Modelos Estocásticos (INDG-1008): Lección 01

Semestre: 2017-2018 Término I **Instructor:** Luis I. Reyes Castro

COMPROMISO DE HONOR

Yo, ______________________________ al firmar este compromiso, reconozco que la presente evaluación está diseñada para ser resuelta de manera individual, que puedo usar un lápiz o pluma y una calculadora científica, que solo puedo comunicarme con la persona responsable de la recepción de la evaluación, y que cualquier instrumento de comunicación que hubiere traído debo apagarlo. También estoy conciente que no debo consultar libros, notas, ni materiales didácticos adicionales a los que el instructor entregue durante la evaluación o autorice a utilizar. Finalmente, me comprometo a desarrollar y presentar mis respuestas de manera clara y ordenada.

Firmo al pie del presente compromiso como constancia de haberlo leído y aceptado.

Firma: ______________________________ Número de matrícula: ____________________

Problema 1.1. [5 Puntos] Los sistemas de telecomunicaciones digitales siempre involucran aleatoriedad, puesto que las transmisiones inalámbricas son altamente ruidosas, especialmente sobre largas distancias. Considere un transmisor sobre un canal ruidoso donde, en cada ciclo, si hay al menos un paquete de datos en cola entonces el paquete es transmitido exitosamente con probabilidad p; caso contrario, el transmisor intentará reenviar el paquete en el siguiente ciclo. Suponga además que la cola del transmisor tiene tamaño B, lo que significa que si durante un ciclo hay B paquetes en cola entonces cualquier otro paquete que llegue a la cola durante ese ciclo será rechazado, y por ende perdido para siempre. Finalmente, suponga que los números de paquetes que arriban a la cola del transmisor en cada ciclo son variables aleatoria i.i.d. con distribución Poisson con parámetro λ.

Con esto en mente, modele la situación antes mencionada como una Cadena de Markov para el caso cuando $B = 4$. En particular, provea el grafo de la cadena y la matriz de transición.

Solución: Consideramos cada posible estado:

- Si $X_t = 0$ entonces:
  - Si $X_{t+1} = k$ para cualquier $k \in \{0, 1, 2, 3\}$ es porque hubieron k arribos, *i.e.:*

$$\forall k \in \{0,1,2,3\} : \boldsymbol{P}_{0k} = \mathbb{P}(\text{Poisson}(\lambda) = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

  - Si $X_{t+1} = 4$ es porque hubieron cuatro o más arribos, *i.e.:*

$$\boldsymbol{P}_{04} = \mathbb{P}(\text{Poisson}(\lambda) \geq 4) = \sum_{k=4}^{\infty} \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

- Si $X_t = 1$ entonces:
  - Si $X_{t+1} = 0$ es porque hubo un envío exitoso y ningun arribo, *i.e.:*

$$\boldsymbol{P}_{10} = p \cdot \mathbb{P}(\text{Poisson}(\lambda) = 0) = p\, e^{-\lambda}$$

  - Si $X_{t+1} = 1$ es porque hubo un envío exitoso y un arribo, o porque el envío fracasó y no hubo un arribo, *i.e.:*

$$\begin{aligned} \boldsymbol{P}_{11} &= p \cdot \mathbb{P}(\text{Poisson}(\lambda) = 1) + (1-p) \cdot \mathbb{P}(\text{Poisson}(\lambda) = 0) \\ &= p\,\lambda\, e^{-\lambda} + (1-p)\, e^{-\lambda} \end{aligned}$$

- Si $X_{t+1} = 2$ es porque hubo un envío exitoso y dos arribos, o porque el envío fracasó y hubo un arribo, *i.e.:*

$$\begin{aligned} \boldsymbol{P}_{12} &= p \cdot \mathbb{P}\,(\,\text{Poisson}(\lambda) = 2\,) + (1-p) \cdot \mathbb{P}\,(\,\text{Poisson}(\lambda) = 1\,) \\ &= p\,\frac{\lambda^2\,e^{-\lambda}}{2!} + (1-p)\,\lambda\,e^{-\lambda} \end{aligned}$$

- Si $X_{t+1} = 3$ es porque hubo un envío exitoso y tres arribos, o porque el envío fracasó y hubo dos arribos, *i.e.:*

$$\begin{aligned} \boldsymbol{P}_{13} &= p \cdot \mathbb{P}\,(\,\text{Poisson}(\lambda) = 3\,) + (1-p) \cdot \mathbb{P}\,(\,\text{Poisson}(\lambda) = 2\,) \\ &= p\,\frac{\lambda^3\,e^{-\lambda}}{3!} + (1-p)\,\frac{\lambda^2\,e^{-\lambda}}{2!} \end{aligned}$$

- Si $X_{t+1} = 4$ es porque hubo un envío exitoso y cuatro o más arribos, o porque el envío fracasó y hubo tres o más arribos, *i.e.:*

$$\begin{aligned} \boldsymbol{P}_{14} &= p \cdot \mathbb{P}\,(\,\text{Poisson}(\lambda) \geq 4\,) + (1-p) \cdot \mathbb{P}\,(\,\text{Poisson}(\lambda) \geq 3\,) \\ &= p\,\sum_{k=4}^{\infty} \frac{\lambda^k\,e^{-\lambda}}{k!} + (1-p)\,\sum_{k=3}^{\infty} \frac{\lambda^k\,e^{-\lambda}}{k!} \end{aligned}$$

• Si $X_t = 2$ entonces:

- Si $X_{t+1} = 1$ es porque hubo un envío exitoso y ningun arribo, *i.e.:*

$$\boldsymbol{P}_{21} \;=\; p \cdot \mathbb{P}\,(\,\text{Poisson}(\lambda) = 0\,) \;=\; p\,e^{-\lambda}$$

- Si $X_{t+1} = 2$ es porque hubo un envío exitoso y un arribo, o porque el envío fracasó y no hubo un arribo, *i.e.:*

$$\begin{aligned} \boldsymbol{P}_{22} &= p \cdot \mathbb{P}\,(\,\text{Poisson}(\lambda) = 1\,) + (1-p) \cdot \mathbb{P}\,(\,\text{Poisson}(\lambda) = 0\,) \\ &= p\,\lambda\,e^{-\lambda} + (1-p)\,e^{-\lambda} \end{aligned}$$

- Si $X_{t+1} = 3$ es porque hubo un envío exitoso y dos arribos, o porque el envío fracasó y hubo un arribo, *i.e.:*

$$\begin{aligned} \boldsymbol{P}_{23} &= p \cdot \mathbb{P}\,(\,\text{Poisson}(\lambda) = 2\,) + (1-p) \cdot \mathbb{P}\,(\,\text{Poisson}(\lambda) = 1\,) \\ &= p\,\frac{\lambda^2\,e^{-\lambda}}{2!} + (1-p)\,\lambda\,e^{-\lambda} \end{aligned}$$

- Si $X_{t+1} = 4$ es porque hubo un envío exitoso y tres o más arribos, o porque el envío fracasó y hubo dos o más arribos, *i.e.:*

$$\begin{aligned} \boldsymbol{P}_{24} &= p \cdot \mathbb{P}\,(\,\text{Poisson}(\lambda) \geq 3\,) + (1-p) \cdot \mathbb{P}\,(\,\text{Poisson}(\lambda) \geq 2\,) \\ &= p\,\sum_{k=3}^{\infty} \frac{\lambda^k\,e^{-\lambda}}{k!} + (1-p)\,\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda^k\,e^{-\lambda}}{k!} \end{aligned}$$

• Si $X_t = 3$ entonces:

- Si $X_{t+1} = 2$ es porque hubo un envío exitoso y ningun arribo, *i.e.:*

$$\boldsymbol{P}_{32} \;=\; p \cdot \mathbb{P}\,(\,\text{Poisson}(\lambda) = 0\,) \;=\; p\,e^{-\lambda}$$

- Si $X_{t+1} = 3$ es porque hubo un envío exitoso y un arribo, o porque el envío fracasó y no hubo un arribo, *i.e.:*

$$\begin{aligned}\boldsymbol{P}_{33} \;&=\; p \cdot \mathbb{P}\,(\,\text{Poisson}(\lambda) = 1\,) + (1-p) \cdot \mathbb{P}\,(\,\text{Poisson}(\lambda) = 0\,) \\ &=\; p\,\lambda\,e^{-\lambda} + (1-p)\,e^{-\lambda}\end{aligned}$$

- Si $X_{t+1} = 4$ es porque hubo un envío exitoso y dos o más arribos, o porque el envío fracasó y hubo uno o más arribos, *i.e.:*

$$\begin{aligned}\boldsymbol{P}_{34} \;&=\; p \cdot \mathbb{P}\,(\,\text{Poisson}(\lambda) \geq 2\,) + (1-p) \cdot \mathbb{P}\,(\,\text{Poisson}(\lambda) \geq 1\,) \\ &=\; p \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda^k\,e^{-\lambda}}{k!} + (1-p)\,(\,1 - e^{-\lambda}\,)\end{aligned}$$

- Si $X_t = 4$ entonces:
  - Si $X_{t+1} = 3$ es porque hubo un envío exitoso y ningun arribo, *i.e.:*

$$\boldsymbol{P}_{43} \;=\; p \cdot \mathbb{P}\,(\,\text{Poisson}(\lambda) = 0\,) \;=\; p\,e^{-\lambda}$$

  - Caso contrario $X_{t+1} = 4$, *i.e.:*

$$\boldsymbol{P}_{44} \;=\; 1 - p\,e^{-\lambda}$$