Modelos Estocásticos para Manufactura y Servicios (INDG-1008): **Unidad 03**

Luis I. Reyes Castro

Escuela Superior Politécnica del Litoral (ESPOL)
Guayaquil - Ecuador

2017 - Primer Término

Actores Principales:

- Clientes: Aquellos que desean el servicio que ofrece el sistema. En nuestros modelos sus actividades son:
  - Arribar al sistema, y esperar en cola de ser necesario.
  - Ser servido, y abandonar el sistema una vez servido.
- Servidores: Aquellos que proveen a los clientes el servicio que ofrece el sistema. En nuestros modelos sus actividades son:
  - Esperar el arribo de clientes para servirlos, *i.e.,* no hacer nada.
  - Servir clientes.

Disciplina de Servicio:

- Solamente consideraremos sistemas de colas FIFO *(First-In, First-Out)*, *i.e.*, sistemas donde todos los clientes son considerados idénticos y se los atiende en order de llegada.
- Si un cliente arriba al sistema y hay al menos un servidor esperando clientes, entonces el nuevo cliente no necesitará esperar en cola y empezará a ser servido inmediatamente.
- Si un cliente arriba al sistema y todos los servidores están ocupados con otros clientes que arribaron anteriormente, entonces el nuevo cliente necesitará tomar el último puesto en la cola y esperar para poder ser servido.

Nociones Básicas de Sistemas de Colas

Métricas de Desempeño:

- $\boldsymbol{L}$ **:** Número esperado de clientes en el sistema.
  - Incluye a los clientes en servicio y en cola.
- $\boldsymbol{L_q}$ **:** Número esperado de clientes en cola.
  - No incluye a los clientes en servicio.
- $\boldsymbol{W}$ **:** Tiempo esperado (promedio) de espera en el sistema por cliente.
  - Incluye el tiempo de espera en cola y el tiempo de servicio.
- $\boldsymbol{W_q}$ **:** Tiempo esperado (promedio) de espera en el cola por cliente.
  - No incluye el tiempo de servicio.

Teorema - Ley de Little :

Para todo sistema de colas que recibe clientes a una tasa de λ por período, es el caso que:

$$L \;=\; \lambda\, W \qquad\qquad L_q \;=\; \lambda\, W_q$$

Nótese que este teorema no requiere que el proceso de arribo sea Poisson, *i.e.,* no requiere que los tiempos entre arribos estén exponencialmente distribuídos. De hecho, si suponemos que la variable aleatoria X representa la distribución del tiempo entre arribos al sistema de colas, tenemos que:

$$\lambda \;=\; \frac{1}{\mathbb{E}[X]}$$

1. Nociones Básicas de Sistemas de Colas

2. Cadenas de Markov en Tiempo Continuo
   - Modelamiento
   - Distribución Estacionaria

Modelamiento

Una **Cadena de Markov de Tiempo Continuo** es un modelo matemático de un proceso estocástico en tiempo continuo constituído por:

- Conjunto finito de n estados, donde cada estado es una representación de una posible situación de interés.
- Matriz de tasas de transición $\boldsymbol{Q} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, donde:
  - Para todo estado i suponemos que $\boldsymbol{Q}(i,i) = 0$
  - Para todo estado i definimos a la tasa del salida de ese estado como:

$$\boldsymbol{Q}(i) \triangleq \sum_{1 \leq j \leq n} \boldsymbol{Q}(i,j)$$

  - Para cada par de estados i, j:

$$\boldsymbol{P}(i,j) = \mathbb{P}(\text{ siguiente estado sea } j \mid \text{estado actual es } i\text{ }) = \frac{\boldsymbol{Q}(i,j)}{\boldsymbol{Q}(i)}$$

Modelamiento

- Cada vez que la cadena ingresa a un estado i la duración del intervalo durante el cual la cadena permanece en ese estado, denotado T_i, es una variable aleatoria con distribución exponencial. Más precisamente:

$$T_i \sim \text{Exponencial}\,(\,\boldsymbol{Q}(i)\,)$$

- Observe además que para cualquier estado i la sumatoria de las tasas de transición $\boldsymbol{Q}(i,j)$ es positiva pero generalmente diferente de uno.

Ejemplo:

Un taller tiene dos máquinas idénticas en operación continua excepto cuando se descomponen. Como lo hacen con bastante frecuencia, el taller dispone de un técnico contratado a tiempo completo para repararlas cuando es necesario. El tiempo que se requiere para reparar una máquina tiene distribución exponencial con media de 0.5 días. Una vez que se termina la reparación, el tiempo que transcurre hasta la siguiente descompostura tiene distribución exponencial con media de un 1.0 días. Estas distribuciones son independientes.

Modele la situación descrita como una Cadena de Markov en Tiempo Continuo.

Modelamiento

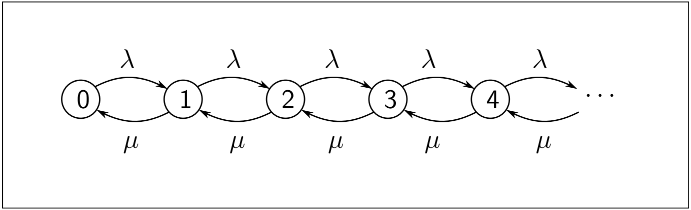
Ejemplo: Modelo M/M/1

Un sistema de colas cuenta con un único servidor cuyo tiempo de servicio está exponencialmente distribuído con una tasa de μ por hora. Asumiendo que los clientes arriban de acuerdo a un proceso Poisson con tasa de λ por hora, modele este sistema de colas como una Cadena de Markov en Tiempo Continuo.

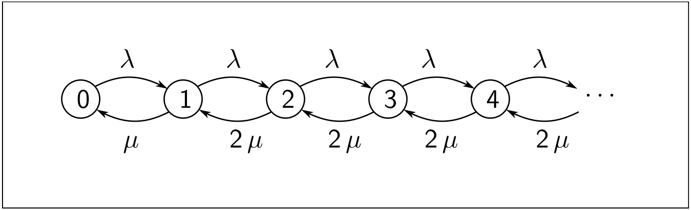
Ejemplo: Modelo M/M/2

Un sistema de colas cuenta con dos servidores idénticos cuyos tiempos de servicio están exponencialmente distribuídos con una tasa de μ por hora. Asumiendo nuevamente que los clientes arriban de acuerdo a un proceso Poisson con tasa de λ por hora, modele este sistema de colas como una Cadena de Markov en Tiempo Continuo.

Cadena de Markov para el Modelo M/M/1:



Cadena de Markov para el Modelo M/M/2:



Ejemplo: Modelo M/M/3

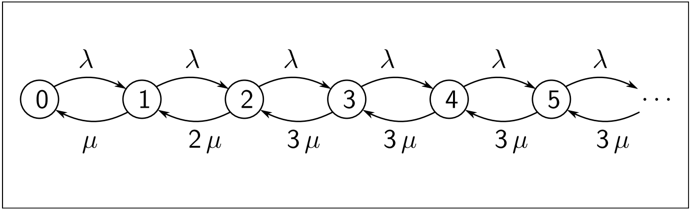
Un sistema de colas cuenta con tres servidores idénticos cuyos tiempos de servicio están exponencialmente distribuídos con una tasa de μ por hora. Asumiendo que los clientes arriban de acuerdo a un proceso Poisson con tasa de λ por hora, modele este sistema de colas como una Cadena de Markov en Tiempo Continuo.

Ejemplo: Modelo M/M/4

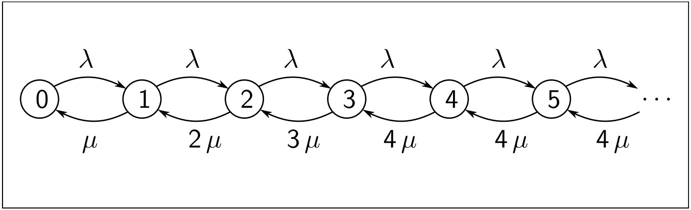
Un sistema de colas cuenta con cuatro servidores idénticos cuyos tiempos de servicio están exponencialmente distribuídos con una tasa de μ por hora. Asumiendo que los clientes arriban de acuerdo a un proceso Poisson con tasa de λ por hora, modele este sistema de colas como una Cadena de Markov en Tiempo Continuo.

Modelamiento

Cadena de Markov para el Modelo M/M/3:



Cadena de Markov para el Modelo M/M/4:



Distribución Estacionaria

Cálculo de la Distribución en Estado Estable:

1. Descartamos todos los estados transitorios.
2. Escribimos una ecuación de balance para cada uno de los n estados:

$$\forall \, \text{estado } j: \; \boldsymbol{\pi}(j) \, \boldsymbol{Q}(j) \; = \sum_{\text{estados } i} \boldsymbol{\pi}(i) \, \boldsymbol{Q}(i,j)$$

3. Desechamos arbitrariamente una de las n ecuaciones anteriores y la reemplazamos por:

$$\sum_{\text{estados } x} \boldsymbol{\pi}(x) \; = \; 1$$

4. Resolvemos el sistema de ecuaciones lineales resultante, el cual tiene n incógnitas y n ecuaciones linealmente independientes.

Ejemplo:

Un taller tiene dos máquinas idénticas en operación continua excepto cuando se descomponen. Como lo hacen con bastante frecuencia, el taller dispone de un técnico contratado a tiempo completo para repararlas cuando es necesario. El tiempo que se requiere para reparar una máquina tiene distribución exponencial con media de 0.5 días. Una vez que se termina la reparación, el tiempo que transcurre hasta la siguiente descompostura tiene distribución exponencial con media de un 1.0 días. Estas distribuciones son independientes.

Calcule el porcentaje del tiempo que el taller tiene:

- Las dos máquinas operativas.
- Una máquina operativa y una descompuesta.
- Las dos máquinas descompuestas.

Ejemplo: Modelo M/M/1

Un sistema de colas cuenta con un único servidor cuyo tiempo de servicio está exponencialmente distribuído con una tasa de μ por hora. Los clientes arriban de acuerdo a un proceso Poisson con tasa de λ por hora.

Definiendo a la tasa de utilización

$$\rho \triangleq \frac{\lambda}{\mu}$$

encuentre:

- La condición que deben cumplir λ y μ, o equivalentemente ρ, para que exista una distribución estacionaria del sistema.
- La distribución estacionaria en función de ρ.
- El número esperado de clientes en el sistema y en cola en función de ρ.

Distribución Estacionaria

Ejemplo: Modelo M/M/2

Un sistema de colas cuenta con dos servidores idénticos cuyos tiempos de servicio están exponencialmente distribuídos con una tasa de μ por hora. Los clientes arriban de acuerdo a un proceso Poisson con tasa de λ por hora.

Definiendo a la tasa de utilización

$$\rho \triangleq \frac{\lambda}{2\mu}$$

encuentre:

- La condición que deben cumplir λ y μ, o equivalentemente ρ, para que exista una distribución estacionaria del sistema.
- La distribución estacionaria en función de ρ.
- El número esperado de clientes en el sistema y en cola en función de ρ.