Programación Entera (INDG-1019): Taller 02

Semestre: 2018-2019 Término I **Instructor:** Luis I. Reyes Castro

Problema 2.1. El dueño de un nuevo centro comercial ha recibido ofertas por parte de varias empresas interesadas en alquilar locales comerciales. En particular:

- El centro comercial tiene p pisos, y cada piso puede albergar hasta ℓ locales comerciales.
- Existen m empresas diferentes interesados en alquilar locales comerciales en el centro. Para cada empresa $i \in [\![p]\!]$ y cada piso $j \in [\![p]\!]$ denotamos al precio ofertado por esa empresa para alquilar un local en ese piso como u_{ij}. Las empresas se clasifican de acuerdo a su tipo de negocio:

Tipo de Negocio	**Símbolo**
Ropa	RP
Muebles o Electrodomésticos	ME
Bienes Inmuebles	BI
Deportes y Salud	DS
Lectura y Arte	LA
Comida	C
Banco (Servicios Bancarios)	BK
Servicios al Cliente o Técnicos	SCT

El dueño del negocio desea maximizar sus ganancias por alquiler de locales comerciales sujeto a las siguiente restricciones:

a) En todo piso donde haya tres o más locales de servicios al cliente o técnicos (SCT) debe haber al menos un banco (BK).

b) En todo piso donde haya cinco o más locales de ropa (R) debe haber al menos un local de deportes y salud (DS) y un local de lectura y artes (LA).

c) En ningún piso pueden haber locales de comida (C) y bancos (BK).

d) Todos los locales de comida (C) deben estar concentrados en el mismo piso, el cual pasará a contener la Plaza de Comidas del centro comercial.

e) En todo piso donde haya al menos un local de bienes inmuebles (BI) debe haber al menos *(i)* tres locales de muebles o electrodomésticos (ME) y un banco (BK), o *(ii)* dos locales de ropa (R) y dos locales de lectura y arte (LA).

Con todo esto en mente, escriba el problema de decisión del dueño del centro comercial como un Programa Lineal Entero (PLE). ■

Solución A: Primero definimos una variable binaria para cada piso $i \in [\![p]\!]$ y empresa $j \in [\![m]\!]$, denotada x_{ij}, que toma el valor uno si y solo si en ese piso se le alquila un local a esa empresa. Segundo, modelamos las restricciones impuestas:

a) **[Literal anulado porque fue utilizado de ejemplo]**

Restricción: En todo piso donde haya tres o más locales de servicios al cliente o técnicos (SCT) debe haber al menos un banco (BK).

Implementación:

- Introducimos una variable binaria indicadora para cada piso:

$$\forall\, i \in [\![p]\!] \,:\; a_i \in \{0,1\}$$

- Introducimos una restricción para cada piso $i \in [\![p]\!]$ tal que si $x_{ij} = 1$ para tres o más empresas $j \in \text{SCT}$ entonces $a_i = 1$. Más precisamente:

$$\forall\, i \in [\![p]\!],\, \forall\, j \in \text{SCT} \,:\; x_{ij} \;\leq\; 2 + (\ell - 2)\, a_i$$

- Introducimos una restricción para cada piso $i \in [\![p]\!]$ tal que si $a_i = 1$ entonces $x_{ij} = 1$ para al menos una empresa $j \in \text{BK}$. Más precisamente:

$$\forall\, i \in [\![p]\!] \,:\; a_i \;\leq\; \sum_{j \in \text{BK}} x_{ij}$$

b) [**4 Puntos**]

Restricción: En todo piso donde haya cinco o más locales de ropa (R) debe haber al menos un local de deportes y salud (DS) y un local de lectura y artes (LA).

Implementación:

- Introducimos una variable binaria indicadora para cada piso:

$$\forall\, i \in [\![p]\!] \,:\; a_i \in \{0,1\}$$

- Introducimos una restricción para cada piso $i \in [\![p]\!]$ tal que si $x_{ij} = 1$ para cinco o más empresas $j \in \text{R}$ entonces $a_i = 1$. Más precisamente:

$$\forall\, i \in [\![p]\!],\, \forall\, j \in \text{R} \,:\; x_{ij} \;\leq\; 4 + (\ell - 4)\, a_i$$

- Introducimos una restricción para cada piso $i \in [\![p]\!]$ tal que si $a_i = 1$ entonces $x_{ij} = 1$ para al menos una empresa $j \in \text{DS}$. Más precisamente:

$$\forall\, i \in [\![p]\!] \,:\; a_i \;\leq\; \sum_{j \in \text{DS}} x_{ij}$$

- Introducimos una restricción para cada piso $i \in [\![p]\!]$ tal que si $a_i = 1$ entonces $x_{ij} = 1$ para al menos una empresa $j \in \text{LA}$. Más precisamente:

$$\forall\, i \in [\![p]\!] \,:\; a_i \;\leq\; \sum_{j \in \text{LA}} x_{ij}$$

c) [**4 Puntos**]

Restricción: En ningún piso pueden haber locales de comida (C) y bancos (BK).

Implementación:

- Introducimos un par de variables binarias indicadoras para cada piso:

$$\forall\, i \in [\![p]\!] \,:\; a_i, b_i \in \{0,1\}$$

- Introducimos una restricción o juego de restricciones para cada piso $i \in [\![p]\!]$ tal que si $x_{ij} = 1$ para al menos una empresa $j \in \mathrm{C}$ entonces $a_i = 1$. Esto puede ser logrado de al menos dos maneras:
  - Introduciendo la siguiente restricción:

$$\forall\, i \in [\![p]\!] : \sum_{j \in \mathrm{C}} x_{ij} \;\leq\; |C|\, a_i$$

  - Introduciendo el siguiente juego de restricciones:

$$\forall\, i \in [\![p]\!], \forall\, j \in \mathrm{C} : \; x_{ij} \;\leq\; a_i$$

- Introducimos una restricción o juego de restricciones para cada piso $i \in [\![p]\!]$ tal que si $x_{ij} = 1$ para al menos una empresa $j \in \mathrm{BK}$ entonces $b_i = 1$. Esto puede ser logrado de al menos dos maneras:
  - Introduciendo la siguiente restricción:

$$\forall\, i \in [\![p]\!] : \sum_{j \in \mathrm{BK}} x_{ij} \;\leq\; |BK|\, b_i$$

  - Introduciendo el siguiente juego de restricciones:

$$\forall\, i \in [\![p]\!], \forall\, j \in \mathrm{BK} : \; x_{ij} \;\leq\; b_i$$

- Introducimos una restricción para cada piso $i \in [\![p]\!]$ que impide que a_i y b_i tomen el valor uno simultáneamente. Más precisamente:

$$\forall\, i \in [\![p]\!] : \; a_i + b_i \;\leq\; 1$$

d) [3 Puntos]

Restricción: Todos los locales de comida (C) deben estar concentrados en el mismo piso, el cual pasará a contener la Plaza de Comidas del centro comercial.

Implementación:

- Introducimos una variable binaria indicadora para cada piso:

$$\forall\, i \in [\![p]\!] : \; a_i \in \{0, 1\}$$

- Introducimos una restricción o juego de restricciones para cada piso $i \in [\![p]\!]$ tal que si $x_{ij} = 1$ para al menos una empresa $j \in \mathrm{C}$ entonces $a_i = 1$. Esto puede ser logrado de al menos dos maneras:
  - Introduciendo la siguiente restricción:

$$\forall\, i \in [\![p]\!] : \sum_{j \in \mathrm{C}} x_{ij} \;\leq\; |C|\, a_i$$

  - Introduciendo el siguiente juego de restricciones:

$$\forall\, i \in [\![p]\!], \forall\, j \in \mathrm{C} : \; x_{ij} \;\leq\; a_i$$

- Introducimos una restricción tal que $a_i = 1$ para exactamente un solo piso $i \in [\![p]\!]$. Más precisamente:
$$\sum_{i \in [\![p]\!]} a_i \;=\; 1$$

e) [5 Puntos]

Restricción: En todo piso donde haya al menos un local de bienes inmuebles (BI) debe haber al menos *(i)* tres locales de muebles o electrodomésticos (ME) y un banco (BK), o *(ii)* dos locales de ropa (R) y dos locales de lectura y arte (LA).

Implementación:

- Introducimos un trío de variables binarias indicadoras para cada piso:
$$\forall\, i \in [\![p]\!] \;:\; a_i, b_i, c_i \in \{0, 1\}$$

- Introducimos una restricción o juego de restricciones para cada piso $i \in [\![p]\!]$ tal que si $x_{ij} = 1$ para al menos una empresa $j \in \mathrm{BI}$ entonces $a_i = 1$. Esto puede ser logrado de al menos dos maneras:
  - Introduciendo la siguiente restricción:
$$\forall\, i \in [\![p]\!] \;:\; \sum_{j \in \mathrm{BI}} x_{ij} \;\leq\; |BI|\, a_i$$
  - Introduciendo el siguiente juego de restricciones:
$$\forall\, i \in [\![p]\!],\, \forall\, j \in \mathrm{BI} \;:\; x_{ij} \;\leq\; a_i$$

- Introducimos un par de restricciones para cada piso $i \in [\![p]\!]$ tal que si $b_i = 1$ entonces $x_{ij} = 1$ para al menos tres empresas $j \in \mathrm{ME}$ y al menos una empresa $j \in \mathrm{BK}$. Más precisamente:
$$\forall\, i \in [\![p]\!] \;:\; 3\, a_i \;\leq\; \sum_{j \in \mathrm{ME}} x_{ij}$$
$$\forall\, i \in [\![p]\!] \;:\; 1\, a_i \;\leq\; \sum_{j \in \mathrm{BK}} x_{ij}$$

- Introducimos un par de restricciones para cada piso $i \in [\![p]\!]$ tal que si $c_i = 1$ entonces $x_{ij} = 1$ para al menos dos empresas $j \in \mathrm{R}$ y al menos dos empresas $j \in \mathrm{LA}$. Más precisamente:
$$\forall\, i \in [\![p]\!] \;:\; 2\, a_i \;\leq\; \sum_{j \in \mathrm{R}} x_{ij}$$
$$\forall\, i \in [\![p]\!] \;:\; 2\, a_i \;\leq\; \sum_{j \in \mathrm{LA}} x_{ij}$$

- Introducimos una restricción para cada piso $i \in [\![p]\!]$ tal que si $a_i = 1$ entonces $b_i = 1$ o $c_i = 1$. Más precisamente:
$$\forall\, i \in [\![p]\!] \;:\; a_i \;\leq\; b_i + c_i$$

Solución B: Primero definimos una variable binaria para cada empresa $i \in [\![m]\!]$ y piso $j \in [\![p]\!]$, denotada x_{ij}, que toma el valor uno si y solo si a esa empresa se le alquila un local en ese piso. Segundo, modelamos las restricciones impuestas:

a) [**Literal anulado porque fue utilizado de ejemplo**]

Restricción: En todo piso donde haya tres o más locales de servicios al cliente o técnicos (SCT) debe haber al menos un banco (BK).

Implementación:

- Introducimos una variable binaria indicadora para cada piso:

$$\forall\, j \in [\![p]\!] \,:\; a_j \in \{0, 1\}$$

- Introducimos una restricción para cada piso $j \in [\![p]\!]$ tal que si $x_{ij} = 1$ para tres o más empresas $i \in \mathrm{SCT}$ entonces $a_j = 1$. Más precisamente:

$$\forall\, j \in [\![p]\!],\, \forall\, i \in \mathrm{SCT} \,:\; x_{ij} \;\leq\; 2 + (\ell - 2)\, a_j$$

- Introducimos una restricción para cada piso $j \in [\![p]\!]$ tal que si $a_j = 1$ entonces $x_{ij} = 1$ para al menos una empresa $i \in \mathrm{BK}$. Más precisamente:

$$\forall\, j \in [\![p]\!] \,:\; a_j \;\leq\; \sum_{i \in \mathrm{BK}} x_{ij}$$

b) [**4 Puntos**]

Restricción: En todo piso donde haya cinco o más locales de ropa (R) debe haber al menos un local de deportes y salud (DS) y un local de lectura y artes (LA).

Implementación:

- Introducimos una variable binaria indicadora para cada piso:

$$\forall\, j \in [\![p]\!] \,:\; a_j \in \{0, 1\}$$

- Introducimos una restricción para cada piso $j \in [\![p]\!]$ tal que si $x_{ij} = 1$ para cinco o más empresas $i \in \mathrm{R}$ entonces $a_j = 1$. Más precisamente:

$$\forall\, j \in [\![p]\!],\, \forall\, i \in \mathrm{R} \,:\; x_{ij} \;\leq\; 4 + (\ell - 4)\, a_j$$

- Introducimos una restricción para cada piso $j \in [\![p]\!]$ tal que si $a_j = 1$ entonces $x_{ij} = 1$ para al menos una empresa $i \in \mathrm{DS}$. Más precisamente:

$$\forall\, j \in [\![p]\!] \,:\; a_j \;\leq\; \sum_{i \in \mathrm{DS}} x_{ij}$$

- Introducimos una restricción para cada piso $j \in [\![p]\!]$ tal que si $a_j = 1$ entonces $x_{ij} = 1$ para al menos una empresa $i \in \mathrm{LA}$. Más precisamente:

$$\forall\, j \in [\![p]\!] \,:\; a_j \;\leq\; \sum_{i \in \mathrm{LA}} x_{ij}$$

c) [4 Puntos]

Restricción: En ningún piso pueden haber locales de comida (C) y bancos (BK).

Implementación:

- Introducimos un par de variables binarias indicadoras para cada piso:

$$\forall\, j \in [\![p]\!] \;:\; a_j, b_j \in \{0,1\}$$

- Introducimos una restricción o juego de restricciones para cada piso $j \in [\![p]\!]$ tal que si $x_{ij} = 1$ para al menos una empresa $i \in \mathrm{C}$ entonces $a_j = 1$. Esto puede ser logrado de al menos dos maneras:
  - Introduciendo la siguiente restricción:

$$\forall\, j \in [\![p]\!] \;:\; \sum_{i \in \mathrm{C}} x_{ij} \;\leq\; |C|\, a_j$$

  - Introduciendo el siguiente juego de restricciones:

$$\forall\, j \in [\![p]\!],\, \forall\, i \in \mathrm{C} \;:\; x_{ij} \;\leq\; a_j$$

- Introducimos una restricción o juego de restricciones para cada piso $j \in [\![p]\!]$ tal que si $x_{ij} = 1$ para al menos una empresa $i \in \mathrm{BK}$ entonces $b_j = 1$. Esto puede ser logrado de al menos dos maneras:
  - Introduciendo la siguiente restricción:

$$\forall\, j \in [\![p]\!] \;:\; \sum_{i \in \mathrm{BK}} x_{ij} \;\leq\; |BK|\, b_j$$

  - Introduciendo el siguiente juego de restricciones:

$$\forall\, j \in [\![p]\!],\, \forall\, i \in \mathrm{BK} \;:\; x_{ij} \;\leq\; b_j$$

- Introducimos una restricción para cada piso $j \in [\![p]\!]$ que impide que a_j y b_j tomen el valor uno simultáneamente. Más precisamente:

$$\forall\, j \in [\![p]\!] \;:\; a_j + b_j \;\leq\; 1$$

d) [3 Puntos]

Restricción: Todos los locales de comida (C) deben estar concentrados en el mismo piso, el cual pasará a contener la Plaza de Comidas del centro comercial.

Implementación:

- Introducimos una variable binaria indicadora para cada piso:

$$\forall\, j \in [\![p]\!] \;:\; a_j \in \{0,1\}$$

- Introducimos una restricción o juego de restricciones para cada piso $j \in [\![p]\!]$ tal que si $x_{ij} = 1$ para al menos una empresa $i \in \mathrm{C}$ entonces $a_j = 1$. Esto puede ser logrado de al menos dos maneras:

– Introduciendo la siguiente restricción:

$$\forall\, j \in [\![p]\!] : \sum_{i \in \mathrm{C}} x_{ij} \;\leq\; |C|\, a_j$$

– Introduciendo el siguiente juego de restricciones:

$$\forall\, j \in [\![p]\!], \forall\, i \in \mathrm{C} : \; x_{ij} \;\leq\; a_j$$

- Introducimos una restricción tal que $a_j = 1$ para exactamente un solo piso $j \in [\![p]\!]$. Más precisamente:

$$\sum_{j \in [\![p]\!]} a_j \;=\; 1$$

e) [**5 Puntos**]

Restricción: En todo piso donde haya al menos un local de bienes inmuebles (BI) debe haber al menos *(i)* tres locales de muebles o electrodomésticos (ME) y un banco (BK), o *(ii)* dos locales de ropa (R) y dos locales de lectura y arte (LA).

Implementación:

- Introducimos un trío de variables binarias indicadoras para cada piso:

$$\forall\, j \in [\![p]\!] : \; a_j, b_j, c_j \in \{0, 1\}$$

- Introducimos una restricción o juego de restricciones para cada piso $j \in [\![p]\!]$ tal que si $x_{ij} = 1$ para al menos una empresa $i \in \mathrm{BI}$ entonces $a_j = 1$. Esto puede ser logrado de al menos dos maneras:

  – Introduciendo la siguiente restricción:

$$\forall\, j \in [\![p]\!] : \sum_{i \in \mathrm{BI}} x_{ij} \;\leq\; |BI|\, a_j$$

  – Introduciendo el siguiente juego de restricciones:

$$\forall\, j \in [\![p]\!], \forall\, i \in \mathrm{BI} : \; x_{ij} \;\leq\; a_j$$

- Introducimos un par de restricciones para cada piso $j \in [\![p]\!]$ tal que si $b_j = 1$ entonces $x_{ij} = 1$ para al menos tres empresas $i \in \mathrm{ME}$ y al menos una empresa $i \in \mathrm{BK}$. Más precisamente:

$$\forall\, j \in [\![p]\!] : \; 3\, a_j \;\leq\; \sum_{i \in \mathrm{ME}} x_{ij}$$

$$\forall\, j \in [\![p]\!] : \; 1\, a_j \;\leq\; \sum_{i \in \mathrm{BK}} x_{ij}$$

- Introducimos un par de restricciones para cada piso $j \in [\![p]\!]$ tal que si $c_j = 1$ entonces $x_{ij} = 1$ para al menos dos empresas $i \in \mathrm{R}$ y al menos dos empresas $i \in \mathrm{LA}$. Más precisamente:

$$\forall\, j \in [\![p]\!] : \; 2\, a_j \;\leq\; \sum_{i \in \mathrm{R}} x_{ij}$$

$$\forall\, j \in [\![p]\!] : \; 2\, a_j \;\leq\; \sum_{i \in \mathrm{LA}} x_{ij}$$

- Introducimos una restricción para cada piso $j \in [\![p]\!]$ tal que si $a_j = 1$ entonces $b_j = 1$ o $c_j = 1$. Más precisamente:

$$\forall\, i \in [\![p]\!] \,:\; a_j \;\leq\; b_j + c_j$$

Problema 2.2. Considere el problema de planificar la operación de una máquina a lo largo de un horizonte de T períodos. En cada periodo la máquina puede estar ocupada fabricando un lote de alguno de los m productos diferentes que puede producir, puede estar recibiendo mantenimiento, o puede estar sin trabajar. Para representar estas actividades, introducimos tres series temporales de variables binarias:

- Para cada periodo $t \in [\![T]\!]$ y cada producto $k \in [\![m]\!]$ la variable $x_{tk} = 1$ si y solo si en ese periodo la máquina fabricó ese producto.
- Para cada periodo $t \in [\![T]\!]$ la variable $y_t = 1$ si y solo si la máquina recibió mantenimiento durante ese periodo.
- Para cada periodo $t \in [\![T]\!]$ la variable $z_t = 1$ si y solo si la máquina no trabajó durante ese periodo.

Con todo esto en mente, escriba las siguientes restricciones temporales en el lenguage de la Progamación Lineal Entera (PLE).

a) No se permite fabricar el producto 1 por más de dos períodos consecutivos.

b) Si se fabrica el producto 1 por dos periodos consecutivos entonces la máquina debe recibir mantenimiento en el siguiente periodo.

c) Si se fabrica el producto 2 por tres o más períodos consecutivos entonces la máquina debe descansar (*i.e.,* no trabajar) en el siguiente periodo.

d) Si se fabrica el producto 3 entonces eventualmente la máquina debe descansar por un periodo y recibir mantenimiento en el posterior.

e) Si se fabrica el producto 4 y se desea posteriormente fabricar el producto 5 entonces se debe dar mantenimiento a la máquina antes de fabricar el producto 5.

■

Solución:

a) [**2 Puntos**]

Restricción: No se permite fabricar el producto 1 por más de dos períodos consecutivos.

Implementación: Introducimos el siguiente juego de restricciones, donde $k = 1$:

$$\forall\, t \in [\![T-2]\!] \,:\; x_{t,k} + x_{t+1,k} + x_{t+2,k} \;\leq\; 2$$

b) [**2 Puntos**]

Restricción: Si se fabrica el producto 1 por dos periodos consecutivos entonces la máquina debe recibir mantenimiento en el siguiente periodo.

Implementación: Introducimos el siguiente juego de restricciones, donde $k = 1$:

$$\forall\, t \in [\![T-1]\!] \,:\; x_{t,k} + x_{t+1,k} \;\leq\; 1 + y_{t+2}$$

c) [3 Puntos]

Restricción: Si se fabrica el producto 2 por tres o más períodos consecutivos entonces la máquina debe descansar (*i.e.*, no trabajar) en el siguiente periodo.

Implementación: Introducimos el siguiente patrón de restricciones, donde $k = 2$:

$$
\begin{aligned}
\forall\, t \in [\![T-2]\!] :\ & \sum_{i=t}^{t+2} x_{i,k} \ \le\ 2 + x_{t+3,k} + z_{t+3} \\
\forall\, t \in [\![T-3]\!] :\ & \sum_{i=t}^{t+3} x_{i,k} \ \le\ 3 + x_{t+4,k} + z_{t+4} \\
\forall\, t \in [\![T-4]\!] :\ & \sum_{i=t}^{t+4} x_{i,k} \ \le\ 4 + x_{t+5,k} + z_{t+5} \\
& \ldots
\end{aligned}
$$

d) [3 Puntos]

Restricción: Si se fabrica el producto 3 entonces eventualmente la máquina debe descansar por un periodo y recibir mantenimiento en el posterior.

Implementación: Fijamos $k = 3$. Luego:

- Introducimos la serie temporal de variables binarias $\{w_t\}_{t=1}^{T-2}$.
- Introducimos una restricción para cada periodo $t \in [\![T-2]\!]$ tal que si $x_{t,k} = 1$ entonces eventualmente $w_t = 1$. Más precisamente:

$$\forall\, t \in [\![T-2]\!] :\ x_{t,k} \ \le\ \sum_{i=t+1}^{T-2} w_t$$

- Introducimos un par de restricciones para cada periodo $t \in [\![T-2]\!]$ tal que si $w_t = 1$ entonces $z_{t+1} = 1$ y $y_{t+2} = 1$. Más precisamente:

$$
\begin{aligned}
\forall\, t \in [\![T-2]\!] :\ w_t \ &\le\ z_{t+1} \\
\forall\, t \in [\![T-3]\!] :\ w_t \ &\le\ y_{t+2}
\end{aligned}
$$

e) [Literal anulado por exhibir muy alta complejidad]

Restricción: Si se fabrica el producto 4 y se desea posteriormente fabricar el producto 5 entonces se debe dar mantenimiento a la máquina antes de fabricar el producto 5.

Implementación: Será mostrada en clase.