Programación Entera para Ingeniería (INDG-1019): **Juego de Diapositivas 01**

Luis I. Reyes Castro

Escuela Superior Politécnica del Litoral (ESPOL)
Guayaquil - Ecuador

2018 - Término I

Restricciones Lógicas y Combinatoriales

Considere un problema de decisión que contiene $m \geq 10$ variables binarias

$$x_1,\, x_2,\, x_3,\, \ldots,\, x_m \in \{0, 1\}$$

junto con otras variables adicionales. En los siguientes literales expresaremos una diversidad de reglas logicas y combinatoriales utilizando el lenguague de la Programación Lineal Entera (PLE) mediante la introducción de restricciones lineales de desigualdad y de igualdad.

Por favor considere que cada literal es independiente de todos los otros.

Restricciones Lógicas y Combinatoriales

- *Regla:* El O-inclusivo (`OR`) de las variables evalúa en uno, *i.e.*, se requiere que $x_i = 1$ para al menos un índice i.

  Implementación: Introducimos la restricción lineal:

$$\sum_{i=1}^{m} x_i \geq 1$$

- *Regla:* El O-exclusivo (`XOR`) de las variables evalúa en uno, *i.e.*, se requiere que $x_i = 1$ para exactamente un índice i.

  Implementación: Introducimos la restricción lineal:

$$\sum_{i=1}^{m} x_i = 1$$

Restricciones Lógicas y Combinatoriales

Para los siguientes literales suponga que $2 \leq n < m$.

- *Regla:* $x_i = 1$ al menos n veces.

  Implementación: Introducimos la restricción lineal:

$$\sum_{i=1}^{m} x_i \ \geq \ n$$

- *Regla:* $x_i = 1$ no más de n veces.

  Implementación: Introducimos la restricción lineal:

$$\sum_{i=1}^{m} x_i \ \leq \ n$$

- *Regla:* $x_i = 1$ exactamente n veces.

  Implementación: Introducimos la siguiente restricción lineal de igualdad:

  $$\sum_{i=1}^{m} x_i \; = \; n$$

  Implementación equivalente: Introducimos el siguiente par de restricciones lineales de desigualdad:

  $$n \; \leq \; \sum_{i=1}^{m} x_i \; \leq \; n$$

Restricciones Lógicas y Combinatoriales

Para los siguiente literales suponga que $y \in \{0, 1\}$ y que $2 \leq n < m$.

- *Regla:* Si $y = 1$ entonces el O-inclusivo (`OR`) de las variables evalúa en uno.

  Implementación: Introducimos la restricción lineal:

$$y \ \leq \ \sum_{i=1}^{m} x_i$$

- *Regla:* Si $y = 1$ entonces el O-exclusivo (`XOR`) de las variables evalúa en uno.

  Implementación: Introducimos el siguiente par de restricciones lineales:

$$y \ \leq \ \sum_{i=1}^{m} x_i \ \leq \ m - (m-1)\, y$$

Restricciones Lógicas y Combinatoriales

- *Regla:* Si $y = 1$ entonces $x_i = 1$ para al menos n índices i.

  Implementación: Introducimos la restricción lineal:

$$n\,y \;\leq\; \sum_{i=1}^{m} x_i$$

- *Regla:* Si $y = 1$ entonces $x_i = 1$ para no más de n índices i.

  Implementación: Introducimos la restricción lineal:

$$\sum_{i=1}^{m} x_i \;\leq\; m - (m - n)\,y$$

- *Regla:* Si $y = 1$ entonces $x_i = 1$ para exactamente n de los índices i.

  Implementación: Introducimos el siguiente par de restricciones lineales:

$$n\,y \;\leq\; \sum_{i=1}^{m} x_i \;\leq\; m - (m-n)\,y$$

Restricciones Lógicas y Combinatoriales

- *Regla:* Si el O-inclusivo (`OR`) de las variables evalúa en uno entonces $y = 1$.

  Implementación: Introducimos la restricción lineal:

$$\sum_{i=1}^{m} x_i \ \leq \ m\, y$$

- *Regla:* Si $x_i = 1$ para al menos n índices i entonces $y = 1$.

  Implementación: Introducimos la restricción lineal:

$$\sum_{i=1}^{m} x_i \ \leq \ (n-1) + (m-n+1)\, y$$

Restricciones Lógicas y Combinatoriales

- *Regla:* Si $x_i = 1$ para no más de n índices i entonces $y = 1$.

  Implementación: Introducimos la restricción lineal:

$$\sum_{i=1}^{m} x_i \;\geq\; (n+1) - (n+1)\, y$$

- *Regla:* Si $x_i = 1$ para exactamente n índices i entonces $y = 1$.

  Implementación: Introducimos el par de restricciones lineales:

$$(n+1) - (n+1)\, y \;\leq\; \sum_{i=1}^{m} x_i \;\leq\; (n-1) + (m-n+1)\, y$$

Restricciones Lógicas y Combinatoriales

- *Regla:* $y = 1$ si y solo si $x_i = 1$ para exactamente n de los índices i.

  Implementación:

  - Introducimos un par de restricciones que causan que $y = 1$ fuerce a que $x_i = 1$ para exactamente n de los índices i.

$$n\,y \;\leq\; \sum_{i=1}^{m} x_i \;\leq\; m - (m - n)\,y$$

  - Introducimos un par de restricciones que causan que $x_i = 1$ para exactamente n de los índices i fuerce a que $y = 1$.

$$\sum_{i=1}^{m} x_i \;\leq\; (n-1) + (m-n+1)\,y$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_i \;\geq\; (n+1) - (n+1)\,y$$

- *Regla:* Si $y = 1$ entonces el Y (`AND`) de las variables evalúa en uno.

  Implementación A: Introducimos el juego de restricciones lineales:

  $$\forall\, i \in [\![m]\!] \;:\; y \leq x_i$$

  Implementación B: Introducimos la restricción lineal:

  $$m\, y \;\leq\; \sum_{i=1}^{m} x_i$$

- *Regla:* Si el Y (`AND`) de las variables evalúa en uno entonces $y = 1$.

  Implementación: Introducimos la restricción:

$$\sum_{i=1}^{m} x_i \ \leq \ (m-1) + y$$

Restricciones entre Subconjuntos de Índices

Considere un problema de decisión que contiene $m \geq 10$ variables binarias

$$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_m \in \{0, 1\}$$

junto con otras variables adicionales. En este programa S y T son dos subcojuntos de índices de las variables x_i (*i.e.*, $S, T \subseteq [\![m]\!]$), cuyas cardinalidades se escriben como $|S|$ y $|T|$, respectivamente.

En los siguientes literales expresaremos una diversidad de reglas lógicas y combinatoriales entre las variables cuyos índices pertenecen a S y a T utilizando el lenguague de la Programación Lineal Entera (PLE) mediante la introducción de variables adicionales y de restricciones lineales.

Por favor considere que cada literal es independiente de todos los otros.

Restricciones entre Subconjuntos de Índices

- *Regla:* Si $x_i = 1$ para algún $i \in S$ entonces $x_j = 0$ para todo $j \in T$.
  Implementación:

  1. Introducimos las variables binarias $a_S, a_T \in \{0, 1\}$.
  2. Introducimos un juego de restricciones que fuerza $a_S = 1$ cuando $x_i = 1$ para al menos un $i \in S$:
  $$\forall\, i \in S \;:\; x_i \leq a_S$$
  3. Introducimos un juego de restricciones que fuerza a que $x_j = 0$ para todo $j \in T$ cuando $a_T = 0$.
  $$\forall\, j \in T \;:\; x_j \leq a_T$$
  4. Introducimos una restricción que fuerza $a_T = 0$ cuando $a_S = 1$:
  $$a_T \leq 1 - a_S$$

Restricciones entre Subconjuntos de Índices

- *Regla:* Si $x_i = 1$ para algún $i \in S$ entonces $x_j = 0$ para todo $j \in T$, y vice-versa.

  Implementación:

  1. Introducimos las variables binarias $a_S, a_T \in \{0, 1\}$.
  2. Introducimos un juego de restricciones que fuerza $a_S = 1$ cuando $x_i = 1$ para al menos un $i \in S$:
  $$\forall\, i \in S \;:\; x_i \leq a_S$$
  3. Introducimos un juego de restricciones que fuerza $a_T = 1$ cuando $x_j = 1$ para al menos un $j \in T$:
  $$\forall\, j \in T \;:\; x_j \leq a_T$$
  4. Agregamos una restricción que impide que a_S y a_T puedan tomar el valor uno al mismo tiempo:
  $$a_S + a_T \leq 1$$

Restricciones entre Subconjuntos de Índices

- *Regla:* Si $x_i = 1$ para algún $i \in S$ entonces $x_j = 1$ para algún $j \in T$.
  Implementación:

  1. Introducimos las variables binarias $a_S, a_T \in \{0, 1\}$.
  2. Introducimos un juego de restricciones que fuerza $a_S = 1$ cuando $x_i = 1$ para al menos un $i \in S$:
  $$\forall\, i \in S \,:\; x_i \leq a_S$$
  3. Introducimos una restricción que fuerza $a_T = 1$ cuando $a_S = 1$:
  $$a_S \leq a_T$$
  4. Introducimos una restricción que fuerza a que $x_j = 1$ para al menos un $j \in T$ cuando $a_T = 1$.
  $$a_T \;\leq\; \sum_{j \in T} x_j$$

Restricciones entre Subconjuntos de Índices

En los siguientes literales suponga que $w \in \{0, 1\}$.

- *Regla:* Si $x_i = 1$ para al menos un índice $i \in S$ entonces $w = 1$.

  Implementación: Introducimos la restricción:

$$\sum_{i \in S} x_i \;\leq\; |S|\, w$$

- *Regla:* Si $x_i = 1$ para todo índice $i \in S$ entonces $w = 1$.

  Implementación: Introducimos la restricción:

$$\sum_{i \in S} x_i \;\leq\; (|S| - 1) + w$$

Restricciones entre Subconjuntos de Índices

- *Regla:* Si $x_i = 1$ para más índices $i \in S$ que $i \in T$ entonces $w = 1$.

  Implementación: Introducimos la restricción:

$$\sum_{i \in S} x_i \; - \; \sum_{j \in T} x_j \;\leq\; |S| \, w$$

- *Regla:* Si $x_i = 1$ para al menos un índice $i \in S$ y $x_j = 0$ para todo índice $j \in T$, o vice-versa, entonces $w = 1$.

  Implementación:

  1. Introducimos las variables binarias $a_S, a_T \in \{0, 1\}$.
  2. Introducimos un juego de restricciones que fuerza $a_S = 1$ cuando $x_i = 1$ para al menos un $i \in S$:

$$\forall \, i \in S \, : \; x_i \leq a_S$$

Restricciones entre Subconjuntos de Índices

3. Introducimos un juego de restricciones que fuerza $a_T = 1$ cuando $x_j = 1$ para al menos un $j \in T$:

$$\forall\, j \in T \;:\; x_j \leq a_T$$

4. Agregamos un par de restricciones que fuerzan a que $w = 1$ cuando $a_S = 1$ y $a_T = 0$, cuando $a_S = 0$ y $a_T = 1$, o cuando $a_S = 0$ y $a_T = 0$:

$$\begin{aligned} a_S + (1 - a_T) &\leq 1 + w \\ (1 - a_S) + a_T &\leq 1 + w \\ (1 - a_S) + (1 - a_T) &\leq 1 + w \end{aligned}$$

Restricciones Temporales

Considere un problema de planificación sobre $T \geq 10$ períodos que contiene las series temporales de variables binarias $\{x_t\}_{t=1}^{T}$ y $\{y_t\}_{t=1}^{T}$, junto con otras variables adicionales. En este modelo cada serie temporal está asociada con un evento de interés de tal manera que los unos y ceros de sus variables representan la historia de ocurrencias o no-ocurrencias del evento.

En los siguientes literales expresaremos una diversidad de reglas temporales utilizando el lenguague de la Programación Lineal Entera (PLE) mediante la introducción de variables adicionales y de restricciones lineales de desigualdad y de igualdad.

Por favor considere que cada literal es independiente de todos los otros.

Restricciones Temporales

- *Regla:* Eventualmente $x = 1$.

  Implementación: Introducimos la restricción:

$$\sum_{t=1}^{T} x_t \geq 1$$

- *Regla:* Eventualmente $x = 1$ por dos períodos consecutivos.

  Implementación:

  1. Introducimos el juego de variables binarias $\{z_t\}_{t=1}^{T-1}$.
  2. Introducimos dos juegos de restricciones:

$$\forall\, t \in [\![T-1]\!] : \; z_t \leq x_t$$
$$\forall\, t \in [\![T-1]\!] : \; z_t \leq x_{t+1}$$

Restricciones Temporales

3. Agregamos la restricción:

$$\sum_{t=1}^{T-1} z_t \;\geq\; 1$$

- *Regla:* Si $x = 1$ entonces $x = 1$ para todo periodo posterior.

  Implementación: Introducimos el juego de restricciones:

$$\forall\, t \in [\![T-1]\!] \;:\; x_t \leq x_{t+1}$$

- *Regla:* Si $x = 1$ entonces $y = 1$ para todo periodo posterior.

  Implementación: Introducimos el juego de restricciones:

$$\forall\, t \in [\![T-1]\!], \forall\, \tau \in [\![T-t]\!] \;:\; x_t \leq\; y_{t+\tau}$$

Restricciones Temporales

- *Regla:* Si $x = 1$ entonces $y = 1$ después de k períodos.

  Implementación: Introducimos el juego de restricciones:

  $$\forall\, t \in [\![T-k]\!] : \; x_t \leq y_{t+k}$$

- *Regla:* Si $x = 1$ entonces eventualmente $y = 1$.

  Implementación: Introducimos el juego de restricciones:

  $$\forall\, t \in [\![T-1]\!] : \; x_t \; \leq \; \sum_{k=t+1}^{T} y_t$$