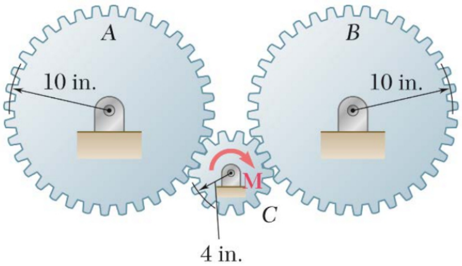
Mecánica Vectorial (MECG-1001): Trabajo Autónomo 05

Semestre: 2017-2018 Término II **Instructor:** Luis I. Reyes Castro **Paralelo:** 09

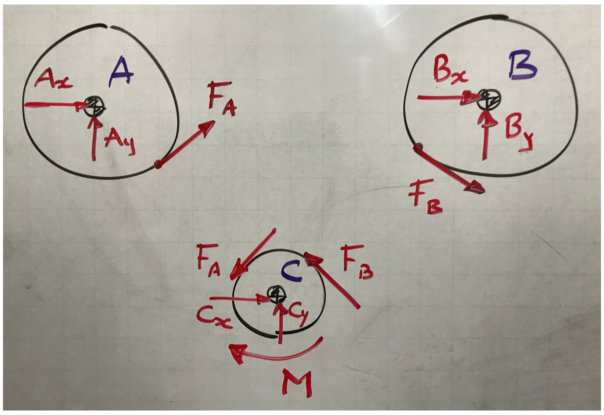
Problema 5.1. [**4 Puntos**] Cada uno de los engranes A y B pesa 20 lbs y tiene un radio de giro de 7.5 in; el engrane C pesa 5 lb y tiene un radio de giro de 3 in. Si un par M de magnitud constante de 50 lb-in se aplica al engrane C, determine *(i)* la aceleración angular del engrane A, *(ii)* la fuerza tangencial que ejerce el engrane C sobre el engrane A.



Solución: Primero calculamos los momentos de inercia y el torque externo:

$$\begin{aligned} I_{AB} &= (20/32.2)\,(7.5/12)^2 = 0.2426 \text{ slug - ft}^2 \\ I_C &= (5/32.2)\,(3/12)^2 = 0.0097 \text{ slug - ft}^2 \\ \boldsymbol{M} &= -4.167\,\widehat{\boldsymbol{k}} \text{ lb-ft} \end{aligned}$$

Luego bosquejamos los diagramas de cuerpo libre (DCL) de los engranes, tal como se muestra en la siguiente fotografía.



Tomando las sumatorias de torques externos sobre cada engrane, obtenemos:

$$\begin{aligned} +\,r_{AB}\,F_A &= I_{AB}\,\alpha_A \\ +\,r_{AB}\,F_B &= I_{AB}\,\alpha_B \\ +\,r_C\,(F_A + F_B) - M &= I_C\,\alpha_C \end{aligned}$$

Ahora tomamos en cuenta la condición de rodadura:

$$r_{AB}\,\alpha_A = -r_C\,\alpha_C \qquad\qquad r_{AB}\,\alpha_B = -r_C\,\alpha_C$$

Resolviendo para F_A y F_B en las sumatorias de torques externos, obtenemos:

$$F_A = F_B = -\frac{I_{AB}\,r_C\,\alpha_C}{r_{AB}^2}$$

Consecuentemente, la sumatoria de torques en el engrane C resulta en:

$$-2\,I_{AB}\left(\frac{r_C}{r_{AB}}\right)^2 \alpha_C \;-\; M \;=\; I_C\,\alpha_C \quad\Longrightarrow\; \alpha_C \;=\; -47.714\,\widehat{\boldsymbol{k}}\;\;\mathrm{rad/s^2}$$

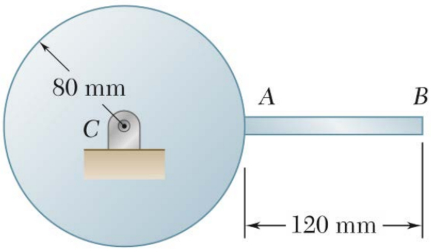
$$\Longrightarrow\; \alpha_A \;=\; +19.086\,\widehat{\boldsymbol{k}}\;\;\mathrm{rad/s^2}$$

Finalmente, la fuerza tangencial deseada es:

$$F_A \;=\; F_B \;=\; 5.556\ \mathrm{lbs}$$

■

Problema 5.2. [4 Puntos] Una barra ligera de 1.5 kg está soldada a un disco uniforme de 5 kg en la forma que se muestra. El ensamble oscila libremente alrededor de C en un plano vertical. Si en la posición indicada el ensamble es liberado con una velocidad angular de 10 rad/s en dirección de las manecillas del reloj, determine *(i)* la aceleración angular del ensamble, *(ii)* las componentes de la reacción en C.



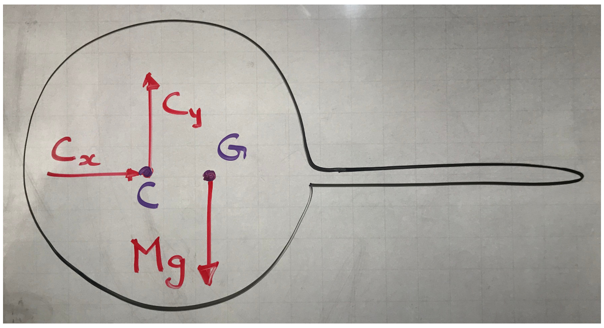
Solución: Primero localizamos el centro de masa del ensamble. Para esto ubicamos el origen del sistema de referencia en C y definimos al centro de masa como $\boldsymbol{r_G} = r_G\,\widehat{\boldsymbol{\imath}}$. Entonces:

$$r_G \;=\; \frac{(5)(0) + (1.5)(0.140)}{5 + 1.5} \;=\; 0.0323\ \mathrm{m} \quad\Longrightarrow\quad \boldsymbol{r_G} \;=\; 0.0323\,\widehat{\boldsymbol{\imath}}\ \mathrm{m}$$

Después calculamos su momento de inercia utilizando el Teorema de Steiner:

$$\begin{aligned} I \;&=\; (1/2)(5)(0.080)^2 + (5)(0.0323)^2 + (1/12)(1.5)(0.120)^2 + (1.5)(0.140 - 0.0323)^2 \\ &=\; 0.0404\ \mathrm{kg\text{ - }m^2} \end{aligned}$$

Luego bosquejamos el diagrama de cuerpo libre (DCL) del ensamble, tal como se muestra en la siguiente fotografía.



Entonces, las sumatorias de fuerzas y torques externos son:

$$M\,(\boldsymbol{a_G})_x \;=\; C_x$$

$$
\begin{aligned}
M\,(\boldsymbol{a_G})_y &= C_y - Mg \\
I\,\alpha &= -r_G\,C_y
\end{aligned}
$$

Ahora debemos relacionar $\boldsymbol{a_G}$ con α utilizando restricciones cinemáticas. Recordando que la velocidad angular del ensamble es $\boldsymbol{\omega} = -10\,\widehat{\boldsymbol{k}}$ rad/s, vemos que:

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{a_G} &= \boldsymbol{a_C} + \boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{r_{CG}} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r_{CG}}) \\
&= \boldsymbol{0} + \boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{r_G} - \omega^2\,\boldsymbol{r_G} \\
&= -100\,r_G\,\widehat{\boldsymbol{\imath}} + r_G\,\alpha\,\widehat{\boldsymbol{\jmath}}\ \text{ft/s}^2
\end{aligned}
$$

En vista de que $(\boldsymbol{a_G})_x = -100\,r_G$, de la sumatoria de fuerzas extenas en x obtenemos:

$$
C_x = -100\,r_G\,M = -21.0\,\text{N}
$$

Puesto que $(\boldsymbol{a_G})_y = +r_G\,\alpha$, la sumatoria de fuerzas extenas en y, junto con la sumatoria de torques externos, nos proveen de un sistema de dos ecuaciones en dos incógnitas:

$$
\begin{aligned}
M\,r_G\,\alpha &= C_y - Mg \\
I\,\alpha &= -r_G\,C_y
\end{aligned}
$$

Resolviendo dicho sistema, obtenemos $\alpha = -43.65$ rad/s^2 y $C_y = +54.6$ N. En conclusión:

$$
\boldsymbol{\alpha} = -43.65\,\widehat{\boldsymbol{k}}\ \text{rad/s}^2 \qquad \boldsymbol{C} = (\,-21.0,\ +54.6\,)\ \text{N}
$$