Modelos Estocásticos (INDG-1008): Lección 01

Semestre: 2017-2018 Término I **Instructor:** Luis I. Reyes Castro

COMPROMISO DE HONOR

Yo, ________________________________ al firmar este compromiso, reconozco que la presente lección está diseñada para ser resuelta de manera individual, que puedo usar un lápiz o pluma y una calculadora científica, que solo puedo comunicarme con la persona responsable de la recepción de la lección, y que cualquier instrumento de comunicación que hubiere traído debo apagarlo. También estoy conciente que no debo consultar libros, notas, ni materiales didácticos adicionales a los que el instructor entregue durante la lección o autorice a utilizar. Finalmente, me comprometo a desarrollar y presentar mis respuestas de manera clara y ordenada.

Firmo al pie del presente compromiso como constancia de haberlo leído y aceptado.

Firma: ________________________________ Número de matrícula: ____________________

Problema 1.1. [5 Puntos] Los sistemas de telecomunicaciones digitales siempre involucran aleatoriedad, puesto que las transmisiones inalámbricas son altamente ruidosas, especialmente sobre largas distancias. Considere un transmisor sobre un canal ruidoso donde, en cada ciclo, si hay al menos un paquete de datos en cola entonces el paquete es transmitido exitosamente con probabilidad p; caso contrario, el transmisor intentará reenviar el paquete en el siguiente ciclo. Suponga además que la cola del transmisor tiene tamaño B, lo que significa que si durante un ciclo hay B paquetes en cola entonces cualquier otro paquete que llegue a la cola durante ese ciclo será rechazado, y por ende perdido para siempre. Finalmente, suponga que los números de paquetes que arriban a la cola del transmisor en cada ciclo son variables aleatoria i.i.d. con distribución Poisson con parámetro λ.

Con esto en mente, modele la situación antes mencionada como una Cadena de Markov para el caso cuando $B = 4$. En particular, provea el grafo de la cadena y la matriz de transición.

Solución: Consideramos cada posible estado:

- Si $X_t = 0$ entonces:
  - Si $X_{t+1} = k$ para cualquier $k \in \{0, 1, 2, 3\}$ es porque hubieron k arribos, *i.e.:*

$$\forall k \in \{0,1,2,3\} : \; \boldsymbol{P}_{0k} \; = \; \mathbb{P}\,(\,\text{Poisson}(\lambda) = k\,) \; = \; \frac{\lambda^k \, e^{-\lambda}}{k!}$$

  - Si $X_{t+1} = 4$ es porque hubieron cuatro o más arribos, *i.e.:*

$$\boldsymbol{P}_{04} \; = \; \mathbb{P}\,(\,\text{Poisson}(\lambda) \geq 4\,) \; = \; \sum_{k=4}^{\infty} \frac{\lambda^k \, e^{-\lambda}}{k!}$$

- Si $X_t = 1$ entonces:
  - Si $X_{t+1} = 0$ es porque hubo un envío exitoso y ningun arribo, *i.e.:*

$$\boldsymbol{P}_{10} \; = \; p \cdot \mathbb{P}\,(\,\text{Poisson}(\lambda) = 0\,) \; = \; p\,e^{-\lambda}$$

  - Si $X_{t+1} = 1$ es porque hubo un envío exitoso y un arribo, o porque el envío fracasó y no hubo un arribo, *i.e.:*

$$\begin{aligned} \boldsymbol{P}_{11} \; &= \; p \cdot \mathbb{P}\,(\,\text{Poisson}(\lambda) = 1\,) + (1-p) \cdot \mathbb{P}\,(\,\text{Poisson}(\lambda) = 0\,) \\ &= \; p\,\lambda\,e^{-\lambda} + (1-p)\,e^{-\lambda} \end{aligned}$$

- Si $X_{t+1} = 2$ es porque hubo un envío exitoso y dos arribos, o porque el envío fracasó y hubo un arribo, *i.e.:*

$$\begin{aligned} \boldsymbol{P}_{12} &= p \cdot \mathbb{P}\,(\,\text{Poisson}(\lambda) = 2\,) + (1-p) \cdot \mathbb{P}\,(\,\text{Poisson}(\lambda) = 1\,) \\ &= p\,\frac{\lambda^2\,e^{-\lambda}}{2!} + (1-p)\,\lambda\,e^{-\lambda} \end{aligned}$$

- Si $X_{t+1} = 3$ es porque hubo un envío exitoso y tres arribos, o porque el envío fracasó y hubo dos arribos, *i.e.:*

$$\begin{aligned} \boldsymbol{P}_{13} &= p \cdot \mathbb{P}\,(\,\text{Poisson}(\lambda) = 3\,) + (1-p) \cdot \mathbb{P}\,(\,\text{Poisson}(\lambda) = 2\,) \\ &= p\,\frac{\lambda^3\,e^{-\lambda}}{3!} + (1-p)\,\frac{\lambda^2\,e^{-\lambda}}{2!} \end{aligned}$$

- Si $X_{t+1} = 4$ es porque hubo un envío exitoso y cuatro o más arribos, o porque el envío fracasó y hubo tres o más arribos, *i.e.:*

$$\begin{aligned} \boldsymbol{P}_{14} &= p \cdot \mathbb{P}\,(\,\text{Poisson}(\lambda) \geq 4\,) + (1-p) \cdot \mathbb{P}\,(\,\text{Poisson}(\lambda) \geq 3\,) \\ &= p \sum_{k=4}^{\infty} \frac{\lambda^k\,e^{-\lambda}}{k!} + (1-p) \sum_{k=3}^{\infty} \frac{\lambda^k\,e^{-\lambda}}{k!} \end{aligned}$$

- Si $X_t = 2$ entonces:
  - Si $X_{t+1} = 1$ es porque hubo un envío exitoso y ningun arribo, *i.e.:*

$$\boldsymbol{P}_{21} \;=\; p \cdot \mathbb{P}\,(\,\text{Poisson}(\lambda) = 0\,) \;=\; p\,e^{-\lambda}$$

  - Si $X_{t+1} = 2$ es porque hubo un envío exitoso y un arribo, o porque el envío fracasó y no hubo un arribo, *i.e.:*

$$\begin{aligned} \boldsymbol{P}_{22} &= p \cdot \mathbb{P}\,(\,\text{Poisson}(\lambda) = 1\,) + (1-p) \cdot \mathbb{P}\,(\,\text{Poisson}(\lambda) = 0\,) \\ &= p\,\lambda\,e^{-\lambda} + (1-p)\,e^{-\lambda} \end{aligned}$$

  - Si $X_{t+1} = 3$ es porque hubo un envío exitoso y dos arribos, o porque el envío fracasó y hubo un arribo, *i.e.:*

$$\begin{aligned} \boldsymbol{P}_{23} &= p \cdot \mathbb{P}\,(\,\text{Poisson}(\lambda) = 2\,) + (1-p) \cdot \mathbb{P}\,(\,\text{Poisson}(\lambda) = 1\,) \\ &= p\,\frac{\lambda^2\,e^{-\lambda}}{2!} + (1-p)\,\lambda\,e^{-\lambda} \end{aligned}$$

  - Si $X_{t+1} = 4$ es porque hubo un envío exitoso y tres o más arribos, o porque el envío fracasó y hubo dos o más arribos, *i.e.:*

$$\begin{aligned} \boldsymbol{P}_{24} &= p \cdot \mathbb{P}\,(\,\text{Poisson}(\lambda) \geq 3\,) + (1-p) \cdot \mathbb{P}\,(\,\text{Poisson}(\lambda) \geq 2\,) \\ &= p \sum_{k=3}^{\infty} \frac{\lambda^k\,e^{-\lambda}}{k!} + (1-p) \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda^k\,e^{-\lambda}}{k!} \end{aligned}$$

- Si $X_t = 3$ entonces:

- Si $X_{t+1} = 2$ es porque hubo un envío exitoso y ningun arribo, *i.e.:*

$$\boldsymbol{P}_{32} \;=\; p \cdot \mathbb{P}\,(\,\text{Poisson}(\lambda) = 0\,) \;=\; p\,e^{-\lambda}$$

- Si $X_{t+1} = 3$ es porque hubo un envío exitoso y un arribo, o porque el envío fracasó y no hubo un arribo, *i.e.:*

$$\begin{aligned} \boldsymbol{P}_{33} \;&=\; p \cdot \mathbb{P}\,(\,\text{Poisson}(\lambda) = 1\,) + (1-p) \cdot \mathbb{P}\,(\,\text{Poisson}(\lambda) = 0\,) \\ &=\; p\,\lambda\,e^{-\lambda} + (1-p)\,e^{-\lambda} \end{aligned}$$

- Si $X_{t+1} = 4$ es porque hubo un envío exitoso y dos o más arribos, o porque el envío fracasó y hubo uno o más arribos, *i.e.:*

$$\begin{aligned} \boldsymbol{P}_{34} \;&=\; p \cdot \mathbb{P}\,(\,\text{Poisson}(\lambda) \geq 2\,) + (1-p) \cdot \mathbb{P}\,(\,\text{Poisson}(\lambda) \geq 1\,) \\ &=\; p \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda^k\,e^{-\lambda}}{k!} + (1-p)\,(\,1 - e^{-\lambda}\,) \end{aligned}$$

- Si $X_t = 4$ entonces:
  - Si $X_{t+1} = 3$ es porque hubo un envío exitoso y ningun arribo, *i.e.:*

$$\boldsymbol{P}_{43} \;=\; p \cdot \mathbb{P}\,(\,\text{Poisson}(\lambda) = 0\,) \;=\; p\,e^{-\lambda}$$

  - Caso contrario $X_{t+1} = 4$, *i.e.:*

$$\boldsymbol{P}_{44} \;=\; 1 - p\,e^{-\lambda}$$

Problema 1.2. Usualmente las Cadenas de Markov no son modelos suficientemente complejos como para representar el comportamiento humano, puesto que nuestros cerebros no tienen la Propiedad Markoviana, *i.e.,* tenemos memoria. Aún asi, podemos usar cadenas de Markov para modelar a personas erráticas, impredecibles y posiblemente irracionales. Por ejemplo, considere el siguiente modelo de la presidencia de Donald Trump, donde los estados son:

1. Hablar de como ganó las elecciones obteniendo la mayoría de los colegios electorales, a pesar de haber perdido el voto popular por más de dos millones de votos.
2. Defenderse del escándalo de Russia.
3. Insistir en construir una pared en la frontera sur con México.
4. Hablar de los acuerdos de comerciales que dice que renegociará (*e.g.,* NAFTA) y que dice que serán ventajosos para su país.
5. Pelearse con celebridades en Twitter.

La matriz de transición para este modelo es:

$$\boldsymbol{P} \;=\; \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0.25 & 0.25 & 0 \\ 0 & 0.6 & 0 & 0 & 0.4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.9 & 0.1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.3 & 0.3 & 0 & 0.4 \end{bmatrix}$$

Con esto en mente:

- **[1 Punto]** Provea un análisis de estados. En particular, indique:
  - Los estados transitorios
  - Los estados recurrentes
  - El numero de clases recurrentes
  - La periodicidad de la cadena
  - Si es o no es una cadena irreducible (*i.e.,* una uni-cadena)
- **[2 Puntos]** Escriba un conjunto de ecuaciones lineales linealmente independientes de cuya solución se pueda obtener la distribución en estado estable de la cadena.
- **[2 Puntos]** Calcule el porcentaje del tiempo que Donald Trump insistirá en construir la pared con México.

Solución:

- El análisis de estados es como sigue:
  - Los estados transitorios son el 1 (Elecciones) y el 4 (NAFTA).
  - Los estados recurrentes son el 2 (Rusia), el 3 (Pared) y el 5 (Twitter).
  - Existe una única clase recurrente compuesta por tres estados recurrentes.
  - La cadena es aperiódica.
  - La cadena no es irreducible puesto que tiene estados transitorios.
- Las ecuaciones de estado estacionario son:

$$
\begin{aligned}
\pi_1 &= 0.5\,\pi_1 + 0.9\,\pi_4 \\
\pi_2 &= 0.6\,\pi_2 + \pi_3 + 0.1\,\pi_4 + 0.3\,\pi_5 \\
\pi_3 &= 0.25\,\pi_1 + 0.3\,\pi_5 \\
\pi_4 &= 0.25\,\pi_1 \\
\pi_5 &= 0.4\,\pi_2 + 0.4\,\pi_5
\end{aligned}
$$

  Recordando que los estados 1 y 4 son transitorios, tenemos $\pi_1 = \pi_4 = 0$. A su vez esto implica que las ecuaciones asociadas con esos estados son triviales, por lo que nuestro sistema de ecuaciones se reduce a:

$$
\begin{aligned}
\pi_2 &= 0.6\,\pi_2 + \pi_3 + 0.3\,\pi_5 \\
\pi_3 &= 0.3\,\pi_5 \\
\pi_5 &= 0.4\,\pi_2 + 0.4\,\pi_5
\end{aligned}
$$

  Finalmente, reemplazando cualquiera de las tres ecuaciones anteriores, *e.g.,* digamos que la última, por la condición de que la suma de las probabilidades debe ser uno, llegamos al siguiente sistema:

$$
\begin{aligned}
\pi_2 &= 0.6\,\pi_2 + \pi_3 + 0.3\,\pi_5 \\
\pi_3 &= 0.3\,\pi_5 \\
\pi_2 + \pi_3 + \pi_5 &= 1
\end{aligned}
$$

- Las probabilidades en estado estable son:

$$\pi_2 \simeq 0.536 \qquad \pi_3 \simeq 0.107 \qquad \pi_5 \simeq 0.537$$

  Consecuentemente, de acuerdo a este modelo el porcentaje del tiempo que Donald Trump insistirá en construir la pared es del 10.7%.