Control Automático: Lección 03

Año: 2016-2017 **Término:** II **Instructor:** Luis I. Reyes Castro **Paralelo:** 02

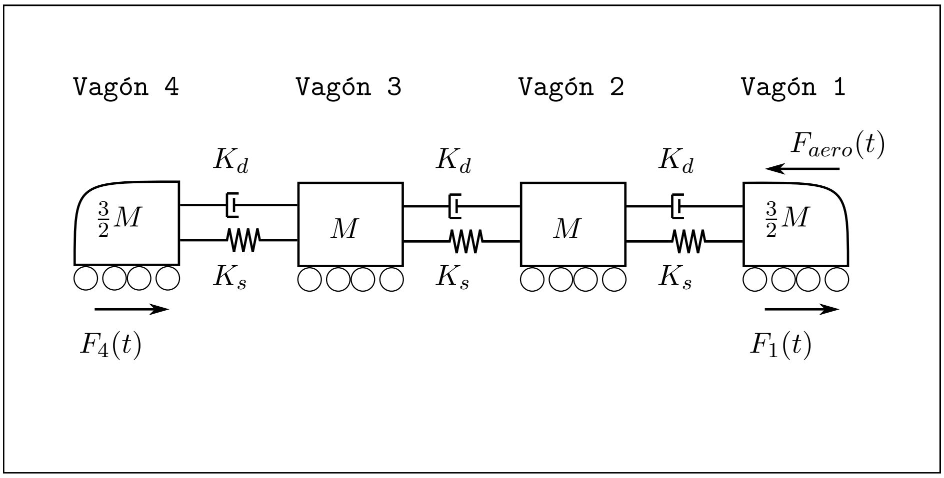
COMPROMISO DE HONOR

Yo, ______________________________ al firmar este compromiso, reconozco que la presente lección está diseñada para ser resuelta de manera individual, que puedo usar un lápiz o pluma y una calculadora científica, que solo puedo comunicarme con la persona responsable de la recepción de la lección, y que cualquier instrumento de comunicación que hubiere traído debo apagarlo. También estoy conciente que no debo consultar libros, notas, ni materiales didácticos adicionales a los que el instructor entregue durante la lección o autorice a utilizar. Finalmente, me comprometo a desarrollar y presentar mis respuestas de manera clara y ordenada.

Firmo al pie del presente compromiso como constancia de haberlo leído y aceptado.

Firma: ______________________________ Número de matrícula: ____________________

Problema 3.1. [5 Puntos] Considere el siguente modelo de un tren urbano eléctrico de cuatro vagones. Los vagones 1 y 4 son vagones-locomotoras que producen las fuerzas $F_1(t)$ y $F_4(t)$ que empujan el tren.



Suponiendo por simplicidad que la fuerza de arrastre aerodinámico $F_{aero}(t)$ actúa solamente sobre el vagón 1 y que esta fuerza tiene una magnitud proporcional a la velocidad promedio de todos los vagones del tren (donde la constante de proporcionalidad es K_{aero}), construya un modelo de espacio de estados con las siguientes caracteristicas:

- Las entradas son las fuerzas de los vagones-locomotoras, *i.e.,* la primera entrada es $F_1(t)$ y la segunda entrada es $F_4(t)$.
- Las salidas son las velocidades relativas de los vagones, *i.e.,* la primera salida es la velocidad del vagón 1 relativa al vagón 2, la segunda salida es la velocidad del vagón 2 relativa al vagón 3, y la tercera salida es la velocidad del vagón 3 relativa al vagón 4.
- Todos los estados asociados con el vagón 1 se listan antes de los estados asociados con el vagón 2, los cuales se listan antes de los estados asociados con el vagón 3, y asi sucesivamente. Además, los estados asociados con posiciones se listan antes que los estados asociados con velocidades.

Solución: Primero, como el sistema tiene 4 bloques de masa lo modelamos con 8 estados, donde para cada bloque $i \in \{1, \ldots, 4\}$ las variables de estado $x_i(t)$ y $v_i(t)$ denotan la posición y velocidad del bloque, respectivamente. Luego, escribimos las cuatro ecuaciones diferenciales asociadas con los vagones (*i.e.,* bloques de masa):

- En el vagón 1:

$$\begin{aligned} \left(\frac{3}{2}\right) M\, \ddot{x}_1(t) \;&=\; F_1(t) - K_{aero}\left(\frac{\dot{x}_1(t)+\dot{x}_2(t)+\dot{x}_3(t)+\dot{x}_4(t)}{4}\right) \\ &\quad - K_s\,(\,x_1(t)-x_2(t)\,) - K_d\,(\,\dot{x}_1(t)-\dot{x}_2(t)\,) \end{aligned}$$

- En el vagón 2:

$$\begin{aligned} M\, \ddot{x}_2(t) \;&=\; K_s\,(\,x_1(t)-x_2(t)\,) + K_d\,(\,\dot{x}_1(t)-\dot{x}_2(t)\,) \\ &\quad - K_s\,(\,x_2(t)-x_3(t)\,) - K_d\,(\,\dot{x}_2(t)-\dot{x}_3(t)\,) \end{aligned}$$

- En el vagón 3:

$$\begin{aligned} M\, \ddot{x}_3(t) \;&=\; K_s\,(\,x_2(t)-x_3(t)\,) + K_d\,(\,\dot{x}_2(t)-\dot{x}_3(t)\,) \\ &\quad - K_s\,(\,x_3(t)-x_4(t)\,) - K_d\,(\,\dot{x}_3(t)-\dot{x}_4(t)\,) \end{aligned}$$

- En el vagón 4:

$$\left(\frac{3}{2}\right) M\, \ddot{x}_4(t) \;=\; F_4(t) + K_s\,(\,x_3(t)-x_4(t)\,) + K_d\,(\,\dot{x}_3(t)-\dot{x}_4(t)\,)$$

Con esto en mente observamos que si los vectores de estado y entrada son

$$\boldsymbol{x}(t) \;=\; \begin{bmatrix} x_1(t) \\ v_1(t) \\ x_2(t) \\ v_2(t) \\ x_3(t) \\ v_3(t) \\ x_4(t) \\ v_4(t) \end{bmatrix} \qquad\qquad \boldsymbol{u}(t) \;=\; \begin{bmatrix} F_1(t) \\ F_4(t) \end{bmatrix}$$

entonces las matrices de estado y de entrada son:

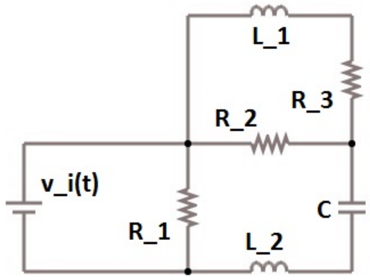
$$\boldsymbol{A} \;=\; \left[\begin{array}{cc|cc|cc|cc} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{2K_s}{3M} & -\frac{2K_d}{3M} - \frac{K_{aero}}{6M} & \frac{2K_s}{3M} & \frac{2K_d}{3M} - \frac{K_{aero}}{6M} & 0 & -\frac{K_{aero}}{6M} & 0 & -\frac{K_{aero}}{6M} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{K_s}{M} & \frac{K_d}{M} & -\frac{2K_s}{M} & -\frac{2K_d}{M} & \frac{K_s}{M} & \frac{K_d}{M} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{K_s}{M} & \frac{K_d}{M} & -\frac{2K_s}{M} & -\frac{2K_d}{M} & \frac{K_s}{M} & \frac{K_d}{M} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2K_s}{3M} & \frac{2K_d}{3M} & -\frac{2K_s}{3M} & -\frac{2K_d}{3M} \end{array}\right]$$

$$
\boldsymbol{B} = \left[\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \frac{2}{3M} & 0 \\ \hline 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3M} \end{array}\right]
$$

Finalmente, recordando la definición de velocidad relativa, vemos que las matrices de salida y de alimentación delantera son:

$$
\boldsymbol{C} = \left[\begin{array}{cc|cc|cc|cc} 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right] \qquad \boldsymbol{D} = \left[\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right]
$$

Problema 3.2. [5 Puntos] Considere el siguente circuito analógico.



Construya un modelo de espacio de estados con las siguientes características:

- La entrada es el voltage en la fuente $v_i(t)$.
- La salida es el voltage a través de la resistencia R_2.
- Todos los estados asociados con corrientes deberán ser listados antes de los estados asociados con voltages.

Solución: Primero vemos que el sistema tiene tres elementos capaces de almacenar energía: el inductor L_1, el inductor L_2 y el capacitor C. Por lo tanto, los estados son:

- La corriente a través del inductor L_1, denotada $i_1(t)$.
- La corriente a través del inductor L_2, denotada $i_2(t)$.
- El voltaje a través del capacitor C, denotado $v_C(t)$.

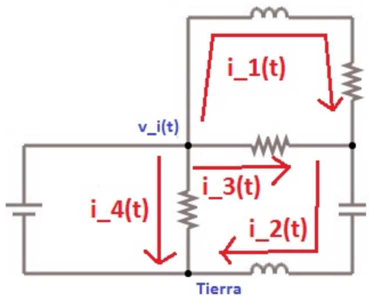
Luego, por conveniencia introducimos las dos siguientes corrientes, tal como se muestra en la figura de la siguiente página.

- La corriente a través de la resistencia R_2, denotada $i_3(t)$. Nótese que:

$$
i_3(t) = i_2(t) - i_1(t)
$$

- La corriente a través de la resistencia R_1, denotada $i_4(t)$. Nótese que:

$$i_4(t) \;=\; \frac{v(t)}{R_1}$$



Ahora escribimos la ecuación de estado del inductor L_1 :

$$\begin{aligned} L_1 \frac{di_1(t)}{dt} \;=\; v_{L_1}(t) \;&=\; v_{R_2}(t) - v_{R_3}(t) \\ &=\; R_2\, i_3(t) - R_3\, i_1(t) \\ &=\; R_2\,(\, i_2(t) - i_1(t)\,) - R_3\, i_1(t) \;=\; -(\, R_2 + R_3\,)\, i_1(t) + R_2\, i_2(t) \end{aligned}$$

Luego escribimos la ecuación de estado del inductor L_2 :

$$\begin{aligned} L_2 \frac{di_2(t)}{dt} \;=\; v_{L_2}(t) \;&=\; v_i(t) - v_{R_2}(t) - v_C(t) \\ &=\; v_i(t) - R_2\, i_3(t) - v_C(t) \\ &=\; v_i(t) - R_2\,(\, i_2(t) - i_1(t)\,) - v_C(t) \\ &=\; R_2\, i_1(t) - R_2\, i_2(t) - v_C(t) + v_i(t) \end{aligned}$$

Despues escribimos la ecuación de estado del capacitor C, la cual resulta ser trivial:

$$C\,\frac{dv_C(t)}{dt} \;=\; i_C(t) \;=\; i_2(t)$$

Con esto en mente observamos que si los vectores de estado y entrada son

$$\boldsymbol{x}(t) \;=\; \begin{bmatrix} i_1(t) \\ i_2(t) \\ v_C(t) \end{bmatrix} \qquad\qquad \boldsymbol{u}(t) \;=\; \begin{bmatrix} v_i(t) \end{bmatrix}$$

entonces las matrices de estado y de entrada son:

$$\boldsymbol{A} \;=\; \begin{bmatrix} -\frac{R_2+R_3}{L_1} & \frac{R_2}{L_1} & 0 \\ \frac{R_2}{L_2} & -\frac{R_2}{L_2} & -\frac{1}{L_2} \\ 0 & \frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix} \qquad\qquad \boldsymbol{B} \;=\; \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{L_2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Finalmente, dado que la salida es el voltaje a traves de la resistencia R_2, tenemos que:

$$v_{R_2}(t) \;=\; R_2\, i_3(t) \;=\; R_2\,(\, i_2(t) - i_1(t)\,) \;=\; -R_2\, i_1(t) + R_2\, i_2(t)$$

Consecuentemente las matrices de salida y de alimentación delantera son:

$$\boldsymbol{C} \;=\; \begin{bmatrix} -R_2 & R_2 & 0 \end{bmatrix} \qquad\qquad \boldsymbol{D} \;=\; \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$