Modelos Estocásticos (INDG-1008): Lección 03

Semestre: 2017-2018 Término II **Instructor:** Luis I. Reyes Castro

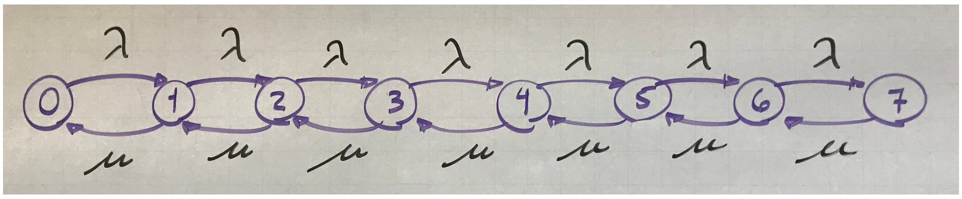
Problema 3.1. El aeropuerto internacional de Centerville tiene dos pistas, una solo para despegues y otra solo para aterrizajes. Los aviones llegan al espacio aéreo del aeropuerto, el cual tiene una capacidad para $C = 7$ aeronaves, para pedir instrucciones de aterrizaje según un proceso de Poisson con tasa media de λ por hora. El tiempo que se requiere para realizar un aterrizaje después de la aprobación tiene distribución exponencial con media de 3 minutos, proceso que debe estar terminado antes de aprobar otro aterrizaje. Los aviones en espera de pista vuelan en círculos.

La FAA (Administración de Aviación Federal, por sus siglas en ingés) tiene varios criterios respecto del nivel seguro de congestión de aviones en espera para aterrizar. Estos criterios dependen de varios factores en cada aeropuerto, como el número de pistas disponibles. En el caso de Centerville los criterios son *(i)* el número promedio de aviones en espera no debe exceder de 1, *(ii)* el 95% del tiempo, el número real de aviones en espera no debe exceder de 4, y *(iii)* para el 99% de los aviones, el tiempo que vuelan en círculos antes de aterrizar no debe exceder de 30 minutos.

Complete las siguientes actividades:

a) 2 Puntos: Calcule la distribución estacionaria del sistema para los casos cuando la tasa de arribo es de $\lambda = 10$ por hora, $\lambda = 15$ por hora, y $\lambda = 25$ por hora.

Solución: Primero reconocemos que como solo hay una pista de aterrizaje, este problema corresponde a un modelo M/M/1/7 cuya tasa de servicio por pista es de $\mu = 20$ aeronaves por hora. Luego podemos bosquejar la Cadena de Markov correspondiente, tal como se muestra en la siguiente fotografía.



Para esta cadena, definiendo $\rho \triangleq \lambda/\mu$, tenemos:

$$\begin{aligned} \lambda = 10 \quad &\Longrightarrow \quad \rho = 0.50 \\ \lambda = 15 \quad &\Longrightarrow \quad \rho = 0.75 \\ \lambda = 25 \quad &\Longrightarrow \quad \rho = 1.25 \end{aligned}$$

Las ecuaciones de balance son:

$$\begin{aligned} &E_0 : \; \lambda\,\pi_0 \;=\; \mu\,\pi_1 \quad\Longrightarrow\quad \pi_1 \;=\; \rho\,\pi_0 \\ &E_1 : \; (\lambda+\mu)\,\pi_1 \;=\; \lambda\,\pi_0 + \mu\,\pi_2 \quad\Longrightarrow\quad \pi_2 \;=\; \rho^2\,\pi_0 \\ &E_2 : \; (\lambda+\mu)\,\pi_2 \;=\; \lambda\,\pi_1 + \mu\,\pi_3 \quad\Longrightarrow\quad \pi_3 \;=\; \rho^3\,\pi_0 \\ &\vdots \\ &E_k : \; (\lambda+\mu)\,\pi_k \;=\; \lambda\,\pi_{k-1} + \mu\,\pi_{k+1} \quad\Longrightarrow\quad \pi_{k+1} \;=\; \rho^{k+1}\,\pi_0 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Ahora normalizamos para hallar la probabilidad del estado cero:

$$\pi_0 \sum_{k=0}^{7} \rho^k \;=\; 1 \quad\Longrightarrow\quad \pi_0 \;=\; \left(\sum_{k=0}^{7} \rho^k\right)^{-1}$$

Con esta probabilidad a la mano es fácil computar las siguienes, puesto que $\pi_1 = \rho\,\pi_0$ y que para todo $k \geq 2$ es el caso que:

$$\pi_k \;=\; \rho\,\pi_{k-1}$$

Consecuentemente:

Estado k	π_k ($\lambda = 10$)	π_k ($\lambda = 15$)	π_k ($\lambda = 25$)
0	0.502	0.278	0.050
1	0.251	0.209	0.063
2	0.126	0.156	0.078
3	0.063	0.117	0.098
4	0.031	0.088	0.122
5	0.016	0.066	0.153
6	0.008	0.045	0.191
7	0.004	0.037	0.238

b) 2 Puntos: Para cada uno de los tres casos anteriores, evalúe si se cumplen o no los requisitos de la FAA.

Solución: Los requisitos de la FAA se traducen de la siguiente manera:

- El primer requerimiento equivale a exigir que el número promedio de clientes en cola sea menor o igual a uno. *I.e.:*

$$\mathbb{E}[L_q] \;=\; \mathbb{E}[\,\max\{\,0, X_t - 1\}\,] \;=\; \sum_{k=0}^{7} \pi_k \,\max\{0, k-1\} \;\leq\; 1$$

- Como en este caso tenemos un solo servidor, el segundo requerimiento exige que la probabilidad de que el estado del sistema sea menor o igual a cinco debe ser mayor o igual al 95%. *I.e.:*

$$\pi_0 + \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \pi_4 + \pi_5 \;\geq\; 0.95 \qquad\Longleftrightarrow\qquad \pi_6 + \pi_7 \;\leq\; 0.05$$

- El tercer requerimiento exige que la probabilidad de que cada avión que arriba al espacio aéreo del aeropuerto espera no más de $t = 0.5$ horas hasta recibir aprobación para aterrizaje, *i.e.,* hasta recibir servicio. Para esto primero calculamos, para cada estado k del sistema, la probabilidad de que un avión que arriba al sistema en ese estado tenga que esperar no más de t horas para recibir servicio. Nótese que estas probabilidades solo dependen en el estado y en la tasa de servicio ($\mu = 20$ por hora). En particular, si un cliente arriba cuando el sistema está en un estado $k \geq 1$, la probabilidad de que tenga que esperar más de t horas para recibir servicio es la probabilidad de que una variable Erlang con parámetro μ y k grados de libertad sea menor o igual a t. *I.e.:*

$$\mathbb{P}(\,W_q \leq t \mid X_t = k\,) \;=\; \mathbb{P}(\,\mathrm{Erlang}(\mu, k) \leq t\,) \;=\; 1 - \sum_{m=0}^{k-1} \frac{(\mu t)^k\, e^{-\mu t}}{k!}$$

De esta manera, tenemos:

Estado k	**Probabilidad $\mathbb{P}(W_k \leq t)$**
0	1
1	$\approx$1.000
2	0.9995
3	0.9972
4	0.9896
5	0.9707
6	0.9329
7	0.8698

Con estos datos a la mano, calculamos la probabilidad de que el tiempo de espera no exceda el límite deseado promediando las probabilidades condicionales de arriba por la distribución estacionaria de la cadena. *I.e.:*

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\, W_q \leq t \,) &= \sum_{k=0}^{7} \mathbb{P}(\, X_t = k \,)\, \mathbb{P}(\, W_q \leq t \mid X_t = k \,) \\ &= \sum_{k=0}^{7} \pi_k \, \mathbb{P}(\, W_q \leq t \mid X_t = k \,)\end{aligned}$$

Ahora que entendemos los requerimientos en términos de teoría de colas, analizamos el caso de cada tasa de arribo.

- Para el caso cuando $\lambda = 10$ por hora, tenemos:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[L_q] &= 0.473 < 1 \\ \pi_6 + \pi_7 &= 0.012 < 0.05 \\ \mathbb{P}(\, W_q \leq t = 0.5 \,) &= 0.9989 > 0.99\end{aligned}$$

- Para el caso cuando $\lambda = 15$ por hora, tenemos:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[L_q] &= 1.365 > 1 \\ \pi_6 + \pi_7 &= 0.082 < 0.05 \\ \mathbb{P}(\, W_q \leq t = 0.5 \,) &= 0.9849 < 0.99\end{aligned}$$

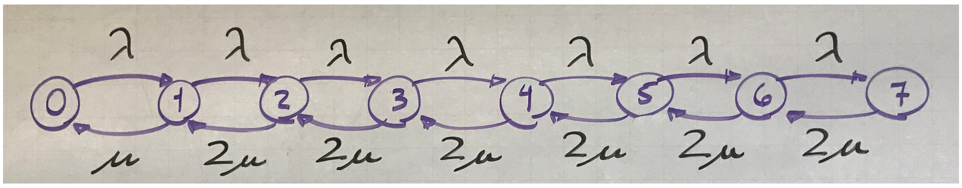
- Para el caso cuando $\lambda = 25$ por hora, tenemos:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[L_q] &= 3.635 > 1 \\ \pi_6 + \pi_7 &= 0.429 > 0.05 \\ \mathbb{P}(\, W_q \leq t = 0.5 \,) &= 0.9431 < 0.99\end{aligned}$$

En conclusión, con una sola pista de aterrizaje el aeropuerto satisface los requerimientos de la FAA solo cuando la tasa de arribo es de $\lambda = 10$ aviones por hora.

c) 2 Puntos: Suponga que se construye otra pista de aterrizaje. Recalcule la distribución estacionaria del sistema para los casos cuando la tasa de arribo es de $\lambda = 10$ por hora, $\lambda = 15$ por hora, y $\lambda = 25$ por hora.

Solución: Como ahora hay dos pistas de aterrizaje, este problema corresponde a un modelo M/M/2/7 cuya tasa de servicio por pista es de $\mu = 20$ aeronaves por hora. Luego podemos bosquejar la Cadena de Markov correspondiente, tal como se muestra en la siguiente fotografía.



Para esta cadena, definiendo $\rho \triangleq \lambda/(2\mu)$, tenemos:

$$\begin{aligned} \lambda = 10 \quad &\Longrightarrow \quad \rho = 0.250 \\ \lambda = 15 \quad &\Longrightarrow \quad \rho = 0.375 \\ \lambda = 25 \quad &\Longrightarrow \quad \rho = 0.625 \end{aligned}$$

Las ecuaciones de balance son:

$$\begin{aligned}
&E_0 \,:\, \lambda\,\pi_0 \;=\; \mu\,\pi_1 \quad \Longrightarrow \quad \pi_1 \;=\; 2\,\rho\,\pi_0 \\
&E_1 \,:\, (\lambda+\mu)\,\pi_1 \;=\; \lambda\,\pi_0 + 2\,\mu\,\pi_2 \quad \Longrightarrow \quad \pi_2 \;=\; 2\,\rho^2\,\pi_0 \\
&E_2 \,:\, (\lambda+2\mu)\,\pi_2 \;=\; \lambda\,\pi_1 + 2\,\mu\,\pi_3 \quad \Longrightarrow \quad \pi_3 \;=\; 2\,\rho^3\,\pi_0 \\
&\vdots \\
&E_k \,:\, (\lambda+2\mu)\,\pi_k \;=\; \lambda\,\pi_{k-1} + 2\,\mu\,\pi_{k+1} \quad \Longrightarrow \quad \pi_{k+1} \;=\; 2\,\rho^{k+1}\,\pi_0 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Ahora normalizamos para hallar la probabilidad del estado cero:

$$\pi_0 + 2\,\pi_0 \sum_{k=1}^{7} \rho^k \;=\; 1 \quad \Longrightarrow \quad \pi_0 \;=\; \left(1 + 2\sum_{k=1}^{7} \rho^k\right)^{-1}$$

Con esta probabilidad a la mano es fácil computar las siguienes, puesto que $\pi_1 = 2\,\rho\,\pi_0$ y que para todo $k \geq 2$ es el caso que:

$$\pi_k \;=\; \rho\,\pi_{k-1}$$

Consecuentemente:

Estado i	π_i $(\lambda = 10)$	π_i $(\lambda = 15)$	π_i $(\lambda = 25)$
0	0.600	0.455	0.238
1	0.300	0.341	0.298
2	0.075	0.128	0.186
3	0.019	0.048	0.116
4	0.005	0.018	0.073
5	0.001	0.007	0.045
6	≈0.000	0.003	0.028
7	≈0.000	0.001	0.018

d) 2 Puntos: Para cada uno de los tres casos anteriores, evalúe si se cumplen o no los requisitos de la FAA.

Solución: Los requisitos de la FAA se traducen de la siguiente manera:

- El primer requerimiento equivale a exigir que el número promedio de clientes en cola sea menor o igual a uno. *I.e.:*

$$\mathbb{E}[L_q] \;=\; \mathbb{E}[\,\max\{\,0, X_t - 2\}\,] \;=\; \sum_{k=0}^{7} \pi_k \,\max\{0, k-2\} \;\leq\; 1$$

- Como en este caso tenemos dos servidores, el segundo requerimiento exige que la probabilidad de que el estado del sistema sea menor o igual a seis debe ser mayor o igual al 95%. *I.e.:*

$$\pi_0 + \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \pi_4 + \pi_5 + \pi_6 \;\geq\; 0.95 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \pi_7 \;\leq\; 0.05$$

- El tercer requerimiento es igual al caso anterior, excepto que ahora la tasa de servicio efectia es de $2\mu = 40$ aviones por hora. Con esta nueva tasa, tenemos:

Estado k	**Probabilidad $\mathbb{P}(W_k \leq t)$**
0	1
1	1
2	≈ 1.000
3	≈ 1.000
4	≈ 1.000
5	≈ 1.000
6	≈ 1.000
7	0.9999

  Nótese que sin importar el estado, la probabilidad de que el tiempo de espera no exceda el límite siempre es mayor al 99%. Consecuentemente, concluímos que sin importar la tasa de arribo, el tercer requerimiento siempre se cumple.

Ahora que entendemos los requerimientos en términos de teoría de colas, analizamos el caso de cada tasa de arribo.

- Para el caso cuando $\lambda = 10$ por hora, tenemos:

$$\mathbb{E}[L_q] \;=\; 0.032 < 1$$
$$\pi_7 \;=\; 0.000 < 0.05$$

- Para el caso cuando $\lambda = 15$ por hora, tenemos:

$$\mathbb{E}[L_q] \;=\; 0.122 < 1$$
$$\pi_7 \;=\; 0.001 < 0.05$$

- Para el caso cuando $\lambda = 25$ por hora, tenemos:

$$\mathbb{E}[L_q] \;=\; 0.599 < 1$$
$$\pi_7 \;=\; 0.018 < 0.05$$

En conclusión, con dos pistas de aterrizaje el aeropuerto satisface los requerimientos de la FAA sin importar la tasa de arribo.

Problema 3.2. **[8 Puntos]** El lunes, cierta acción cerró a 10 dólares. El martes se espera que la acción cierre a 9, 10 u 11 dólares, con probabilidades respectivas de 0.3, 0.3 y 0.4. El miércoles, se espera que la acción cierre 10% abajo, sin cambio o 10% arriba del cierre del martes, con las siguientes probabilidades:

Cierre de hoy	10% abajo	Sin cambio	10% arriba
$ 9	0.4	0.3	0.3
$10	0.2	0.2	0.6
$11	0.1	0.2	0.7

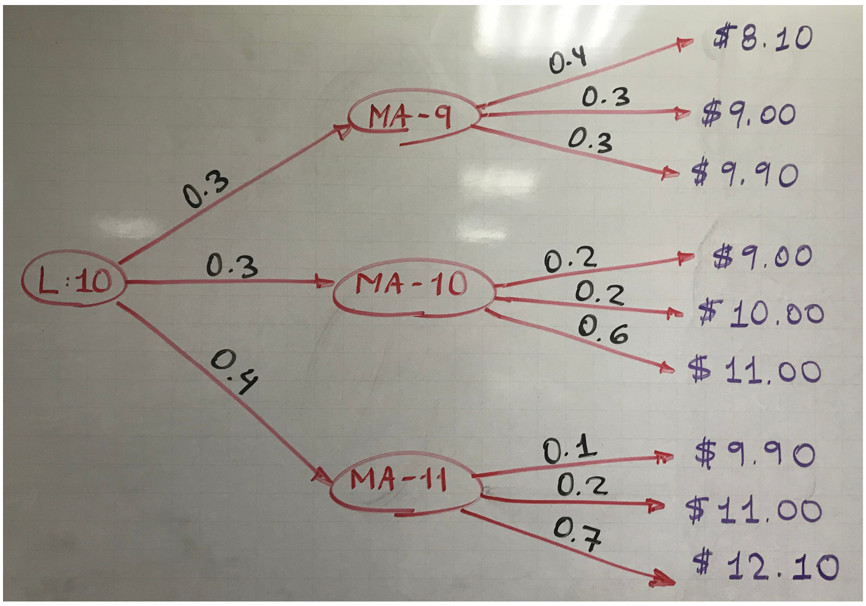
El martes recibe instrucciones de comprar 100 acciones antes del jueves. Todas las compras se hacen al final del día, al precio de cierre conocido de ese día, de manera que sus únicas opciones son comprar al final del martes o al final del miércoles. Usted quiere determinar una estrategia óptima: comprar el martes o aplazar la compra hasta el miércoles, dado el precio al cierre del martes, con el fin de minimizar el precio esperado de compra. Desarrolle y evalúe un árbol de decisión para determinar la estrategia óptima.

Clarificación: Si usted entendió que la decisión de comprar el martes o el miércoles debe ser tomada de antemano, por favor siga la Solución A. En cambio, si usted entendió, correctamente, que se puede tomar una decisión el martes dependiendo del precio de la acción al cierre de ese día, por favor siga la Solución B.

Solución A: En este problema nuestro objetivo es minimizar el costo de compra de las acciones, *i.e.,* buscamos comprarlas al menor precio posible. Para esto, primero supongamos que se decide de antemano realizar la compra el martes. Entonces el precio esperado es:

$$(\$9)(0.3) + (\$10)(0.3) + (\$11)(0.4) \ = \ \$10.10$$

Consecuentemente, el costo esperado de la compra sería de \$1010. En cambio, si se decide de antemano hacer la compra el miércoles, el árbol de probabilidad de precios de de cierre es como se muestra en la siguiente fotografía.



Podamos el árbol calculando los costos esperados en los nodos MA-9, MA-10 y MA-11.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\text{MA-9}] &= (\$8.10)(0.4) + (\$9.00)(0.3) + (\$9.90)(0.3) = \$8.91 \\
\mathbb{E}[\text{MA-10}] &= (\$9.00)(0.2) + (\$10.00)(0.2) + (\$11.00)(0.6) = 10.40 \\
\mathbb{E}[\text{MA-11}] &= (\$9.90)(0.1) + (\$11.0)(0.2) + (\$12.10)(0.7) = \$11.66
\end{aligned}$$

Finalmente, calculamos el costo esperado del nodo L-10.

$$\mathbb{E}[\text{L-10}] = (\$8.91)(0.3) + (\$10.40)(0.3) + (\$11.66)(0.4) = \$10.46$$

Vemos así que el costo esperado de la compra en este caso sería de \$1046, *i.e.,* \$36 más de lo que costaría comprarla el martes. Concluímos así que la estrategia óptima es comprar las acciones el martes.

Solución B: Nuevamente, si se decide de antemano que se va a realizar la compra el día martes, el precio esperado es:

$$(\$9)(0.3) + (\$10)(0.3) + (\$11)(0.4) = \$10.10$$

Consecuentemente, el costo esperado de la compra sería de \$1010. En cambio, considerando cada uno de los posibles precios de cierre del martes, vemos que:

- Si el precio es de \$9.00 entonces estamos en el nodo MA-9, cuyo precio esperado de cierre el miércoles es de \$8.91, tal como se calculó anteriormente. En este caso la acción óptima es esperar hasta el miércoles.
- Si el precio es de \$10.00 entonces estamos en el nodo MA-10, cuyo precio esperado de cierre el miércoles es de \$10.40. En este caso la acción óptima es comprar la acción el mismo martes al precio de \$10.00.
- Si el precio es de \$11.00 entonces estamos en el nodo MA-11, cuyo precio esperado de cierre el miércoles es de \$11.66. En este caso la acción óptima es comprar la acción el mismo martes al precio de \$11.00.

De esta manera, el precio esperado de compra es:

$$(\$8.91)(0.3) + (\$10.00)(0.3) + (\$11.00)(0.4) = \$10.07$$

Vemos así que el costo esperado de la compra en este caso sería de \$1007, *i.e.,* \$3 menos de lo que costaría comprarla el martes sin considerar el precio de cierre. Concluímos así que la estrategia óptima es:

- Si el precio de cierre del martes es de \$9.00, esperar hasta el miércoles para comprar.
- Caso contarrio, *i.e.,* si el precio de cierre del martes es de \$10.00 u \$11.00, comprar el mismo martes.