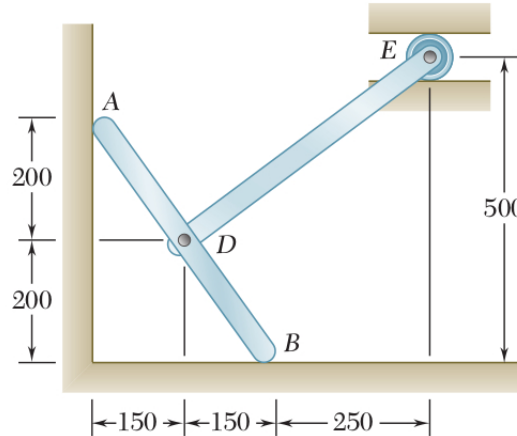

Mecánica Vectorial (MECG-1001): Lección 02

Semestre: 2017-2018 Término II

Instructor: Luis I. Reyes Castro

Paralelo: 09

Problema 2.1. Dos varillas de 500 mm están conectadas mediante un pasador en D como lo indica la figura de abajo, donde todas las dimensiones se muestran en milímetros. El punto B se mueve hacia la izquierda con una velocidad constante de 360 mm/s.



Complete las siguientes actividades:

a) **3 Puntos:** Encuentre la velocidad angular de la barra AB .

Solución: Primero tomamos datos:

$$\mathbf{v}_B = (-0.360, 0) \text{ m/s}$$

$$\mathbf{v}_A = (0, +v_A) \text{ m/s}$$

$$\mathbf{v}_E = (+v_E, 0) \text{ m/s}$$

$$\mathbf{r}_{BA} = (-0.300, +0.400) \text{ m}$$

$$\mathbf{r}_{BD} = (-0.150, +0.200) \text{ m}$$

$$\mathbf{r}_{DE} = (+0.400, +0.300) \text{ m}$$

Las velocidades en A y B están relacionadas con la velocidad angular de la barra AB de la siguiente manera:

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_B + \boldsymbol{\omega}_{AB} \times \mathbf{r}_{BA}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ +v_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.360 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0.400 \omega_{AB} \\ -0.300 \omega_{AB} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow 0 = -0.360 - 0.400 \omega_{AB}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{\omega}_{AB} = -0.9 \hat{k} \text{ rad/s}$$

b) **2 Puntos:** Encuentre la velocidad en D .

Solución: Las velocidades en B y D están relacionadas con la velocidad angular de la barra AB de la siguiente manera:

$$\mathbf{v}_D = \mathbf{v}_B + \boldsymbol{\omega}_{AB} \times \mathbf{r}_{BD}$$

$$= \begin{bmatrix} -0.360 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0.200(-0.9) \\ -0.150(-0.9) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -0.180 \\ +0.135 \end{bmatrix} \text{ m/s} \equiv 0.225 \text{ m/s} \angle 143.13^\circ$$

c) 3 Puntos: Encuentre la velocidad angular de la barra DE .

Solución: Las velocidades en D y E están relacionadas con la velocidad angular de la barra DE de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_E &= \mathbf{v}_D + \boldsymbol{\omega}_{DE} \times \mathbf{r}_{DE} \\ \Rightarrow \begin{bmatrix} +v_E \\ 0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -0.180 \\ +0.135 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0.300 \omega_{DE} \\ +0.400 \omega_{DE} \end{bmatrix} \\ \Rightarrow 0 &= +0.135 + 0.400 \omega_{DE} \\ \Rightarrow \boldsymbol{\omega}_{DE} &= -0.3375 \hat{\mathbf{k}} \text{ rad/s} \end{aligned}$$

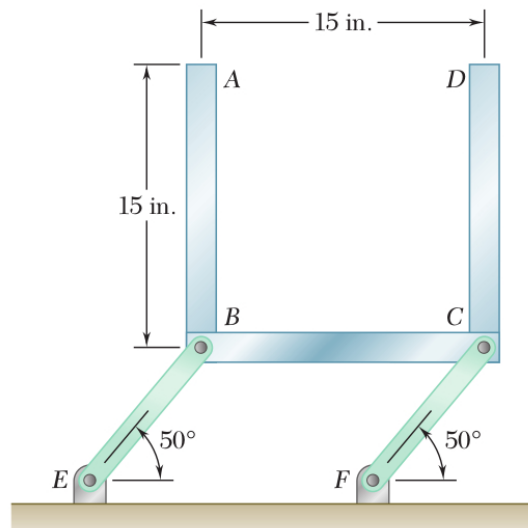
d) 2 Puntos: Encuentre la velocidad en E .

Solución: De la expresión anterior tenemos:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_E &= \begin{bmatrix} -0.180 \\ +0.135 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0.300(-0.3375) \\ +0.400(-0.3375) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -0.0788 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ m/s} \equiv 0.0788 \text{ m/s} \angle \pm 180^\circ \end{aligned}$$

■

Problema 2.2. Tres barras, cada una con un peso de 8 lb, están soldadas entre si y se encuentran conectadas mediante pasadores a los dos eslabones BE y CF , los cuales tienen peso despreciable y longitud de 10 in.



Complete las siguientes actividades:

a) 1 Punto: Encuentre la locación del centro de masa del ensamble $ABCD$.

Solución: Es evidente que como el ensamble es simétrico entonces la coordenada x de su centro de masa es igual a la coordenada x del punto medio de la barra BC . Para hallar

la coordenada y definimos a δ como la distancia desde el punto medio de la barra BC hasta el centro de masa del ensamble. Entonces tenemos:

$$\delta = \frac{(8)(0.0) + 2(8)(7.5)}{3(8)} = 5.0 \text{ in} = 0.4167 \text{ ft}$$

- b) **2 Puntos:** Encuentre la aceleración del centro de masa del ensamble $ABCD$ en función de la aceleración angular de la barra BE .

Solución: Primero tomamos algunos datos:

$$\hat{r}_{EB} = (+\cos(50^\circ), +\sin(50^\circ))$$

$$r_{EB} = 0.8333 \hat{r}_{EB} \text{ ft}$$

$$\omega_{BE} = 0 \text{ rad/s}$$

$$\alpha_{BE} = \alpha_{BE} \hat{k} \text{ rad/s}^2$$

Empezamos reconociendo que el ensamble $ABCD$ se encuentra en translación curvilínea, por lo que en todo momento tanto su velocidad angular como su aceleración angular son exactamente cero. Consecuentemente:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_G &= \mathbf{a}_B = \mathbf{a}_E + \alpha_{BE} \times \mathbf{r}_{EB} + \omega_{BE} \times (\omega_{BE} \times \mathbf{r}_{EB}) \\ &= \mathbf{0} + \alpha_{BE} \times \mathbf{r}_{EB} + \mathbf{0} \\ &= \begin{bmatrix} -0.8333 \sin(50^\circ) \alpha_{BE} \\ +0.8333 \cos(50^\circ) \alpha_{BE} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

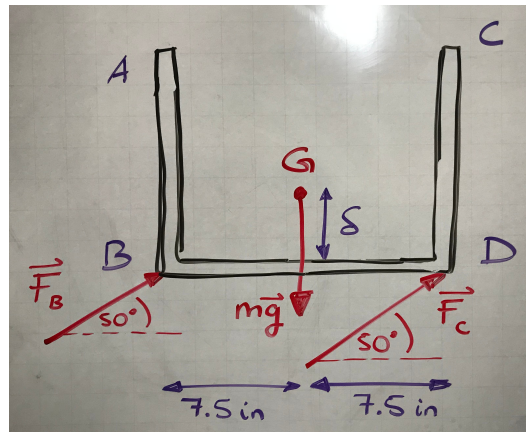
- c) **5 Puntos:** Determine la fuerza en cada eslabón inmediatamente después de que el sistema se suelta desde el reposo.

Solución: Primero tomamos algunos datos:

$$m = 0.7459 \text{ slug}$$

$$\ell/2 = 7.5/12 \text{ ft} = 0.625 \text{ ft}$$

El diagrama de cuerpo libre (DCL) se muestra en la siguiente fotografía.



Las sumatorias de fuerzas y torques externos resultan en:

$$m(\mathbf{a}_G)_x = +(F_B + F_C) \cos(50^\circ)$$

$$m(\mathbf{a}_G)_y = +(F_B + F_C) \sin(50^\circ) - mg$$

$$0 = +(\ell/2)(F_C - F_B) \sin(50^\circ) + \delta(F_B + F_C) \cos(50^\circ)$$

De esta manera arribamos al siguiente sistema de tres ecuaciones lineales donde las incógnitas son α_{BE} , F_B y F_C .

$$-0.6216 \sin(50^\circ) \alpha_{BE} = +(F_B + F_C) \cos(50^\circ)$$

$$+0.6216 \cos(50^\circ) \alpha_{BE} = +(F_B + F_C) \sin(50^\circ) - 24$$

$$0 = +0.625(F_C - F_B) \sin(50^\circ) + 0.4167(F_B + F_C) \cos(50^\circ)$$

Resolviendo el sistema, obtenemos:

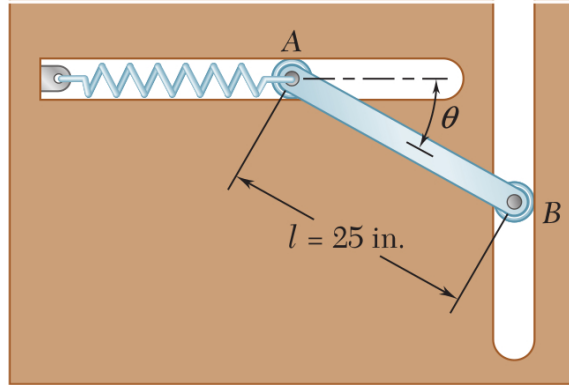
$$\alpha_{BE} = -24.82 \hat{\mathbf{k}} \text{ rad/s}^2$$

$$\mathbf{F}_B = +14.34 \hat{\mathbf{r}}_{EB} \text{ lb}$$

$$\mathbf{F}_C = +4.050 \hat{\mathbf{r}}_{EB} \text{ lb}$$

■

Problema 2.3. [6 Puntos] Los extremos de una barra AB de 9 lb están restringidos a moverse a lo largo de ranuras cortadas en una placa vertical en la forma que se indica. Un resorte de constante $k = 3 \text{ lb/in.}$ se fija al extremo A de manera tal que su tensión es cero cuando $\theta = 0^\circ$. La barra se suelta desde el reposo cuando $\theta = 50^\circ$, determine la velocidad angular de la barra y la velocidad del extremo B cuando $\theta = 0^\circ$.



Solución: Primero tomamos algunos datos:

$$m = 0.2797 \text{ slug}$$

$$I = 0.1012 \text{ slug-ft}^2$$

$$\ell = 2.0833 \text{ ft}$$

$$k = 36 \text{ lb/ft}$$

Consideraremos que el primer estado del sistema sucede cuando la barra está a $\theta = 50^\circ$ y que el segundo estado sucede cuando la barra regresa a $\theta = 0^\circ$. Entonces en el segundo estado, tenemos:

$$\hat{\mathbf{r}}_{AG} = (+1, 0)$$

$$\mathbf{r}_{AG} = (\ell/2) \hat{\mathbf{r}}_{AG} = 1.0417 \hat{\mathbf{r}}_{AG}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_{AB} &= \ell \hat{\mathbf{r}}_{AG} = 2.0833 \hat{\mathbf{r}}_{AG} \\ \mathbf{v}_A &= (-v_A, 0) \text{ ft/s} \\ \mathbf{v}_B &= (0, +v_B) \text{ ft/s}\end{aligned}$$

Ahora, la deflexión del resorte y el cambio de altura como función de θ puede ser calculados de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\Delta x(\theta) &= \ell - \ell \cos(\theta) = 2.0833 (1 - \cos(\theta)) \text{ ft} \\ \Delta h_G(\theta) &= (\ell/2) \sin(\theta) = 1.0417 \sin(\theta) \text{ ft}\end{aligned}$$

También podemos observar que las velocidades de A y B se relacionan por medio de la velocidad angular de la barra. Esto implica que:

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_B &= \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{AB} \\ \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ +v_B \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -v_A \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ +\ell \omega \end{bmatrix} \\ \Rightarrow \mathbf{v}_A &= \mathbf{0} \text{ ft/s}\end{aligned}$$

Consecuentemente:

$$\mathbf{v}_G = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{AG} = \mathbf{0} + \begin{bmatrix} 0 \\ +(\ell/2)\omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ +1.0417\omega \end{bmatrix} \text{ ft/s}$$

Es así que la energía cinética del cuerpo en el segundo estado es:

$$\begin{aligned}K_2 &= (1/2) m v_G^2 + (1/2) I \omega^2 \\ &= (1/2) [(0.2797)(1.0417^2) + 0.1012] \omega^2 = 0.2023 \omega^2\end{aligned}$$

Con todo esto en mente podemos finalmente aplicar el Principio de Trabajo-Energía. Puesto que ninguna fuerza externa no-conservativa actúa sobre el sistema, la energía del sistema no puede cambiar entre estados. En el primer estado la energía total está concentrada en la deflexión del resorte:

$$E_1 = (1/2) k \Delta x(\theta = 50^\circ)^2 = 13.40 \text{ lb-ft}$$

En el segundo estado no hay energía del resorte, sino solamente energía potencial gravitacional y energía cinética:

$$E_2 = mg \Delta h_G(\theta = 50^\circ) + K_2 = 7.182 + 0.2023 \omega^2$$

Igualando las energías en los dos estados, y fijándonos que en el segundo estado la velocidad angular de la barra es contraria al sentido de las manecillas del reloj, tenemos:

$$\boldsymbol{\omega} = +5.544 \hat{\mathbf{k}} \text{ rad/s} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v}_B = +11.55 \hat{\mathbf{j}} \text{ ft/s}$$

■