Modelos Estocásticos (INDG-1008): Examen 01

Semestre: 2017-2018 Término II **Instructor:** Luis I. Reyes Castro

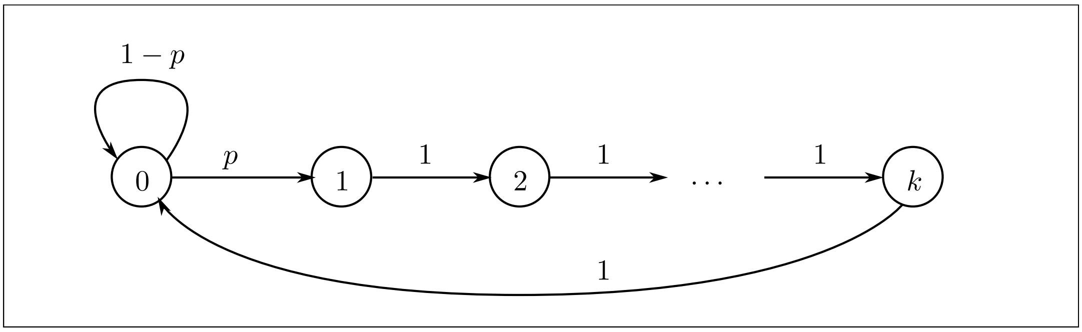
Problema 1.1. Un fabricante tiene una máquina complicada. Al comienzo de cada día que la máquina está operativa el riesgo de que la misma se desconponga es p. Cuando la máquina se descompone se llama inmediatamente a la agencia de mantenimiento para agendar una visita para el día siguiente. Desafortunadamente para el fabricante, la visita de la agencia dura k días y cuesta α dólares diarios. Cada visita sucede de la siguiente manera:

- Supongamos que la máquina empieza la mañana del día t operativa y que durante ese día la misma se descompone un par de horas antes del final de la jornada. El fabricante entonces llama a la agencia de mantenimiento para agendar una visita.
- La mañana del día $t+1$ llegan los técnicos de la agencia y empiezan a trabajar en la máquina. Trabajan todo el día.
- Los días $t+2$, $t+3$, $\ldots$, $t+k-1$, los técnicos de la agencia continúan su trabajo.
- La mañana del día $t+k$ los técnicos de la agencia continúan su trabajo y le entregan la máquina operativa al fabricante para el final de la jornada.
- La mañana del día $t+k+1$ la máquina está operativa nuevamente, aunque se puede descomponer como siempre.

Con esto en mente:

a) 2 Puntos: Modele la situación descrita como una Cadena de Markov. En particular, presente el grafo de la cadena en función de p y k.

Solución: Observe la siguiente figura.



b) 3 Puntos: Calcule:

- El porcentaje del tiempo que la máquina opera toda la jornada sin problemas.
- El porcentaje del tiempo que la máquina empieza el día operativa pero se descompone durante algún momento de la jornada.
- El porcentaje del tiempo que la máquina recibe mantenimiento.

Solución: Primero necesitamos calcular la distribución estacionaria de la cadena, para lo cual escribimos la ecuaciones de estado:

$$\begin{aligned}
\pi_0 &= (1-p)\,\pi_0 + \pi_k \\
\pi_1 &= p\,\pi_0 \\
\pi_2 &= \pi_1
\end{aligned}$$

$$\vdots$$

$$\pi_k \;=\; \pi_{k-1}$$

Reconociendo el patrón que emerge para los estados 1 al k tenemos:

$$\forall\, i \in \{1, \ldots, k\} \,:\, \pi_i \;=\; p\,\pi_0$$

Recordando que las probabilidades de toda distribución suman a uno tenemos:

$$\sum_{i=0}^{k} \pi_i \;=\; 1 \quad \Longrightarrow\; (1-p)\,\pi_0 + p\,\pi_0 + \sum_{i=1}^{k} p\,\pi_0 \;=\; 1$$

$$\Longrightarrow\; \pi_0\,(\,1 + k\,p\,) \;=\; 1 \quad \Longrightarrow\; \pi_0 \;=\; \frac{1}{1+k\,p}$$

Consecuentemente:

$$\forall\, i \in \{1, \ldots, k\} \,:\, \pi_i \;=\; \frac{p}{1+k\,p}$$

De esta manera:

- El porcentaje del tiempo que la máquina opera toda la jornada sin problemas es:

$$\pi_0\,(1-p) \;=\; \frac{1-p}{1+k\,p}$$

- El porcentaje del tiempo que la máquina empieza el día operativa pero se descompone durante algún momento de la jornada es:

$$\pi_0\,p \;=\; \frac{p}{1+k\,p}$$

- El porcentaje del tiempo que la máquina recibe mantenimiento es:

$$\sum_{i=1}^{k} \pi_i \;=\; \frac{k\,p}{1+k\,p}$$

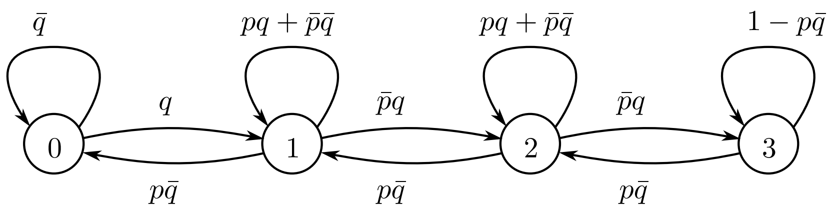
Problema 1.2. Un transmisor digital tiene un *buffer* con capacidad para tres paquetes. En cada ciclo que empieza con al menos un paquete en el buffer el transmisor intenta enviar un paquete. El paquete es enviado con éxito con probabilidad p, caso contrario será necesario re-intentar el envío en el siguiente período. Además, en cada ciclo que empieza con dos o menos paquetes el transmisor recibe un nuevo paquete con probabilidad q.

Clarificación: Suponga que en cada ciclo primero se intenta enviar un paquete, si hay al menos uno en el buffer, y luego se receptan nuevos paquetes si hay espacio en el buffer.

Con esto en mente:

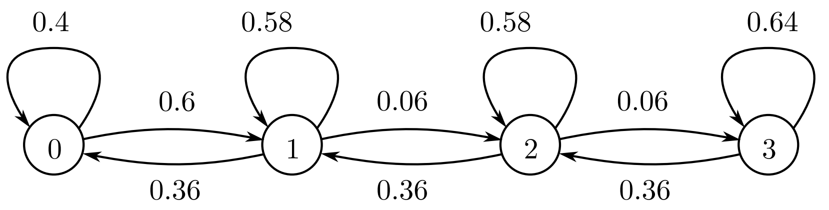
a) 4 Puntos: Represente este modelo como una Cadena de Markov con cuatro estados. En particular, provea el grafo de la cadena.

Solución: Observe la siguiente figura, donde $\bar{p} \triangleq 1-p$ y $\bar{q} \triangleq 1-q$.



b) 3 Puntos: Suponiendo que $p = 0.9$ y $q = 0.6$, encuentre el número de ciclos esperado hasta que el sistema está vacío (*i.e.,* tiene cero paquetes en el buffer) cuando empieza con el buffer lleno.

Solución: En la siguiente figura se muestra la cadena para los valores $p = 0.9$ y $q = 0.6$. En esta cadena nosotros buscamos encontrar el tiempo de la primera visita al estado cero. En particular, si para cada estado $i \in \{1, 2, 3\}$ denotamos a T_i como el tiempo esperado de primera visita al estado cero desde desde el estado i, tenemos:



$$
\begin{aligned}
T_1 &= 1 + 0.58\,T_1 + 0.06\,T_2 \\
T_2 &= 1 + 0.36\,T_1 + 0.58\,T_2 + 0.06\,T_3 \\
T_3 &= 1 + 0.36\,T_2 + 0.64\,T_3
\end{aligned}
$$

Resolviendo las ecuaciones simultáneamente obtenemos:

$$
\begin{aligned}
T_1 &= 3.32 \\
T_2 &= 6.56 \\
T_3 &= 9.34
\end{aligned}
$$

Consecuentemente, cuando el sistema empieza con el buffer lleno el tiempo esperado hasta la primera vez que el buffer este vacío es de 9.34 ciclos.

Problema 1.3. Considere el siguiente modelo de una acción de un proyecto inmobiliario:

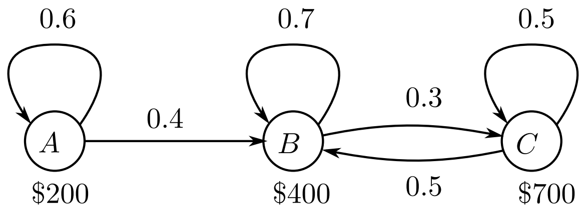
- El proyecto empieza en el estado A, en el cual genera utilidades de \$200 mensuales. El proyecto avanza al estado B con probabilidad del 40% y permanece en el mismo estado con probabilidad del 60%.
- Una vez que el proyecto alcanza el estado B genera \$400 mensuales. En este estado el proyecto avanza al estado C con probabilidad del 30% y permanece en el mismo estado con probabilidad del 70%.

- En el estado C el proyecto genera \$700 mensuales. El proyecto regresa al estado B con probabilidad del 50% y permanece en el mismo estado con probabilidad del 50%.

Con esto en mente:

a) 1.5 Puntos: Represente este modelo como una Cadena de Markov con tres estados. En particular, provea el grafo de la cadena.

Solución:



b) 3 Puntos: Suponiendo que la tasa de interés es del $r = 5\%$, escriba las ecuaciones de Valor Actual Neto Esperado (VAN-E).

Solución: Para esa tasa de interés el factor de descuento es:

$$\gamma \; = \; \frac{1}{1+r} \; = \; 0.9524$$

Ahora, si para cada estado i denotamos a v_i como el valor actual neto de empezar a recolectar recompensas desde ese estado, tenemos:

$$\begin{aligned} v_A &= 200 + 0.9524\,(\,0.6\,v_A + 0.4\,v_B\,) \\ v_B &= 400 + 0.9524\,(\,0.7\,v_B + 0.3\,v_C\,) \\ v_C &= 700 + 0.9524\,(\,0.5\,v_B + 0.5\,v_C\,) \end{aligned}$$

c) 1.5 Puntos: Resuelva las ecuaciones anteriores y reporte el Valor Actual Neto Esperado (VAN-E) de una acción de este proyecto.

Solución: Resolviendo las ecuaciones simultáneamente obtenemos:

$$\begin{aligned} v_A &= \$9914 \\ v_B &= \$10628 \\ v_C &= \$10998 \end{aligned}$$

Dado que el proyecto necesariamente empieza en el estado A, concluimos que el VAN-E de una acción del proyecto es de \$9914.