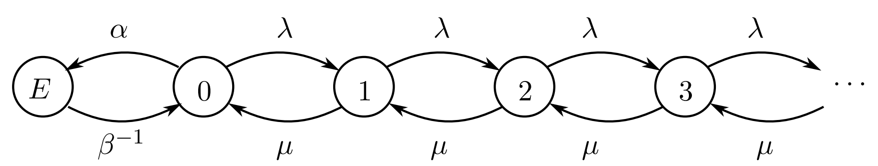
Modelos Estocásticos (INDG-1008): Trabajo Autónomo 03

Semestre: 2017-2018 Término II **Instructor:** Luis I. Reyes Castro

Problema 3.1. Considere la siguiente variante del modelo M/M/1 para una aplicación en telecomunicaciones digitales. En este modelo, cada vez que el sistema se vacía, *i.e.,* que se queda sin paquetes que transmitir, se activa un reloj exponencial con parámetro α por milisegundo. Si no llega un nuevo paquete antes del primer tick del reloj entonces el sistema entra en modo de enfriamiento, el cual tiene una duración exponencial con media de β milisegundos. Cuando el sistema está en modo de enfriamiento todos los paquetes que arriban son rechazados.



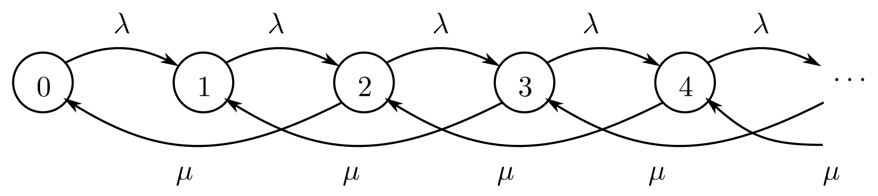
Tomando $\rho = \lambda / \mu$ como es usual, complete las siguientes actividades:

a) 3 Puntos: Calcule la distribución estacionaria del sistema, en los casos cuando existe, como función de α, β, ρ, y k.

b) 2 Puntos: Calcule las métricas de desempeño L y L_q, W y W_q.

c) 1 Punto: Calcule el número esperado de paquetes rechazados por milisegundo.

Problema 3.2. Considere la siguiente variante del modelo M/M/2. En este modelo un único servidor atiene a los clientes en pares a una tasa de μ por período, pero no puede atender clientes de manera individual, *e.g.,* si el sistema está vacío y llega un cliente, se debe esperar hasta la llegada del siguiente cliente para empezar el servicio.

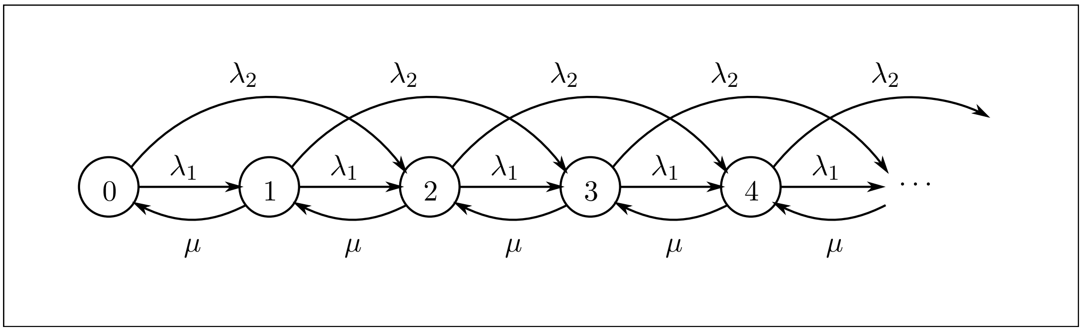


Tomando $\rho = \lambda / 2\mu$ como es usual, complete las siguientes actividades:

a) 3 Puntos: Calcule la distribución estacionaria del sistema, en los casos cuando existe, como función de ρ, y k.

b) 2 Puntos: Calcule las métricas de desempeño L y L_q, W y W_q.

Problema 3.3. Considere la siguiente variante del modelo M/M/1 para una aplicación en telecomunicaciones donde los paquetes arriban de manera individual o en pares. En este modelo un único servidor transmite paquetes a una tasa de μ por milisegundo. El proceso de arribo es la combinación de dos procesos Poisson; específicamente, el proceso de arribo de paquetes individuales tiene tasa de λ_1 por milisegundo, mientras que el proceso de arribo de paquetes en pares tiene tasa de λ_2 por milisegundo.



Tomando en esta ocasión

$$\rho \;=\; \frac{\lambda_1 + 2\lambda_2}{\mu}$$

complete las siguientes actividades:

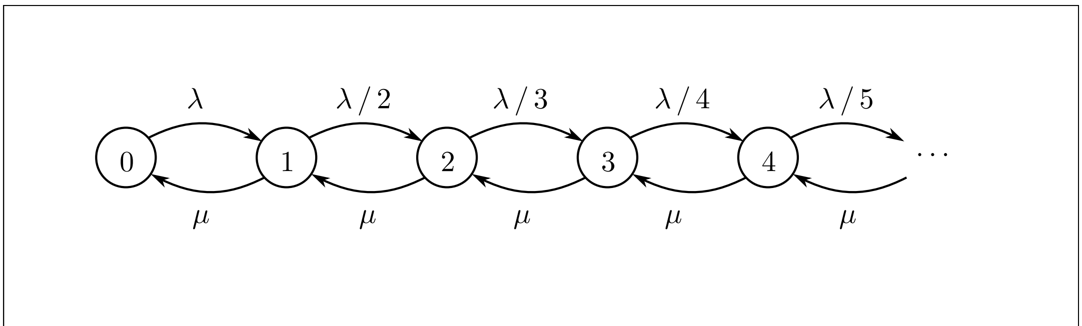
a) 3 Puntos: Calcule la distribución estacionaria del sistema, en los casos cuando existe, como función de λ_1, λ_2, ρ, y k.

b) 2 Puntos: Calcule la tasa de arribo promedio

$$\bar{\lambda} \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k \, \pi_k$$

junto con las métricas de desempeño W y W_q.

Problema 3.4. Considere la variante del modelo M/M/1 mostrada en la siguiente figura, donde la tasa de arribo decae harmónicamente con el número de clientes en el sistema.



Tomando $\rho = \lambda\,/\,\mu$ como es usual, complete las siguientes actividades:

a) 3 Puntos: Encuentre la probabilidad estacionaria de los estados uno, dos y tres en función de ρ y de la probabilidad estacionaria del estado cero, *i.e.,* exprese π_1, π_2 y π_3 en función de ρ y π_0.

b) 2 Puntos: Demuestre que si existe algún $n \geq 1$ tal que

$$\forall\, k \in \{\, 1, \,\ldots\,, n \,\} \,:\, \pi_k \;=\; \frac{\rho^k \, \pi_0}{k!}$$

entonces es el caso que:

$$\pi_{n+1} \;=\; \frac{\rho^{n+1} \, \pi_0}{(n+1)!}$$

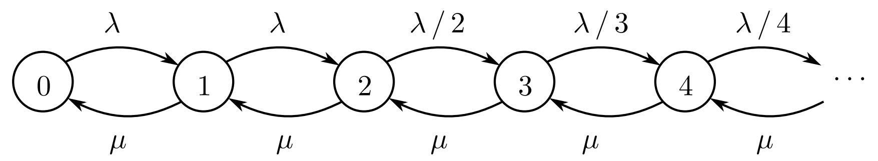
c) 1 Punto: Existe alguna condición sobre ρ (aparte de ser positivo) que se debe cumplir para que el sistema tenga una distribución estacionaria?

d) 1 Punto: Calcule la distribución estacionaria del sistema, en los casos cuando existe, como función de ρ y k.

e) 2 Puntos: Calcule las métricas de desempeño L y L_q.

f) 2 Puntos: Calcule la tasa de arribo promedio $\bar{\lambda}$ y con las métricas W y W_q.

Problema 3.5. Considere la variante del modelo M/M/1 mostrada en la siguiente figura, donde la tasa de arribo decae harmónicamente con el número de clientes en cola. Tomando $\rho = \lambda \,/\, \mu$ como es usual, complete las siguientes actividades:

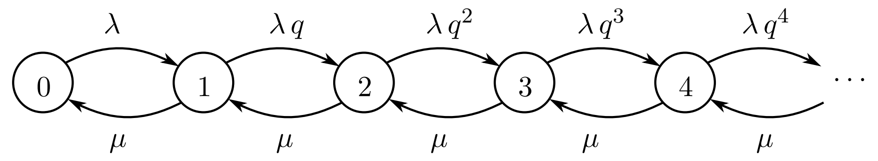


a) 3 Puntos: Calcule la distribución estacionaria del sistema, en los casos cuando existe, como función de ρ y k.

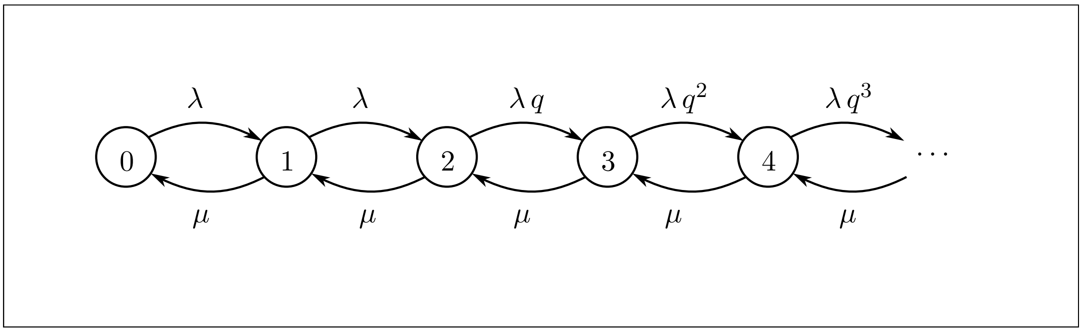
b) 2 Puntos: Calcule las métricas de desempeño L y L_q.

c) 2 Puntos: Calcule la tasa de arribo promedio $\bar{\lambda}$ y con las métricas W y W_q.

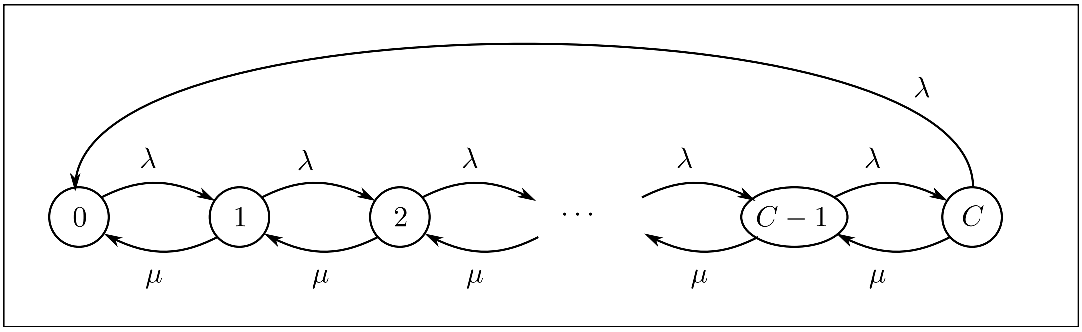
Problema 3.6. [7 Puntos] Considere la siguiente variante del modelo M/M/1, donde $q \in (0, 1)$ y la tasa de arribo decae geométricamente con el número de clientes en el sistema. Tomando $\rho = \lambda \,/\, \mu$, complete las mismas tres actividades del Problema 3.5.



Problema 3.7. [7 Puntos] Considere la siguiente variante del modelo M/M/1, donde $q \in (0, 1)$ y la tasa de arribo decae geométricamente con el número de clientes en cola. Tomando $\rho = \lambda / \mu$, complete las mismas tres actividades del Problema 3.5.



Problema 3.8. Considere el siguiente modelo de un transmisor digital defectuoso. El sistema tiene un único servidor que logra transmisiones exitosas a una tasa de μ por período, y los paquetes llegan de acuerdo a un proceso Poisson con tasa de λ por período. El defecto del sistema yace en el hecho de que cuando alcanza su capacidad C entra en un "estado de estrés". En dicho estado, el arribo de uno o más paquetes desata un error interno que provoca que el sistema se re-inicie, *i.e.*, que el sistema descarte todos sus paquetes y empiece a operar como si acabara ser encendido.



Tomando $\rho = \lambda / \mu$ como es usual, complete las siguientes actividades:

a) 3 Puntos: Calcule la distribución estacionaria del sistema en función de ρ, C, y k.

b) 2 Puntos: Calcule las métricas de desempeño L y L_q, W y W_q.

c) 1 Punto: Calcule el número esperado de paquetes descartados por período.