
Programación Entera (INDG-1019): Taller 02

Semestre: 2018-2019 Término I

Instructor: Luis I. Reyes Castro

Problema 2.1. El dueño de un nuevo centro comercial ha recibido ofertas por parte de varias empresas interesadas en alquilar locales comerciales. En particular:

- El centro comercial tiene p pisos, y cada piso puede albergar hasta ℓ locales comerciales.
- Existen m empresas diferentes interesadas en alquilar locales comerciales en el centro. Para cada empresa $i \in \llbracket p \rrbracket$ y cada piso $j \in \llbracket p \rrbracket$ denotamos al precio ofertado por esa empresa para alquilar un local en ese piso como u_{ij} . Las empresas se clasifican de acuerdo a su tipo de negocio:

Tipo de Negocio	Símbolo
Ropa	RP
Muebles o Electrodomésticos	ME
Bienes Inmuebles	BI
Deportes y Salud	DS
Lectura y Arte	LA
Comida	C
Banco (Servicios Bancarios)	BK
Servicios al Cliente o Técnicos	SCT

El dueño del negocio desea maximizar sus ganancias por alquiler de locales comerciales sujeto a las siguientes restricciones:

- En todo piso donde haya tres o más locales de servicios al cliente o técnicos (SCT) debe haber al menos un banco (BK).
- En todo piso donde haya cinco o más locales de ropa (R) debe haber al menos un local de deportes y salud (DS) y un local de lectura y artes (LA).
- En ningún piso pueden haber locales de comida (C) y bancos (BK).
- Todos los locales de comida (C) deben estar concentrados en el mismo piso, el cual pasará a contener la Plaza de Comidas del centro comercial.
- En todo piso donde haya al menos un local de bienes inmuebles (BI) debe haber al menos (i) tres locales de muebles o electrodomésticos (ME) y un banco (BK), o (ii) dos locales de ropa (R) y dos locales de lectura y arte (LA).

Con todo esto en mente, escriba el problema de decisión del dueño del centro comercial como un Programa Lineal Entero (PLE). ■

Solución A: Primero definimos una variable binaria para cada piso $i \in \llbracket p \rrbracket$ y empresa $j \in \llbracket m \rrbracket$, denotada x_{ij} , que toma el valor uno si y solo si en ese piso se le alquila un local a esa empresa. Segundo, modelamos las restricciones impuestas:

- [Literal anulado porque fue utilizado de ejemplo]**

Restricción: En todo piso donde haya tres o más locales de servicios al cliente o técnicos (SCT) debe haber al menos un banco (BK).

Implementación:

-
- Introducimos una variable binaria indicadora para cada piso:

$$\forall i \in \llbracket p \rrbracket : a_i \in \{0, 1\}$$

- Introducimos una restricción para cada piso $i \in \llbracket p \rrbracket$ tal que si $x_{ij} = 1$ para tres o más empresas $j \in \text{SCT}$ entonces $a_i = 1$. Más precisamente:

$$\forall i \in \llbracket p \rrbracket : \sum_{j \in \text{SCT}} x_{ij} \leq 2 + (\ell - 2) a_i$$

- Introducimos una restricción para cada piso $i \in \llbracket p \rrbracket$ tal que si $a_i = 1$ entonces $x_{ij} = 1$ para al menos una empresa $j \in \text{BK}$. Más precisamente:

$$\forall i \in \llbracket p \rrbracket : a_i \leq \sum_{j \in \text{BK}} x_{ij}$$

b) [4 Puntos]

Restricción: En todo piso donde haya cinco o más locales de ropa (R) debe haber al menos un local de deportes y salud (DS) y un local de lectura y artes (LA).

Implementación:

- Introducimos una variable binaria indicadora para cada piso:

$$\forall i \in \llbracket p \rrbracket : a_i \in \{0, 1\}$$

- Introducimos una restricción para cada piso $i \in \llbracket p \rrbracket$ tal que si $x_{ij} = 1$ para cinco o más empresas $j \in \text{R}$ entonces $a_i = 1$. Más precisamente:

$$\forall i \in \llbracket p \rrbracket : \sum_{j \in \text{R}} x_{ij} \leq 4 + (\ell - 4) a_i$$

- Introducimos una restricción para cada piso $i \in \llbracket p \rrbracket$ tal que si $a_i = 1$ entonces $x_{ij} = 1$ para al menos una empresa $j \in \text{DS}$. Más precisamente:

$$\forall i \in \llbracket p \rrbracket : a_i \leq \sum_{j \in \text{DS}} x_{ij}$$

- Introducimos una restricción para cada piso $i \in \llbracket p \rrbracket$ tal que si $a_i = 1$ entonces $x_{ij} = 1$ para al menos una empresa $j \in \text{LA}$. Más precisamente:

$$\forall i \in \llbracket p \rrbracket : a_i \leq \sum_{j \in \text{LA}} x_{ij}$$

c) [4 Puntos]

Restricción: En ningún piso pueden haber locales de comida (C) y bancos (BK).

Implementación:

- Introducimos un par de variables binarias indicadoras para cada piso:

$$\forall i \in \llbracket p \rrbracket : a_i, b_i \in \{0, 1\}$$

-
- Introducimos una restricción o juego de restricciones para cada piso $i \in \llbracket p \rrbracket$ tal que si $x_{ij} = 1$ para al menos una empresa $j \in C$ entonces $a_i = 1$. Esto puede ser logrado de al menos dos maneras:

- Introduciendo la siguiente restricción:

$$\forall i \in \llbracket p \rrbracket : \sum_{j \in C} x_{ij} \leq |C| a_i$$

- Introduciendo el siguiente juego de restricciones:

$$\forall i \in \llbracket p \rrbracket, \forall j \in C : x_{ij} \leq a_i$$

- Introducimos una restricción o juego de restricciones para cada piso $i \in \llbracket p \rrbracket$ tal que si $x_{ij} = 1$ para al menos una empresa $j \in BK$ entonces $b_i = 1$. Esto puede ser logrado de al menos dos maneras:

- Introduciendo la siguiente restricción:

$$\forall i \in \llbracket p \rrbracket : \sum_{j \in BK} x_{ij} \leq |BK| b_i$$

- Introduciendo el siguiente juego de restricciones:

$$\forall i \in \llbracket p \rrbracket, \forall j \in BK : x_{ij} \leq b_i$$

- Introducimos una restricción para cada piso $i \in \llbracket p \rrbracket$ que impide que a_i y b_i tomen el valor uno simultáneamente. Más precisamente:

$$\forall i \in \llbracket p \rrbracket : a_i + b_i \leq 1$$

d) [3 Puntos]

Restricción: Todos los locales de comida (C) deben estar concentrados en el mismo piso, el cual pasará a contener la Plaza de Comidas del centro comercial.

Implementación:

- Introducimos una variable binaria indicadora para cada piso:

$$\forall i \in \llbracket p \rrbracket : a_i \in \{0, 1\}$$

- Introducimos una restricción o juego de restricciones para cada piso $i \in \llbracket p \rrbracket$ tal que si $x_{ij} = 1$ para al menos una empresa $j \in C$ entonces $a_i = 1$. Esto puede ser logrado de al menos dos maneras:

- Introduciendo la siguiente restricción:

$$\forall i \in \llbracket p \rrbracket : \sum_{j \in C} x_{ij} \leq |C| a_i$$

- Introduciendo el siguiente juego de restricciones:

$$\forall i \in \llbracket p \rrbracket, \forall j \in C : x_{ij} \leq a_i$$

-
- Introducimos una restricción tal que $a_i = 1$ para exactamente un solo piso $i \in \llbracket p \rrbracket$. Más precisamente:

$$\sum_{i \in \llbracket p \rrbracket} a_i = 1$$

e) [5 Puntos]

Restricción: En todo piso donde haya al menos un local de bienes inmuebles (BI) debe haber al menos (i) tres locales de muebles o electrodomésticos (ME) y un banco (BK), o (ii) dos locales de ropa (R) y dos locales de lectura y arte (LA).

Implementación:

- Introducimos un trío de variables binarias indicadoras para cada piso:

$$\forall i \in \llbracket p \rrbracket : a_i, b_i, c_i \in \{0, 1\}$$

- Introducimos una restricción o juego de restricciones para cada piso $i \in \llbracket p \rrbracket$ tal que si $x_{ij} = 1$ para al menos una empresa $j \in \text{BI}$ entonces $a_i = 1$. Esto puede ser logrado de al menos dos maneras:

– Introduciendo la siguiente restricción:

$$\forall i \in \llbracket p \rrbracket : \sum_{j \in \text{BI}} x_{ij} \leq |\text{BI}| a_i$$

– Introduciendo el siguiente juego de restricciones:

$$\forall i \in \llbracket p \rrbracket, \forall j \in \text{BI} : x_{ij} \leq a_i$$

- Introducimos un par de restricciones para cada piso $i \in \llbracket p \rrbracket$ tal que si $b_i = 1$ entonces $x_{ij} = 1$ para al menos tres empresas $j \in \text{ME}$ y al menos una empresa $j \in \text{BK}$. Más precisamente:

$$\forall i \in \llbracket p \rrbracket : 3 a_i \leq \sum_{j \in \text{ME}} x_{ij}$$

$$\forall i \in \llbracket p \rrbracket : 1 a_i \leq \sum_{j \in \text{BK}} x_{ij}$$

- Introducimos un par de restricciones para cada piso $i \in \llbracket p \rrbracket$ tal que si $c_i = 1$ entonces $x_{ij} = 1$ para al menos dos empresas $j \in \text{R}$ y al menos dos empresas $j \in \text{LA}$. Más precisamente:

$$\forall i \in \llbracket p \rrbracket : 2 a_i \leq \sum_{j \in \text{R}} x_{ij}$$

$$\forall i \in \llbracket p \rrbracket : 2 a_i \leq \sum_{j \in \text{LA}} x_{ij}$$

- Introducimos una restricción para cada piso $i \in \llbracket p \rrbracket$ tal que si $a_i = 1$ entonces $b_i = 1$ o $c_i = 1$. Más precisamente:

$$\forall i \in \llbracket p \rrbracket : a_i \leq b_i + c_i$$

Solución B: Primero definimos una variable binaria para cada empresa $i \in \llbracket m \rrbracket$ y piso $j \in \llbracket p \rrbracket$, denotada x_{ij} , que toma el valor uno si y solo si a esa empresa se le alquila un local en ese piso. Segundo, modelamos las restricciones impuestas:

a) [Literal anulado porque fue utilizado de ejemplo]

Restricción: En todo piso donde haya tres o más locales de servicios al cliente o técnicos (SCT) debe haber al menos un banco (BK).

Implementación:

- Introducimos una variable binaria indicadora para cada piso:

$$\forall j \in \llbracket p \rrbracket : a_j \in \{0, 1\}$$

- Introducimos una restricción para cada piso $j \in \llbracket p \rrbracket$ tal que si $x_{ij} = 1$ para tres o más empresas $i \in \text{SCT}$ entonces $a_j = 1$. Más precisamente:

$$\forall j \in \llbracket p \rrbracket : \sum_{i \in \text{SCT}} x_{ij} \leq 2 + (\ell - 2) a_j$$

- Introducimos una restricción para cada piso $j \in \llbracket p \rrbracket$ tal que si $a_j = 1$ entonces $x_{ij} = 1$ para al menos una empresa $i \in \text{BK}$. Más precisamente:

$$\forall j \in \llbracket p \rrbracket : a_j \leq \sum_{i \in \text{BK}} x_{ij}$$

b) [4 Puntos]

Restricción: En todo piso donde haya cinco o más locales de ropa (R) debe haber al menos un local de deportes y salud (DS) y un local de lectura y artes (LA).

Implementación:

- Introducimos una variable binaria indicadora para cada piso:

$$\forall j \in \llbracket p \rrbracket : a_j \in \{0, 1\}$$

- Introducimos una restricción para cada piso $j \in \llbracket p \rrbracket$ tal que si $x_{ij} = 1$ para cinco o más empresas $i \in \text{R}$ entonces $a_j = 1$. Más precisamente:

$$\forall j \in \llbracket p \rrbracket : \sum_{i \in \text{R}} x_{ij} \leq 4 + (\ell - 4) a_j$$

- Introducimos una restricción para cada piso $j \in \llbracket p \rrbracket$ tal que si $a_j = 1$ entonces $x_{ij} = 1$ para al menos una empresa $i \in \text{DS}$. Más precisamente:

$$\forall j \in \llbracket p \rrbracket : a_j \leq \sum_{i \in \text{DS}} x_{ij}$$

- Introducimos una restricción para cada piso $j \in \llbracket p \rrbracket$ tal que si $a_j = 1$ entonces $x_{ij} = 1$ para al menos una empresa $i \in \text{LA}$. Más precisamente:

$$\forall j \in \llbracket p \rrbracket : a_j \leq \sum_{i \in \text{LA}} x_{ij}$$

c) [4 Puntos]

Restricción: En ningún piso pueden haber locales de comida (C) y bancos (BK).

Implementación:

- Introducimos un par de variables binarias indicadoras para cada piso:

$$\forall j \in \llbracket p \rrbracket : a_j, b_j \in \{0, 1\}$$

- Introducimos una restricción o juego de restricciones para cada piso $j \in \llbracket p \rrbracket$ tal que si $x_{ij} = 1$ para al menos una empresa $i \in C$ entonces $a_j = 1$. Esto puede ser logrado de al menos dos maneras:

- Introduciendo la siguiente restricción:

$$\forall j \in \llbracket p \rrbracket : \sum_{i \in C} x_{ij} \leq |C| a_j$$

- Introduciendo el siguiente juego de restricciones:

$$\forall j \in \llbracket p \rrbracket, \forall i \in C : x_{ij} \leq a_j$$

- Introducimos una restricción o juego de restricciones para cada piso $j \in \llbracket p \rrbracket$ tal que si $x_{ij} = 1$ para al menos una empresa $i \in BK$ entonces $b_j = 1$. Esto puede ser logrado de al menos dos maneras:

- Introduciendo la siguiente restricción:

$$\forall j \in \llbracket p \rrbracket : \sum_{i \in BK} x_{ij} \leq |BK| b_j$$

- Introduciendo el siguiente juego de restricciones:

$$\forall j \in \llbracket p \rrbracket, \forall i \in BK : x_{ij} \leq b_j$$

- Introducimos una restricción para cada piso $j \in \llbracket p \rrbracket$ que impide que a_j y b_j tomen el valor uno simultáneamente. Más precisamente:

$$\forall j \in \llbracket p \rrbracket : a_j + b_j \leq 1$$

d) [3 Puntos]

Restricción: Todos los locales de comida (C) deben estar concentrados en el mismo piso, el cual pasará a contener la Plaza de Comidas del centro comercial.

Implementación:

- Introducimos una variable binaria indicadora para cada piso:

$$\forall j \in \llbracket p \rrbracket : a_j \in \{0, 1\}$$

- Introducimos una restricción o juego de restricciones para cada piso $j \in \llbracket p \rrbracket$ tal que si $x_{ij} = 1$ para al menos una empresa $i \in C$ entonces $a_j = 1$. Esto puede ser logrado de al menos dos maneras:

-
- Introduciendo la siguiente restricción:

$$\forall j \in \llbracket p \rrbracket : \sum_{i \in C} x_{ij} \leq |C| a_j$$

- Introduciendo el siguiente juego de restricciones:

$$\forall j \in \llbracket p \rrbracket, \forall i \in C : x_{ij} \leq a_j$$

- Introducimos una restricción tal que $a_j = 1$ para exactamente un solo piso $j \in \llbracket p \rrbracket$. Más precisamente:

$$\sum_{j \in \llbracket p \rrbracket} a_j = 1$$

e) [5 Puntos]

Restricción: En todo piso donde haya al menos un local de bienes inmuebles (BI) debe haber al menos (i) tres locales de muebles o electrodomésticos (ME) y un banco (BK), o (ii) dos locales de ropa (R) y dos locales de lectura y arte (LA).

Implementación:

- Introducimos un trío de variables binarias indicadoras para cada piso:

$$\forall j \in \llbracket p \rrbracket : a_j, b_j, c_j \in \{0, 1\}$$

- Introducimos una restricción o juego de restricciones para cada piso $j \in \llbracket p \rrbracket$ tal que si $x_{ij} = 1$ para al menos una empresa $i \in \text{BI}$ entonces $a_j = 1$. Esto puede ser logrado de al menos dos maneras:

- Introduciendo la siguiente restricción:

$$\forall j \in \llbracket p \rrbracket : \sum_{i \in \text{BI}} x_{ij} \leq |\text{BI}| a_j$$

- Introduciendo el siguiente juego de restricciones:

$$\forall j \in \llbracket p \rrbracket, \forall i \in \text{BI} : x_{ij} \leq a_j$$

- Introducimos un par de restricciones para cada piso $j \in \llbracket p \rrbracket$ tal que si $b_j = 1$ entonces $x_{ij} = 1$ para al menos tres empresas $i \in \text{ME}$ y al menos una empresa $i \in \text{BK}$. Más precisamente:

$$\forall j \in \llbracket p \rrbracket : 3 a_j \leq \sum_{i \in \text{ME}} x_{ij}$$

$$\forall j \in \llbracket p \rrbracket : 1 a_j \leq \sum_{i \in \text{BK}} x_{ij}$$

- Introducimos un par de restricciones para cada piso $j \in \llbracket p \rrbracket$ tal que si $c_j = 1$ entonces $x_{ij} = 1$ para al menos dos empresas $i \in \text{R}$ y al menos dos empresas $i \in \text{LA}$. Más precisamente:

$$\forall j \in \llbracket p \rrbracket : 2 a_j \leq \sum_{i \in \text{R}} x_{ij}$$

$$\forall j \in \llbracket p \rrbracket : 2 a_j \leq \sum_{i \in \text{LA}} x_{ij}$$

- Introducimos una restricción para cada piso $j \in \llbracket p \rrbracket$ tal que si $a_j = 1$ entonces $b_j = 1$ o $c_j = 1$. Más precisamente:

$$\forall i \in \llbracket p \rrbracket : a_j \leq b_j + c_j$$

Problema 2.2. Considere el problema de planificar la operación de una máquina a lo largo de un horizonte de T períodos. En cada periodo la máquina puede estar ocupada fabricando un lote de alguno de los m productos diferentes que puede producir, puede estar recibiendo mantenimiento, o puede estar sin trabajar. Para representar estas actividades, introducimos tres series temporales de variables binarias:

- Para cada periodo $t \in \llbracket T \rrbracket$ y cada producto $k \in \llbracket m \rrbracket$ la variable $x_{tk} = 1$ si y solo si en ese periodo la máquina fabricó ese producto.
- Para cada periodo $t \in \llbracket T \rrbracket$ la variable $y_t = 1$ si y solo si la máquina recibió mantenimiento durante ese periodo.
- Para cada periodo $t \in \llbracket T \rrbracket$ la variable $z_t = 1$ si y solo si la máquina no trabajó durante ese periodo.

Con todo esto en mente, escriba las siguientes restricciones temporales en el language de la Programación Lineal Entera (PLE).

- No se permite fabricar el producto 1 por más de dos períodos consecutivos.
- Si se fabrica el producto 1 por dos periodos consecutivos entonces la máquina debe recibir mantenimiento en el siguiente periodo.
- Si se fabrica el producto 2 por tres o más períodos consecutivos entonces la máquina debe descansar (*i.e.*, no trabajar) en el siguiente periodo.
- Si se fabrica el producto 3 entonces eventualmente la máquina debe descansar por un periodo y recibir mantenimiento en el posterior.
- Si se fabrica el producto 4 y se desea posteriormente fabricar el producto 5 entonces se debe dar mantenimiento a la máquina antes de fabricar el producto 5.

■

Solución:

- [2 Puntos]**

Restricción: No se permite fabricar el producto 1 por más de dos períodos consecutivos.

Implementación: Introducimos el siguiente juego de restricciones, donde $k = 1$:

$$\forall t \in \llbracket T - 2 \rrbracket : x_{t,k} + x_{t+1,k} + x_{t+2,k} \leq 2$$

- [2 Puntos]**

Restricción: Si se fabrica el producto 1 por dos periodos consecutivos entonces la máquina debe recibir mantenimiento en el siguiente periodo.

Implementación: Introducimos el siguiente juego de restricciones, donde $k = 1$:

$$\forall t \in \llbracket T - 1 \rrbracket : x_{t,k} + x_{t+1,k} \leq 1 + y_{t+2}$$

c) [3 Puntos]

Restricción: Si se fabrica el producto 2 por tres o más períodos consecutivos entonces la máquina debe descansar (*i.e.*, no trabajar) en el siguiente periodo.

Implementación: Introducimos el siguiente patrón de restricciones, donde $k = 2$:

$$\begin{aligned}\forall t \in \llbracket T-2 \rrbracket : \sum_{i=t}^{t+2} x_{i,k} &\leq 2 + x_{t+3,k} + z_{t+3} \\ \forall t \in \llbracket T-3 \rrbracket : \sum_{i=t}^{t+3} x_{i,k} &\leq 3 + x_{t+4,k} + z_{t+4} \\ \forall t \in \llbracket T-4 \rrbracket : \sum_{i=t}^{t+4} x_{i,k} &\leq 4 + x_{t+5,k} + z_{t+5} \\ &\dots\end{aligned}$$

d) [3 Puntos]

Restricción: Si se fabrica el producto 3 entonces eventualmente la máquina debe descansar por un periodo y recibir mantenimiento en el posterior.

Implementación: Fijamos $k = 3$. Luego:

- Introducimos la serie temporal de variables binarias $\{w_t\}_{t=1}^{T-2}$.
- Introducimos una restricción para cada periodo $t \in \llbracket T-2 \rrbracket$ tal que si $x_{t,k} = 1$ entonces eventualmente $w_t = 1$. Más precisamente:

$$\forall t \in \llbracket T-2 \rrbracket : x_{t,k} \leq \sum_{i=t+1}^{T-2} w_i$$

- Introducimos un par de restricciones para cada periodo $t \in \llbracket T-2 \rrbracket$ tal que si $w_t = 1$ entonces $z_{t+1} = 1$ y $y_{t+2} = 1$. Más precisamente:

$$\begin{aligned}\forall t \in \llbracket T-2 \rrbracket : w_t &\leq z_{t+1} \\ \forall t \in \llbracket T-3 \rrbracket : w_t &\leq y_{t+2}\end{aligned}$$

e) [Literal anulado por exhibir muy alta complejidad]

Restricción: Si se fabrica el producto 4 y se desea posteriormente fabricar el producto 5 entonces se debe dar mantenimiento a la máquina antes de fabricar el producto 5.

Implementación: Será mostrada en clase.