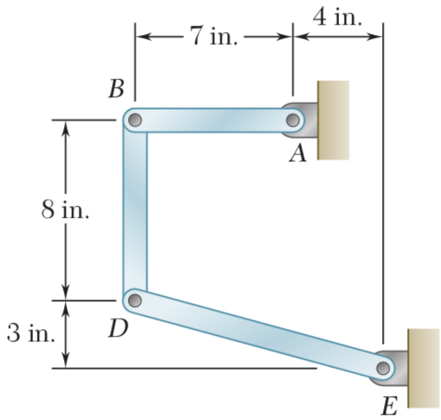
Mecánica Vectorial (MECG-1001): Lección 02

Semestre: 2017-2018 Término II **Instructor:** Luis I. Reyes Castro **Paralelo:** 08

Problema 2.1. En el ensamble mostrado en la siguiente figura la barra AB tiene una velocidad angular constante de 4 rad/s en el sentido de las manecillas del reloj.



Complete las siguientes actividades:

a) 4 Puntos: Encuentre las velocidades angulares de las barras BD y DE.

Solución: Primero tomamos algunos datos:

$$
\begin{aligned}
\widehat{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{AB}} &= (\,-1,\,0\,) \\
\boldsymbol{r}_{\boldsymbol{AB}} &= (\,-7,\,0\,)\text{ in} \\
\widehat{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{ED}} &= (\,-0.9648,\,+0.2631\,) \\
\boldsymbol{r}_{\boldsymbol{ED}} &= (\,-11,\,+3\,)\text{ in} \\
\widehat{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{BD}} &= (\,0,\,-1\,) \\
\boldsymbol{r}_{\boldsymbol{BD}} &= (\,0,\,-8\,)\text{ in} \\
\boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{AB}} &= -4\,\widehat{\boldsymbol{k}}\text{ rad/s} \\
\boldsymbol{\alpha}_{\boldsymbol{AB}} &= \boldsymbol{0}\text{ rad/s}^2
\end{aligned}
$$

Luego, reconocemos que las velocidades de A y B se relacionan con la velocidad angular de la barra AB de la siguiente manera:

$$\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{B}} \;=\; \boldsymbol{v}_{\boldsymbol{A}} + \boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{AB}} \times \boldsymbol{r}_{\boldsymbol{AB}} \;=\; \begin{bmatrix} 0 \\ +28 \end{bmatrix} \text{ in/s}$$

Similarmente, vemos que las velocidades de D y E se relacionan con la velocidad angular de la barra DE de la siguiente manera:

$$\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{D}} \;=\; \boldsymbol{v}_{\boldsymbol{E}} + \boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{DE}} \times \boldsymbol{r}_{\boldsymbol{ED}} \;=\; \begin{bmatrix} -3\,\omega_{DE} \\ -11\,\omega_{DE} \end{bmatrix} \text{ in/s}$$

Finalmente, vemos que las velocidades de B y D se relacionan con la velocidad angular de la barra BD de la siguiente manera:

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{D}} &= \boldsymbol{v}_{\boldsymbol{B}} + \boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{BD}} \times \boldsymbol{r}_{\boldsymbol{BD}} \\
&= \begin{bmatrix} 0 \\ +28 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} +8\,\omega_{BD} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +8\,\omega_{BD} \\ +28 \end{bmatrix} \text{ in/s}
\end{aligned}
$$

Igualando las dos expresiones anteriores para la velocidad en D, tenemos:

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} -3\,\omega_{DE} \\ -11\,\omega_{DE} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} +8\,\omega_{BD} \\ +28 \end{bmatrix} \\
\Longrightarrow\ -11\,\omega_{DE} &= +28 \\
\Longrightarrow\ \boldsymbol{\omega_{DE}} &= -2.546\,\widehat{\boldsymbol{k}}\ \text{rad/s} \\
\Longrightarrow\ \boldsymbol{\omega_{BD}} &= +0.9546\,\widehat{\boldsymbol{k}}\ \text{rad/s}
\end{aligned}$$

b) 4 Puntos: Encuentre las aceleraciones angulares de las barras BD y DE.

Solución: Primero, reconocemos que las aceleraciones de A y B se relacionan con la aceleración angular de la barra AB de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{a_B} &= \boldsymbol{a_A} + \boldsymbol{\alpha_{AB}} \times \boldsymbol{r_{AB}} - \omega_{AB}^2\,\boldsymbol{r_{AB}} \\
&= \mathbf{0} + \mathbf{0} - (-4)^2 \begin{bmatrix} -7 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +112 \\ 0 \end{bmatrix}\ \text{in/s}^2
\end{aligned}$$

Similarmente, vemos que las aceleraciones de D y E se relacionan con la velocidad y aceleración angular de la barra DE de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{a_D} &= \boldsymbol{a_E} + \boldsymbol{\alpha_{DE}} \times \boldsymbol{r_{ED}} - \omega_{DE}^2\,\boldsymbol{r_{ED}} \\
&= \mathbf{0} + \begin{bmatrix} -3\,\alpha_{DE} \\ -11\,\alpha_{DE} \end{bmatrix} - (-2.546)^2 \begin{bmatrix} -11 \\ +3 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} +71.30 - 3\,\alpha_{DE} \\ -19.47 - 11\,\alpha_{DE} \end{bmatrix}\ \text{in/s}^2
\end{aligned}$$

Finalmente, vemos que las aceleraciones de B y D se relacionan con la velocidad y aceleración angular de la barra BD de la siguiente manera:

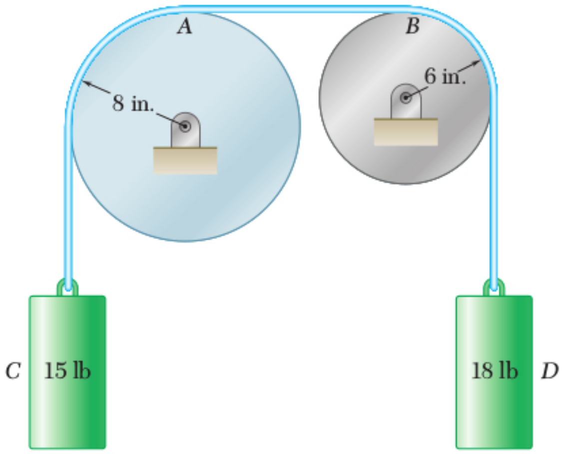
$$\begin{aligned}
\boldsymbol{a_D} &= \boldsymbol{a_B} + \boldsymbol{\alpha_{BD}} \times \boldsymbol{r_{BD}} - \omega_{BD}^2\,\boldsymbol{r_{BD}} \\
&= \begin{bmatrix} +112 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} +8\,\alpha_{BD} \\ 0 \end{bmatrix} - (+0.9543)^2 \begin{bmatrix} 0 \\ -8 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} +112 + 8\,\alpha_{BD} \\ +7.286 \end{bmatrix}\ \text{ft/s}^2
\end{aligned}$$

Igualando las dos expresiones anteriores para la aceleración en D, tenemos:

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} +71.30 - 3\,\alpha_{DE} \\ -19.47 - 11\,\alpha_{DE} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} +112 + 8\,\alpha_{BD} \\ +7.286 \end{bmatrix} \\
\Longrightarrow\ -19.47 - 11\,\alpha_{DE} &= +7.286 \\
\Longrightarrow\ \boldsymbol{\alpha_{DE}} &= -2.4324\,\widehat{\boldsymbol{k}}\ \text{rad/s}^2 \\
\Longrightarrow\ \boldsymbol{\alpha_{BD}} &= -4.1754\,\widehat{\boldsymbol{k}}\ \text{rad/s}^2
\end{aligned}$$

■

Problema 2.2. [6 Puntos] Dos discos uniformes y dos cilindros están ensamblados de la manera como se muestra en la siguiente figura. El disco A pesa 20 lb y el disco B pesa 12 lb. Si el sistema se suelta desde el reposo, encuentre las aceleraciones angulares de los discos y las aceleraciones translacionales de los cilindros.



Solución: Primero tomamos algunos datos:

$$
\begin{aligned}
m_A &= 0.6216 \text{ slug} \\
m_B &= 0.3730 \text{ slug} \\
m_C &= 0.4662 \text{ slug} \\
m_D &= 0.5595 \text{ slug} \\
I_A &= (1/2)\, m_A\, r_A^2 \;=\; 0.1381 \text{ slug-ft}^2 \\
I_B &= (1/2)\, m_B\, r_B^2 \;=\; 0.0466 \text{ slug-ft}^2
\end{aligned}
$$

Ahora, si definimos a las tensiones de la cuerda en los segmentos AC, AB y BD como T_{AC}, T_{AB} y T_{BD}, respectivamente, entonces podemos ver que las sumatorias de torques en las poleas y las sumatorias de fuerzas en los cilindros resultan en:

$$
\begin{aligned}
I_A\, \alpha_A &= +r_A\,(T_{AC} - T_{AB}) \\
I_B\, \alpha_B &= +r_B\,(T_{AB} - T_{BD}) \\
m_C\,(\boldsymbol{a_C})_y &= +T_{AC} - W_C \\
m_D\,(\boldsymbol{a_D})_y &= +T_{BD} - W_D
\end{aligned}
$$

Para simplificar estas ecuaciones reconocemos las siguientes restricciones cinemáticas:

$$
\begin{aligned}
r_A\,\alpha_A &= r_B\,\alpha_B &\Longrightarrow\quad \alpha_B &= (4/3)\,\alpha_A \text{ rad/s}^2 \\
(\boldsymbol{a_C})_y &= -r_A\,\alpha_A &\Longrightarrow\quad (\boldsymbol{a_C})_y &= -(2/3)\,\alpha_A \text{ ft/s}^2 \\
(\boldsymbol{a_D})_y &= +r_B\,\alpha_B &\Longrightarrow\quad (\boldsymbol{a_D})_y &= +(2/3)\,\alpha_A \text{ ft/s}^2
\end{aligned}
$$

Reemplazando α_B, $(\boldsymbol{a_C})_y$ y $(\boldsymbol{a_D})_y$ en las sumatorias de torques y fuerzas, obtenemos el siguiente sistema de cuatro ecuaciones en las cuatro incógnitas α_A, T_{AC}, T_{AB} y T_{BD}, tal como se muestra a continuación.

$$
\begin{aligned}
I_A\,\alpha_A &= +(2/3)\,(T_{AC} - T_{AB}) \\
(4/3)\,I_B\,\alpha_A &= +(1/2)\,(T_{AB} - T_{BD}) \\
-\,(2/3)\,m_C\,\alpha_A &= +T_{AC} - W_C \\
+\,(2/3)\,m_D\,\alpha_A &= +T_{BD} - W_D
\end{aligned}
$$

Resolviendo este sistema para la aceleración angular de la polea obtenemos:

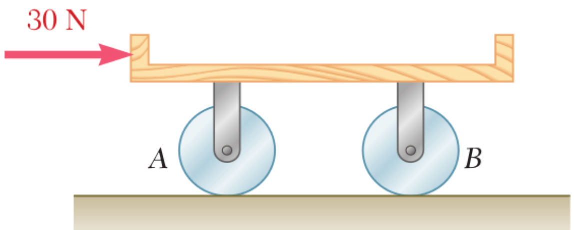
$$
\boldsymbol{\alpha_A} = -1.724\,\widehat{\boldsymbol{k}} \text{ rad/s}^2
$$

Consecuentemente:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\alpha_B} &= -2.299\,\widehat{\boldsymbol{k}}\ \mathrm{rad/s^2} \\ \boldsymbol{a_C} &= +1.149\,\widehat{\boldsymbol{j}}\ \mathrm{ft/s^2} \\ \boldsymbol{a_D} &= -1.149\,\widehat{\boldsymbol{j}}\ \mathrm{ft/s^2} \end{aligned}$$

■

Problema 2.3. [4 Puntos] La plataforma de 9 kg está soportada, como se muestra en la siguiente figura, por dos discos uniformes que ruedan sin deslizarse en todas las superficies de contacto. La masa de cada disco es de 6 kg y el radio de 80 mm. Si se sabe que el sistema está inicialmente en reposo, determine la velocidad de la plataforma después de que ésta se haya desplazado 250 mm.



Solución: Puesto que el sistema parte del reposo y que no hay cambios en su energía potencial, vemos que el trabajo externo causado por la fuerza $F = 30$ N al desplazar el centro de masa del sistema $\delta = 0.250$ m debe ser igual a la energía cinética total del sistema después del desplazamiento. El trabajo externo es:

$$\Delta E_{12} = F\,\delta = 7.5\ \mathrm{J}$$

La energía cinética total es la suma de la energía cinética translacional de la plataforma con las energía cinéticas translacionales y rotacionales de los discos. Definiendo a v_P como la velocidad de la plataforma, a v_D como la velocidad del centro de masa de cada disco, y a ω_D como la velocidad angular de cada disco, tenemos:

$$E_2 = K_2 = (1/2)\,m_P\,v_P^2 + (2)\,[\,(1/2)\,m_D\,v_D^2 + (1/2)\,I_D\,\omega_D^2\,]$$

Ahora aplicamos consideraciones cinemáticas. Claramente $v_P = v_D$. Además, por la condición de rodadura tenemos $v_D = r_D\,\omega_D$, por lo que $\omega_D = v_P/r_D$. Recordando también que la inercia de cada disco es $I_D = (1/2)\,m_D\,r_D^2$, la energía en el segundo estado es:

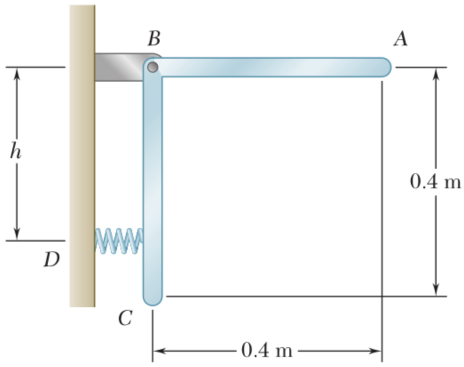
$$\begin{aligned} E_2 &= (1/2)\,m_P\,v_P^2 + (2)\,[\,(1/2)\,m_D\,v_P^2 + (1/2)\,I_D\,(v_P/r_D)^2\,] \\ &= [\,(1/2)\,m_P + m_D + (I_D/r_D^2)\,]\,v_P^2 \\ &= [\,(1/2)\,m_P + (3/2)\,m_D\,]\,v_P^2 \\ &= 40.5\,v_P^2 \end{aligned}$$

Finalmente, aplicando el Principio Trabajo-Energía, tenemos que $E_2 = \Delta E_{12}$. Igualando estas dos expresiones y resolviendo para v_P concluimos que:

$$\boldsymbol{v_P} = +0.4303\,\widehat{\boldsymbol{i}}\ \mathrm{m/s} \equiv +430.3\,\widehat{\boldsymbol{i}}\ \mathrm{mm/s}$$

■

Problema 2.4. Dos barras ligeras idénticas AB y BC se sueldan entre si para formar un mecanismo en forma de L, el cual se presiona contra un resorte en D y se suelta desde la posición indicada, tal como se muestra en la siguiente figura. Se sabe que el ángulo máximo de rotación del mecanismo en su movimiento subsecuente es de 90 °en sentido contrario al de las manecillas del reloj.



Complete las siguientes actividades:

a) 1 Punto: Calcule la inercia del ensamble alrededor de B.

Solución: Suponiendo que la masa de cada barra es m, tenemos:

$$I_B \;=\; (2)\,(1/12)\,m\,\ell^2 + (2)\,m\,(\ell/2)^2 \;=\; (2/3)\,m\,\ell^2 \;=\; 0.1067\,(m)\text{ kg-m}^2$$

En cambio, si suponemos que la masa del ensamble es M, tenemos:

$$I_B \;=\; (2/3)\,(M/2)\,\ell^2 \;=\; (1/3)\,M\,\ell^2 \;=\; 0.0533\,(M)\text{ kg-m}^2$$

b) 5 Puntos: Determine la magnitud de la velocidad angular del mecanismo cuando pasa por la posición en la que la barra AB forma un ángulo de 30 °con la horizontal.

Solución: Definimos el primer estado como aquel donde la barra AB está en posición vertical, es decir, donde alcanza su ángulo, y el segundo estado donde la misma barra forma un ángulo de $\theta = 30\,°$ con la horizontal. Con esto en mente, primero computamos el centro de masa del ensamble con respecto al punto B. Por simetría, es evidente que en la posición mostrada en la figura el centro de masa del ensamble se localiza en el punto $\boldsymbol{G_0} = (+\delta, -\delta)$, donde:

$$\delta \;=\; \frac{(m)(\pm 0) + (m)(+\ell/2)}{2m} \;=\; +0.1\text{ m}$$

De este cálculo también podemos reconocer que punto B siempre se encuentra a una distancia de $r = \delta\sqrt{2}$ m del centro de masa del ensamble. Adicionalmente, podemos observar que en el primer estado la locación del centro de masa del ensamble es $\boldsymbol{G_1} = (+0.1, +0.1)$, mientras que en el segundo estado es:

$$(\boldsymbol{G_2})_y \;=\; \frac{(m)[(+\ell/2)\sin(30\,°)] + (m)[(-\ell/2)\cos(30\,°)]}{2m} \;=\; -0.0366\text{ m}$$

Vemos así que la altura del centro de masa del ensamble en el primer estado relativo al segundo estado es:

$$h \;=\; (\boldsymbol{G_1})_y - (\boldsymbol{G_2})_y \;=\; (+0.1) - (-0.0366) \;=\; +0.1366\text{ m}$$

Consecuentemente, la energía del sistema en el primer estado es:

$$E_1 \;=\; U_1 \;=\; (2m)\,g\,h \;=\; 2.68\,(m)\text{ J}$$

Mientras que la energía del sistema en el segundo estado es:

$$\begin{aligned} E_2 \;=\; K_2 \;&=\; (1/2)\,(2m)\,(v_G)^2 + (1/2)\,I_B\,\omega^2 \\ &=\; m\,(v_G)^2 + (1/3)\,m\,\ell^2\,\omega^2 \end{aligned}$$

Ahora, puesto que el ensamble está rotando alrededor del punto B es evidente que $v_G = r\,\omega = \delta\,\sqrt{2}\,\omega$. Esto implica que:

$$\begin{aligned} E_2 \;=\; K_2 \;&=\; [\,m\,(\delta\sqrt{2})^2 + (1/3)\,m\,\ell^2\,]\,\omega^2 \\ &=\; [\,2\,m\,\delta^2 + (1/3)\,m\,\ell^2\,]\,\omega^2 \;=\; 0.0733\,(m)\,(\omega^2)\text{ J} \end{aligned}$$

Finalmente, aplicamos el Principio Trabajo-Energía. Puesto que nunca actúan fuerzas externas no-conservativas, la energía no puede cambiar entre estados, *i.e.*, $E_1 = E_2$. Igualando las dos expresiones vemos que se cancelan las masas de las barras y que la velocidad angular del ensamble es:

$$\omega \;=\; \pm 6.047\,\widehat{\boldsymbol{k}}\text{ rad/s}$$

La dirección exacta depende de si usted consideró en ensamble mientras subía o mientras o bajaba, y por lo tanto es irrelevante. ■