Control Automático: Lección 02

**Año:** 2016-2017 **Término:** II **Instructor:** Luis I. Reyes Castro **Paralelo:** 02

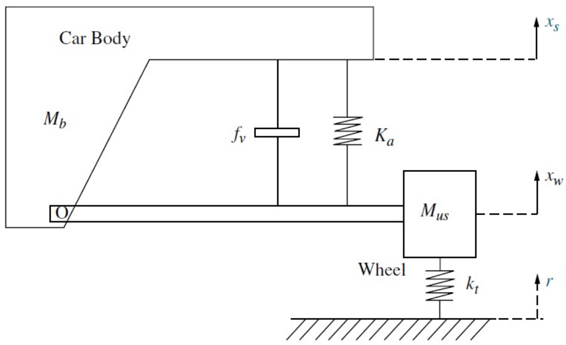
**COMPROMISO DE HONOR**

Yo, ______________________ al firmar este compromiso, reconozco que la presente lección está diseñada para ser resuelta de manera individual, que puedo usar un lápiz o pluma y una calculadora científica, que solo puedo comunicarme con la persona responsable de la recepción de la lección, y que cualquier instrumento de comunicación que hubiere traído debo apagarlo. También estoy conciente que no debo consultar libros, notas, ni materiales didácticos adicionales a los que el instructor entregue durante la lección o autorice a utilizar. Finalmente, me comprometo a desarrollar y presentar mis respuestas de manera clara y ordenada.

Firmo al pie del presente compromiso como constancia de haberlo leído y aceptado.

Firma: ______________________ Número de matrícula: ______________________

**Problema 2.1.** Considere el siguente modelo de la suspensión de un automóvil.




Encuentre la función de transferencia $G(s) \triangleq X_s(s)/R(s)$ que relaciona la perturbación de la carretera $r(t)$ con el desplazamiento vertical del cuerpo del vehículo $x_s(t)$. **[5 Puntos]**

*Solución:* Escribiendo la sumatoria de fuerzas en la rueda (cuya masa es $M_{us}$) y en el cuerpo del automóvil (cuya masa es $M_b$) obtenemos el siguiente par de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{aligned} M_{us}\,\ddot{x}_w(t) &= -k_t\,(x_w(t) - r(t)) + K_a\,(x_s(t) - x_w(t)) + f_v\,(\dot{x}_s(t) - \dot{x}_w(t)) \\ M_b\,\ddot{x}_s(t) &= -K_a\,(x_s(t) - x_w(t)) - f_v\,(\dot{x}_s(t) - \dot{x}_w(t)) \end{aligned}$$

Tomando la Transformación de Laplace de ambos lados de ambas ecuaciones y organizando los términos resultantes obtenemos el siguiente par de ecuaciones algebraicas:

$$\begin{aligned} (\,M_{us}\,s^2 + f_v\,s + (k_t + K_a)\,)\,X_w(s) - (\,f_v\,s + K_a\,)\,X_s(s) &= k_t\,R(s) \\ (\,M_b\,s^2 + f_v\,s + K_a\,)\,X_s(s) - (\,f_v\,s + K_a\,)\,X_w(s) &= 0 \end{aligned}$$

Resolviendo para $X_w(s)$ en la segunda ecuación, obtenemos:

$$X_w(s) = \left( \frac{M_b\,s^2 + f_v\,s + K_a}{f_v\,s + K_a} \right) X_s(s)$$

Luego, reemplazando $X_w(s)$ en la primera ecuación por la expresión anterior obtenemos:

$$\left[ \frac{(\,M_{us}\,s^2 + f_v\,s + (k_t + K_a)\,)\,(\,M_b\,s^2 + f_v\,s + K_a\,)}{f_v\,s + K_a} - (\,f_v\,s + K_a\,) \right] X_s(s) = k_t\,R(s)$$

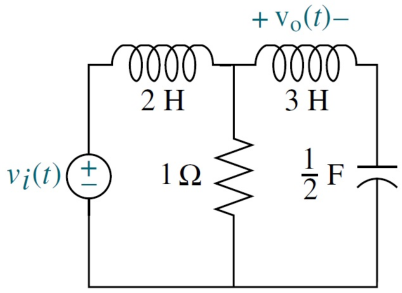
Finalmente, vemos que:

$$G(s) \;=\; \frac{k_t\,(\,f_v\,s + K_a\,)}{(\,M_{us}\,s^2 + f_v\,s + (k_t + K_a)\,)\,(\,M_b\,s^2 + f_v\,s + K_a\,) - (\,f_v\,s + K_a\,)^2}$$

*Opcional:* Si denotamos al denominador de $G(s)$ como $D(s)$ entonces:

$$\begin{aligned} D(s) \;=\; & (\,M_{us}\,M_b\,)\,s^4 + (\,M_{us} + M_b\,)\,f_v\,s^3 \\ & + (\,M_{us}\,K_a + M_b\,(k_t + K_a)\,)\,s^2 + f_v\,k_t\,s + (\,k_t + K_a\,) \end{aligned}$$

**Problema 2.2.** Considere el siguente circuito analógico.




Encuentre la función de transferencia $G(s) \triangleq V_o(s)/V_i(s)$ que relaciona el voltage en la fuente $v_i(t)$ con el voltage $v_o(t)$ a través del inductor señalado en la figura. [**5 Puntos**]

*Solución:* Primero introducimos la corriente transformada $I_1(s)$ en el lazo de la izquierda en el sentido de las manecillas del reloj, junto con la corriente transformada $I_2(s)$ en el lazo de la derecha en el mismo sentido que la primera corriente. Luego reemplazamos el inductor de $L = 2$ H por una impedancia de $Z(s) = 2s$, el inductor de $L = 3$ H por una impedancia de $Z(s) = 3s$, la resistencia de $R = 1\ \Omega$ por una impedancia $Z(s) = 1$, y el capacitor de $C = 1/2$ F por una impedancia de $Z(s) = 2/s$.

Ahora, sumando voltajes alrededor del lazo de la izquierda, obtenemos:

$$\begin{aligned} V_i(s) - (2s)\,I_1(s) - (1)\,(I_1(s) - I_2(s)) \;&=\; 0 \\ \implies V_i(s) \;&=\; (2s+1)\,I_1(s) - I_2(s) \end{aligned}$$

Mas aún, sumando voltajes alrededor del lazo de la derecha, obtenemos:

$$\begin{aligned} -(1)\,(I_2(s) - I_1(s)) - (3s)\,I_2(s) - \left(\frac{2}{s}\right) I_2(s) \;&=\; 0 \\ \implies I_1(s) \;&=\; \left(1 + 3s + \frac{2}{s}\right) I_2(s) \\ \implies I_1(s) \;&=\; \left(\frac{3s^2 + s + 2}{s}\right) I_2(s) \end{aligned}$$

A su vez, reemplazando $I_1(s)$ por la expresión anterior en la ecuación del lazo de la izquierda, vemos que:

$$V_i(s) \;=\; \left[\frac{(2s+1)\,(3s^2 + s + 2)}{s} - 1\right] I_2(s)$$

$$\implies V_i(s) \;=\; \left( \frac{6\,s^3 + 5\,s^2 + 4\,s + 2}{s} \right) I_2(s)$$

Finalmente, reconociendo que $V_o(s) = (3s)\,I_2(s)$, concluimos que:

$$V_i(s) \;=\; \left( \frac{6\,s^3 + 5\,s^2 + 4\,s + 2}{3s^2} \right) V_o(s)$$

$$\implies G(s) \;=\; \frac{3\,s^2}{6\,s^3 + 5\,s^2 + 4\,s + 2}$$