Modelos Estocásticos (INDG-1008): Tarea 01

Semestre: 2017-2018 Término I **Instructor:** Luis I. Reyes Castro

Instrucciones: Por favor entregue todas sus soluciones menos el código fuente de manera escrita en un solo archivo en formato PDF de acuerdo al siguiente formato:

`apellido1_apellido2_tarea_01.pdf`

Además, por favor entregue todas las funciones en Python que se le soliciten en un solo archivo de acuerdo al siguiente formato:

`apellido1_apellido2_tarea_01.py`

Problema 1.1. (2 Puntos) Un fabricante tiene una máquina complicada. Al comienzo de cada día si la máquina está operativa entonces con probabilidad p la misma se descompondrá durante el día y los técinos serán llamados para arreglarla al día siguiente. Suponiendo que los técnicos siempre se toman dos días para arreglar la máquina, modele esta situación como una cadena de Markov con tres estados y construya la matriz de transición de la cadena en función del parámetro p y encuentre el porcentaje de los días que la máquina empieza el día estando operativa.

Problema 1.2. (6 Puntos) En el problema anterior, suponga que el fabricante tiene una máquina de repuesto que utiliza solamente cuando la máquina principal está descompuesta. Similar al caso de la máquina principal, si al comienzo de cualquier día la máquina de repuesto está operativa entonces con probabilidad q se descompondrá durante el día y los técnicos serán llamados a repararla al día siguiente. Nuevamente, los técnicos se tomarán dos días en arreglar la máquina. Modele esta nueva situación como una cadena de Markov y construya la matriz de transición en función de p y q. No necesita bosquejar el grafo de la cadena ni calcular probabilidades en estado estable.

Problema 1.3. (3 Puntos) Suponga que usted trabaja en una concesionaria de maquinaria de construcción. Usted ha sido encargado con calcular el costo de la garantía de tres años para excavadoras que ofrece la empresa. De los archivos del departamento de ventas, usted ha podido observar que:

- Solo el 2% de los clientes piden la garantía en el primer año.
- El 5% de los clientes que no tuvieron problemas con su máquina en el primer año piden la garantía en el segundo año.
- El 9% de los clientes que no tuvieron problemas con su máquina en el primer y segundo año piden la garantía en el tercer año.

Suponiendo que cada excavadora se vende en 200 mil dólares, calcule el costo promedio de una garantía de tres años.

Problema 1.4. Suponga que usted ha sido encargado con del manejo del inventario de algunos productos no-perecederos en un supermercado que abre todos los días a sus clientes por la misma cantidad de tiempo. Para mantener una consistencia en el manejo de inventario a través de los varios productos que se venden en el supermercado, el gerente ha dispuesto que todos los inventarios se controlen mediante políticas de punto de reposición.

Más precisamente, al final de cada día se cuenta el inventario del producto y si este es menor o igual a I_{rep} unidades se hace un pedido de reposición por Q_{rep} unidades al proveedor, el cual es entregado por el mismo al comienzo del siguiente día antes de la hora de apertura de la tienda; caso contrario, no se hace un pedido de reposición. Fíjese que bajo estas suposiciones el máximo inventario posible es:

$$I_{max} = I_{rep} + Q_{rep}$$

Adicionalmente,como es de costumbre en este campo de estudio, usted hace la suposición simplificatoria que las demandas del producto D_1, D_2, ... constituyen una secuencia de variables aleatorias i.i.d. con distribución Poisson con parámetro λ. Más aún, si para cada día t denotamos a I_t como el inventario a la hora de apertura de la tienda del t^{avo} día, a D_t como la demanda del día, *i.e.,* la cantidad que se vendería ese día si el inventario fuere inagotable, a R_t como la cantidad repuesta entre la noche del t^{avo} día y la hora de apertura del $(t+1)^{\text{avo}}$ día, tenemos que:

$$I_{t+1} = \max\{\,0,\, I_t - D_t\,\} + R_t\,; \qquad R_t = \begin{cases} Q_{rep}, & \text{si } 0 \leq I_t \leq I_{rep}\,; \\ 0, & \text{caso contrario;} \end{cases}$$

Con todo esto en mente, para cada problema de manejo de inventario con demanda λ y política de punto de reposición (I_{rep}, Q_{rep}) podemos construir una Cadena de Markov en $n = I_{max} + 1$ estados. Más precisamente, los estados serían: Cero unidades en inventario, una unidad en inventario, dos unidades en inventario, y asi sucesivamente, hasta I_{max} unidades en inventario.

Primera Actividad: (6 Puntos)

Escriba una función en Python que tome como entrada (1) el parámetro λ de la distribución Poisson de la demanda, (2) el inventario de reposición I_{rep} y (3) la cantidad por reposición Q_{rep}, y que produzca como única salida la matriz de transición de la cadena de Markov correspondiente como un arreglo `numpy` de tamanño (n, n). Por favor defina el nombre de su función como `construye_mat_inventario`. Por ejemplo, yo usaría mi función asi:

```python
import numpy as np
from reyes_castro_tarea_01 import contruye_mat_inventario
# Entradas:
lambda_dem = 6.9 # Parametro de la demanda
I_rep = 5 # Inventario de reposicion
Q_rep = 5 # Cantidad por reposicion
# Salida: Matriz de probabilidad de la Cadena de Markov
P = contruye_mat_inventario( lambda_dem, I_rep, Q_rep)
```

Sugerencia: Para hacerse la vida más fácil a la hora de calcular probabilidades le recomiendo que utilice la funcion `poisson.pmf()` de la librería `scipy.stats`. Click aquí para más información. Por ejemplo:

```python
from scipy.stats import poisson
# Le asignamos a 'prob' la probabilidad de que una
# variable aleatoria Poisson con parametro mu = 4.8
# tome el valor k = 3
prob = poisson.pmf( mu = 4.8, k = 3)
```

Segunda Actividad: (2 Puntos)

Caso	$\boldsymbol{\lambda}$	$\boldsymbol{I_{rep}}$	$\boldsymbol{Q_{rep}}$
Producto A - Política 1	1.6	3	2
Producto A - Política 2	1.6	1	4
Producto B - Política 1	4.1	2	5
Producto B - Política 2	4.1	4	3

Construya la matriz de transición para el problema para cada uno de los siguientes casos:

Por favor presente sus matrices como tablas con los decimales redondeados a tres dígitos.

Nota: Usted puede llevar a cabo esta actividad aún sin haber realizado la primera.

Tercera Actividad: (4 Puntos)

Calcule la distribución en estado estable para cada uno de los cuatro casos de la actividad anterior. Por favor presente sus resultados en dos tablas separados, una para cada producto, de tal manera que se pueda apreciar la influencia de la política de manejo de inventario sobre la distribución estacionaria de la cadena.

Cuarta Actividad: (4 Puntos)

Para comparar las políticas necesitamos una función de utilidad. En nuestro caso, la función de utilidad será la diferencia entre la utilidad neta por ventas y el costo de retención de la mercadería. Si para cualquier día definimos a la variable aleatoria D como la demanda de ese día, a la variable aleatoria V como el número de unidades que se venderán ese día, a u como la utilidad neta por unidad del producto vendido, y a c como el costo de retención por unidad del producto por día, entonces la utilidad diaria de un nivel de inventario $I \in \{\, 0,\, 1,\, \ldots,\, I_{max} \,\}$ se calcula de la siguiente manera:

$$\text{Utilidad}(I) \;=\; u\,\mathbb{E}[V] - c\,I\,; \qquad V \;=\; \min\{\, D,\, I \,\}$$

Con esto en mente, es evidente que podemos evaluar el desempeño de una política ponderando las utilidades de los niveles de inventario por la distribución en estado estable de la cadena de Markov correspondiente:

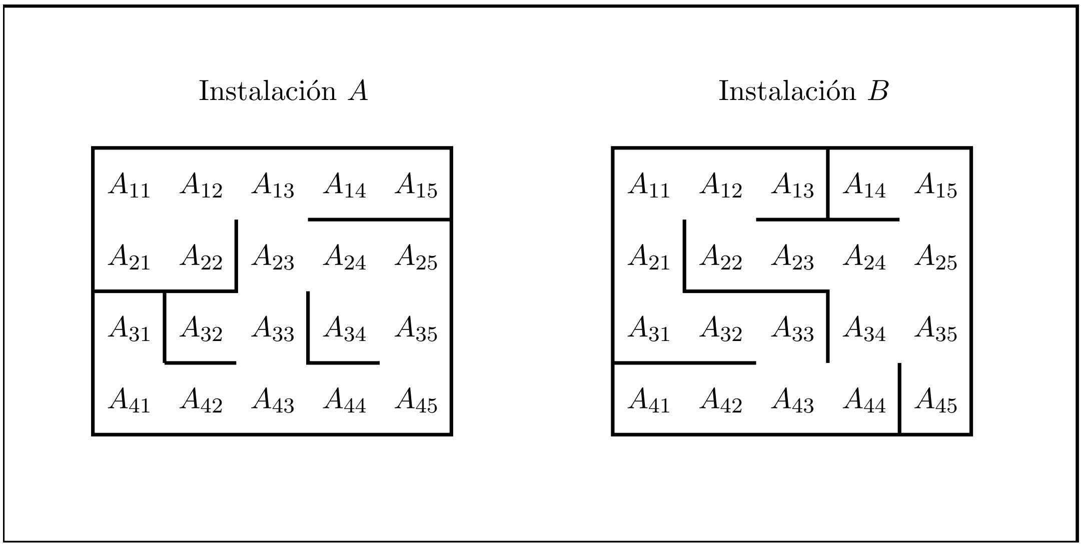
$$\text{Utilidad}\,(\text{Política}) \;=\; \sum_{I=0}^{I_{max}} \pi^*(I)\,\text{Utilidad}(I)$$

Finalmente, suponiendo que el Producto A tiene una utilidad neta por unidad de $u = \$1.25$ y un costo de retención por unidad por día de $c = \$0.10$, calcule la utilidad de cada una de las dos políticas propuestas e indique cuál de las dos es mejor. Luego repita el ejercicio para el Producto B suponiendo que $u = \$0.60$ y que $c = \$0.08$.

Problema 1.5. Considere un conjunto de instalaciones industriales vigiladas por robots como se muestra en la figura de abajo. En cada instalación, el robot empieza en un área aleatoria y hace transiciones a otras áreas adjacentes (o a la misma área) con probabilidad uniforme.

Primera Actividad: (4 Puntos)

Escriba una función en Python que tome como entrada (1) el número k de filas del arreglo que representa a la instalación, (2) el número ℓ de columnas del mismo arreglo y (3) una lista de 2-tuplas que especifica (en cualquier orden) los índices de los pares de áreas que definen las paredes internas de la instalación, y que produzca como única salida la matriz de transición de la cadena de Markov correspondiente como un arreglo `numpy` de tamanño (n, n), donde $n = k\,\ell$.



Por favor defina el nombre de su función como `construye_mat_robot`. Por ejemplo, para la geometría de la Instalación A, yo usaría mi función asi:

```
import numpy as np
from reyes_castro_tarea_01 import contruye_mat_robots
# Entradas:
k = 4 # Numero de filas
l = 5 # Numero de columnas
paredes = [ (14,24), (15,25), (21,31), (22,32), (22,23), \
(31,32), (33,34), (32,42), (34,44) ] # Lista de paredes
# Salida: Matriz de probabilidad de la Cadena de Markov
P = contruye_mat_robots( k, l, paredes)
```

Segunda Actividad: (2 Puntos)

Para las dos instalaciones mostradas en la figura, compute la frecuencia de visitas a las áreas de la instalación y preséntelas como un mapa de calor. Adicionalmente, indique cuáles son las áreas más seguras y las áreas más vulnerables.

Tercera Actividad: (2 Puntos)

Empezando con la política aleatoria uniforme, modifique las probabilidades de transición del robot del tal manera que su distribución en estado estable sea 'tan cerca' de la distribución uniforme como le sea posible. Justifique su razonamiento explicando sus desiciones de diseño, *e.g.*, indicando cuáles probabilidades de transición fueron incrementadas o disminuidas.

Nota: Este problema no tiene una respuesta 'correcta'. Lo que busca es que ustedes practiquen con un problema de diseño minimamente realista.