Programación Entera (INDG-1019): Examen 01

Semestre: 2018-2019 Término I **Instructor:** Luis I. Reyes Castro

Problema 1.1. Considere un programa entero que contiene $m \geq 10$ variables binarias

$$x_1,\, x_2,\, x_3,\, \ldots,\, x_m \in \{0, 1\}$$

junto con otras variables adicionales. En cada uno de los siguientes literales, se le presentará un conjunto de suposiciones seguido de una regla o preferencia. Exprese cada una de las reglas o preferencias en el lenguaje de la programación lineal entera mediante la introducción de variables enteras y/o de restricciones lineales. Por favor considere que cada literal es independiente de todos los otros.

a) *Suposiciones:* $2 \leq n < m$; $y \in \{0, 1\}$.
Regla o preferencia: La variable $y = 1$ si y solo si el número de índices $i \in [\![m]\!]$ tales que $x_i = 1$ es exactamente igual a n.

b) *Suposiciones:* $S \subseteq [\![m]\!]$ es un subconjunto de índices; $w \in \{0, 1\}$.
Regla o preferencia: La variable $w = 1$ si y solo si para todo índice $i \in S$ tenemos $x_i = 1$.

c) *Suposiciones:* $S, T \subseteq [\![m]\!]$ son subconjuntos de índices.
Regla o preferencia: Si $x_i = 1$ para al menos un índice $i \in S$ entonces $x_j = 0$ para todo índice $j \in T$, y vice-versa (*i.e.*, si $x_j = 1$ para al menos un índice $j \in T$ entonces $x_i = 0$ para todo índice $i \in S$).

d) *Suposiciones:* $S, T \subseteq [\![m]\!]$ son subconjuntos de índices; $w \in \{0, 1\}$.
Regla o preferencia: Si el número de índices $i \in S$ para los cuales $x_i = 1$ es igual o mayor al número de índices $j \in S$ para los cuales $x_j = 1$ entonces $w = 1$.

e) *Suposiciones:* $S, T \subseteq [\![m]\!]$ son subconjuntos de índices.
Regla o preferencia: Si $x_i = 1$ para al menos dos índices $i \in S$ entonces $x_j = 1$ para al menos cuatro índices $j \in T$.

■

Problema 1.2. Considere un programa entero que contiene las series temporales de variables binarias $\{x_t\}_{t=1}^T \in \{0, 1\}$, $\{y_t\}_{t=1}^T \in \{0, 1\}$ y $\{z_t\}_{t=1}^T \in \{0, 1\}$, donde $T \geq 10$, junto con otras variables adicionales. En este modelo, las series temporales $\{x_t\}$, $\{y_t\}$ y $\{z_t\}$ representan la ocurrencia o no-ocurrencia de tres tipos diferentes de eventos de interés en un problema de planificación con un horizonte de T períodos.

En cada uno de los siguientes literales, se le presentará una regla o preferencia, posiblemente precedida por un conjunto de suposiciones. Exprese cada una de las reglas o preferencias en el lenguaje de la programación lineal entera mediante la introducción de variables enteras y/o de restricciones lineales. Recuerde que cada literal es independiente de los otros.

a) *Regla o preferencia:* Si para algún periodo $k \in [\![T-1]\!]$ tenemos $x_k = 1$ entonces $y_{k+1} = 1$.

b) *Regla o preferencia:* Existe al menos un periodo $k \in [\![T-1]\!]$ tal que $x_k = 1$ y $x_{k+1} = 1$.

c) *Regla o preferencia:* Si para algún periodo $k \in [\![T-1]\!]$ tenemos $x_k = 1$ entonces $y_{k+\ell} = 1$ para al menos un $\ell \geq 1$.

d) *Regla o preferencia:* Si para algún periodo $k \in [\![T-2]\!]$ tenemos $x_k = 1$ y $y_{k+1} = 1$ entonces $z_{k+2} = 1$.

e) *Regla o preferencia:* Si para algún periodo $k \in [\![T-1]\!]$ tenemos $x_k = 1$ y $y_k = 1$ entonces $z_{k+\ell} = 1$ para al menos un $\ell \geq 1$.

■

Problema 1.3. Considere un problema de producción y almacenamiento con múltiples períodos y con una estructura de costos decrementales. En particular:

- El horizonte del problema es de T períodos.
- Los costos de producción por periodo obecen el patrón mostrado en la siguiente tabla, donde $c_1 > c_2 > c_3 > \cdots > c_M > 0$.

Cantidad Mínima	**Cantidad Máxima**	**Costo por Unidad**
$q_0 = 0$	q_1	c_1
$q_1 + 1$	q_2	c_2
$q_2 + 1$	q_3	c_3
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$q_{M-1} + 1$	q_M	c_M

  En general, para cualquier $k \in [\![m]\!]$, si se producen entre $q_{k-1}+1$ y q_k unidades se incurre un costo de producción de c_k dólares por unidad.

- Las demanadas del producto están representadas por la series de tiempo $\{d_t\}_{t=1}^{T}$.
- Se tiene una bodega con capacidad para hasta B unidades, y se incurre un costo de almacenamiento por unidad por periodo de c_{inv} dólares.

Con esto en mente, modelaremos este problema de producción y almacenamiento como un Programa Lineal Entero. Para esto introducimos las siguientes variables:

- Para todo $t \in [\![T]\!]$ y todo $k \in [\![M]\!]$ la variable binaria x_{tk} indica si en el periodo t se produjeron entre $q_{k-1} + 1$ unidades y q_k unidades.
- Para todo $t \in [\![T]\!]$ y todo $k \in [\![M]\!]$ la variable entera z_{tk} indica el número de unidades producidas en los casos cuando se producen entre $q_{k-1} + 1$ y q_k unidades.
- Para todo $t \in [\![T-1]\!]$ la variable entera w_t indica el número de unidades puestas en almacenamiento entre el periodo $t-1$ y el periodo t.

Utilizando las variables anteriores, complete las siguientes actividades:

a) Escriba las restricciones que dictan que en cada periodo t exactamente una de las variables x_{tk} debe tomar el valor uno.

b) Escriba las restricciones que dictan que en cada periodo t es el caso que si $x_{tk} = 0$ entonces $z_{tk} = 0$.

c) Escriba las restricciones que dictan que en cada periodo t es el caso que si $x_{tk} = 1$ entonces $z_{tk} \geq q_{k-1} + 1$.

d) Escriba las restricciones que dictan que en cada periodo t es el caso que si $x_{tk} = 1$ entonces $z_{tk} \leq q_k$.

e) Escriba una expresión, válida para cada periodo t, para el número de unidades producidas el periodo t.

f) Escriba las restricciones asociadas con la producción, el almacenamiento y la demanda a lo largo del horizonte de planificación.

g) Escriba una expresión, válida para cada periodo t, para el costo de producción incurrido en el periodo t.

h) Escriba la función de costo que buscamos minimizar.

■