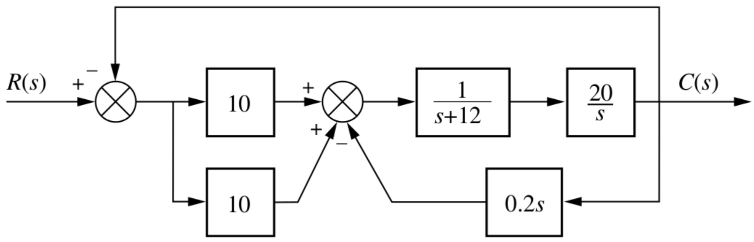
Sistemas de Control (EYAG-1005): Taller 01

Semestre: 2017-2018 Término I **Instructor:** Luis I. Reyes Castro

Integrantes del Grupo:

Problema 1.1. Para el sistema mostrado en la figura de abajo, encuentre:

- [**2 Puntos**] La función de transferencia en circuito cerrado $T(s) = C(s)/R(s)$.
- [**2 Puntos**] La tasa de amortiguamiento, el porcentage de sobrepaso, el tiempo pico y el tiempo de asentamiento.



Soluciones:

- *Literal (i):*

$$T(s) \;=\; \frac{400}{s^2 + 16\,s + 400}$$

- *Literal (i):* Dado que $\omega_n^2 = 400$ tenemos que $\omega_n = 20$. A su vez:

$$2\,\zeta\omega_n \;=\; 16 \quad\Longrightarrow\quad \zeta \;=\; 0.4$$

Consecuentemente:

$$OS \;=\; \exp\left(-\frac{\zeta\,\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right) \;=\; 0.2538 \;\equiv\; 25.38\%$$

$$T_p \;=\; \frac{\pi}{\omega_n\,\sqrt{1-\zeta^2}} \;=\; 0.1714\,\text{seg}$$

$$T_s \;=\; \frac{4}{\zeta\,\omega_n} \;=\; 0.5\,\text{seg}$$

Problema 1.2. En el 2014 el destructor estadounidense *U.S.S. Ponce* demostró exitosamente, por primera vez en la historia, el uso de un láser de alta energía para detener un blanco móvil. Con esto en mente, especulemos sobre el funcionamiento del sistema de guía del láser a bordo del *U.S.S. Ponce*. La mayoría de destructores estadounidenses cuentan con grandes radares de apertura sintética, asi que supondremos que un radar de este tipo es usado para guiar al láser. (Un radar de apertura sintética está físicamente sujeto a la estructura de su vehículo portador y por lo tanto no necesita girar.) Supondremos también que:

- Cuando se desea apuntar el láser hacia un potencial blanco el radar de apertura sintética genera un ángulo $\theta_r(t)$ que se utiliza como referencia para el ángulo del láser $\theta(t)$.

- El lazo de control tiene arquitectura de retro-alimentación unitaria con compensación delantera. Es decir, en cada instante se calcula el error angular $\theta_e(t) = \theta_r(t) - \theta(t)$ y se ingresa esa señal a un compensador con función de transferencia $G_C(s)$ que genera el voltage que alimenta al motor eléctrico.
- El láser es actuado por un motor eléctrico que genera un torque $T(t)$ sobre su estructura de 10 N-m por cada voltio de entrada.
- El momento de inercia de la estructura del láser es de $J = 280$ kg-m^2 y el torque generado por la fricción de la misma es de $K_f = 8.5$ N-m/(grado/s).

Con esto en mente, suponga que usted fue el ingeniero encargado del diseño del sistema de guía del láser y complete cada una de las siguientes actividades:

- [**2 Puntos**] Bosqueje el lazo de control del sistema de guía del láser.
- [**2 Puntos**] Suponga que el almirantazgo estadounidense especificó que el láser debe ser capaz de "apuntarle a embarcaciones enemigas navengando a velocidades de hasta 50 nudos a distancias de no menos de 1 milla náutica del destructor con un error no mayor a 5 milimetros". Diseñe el compensador $G_C(s)$ más sencillo capaz de alcanzar esta especificación.
- [**2 Puntos**] Suponga que el almirantazgo estadounidense especificó que el láser debe ser capaz de "apuntarle a aeronaves enemigas volando a cualquier velocidad con aceleraciones de hasta 2 nudos por segundo a distancias de no menos de 1 milla náutica del destructor con un error no mayor a 2 centimetros". Diseñe el compensador $G_C(s)$ más sencillo capaz de alcanzar esta especificación.

Soluciones:

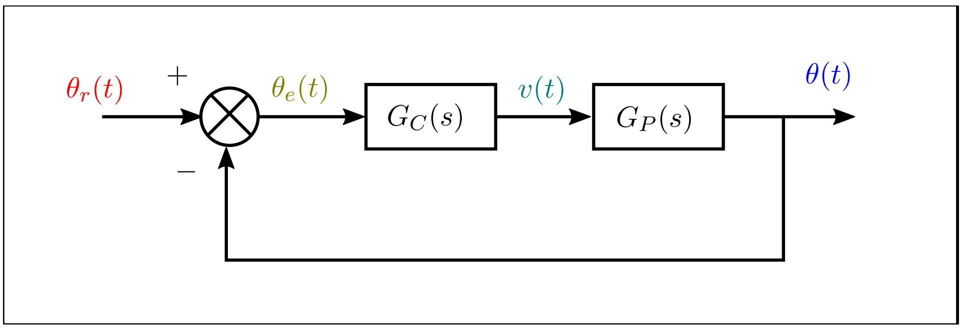
- *Literal (i):* De la descripción del problema, si denotamos al voltage de entrada del motor eléctrico como $v(t)$ entonces podemos ver que la ecuación diferencial que gobierna el movimiento de la estructura del láser es:

$$280\,\ddot{\theta}(t) \;=\; 10\,v(t) - (8.5)(180/\pi)\,\dot{\theta}(t)$$

Por lo tanto la función de transferencia de la planta es:

$$G_P(s) \;=\; \frac{\Theta(s)}{V(s)} \;=\; \frac{10}{280\,s^2 + 487\,s} \;=\; \frac{0.0357}{s\,(s+1.74)}$$

Finalmente, la figura de abajo muestra el lazo de control del sistema.



- *Literal (ii):* Primero interpretamos la señal de referencia. Para esto obseramos que:

$$\dot{\theta}_r(t) \;=\; \frac{50\,\text{nudos}}{1\,\text{milla náutica}} \;=\; \frac{25.72\,\text{m/s}}{1852\,\text{m}} \;=\; 0.0139\,\text{rad/s}$$

Esto implica que la señal de referencia es una rampa; más precisamente:

$$\theta_r(t) \;=\; 0.0139\,t$$

Luego, el máximo error permitido es:

$$e(\infty) \;=\; \frac{5\,\text{mm}}{1\,\text{milla náutica}} \;=\; \frac{0.005\ \text{m}}{1852\ \text{m}} \;=\; 2.7\times 10^{-6}$$

Ahora, puesto que la entrada es una rampa y que deseamos alcanzar un error en estado estable finito con respecto a esa entrada, nuestro sistema debe de ser del Tipo I, *i.e.,* debe tener un integrador en el lazo. Como la planta ya tiene un integrador, el compensador más sencillo capaz de alcanzar la especificación es un simple amplificador, *i.e.:*

$$G_C(s) \;=\; K$$

Para un sistema Tipo I el error en estado estable para una entrada rampa es el recíproco de la constante de velocidad K_v. Para nuestro sistema tenemos que:

$$K_v \;=\; \lim_{s\to 0} s\,G_C(s)\,G_P(s) \;=\; \lim_{s\to 0} \frac{0.0357\,K}{s+1.74} \;=\; \frac{0.0357\,K}{1.74}$$

Consecuentemente:

$$\frac{0.0139}{K_v} \;=\; 2.7\times 10^{-6} \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{(0.0139)(1.74)}{0.0357\,K} \;=\; 2.7\times 10^{-6}$$

$$\Longrightarrow\; K \;=\; 2.51\times 10^{5}$$

- *Literal (iii):* Primero interpretamos la señal de referencia. Para esto obseramos que:

$$\ddot{\theta}_r(t) \;=\; \frac{2\,\text{nudos/s}}{1\,\text{milla náutica}} \;=\; \frac{1.029\,\text{m/s}^2}{1852\,\text{m}} \;=\; 5.56\times 10^{-4}\,\text{rad/s}$$

Esto implica que la señal de referencia es una parábola; más precisamente:

$$\theta_r(t) \;=\; \frac{5.56\times 10^{-4}}{2}\,t^2$$

Luego, el máximo error permitido es:

$$e(\infty) \;=\; \frac{2\,\text{cm}}{1\,\text{milla náutica}} \;=\; \frac{0.020\ \text{m}}{1852\ \text{m}} \;=\; 1.08\times 10^{-5}$$

Ahora, puesto que la entrada es una parábola y que deseamos alcanzar un error en estado estable finito con respecto a esa entrada, nuestro sistema debe de ser del Tipo II, *i.e.,* debe tener dos integradores en el lazo. Como la planta ya tiene un integrador, el compensador más sencillo capaz de alcanzar la especificación es un amplificador con integrador, *i.e.:*

$$G_C(s) \;=\; \frac{K}{s}$$

Para un sistema Tipo II el error en estado estable para una entrada parabólica es el recíproco de la constante de aceleración K_a. Para nuestro sistema tenemos que:

$$K_a \;=\; \lim_{s\to 0} s^2\,G_C(s)\,G_P(s) \;=\; \lim_{s\to 0} \frac{0.0357\,K}{s+1.74} \;=\; \frac{0.0357\,K}{1.74}$$

Consecuentemente:

$$\frac{5.56\times 10^{-4}}{K_a} \;=\; 1.08\times 10^{-5} \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{(5.56\times 10^{-4})(1.74)}{0.0357\,K} \;=\; 1.08\times 10^{-5}$$

$$\Longrightarrow\; K \;=\; 2.5\times 10^{3}$$