Modelos Estocásticos (INDG-1008): Lección 04

Semestre: 2017-2018 Término II **Instructor:** Luis I. Reyes Castro

Problema 4.1. [12 Puntos] Suponga que en un futuro cercano una empresa se dedica a transportar pasageros entre sus dos estaciones en Guayaquil y Salinas utilizando carros autónomos. La empresa tiene una flota de $N = 5$ carros que oscila entre sus dos estaciones, y cada carro puede ser utilizado no más de una vez al día. Todas las mañanas, cada cada carro que amanece en la estación de Guayaquil es utilizado por algún cliente para ir a Salinas con probabilidad igual a p. Similarmente, cada cada carro que amanece en la estación de Salinas es utilizado por algún cliente para ir a Guayaquil con probabilidad q. La empresa percibe ingresos de u dólares por viaje, sin importar su dirección.

Puesto que usualmente $p > q$, *i.e.*, en promedio más clientes quieren viajar de Guayaquil a Salinas que de Salindas a Guayaquil, la empresa usualmente debe re-balancear su flota, lo cual siempre hace de noche después de cerrar sus operaciones por el día. Para esto se ordena a los carros manejarse vacíos de una estación a otra. El costo de cada viaje vacío de re-balanceo es de c dólares. Por seguridad, un ser humano debe monitorear el viaje de los vehículos en una computadora, por lo que el número de carros que se re-balancea por noche no puede exceder de $M = 2$. Por esta misma razón, se incurre un costo fijo de $4c$ dólares por re-balanceo, sin importar el número de carros movidos.

Con todo esto en mente, modele el problema de encontrar una política óptima de re-balanceo como un Proceso de Decisión Markoviano (PDM). Al construir su modelo, por favor defina sus estados de tal manera que en cada período primero se toma la decisión de re-balanceo, luego se ordena a los carros viajar vacíos, de ser necesario, y finalmente los clientes utilizan los carros para movilizarse entre las estaciones.

Nota: Suponga que todos los carros autónomos son idénticos. De esta manera, usted puede darse cuenta fácilmente que los viajes de re-balanceo siempre serán en una sola dirección.

Sugerencia: Para ahorrarse tiempo al describir las probabilidades de transición para cada par estado-acción, por favor utilice la siguiente notación:

$$\begin{aligned} \alpha(k,m) &\triangleq \mathbb{P}(\,\text{Binomial}(p,m) = k\,) \\ \beta(\ell,n) &\triangleq \mathbb{P}(\,\text{Binomial}(q,n) = \ell\,) \end{aligned}$$

Solución: Primero reconocemos que el problema tiene seis estados, puesto que la flota es de cinco carros idénticos. Estos estados se caracterizan por el número de carros que terminan el día de trabajo en cada estación, de manera que si utilizamos la notación (G, S) para representar el número de carros en las estaciones de Guayaquil y Salinas, respectivamente, vemos que el conjunto de estados es:

$$S \;=\; \{\,(5,0),\,(4,1),\,(3,2),\,(2,3),\,(1,4),\,(0,5)\,\}$$

Las acciones son re-balanceos, y pueden ser caracterizadas por el número de carros enviados en la dirección Guayaquil-Salinas, de manera que un cero indica que no se hace re-balanceo, un número positivo indica que se envían carros de Guayaquil a Salinas, y un número negativo indica que se envía carros de Salinas a Guayaquil. Las acciones disponibles en cada estado se muestran en la siguiente tabla.

	Acción				
Estado (G, S)	$+2$	$+1$	± 0	-1	-2
$(5,0)$	✓	✓	✓		
$(4,1)$	✓	✓	✓	✓	
$(3,2)$	✓	✓	✓	✓	✓
$(2,3)$	✓	✓	✓	✓	✓
$(1,4)$		✓	✓	✓	✓
$(0,5)$			✓	✓	✓

Ahora consideramos cada estado y cada acción disponible en ese estado:

- Para el estado $X_t = (5,0)$:
  - Si tomamos la acción $A_t = \pm 0$ el sistema amanece en el estado $(5,0)$. Entonces:

Estado Sucesor X_{t+1}	$\mathbb{P}(\, X_{t+1} \mid X_t,\, A_t\,)$
$(5,0)$	$\alpha(0,5)$
$(4,1)$	$\alpha(1,5)$
$(3,2)$	$\alpha(2,5)$
$(2,3)$	$\alpha(3,5)$
$(1,4)$	$\alpha(4,5)$
$(0,5)$	$\alpha(5,5)$

  - Si tomamos la acción $A_t = +1$ el sistema amanece en el estado $(4,1)$. Entonces:

Estado Sucesor X_{t+1}	$\mathbb{P}(\, X_{t+1} \mid X_t,\, A_t\,)$
$(5,0)$	$\alpha(0,4)\,\beta(1,1)$
$(4,1)$	$\alpha(0,4)\,\beta(0,1) + \alpha(1,4)\,\beta(1,1)$
$(3,2)$	$\alpha(1,4)\,\beta(0,1) + \alpha(2,4)\,\beta(1,1)$
$(2,3)$	$\alpha(2,4)\,\beta(0,1) + \alpha(3,4)\,\beta(1,1)$
$(1,4)$	$\alpha(3,4)\,\beta(0,1) + \alpha(4,4)\,\beta(1,1)$
$(0,5)$	$\alpha(4,4)\,\beta(0,1)$

  - Si tomamos la acción $A_t = +2$ el sistema amanece en el estado $(3,2)$. Entonces:

Estado Sucesor X_{t+1}	$\mathbb{P}(\, X_{t+1} \mid X_t,\, A_t\,)$
$(5,0)$	$\alpha(0,3)\,\beta(2,2)$
$(4,1)$	$\alpha(0,3)\,\beta(1,2) + \alpha(1,3)\,\beta(2,2)$
$(3,2)$	$\alpha(0,3)\,\beta(0,2) + \alpha(1,3)\,\beta(1,2) + \alpha(2,3)\,\beta(2,2)$
$(2,3)$	$\alpha(1,3)\,\beta(0,2) + \alpha(2,3)\,\beta(1,2) + \alpha(3,3)\,\beta(2,2)$
$(1,4)$	$\alpha(2,3)\,\beta(0,2) + \alpha(3,3)\,\beta(1,2)$
$(0,5)$	$\alpha(3,3)\,\beta(0,2)$

- Para el estado $X_t = (4,1)$:
  - Si tomamos la acción $A_t = \pm 0$ el sistema amanece en el estado $(4,1)$, por lo que la distribución sobre los estados sucesores es idéntica a la del caso cuando cuando el estado es $X_t = (5,0)$ y la acción es $A_t = +1$.

- Si tomamos la acción $A_t = +1$ el sistema amanece en el estado $(3,2)$, por lo que la distribución sobre los estados sucesores es idéntica a la del caso cuando cuando el estado es $X_t = (5,0)$ y la acción es $A_t = +2$.
- Si tomamos la acción $A_t = +2$ el sistema amanece en el estado $(2,3)$. Entonces:

Estado Sucesor $\boldsymbol{X_{t+1}}$	$\mathbb{P}(\,\boldsymbol{X_{t+1}} \mid \boldsymbol{X_t},\, \boldsymbol{A_t}\,)$
$(5,0)$	$\alpha(0,2)\,\beta(3,3)$
$(4,1)$	$\alpha(0,2)\,\beta(2,3) + \alpha(1,2)\,\beta(3,3)$
$(3,2)$	$\alpha(0,2)\,\beta(1,3) + \alpha(1,2)\,\beta(2,3) + \alpha(2,2)\,\beta(3,3)$
$(2,3)$	$\alpha(0,2)\,\beta(0,3) + \alpha(1,2)\,\beta(1,3) + \alpha(2,2)\,\beta(2,3)$
$(1,4)$	$\alpha(1,2)\,\beta(0,3) + \alpha(2,2)\,\beta(1,3)$
$(0,5)$	$\alpha(2,2)\,\beta(0,3)$

- Si tomamos la acción $A_t = -1$ el sistema amanece en el estado $(5,0)$, por lo que la distribución sobre los estados sucesores es idéntica a la del caso cuando cuando el estado es $X_t = (5,0)$ y la acción es $A_t = \pm 0$.