Control Automático: Lección 05

Año: 2016-2017 **Término:** II **Instructor:** Luis I. Reyes Castro **Paralelo:** 02

COMPROMISO DE HONOR

Yo, ______________________________ al firmar este compromiso, reconozco que la presente lección está diseñada para ser resuelta de manera individual, que puedo usar un lápiz o pluma y una calculadora científica, que solo puedo comunicarme con la persona responsable de la recepción de la lección, y que cualquier instrumento de comunicación que hubiere traído debo apagarlo. También estoy conciente que no debo consultar libros, notas, ni materiales didácticos adicionales a los que el instructor entregue durante la lección o autorice a utilizar. Finalmente, me comprometo a desarrollar y presentar mis respuestas de manera clara y ordenada.

Firmo al pie del presente compromiso como constancia de haberlo leído y aceptado.

Firma: ______________________________ Número de matrícula: ____________________

Problema 5.1. [6 Puntos] Para cada uno de los siguientes sistemas:

- Si el sistema es de primer orden, indíquelo y calcule su constante de tiempo y su tiempo de asentamiento. Además, escriba la forma general de la respuesta del sistema a una entrada escalón.
- Si el sistema es de segundo orden, indíquelo y determine el tipo de amortiguamiento del sistema. Además, compute su porcentaje de sobrepaso, su tiempo pico, y su tiempo de asentamiento, junto con la forma general de la respuesta a una entrada escalón.
- Si el sistema es de orden superior, indíquelo y determine si puede ser aproximado como un sistema de segundo orden. Si la respuesta es en el afirmativo, proceda como si el sistema fuere de segundo orden; caso contrario, indique que la aproximación no es válida y escriba la forma general de la respuesta a una entrada escalón.

Sistemas:

$$
\begin{aligned}
G_1(s) &= \frac{3}{s+2} \\
G_2(s) &= \frac{20}{s^2+6s+144} \\
G_3(s) &= \frac{5}{(s+3)(s+6)} \\
G_4(s) &= \frac{10}{(s+10)^2} \\
G_5(s) &= \frac{81}{(s+5)(s^2+4s+49)} \\
G_6(s) &= \frac{625}{(s^2+3s+10)(s^2+21s+121)}
\end{aligned}
$$

Solución:

- Sistema de Primer Orden G_1 :
  - Su frecuencia natural es $a = 2$.
  - Sus métricas de respuesta en el tiempo son:

$$\tau = \frac{1}{a} = 0.5\, s$$

$$T_s \,=\, \frac{4}{a} \,=\, 4\tau \,=\, 2.0\,s$$

- La forma general de la respuesta del sistema a una entrada escalón es:

$$c(t) \,=\, 1 - K\,e^{-at} \,=\, 1 - K\,e^{-2t}$$

- Sistema de Segundo Orden G_2 :
  - Su frecuencia natural y tasa de amortiguamiento son:

$$\begin{aligned} \omega_n \,&=\, \sqrt{b} \,=\, \sqrt{144} \,=\, 12\ \mathrm{rad}/s \\ \zeta \,&=\, \frac{a}{2\,\omega_n} \,=\, \frac{6}{(2)(12)} \,=\, 0.25 \end{aligned}$$

  - Dado que $0 < \zeta < 1$, el sistema es subamortiguado.
  - Sus métricas de respuesta en el tiempo son:

$$\begin{aligned} \%OS \,&=\, 100\,\exp\left(-\frac{\zeta\,\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right) \,=\, 44.43\% \\ T_p \,&=\, \frac{\pi}{\omega_n\,\sqrt{1-\zeta^2}} \,=\, 0.27\,s \\ T_s \,&=\, \frac{4}{\zeta\,\omega_n} \,=\, 1.33\,s \end{aligned}$$

  - La forma general de la respuesta del sistema a una entrada escalón es:

$$\begin{aligned} c(t) \,&=\, 1 - K_1\,e^{-\zeta\,\omega_n\,t}\cos(\,\omega_n\,t) - K_2\,e^{-\zeta\,\omega_n\,t}\sin(\,\omega_n\,t\,) \\ &=\, 1 - K_1\,e^{-3t}\cos(\,12\,t\,) - K_2\,e^{-3t}\sin(\,12\,t\,) \end{aligned}$$

- Sistema de Segundo Orden G_3 :
  - Claramente sus polos son reales y yacen en $\sigma_1 = -3$ y $\sigma_2 = -6$.
  - Dado que los polos son reales y distintos, el sistema es sobreamortiguado.
  - La forma general de la respuesta del sistema a una entrada escalón es:

$$c(t) \,=\, 1 - K_1\,e^{-\sigma_1\,t} - K_2\,e^{-\sigma_2\,t} \,=\, 1 - K_1\,e^{-3t} - K_2\,e^{-6t}$$

- Sistema de Segundo Orden G_4 :
  - Claramente sus polos son reales y yacen en $\sigma_{1,2} = -10$.
  - Dado que los polos son reales y repetidos, el sistema es criticamente amortiguado.
  - La forma general de la respuesta del sistema a una entrada escalón es:

$$c(t) \,=\, 1 - K_1\,e^{-\sigma\,t} - K_2\,t\,e^{-\sigma\,t} \,=\, 1 - K_1\,e^{-10t} - K_2\,t\,e^{-10t}$$

- Sistema de Orden Superior G_5 :
  - Claramente uno de sus polos es real y yace en $s = -5$.
  - Los otros dos polos son las raíces del polinomio $p(s) = s^2 + 4s + 49$, las cuales yacen en $s = -2 \pm 6.7j$.
  - No es válido aproximar este sistema como uno de segundo orden, puesto que los polos dominantes son $s = -2 \pm 6.7j$ pero el otro polo yace en $s = -5$.
  - La forma general de la respuesta del sistema a una entrada escalón es:

$$c(t) \,=\, 1 - K_1\, e^{-5t} - K_2\, e^{-2t} \cos(\,7\,t\,) - K_3\, e^{-2t} \sin(\,7\,t\,)$$

- Sistema de Orden Superior G_6 :
  - Un par de polos son las raíces del polinomio $p(s) = s^2 + 3s + 10$, las cuales yacen en $s = -1.5 \pm 2.78j$.
  - Otro par de polos son las raíces del polinomio $p(s) = s^2 + 21s + 121$, las cuales yacen en $s = -10.5 \pm 3.28j$.
  - Si es válido aproximar este sistema como uno de segundo orden, puesto que los polos dominantes yacen en $s = -1.5 \pm 2.78j$ mientras que los otros dos polos yacen en $s = -10.5 \pm 3.28j$.
  - Para la aproximar el sistema reconocemos que:

$$G(s) \,=\, 0.5165\, \underbrace{\left(\frac{10}{s^2 + 3s + 10}\right)}_{G_A(s)} \underbrace{\left(\frac{121}{s^2 + 21s + 121}\right)}_{G_B(s)}$$

Por lo tanto, si suponemos que $G_B(s) \approx 1$ vemos que la frecuencia natural y tasa de amortiguamiento del sistema aproximado son:

$$\omega_n \,=\, \sqrt{b} \,=\, \sqrt{10} \,=\, 3.16 \text{ rad}/s$$
$$\zeta \,=\, \frac{a}{2\,\omega_n} \,=\, \frac{3}{(2)(3.16)} \,=\, 0.474$$

  - Dado que $0 < \zeta < 1$, el sistema aproximado es subamortiguado.
  - Las métricas de respuesta en el tiempo del sistema aproximado son:

$$\%OS \,=\, 100 \exp\left(-\frac{\zeta\,\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right) \,=\, 18.43\%$$
$$T_p \,=\, \frac{\pi}{\omega_n\,\sqrt{1-\zeta^2}} \,=\, 1.128\; s$$
$$T_s \,=\, \frac{4}{\zeta\,\omega_n} \,=\, 2.669\; s$$

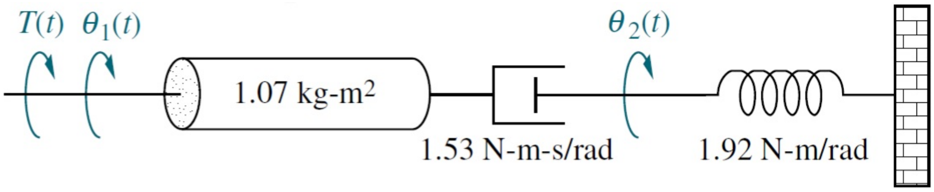
  - La forma general de la respuesta del sistema aproximado a un escalón es:

$$c(t) \,=\, 1 - K_1\, e^{-1.5t} \cos(\,3.16\,t\,) - K_3\, e^{-1.5t} \sin(\,3.16\,t\,)$$

Problema 5.2. [**4 Puntos**] Para el siguiente sistema mecánico rotacional:

- Encuentre la función de transferencia $G(s) \triangleq \Theta_2(s) \,/\, T(s)$.
- Compute el porcentaje de sobrepaso, el tiempo pico y el tiempo de asentamiento para el caso cuando la entrada es un escalón.

Sugerencia: Para escribir las ecuaciones diferenciales, imagine que en el eje donde se mide $\theta_2(t)$ existe una cuerpo con cero inercia.



Solución: Tal como se indica en la sugerencia, si colocamos un cuerpo con inercia I_ε en el eje donde se mide $\theta_2(t)$ entonces las ecuaciones diferenciales son:

$$
\begin{aligned}
1.07\,\ddot{\theta}_1(t) &= T(t) + 1.53\,(\,\dot{\theta}_2(t) - \dot{\theta}_1(t)\,) \\
I_\varepsilon\,\ddot{\theta}_2(t) &= -1.53\,(\,\dot{\theta}_2(t) - \dot{\theta}_1(t)\,) - 1.92\,\theta_2(t)
\end{aligned}
$$

Ahora, tomando $I_\varepsilon \approx 0$ y aplicando la transformación de Laplace de ambos lados de ambas equaciones tenemos:

$$
\begin{aligned}
(\,1.07\,s^2 + 1.53\,s\,)\,\Theta_1(s) - 1.53\,s\,\Theta_2(s) &= T(s) \\
1.53\,s\,\Theta_1(s) - (\,1.53\,s + 1.92\,)\,\Theta_2(s) &= 0
\end{aligned}
$$

Luego, de la segunda ecuación vemos que:

$$
\Theta_1(s) = \left(\frac{1.53\,s + 1.92}{1.53\,s}\right)\Theta_2(s)
$$

Consecuentemente, reemplazando la expresión de arriba en la primera ecuación diferencial transformada, observamos que:

$$
\begin{aligned}
&\left[(\,1.07\,s^2 + 1.53\,s\,)\left(\frac{1.53\,s + 1.92}{1.53\,s}\right) - 1.53\,s\right]\Theta_2(s) = T(s) \\
\implies\ &(\,1.07\,s^2 + 1.34275\,s + 1.92\,)\,\Theta_2(s) = T(s) \\
\implies\ &G(s) = \frac{1}{1.07\,s^2 + 1.34275\,s + 1.92} \equiv \frac{0.9346}{s^2 + 1.25491\,s + 1.7944}
\end{aligned}
$$

Finalmente, reconociendo que $\omega_n = 1.34$ rad/s y $\zeta = 0.4684$, concluimos que las métricas de respuesta en el tiempo de este sistema son:

$$
\begin{aligned}
\%OS &= 100\,\exp\left(-\frac{\zeta\,\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right) = 18.9\% \\
T_p &= \frac{\pi}{\omega_n\,\sqrt{1-\zeta^2}} = 2.654\,s \\
T_s &= \frac{4}{\zeta\,\omega_n} = 6.373\,s
\end{aligned}
$$