Modelos Estocásticos para Manufactura y Servicios (INDG-1008): **Unidad 02**

Luis I. Reyes Castro

Escuela Superior Politécnica del Litoral (ESPOL)
Guayaquil - Ecuador

2017 - Primer Término

Modelos Estocásticos - Unidad 02

Repaso de Variables Aleatorias

Una variable aleatoria es un modelo de una cantidad escalar incierta. Para definir una variable aleatoria, digamos X, se requieren dos elementos:

- Un *soporte*, el cual es el conjunto de todos los valores que puede tomar la variable aleatoria.
- Una *función de probabilidad* que depende de la naturaleza de la variable:
  - Si X es una variable aleatoria discreta entonces su *masa* probabilística, denotada p_X, es una función tal que:

$$\forall\, x \in \text{soporte}(X):\;\; p_X(x) \geq 0\,; \qquad \sum_{x \in \text{soporte}(X)} p_X(x) \;=\; 1$$

  - Si X es una variable aleatoria continua entonces su *densidad* probabilística, denotada f_X, es una función tal que:

$$\forall\, x \in \text{soporte}(X):\;\; f_X(x) \geq 0\,; \qquad \int_{x \in \text{soporte}(X)} f_X(x)\, dx \;=\; 1$$

Valor Esperado:

- Si X es una variable aleatoria discreta entonces

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{x \,\in\, \text{soporte}(X)} x \, \mathbb{P}(x)$$

donde la sumatoria es sobre todos los valores que puede tomar X.

- Si X es una variable aleatoria continua entonces

$$\mathbb{E}[X] = \int_{x \,\in\, \text{soporte}(X)} x \, f(x) \, dx$$

donde la integración es sobre todos los valores que puede tomar X.

- Si X, Y son variables aleatorias y a, b son constantes entonces:

$$\mathbb{E}[\, aX + bY \,] = a \, \mathbb{E}[X] + b \, \mathbb{E}[Y]$$

Independencia de Variables Aleatorias:

- Decimos que las variables aleatorias discretas X, Y son independientes si para todo posible par de valores (x, y) que las variables aleatorias pueden tomar es el caso que:

$$\mathbb{P}(\, X = x,\ Y = y\,) \,=\, \mathbb{P}(\, X = x\,)\,\mathbb{P}(\, Y = y\,)$$

- Si X, Y son variables aleatorias independientes entonces:

$$\mathbb{E}[XY] \,=\, \mathbb{E}[X]\,\mathbb{E}[Y]$$

Nótese que esta relación en general no es válida par variables aleatorias dependientes.

Repaso de Variables Aleatorias

- Si X, Y son dos variables aleatorias entonces la probabilidad del valor x de la primera variable condicional en el valor y de la segunda esta dado por:

$$\mathbb{P}(X = x \mid Y = y) = \frac{\mathbb{P}(X = x,\ Y = y)}{\mathbb{P}(Y = y)}$$

- Claramente, si X, Y son variables aleatorias independientes entonces para todo valor x de la primera variable y todo valor y de la segunda:

$$\mathbb{P}(X = x \mid Y = y) = \mathbb{P}(X = x)$$

Repaso de Variables Aleatorias

- Si X, Y son dos variables aleatorias entonces para todo valor y de la segunda variable aleatoria:

$$\mathbb{E}[\, X \mid Y = y \,] = \sum_{x \,\in\, \text{soporte}(X | Y = y)} x \, \mathbb{P}(\, X = x \mid \; Y = y)$$

- Si X, Y son dos variables aleatorias entonces:

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[\, \mathbb{E}[\, X \mid Y \,]\,] = \sum_{y \,\in\, \text{soporte}(Y)} \mathbb{E}[\, X \mid Y = y \,] \, \mathbb{P}(\, Y = y \,)$$

Variable Aleatoria Bernoulli:

- La variable aleatoria Bernoulli(p) representa la ocurrencia o no ocurrencia de algún evento de interés que sucede con probabilidad p, *e.g.*, el resultado de lanzar una moneda sesgada.

- Si $X \sim \text{Bernoulli}(p)$ entonces su distribucion es:

$$\mathbb{P}(\, X = 0 \,) \, = 1 - p \qquad\qquad \mathbb{P}(\, X = 1 \,) \, = p$$

- Adicionalmente, su valor esperado y varianza son:

$$\mathbb{E}[X] \; = \; p \qquad\qquad \text{var}(X) \; = \; p \,(1 - p)$$

Variable Aleatoria Binomial:

- La variable aleatoria Binomial(n, p) representa el número de ensayos exitosos en un experimento que involucra n ensayos independientes donde uno de los cuales tiene éxito con probabilidad p.
- Alternativamente, puede ser reconocida como la suma de variables aleatorias Bernoulli independientes e idénticamente distribídas. *I.e.,* si $X_1, \ldots, X_n$ son variables i.i.d. con distribución Bernoulli(p) entonces:

$$Z = X_1 + \cdots + X_n \qquad \Longrightarrow \qquad Z \sim \text{Binomial}(n, p)$$

Repaso de Variables Aleatorias

- Si $Z \sim \text{Binomial}(n, p)$ entonces su distribucion es:

$$\forall\, k \in \{\, 0,\, 1,\, \ldots,\, n \} \,:\; \mathbb{P}(\, Z = k \,) \;=\; \binom{n}{k} p^k \,(1-p)^{n-k}$$

- Adicionalmente, su valor esperado y varianza son:

$$\mathbb{E}[X] \;=\; n\,p \qquad\qquad \text{var}(X) \;=\; n\,p\,(1-p)$$

Variable Aleatoria Geométrica:

- Tenemos dos tipos. Yo las denoto aquí como $\text{Geo}(p)_0$ y $\text{Geo}(p)_1$ pero son realmente la misma variable aleatoria pues:

$$\text{Geo}(p)_0 + 1 \;\sim\; \text{Geo}(p)_1$$

- Para interpretarlas consideraremos una secuencia de experimentos independientes, donde cada uno tiene éxito con probabilidad p, que concluye con el primer experimento exitoso.

Repaso de Variables Aleatorias

- La variable aleatoria $\text{Geo}(p)_0$ representa el número de experimentos fallidos que transcurrieron antes del primer experimento exitoso.
  - Si $X \sim \text{Geo}(p)_0$ entonces su distribucion es:

$$\forall\, k \geq 0 \,:\; \mathbb{P}(\, X = k \,) \;=\; (1-p)^k \, p$$

  - Adicionalmente, su valor esperado y varianza son:

$$\mathbb{E}[X] \;=\; \frac{1-p}{p} \qquad\qquad \text{var}(X) \;=\; \frac{1-p}{p^2}$$

Repaso de Variables Aleatorias

- La variable aleatoria $\text{Geo}(p)_1$ representa la longitud de la secuencia de experimentos, *i.e.*, el número de experimentos realizados.
  - Si $X \sim \text{Geo}(p)_1$ entonces su distribucion es:

$$\forall\, k \geq 1 \,:\; \mathbb{P}(\, X = k \,) \;=\; (1-p)^{k-1}\, p$$

  - Adicionalmente, su valor esperado y varianza son:

$$\mathbb{E}[X] \;=\; \frac{1}{p} \qquad\qquad \text{var}(X) \;=\; \frac{1-p}{p^2}$$

Variable Aleatoria Exponencial:

- La variable aleatoria Exponencial(λ) es comúnmente utilizada para modelar los tiempos entre arribos o eventos de interés en un proceso estocástico en tiempo continuo.
- Si $X \sim$ Exponencial(λ) entonces su distribucion es:

$$\forall\, t \geq 0 : \; f_X(t) \;=\; \lambda\, e^{-\lambda t}$$

- Adicionalmente, su valor esperado y varianza son:

$$\mathbb{E}[X] \;=\; \frac{1}{\lambda} \qquad\qquad \mathrm{var}(X) \;=\; \frac{1}{\lambda^2}$$

Ejercicio - H&L Problema 17.4-3:

El tiempo que requiere un mecánico para reparar una máquina tiene una distribución exponencial con media de 4 horas. Sin embargo, una herramienta especial reduciría esta media a 2 horas. Si el mecánico repara una máquina en menos de 2 horas, se le pagan $100; de otra manera se le pagan $80. Determine el aumento esperado en el pago del mecánico si usa esta herramienta especial.

Variable Aleatoria Poisson:

- La variable aleatoria Poisson(μ) es comúnmente utilizada para modelar el número de arribos o eventos de interés en un proceso estocástico a lo largo de un intervalo de tiempo.
- Si $X \sim$ Poisson(μ) entonces su distribucion es:

$$\forall\, k \geq 0 \,:\; \mathbb{P}(\, X = k \,) \;=\; \frac{\mu^k \, e^{-\mu}}{k!}$$

- Adicionalmente, su valor esperado y varianza son:

$$\mathbb{E}[X] \,=\, \mu \qquad\qquad \mathrm{var}(X) \,=\, \mu$$

Proceso Bernoulli

Ejemplo aleatorio:

En una fábrica una máquina tiene un componente que usualmente debe ser reemplazado. A pesar de que reemplazar el componente toma unos pocos minutos al final de la jornada de trabajo, cada día de operación de la máquina el componente se puede dañar con probabilidad p, independientemente de lo que haya pasado antes. Con esto en mente:

- Cuántas veces a la semana, en promedio, tendrán que reemplazar el componente?
- Si han pasado cuatro días desde la última vez que se cambió en componente, cuál es la probabilidad de que se dañe mañana?

Proceso Bernoulli

Proceso Bernoulli con Parámetro p:

- Es una secuencia de variables aleatorias Bernoulli con parámetro p independientes e indénticamente distribuidas que representan la presencia o ausencia de arribos.
- Formalmente es una secuencia de variables aleatorias $X_1, X_2, X_3, X_4, \ldots$ donde:
  - Para todo índice i tenemos que $X_i \sim \text{Bernoulli}(p)$.
  - Para todo par de índices i, j es el caso que X_i es independiente de X_j.
- Consideramos que ocurre un arribo en el período t si $X_t = 1$; caso contrario no ocurrió un arribo en ese período.

Proceso Bernoulli

Tiempos Entre Arribos:

- Para todo índice $i \geq 1$ la variable aleatoria T_i representa el número de períodos que transcurrieron desde el $(i-1)^{\text{avo}}$ arribo hasta el i^{avo} arribo.
  - Nótese que soporte$(T_i) = \mathbb{Z}_{\geq 0}$.
- Cuál es la distribución de T_1? *I.e.*, para cada número de períodos $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, cuál es la probabilidad de que $T_1 = k$?
  - Claramente $k = 0$ con probabilidad p.
  - Si $k = 1$ entonces $X_1 = 0$ y $X_2 = 1$, *i.e.*, en el primer período no hubo un arribo y en el segundo período hubo un arribo, lo cual sucede con probabilidad $(1-p)\,p$.
  - Si $k = 2$ entonces $X_1 = 0$, $X_2 = 0$ y $X_3 = 1$, lo cual sucede con probabilidad $(1-p)^2\,p$.

Proceso Bernoulli

- Continuando por inducción matemática, vemos que:

$$\forall\, k \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \,:\; \mathbb{P}(\, T_1 = k \,) \;=\; (1-p)^k\, p \quad \iff \quad T_1 \sim \mathrm{Geo}(p)_0$$

- Más generalmente, en un proceso Bernoulli con parámetro p los tiempos entre arribos constituyen una secuencia de variables aleatorias independientes e identicamente distribuidas; en particular, con distribución geométrica-0. *I.e.:*

$$\forall\, i \geq 1 \,:\; T_i \sim \mathrm{Geo}(p)_0$$

Propiedad Sin Memoria del Proceso Bernoulli:

- Supóngase que ha empezado el proceso y han transcurrido t períodos sin un arribo, *i.e.,* $t < T_1$. Cuál es la probabilidad de que haya que esperar $\tau \geq 1$ períodos adicionales hasta el primer arribo? *I.e.:*

$$\tau \geq 1 : \ \mathbb{P}(\ T_1 = t + \tau \mid T_1 > t\ )$$

- Puesto que la variable aleatoria $T_1 \sim \text{Geo}(p)_0$, *i.e.,* el número de períodos que transcurrieron hasta el primer arribo tiene distribución geométrica, y dado que en general para todo $i \geq 1$ es el caso que $T_i \sim \text{Geo}(p)_0$, es fácil demostrar que,para todo índice de arribo $i \geq 1$ tenemos que $T_i \sim \text{Geo}(p)_0$ para todo $i \geq 1$:

$$\forall\, t \geq 1,\ \forall\, \tau \geq 1 : \ \mathbb{P}(\ T_i = t + \tau \mid T_i > t\ ) \ = \ \mathbb{P}(\ T_i = \tau\ )$$

Número de Arribos en un Intervalo:

- Si para todo índice k denotamos a la variable aleatoria N_k como el número de arribos desde el comienzo del proceso hasta el k^{avo} periodo, entonces:

$$N_k = \sum_{t=1}^{k} X_t$$

  I.e., la variable aleatoria N_k es la suma de k variables aleatorias Bernoulli con parámetro p independientes e identicamente distribuidas (IID).
  Consecuentemente:

$$N_k \sim \text{Binomial}(k, p)$$

- Más generalmente, en un proceso Bernoulli con parámetro p el número de arribos a lo largo de cualquier intervalo de k períodos de duración es una variable aleatoria con distribución binomial con parámetros k y p.

Proceso Bernoulli

Arribos en Intervalos Disjuntos:

- En un proceso Bernoulli los números de arribos a lo largo de intervalos de tiempo disjuntos son estadísticamente independientes.

Combinación de Procesos Bernoulli:

- Supongamos que tenemos dos procesos Bernoulli independientes.
  - El primero tiene parámetro p.
  - El segundo tiene parámetro q.
- Consideremos un nuevo proceso donde se produce un arribo si y solo si ocurre un arribo en ambos procesos.
  - Los arribos en el nuevo proceso son independientes entre si, pues en cada período solo dependen en los arribos de los procesos generadores, los cuales no dependen de arribos en tiempos anteriores.

Proceso Bernoulli

  - La probabilidad de un arribo en el nuevo proceso es el producto de las probabilidades de arribo en cada proceso generador, pues los procesos generadores son independientes.
  - En conclusión el nuevo proceso es un proceso Bernoulli con parámetro pq.
- Consideremos un nuevo proceso donde se produce un arribo si y solo si ocurre un arribo en alguno de los dos procesos.
  - Los arribos en el nuevo proceso son independientes entre si, pues en cada período solo dependen en los arribos de los procesos generadores, los cuales no dependen de arribos en tiempos anteriores.
  - La probabilidad de un arribo en el nuevo proceso es uno menos la probabilidad de que no haya un arribo, la cual es el producto de las probabilidades de que no hayan arribos en cada uno de los procesos generadores, pues los procesos generadores son independientes.
  - En conclusión el nuevo proceso es un proceso Bernoulli con parámetro $1 - (1 - p)(1 - q)$.

División de Procesos Bernoulli:

- Supongamos que tenemos un proceso Bernoulli con parámetro p que genera dos procesos.
- En cada período:
  - Si el proceso principal produce un arribo, lanzamos una moneda sesgada con probabilidad de cara igual a q.
  - Si la moneda sale cara enviamos el arribo al primer proceso.
  - Si la moneda sale sello enviamos el arribo al segundo proceso.
- Entonces:
  - El primer proceso será un proceso Bernoulli con parámetro $p\,q$.
  - El segundo proceso será un proceso Bernoulli con parámetro $p\,(1-q)$.

Proceso Poisson con parámetro λ:

- Es una secuencia de variables aleatorias exponenciales con parámetro λ independientes e indénticamente distribuidas que representan los tiempos entre arribos (no los tiempos de los arribos).
- Formalmente es una secuencia de variables aleatorias $X_1, X_2, X_3, X_4, \ldots$ donde:
  - Para todo índice i tenemos que $X_i \sim$ Exponencial(λ).
  - Para todo par de índices i, j es el caso que X_i es independiente de X_j.
- El proceso empieza en el tiempo cero, *i.e.,* $t = 0$, el primer arribo ocurre en el tiempo $t = X_1$, el segundo en el tiempo $t = X_1 + X_2$, y así sucesivamente; *i.e.,* el k^{avo} arribo ocurre en:

$$t = X_1 + X_2 + \cdots + X_k$$

Proceso Poisson

Propiedades del Proceso Poisson (con parámetro λ):

- Tiempos de los Arribos: Para todo índice $k \geq 1$ el tiempo del k^{avo} arribo tiene distribución Erlang con parámetros k y λ.

- Propiedad Sin Memoria: En cada periodo la distribución del tiempo que falta para el siguiente arribo es independiente del tiempo transcurrido desde el último arribo. Más formalmente, para todo índice de arribo $k \geq 1$:

$$\forall \, t, \tau > 0 : \; \mathbb{P}(X_k > t + \tau \mid X_k > t) \; = \; \mathbb{P}(X_k > \tau)$$

- Número de Arribos en un Intervalo: El número de arribos en un intervalo de τ unidades es una variable aleatoria Poisson con parámetro $\lambda \tau$.

- Arribos en Intervalos Disjuntos: Si dos intervalos de tiempo son disjuntos entonces el número de arribos durante esos intervalos son independientes.

Ejercicio - H&L Problema 17.4-2:

Los trabajos que deben realizarse en una máquina específica llegan de acuerdo con un proceso de entradas de Poisson con tasa media de 2 por hora. Suponga que la máquina se descompone y su reparación tardará 1 hora. Cuál es la probabilidad de que el número de trabajos que lleguen durante este tiempo sea:

- Cero?
- Dos?
- Cinco o más?

Proceso Poisson

Ejercicio - Taha Problema 18.3A-3:

El tiempo entre llegadas a la Oficina Estatal de Hacienda es exponencial, con valor medio de .05 horas. La oficina abre a las 8:00 A.M.

1. Cuál es la distribución del tiempo entre llegadas?
2. Encuentre la probabilidad de que hasta las 8:15 todavía no haya llegado ningun cliente.
3. En este momento son las 8:35. El último cliente llegó a la oficina a la 8:26. Cuál es la probabilidad de que el siguiente cliente llegue antes de las 8:38? De que no llegue alrededor de las 8:40?
4. Cuál es el promedio de clientes que llegan entre las 8:10 y las 8:45?

Ejercicio - Taha Problema 18.3A-7:

Ann y Jim, dos empleados en un restaurante de comida rápida, efectúan el siguiente juego mientras esperan que lleguen clientes: Jim le paga a Ann 2 centavos si el siguiente cliente no llega dentro de 1 minuto; de lo contrario, Ann le paga a Jim 2 centavos. Determine la ganancia promedio de Jim en un periodo de 8 horas. El tiempo entre llegadas es exponencial con media de 1.5 minutos.

Proceso Poisson

Ejercicio - Taha Problema 18.3A-10:

Un cliente que llega a un restaurante de comida rápida McBurger dentro de 4 minutos del cliente inmediatamente anterior recibirá 10% de descuento. Si el tiempo entre llegadas es de entre 4 y 5 minutos, el descuento es de 6%. Si el tiempo entre llegadas es de m'as de 5 minutos, el cliente obtiene 2% de descuento. El tiempo entre llegadas es exponencial con una media de 6 minutos.

Ejercicio - Taha Problema 18.3A-12:

La U de A opera dos líneas de autobuses en el campus: roja y verde. La línea roja presta servicio al norte del campus, y la verde al sur del campus, con una estación de transferencia que une las dos rutas. Los autobuses verdes llegan al azar (tiempo entre llegadas exponencial) a la estación de transferencia cada 10 minutos. Los autobuses rojos también lo hacen al azar cada 7 minutos.

Con esto en mente:

- Cuál es la distribución del tiempo de espera de un estudiante que llega en la línea roja para abordar la línea verde?
- Cuál es la distribución del tiempo de espera de un estudiante que llega en la línea verde para abordar la línea roja?

Combinación de Procesos Poisson:

- Supongamos que tenemos dos procesos independientes.
  - El primero es un proceso Poisson con parámetro λ_1.
  - El segundo es un proceso Poisson con parámetro λ_2.
- Entonces, si consideremos un nuevo proceso que combina los arribos de los dos procesos anteriores, el nuevo proceso es de hecho un proceso Poisson con parámetro:

$$\lambda_1 + \lambda_2$$

De manera similar, si combinamos n processos Poisson con parámetros $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ entonces el proceso combinado será un proceso Poisson con parámetro:

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n$$

Proceso Poisson

- Adicionalmente, para cualquier arribo en el proceso combinado la probabibilidad de que ese arribo provenga del proceso $k \in \{1, 2\}$ es:

$$\frac{\lambda_k}{\lambda_1 + \lambda_2}$$

Similarmente, si combinamos n processos Poisson como antes entonces la probabilidad de que un arribo en el proceso combinado haya provenido del k^{avo} proceso es:

$$\frac{\lambda_k}{\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n}$$

División de Procesos Poisson:

- Supongamos que tenemos un proceso Poisson con parámetro λ que genera dos procesos de tal manera que en cada instante:
  - Si el proceso principal produce un arribo, lanzamos una moneda sesgada con probabilidad de cara igual a p.
  - Si la moneda sale cara enviamos el arribo al primer proceso.
  - Si la moneda sale sello enviamos el arribo al segundo proceso.
- Entonces:
  - El primer proceso será un proceso Poisson con parámetro $\lambda\, p$.
  - El segundo proceso será un proceso Poisson con parámetro $\lambda\,(1 - p)$.

Ejercicio - H&L Problema 17.4-5:

Un sistema de colas tiene tres servidores con tiempos de servicio esperados de 30, 20 y 15 minutos. Los tiempos de servicio tienen una distribución exponencial. Cada servidor ha estado ocupado con el cliente actual durante 10 minutos.

Determine el tiempo esperado que falta para la siguiente terminación de un servicio.

Ejercicio - H&L Problema 17.4-6:

Considere un sistema de colas con dos tipos de clientes. Los clientes tipo 1 llegan de acuerdo con un proceso de Poisson a una tasa media de 5 por hora, mientras que los clientes tipo 2 llegan de acuerdo a un proceso de Poisson a una tasa media de 5 por hora. El sistema tiene dos servidores, que atienden a ambos tipos de clientes. Para los dos tipos el tiempo de servicio tiene una distribución exponencial con media de 10 minutos. El servicio es tipo primero en entrar, primero en salir.

Cuál es la distribución (y su media) del tiempo entre llegadas consecutivas de clientes de cualquier tipo?

Ejercicio:

El call center de una empresa de servicios al consumidor recibe en promedio, $\lambda_1 = 11.9$ llamadas por hora para Servicio al Cliente y $\lambda_2 = 21.4$ llamadas por hora para Servicio Técnico. De los clientes que llaman para Servicio al Cliente el $p_{12} = 5.3\%$ es referido a Servicio Técnico, mientras que de los clientes que llaman a Servicio Técnico el $p_{21} = 17.6\%$ es referido a Servicio al Cliente.

Con esto en mente, calcule el número promedio de clientes por hora que debe atender el departamento de Servicio al Cliente y el deparatamento de Servicio Técnico.

Modelamiento

Una **Cadena de Markov** es un modelo matemático de un proceso estocástico en tiempo discreto constituído por:

- Conjunto finito de n estados, donde cada estado es una representación de una posible situación de interés.
- Matriz de transición $\boldsymbol{P} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, donde:
  - Para cada par de estados i, j:

$$\boldsymbol{P}(i,j) = \mathbb{P}\left(\text{siguiente estado sea } j \mid \text{estado actual es } i\right)$$

  - Cada una de las filas de la matriz suman a uno.

Ejercicio - H&L Sección 16.1 (Ejemplo del Clima):

El clima en el pueblo de Centerville puede cambiar con rapidez de un día a otro. Sin embargo, las posibilidades de tener clima seco (sin lluvia) mañana es de alguna forma mayor si hoy está seco, es decir, si no llueve. En particular, la probabilidad de que mañana este seco es de 0.8 si hoy está seco, pero es de solo 0.6 si hoy llueve. Estas probabilidades no cambian si se considera la información acerca del clima en los días anteriores a hoy.

Modele este proceso climático como una Cadena de Markov.

Modelamiento

Estados:

1. Está seco
2. Llueve

Matriz de transición:

$$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.6 & 0.4 \end{bmatrix}$$

Ejercicio - H&L Sección 16.1 (Ejemplo de Inventarios):

La tienda de fotografía de Dave se admministra semanalmente y está abierta al público desde el lunes en la mañana hasta el sábado en la noche. Dave tiene en almacén un modelo especial de cámara que se vende relativamente bien.
Sean D_1, D_2, $D_3, \ldots$ las demandas semanales de la cámara en unidades, *i.e.,* el número de unidades que se venderían si el inventario fuere inagotable.
Más precisamente, suponga que las demandas D_t son variables aleatorias i.i.d. que siguen una distribución Poisson con parámetro $\lambda = 1$.

Dave maneja el inventario de acuerdo a la siguiente política:

- Si no hay unidades de la cámara en inventario, se hace un pedido al proveedor por tres unidades. En este caso, el proveedor entregará el pedido el lunes a primera hora, justo antes de que la tienda abra.
- Caso contrario, no se hace un pedido.

Modelamiento

Definiendo a los cuatro posibles número de cámaras en inventario al final de cada semana como los estados, modele la política de inventario descrita como una Cadena de Markov.

Por si acaso, el orden de las actividades de la t^{ava} semana es:

1. Si se hizo un pedido al proveedor de las cámaras al final de la $(t-1)^{\text{ava}}$ semana se reciben las unidades que se pidieron.
2. Se abre la tienda desde el lunes en la mañana hasta el sábado en la noche. Durante este tiempo se venden entre cero y tres cámaras.
3. Se cierra la tienda.
4. De ser necesario, se hace un pedido al proveedor de las cámaras.

Modelamiento

Estados:

1. Quedan 0 unidades en inventario al final de la semana
2. Quedan 1 unidades en inventario al final de la semana
3. Quedan 2 unidades en inventario al final de la semana
4. Quedan 3 unidades en inventario al final de la semana

Matriz de transición:

$$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} 0.08 & 0.18 & 0.37 & 0.37 \\ 0.63 & 0.37 & 0 & 0 \\ 0.26 & 0.37 & 0.37 & 0 \\ 0.08 & 0.18 & 0.37 & 0.37 \end{bmatrix}$$

Modelamiento

Ejercicio - H&L Sección 16.2 (Ejemplo de Acciones 1):

En un mercado de valores existe una acción que solo puede subir o bajar de precio. Si la acción subió hoy, la probabilidad de que suba mañana es de 0.7. En cambio, si la acción bajó hoy, la probabilidad de que suba mañana es de solo 0.5.

Modele el comportamiento de esta acción como una Cadena de Markov.

Ejercicio - H&L Sección 16.2 (Ejemplo de Acciones 2):

Suponga ahora que el modelo del mercado de acciones se cambia de manera que el precio de la acción mañana depende del precio de ayer y de hoy. En particular, si la acción subió los dos días, ayer y hoy, la probabilidad de que suba mañana es de 0.9. Si la acción bajó ayer pero hoy subió, la probabilidad de que mañana suba es de 0.6. Si la acción subió ayer pero hoy bajó, la probabilidad de que mañana suba es de 0.5. Por último, si bajó durante estos dos días, la probabilidad de que mañana suba es de 0.3.

Modele el comportamiento de esta acción como una Cadena de Markov.

Ejercicio:

Un operador de servicios de telefonía celular está en proceso de instalar una antena en un barrio promedio, donde se puede esperar que la antena reciba un paquete de datos para su transmisión durante cada ciclo (*e.g.*, durante cada milisegundo) con probabilidad $\lambda \in (0.99, 1)$. Para poder satisfacer esta demanda se instaló un buffer con capacidad para M paquetes de datos junto con n transmisores que operan en canales independientes pero ruidosos; en particular, cada transmisor que es encargado con el envío de un paquete logra transmitirlo exitosamente con probabilidad $\mu \in (0.94, 0.98)$. Cuando una transmisión fracasa se mantiene al paquete en el buffer y se reintenta la transmisión en el siguiente período.

Cada ciclo de operación, digamos el t^{avo} ciclo, avanza de la siguiente manera:

1. Se empieza el ciclo con X_{t-1} paquetes en el búffer.

2. Si el buffer no está lleno, se recibe un nuevo paquete con probabilidad λ, de tal manera que el nuevo número de paquetes en el buffer es:

$$\min \{ X_{t-1} + D_t \, , \; M \} \, , \qquad \text{donde } D_t \sim \text{Bernoulli}(\lambda)$$

3. Los transmisores intentan enviar cuantos paquetes puedan. Si hay n paquetes o más en el buffer, entonces cada uno de los transmisores es asignado a un único paquete, y cada transmisor logra enviar su paquete con éxito con probabilidad μ, independiente de los otros. Si hay menos de n paquetes en el buffer se opera de la misma manera, pero en este caso habrá uno o más transmisores a los que no será necesario asignarles paquetes en este ciclo.

Con todo esto en mente, construya un modelo de Cadena de Markov de este proceso para el caso particular cuando $M = 5$ y $n = 3$. En particular, explique cuales son los estados y liste todas las probabilidades de transición positivas.

Modelamiento

Definición Formal de una Cadena de Markov:

- Es una secuencia de variables aleatorias discretas $X_0, X_1, X_2, \ldots, X_t, \ldots$ donde para cada índice de tiempo discreto t la variable aleatoria X_t es el estado del proceso en el tiempo t.

- Tiene la Propiedad Markoviana, *i.e.*, que la distribución del siguiente estado solo depende en el estado actual:

$$\mathbb{P}(\, X_{t+1} \mid X_0, X_1, \ldots, X_t \,) \;=\; \mathbb{P}(\, X_{t+1} \mid X_t \,)$$

- En este contexto la matriz de transición $\boldsymbol{P}$ se define como :

$$\boldsymbol{P}(i,j) \;=\; \mathbb{P}(\, X_{t+1} = j \mid X_t = i \,)$$

Estados Transitorios y Recurrentes

Algunas definiciones:

- Un **camino** desde el estado i hasta el estado j es una secuencia finita de estados que empieza en el estado i y termina en el estado j donde cada transición entre estados a lo largo del camino tiene probabilidad positiva.
- El estado i puede **alcanzar** al estado j si existe al menos un camino desde i hasta j.
- Un par de estados i, j se **comunican** si el estado i puede alcanzar al estado j y vice-versa.
- Un estado i es **transitorio** si puede alcanzar otro estado j tal que tal que el estado i no puede ser alcanzado desde el estado j.
- Un estado i es **recurrente** si no es transitorio.
    - Toda cadena de Markov tiene al menos un estado recurrente.

Estados Transitorios y Recurrentes

- Un estado i es **absorbente** si es recurrente y además no puede ser abandonado una vez que ocurre.
- Un subconjunto de estados es una **clase recurrente** si:
  - Todos sus estados son recurrentes.
  - Todo par de estados en la clase se comunican.
- Un estado i tiene **período** k si todo camino de retorno al estado tiene una longitud igual al algún múltiplo de k. Más formalmente:

$$k = \text{MCD}\{\, n \geq 1 \colon \mathbb{P}(\, X_n = i \mid X_0 = i\,) > 0 \,\}$$

  Además, si $k = 1$ entonces decimos que el estado es **aperiódico**.
- Una cadena es **aperiódica** si tiene al menos un estado aperiódico.

Estados Transitorios y Recurrentes

- Decimos que una Cadena de Markov es **irreducible**, es **ergódica**, o que es una **uni-cadena** si:
  - Es aperiódica.
  - Todos sus estados pertenecen a una única clase recurrente.

Estados Transitorios y Recurrentes

Ejercicios:

- H&L Problema 16.4-1
- H&L Problema 16.4-2
- H&L Problema 16.4-3
- H&L Problema 16.4-4
- H&L Problema 16.4-5

Distribución Estacionaria

Ejemplo aleatorio:

Carlos es un aficionado del fútbol local quien, convenientemente, apoya a Barcelona o a Emelec dependiendo de cual de los dos equipos haya ganado el último partido. Cuando Barcelona gana un partido, la probabilidad de que vuelva a ganar es del 60%. En cambio, cuando Emelec gana la probabilidad de que vuelva a ganar es del 50%.

Modele el comportamiento de Carlos como una Cadena de Markov y encuentre la fracción del tiempo que él apoya a cada equipo.

Distribución Estacionaria

Todas las Cadenas de Markov que tienen una única clase recurrente exhiben una **distribución estacionaria**, también conocida como distribución en estado estable. Esta distribución es usualmente denotada como $\pi^\star(\,\cdot\,)$ y puede ser interpretada de dos maneras equivalentes, sin importar el estado inicial de la cadena.

- Como probabilidades de encontrar a la cadena en cada estado:

$$\forall \text{ estado } i: \;\; \pi^*(i) \;\triangleq\; \lim_{t\to\infty} \mathbb{P}(\, X_t = i \,)$$

- Como fracciones de visitas a estados:

  Supóngase que para cada periodo t y cada estado i la variable aleatoria $N_t(i)$ es igual al número de veces, desde el arranque de la cadena hasta el periodo t, que la cadena ha visitado el estado i. Entonces:

$$\forall \text{ estado } i: \;\; \pi^*(i) \;\triangleq\; \lim_{t\to\infty} \frac{N_t(i)}{t}$$

Distribución Estacionaria

Cálculo de la Distribución Estacionaria:

1. Descartamos todos los estados transitorios.
2. Escribimos una ecuación de balance para cada estado recurrente:

$$\forall \, \text{estado } k: \; \boldsymbol{\pi}^*(k) \; = \sum_{\text{estados } i} \boldsymbol{\pi}^*(i) \, \boldsymbol{P}(i, k)$$

3. Desechamos arbitrariamente una de las ecuaciones anteriores y la reemplazamos por:

$$\sum_{\text{estados } k} \boldsymbol{\pi}^*(k) \; = \; 1$$

4. Resolvemos el sistema de ecuaciones lineales resultante.

Distribución Estacionaria

Algunos resultados de existencia y unicidad:

- Toda cadena aperiódica tiene al menos una distribución estacionaria, pero ninguna cadena periódica puede tener una distribución estacionaria.
- En toda cadena aperiódica, todas las distribuciones estacionarias le asignan cero probabilidad a cada uno de los estados transitorios.
- Si una cadena es ergódica entonces su distribución estacionaria existe, es única, y no depende de la distribución del estado inicial.
- Si una cadena es aperiódica pero tiene más de una clase recurrente:
  - Su distribución estacionaria existe pero no es única y depende de la distribución del estado inicial.
  - Todo estado recurrente que puede ser alcanzado desde el estado inicial tiene probabilidad estacionaria estrictamente positiva.

Distribución Estacionaria

Origen de las Ecuaciones de Balance:

- Supongamos que el estado inicial de una Cadena de Markov no es conocido a priori sino que obedece una distribución inicial $\boldsymbol{\pi_0} \in \mathbb{R}^n$, donde:

$$\forall x\colon\ \boldsymbol{\pi_0}(x) \,=\, \mathbb{P}(\, X_0 = x \,)$$

- Como caso especial, supóngase que el estado inicial es conocido, *e.g.*, que $X_0 = x_0$. Entonces la distribución inicial sería:

$$\boldsymbol{\pi_0}(x_0) \,=\, 1; \qquad \forall x \neq x_0\colon\ \boldsymbol{\pi_0}(x) \,=\, 0;$$

Distribución Estacionaria

- Ahora, si denotamos a $\boldsymbol{\pi_1}$ como la distribución del primer estado, tenemos que para todo posible primer estado x_1 :

$$
\begin{aligned}
\forall x_1 : \; \boldsymbol{\pi_1}(x_1) \; &= \; \mathbb{P}(\, X_1 = x_1 \,) \\
&= \sum_{\text{estados } x_0} \mathbb{P}(\, X_0 = x_0 \,) \, \mathbb{P}(\, X_1 = x_1 \mid X_0 = x_0 \,) \\
&= \sum_{\text{estados } x_0} \boldsymbol{\pi_0}(x_0) \, \boldsymbol{P}(x_0, x_1)
\end{aligned}
$$

Matricialmente, eso equivale a:

$$
\boldsymbol{\pi}_1' \; = \; \boldsymbol{\pi}_0' \, \boldsymbol{P}
$$

Distribución Estacionaria

- Luego, si denotamos a $\boldsymbol{\pi_2}$ como la distribución del segundo estado, tenemos que para todo posible segundo estado x_2 :

$$\begin{aligned} \forall x_2 :\ \boldsymbol{\pi_2}(x_2) &= \mathbb{P}(\, X_2 = x_2 \,) \\ &= \sum_{\text{estados } x_1} \mathbb{P}(\, X_1 = x_1 \,)\, \mathbb{P}(\, X_2 = x_2 \mid X_1 = x_1 \,) \\ &= \sum_{\text{estados } x_1} \boldsymbol{\pi_1}(x_1)\, \boldsymbol{P}(x_1, x_2) \end{aligned}$$

Matricialmente, tenemos que:

$$\boldsymbol{\pi}_2' = \boldsymbol{\pi}_1' \, \boldsymbol{P}$$

Distribución Estacionaria

- Más generalmente, si conocemos la distribución del estado actual $\boldsymbol{\pi_t}$, entonces para la distribución del siguiente estado, denotada $\boldsymbol{\pi_{t+1}}$, es el caso que:

$$\forall x_{t+1} \colon \; \boldsymbol{\pi_{t+1}}(x_{t+1}) \;=\; \sum_{\text{estados } x_t} \mathbb{P}(\, X_t = x_t \,)\, \mathbb{P}(\, X_{t+1} = x_{t+1} \mid X_t = x_t \,)$$

$$=\; \sum_{\text{estados } x_t} \boldsymbol{\pi_t}(x_t)\, \boldsymbol{P}(x_t, x_{t+1})$$

Matricialmente, tenemos que:

$$\boldsymbol{\pi}'_{t+1} \;=\; \boldsymbol{\pi}'_t \, \boldsymbol{P}$$

Distribución Estacionaria

- Si la Cadena de Markov es irreducible entonces sin importar la distribución inicial $\boldsymbol{\pi_0}$ es el caso que la distribución del estado actual $\boldsymbol{\pi_t}$ converge a una única distribución $\boldsymbol{\pi}^*$, conocida como la distribución estacionaria o la distribución en estado estable. *I.e.:*

$$\exists!\, \boldsymbol{\pi}^* \in \mathbb{P}^n,\ \forall\, \boldsymbol{\pi_0} \in \mathbb{P}^n : \quad \lim_{t\to\infty} \boldsymbol{\pi_t} \ = \ \boldsymbol{\pi}^*$$

- Además, si la distribución estacionaria existe entonces es invariante:

$$(\boldsymbol{\pi}^*)' \ = \ (\boldsymbol{\pi}^*)'\, \boldsymbol{P}$$

  Esto implica que si la distribución del estado inicial de la cadena es igual a la distribución estacionaria, *i.e.,* que si $X_0 \sim \boldsymbol{\pi}^*$, entonces la distribución de todo estado será igual a la distribución estacionaria, *i.e.,* para todo $t \geq 1$ es el caso que $X_t \sim \boldsymbol{\pi}^*$.

Distribución Estacionaria

- Finalmente, escribiendo la ecuación matricial anterior como un sistema de ecuaciones escalares obtenemos:

$$\forall \text{ estado } k: \; \boldsymbol{\pi}^*(k) \; = \sum_{\text{estados } i} \boldsymbol{\pi}^*(i) \, \boldsymbol{P}(i,k)$$

  Nótese que las ecuaciones de balance no son linealmente independientes, lo que significa que siempre existirá una ecuación redundante.

Ejercicio en Clase:

Carlos es un aficionado del fútbol local quien, convenientemente, apoya a Barcelona o a Emelec dependiendo de cual de los dos equipos haya ganado el último partido. Cuando Barcelona gana un partido, la probabilidad de que vuelva a ganar es del 60%. En cambio, cuando Emelec gana la probabilidad de que vuelva a ganar es del 50%.

Modele el comportamiento de Carlos como una Cadena de Markov y encuentre la fracción del tiempo que él apoya a cada equipo.

Distribución Estacionaria

Ejercicio en Clase:

Una máquina caprichosa tiene el siguiente comportamiento:

- Si la máquina termina el día en buen estado, la misma terminará el siguiente día en buen estado con probabilidad p. Caso contrario terminará averiada.
- Si la máquina termina el día averiada entonces los técnicos se tomarán todo el siguiente día para intentar arreglarla. Con probabilidad q lograrán arreglar la máquina; caso contrario, tendrán que volverlo a intentar el siguiente día.

Con todo esto en mente, construya un modelo de Cadena de Markov del comporamiento de esta máquina y calcule el porcentaje del tiempo que la máquina estará operativa y averiada como función de p y q.

Distribución Estacionaria

Ejercicio en Clase:

Usualmente las Cadenas de Markov no son modelos suficientemente complejos como para representar el comportamiento humano, puesto que nuestros cerebros no tienen la Propiedad Markoviana, *i.e.*, tenemos memoria. Aún asi, podemos usar cadenas de Markov para modelar a personas erráticas, impredecibles y posiblemente irracionales. Por ejemplo, considere el siguiente modelo de la presidencia de Donald Trump, donde los estados son:

1. Hablar de como ganó las elecciones obteniendo la mayoría de los colegios electorales, a pesar de haber perdido el voto popular por más de dos millones de votos.
2. Defenderse del escándalo de Russia.
3. Insistir en construir una pared en la frontera sur con México.

4. Hablar de los acuerdos de comerciales que dice que renegociará (*e.g.*, NAFTA) y que dice que serán ventajosos para su país.

5. Pelearse con celebridades en Twitter.

La matriz de transición para este modelo es:

$$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0.25 & 0.25 & 0 \\ 0 & 0.6 & 0 & 0 & 0.4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.9 & 0.1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.3 & 0.3 & 0 & 0.4 \end{bmatrix}$$

Con esto en mente, calcule la fracción del tiempo a largo plazo que Donald Trump dedicará a cada una de sus actividades.

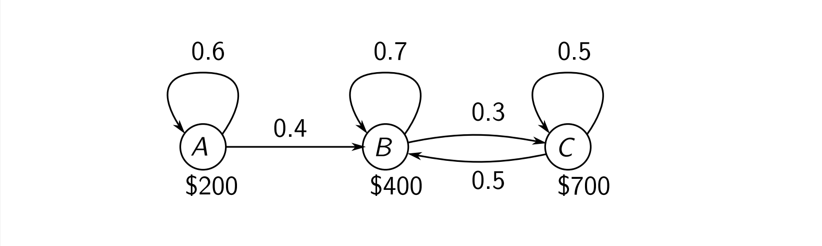
Recompensas y Probabilidades de Absorción

Ejemplo aleatorio:

Considere el siguiente modelo de una acción en un proyecto:

- El proyecto empieza en el estado A, en el cual genera utilidades de \$200 mensuales. El proyecto avanza al estado B con probabilidad del 40% y permanece en el mismo estado con probabilidad del 60%.
- Una vez que el proyecto alcanza el estado B genera \$400 mensuales. En este estado el proyecto avanza al estado C con probabilidad del 30% y permanece en el mismo estado con probabilidad del 70%.
- En el estado C el proyecto genera \$700 mensuales. El proyecto regresa al estado B con probabilidad del 50% y permanece en el mismo estado con probabilidad del 50%.

Recompensas y Probabilidades de Absorción



Recompensas y Probabilidades de Absorción

Considere ahora las siguientes preguntas, suponiendo que el proyecto acaba de empezar y que nosotros somos los dueños de una acción en el mismo.

- A largo plazo, cuánta utilidad genera el proyecto por periodo?
- Supóngase que la tasa de interés es $r = 5\%$. Cuál es el Valor Actual Neto Esperado (VAN-E) de la acción? *I.e.*, cuál debería ser su precio?
- Cuál es el número esperado de períodos que transcurrirán hasta que el proyecto alcance el estado B por primera vez? Y hasta que el proyecto alcance el estado C por primera vez?

Recompensas y Probabilidades de Absorción

Ejemplo aleatorio:

Un inversionista de riesgo se encuentra evaluando varias nuevas empresas, por lo cual las ha clasificado de la siguiente manera:

- Las empresas rango A son las mejores. Cada trimestre una empresa rango A logra volverse totalmente rentable con probablidad del 20%, se mantiene en el mismo rango con probabilidad del 50% y desciende de rango con probabilidad del 30%.
- Las empresas rango B son las segundas mejores. Cada trimestre una empresa rango B asciende a rango A con probabilidad del 25%, se mantiene en el mismo rango con probabilidad del 55% y desciende de rango con probabilidad del 20%.
- Las empresas rango C son las problemáticas. Cada trimestre una empresa rango C asciende a rango B con probabilidad del 30%, se mantiene en el mismo rango con probabilidad del 50% y quiebra con probabilidad del 20%.

Complete las siguientes actividades:

- Para cada rango de empresa, calcule la probabilidad de que una empresa de ese rango eventualmente *(i)* logre volverse totalmente rentable o *(ii)* quiebre.
- Suponga que el inversionista compra 200 acciones de empresas rango A a \$3.40 cada una y 300 acciones de empresas rango B a \$1.80 cada una. Suponiendo que el inversionista puede vender las acciones de una empresa que logra ser totalmente rentable en al menos \$5.00 cada una, y que el valor de una acción se pierde totalmente cuando su respectiva empresa quiebra, es este plan de inversión (*i.e.*, esta apuesta) rentable?

Recompensas y Probabilidades de Absorción

Cadenas de Markov con Recompensas:

- Agregamos al modelo una función de recompensa R que le asigna a cada estado i una recompensa o ganancia $R(i)$.
- Si la cadena es aperiódica y tiene una sola clase recurrente entonces la recompensa esperada por período, denotada $\overline{R}$, se calcula ponderando la función de recompensa por las probabilidades estacionarias. *I.e.:*

$$\overline{R} = \sum_{\text{estados } i} R(i)\, \boldsymbol{\pi}^*(i)$$

Recompensas y Probabilidades de Absorción

- En algunos modelos financieros se nos provee de una tasa de interés $r \in (0,1)$ y se nos solicita que calculemos el Valor Actual Neto Esperado (VAN-E) de la recompensa total acumulada a lo largo del horizonte infinito del modelo. Para esto primero calculamos el factor de descuento:

$$\gamma \;=\; \frac{1}{1+r}$$

Luego definimos una función V que le asigna a cada estado i el VAN-E de la recompensa total que acumularía un agente que empieza el proceso desde el estado i, denotado $V(i)$. Esto nos permite escribir de manera recursiva una *ecuación de valor* para cada estado:

$$\forall\,\text{estado } i: \;\; V(i) \;=\; R(i) \;+\; \gamma \sum_{\text{estados } j} \boldsymbol{P}(i,j)\, V(j)$$

Finalmente, resolvemos el sistema de ecuaciones lineales correspondiente y reportamos el VAN-E de estado de interés.

Recompensas y Probabilidades de Absorción

- Supóngase ahora que la cadena se encuentra en el estado i y que nos interesa calcular el tiempo esperado de primera visita al estado k, *i.e.*, el número esperado de períodos que transcurrirán hasta que la cadena visite el estado k. Entonces podemos definir una función T que le asigna a cada estado i el tiempo esperado de primera visita al estado k, denotado $T(i)$, y escribir de manera recursiva una ecuación de tiempo esperado de primera visita para cada estado:

$$\forall \text{ estado } i \neq k: \; T(i) \;=\; 1 \;+ \sum_{\text{estados } j \neq k} \boldsymbol{P}(i,j)\, T(j)$$

  Finalmente resolvemos el sistema de ecuaciones lineales correspondiente y reportamos el tiempo esperado de primera visita desde el estado i hasta el estado k.

Recompensas y Probabilidades de Absorción

- Como hecho interesante, las ecuaciones de tiempo esperado de primera visita se pueden obtener a partir del método para VAN-E en modelos financieros. Más precisamente:

  1. Definimos una función de recompensa que le asigna una unidad a cada estado excepto al estado k (al cual le asigna cero unidades).
  2. Fijamos la tasa de interés en cero, *i.e.,* $r = 0$, lo cual a su vez causa que las recompensas futuras no sean descontadas, *i.e.,* $\gamma = 1$.
  3. Fijamos $V(k) = 0$ y escribimos una ecuación de valor para cada estado.

Probabilidades de Absorción:

- Supóngase que una cadena tiene al menos un estado transitorio que puede alcanzar a cualquiera de dos estados absorbentes, los cuales denotaremos como k_1 y k_2, y que nos interesa calcular la probabilidad de que la cadena alcance cada uno de los dos estados absorbentes si empieza desde cada uno de los otros estados.

- Entonces podemos definir una función A que le asigna a cada estado i la probabilidad de que alcanzar el estado absorbente k_1. Obviamente:

$$A(k_1) = 1 \qquad\qquad A(k_2) = 0$$

  En cambio, para el resto de estados escribimos de manera recursiva el siguiente juego de ecuaciones lineales:

$$\forall \, \text{estado } i \neq k: \; A(i) \; = \sum_{\text{estados } j} \boldsymbol{P}(i,j)\, A(j)$$