Sistemas de Control (EYAG-1005): Evaluación 02

Semestre: 2017-2018 Término I **Instructor:** Luis Reyes, Jonathan León

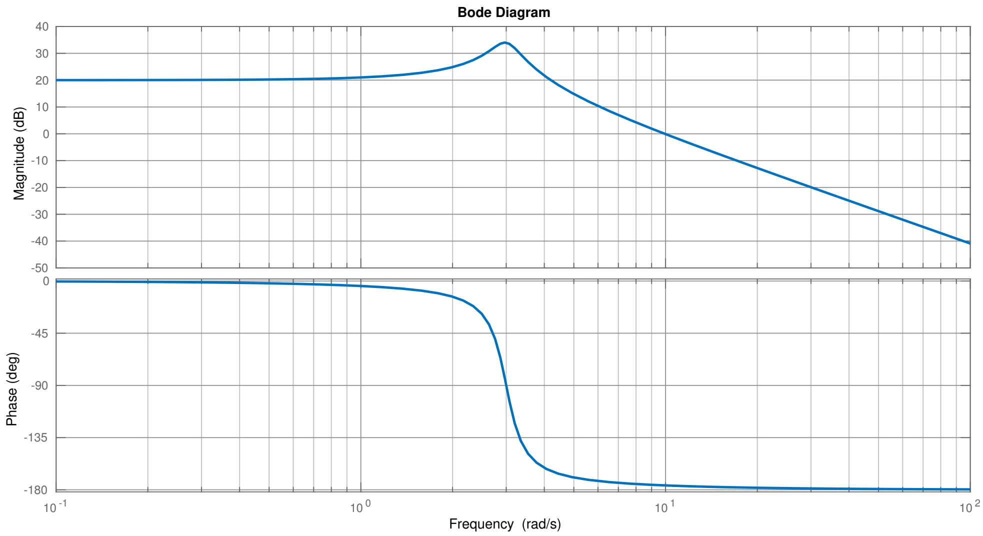
COMPROMISO DE HONOR

Yo, ________________________________ al firmar este compromiso, reconozco que la presente evaluación está diseñada para ser resuelta de manera individual, que puedo usar un lápiz o pluma y una calculadora científica, que solo puedo comunicarme con la persona responsable de la recepción de la evaluación, y que cualquier instrumento de comunicación que hubiere traído debo apagarlo. También estoy conciente que no debo consultar libros, notas, ni materiales didácticos adicionales a los que el instructor entregue durante la evaluación o autorice a utilizar. Finalmente, me comprometo a desarrollar y presentar mis respuestas de manera clara y ordenada.

Firmo al pie del presente compromiso como constancia de haberlo leído y aceptado.

Firma: ________________________________ Número de matrícula: ____________________

Problema 2.1. El siguiente Diagrama de Bode muestra la respuesta de la frecuencia de un sistema de segundo orden sub-amortiguado.



Complete las siguientes actividades:

- [**2 Puntos**] Determine la veracidad o falsedad del siguiente enunciado: El margen de ganancia es no mayor a 15 decibeles, *i.e.*, $G_M \leq 15$ dB.
  Solución: Falso, el margen de ganancia no existe porque no existe ninguna frecuencia ω para la cual $\phi(\omega) = -180°$.
- [**2 Puntos**] Determine la veracidad o falsedad del siguiente enunciado: El margen de fase es no menor de $40°$, *i.e.*, $\phi_M \geq 40°$ dB.
  Solución: Falso, pues es claro de la figura que cuando $M(\omega) = 0$ dB es el caso que $\phi(\omega) \leq -160°$, lo que implica que $\phi_M \leq 20°$.
- [**2 Puntos**] Estime el ancho de banda del sistema.
  Solución: Dado que la asíntota de baja frecuencia tiene un valor de 20 dB, para estimar el ancho de banda buscamos la frecuencia ω_{BW} para la cual $M(\omega_{BW}) = 20$ dB $-$ 3 dB $=$ 17 dB. En particular, $\omega_{BW} \approx 4.5$ rad/s.
- [**4 Puntos**] Encuentre la función de transferencia del sistema.

Solución: Dado que la asíntota de baja frecuencia tiene un valor de 20 dB, y que la máxima magnitud es de 35 dB, reconocemos que la magnitud del pico es de unos 15 dB, *i.e.:*

$$M_p \;=\; 15 \text{ dB} \;=\; 5.62$$

Adicionalmente:

$$M_p \;=\; \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}} \quad\Longrightarrow\quad 4\zeta^2(1-\zeta^2) \;=\; M_p^{-1} \quad\Longrightarrow\quad \zeta \approx 0.089$$

Además, reconociendo que la frecuencia pico $\omega_p \approx 3$ rad/s tenemos que:

$$\omega_p \;=\; \omega_n\sqrt{1-2\zeta^2} \quad\Longrightarrow\quad \omega_n \;=\; \frac{\omega_p}{\sqrt{1-2\zeta^2}} \;=\; 3.012 \text{ rad/s}$$

Finalmente, si expresamos la función de transferencia como

$$G(s) \;=\; \frac{K}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

entonces para la asíntota de baja frecuencia tenemos:

$$20 \text{ dB} \;=\; 10 \;=\; \frac{K}{\omega_n^2} \quad\Longrightarrow\quad K \;=\; 91.44$$

En conclusión:

$$G(s) \;=\; \frac{91.44}{s^2 + 0.536s + 9.144}$$

Problema 2.2. [10 Puntos] Considere el siguiente compensador de atraso de fase:

$$G_C(s) \;=\; K\,\frac{(s+z)}{(s+p)}\,,$$

Encuentre valores para los parámetros K, z y p de tal manera que su asíntota de baja frequencia sea de +30 dB, su asíntota de alta frecuencia sea de −10 dB, y su fase sea de −45° cuando su frecuencia es de 10 rad/s.

Sugerencia: Para escribir la ecuación asociada con el último requerimiento recuerde que cuando la fase es de −45° la parte real de $G(j\omega)$ es igual al negativo de su parte imaginaria.

Solución: Para la asíntota de baja frecuencia tenemos:

$$\lim_{\omega\to 0} G(j\omega) \;=\; \frac{K\,z}{p} \;=\; 30 \text{ dB} \;=\; 31.6 \quad\Longrightarrow\quad K\,z \;=\; 31.6\,p$$

Con respecto a la asíntota de alta frecuencia, tenemos:

$$G(j\omega) \;=\; K\,\frac{z+j\omega}{p+j\omega}\cdot\frac{(p-j\omega)}{(p-j\omega)} \;=\; K\,\frac{(zp+\omega^2)+j\omega(p-z)}{p^2+\omega^2}$$

$$\Longrightarrow \lim_{\omega\to\infty} G(j\omega) \;=\; \lim_{\omega\to\infty} K\,\frac{(zp+\omega^2)+j\omega(p-z)}{p^2+\omega^2}\cdot\frac{(1/\omega^2)}{(1/\omega^2)} \;=\; -10 \text{ dB} \;=\; 0.316$$

$$\Longrightarrow K \;=\; 0.316$$

Adicionalmente, para la condición de fase, obtenemos:

$$G(10j) \;=\; K\,\frac{(zp+100)+10j(p-z)}{p^2+100} \qquad\Longrightarrow\qquad zp+100 \;=\; 10(z-p)$$

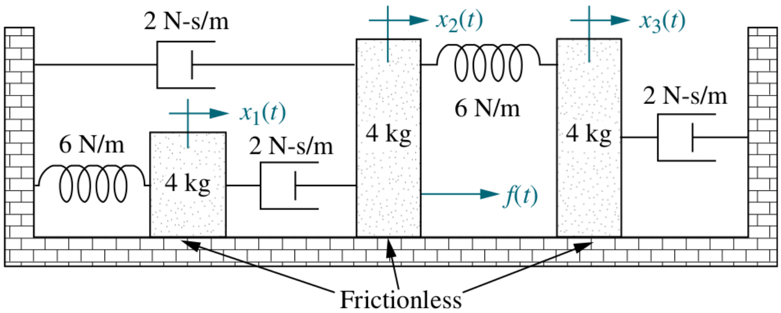
Finalmente, combinando las tres ecuaciones anteriores vemos que:

$$K\,z \;=\; 31.6\,p \qquad\Longrightarrow\qquad z = 100\,p \qquad\Longrightarrow\qquad p \;=\; 0.0102$$

En conclusión, el compensador debe ser de la forma:

$$G_C(s) \;=\; 0.316\,\frac{(s+1.02)}{(s+0.0102)}$$

Problema 2.3. [10 Puntos] Construya un modelo de espacio de estados que represente al mecanismo mostrado en la figura de abajo suponiendo que las salidas son las posiciones de los bloques de masa.



Solución: Las ecuaciones de movimiento de los bloques de masa son:

$$\begin{aligned}
4\,\ddot{x}_1(t) &= -6\,x_1(t) + 2\,(\,\dot{x}_2(t) - \dot{x}_1(t)\,) \\
4\,\ddot{x}_2(t) &= f(t) - 2\,\dot{x}_2(t) - 2\,(\,\dot{x}_2(t) - \dot{x}_1(t)\,) + 6\,(x_3(t) - x_2(t)) \\
4\,\ddot{x}_3(t) &= -6\,(\,x_3(t) - x_2(t)\,) - 2\,\dot{x}_3(t)
\end{aligned}$$

Equivalentemente:

$$\begin{aligned}
\ddot{x}_1(t) &= -(3/2)\,x_1(t) - (1/2)\,\dot{x}_1(t) + (1/2)\,\dot{x}_2(t) \\
\ddot{x}_2(t) &= +(1/2)\,\dot{x}_1(t) - (3/2)\,x_2(t) - \dot{x}_2(t) + (3/2)\,x_3(t) + (1/4)\,f(t) \\
\ddot{x}_3(t) &= +(3/2)\,x_2(t) - (3/2)\,x_3(t) - (1/2)\,\dot{x}_3(t)
\end{aligned}$$

Ahora elegimos la estructura del vector de estado, del vector de entrada y del vector de salida. En nuestro caso:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{x}(t) &= (\,x_1(t),\,\dot{x}_1(t),\,x_2(t),\,\dot{x}_2(t),\,x_3(t),\,\dot{x}_3(t)\,) \\
\boldsymbol{u}(t) &= f(t) \\
\boldsymbol{y}(t) &= (\,x_1(t),\,x_2(t),\,x_3(t)\,)
\end{aligned}$$

Entonces nuestras ecuaciones de estado son:

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) \;=\; \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -(3/2) & -(1/2) & 0 & +(1/2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & +(1/2) & -(3/2) & -1 & +(3/2) & +(1/4) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & +(3/2) & 0 & -(3/2) & -(1/2) \end{bmatrix} \boldsymbol{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ +(1/4) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{u}(t)$$

Y nuestras ecuaciones de salida son:

$$\boldsymbol{y}(t) \;=\; \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{u}(t)$$

Problema 2.4. [10 Puntos] Para el siguiente modelo de espacio de estados encuentre la función de transferencia equivalente.

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) \;=\; \begin{bmatrix} -1 & +4 \\ -4 & -1 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}(t) + \begin{bmatrix} +2 \\ -1 \end{bmatrix} \boldsymbol{u}(t)$$

$$\boldsymbol{y}(t) \;=\; \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}(t)$$

Solución:

$$(\,s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}\,)^{-1} \;=\; \frac{1}{s^2+2s+17} \begin{bmatrix} s+1 & +4 \\ -4 & s+1 \end{bmatrix}$$

$$\Longrightarrow\; (\,s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}\,)^{-1}\,\boldsymbol{B} \;=\; \frac{1}{s^2+2s+17} \begin{bmatrix} 2s-2 \\ -s-9 \end{bmatrix}$$

$$\Longrightarrow\; G(s) \;=\; \boldsymbol{C}\,(\,s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}\,)^{-1}\,\boldsymbol{B} \;=\; \frac{s-11}{s^2+2s+17}$$