

Modelos Estocásticos para Manufactura y Servicios (INDG-1008): **Unidad 01**

Luis I. Reyes Castro

Escuela Superior Politécnica del Litoral (ESPOL)
Guayaquil - Ecuador

2017 - Primer Término

Contenido del Tema

- 1 Repaso de Variables Aleatorias
- 2 Proceso Bernoulli
- 3 Proceso Poisson

Contenido del Tema

1 Repaso de Variables Aleatorias

2 Proceso Bernoulli

3 Proceso Poisson

Repaso de Variables Aleatorias

Valor Esperado:

Si X es una variable aleatoria discreta entonces

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{x \in \text{soporte}(X)} x \mathbb{P}(x)$$

donde la sumatoria es sobre todos los valores que puede tomar X .

Si X es una variable aleatoria continua entonces

$$\mathbb{E}[X] = \int_{x \in \text{soporte}(X)} x f(x) dx$$

donde la integración es sobre todos los valores que puede tomar X .

Si X, Y son variables aleatorias y a, b son constantes entonces:

$$\mathbb{E}[aX + bY] = a \mathbb{E}[X] + b \mathbb{E}[Y]$$

Independencia de Variables Aleatorias:

Decimos que las variables aleatorias discretas X, Y son independientes si para todo posible par de valores (x, y) que las variables aleatorias pueden tomar es el caso que:

$$\mathbb{P}(X = x, Y = y) = \mathbb{P}(X = x) \mathbb{P}(Y = y)$$

Si X, Y son variables aleatorias independientes entonces:

$$\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X] \mathbb{E}[Y]$$

Nótese que esta relación en general no es válida para variables aleatorias dependientes.

Condicionalmientto:

Si X, Y son dos variables aleatorias entonces la probabilidad del valor x de la primera variable condicional en el valor y de la segunda esta dado por:

$$\mathbb{P}(x | y) = \frac{\mathbb{P}(X = x, Y = y)}{\mathbb{P}(Y = y)}$$

Claramente, si X, Y son variables aleatorias independientes entonces para todo valor x de la primera variable y todo valor y de la segunda:

$$\mathbb{P}(x | y) = \mathbb{P}(x)$$

Repaso de Variables Aleatorias

Si X, Y son dos variables aleatorias entonces para todo valor y de la segunda variable aleatoria:

$$\mathbb{E}[X | y] = \sum_{x \in \text{soporte}(X)} x \mathbb{P}(x | y)$$

Si X, Y son dos variables aleatorias entonces:

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X | Y]] = \sum_{y \in \text{soporte}(Y)} \mathbb{E}[X | y] \mathbb{P}(y)$$

Repaso de Variables Aleatorias

Variable Aleatoria Geométrica:

Tenemos dos tipos, denotadas $\text{Geo}(p; \mathbb{Z}_{\geq 0})$ y $\text{Geo}(p; \mathbb{N})$.

$\text{Geo}(p; \mathbb{Z}_{\geq 0})$ representa el número de ensayos que tenemos que realizar hasta obtener el primer experimento exitoso, por lo que toma valores en los enteros no-negativos. Si $X \sim \text{Geo}(p; \mathbb{Z}_{\geq 0})$ entonces:

$$\mathbb{E}[X] = \frac{1-p}{p} \qquad \text{var}(X) = \frac{1-p}{p^2}$$

$\text{Geo}(p; \mathbb{N})$ representa el índice del ensayo que resultó en el primer experimento exitoso, por lo que toma valores en los números naturales. Si $X \sim \text{Geo}(p; \mathbb{N})$ entonces:

$$\mathbb{E}[X] = \frac{1}{p} \qquad \text{var}(X) = \frac{1-p}{p^2}$$

Contenido del Tema

1 Repaso de Variables Aleatorias

2 Proceso Bernoulli

3 Proceso Poisson

Ejemplo:

En una fábrica una máquina tiene un componente que usualmente debe ser reemplazado. A pesar de que reemplazar el componente toma unos pocos minutos al final de la jornada de trabajo, cada día de operación de la máquina el componente se puede dañar con probabilidad p , independientemente de lo que haya pasado antes. Con esto en mente:

Cuántas veces a la semana, en promedio, tendrán que reemplazar el componente?

Si han pasado cuatro días desde la última vez que se cambió en componente, cuál es la probabilidad de que se dañe mañana?

Proceso Bernoulli

Proceso Bernoulli con parámetro p :

Es una secuencia de variables aleatorias Bernoulli con parámetro p independientes e idénticamente distribuidas que representan la presencia o ausencia de arribos.

Formalmente es una secuencia de variables aleatorias $X_1, X_2, X_3, X_4, \dots$ donde:

Para todo índice i tenemos que $X_i \sim \text{Bernoulli}(p)$.

Para todo par de índices i, j es el caso que X_i es independiente de X_j .

Ocorre un arribo en el período t si $X_t = 1$; caso contrario no ocurrió un arribo en ese período.

Claramente, el número esperado de arribos a lo largo de n períodos es:

$$\mathbb{E} \left[\sum_{t=1}^n X_t \right] = \sum_{t=1}^n \mathbb{E}[X_t] = np$$

Tiempo entre arribos:

Para todo índice i la variable aleatoria T_i representa el número de períodos que transcurrieron desde el i^{avo} arribo hasta el $(i + 1)^{\text{avo}}$ arribo.

Nótese que soporte(T_i) = $\mathbb{Z}_{\geq 0}$.

Cuál es la distribución de T_1 ? I.e., para cada valor $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, cuál es la probabilidad de que $T_1 = k$?

Claramente $k = 0$ con probabilidad p .

Si $k = 1$ entonces $X_1 = 0$ y $X_2 = 1$, i.e., en el primer período no hubo un arribo y en el segundo período hubo un arribo, lo cual sucede con probabilidad $(1 - p)p$.

Si $k = 2$ entonces $X_1 = 0$, $X_2 = 0$ y $X_3 = 1$, lo cual sucede con probabilidad $(1 - p)^2 p$.

Continuando por inducción matemática, vemos que:

$$\forall k \in \mathbb{Z}_{\geq 0} : \mathbb{P}(T_1 = k) = (1 - p)^k p \iff T_1 \sim \text{Geo}(p; \mathbb{Z}_{\geq 0})$$

Teorema: Para cada índice i es el caso que $T_i \sim \text{Geo}(p; \mathbb{Z}_{\geq 0})$.

Corolario: En un proceso Bernoulli con parámetro p los tiempos entre arribos constituyen una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas; en particular, con distribución geométrica con parámetro p soportada en $\mathbb{Z}_{\geq 0}$.

Número de arribos en un intervalo:

Si para todo índice i denotamos a la variable aleatoria N_i como el número de arribos desde el comienzo del proceso hasta el i^{avo} periodo, entonces:

$$N_i = \sum_{k=1}^i X_k$$

I.e., la variable aleatoria N_i es la suma de i variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas (IID).

Teorema: Para cada índice i es el caso que $N_i \sim \text{Binomial}(i, p)$.

Corolario: En un proceso Bernoulli con parámetro p el número de arribos a lo largo de un intervalo de n períodos es una variable aleatoria con distribución binomial con parámetros n y p .

Proceso Bernoulli

Combinación de Procesos Bernoulli:

Supongamos que tenemos dos procesos Bernoulli independientes.

El primero tiene parámetro p .

El segundo tiene parámetro q .

Consideremos un nuevo proceso donde se produce un arribo si y solo si ocurre un arribo en ambos procesos.

Los arribos en el nuevo proceso son independientes entre si, pues en cada período solo dependen en los arribos de los procesos generadores, los cuales no dependen de arribos en tiempos anteriores.

La probabilidad de un arribo en el nuevo proceso es el producto de las probabilidades de arribo en cada proceso generador, pues los procesos generadores son independientes.

En conclusión el nuevo proceso es un proceso Bernoulli con parámetro pq .

Consideremos un nuevo proceso donde se produce un arribo si y solo si ocurre un arribo en alguno de los dos procesos.

Los arribos en el nuevo proceso son independientes entre si, pues en cada período solo dependen en los arribos de los procesos generadores, los cuales no dependen de arribos en tiempos anteriores.

La probabilidad de un arribo en el nuevo proceso es uno menos la probabilidad de que no haya un arribo, la cual es el producto de las probabilidades de que no hayan arribos en cada uno de los procesos generadores, pues los procesos generadores son independientes.

En conclusión el nuevo proceso es un proceso Bernoulli con parámetro $1 - (1 - p)(1 - q)$.

Proceso Bernoulli

División de Procesos Bernoulli:

Supongamos que tenemos un proceso Bernoulli con parámetro p que genera dos procesos.

En cada período:

Si el proceso principal produce un arribo, lanzamos una moneda sesgada con probabilidad de cara igual a q .

Si la moneda sale cara enviamos el arribo al primer proceso.

Si la moneda sale sello enviamos el arribo al segundo proceso.

Entonces:

El primer proceso será un proceso Bernoulli con parámetro $p q$.

El segundo proceso será un proceso Bernoulli con parámetro $p (1 - q)$.

Contenido del Tema

1 Repaso de Variables Aleatorias

2 Proceso Bernoulli

3 Proceso Poisson

Proceso Poisson

Proceso Poisson con parámetro λ :

Es una secuencia de variables aleatorias exponenciales con parámetro λ independientes e idénticamente distribuidas que representan los tiempos entre arribos.

Formalmente es una secuencia de variables aleatorias $X_1, X_2, X_3, X_4, \dots$ donde:

Para todo índice i tenemos que $X_i \sim \mathbb{E}(\lambda)$.

Para todo par de índices i, j es el caso que X_i es independiente de X_j .

El proceso empieza en el tiempo cero, *i.e.*, $t = 0$.

El primer arribo ocurre en el tiempo $t = X_1$, el segundo en el tiempo $t = X_1 + X_2$, y así sucesivamente; *i.e.*, el i^{avo} arribo ocurre en:

$$t = X_1 + \dots + X_i = \sum_{k=1}^i X_k$$

Problema - H&L 17.4-3:

El tiempo que requiere un mecánico para reparar una máquina tiene una distribución exponencial con media de 4 horas. Sin embargo, una herramienta especial reduciría esta media a 2 horas. Si el mecánico repara una máquina en menos de 2 horas, se le pagan \$100; de otra manera se le pagan \$80. Determine el aumento esperado en el pago del mecánico si usa esta herramienta especial.

Resolución:

Si denotamos a X como el tiempo que demora el mecánico en arreglar una máquina actualmente entonces:

$$X \sim \text{Exponencial}(\lambda = 0.25)$$

Pago del mecánico actualmente:

Si $0 \leq X \leq 2$ gana \$100, lo cual sucede con probabilidad:

$$\int_{t=0}^2 \lambda e^{-\lambda t} dt = \int_{t=0}^2 0.25 e^{-0.25 t} dt = 0.393469$$

Si $X > 2$ gana \$80, lo cual sucede con probabilidad:

$$1 - 0.393469 = 0.606531$$

Consecuentemente el pago esperado es:

$$\$100 (0.393469) + \$80 (0.606531) = \$87.87$$

Luego, con la nueva máquina tenemos que:

$$X \sim \text{Exponencial}(\lambda = 0.5)$$

Pago del mecánico con la nueva máquina:

Si $0 \leq X \leq 2$ gana \$100, lo cual sucede con probabilidad:

$$\int_{t=0}^2 \lambda e^{-\lambda t} dt = \int_{t=0}^2 0.50 e^{-0.50 t} dt = 0.632121$$

Si $X > 2$ gana \$80, lo cual sucede con probabilidad:

$$1 - 0.632121 = 0.367879$$

Consecuentemente el pago esperado es:

$$\$100 (0.632121) + \$80 (0.367879) = \$92.64$$

Finalmente, el aumento en el pago del mecánico gracias a que usa la nueva máquina es de \$4.67.

Combinación de Procesos Poisson:

Supongamos que tenemos dos procesos Poisson independientes.

El primero tiene parámetro λ_1 .

El segundo tiene parámetro λ_2 .

Consideremos un nuevo proceso que combina los arribos de los dos procesos anteriores.

Entonces el nuevo proceso es un proceso Poisson con parámetro $\lambda_1 + \lambda_2$.

Proceso Poisson

División de Procesos Poisson:

Supongamos que tenemos un proceso Poisson con parámetro λ que genera dos procesos.

En cada instante:

Si el proceso principal produce un arribo, lanzamos una moneda sesgada con probabilidad de cara igual a p .

Si la moneda sale cara enviamos el arribo al primer proceso.

Si la moneda sale sello enviamos el arribo al segundo proceso.

Entonces:

El primer proceso será un proceso Poisson con parámetro λp .

El segundo proceso será un proceso Poisson con parámetro $\lambda(1 - p)$.