

Programación Entera para Ingeniería (INDG-1019): **Juego de Diapositivas 01**

Luis I. Reyes Castro

Escuela Superior Politécnica del Litoral (ESPOL)
Guayaquil - Ecuador

2018 - Término I

- 1 Restricciones Lógicas y Combinatorias
- 2 Restricciones entre Subconjuntos de Índices
- 3 Restricciones Temporales

- 1 Restricciones Lógicas y Combinatorias
- 2 Restricciones entre Subconjuntos de Índices
- 3 Restricciones Temporales

Considere un programa entero que contiene $m \geq 10$ variables binarias

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_m \in \{0, 1\}$$

junto con otras variables adicionales. En los siguientes literales expresaremos una diversidad de reglas lógicas y combinatoriales utilizando el lenguaje de la Programación Lineal Entera (PLE) mediante la introducción de restricciones lineales de desigualdad y de igualdad.

Por favor considere que cada literal es independiente de todos los otros.

- *Regla:* El O-inclusivo (OR) de las variables evalúa en uno, *i.e.*, se requiere que $x_i = 1$ para al menos un índice i .

Implementación: Introducimos la restricción lineal:

$$\sum_{i=1}^m x_i \geq 1$$

- *Regla:* El O-exclusivo (XOR) de las variables evalúa en uno, *i.e.*, se requiere que $x_i = 1$ para exactamente un índice i .

Implementación: Introducimos la restricción lineal:

$$\sum_{i=1}^m x_i = 1$$

Para los siguientes literales suponga que $2 \leq n < m$.

- *Regla:* $x_i = 1$ al menos n veces.

Implementación: Introducimos la restricción lineal:

$$\sum_{i=1}^n x_i \geq n$$

- *Regla:* $x_i = 1$ no más de n veces.

Implementación: Introducimos la restricción lineal:

$$\sum_{i=1}^n x_i \leq n$$

- *Regla:* $x_i = 1$ exactamente n veces.

Implementación: Introducimos la siguiente restricción lineal de igualdad:

$$\sum_{i=1}^n x_i = n$$

Implementación equivalente: Introducimos el siguiente par de restricciones lineales de desigualdad:

$$n \leq \sum_{i=1}^n x_i \leq n$$

Restricciones Lógicas y Combinatorias

Para los siguiente literales suponga que $y \in \{0, 1\}$ y que $2 \leq n < m$.

- *Regla:* Si $y = 1$ entonces el O-inclusivo (OR) de las variables evalúa en uno.

Implementación: Introducimos la restricción lineal:

$$y \leq \sum_{i=1}^m x_i$$

- *Regla:* Si $y = 1$ entonces el O-exclusivo (XOR) de las variables evalúa en uno.

Implementación: Introducimos el siguiente par de restricciones lineales:

$$y \leq \sum_{i=1}^m x_i \leq m - (m - 1)y$$

- *Regla:* Si $y = 1$ entonces $x_i = 1$ para al menos n índices i .

Implementación: Introducimos la restricción lineal:

$$n y \leq \sum_{i=1}^m x_i$$

- *Regla:* Si $y = 1$ entonces $x_i = 1$ para no más de n índices i .

Implementación: Introducimos la restricción lineal:

$$\sum_{i=1}^m x_i \leq m - (m - n) y$$

- *Regla:* Si $y = 1$ entonces $x_i = 1$ para exactamente n de los índices i .

Implementación: Introducimos el siguiente par de restricciones lineales:

$$n y \leq \sum_{i=1}^m x_i \leq m - (m - n) y$$

- *Regla:* Si el O-inclusivo (OR) de las variables evalúa en uno entonces $y = 1$.

Implementación: Introducimos la restricción lineal:

$$\sum_{i=1}^m x_i \leq m y$$

- *Regla:* Si $x_i = 1$ para al menos n índices i entonces $y = 1$.

Implementación: Introducimos la restricción lineal:

$$\sum_{i=1}^m x_i \leq (n-1) + (m-n+1)y$$

- *Regla:* Si $x_i = 1$ para no más de n índices i entonces $y = 1$.

Implementación: Introducimos la restricción lineal:

$$\sum_{i=1}^m x_i \geq (n+1) - (n+1)y$$

- *Regla:* Si $x_i = 1$ para exactamente n índices i entonces $y = 1$.

Implementación: Introducimos el par de restricciones lineales:

$$(n+1) - (n+1)y \leq \sum_{i=1}^m x_i \leq (n-1) + (m-n+1)y$$

Restricciones Lógicas y Combinatorias

- *Regla:* $y = 1$ si y solo si $x_i = 1$ para exactamente n de los índices i .

Implementación:

- Introducimos un par de restricciones que causan que $y = 1$ fuerce a que $x_i = 1$ para exactamente n de los índices i .

$$ny \leq \sum_{i=1}^m x_i \leq m - (m - n)y$$

- Introducimos un par de restricciones que causan que $x_i = 1$ para exactamente n de los índices i fuerce a que $y = 1$.

$$\sum_{i=1}^m x_i \leq (n-1) + (m-n+1)y$$
$$\sum_{i=1}^m x_i \geq (n+1) - (n+1)y$$

Restricciones Lógicas y Combinatorias

- *Regla:* Si $y = 1$ entonces el Y (AND) de las variables evalúa en uno.

Implementación A: Introducimos el juego de restricciones lineales:

$$\forall i \in \llbracket m \rrbracket : y \leq x_i$$

Implementación B: Introducimos la restricción lineal:

$$m y \leq \sum_{i=1}^m x_i$$

Observación: Esta vez las dos implementaciones presentadas no son equivalentes. De hecho, desde el punto de vista de la PLE la primera implementación es más apretada que la segunda. Esto se debe a que las restricciones de la primera implementación implican la única restricción de la segunda implementación, pero el reverso no es cierto.

- *Regla:* Si el Y (AND) de las variables evalúa en uno entonces $y = 1$.

Implementación: Introducimos la restricción:

$$\sum_{i=1}^m x_i \leq (m - 1) + y$$

- 1 Restricciones Lógicas y Combinatorias
- 2 Restricciones entre Subconjuntos de Índices
- 3 Restricciones Temporales

Restricciones entre Subconjuntos de Índices

Considere un programa entero que contiene $m \geq 10$ variables binarias

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_m \in \{0, 1\}$$

junto con otras variables adicionales. En este programa S y T son dos subconjuntos de índices de las variables x_i (i.e., $S, T \subseteq \llbracket m \rrbracket$), cuyas cardinalidades se escriben como $|S|$ y $|T|$, respectivamente.

En los siguientes literales expresaremos una diversidad de reglas lógicas y combinatoriales entre las variables cuyos índices pertenecen a S y a T utilizando el lenguaje de la Programación Lineal Entera (PLE) mediante la introducción de variables adicionales y de restricciones lineales.

Por favor considere que cada literal es independiente de todos los otros.

Restricciones entre Subconjuntos de Índices

- *Regla:* Si $x_i = 1$ para algún $i \in S$ entonces $x_j = 0$ para todo $j \in T$.

Implementación:

- 1 Introducimos las variables binarias $a_S, a_T \in \{0, 1\}$.
- 2 Introducimos un juego de restricciones que fuerza $a_S = 1$ cuando $x_i = 1$ para al menos un $i \in S$:

$$\forall i \in S : x_i \leq a_S$$

- 3 Introducimos un juego de restricciones que fuerza a que $x_j = 0$ para todo $j \in T$ cuando $a_T = 0$.

$$\forall j \in T : x_j \leq a_T$$

- 4 Introducimos una restricción que fuerza $a_T = 0$ cuando $a_S = 1$:

$$a_T \leq 1 - a_S$$

Restricciones entre Subconjuntos de Índices

- *Regla:* Si $x_i = 1$ para algún $i \in S$ entonces $x_j = 0$ para todo $j \in T$, y vice-versa.

Implementación:

- 1 Introducimos las variables binarias $a_S, a_T \in \{0, 1\}$.
- 2 Introducimos un juego de restricciones que fuerza $a_S = 1$ cuando $x_i = 1$ para al menos un $i \in S$:

$$\forall i \in S : x_i \leq a_S$$

- 3 Introducimos un juego de restricciones que fuerza $a_T = 1$ cuando $x_j = 1$ para al menos un $j \in T$:

$$\forall j \in T : x_j \leq a_T$$

- 4 Agregamos una restricción que impide que a_S y a_T puedan tomar el valor uno al mismo tiempo:

$$a_S + a_T \leq 1$$

Restricciones entre Subconjuntos de Índices

- *Regla:* Si $x_i = 1$ para algún $i \in S$ entonces $x_j = 1$ para algún $j \in T$.

Implementación:

- 1 Introducimos las variables binarias $a_S, a_T \in \{0, 1\}$.
- 2 Introducimos un juego de restricciones que fuerza $a_S = 1$ cuando $x_i = 1$ para al menos un $i \in S$:

$$\forall i \in S : x_i \leq a_S$$

- 3 Introducimos una restricción que fuerza $a_T = 1$ cuando $a_S = 1$:

$$a_S \leq a_T$$

- 4 Introducimos una restricción que fuerza a que $x_j = 1$ para al menos un $j \in T$ cuando $a_T = 1$.

$$a_T \leq \sum_{j \in T} x_j$$

Restricciones entre Subconjuntos de Índices

En los siguientes literales suponga que $w \in \{0, 1\}$.

- *Regla:* Si $x_i = 1$ para al menos un índice $i \in S$ entonces $w = 1$.

Implementación: Introducimos la restricción:

$$\sum_{i \in S} x_i \leq |S| w$$

- *Regla:* Si $x_i = 1$ para todo índice $i \in S$ entonces $w = 1$.

Implementación: Introducimos la restricción:

$$\sum_{i \in S} x_i \leq (|S| - 1) + w$$

Restricciones entre Subconjuntos de Índices

- *Regla:* Si $x_i = 1$ para más índices $i \in S$ que $i \in T$ entonces $w = 1$.

Implementación: Introducimos la restricción:

$$\sum_{i \in S} x_i - |S| w \leq \sum_{j \in T} x_j$$

- *Regla:* Si $x_i = 1$ para al menos un índice $i \in S$ y $x_j = 0$ para todo índice $j \in T$, o vice-versa, entonces $w = 1$.

Implementación:

- 1 Introducimos las variables binarias $a_S, a_T \in \{0, 1\}$.
- 2 Introducimos un juego de restricciones que fuerza $a_S = 1$ cuando $x_i = 1$ para al menos un $i \in S$:

$$\forall i \in S : x_i \leq a_S$$

Restricciones entre Subconjuntos de Índices

- 3** Introducimos un juego de restricciones que fuerza $a_T = 1$ cuando $x_j = 1$ para al menos un $j \in T$:

$$\forall j \in T : x_j \leq a_T$$

- 4** Agregamos un par de restricciones que fuerzan a que $w = 1$ cuando $a_S = 1$ y $a_T = 0$ o cuando $a_S = 0$ y $a_T = 1$:

$$a_S + (1 - a_T) \leq 1 + w$$

$$(1 - a_S) + a_T \leq 1 + w$$

- 1 Restricciones Lógicas y Combinatorias
- 2 Restricciones entre Subconjuntos de Índices
- 3 Restricciones Temporales

[En Desarrollo]