Modelos Estocásticos para Manufactura y Servicios (INDG-1008): **Unidad 01**

Luis I. Reyes Castro

Escuela Superior Politécnica del Litoral (ESPOL)
Guayaquil - Ecuador

2017 - Primer Término

Contenido del Tema

Contenido del Tema

Repaso de Variables Aleatorias

Valor Esperado:

- Si X es una variable aleatoria discreta entonces

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{x \,\in\, \text{soporte}(X)} x\, \mathbb{P}(x)$$

  donde la sumatoria es sobre todos los valores que puede tomar X.

- Si X es una variable aleatoria continua entonces

$$\mathbb{E}[X] = \int_{x \,\in\, \text{soporte}(X)} x\, f(x)\, dx$$

  donde la integración es sobre todos los valores que puede tomar X.

- Si X, Y son variables aleatorias y a, b son constantes entonces:

$$\mathbb{E}[\, aX + bY \,] = a\,\mathbb{E}[X] + b\,\mathbb{E}[Y]$$

Independecia de Variables Aleatorias:

- Decimos que las variables aleatorias discretas X, Y son independientes si para todo posible par de valores (x, y) que las variables aleatorias pueden tomar es el caso que:

$$\mathbb{P}(\, X = x,\ Y = y \,) \,=\, \mathbb{P}(\, X = x \,)\, \mathbb{P}(\, Y = y \,)$$

- Si X, Y son variables aleatorias independientes entonces:

$$\mathbb{E}[XY] \,=\, \mathbb{E}[X]\, \mathbb{E}[Y]$$

  Nótese que esta relación en general no es válida par variables aleatorias dependientes.

Condicionalmiento:

- Si X, Y son dos variables aleatorias entonces la probabilidad del valor x de la primera variable condicional en el valor y de la segunda esta dado por:

$$\mathbb{P}(\, x \mid y \,) \;=\; \frac{\mathbb{P}(\, X = x,\; Y = y)}{\mathbb{P}(\, Y = y\,)}$$

- Claramente, si X, Y son variables aleatorias independientes entonces para todo valor x de la primera variable y todo valor y de la segunda:

$$\mathbb{P}(\, x \mid y \,) \;=\; \mathbb{P}(x)$$

- Si X, Y son dos variables aleatorias entonces para todo valor y de la segunda variable aleatoria:

$$\mathbb{E}[\, X \mid y\,] = \sum_{x \,\in\, \text{soporte}(X)} x \, \mathbb{P}(\, x \mid \, y)$$

- Si X, Y son dos variables aleatorias entonces:

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[\,\mathbb{E}[\, X \mid Y\,]] = \sum_{y \,\in\, \text{soporte}(Y)} \mathbb{E}[\, X \mid y\,] \, \mathbb{P}(y)$$

Repaso de Variables Aleatorias

Variable Aleatoria Geométrica:

- Tenemos dos tipos, denotadas $\mathrm{Geo}(p; \mathbb{Z}_{\geq 0})$ y $\mathrm{Geo}(p; \mathbb{N})$.
- $\mathrm{Geo}(p; \mathbb{Z}_{\geq 0})$ representa el número de ensayos que tenemos que realizar hasta obtener el primer experimento exitoso, por lo que toma valores en los enteros no-negativos. Si $X \sim \mathrm{Geo}(p; \mathbb{Z}_{\geq 0})$ entonces:

$$\mathbb{E}[X] = \frac{1-p}{p} \qquad \mathrm{var}(X) = \frac{1-p}{p^2}$$

- $\mathrm{Geo}(p; \mathbb{N})$ representa el índice del ensayo que resultó en el primer experimento exitoso, por lo que toma valores en los números naturales. Si $X \sim \mathrm{Geo}(p; \mathbb{N})$ entonces:

$$\mathbb{E}[X] = \frac{1}{p} \qquad \mathrm{var}(X) = \frac{1-p}{p^2}$$

Contenido del Tema

Ejemplo:

En una fábrica una máquina tiene un componente que usualmente debe ser reemplazado. A pesar de que reemplazar el componente toma unos pocos minutos al final de la jornada de trabajo, cada día de operación de la máquina el componente se puede dañar con probabilidad p, independientemente de lo que haya pasado antes. Con esto en mente:

- Cuántas veces a la semana, en promedio, tendrán que reemplazar el componente?
- Si han pasado cuatro días desde la última vez que se cambió en componente, cuál es la probabilidad de que se dañe mañana?

Proceso Bernoulli

Proceso Bernoulli con parámetro p:

- Es una secuencia de variables aleatorias Bernoulli con parámetro p independientes e indénticamente distribuidas que representan la presencia o ausencia de arribos.
- Formalmente es una secuencia de variables aleatorias $X_1, X_2, X_3, X_4, \ldots$ donde:
  - Para todo índice i tenemos que $X_i \sim \text{Bernoulli}(p)$.
  - Para todo par de índices i, j es el caso que X_i es independiente de X_j.
- Ocurre un arribo en el período t si $X_t = 1$; caso contrario no ocurrió un arribo en ese período.
- Claramente, el número esperado de arribos a lo largo de n períodos es:

$$\mathbb{E}\left[\sum_{t=1}^{n} X_t\right] = \sum_{t=1}^{n} \mathbb{E}[\, X_t \,] = np$$

Proceso Bernoulli

Tiempo entre arribos:

- Para todo índice i la variable aleatoria T_i representa el número de períodos que transcurrieron desde el i^{avo} arribo hasta el $(i+1)^{\text{avo}}$ arribo.
  - Nótese que soporte$(T_i) = \mathbb{Z}_{\geq 0}$.
- Cuál es la distribución de T_1? *I.e.*, para cada valor $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, cuál es la probabilidad de que $T_1 = k$?
  - Claramente $k = 0$ con probabilidad p.
  - Si $k = 1$ entonces $X_1 = 0$ y $X_2 = 1$, *i.e.*, en el primer período no hubo un arribo y en el segundo período hubo un arribo, lo cual sucede con probabilidad $(1-p)\,p$.
  - Si $k = 2$ entonces $X_1 = 0$, $X_2 = 0$ y $X_3 = 1$, lo cual sucede con probabilidad $(1-p)^2\,p$.

Proceso Bernoulli

- Continuando por inducción matemática, vemos que:

$$\forall\, k \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \,:\; \mathbb{P}(\, T_1 = k \,) \,=\, (1-p)^k\, p \quad \iff \quad T_1 \sim \mathrm{Geo}(p; \mathbb{Z}_{\geq 0})$$

- **Teorema:** Para cada índice i es el caso que $T_i \sim \mathrm{Geo}(p; \mathbb{Z}_{\geq 0})$.
- **Corolario:** En un proceso Bernoulli con parámetro p los tiempos entre arribos constituyen una secuencia de variables aleatorias independientes e identicamente distribuidas; en particular, con distribución geométrica con parámetro p soportada en $\mathbb{Z}_{\geq 0}$.

Proceso Bernoulli

Número de arribos en un intervalo:

- Si para todo índice i denotamos a la variable aleatoria N_i como el número de arribos desde el comienzo del proceso hasta el i^{avo} periodo, entonces:

$$N_i = \sum_{k=1}^{i} X_k$$

- *I.e.*, la variable aleatoria N_i es la suma de i variables aleatorias independientes e identicamente distribuidas (IID).
- **Teorema:** Para cada índice i es el caso que $N_i \sim \text{Binomial}(i, p)$.
- **Corolario:** En un proceso Bernoulli con parámetro p el número de arribos a lo largo de un intervalo de n períodos es una variable aleatoria con distribución binomial con parámetros n y p.

Proceso Bernoulli

Combinación de Procesos Bernoulli:

- Supongamos que tenemos dos procesos Bernoulli independientes.
  - El primero tiene parámetro p.
  - El segundo tiene parámetro q.
- Consideremos un nuevo proceso donde se produce un arribo si y solo si ocurre un arribo en ambos procesos.
  - Los arribos en el nuevo proceso son independientes entre si, pues en cada período solo dependen en los arribos de los procesos generadores, los cuales no dependen de arribos en tiempos anteriores.
  - La probabilidad de un arribo en el nuevo proceso es el producto de las probabilidades de arribo en cada proceso generador, pues los procesos generadores son independientes.
  - En conclusión el nuevo proceso es un proceso Bernoulli con parámetro pq.

Proceso Bernoulli

- Consideremos un nuevo proceso donde se produce un arribo si y solo si ocurre un arribo en alguno de los dos procesos.
  - Los arribos en el nuevo proceso son independientes entre si, pues en cada período solo dependen en los arribos de los procesos generadores, los cuales no dependen de arribos en tiempos anteriores.
  - La probabilidad de un arribo en el nuevo proceso es uno menos la probabilidad de que no haya un arribo, la cual es el producto de las probabilidades de que no hayan arribos en cada uno de los procesos generadores, pues los procesos generadores son independientes.
  - En conclusión el nuevo proceso es un proceso Bernoulli con parámetro $1 - (1 - p)(1 - q)$.

Proceso Bernoulli

División de Procesos Bernoulli:

- Supongamos que tenemos un proceso Bernoulli con parámetro p que genera dos procesos.
- En cada período:
  - Si el proceso principal produce un arribo, lanzamos una moneda sesgada con probabilidad de cara igual a q.
  - Si la moneda sale cara enviamos el arribo al primer proceso.
  - Si la moneda sale sello enviamos el arribo al segundo proceso.
- Entonces:
  - El primer proceso será un proceso Bernoulli con parámetro $p\,q$.
  - El segundo proceso será un proceso Bernoulli con parámetro $p\,(1-q)$.

Contenido del Tema

Proceso Poisson

Proceso Poisson con parámetro λ:

- Es una secuencia de variables aleatorias exponenciales con parámetro λ independientes e idénticamente distribuidas que representan los tiempos entre arribos.
- Formalmente es una secuencia de variables aleatorias $X_1, X_2, X_3, X_4, \ldots$ donde:
  - Para todo índice i tenemos que $X_i \sim \mathbb{E}(\lambda)$.
  - Para todo par de índices i, j es el caso que X_i es independiente de X_j.
- El proceso empieza en el tiempo cero, *i.e.*, $t = 0$.
- El primer arribo ocurre en el tiempo $t = X_1$, el segundo en el tiempo $t = X_1 + X_2$, y así sucesivamente; *i.e.*, el i^{avo} arribo ocurre en:

$$t = X_1 + \cdots + X_i = \sum_{k=1}^{i} X_k$$

Problema - H&L 17.4-3:

El tiempo que requiere un mecánico para reparar una máquina tiene una distribución exponencial con media de 4 horas. Sin embargo, una herramienta especial reduciría esta media a 2 horas. Si el mecánico repara una máquina en menos de 2 horas, se le pagan \$100; de otra manera se le pagan \$80. Determine el aumento esperado en el pago del mecánico si usa esta herramienta especial.

Resolución:

- Si denotamos a X como el tiempo que demora el mecánico en arreglar una máquina actualmente entonces:

$$X \sim \text{Exponencial}(\lambda = 0.25)$$

- Pago del mecánico actualmente:
  - Si $0 \leq X \leq 2$ gana \$100, lo cual sucede con probabilidad:

$$\int_{t=0}^{2} \lambda\, e^{-\lambda\, t} dt \;=\; \int_{t=0}^{2} 0.25\, e^{-0.25\, t} dt \;=\; 0.393469$$

  - Si $X > 2$ gana \$80, lo cual sucede con probabilidad:

$$1 - 0.393469 = 0.606531$$

- Consecuentemente el pago esperado es:

$$\$100\,(0.393469) + \$80\,(0.606531) \;=\; \$87.87$$

- Luego, con la nueva máquina tenemos que:

$$X \sim \text{Exponencial}(\lambda = 0.5)$$

- Pago del mecánico con la nueva máquina:
  - Si $0 \leq X \leq 2$ gana \$100, lo cual sucede con probabilidad:

$$\int_{t=0}^{2} \lambda\, e^{-\lambda\, t} dt \;=\; \int_{t=0}^{2} 0.50\, e^{-0.50\, t} dt \;=\; 0.632121$$

Proceso Poisson

- Si $X > 2$ gana \$80, lo cual sucede con probabilidad:

$$1 - 0.632121 = 0.367879$$

- Consecuentemente el pago esperado es:

$$\$100\,(0.632121) + \$80\,(0.367879) \;=\; \$92.64$$

- Finalmente, el aumente en el pago del mecánico gracias a que usa la nueva máquina es de \$4.67.

Proceso Poisson

Combinación de Procesos Poisson:

- Supongamos que tenemos dos procesos Poisson independientes.
  - El primero tiene parámetro λ_1.
  - El segundo tiene parámetro λ_2.
- Consideremos un nuevo proceso que combina los arribos de los dos procesos anteriores.
- Entonces el nuevo proceso es un proceso Poisson con parámetro $\lambda_1 + \lambda_2$.

Proceso Poisson

División de Procesos Poisson:

- Supongamos que tenemos un proceso Poisson con parámetro λ que genera dos procesos.
- En cada instante:
  - Si el proceso principal produce un arribo, lanzamos una moneda sesgada con probabilidad de cara igual a p.
  - Si la moneda sale cara enviamos el arribo al primer proceso.
  - Si la moneda sale sello enviamos el arribo al segundo proceso.
- Entonces:
  - El primer proceso será un proceso Poisson con parámetro $\lambda\, p$.
  - El segundo proceso será un proceso Poisson con parámetro $\lambda\,(1-p)$.

Contenido del Tema

Elementos Constitutivos:

- Conjunto finito de n estados, donde cada estado es una representación de una posible situación de interés.
- Matriz de transición $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ donde para cada par de estados i, j la entrada (i, j) de la matriz, *i.e.*, aquella en la i^{ava} fila y j^{ava} columna, es la probabilididad, cuando el estado actual es i, de hacer una transición al estado j.

Definición Formal:

- Es una secuencia de variables aleatorias discretas $X_0, X_1, X_2, X_3, \ldots$ donde para cada índice de tiempo discreto t la variable aleatoria X_t es el estado del proceso en el tiempo t.

- Tiene la Propiedad Markoviana, *i.e.*, que para cualquier historia de $t+1$ estados $i_0, i_1, \ldots, i_t$ y cualquier posible estado futuro i_{t+1}:

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}(\, X_{t+1} = i_{t+1} \mid X_0 = i_0, X_1 = i_1, \ldots, X_t = i_t \,) \\ &= \mathbb{P}(\, X_{t+1} = i_{t+1} \mid X_t = i_t \,) \end{aligned}$$

  - Fíjese que por definición de la matriz de transición P:

$$P(i,j) = \mathbb{P}(\, X_{t+1} = j \mid X_t = i \,)$$

Ejemplo de Clima (H&L, Sección 16.1):

El clima en el pueblo de Centerville puede cambiar con rapidez de un día a otro. Sin embargo, las posibilidades de tener clima seco (sin lluvia) mañana es de alguna forma mayor si hoy está seco, es decir, si no llueve. En particular, la probabilidad de que mañana este seco es de 0.8 si hoy está seco, pero es de solo 0.6 si hoy llueve. Estas probabilidades no cambian si se considera la información acerca del clima en los días anteriores a hoy.

Modele este proceso climático como una Cadena de Markov.

Ejemplo (H&L, Sección 16.1):

La tienda de fotografía de Dave tiene el siguiente problema de inventario. El negocio tiene en almacén un modelo especial de cámara que se puede solicitar cada semana. Sean $D_1, D_2, D_3, \ldots$ las demandas respectivas de esta cámara, *i.e.,* el número de unidades que se venderían si el inventario no se agota, durante la cada semana. Suponga que las D_t son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas que tienen una distribución Poisson con media de 1. Defina a X_0 como el número de cámaras que se tiene en el momento de iniciar el proceso, y para cada t defina a la variable aleatoria X_t como número de cámaras que se tienen al final de la semana t.

Cadenas de Markov

Dave desearáa aprender más acerca de cómo evoluciona este proceso estocástico a través del tiempo mientras se utiliza la política de pedidos actual: Al final de la t^{ava} semana, el sábado en la noche, la tienda hace un pedido que le entregan en el momento de abrir la tienda, el lunes en la mañana. La política es:

- Si $X_t = 0$, ordena 3 cámaras.
- Caso contrario, *i.e.*, si $X_t > 0$, no ordena ninguna cámara.

Modele esta política de inventario como una Cadena de Markov.

Propagación de Estados

- Supongamos que el estado inicial de una Cadena de Markov no es conocido a priori sino que obedece una distribución inicial $\boldsymbol{\pi_0} \in \mathbb{R}^n$, donde:

$$\forall i: \; \boldsymbol{\pi_0}(i) \, = \, \mathbb{P}(\, X_0 = i \,)$$

- Como caso especial, si el estado inicial fuere i_0, entonces la distribución inicial sería:

$$\boldsymbol{\pi_0}(i_0) \, = \, 1; \qquad \forall i \neq i_0 : \; \boldsymbol{\pi_0}(i) \, = \, 0;$$

- Entonces, si denotamos a $\boldsymbol{\pi_1}$ como la distribución del primer estado, tenemos que para todo estado i_1 :

$$\begin{aligned}
\forall i: \ \boldsymbol{\pi_1}(i_1) \ = \ \mathbb{P}(\, X_1 = i_1 \,) \ &= \ \sum_{i_0=1}^{n} \mathbb{P}(\, X_0 = i_0 \,)\, \mathbb{P}(\, X_1 = i_1 \mid X_0 = i_0 \,) \\
&= \ \sum_{i_0=1}^{n} \boldsymbol{\pi_0}(i_0)\, P(i_0, i_1) \\
&\Longrightarrow \ \boldsymbol{\pi_1} \ = \ \boldsymbol{\pi_0}\, P
\end{aligned}$$

- Más aún, para cualquier número de tiempos t :

$$\boldsymbol{\pi_t} \ = \ \boldsymbol{\pi_{t-1}}\, P \ = \ \boldsymbol{\pi_{t-2}}\, P^2 \ = \ \cdots \ = \ \boldsymbol{\pi_0}\, P^t$$