (0.94, 0.98)$. Cuando una transmisión fracasa se mantiene al paquete en el buffer y se reintenta la transmisión en el siguiente período.

Cada ciclo de operación, digamos el t^{avo} ciclo, avanza de la siguiente manera:

1. Se empieza el ciclo con X_{t-1} paquetes en el búffer.

2. Si el buffer no está lleno, se recibe un nuevo paquete con probabilidad λ, de tal manera que el nuevo número de paquetes en el buffer es:

$$\min \{ X_{t-1} + D_t \, , \; M \} \, , \qquad \text{donde } D_t \sim \text{Bernoulli}(\lambda)$$

3. Los transmisores intentan enviar cuantos paquetes puedan. Si hay n paquetes o más en el buffer, entonces cada uno de los transmisores es asignado a un único paquete, y cada transmisor logra enviar su paquete con éxito con probabilidad μ, independiente de los otros. Si hay menos de n paquetes en el buffer se opera de la misma manera, pero en este caso habrá uno o más transmisores a los que no será necesario asignarles paquetes en este ciclo.

Con todo esto en mente, construya un modelo de Cadena de Markov de este proceso para el caso particular cuando $M = 5$ y $n = 3$. En particular, explique cuales son los estados y liste todas las probabilidades de transición positivas.

Modelamiento

Definición Formal de una Cadena de Markov:

- Es una secuencia de variables aleatorias discretas $X_0, X_1, X_2, \ldots, X_t, \ldots$ donde para cada índice de tiempo discreto t la variable aleatoria X_t es el estado del proceso en el tiempo t.

- Tiene la Propiedad Markoviana, *i.e.*, que la distribución del siguiente estado solo depende en el estado actual:

$$\mathbb{P}(\, X_{t+1} \mid X_0, X_1, \ldots, X_t \,) \; = \; \mathbb{P}(\, X_{t+1} \mid X_t \,)$$

- En este contexto la matriz de transición $\boldsymbol{P}$ se define como :

$$\boldsymbol{P}(i,j) \; = \; \mathbb{P}(\, X_{t+1} = j \mid X_t = i \,)$$

Estados Transitorios y Recurrentes

Algunas definiciones:

- Un **camino** desde el estado i hasta el estado j es una secuencia finita de estados que empieza en el estado i y termina en el estado j donde cada transición entre estados a lo largo del camino tiene probabilidad positiva.
- El estado i puede **alcanzar** al estado j si existe al menos un camino desde i hasta j.
- Un par de estados i, j se **comunican** si el estado i puede alcanzar al estado j y vice-versa.
- Un estado i es **transitorio** si puede alcanzar otro estado j tal que tal que el estado i no puede ser alcanzado desde el estado j.
- Un estado i es **recurrente** si no es transitorio.
  - Toda cadena de Markov tiene al menos un estado recurrente.

Estados Transitorios y Recurrentes

- Un estado i es **absorbente** si es recurrente y además no puede ser abandonado una vez que ocurre.
- Un subconjunto de estados es una **clase recurrente** si:
  - Todos sus estados son recurrentes.
  - Todo par de estados en la clase se comunican.
- Un estado i tiene **período** k si todo camino de retorno al estado tiene una longitud igual al algún múltiplo de k. Más formalmente:

$$k = \text{MCD}\{ n \geq 1 : \mathbb{P}(X_n = i \mid X_0 = i) > 0 \}$$

  Además, si $k = 1$ entonces decimos que el estado es **aperiódico**.
- Una cadena es **aperiódica** si tiene al menos un estado aperiódico.

Estados Transitorios y Recurrentes

- Decimos que una cadena es **irreducible** o es una **uni-cadena** si:
  - Es aperiódica.
  - Todos sus estados pertenecen a una única clase recurrente.

Algunos resultados generales:

- Si una cadena es aperiódica entonces tiene al menos una distribución en estado estable; caso contrario, la cadena no puede tener ninguna distribución en estado estable.
- Para el caso de cadenas aperiódicas, sin importar si existe una o más distribuciones en estado estable, todas las distribuciones en estado estable le asignan cero probabilidad a los estados transitorios.

Estados Transitorios y Recurrentes

Algunos resultados para cadenas con **una sola clase recurrente:**

- La distribución en estado estable existe, es única, y no depende de la distribución del estado inicial.
- Todo estado recurrente tiene probabilidad en estado estable positiva.

Algunos resultados para cadenas con **más de una clase recurrente:**

- La distribución en estado estable existe pero no es única y depende de la distribución del estado inicial.
- Todo estado recurrente que puede ser alcanzado desde el estado inicial tiene probabilidad en estado estable positiva, la cual puede ser computada por propagación de distribuciones.

Estados Transitorios y Recurrentes

Ejercicio en Clase:

- H&L Problema 16.5-4
- H&L Problema 16.5-1

Ejercicio en Clase:

- H&L Problema 16.4-1
- H&L Problema 16.4-2
- H&L Problema 16.4-3
- H&L Problema 16.4-4
- H&L Problema 16.4-5

Distribución Estacionaria

Propagación de la Distribución Inicial:

- Supongamos que el estado inicial de una Cadena de Markov no es conocido a priori sino que obedece una distribución inicial $\boldsymbol{\pi_0} \in \mathbb{R}^n$, donde:

$$\forall x: \; \boldsymbol{\pi_0}(x) \;=\; \mathbb{P}(\, X_0 = x \,)$$

- Como caso especial, supóngase que el estado inicial es conocido, *e.g.*, que $X_0 = x_0$. Entonces la distribución inicial sería:

$$\boldsymbol{\pi_0}(x_0) \;=\; 1; \qquad \forall x \neq x_0: \; \boldsymbol{\pi_0}(x) \;=\; 0;$$

- Ahora, si denotamos a $\boldsymbol{\pi_1}$ como la distribución del primer estado, tenemos que para todo posible primer estado x_1 :

$$\begin{aligned}\forall x_1 :\ \boldsymbol{\pi_1}(x_1) &= \mathbb{P}(\,X_1 = x_1\,) \\ &= \sum_{\text{estados } x_0} \mathbb{P}(\,X_0 = x_0\,)\,\mathbb{P}(\,X_1 = x_1 \mid X_0 = x_0\,) \\ &= \sum_{\text{estados } x_0} \boldsymbol{\pi_0}(x_0)\,\boldsymbol{P}(x_0, x_1)\end{aligned}$$

- Matricialmente, eso equivale a:

$$\boldsymbol{\pi_1'} = \boldsymbol{\pi_0'}\,\boldsymbol{P}$$

Distribución Estacionaria

- Luego, si denotamos a $\boldsymbol{\pi_2}$ como la distribución del segundo estado, tenemos que para todo posible segundo estado x_2 :

$$
\begin{aligned}
\forall x_2 :\ \boldsymbol{\pi_2}(x_2) &= \mathbb{P}(\, X_2 = x_2 \,) \\
&= \sum_{\text{estados } x_1} \mathbb{P}(\, X_1 = x_1 \,)\, \mathbb{P}(\, X_2 = x_2 \mid X_1 = x_1 \,) \\
&= \sum_{\text{estados } x_1} \boldsymbol{\pi_1}(x_1)\, \boldsymbol{P}(x_1, x_2)
\end{aligned}
$$

- Matricialmente, tenemos que:

$$\boldsymbol{\pi}_2' = \boldsymbol{\pi}_1' \, \boldsymbol{P}$$

Distribución Estacionaria

- Más generalmente, si conocemos la distribución del estado actual $\boldsymbol{\pi_t}$, entonces para la distribución del siguiente estado, denotada $\boldsymbol{\pi_{t+1}}$, es el caso que:

$$\begin{aligned}
\forall x_{t+1}:\ \boldsymbol{\pi_{t+1}}(x_{t+1}) &= \mathbb{P}(\,X_{t+1} = x_{t+1}\,) \\
&= \sum_{\text{estados } x_t} \mathbb{P}(\,X_t = x_t\,)\,\mathbb{P}(\,X_{t+1} = x_{t+1} \mid X_t = x_t\,) \\
&= \sum_{\text{estados } x_t} \boldsymbol{\pi_t}(x_t)\,\boldsymbol{P}(x_t, x_{t+1})
\end{aligned}$$

- Matricialmente, tenemos que:

$$\boldsymbol{\pi'_{t+1}} = \boldsymbol{\pi'_t}\,\boldsymbol{P}$$

Distribución Estacionaria

- Usando inducción matemática, es fácil ver que:

$$\forall t \geq 1: \ \boldsymbol{\pi}_t' = \boldsymbol{\pi}_0' \, \boldsymbol{P}^t$$

- Además, si la Cadena de Markov no tiene ciclos determinísicos entonces sin importar la distribución inicial $\boldsymbol{\pi_0}$ es el caso que la distribución del estado actual $\boldsymbol{\pi_t}$ converge a una única distribución $\boldsymbol{\pi}^*$, conocida como la distribución en estado estable o estacionaria de la cadena. *I.e.:*

$$\exists! \, \boldsymbol{\pi}^* \in \mathbb{R}^n: \quad \lim_{t \to \infty} \boldsymbol{\pi_t} = \boldsymbol{\pi}^*$$

Distribución Estacionaria

- Finalmente, si la distribución en estado estable (estacionaria) existe entonces dicha distribución es invariante:

$$(\boldsymbol{\pi}^*)' = (\boldsymbol{\pi}^*)' \boldsymbol{P}$$

- Esto implica que si la distribución del estado inicial es igual a la distribución estacionaria, *i.e.*, que si $X_0 \sim \boldsymbol{\pi}^*$, entonces la distribución del primer estado es igual a la distribución estacionaria, *i.e.*, que $X_1 \sim \boldsymbol{\pi}^*$, lo que a su vez implica que la distribución del segundo estado es igual a la distribución estacionaria, *i.e.*, que $X_2 \sim \boldsymbol{\pi}^*$, y asi sucesivamente.

Cálculo de la Distribución en Estado Estable:

1. Escribimos una ecuación para cada uno de los n estados:

$$\forall e\colon\ \boldsymbol{\pi}(e) \;=\; \sum_{\text{estados } x} \boldsymbol{\pi}(x)\, \boldsymbol{P}(x, e)$$

2. Desechamos arbitrariamente una de las n ecuaciones anteriores y la reemplazamos por:

$$\sum_{\text{estados } e} \boldsymbol{\pi}(e) \;=\; 1$$

3. Resolvemos el sistema de ecuaciones lineales resultante, el cual tiene n incógnitas y n ecuaciones linealmente independientes.