



UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA  
Programa de Pós-Graduação em Matemática  
Análise Numérica

Luís Karlos Mendes de Oliveira 202069032A

**Atividade 03:** Métodos Numéricos

**Prof.:** Sandro Rodrigues Mazorche

18 de novembro de 2025

---

**Exercício 1**

A seguir, são analisados cinco modelos de sistemas de EDOs, abrangendo tanto casos lineares quanto não lineares. Na análise, são determinados os pontos críticos (de equilíbrio) de cada sistema e a estabilidade local destes pontos é classificada através da análise dos autovalores (utilizando a matriz de coeficientes para os casos lineares e a matriz Jacobiana para os não lineares). Além disso, são exibidas as trajetórias das soluções para os problemas de valor inicial (PVI) propostos, utilizando os métodos numéricos implementados (MEE e RK4).

**Exercício 1 - letra A**

O Problema de Valor Inicial (PVI) a ser resolvido é dado por:

$$\begin{cases} x' = 3x - 2y \\ y' = 2x - 2y \\ x(0) = 1, y(0) = 1 \end{cases} \quad (1)$$

**Solução Analítica**

O PVI (1) pode ser reescrito na forma matricial  $\mathbf{X}' = A\mathbf{X}$ , onde  $\mathbf{X}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}$  e  $A$  é a matriz de coeficientes.

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Para calcular os autovalores  $\lambda$  de  $A$  fazemos:

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= 0 \\ \det \left( \begin{bmatrix} 3 - \lambda & -2 \\ 2 & -2 - \lambda \end{bmatrix} \right) &= 0 \\ (3 - \lambda)(-2 - \lambda) - (-2)(2) &= 0 \\ -6 - 3\lambda + 2\lambda + \lambda^2 + 4 &= 0 \\ \lambda^2 - \lambda - 2 &= 0 \end{aligned}$$

Portanto, os autovalores são  $\lambda_1 = 2$  e  $\lambda_2 = -1$ .

Para cada autovalor, o autovetor correspondente  $\mathbf{v}$  é determinado resolvendo o sistema  $(A - \lambda I)\mathbf{v} = \mathbf{0}$ .

**Para**  $\lambda_1 = 2$ :

$$(A - 2I)\mathbf{v}_1 = \mathbf{0}$$

$$\begin{bmatrix} 3-2 & -2 \\ 2 & -2-2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

As duas equações nos leva à  $v_{11} = 2v_{12}$ . Escolhendo  $v_{12} = 1$ , obtemos o autovetor  $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ .

**Para**  $\lambda_2 = -1$ :

$$(A - (-1)I)\mathbf{v}_2 = \mathbf{0}$$

$$\begin{bmatrix} 3+1 & -2 \\ 2 & -2+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{21} \\ v_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{21} \\ v_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

As duas equações nos leva à  $v_{22} = 2v_{21}$ . Escolhendo  $v_{21} = 1$ , obtemos o autovetor  $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ .

A solução geral é uma combinação linear das soluções encontradas:

$$\mathbf{X}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} \mathbf{v}_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} \mathbf{v}_2$$

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = c_1 e^{2t} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 e^{-t} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Separando em componentes, temos:

$$x(t) = 2c_1 e^{2t} + c_2 e^{-t}$$

$$y(t) = c_1 e^{2t} + 2c_2 e^{-t}$$

Como as condições iniciais são  $x(0) = 1$  e  $y(0) = 1$ , para determinar as constantes  $c_1$  e  $c_2$  fazemos:

$$x(0) = 2c_1 e^0 + c_2 e^0 \implies 1 = 2c_1 + c_2 \quad (2)$$

$$y(0) = c_1 e^0 + 2c_2 e^0 \implies 1 = c_1 + 2c_2 \quad (3)$$

Da equação (2) obtemos  $c_2 = 1 - 2c_1$ . Substituindo na equação 3:

$$c_1 + 2(1 - 2c_1) = 1 \implies c_1 + 2 - 4c_1 = 1 \implies -3c_1 = -1 \implies c_1 = \frac{1}{3}$$

Consequentemente,  $c_2 = 1 - 2(\frac{1}{3}) = \frac{1}{3}$ . Substituindo os valores de  $c_1$  e  $c_2$  na solução geral, obtemos a solução analítica para o PVI (1):

$$x(t) = \frac{2}{3}e^{2t} + \frac{1}{3}e^{-t}$$

$$y(t) = \frac{1}{3}e^{2t} + \frac{2}{3}e^{-t}$$

## Resultados da Simulação

O sistema linear possui um único ponto crítico (ou ponto de equilíbrio) na origem,  $\mathbf{X} = (0, 0)$ , já que a matriz  $A$  de coeficientes é não singular. A análise dos autovalores da matriz de coeficientes,  $\lambda_1 = 2$  e  $\lambda_2 = -1$ , revela que o ponto é um ponto de sela, pois os autovalores são reais e possuem sinais opostos. Por definição, um ponto de sela é instável.

As figuras (1) e (2) apresentam os planos de fase gerados pelos métodos MEE e RK4, respectivamente, com passo  $h = 0.1$  e  $h = 0.01$ . Nas figuras, o ponto crítico  $(0, 0)$  está destacado com um x vermelho enquanto que o ponto inicial  $(1, 1)$  está destacado com um x azul.

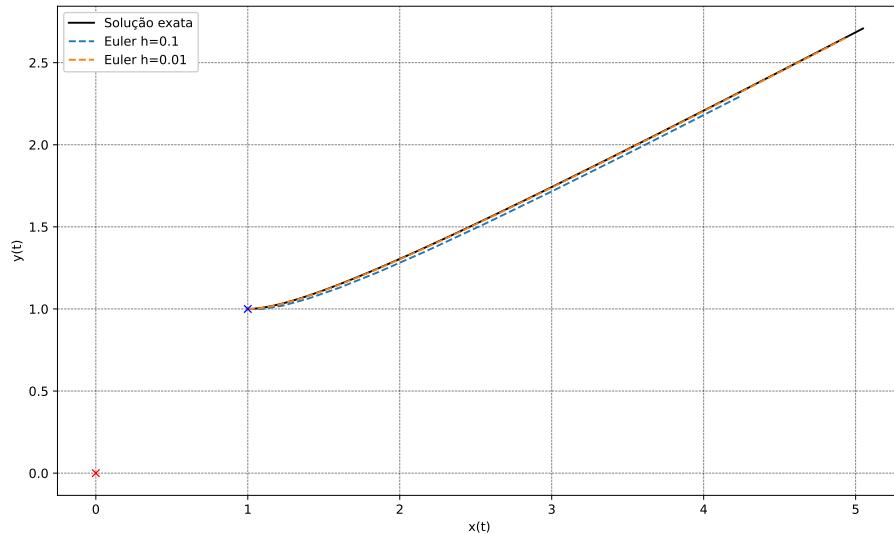


Figura 1: Resultados da simulação do MEE do PVI (1).

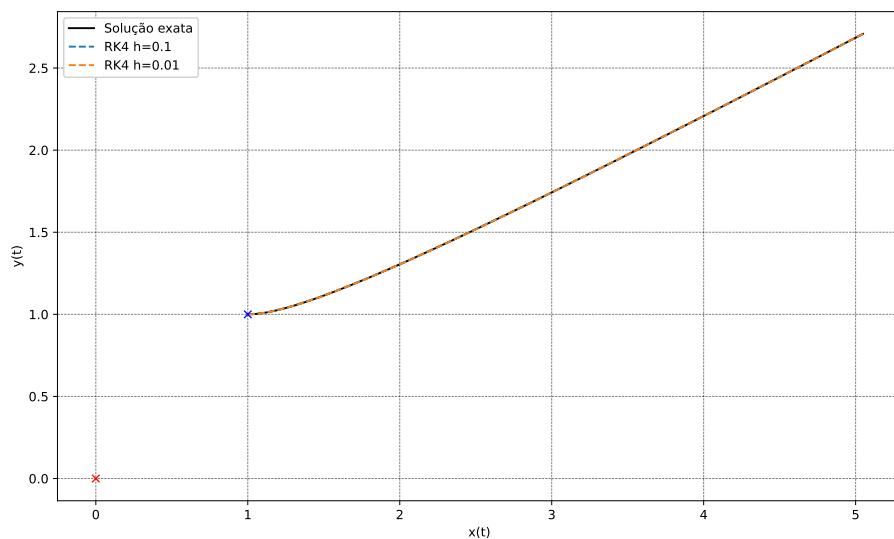


Figura 2: Resultados da simulação do RK4 do PVI (1).

### Exercício 1 - letra B

O Problema de Valor Inicial (PVI) a ser resolvido é dado por:

$$\begin{cases} x' = \frac{5}{4}x + \frac{3}{4}y \\ y' = \frac{3}{4}x + \frac{5}{4}y \\ x(0) = 1, y(0) = 1 \end{cases} \quad (4)$$

#### Solução Analítica

O PVI (4) é reescrito na forma matricial  $\mathbf{X}' = A\mathbf{X}$ , onde  $\mathbf{X}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}$  e  $A$  é a matriz de coeficientes.

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{5}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Para calcular os autovalores  $\lambda$  de  $A$ , resolvemos a equação característica  $\det(A - \lambda I) = 0$ :

$$\begin{aligned} \det \left( \begin{bmatrix} \frac{5}{4} - \lambda & \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{5}{4} - \lambda \end{bmatrix} \right) &= 0 \\ \left( \frac{5}{4} - \lambda \right) \left( \frac{5}{4} - \lambda \right) - \left( \frac{3}{4} \right) \left( \frac{3}{4} \right) &= 0 \\ \left( \frac{5}{4} - \lambda \right)^2 - \frac{9}{16} &= 0 \\ \frac{25}{16} - \frac{10}{4}\lambda + \lambda^2 - \frac{9}{16} &= 0 \\ \lambda^2 - \frac{5}{2}\lambda + 1 &= 0 \end{aligned}$$

Portanto, os autovalores são  $\lambda_1 = 2$  e  $\lambda_2 = \frac{1}{2}$ .

Para cada autovalor, o autovetor correspondente  $\mathbf{v}$  é determinado resolvendo o sistema  $(A - \lambda I)\mathbf{v} = \mathbf{0}$ .

**Para  $\lambda_1 = 2$ :**

$$\begin{aligned} (A - 2I)\mathbf{v}_1 &= \mathbf{0} \\ \begin{bmatrix} \frac{5}{4} - 2 & \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{5}{4} - 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{12} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} -\frac{3}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} & -\frac{3}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{12} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

As duas equações nos leva à  $v_{11} = v_{12}$ . Escolhendo  $v_{12} = 1$ , obtemos o autovetor  $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ .

**Para**  $\lambda_2 = \frac{1}{2}$ :

$$\begin{aligned} \left( A - \frac{1}{2}I \right) \mathbf{v}_2 &= \mathbf{0} \\ \begin{bmatrix} \frac{5}{4} - \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{5}{4} - \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{21} \\ v_{22} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{21} \\ v_{22} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

As duas equações nos leva à  $v_{21} = -v_{22}$ . Escolhendo  $v_{22} = -1$ , obtemos o autovetor  $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ .

A solução geral é uma combinação linear das soluções encontradas:

$$\begin{aligned} \mathbf{X}(t) &= c_1 e^{\lambda_1 t} \mathbf{v}_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} \mathbf{v}_2 \\ \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} &= c_1 e^{2t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 e^{\frac{1}{2}t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Separando em componentes, temos:

$$\begin{aligned} x(t) &= c_1 e^{2t} + c_2 e^{\frac{1}{2}t} \\ y(t) &= c_1 e^{2t} - c_2 e^{\frac{1}{2}t} \end{aligned}$$

Com as condições iniciais  $x(0) = 1$  e  $y(0) = 1$ , determinam-se as constantes  $c_1$  e  $c_2$ :

$$x(0) = c_1 e^0 + c_2 e^0 \implies 1 = c_1 + c_2 \quad (5)$$

$$y(0) = c_1 e^0 - c_2 e^0 \implies 1 = c_1 - c_2 \quad (6)$$

Somando as equações (5) e (6), obtemos  $2 = 2c_1$ , o que implica  $c_1 = 1$ . Substituindo  $c_1 = 1$  na equação (5), encontramos  $c_2 = 0$ .

Substituindo os valores de  $c_1$  e  $c_2$  na solução geral, obtemos a solução analítica para o PVI (4):

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{2t} \\ y(t) &= e^{2t} \end{aligned}$$

## Resultados da Simulação

O sistema linear possui um único ponto crítico (ou ponto de equilíbrio) na origem,  $\mathbf{X} = (0, 0)$ , já que a matriz  $A$  de coeficientes é não singular. A análise dos autovalores da matriz de coeficientes,  $\lambda_1 = 2$  e  $\lambda_2 = 1/2$ , revela que o ponto é um nó instável, pois os autovalores são reais e possuem o mesmo sinal (ambos positivos).

As figuras (3) e (4) apresentam os planos de fase gerados pelos métodos MEE e RK4, respectivamente, com passo  $h = 0.1$  e  $h = 0.01$ . Nas figuras, o ponto crítico  $(0, 0)$  está destacado com um x vermelho enquanto que o ponto inicial  $(1, 1)$  está destacado com um x azul.

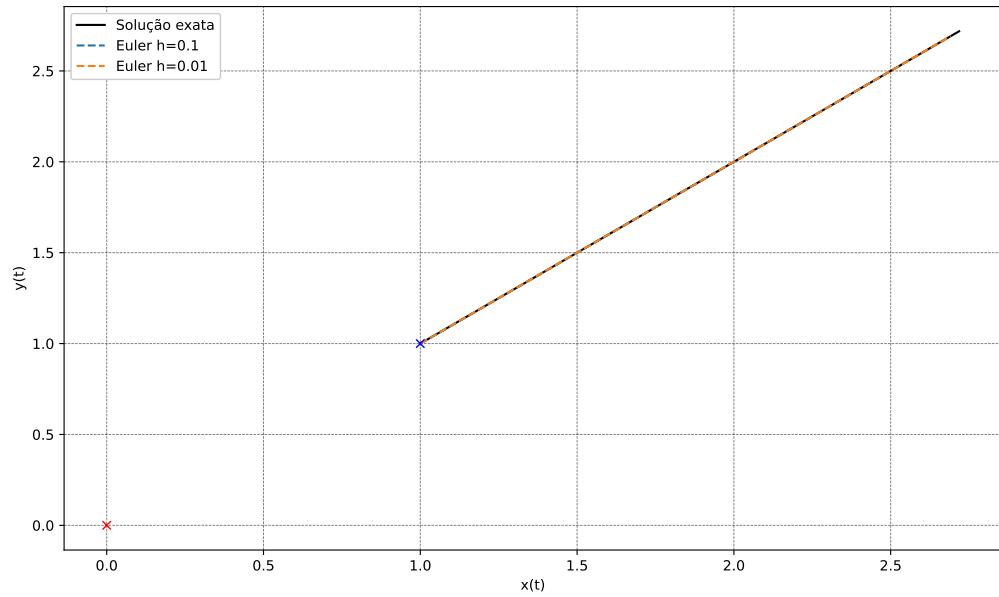


Figura 3: Resultados da simulação do MEE do PVI (4).

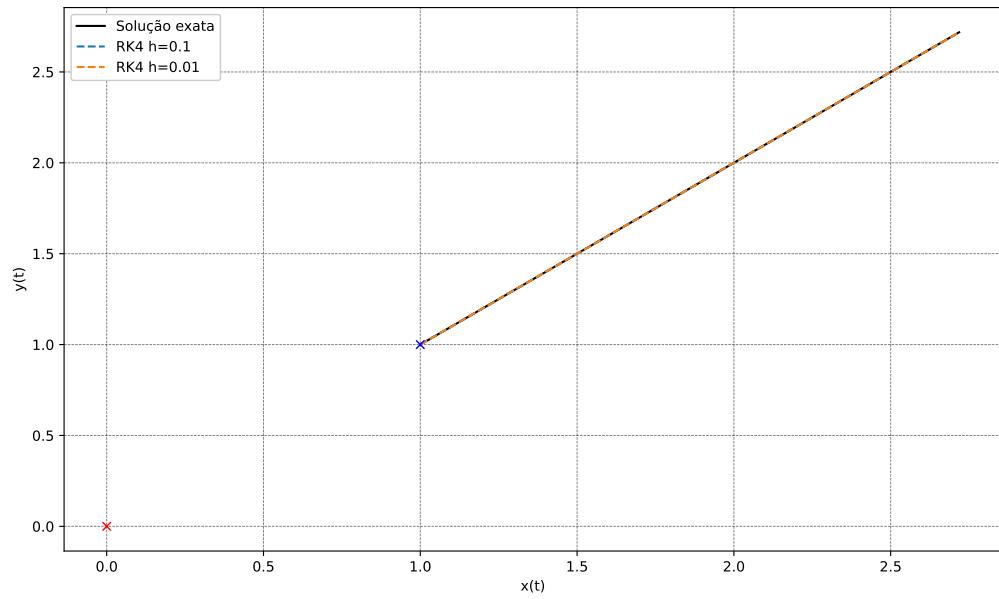


Figura 4: Resultados da simulação do RK4 do PVI (4).

### Exercício 1 - letra C

O Problema de Valor Inicial (PVI) a ser resolvido é dado por:

$$\begin{cases} x' = -\frac{1}{2}x + y \\ y' = -x - \frac{1}{2}y \\ x(0) = 1, y(0) = 1 \end{cases} \quad (7)$$

#### Solução Analítica

O PVI (7) pode ser reescrito na forma matricial  $\mathbf{X}' = A\mathbf{X}$ , onde  $\mathbf{X}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}$  e  $A$  é a matriz de coeficientes.

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \\ -1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Para calcular os autovalores  $\lambda$  de  $A$  fazemos:

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= 0 \\ \det\left(\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} - \lambda & 1 \\ -1 & -\frac{1}{2} - \lambda \end{bmatrix}\right) &= 0 \\ \left(-\frac{1}{2} - \lambda\right)\left(-\frac{1}{2} - \lambda\right) - (1)(-1) &= 0 \\ (\lambda + \frac{1}{2})^2 + 1 &= 0 \\ \lambda^2 + \lambda + \frac{5}{4} &= 0 \end{aligned}$$

Portanto, os autovalores são os complexos conjugados  $\lambda = -\frac{1}{2} \pm i$ . Para cada autovalor, o autovetor correspondente  $\mathbf{v}$  é determinado resolvendo o sistema  $(A - \lambda I)\mathbf{v} = \mathbf{0}$ .

**Para**  $\lambda_1 = -\frac{1}{2} + i$ :

$$\begin{aligned} \left(A - \left(-\frac{1}{2} + i\right)I\right)\mathbf{v}_1 &= \mathbf{0} \\ \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} - (-\frac{1}{2} + i) & 1 \\ -1 & -\frac{1}{2} - (-\frac{1}{2} + i) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{12} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{12} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

As duas equações nos leva à  $v_{12} = iv_{11}$ . Escolhendo  $v_{11} = 1$ , obtemos o autovetor  $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$ . A solução geral é construída a partir da parte real e imaginária da solução complexa  $e^{\lambda_1 t}\mathbf{v}_1$ :

$$\begin{aligned} e^{(-\frac{1}{2}+i)t} \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} &= e^{-\frac{1}{2}t}(\cos(t) + i \sin(t)) \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} \\ &= e^{-\frac{1}{2}t} \begin{bmatrix} \cos(t) + i \sin(t) \\ i \cos(t) - \sin(t) \end{bmatrix} \\ &= e^{-\frac{1}{2}t} \left( \begin{bmatrix} \cos(t) \\ -\sin(t) \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} \sin(t) \\ \cos(t) \end{bmatrix} \right) \end{aligned}$$

A solução geral real é  $\mathbf{X}(t) = c_1 e^{-\frac{1}{2}t} \begin{bmatrix} \cos(t) \\ -\sin(t) \end{bmatrix} + c_2 e^{-\frac{1}{2}t} \begin{bmatrix} \sin(t) \\ \cos(t) \end{bmatrix}$ .

Separando em componentes, temos:

$$x(t) = e^{-\frac{1}{2}t}(c_1 \cos(t) + c_2 \sin(t))$$

$$y(t) = e^{-\frac{1}{2}t}(-c_1 \sin(t) + c_2 \cos(t))$$

Como as condições iniciais são  $x(0) = 1$  e  $y(0) = 1$ , para determinar as constantes  $c_1$  e  $c_2$  fazemos:

$$x(0) = e^0(c_1 \cos(0) + c_2 \sin(0)) \implies 1 = c_1 \quad (8)$$

$$y(0) = e^0(-c_1 \sin(0) + c_2 \cos(0)) \implies 1 = c_2 \quad (9)$$

Da equação (8) e (9) obtemos  $c_1 = 1$  e  $c_2 = 1$ .

Substituindo os valores de  $c_1$  e  $c_2$  na solução geral, obtemos a solução analítica para o PVI (7):

$$x(t) = e^{-\frac{1}{2}t}(\cos(t) + \sin(t))$$

$$y(t) = e^{-\frac{1}{2}t}(\cos(t) - \sin(t))$$

## Resultados da Simulação

O sistema linear possui um único ponto crítico (ou ponto de equilíbrio) na origem,  $\mathbf{X} = (0, 0)$ , já que a matriz  $A$  de coeficientes é não singular. A análise dos autovalores da matriz de coeficientes,  $\lambda = -1/2 \pm i$ , revela que o ponto é um ponto espiral estável (ou foco estável), pois os autovalores são complexos conjugados com parte real negativa ( $Re(\lambda) < 0$ ).

As figuras (5) e (6) apresentam os planos de fase gerados pelos métodos MEE e RK4, respectivamente, com passo  $h = 0.1$  e  $h = 0.01$ . Nas figuras, o ponto crítico  $(0, 0)$  está destacado com um x vermelho enquanto que o ponto inicial  $(1, 1)$  está destacado com um x azul.

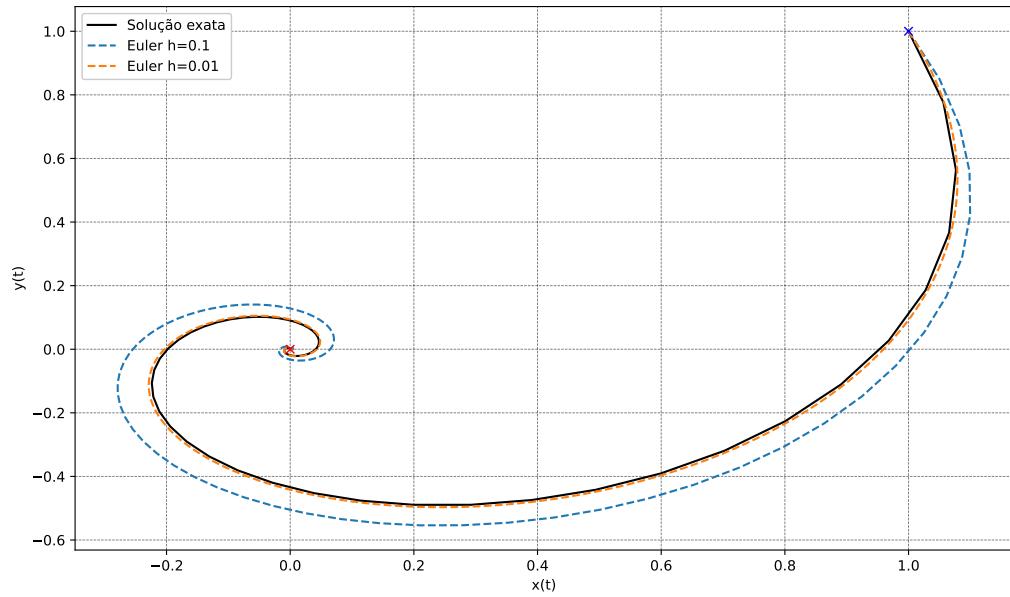


Figura 5: Resultados da simulação do MEE do PVI (7).

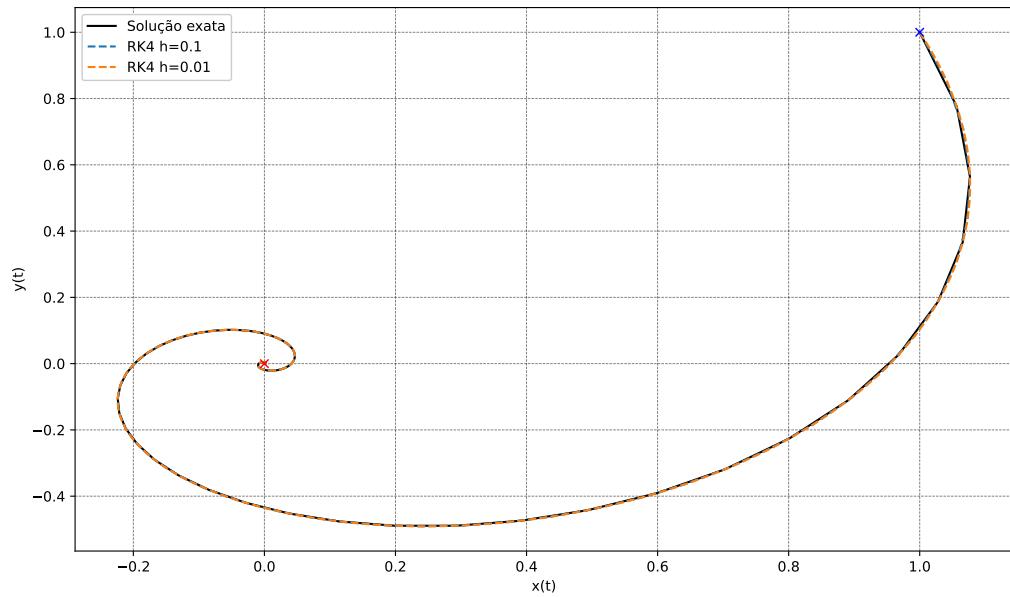


Figura 6: Resultados da simulação do RK4 do PVI (7).

### Exercício 1 - letra D

O Problema de Valor Inicial (PVI) a ser resolvido é dado por:

$$\begin{cases} x' = -3x + 2z \\ y' = x - y \\ z' = -2x - y \\ x(0) = 1, y(0) = 1, z(0) = 1 \end{cases} \quad (10)$$

### Solução Analítica

O PVI (10) pode ser reescrito na forma matricial  $\mathbf{X}' = A\mathbf{X}$ , onde  $\mathbf{X}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix}$  e  $A$  é a matriz de coeficientes.

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Para calcular os autovalores  $\lambda$  de  $A$  fazemos:

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= 0 \\ \det \left( \begin{bmatrix} -3 - \lambda & 0 & 2 \\ 1 & -1 - \lambda & 0 \\ -2 & -1 & -\lambda \end{bmatrix} \right) &= 0 \\ (-3 - \lambda)((-1 - \lambda)(-\lambda) - 0) - 0 + 2(1(-1) - (-1 - \lambda)(-2)) &= 0 \\ (-3 - \lambda)(\lambda^2 + \lambda) + 2(-1 - 2(1 + \lambda)) &= 0 \\ -3\lambda^2 - 3\lambda - \lambda^3 - \lambda^2 + 2(-3 - 2\lambda) &= 0 \\ -\lambda^3 - 4\lambda^2 - 3\lambda - 6 - 4\lambda &= 0 \\ \lambda^3 + 4\lambda^2 + 7\lambda + 6 &= 0 \end{aligned}$$

Fatorando o polinômio, obtemos  $(\lambda + 2)(\lambda^2 + 2\lambda + 3) = 0$ . Portanto, os autovalores são  $\lambda_1 = -2$ , e as raízes de  $\lambda^2 + 2\lambda + 3 = 0$ , que são  $\lambda = -1 \pm i\sqrt{2}$ . Para cada autovalor, o autovetor correspondente  $\mathbf{v}$  é determinado resolvendo o sistema  $(A - \lambda I)\mathbf{v} = \mathbf{0}$ .

**Para  $\lambda_1 = -2$ :**

$$(A - (-2)I)\mathbf{v}_1 = \mathbf{0}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{12} \\ v_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

As equações nos levam à  $v_{11} = 2v_{13}$  e  $v_{12} = -v_{11}$ . Escolhendo  $v_{13} = 1$ , obtemos o autovetor  $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ .

**Para**  $\lambda_2 = -1 + i\sqrt{2}$ :

$$(A - (-1 + i\sqrt{2})I)\mathbf{v}_2 = \mathbf{0}$$

$$\begin{bmatrix} -2 - i\sqrt{2} & 0 & 2 \\ 1 & -i\sqrt{2} & 0 \\ -2 & -1 & 1 - i\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{21} \\ v_{22} \\ v_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

As equações nos levam à  $v_{23} = (1 + \frac{i\sqrt{2}}{2})v_{21}$  e  $v_{22} = -\frac{i\sqrt{2}}{2}v_{21}$ . Escolhendo  $v_{21} = 2$ , obtemos o autovetor  $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -i\sqrt{2} \\ 2+i\sqrt{2} \end{bmatrix}$ . A solução geral é construída a partir da solução real e das partes real e imaginária da solução complexa  $e^{\lambda_2 t}\mathbf{v}_2$ :

$$e^{(-1+i\sqrt{2})t}\mathbf{v}_2 = e^{-t}(\cos(\sqrt{2}t) + i \sin(\sqrt{2}t)) \left( \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} 0 \\ -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{bmatrix} \right)$$

$$= e^{-t} \left( \begin{bmatrix} 2 \cos(\sqrt{2}t) \\ \sqrt{2} \sin(\sqrt{2}t) \\ 2 \cos(\sqrt{2}t) - \sqrt{2} \sin(\sqrt{2}t) \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} 2 \sin(\sqrt{2}t) \\ -\sqrt{2} \cos(\sqrt{2}t) \\ 2 \sin(\sqrt{2}t) + \sqrt{2} \cos(\sqrt{2}t) \end{bmatrix} \right)$$

A solução geral é  $\mathbf{X}(t) = c_1 e^{-2t}\mathbf{v}_1 + c_2 e^{-t} \operatorname{Re}(e^{i\sqrt{2}t}\mathbf{v}_2) + c_3 e^{-t} \operatorname{Im}(e^{i\sqrt{2}t}\mathbf{v}_2)$ .

Separando em componentes, temos:

$$x(t) = 2c_1 e^{-2t} + e^{-t}(2c_2 \cos(\sqrt{2}t) + 2c_3 \sin(\sqrt{2}t))$$

$$y(t) = -2c_1 e^{-2t} + e^{-t}(c_2 \sqrt{2} \sin(\sqrt{2}t) - c_3 \sqrt{2} \cos(\sqrt{2}t))$$

$$z(t) = c_1 e^{-2t} + e^{-t}(c_2(2 \cos(\sqrt{2}t) - \sqrt{2} \sin(\sqrt{2}t)) + c_3(2 \sin(\sqrt{2}t) + \sqrt{2} \cos(\sqrt{2}t)))$$

Como as condições iniciais são  $x(0) = 1, y(0) = 1, z(0) = 1$ , para determinar as constantes  $c_1, c_2, c_3$  fazemos:

$$x(0) = 2c_1 + 2c_2 = 1 \tag{11}$$

$$y(0) = -2c_1 - \sqrt{2}c_3 = 1 \tag{12}$$

$$z(0) = c_1 + 2c_2 + \sqrt{2}c_3 = 1 \tag{13}$$

Da equação (11),  $2c_2 = 1 - 2c_1$ . Substituindo na equação (13):

$$c_1 + (1 - 2c_1) + \sqrt{2}c_3 = 1 \implies -c_1 + \sqrt{2}c_3 = 0 \implies c_1 = \sqrt{2}c_3$$

Substituindo esta relação em (12):

$$-2(\sqrt{2}c_3) - \sqrt{2}c_3 = 1 \implies -3\sqrt{2}c_3 = 1 \implies c_3 = -\frac{1}{3\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{6}$$

Consequentemente,  $c_1 = \sqrt{2} \left( -\frac{\sqrt{2}}{6} \right) = -\frac{2}{6} = -\frac{1}{3}$ . E  $c_2 = \frac{1-2c_1}{2} = \frac{1-2(-1/3)}{2} = \frac{1+2/3}{2} = \frac{5/3}{2} = \frac{5}{6}$ .

Substituindo os valores de  $c_1, c_2, c_3$  na solução geral, obtemos a solução analítica para o PVI (10):

$$\begin{aligned}x(t) &= -\frac{2}{3}e^{-2t} + e^{-t} \left( \frac{5}{3} \cos(\sqrt{2}t) - \frac{\sqrt{2}}{3} \sin(\sqrt{2}t) \right) \\y(t) &= \frac{2}{3}e^{-2t} + e^{-t} \left( \frac{1}{3} \cos(\sqrt{2}t) + \frac{5\sqrt{2}}{6} \sin(\sqrt{2}t) \right) \\z(t) &= -\frac{1}{3}e^{-2t} + e^{-t} \left( \frac{4}{3} \cos(\sqrt{2}t) - \frac{7\sqrt{2}}{6} \sin(\sqrt{2}t) \right)\end{aligned}$$

## Resultados da Simulação

O sistema linear possui um único ponto crítico (ou ponto de equilíbrio) na origem,  $\mathbf{X} = (0, 0, 0)$ , já que a matriz  $A$  de coeficientes é não singular. A análise dos autovalores da matriz de coeficientes,  $\lambda_1 = -2$  e  $\lambda_{2,3} = -1 \pm i\sqrt{2}$ , revela que o ponto é um ponto de equilíbrio assintoticamente estável (um atrator), pois todos os autovalores possuem parte real estritamente negativa. O par de autovalores complexos induz um comportamento espiral, fazendo com que as trajetórias converjam para a origem.

Sendo um sistema tridimensional, as figuras (7) e (8) apresentam as projeções do espaço de fase geradas pelos métodos MEE e RK4, respectivamente, com passo  $h = 0.1$  e  $h = 0.01$ . Nas figuras, o ponto crítico  $(0, 0, 0)$  está destacado com um x vermelho enquanto que o ponto inicial  $(1, 1, 1)$  está destacado com um x azul.

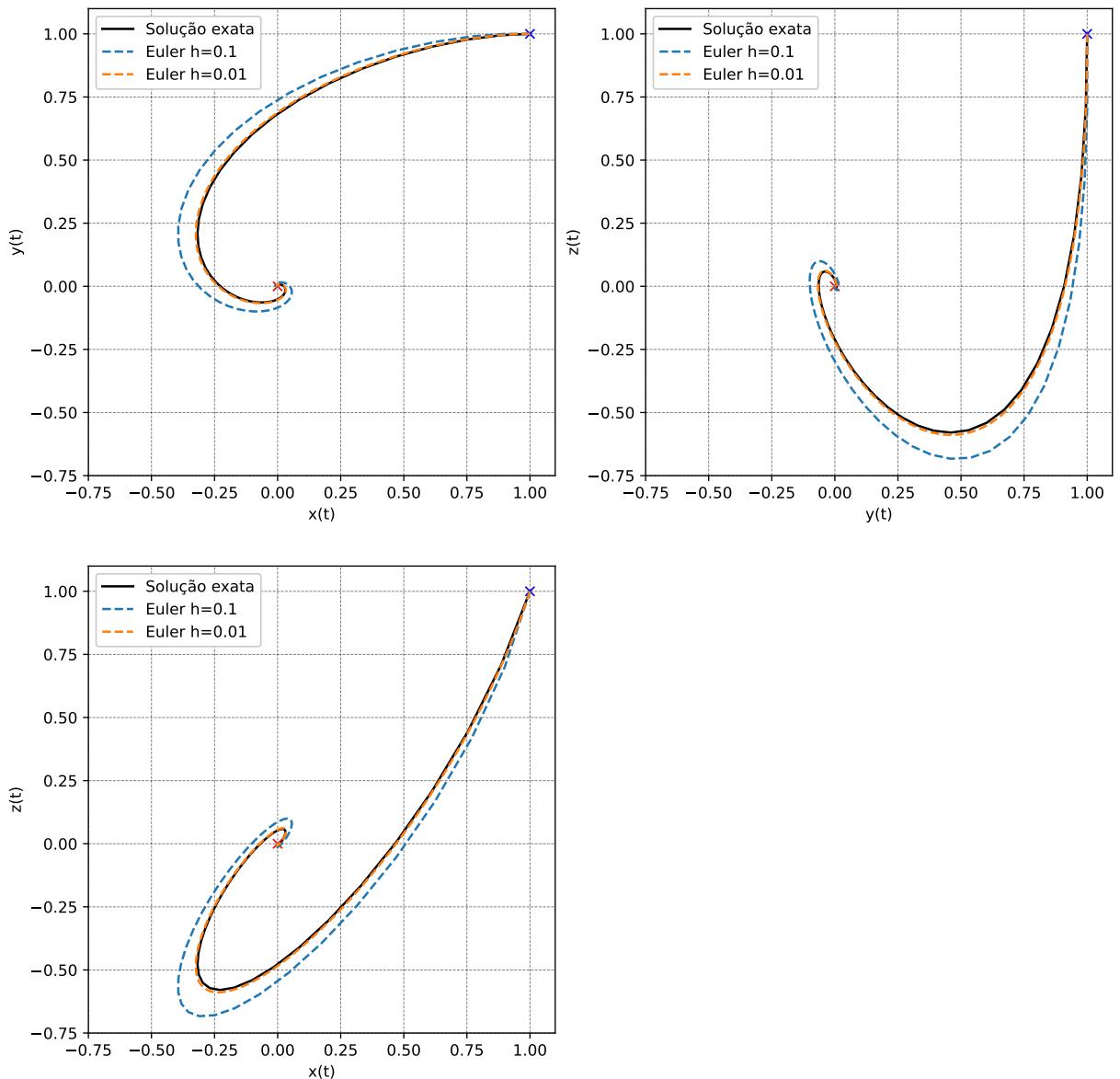


Figura 7: Resultados da simulação do MEE do PVI (10).

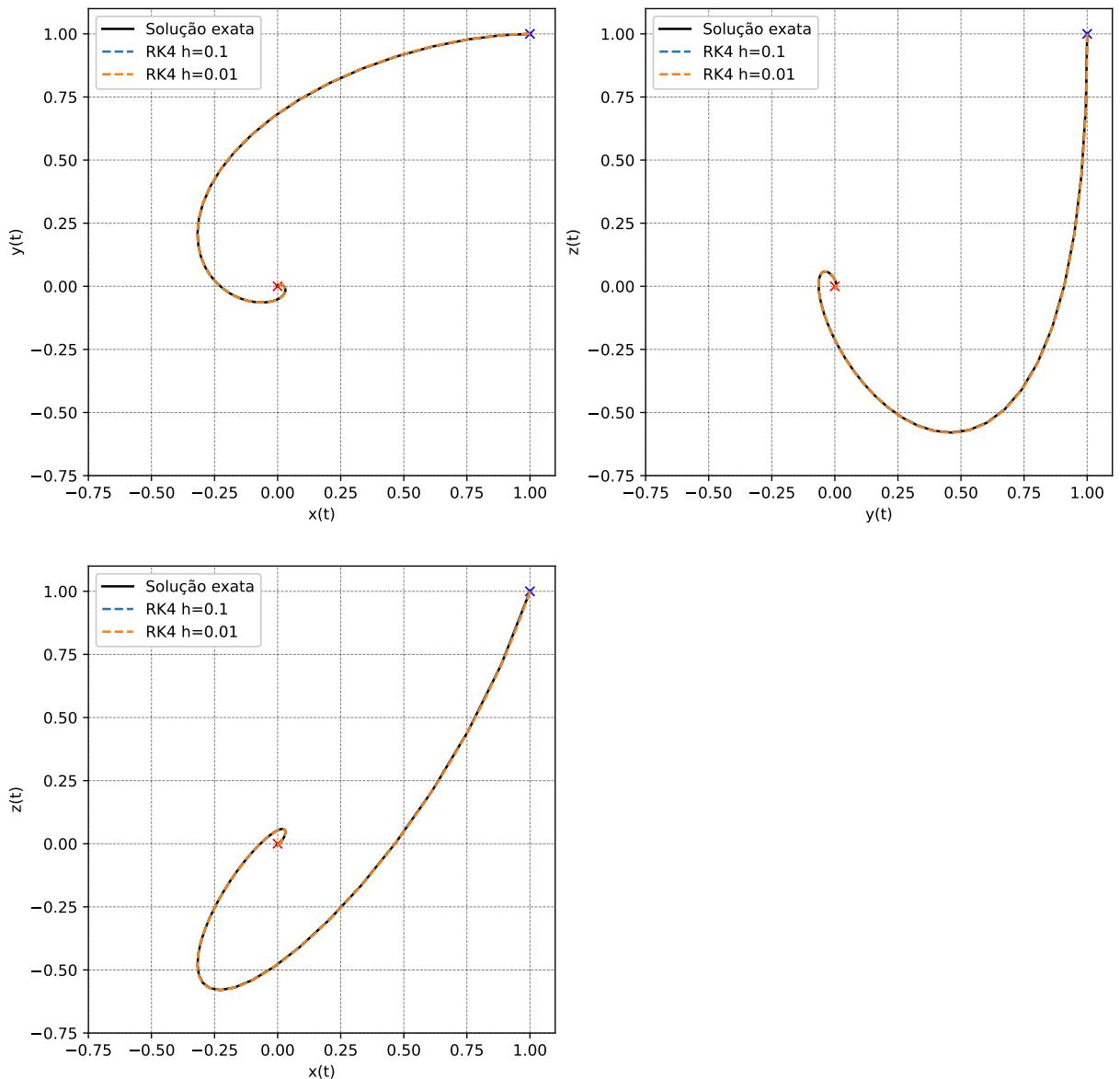


Figura 8: Resultados da simulação do RK4 do PVI (10).

## Exercício 1 - letra E

O Problema de Valor Inicial (PVI) a ser resolvido é dado por:

$$\begin{cases} x' = -10x + 10y \\ y' = 28x - y - xz \\ z' = -\frac{8}{3}z + xy \\ x(0) = 5, y(0) = 5, z(0) = 10 \end{cases} \quad (14)$$

### Solução Analítica

Diferentemente dos sistemas lineares anteriores, o PVI (14) é um sistema de equações não lineares. Este sistema é amplamente conhecido como o Sistema de Lorenz e é um exemplo de sistema dinâmico que exibe comportamento caótico. Devido a essa natureza não linear e caótica, não existe uma solução analítica conhecida que possa ser expressa em termos de funções elementares. Portanto, a análise deste sistema deve ser conduzida por métodos numéricos.

### Resultados da Simulação

O sistema não linear possui três pontos críticos, encontrados resolvendo  $x' = 0$ ,  $y' = 0$  e  $z' = 0$ . Estes pontos são  $\mathbf{X}_0 = (0, 0, 0)$ ,  $\mathbf{X}_1 = (6\sqrt{2}, 6\sqrt{2}, 27)$  e  $\mathbf{X}_2 = (-6\sqrt{2}, -6\sqrt{2}, 27)$ . O sistema não converge para um ponto fixo ou um ciclo limite simples. Em vez disso, as trajetórias são atraídas para um atrator estranho, conhecido como “Atrator de Lorenz”, uma estrutura fractal no espaço de fase que demonstra a sensibilidade do sistema às condições iniciais.

As figuras (9) e (10) apresentam as projeções do espaço de fase geradas pelos métodos MEE e RK4, respectivamente, com passo  $h = 0.01$ . Nas figuras, o ponto crítico  $(0, 0, 0)$  está destacado com um x vermelho enquanto que o ponto inicial  $(5, 5, 10)$  está destacado com um x azul.

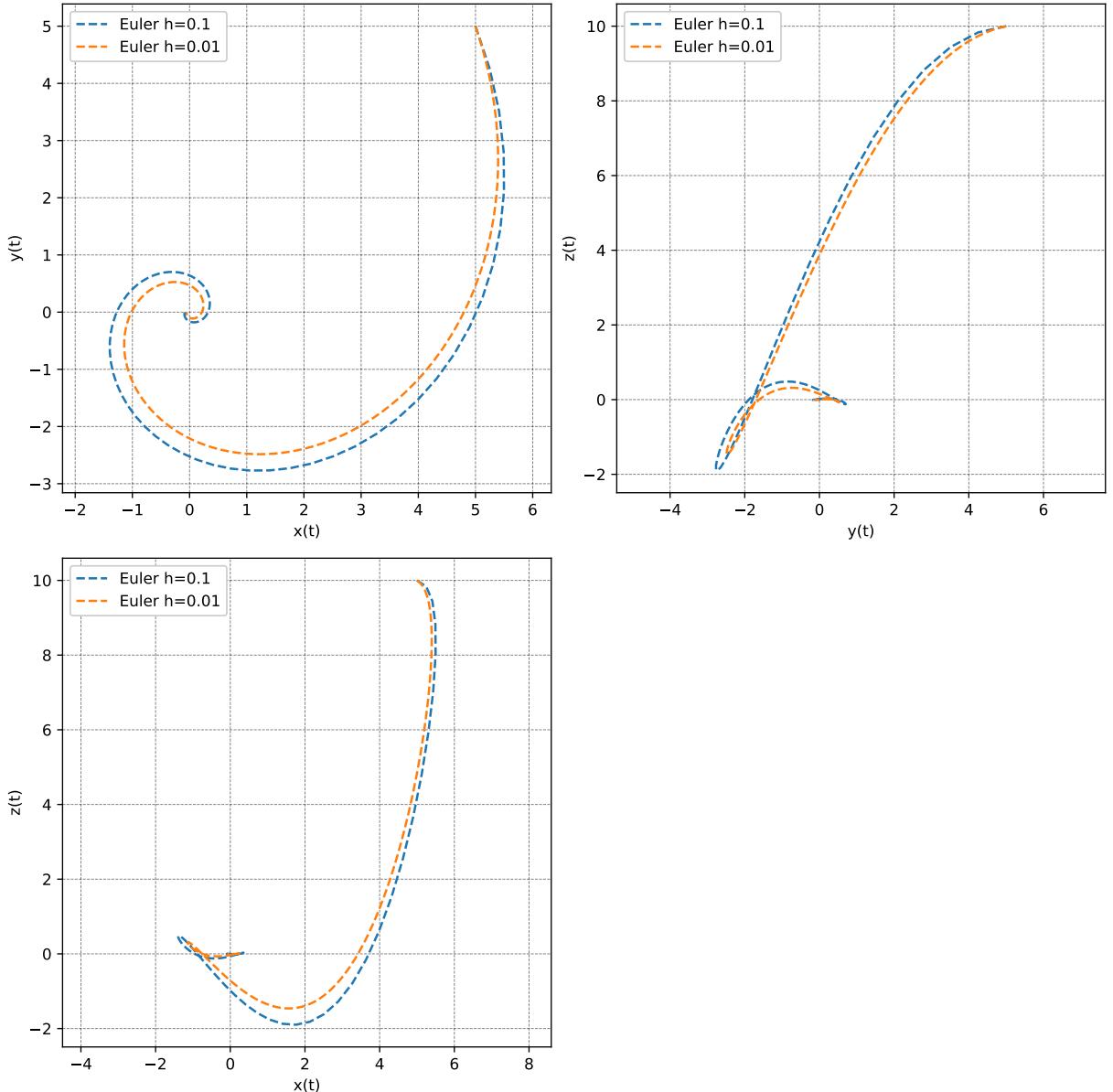


Figura 9: Resultados da simulação do MEE do PVI (14).

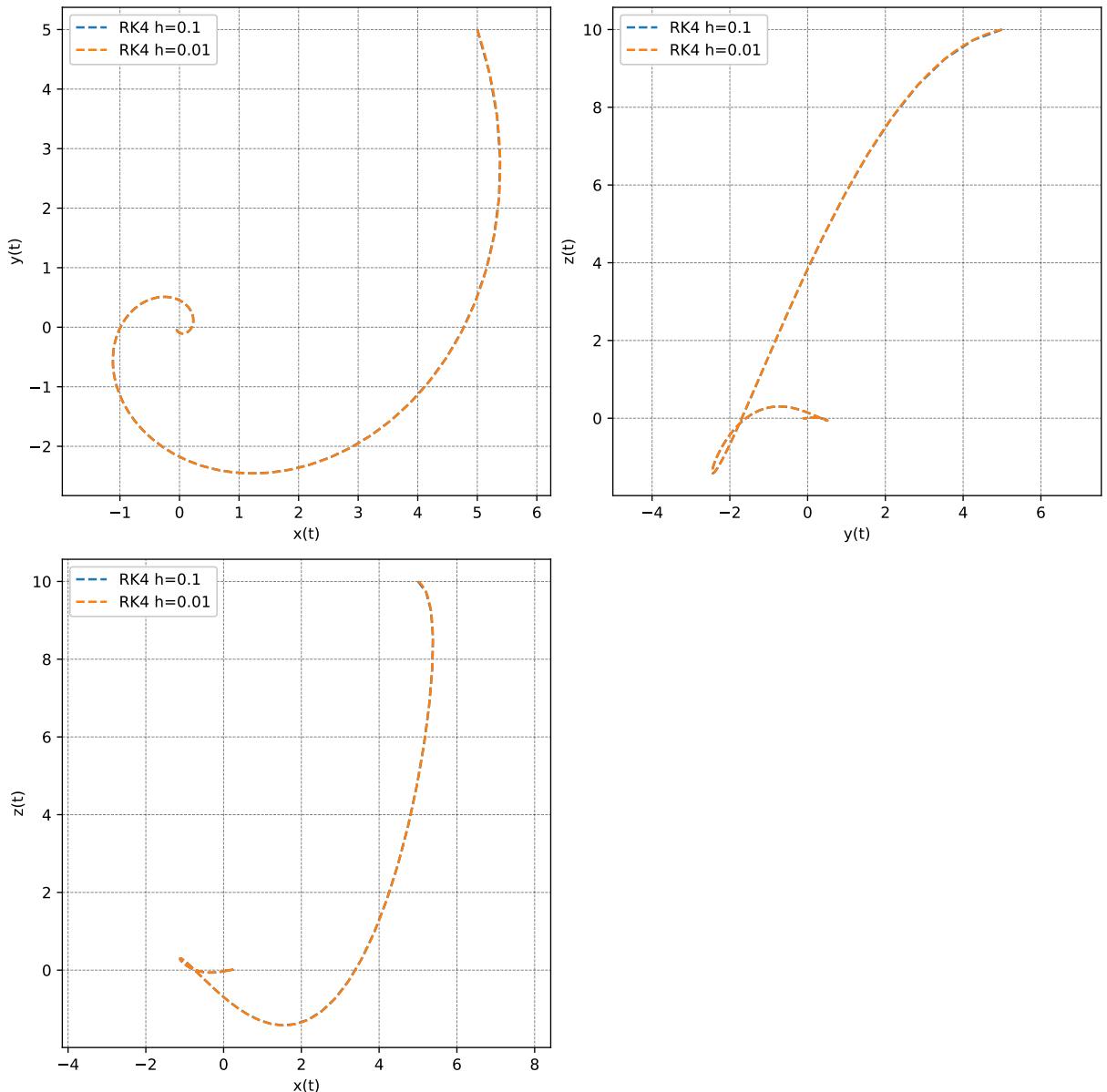


Figura 10: Resultados da simulação do RK4 do PVI (14).

## Exercício 2

A seguir, é analisado três modelos de EDOs não lineares. Na análise, são determinados os pontos críticos (de equilíbrio) de cada sistema e a estabilidade local destes pontos são classificados através da linearização (utilizando a matriz Jacobiana e seus autovalores). Além disso, são exibidas algumas trajetórias para dados pontos iniciais (usando os métodos MEE e RK4 implementados).

### Exercício 2 - letra A

O modelo a ser estudado é:

$$\begin{cases} x' = (2+x)(y-x) \\ y' = (4-x)(y+x) \end{cases} \quad (15)$$

#### Análise do Modelo

Para determinar os pontos críticos do modelo (15) fazemos  $x' = 0$  e  $y' = 0$ :

De  $x' = 0$ , temos:

$$(2+x)(y-x) = 0 \implies x = -2 \quad \text{ou} \quad y = x$$

De  $y' = 0$ , temos:

$$(4-x)(y+x) = 0 \implies x = 4 \quad \text{ou} \quad y = -x$$

Analizando estas condições:

- Se  $x = -2$  (da primeira eq.) e  $x = 4$  (da segunda eq.): Impossível.
- Se  $x = -2$  (da primeira eq.) e  $y = -x$  (da segunda eq.):  $y = -(-2) = 2$ . Resulta no ponto  $\mathbf{P}_1 = (-2, 2)$ .
- Se  $y = x$  (da primeira eq.) e  $x = 4$  (da segunda eq.):  $y = 4$ . Resulta no ponto  $\mathbf{P}_2 = (4, 4)$ .
- Se  $y = x$  (da primeira eq.) e  $y = -x$  (da segunda eq.):  $x = -x \implies 2x = 0 \implies x = 0$ , e portanto  $y = 0$ . Resulta no ponto  $\mathbf{P}_3 = (0, 0)$ .

Logo, o sistema possui três pontos críticos, a saber:  $(0, 0)$ ,  $(-2, 2)$  e  $(4, 4)$ . A matriz Jacobiana  $J(x, y)$  do modelo é dada por:

$$J(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial x'}{\partial x} & \frac{\partial x'}{\partial y} \\ \frac{\partial y'}{\partial x} & \frac{\partial y'}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 + y - 2x & 2 + x \\ 4 - y - 2x & 4 - x \end{bmatrix}$$

**Ponto  $(0, 0)$ :**

$$J(0, 0) = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$$

Os autovalores são  $\lambda_1 \approx 5.12$  e  $\lambda_2 \approx -3.12$ . Por possuir autovalores reais de sinais opostos,  $(0, 0)$  é um ponto de sela (instável).

**Ponto (-2, 2):**

$$J(-2, 2) = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 6 & 6 \end{bmatrix}$$

Os autovalores são  $\lambda_1 = 6$  e  $\lambda_2 = 4$ . Por possuir autovalores reais e positivos, **(-2, 2)** é um nó instável.

**Ponto (4, 4):**

$$J(4, 4) = \begin{bmatrix} -6 & 6 \\ -8 & 0 \end{bmatrix}$$

Os autovalores são  $\lambda \approx -3 \pm i6.24$ . Por possuir autovalores complexos com parte real negativa, **(4, 4)** é um ponto espiral estável (atrator).

### Resultados da Simulação

As figuras (11) e (12) apresentam os planos de fase gerados pelos métodos MEE e RK4, respectivamente, com passo  $h = 0.01$  para diferentes condições iniciais. O tempo de simulação usado foi  $T = 5$ . Nas figuras, os pontos críticos estão destacados com um x vermelho enquanto que os pontos iniciais das trajetórias com um x azul.

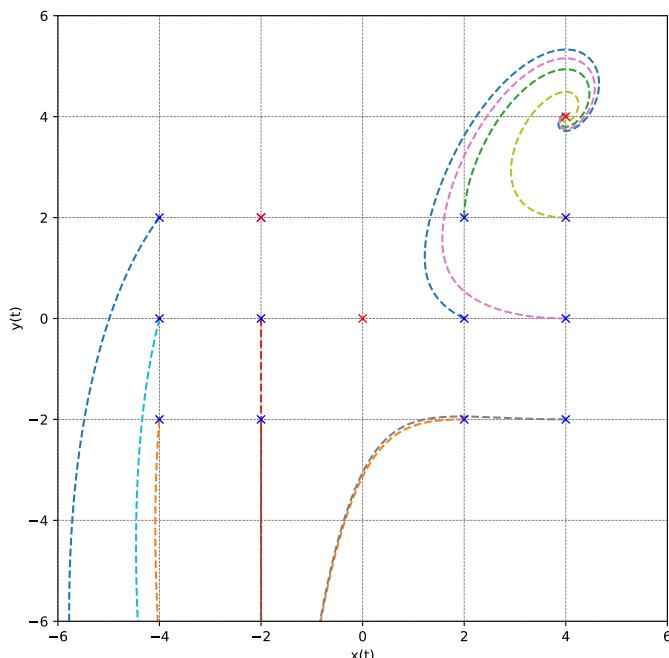


Figura 11: Resultados da simulação do MEE do modelo (15).

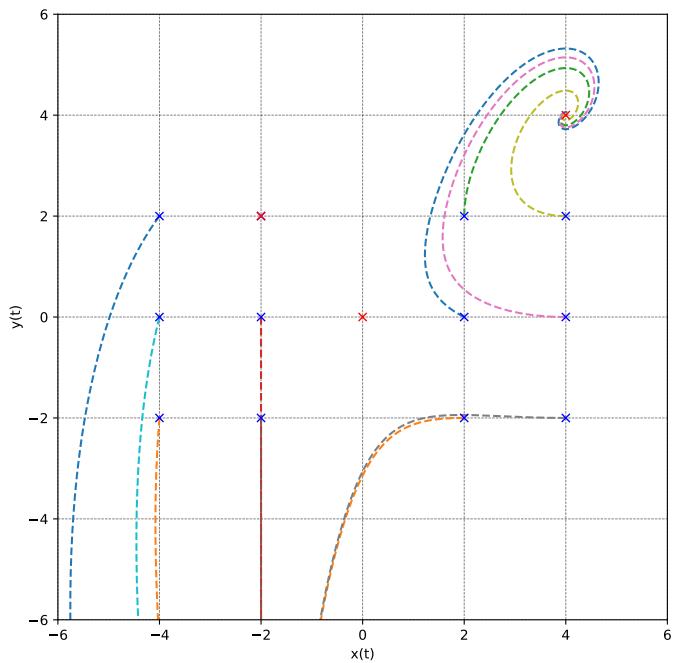


Figura 12: Resultados da simulação do RK4 do modelo(15).

## Exercício 2 - letra B

O modelo a ser estudado é:

$$\begin{cases} x' = 2x + y + xy^3 \\ y' = x - 2y - xy \end{cases} \quad (16)$$

### Análise do Modelo

Para determinar os pontos críticos do modelo (16) fazemos  $x' = 0$  e  $y' = 0$ :

$$2x + y + xy^3 = 0 \quad (17)$$

$$x - 2y - xy = 0 \quad (18)$$

Da equação (18), podemos isolar  $x$ :

$$x(1 - y) = 2y \implies x = \frac{2y}{1 - y}$$

Nota-se que  $y = 1$  não gera solução, pois levaria a  $-2 = 0$  na equação (18). Substituindo  $x$  na equação (17):

$$\begin{aligned} 2\left(\frac{2y}{1-y}\right) + y + \left(\frac{2y}{1-y}\right)y^3 &= 0 \\ 2y^4 - y^2 + 5y &= 0 \end{aligned}$$

As soluções reais são  $y = 0$  e  $y = -1.48$  o que implica  $x = 0$  e  $x = -1.19$ , respectivamente.

Logo, o sistema possui dois pontos críticos, a saber:  $(0, 0)$  e  $(-1.19, -1.48)$ . A matriz Jacobiana  $J(x, y)$  do modelo é dada por:

$$J(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial x'}{\partial x} & \frac{\partial x'}{\partial y} \\ \frac{\partial y'}{\partial x} & \frac{\partial y'}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 + y^3 & 1 + 3xy^2 \\ 1 - y & -2 - x \end{bmatrix}$$

**Ponto  $(0, 0)$ :**

$$J(0, 0) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Os autovalores são  $\lambda_1 = 2.24$  e  $\lambda_2 = -2.24$ . Por possuir autovalores reais de sinais opostos,  $(0, 0)$  é um ponto de sela (instável).

**Ponto  $(-1.19, -1.48)$ :**

$$J(-1.19, -1.48) = \begin{bmatrix} -1.24 & -6.84 \\ 2.48 & -0.81 \end{bmatrix}$$

Os autovalores são  $\lambda = -1.02 \pm i4.1$ . Por possuir autovalores complexos com parte real negativa,  $(-1.19, -1.48)$  é um ponto espiral estável (atrator).

## Resultados da Simulação

As figuras (13) e (14) apresentam os planos de fase gerados pelos métodos MEE e RK4, respectivamente, com passo  $h = 0.0001$  para diferentes condições iniciais. O tempo de simulação usado foi  $T = 5$ . Nas figuras, os pontos críticos estão destacados com um x vermelho enquanto que os pontos iniciais das trajetórias com um x azul.

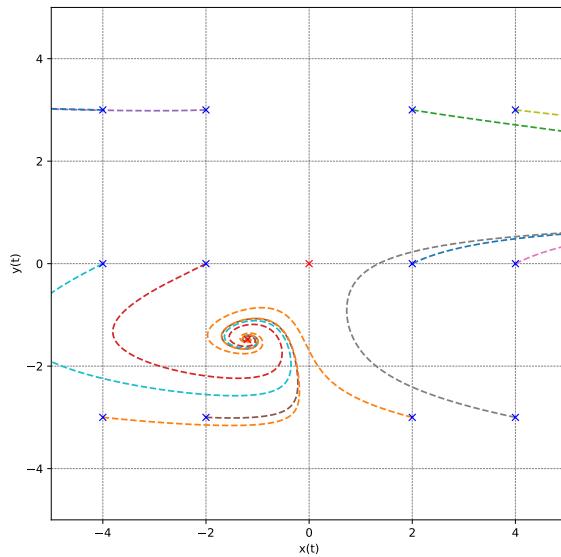


Figura 13: Resultados da simulação do MEE do modelo (16).

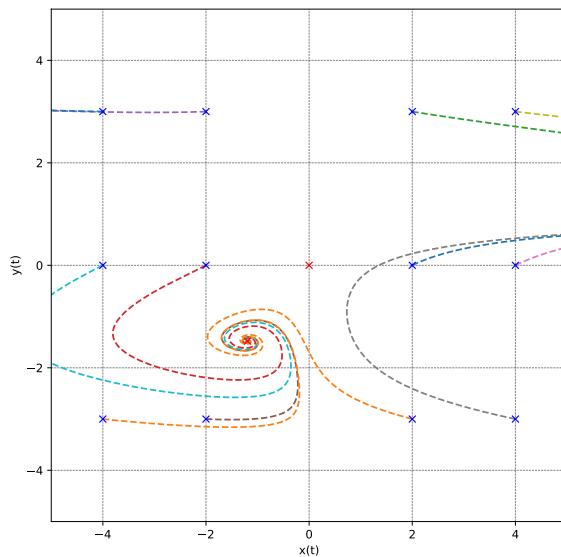


Figura 14: Resultados da simulação do RK4 do modelo(16).

## Exercício 2 - letra C

O modelo a ser estudado é:

$$\begin{cases} x' = -2x - y - x(x^2 + y^2) \\ y' = x - y + y(x^2 + y^2) \end{cases} \quad (19)$$

### Análise do Modelo

Para determinar os pontos críticos do modelo (16) fazemos  $x' = 0$  e  $y' = 0$ :

$$-2x - y - x(x^2 + y^2) = 0 \quad (20)$$

$$x - y + y(x^2 + y^2) = 0 \quad (21)$$

Resolvendo numericamente este sistema, os pontos críticos obtidos são: **(0, 0)**, **(0.33, -1.09)** e **(-0.33, 1.09)**. Já a matriz Jacobiana  $J(x, y)$  do modelo é dada por:

$$J(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial x'}{\partial x} & \frac{\partial x'}{\partial y} \\ \frac{\partial y'}{\partial x} & \frac{\partial y'}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 - 3x^2 - y^2 & -1 - 2xy \\ 1 + 2xy & -1 + x^2 + 3y^2 \end{bmatrix}$$

**Ponto (0, 0):**

$$J(0, 0) = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Os autovalores são  $\lambda = -1.5 \pm i0.87$ . Por possuir autovalores complexos com parte real negativa, **(0, 0)** é um ponto espiral estável (atrator).

**Ponto (0.33, -1.09):**

$$J(0, 0) = \begin{bmatrix} -3.52 & -0.28 \\ 0.28 & 2.69 \end{bmatrix}$$

Os autovalores são  $\lambda_1 = -3.51$  e  $\lambda_2 = 2.67$ . Por possuir autovalores reais de sinais opostos, **(0.33, -1.09)** é um ponto de sela (instável).

**Ponto (-0.33, 1.09):**

$$J(0, 0) = \begin{bmatrix} -3.52 & -0.28 \\ 0.28 & 2.69 \end{bmatrix}$$

Os autovalores são  $\lambda_1 = -3.51$  e  $\lambda_2 = 2.67$ . Por possuir autovalores reais de sinais opostos, **(-0.33, 1.09)** é um ponto de sela (instável).

### Resultados da Simulação

As figuras (15) e (16) apresentam os planos de fase gerados pelos métodos MEE e RK4, respectivamente, com passo  $h = 0.01$  para diferentes condições iniciais. O tempo de simulação usado foi  $T = 5$ . Nas figuras, os pontos críticos estão destacados com um x vermelho enquanto que os pontos iniciais das trajetórias com um x azul.

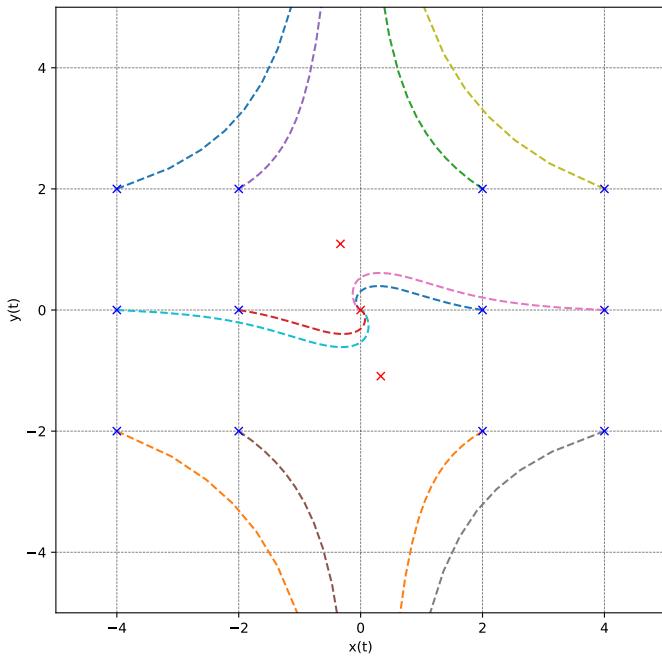


Figura 15: Resultados da simulação do MEE do modelo (19).

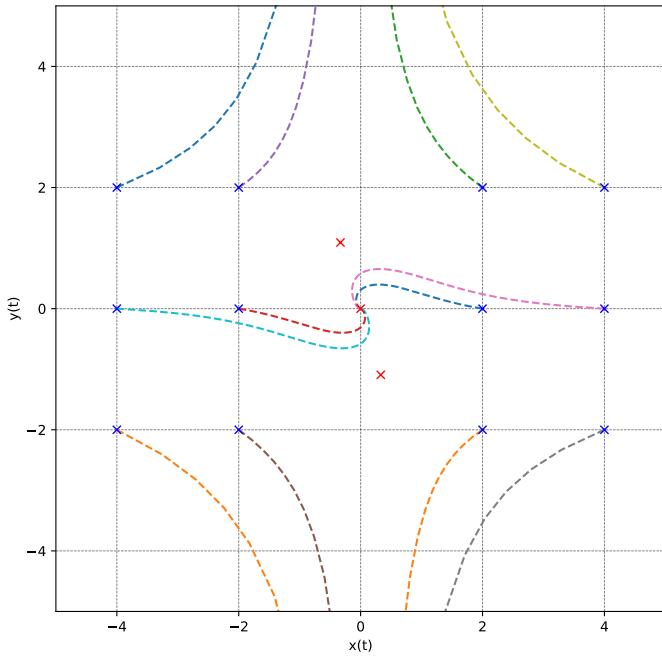


Figura 16: Resultados da simulação do RK4 do modelo(19).

### Exercício 3

A seguir, são analisados dois modelos de EDOs não lineares que representam sistemas de interação entre populações (um modelo de competição e um de presa-predador). Na análise, são determinados os pontos críticos (de equilíbrio) de cada sistema e a estabilidade local destes pontos é classificada através da linearização (utilizando a matriz Jacobiana e seus autovalores). Além disso, são exibidas algumas trajetórias para dados pontos iniciais (usando os métodos MEE e RK4 implementados).

#### Exercício 3 - letra A

O modelo a ser estudado é:

$$\begin{cases} x' = x(1.5 - x - 0.5y) \\ y' = y(2 - y - 0.75x) \end{cases} \quad (22)$$

Este modelo é um sistema de competição entre duas espécies (conhecido como modelo de competição Lotka-Volterra), onde ambas as populações,  $x(t)$  e  $y(t)$ , seguem um crescimento logístico e competem pelos mesmos recursos limitados.

O termo  $x(1.5 - x)$  representa o crescimento logístico da espécie  $x$  na ausência da espécie  $y$ . A taxa de crescimento intrínseca é 1.5 e a capacidade de suporte é  $K_1 = 1.5$ . Já o termo  $-0.5xy$  (advindo de  $-0.5y$ ) representa o efeito negativo (competição) que a espécie  $y$  exerce sobre a espécie  $x$ .

O termo  $y(2 - y)$  representa o crescimento logístico da espécie  $y$  na ausência da espécie  $x$ . A taxa de crescimento intrínseca é 2 e a capacidade de suporte é  $K_2 = 2$ . Já o termo  $-0.75xy$  (advindo de  $-0.75x$ ) representa o efeito negativo (competição) que a espécie  $x$  exerce sobre a espécie  $y$ .

A análise deste sistema, portanto, estuda as condições sob as quais uma espécie leva a outra à extinção (como nos pontos de sela **(0, 2)** e **(1.5, 0)**) ou se ambas conseguem coexistir (como no nó estável **(0.8, 1.4)**).

#### Análise do Modelo

Para determinar os pontos críticos do modelo (22) fazemos  $x' = 0$  e  $y' = 0$ :

$$x(1.5 - x - 0.5y) = 0 \quad (23)$$

$$y(2 - y - 0.75x) = 0 \quad (24)$$

Resolvendo numericamente este sistema, os pontos críticos obtidos são: **(0, 0)**, **(0, 2)**, **(0.8, 1.4)** e **(1.5, 0)**. Já a matriz Jacobiana  $J(x, y)$  do modelo é dada por:

$$J(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial x'}{\partial x} & \frac{\partial x'}{\partial y} \\ \frac{\partial y'}{\partial x} & \frac{\partial y'}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.5 - 2x - 0.5y & -0.5x \\ 0.75y & 2 - 2y - 0.75x \end{bmatrix}$$

**Ponto (0, 0):**

$$J(0, 0) = \begin{bmatrix} 1.5 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Os autovalores são  $\lambda_1 = 1.5$  e  $\lambda_2 = 2$ . Por possuir autovalores reais e positivos, **(-2, 2)** é um nó instável.

**Ponto (0, 2):**

$$J(0, 0) = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Os autovalores são  $\lambda_1 = -2$  e  $\lambda_2 = 0.5$ . Por possuir autovalores reais de sinais opostos, **(0, 2)** é um ponto de sela (instável).

**Ponto (0.8, 1.4):**

$$J(0, 0) = \begin{bmatrix} -0.8 & -0.4 \\ 1.05 & -1.4 \end{bmatrix}$$

Os autovalores são  $\lambda = -1.1 \pm i0.57$ . Por possuir autovalores complexos com parte real negativa, **(0.8, 1.4)** é um ponto espiral estável (atrator).

**Ponto (1.5, 0):**

$$J(0, 0) = \begin{bmatrix} -1.5 & -0.75 \\ 0 & 0.875 \end{bmatrix}$$

Os autovalores são  $\lambda_1 = -1.5$  e  $\lambda_2 = 0.875$ . por possuir autovalores reais de sinais opostos, **(1.5, 0)** é um ponto de sela (instável).

## Resultados da Simulação

As figuras (17) e (18) apresentam os planos de fase gerados pelos métodos MEE e RK4, respectivamente, com passo  $h = 0.01$  para diferentes condições iniciais. O tempo de simulação usado foi  $T = 20$ . Nas figuras, os pontos críticos estão destacados com um x vermelho enquanto que os pontos iniciais das trajetórias com um x azul.

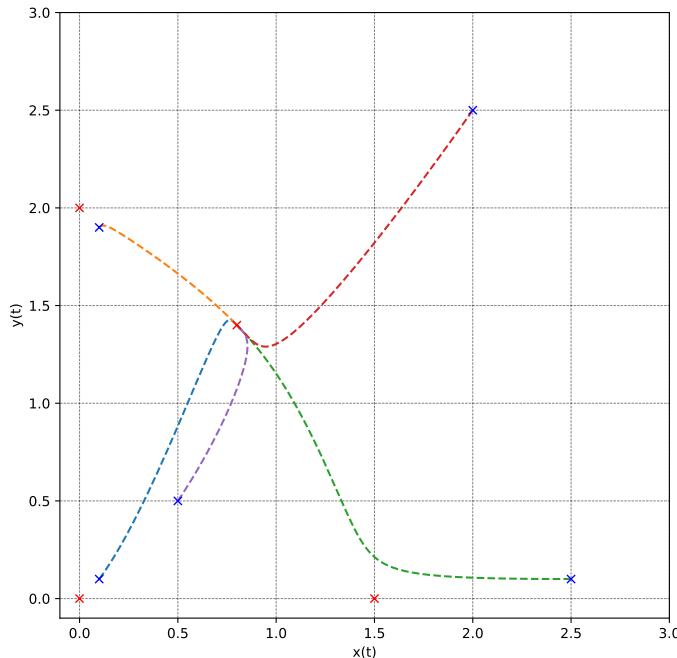


Figura 17: Resultados da simulação do MEE do modelo (22).

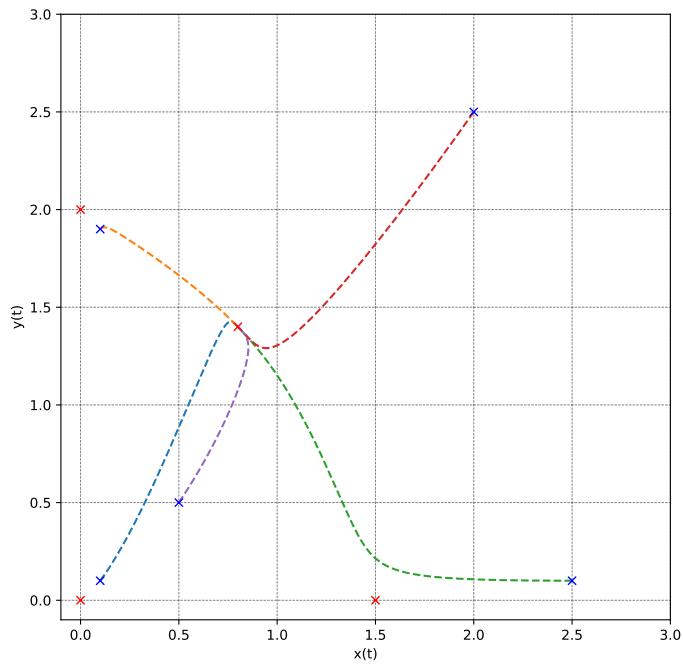


Figura 18: Resultados da simulação do RK4 do modelo(22).

### Exercício 3 - letra B

O modelo a ser estudado é:

$$\begin{cases} x' = x(1 - 0.5y) \\ y' = y(-0.75 + 0.25x) \end{cases} \quad (25)$$

Este modelo é um sistema Presa-Predador clássico (conhecido como modelo Lotka-Volterra). A população  $x(t)$  representa a presa e  $y(t)$  o predador.

O termo  $x$  na primeira equação (quando  $y = 0$ ,  $x' = x$ ) indica que a presa, na ausência do predador, cresce exponencialmente. O termo  $-0.5xy$  representa a predação, que tem um efeito negativo sobre a população da presa.

O termo  $-0.75y$  na segunda equação (quando  $x = 0$ ,  $y' = -0.75y$ ) indica que o predador, na ausência de sua presa, decai exponencialmente (morre de fome). O termo  $+0.25xy$  representa o benefício da predação para o predador, convertendo presas em mais predadores.

A análise deste sistema, portanto, estuda as condições sob as quais as populações coexistem, tipicamente em ciclos, ou são levadas à extinção.

### Análise do Modelo

Para determinar os pontos críticos do modelo (25) fazemos  $x' = 0$  e  $y' = 0$ :

$$x(1 - 0.5y) = 0 \quad (26)$$

$$y(-0.75 + 0.25x) = 0 \quad (27)$$

Resolvendo este sistema, os pontos críticos obtidos são: **(0, 0)** e **(3, 2)**. Já a matriz Jacobiana  $J(x, y)$  do modelo é dada por:

$$J(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial x'}{\partial x} & \frac{\partial x'}{\partial y} \\ \frac{\partial y'}{\partial x} & \frac{\partial y'}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - 0.5y & -0.5x \\ 0.25y & -0.75 + 0.25x \end{bmatrix}$$

**Ponto (0, 0):**

$$J(0, 0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -0.75 \end{bmatrix}$$

Os autovalores são  $\lambda_1 = 1$  e  $\lambda_2 = -0.75$ . Por possuir autovalores reais de sinais opostos, **(0, 0)** é um ponto de sela (instável).

**Ponto (3, 2):**

$$J(3, 2) = \begin{bmatrix} 0 & -1.5 \\ 0.5 & 0 \end{bmatrix}$$

Os autovalores são  $\lambda = \pm i0.87$ . Por possuir autovalores imaginários puros (parte real nula), **(3, 2)** é um centro, indicando trajetórias cíclicas (órbitas fechadas) ao seu redor.

## Resultados da Simulação

As figuras (19) e (20) apresentam os planos de fase gerados pelos métodos MEE e RK4, respectivamente, com passo  $h = 0.01$  para diferentes condições iniciais. O tempo de simulação usado foi  $T = 20$ . Nas figuras, os pontos críticos estão destacados com um x vermelho enquanto que os pontos iniciais das trajetórias com um x azul.

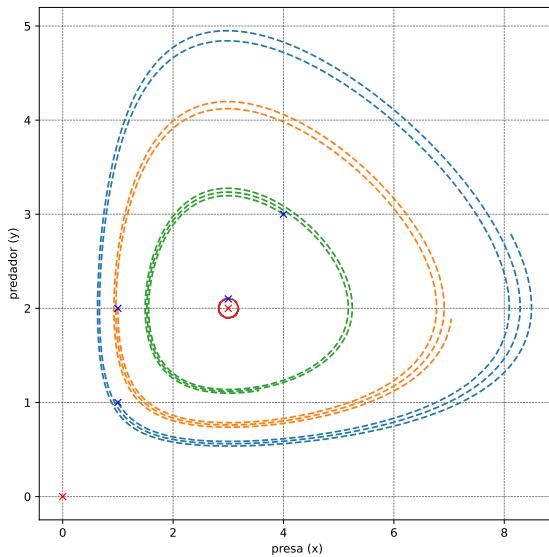


Figura 19: Resultados da simulação do MEE do modelo (25).

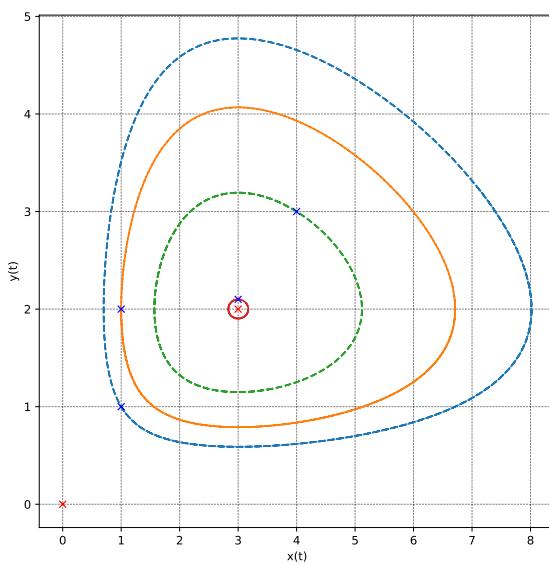


Figura 20: Resultados da simulação do RK4 do modelo(25).

Repare que, na figura (19) as trajetórias não são cíclicas devido a erros de aproximações

ao utilizar o MEE com passo  $h = 0.01$ . Ao melhorar a aproximação, por exemplo refinando o passo  $h = 0.001$ , obtemos trajetórias mais próximas do esperado (figura 21).

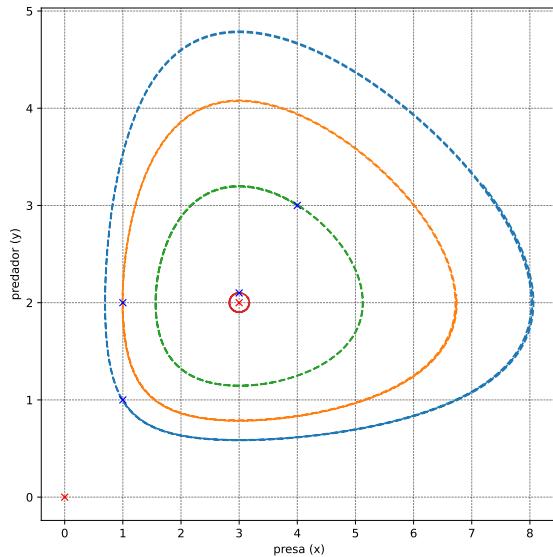


Figura 21: Resultados da simulação do MEE do modelo (25), com  $h = 0.001$ .

## Exercício 4

A equação de Van der Pol, dada por  $u'' - \mu(1 - u^2)u' + u = 0$  pode ser modelada em sistema de equações diferenciais da seguinte forma:

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -x + \mu(1 - x^2)y \end{cases} \quad (28)$$

Este sistema de equações modela um oscilador não linear. Sua principal característica é um termo de amortecimento  $\mu(1 - x^2)y$  que muda de sinal:

- Quando  $|x| < 1$ , o amortecimento é negativo ( $1 - x^2 > 0$ ), fornecendo energia ao sistema e fazendo as oscilações crescerem (repulsão da origem).
- Quando  $|x| > 1$ , o amortecimento é positivo ( $1 - x^2 < 0$ ), dissipando energia e fazendo as oscilações diminuírem.

Esse comportamento faz com que o sistema, para qualquer  $\mu > 0$ , tenda a um ciclo limite estável, uma órbita periódica isolada. O parâmetro  $\mu$  controla a intensidade dessa não linearidade.

### Análise do Modelo

Para determinar os pontos críticos do modelo (28) fazemos  $x' = 0$  e  $y' = 0$ :

$$y = 0 \quad (29)$$

$$-x + \mu(1 - x^2)y = 0 \quad (30)$$

Substituindo (29) em (30), temos  $-x + \mu(1 - x^2)(0) = 0$ , o que implica  $-x = 0$ , e portanto  $x = 0$ . Logo, o sistema possui um único ponto crítico,  $\mathbf{P}_1 = (\mathbf{0}, \mathbf{0})$ .

A matriz Jacobiana  $J(x, y)$  do modelo é dada por:

$$J(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial x'}{\partial x} & \frac{\partial x'}{\partial y} \\ \frac{\partial y'}{\partial x} & \frac{\partial y'}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 - 2\mu xy & \mu(1 - x^2) \end{bmatrix}$$

**Ponto  $(0, 0)$ :** A estabilidade da origem depende crucialmente do parâmetro  $\mu$ .

$$J(0, 0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \mu \end{bmatrix}$$

A equação característica é  $\lambda^2 - \text{tr}(J)\lambda + \det(J) = 0$ , ou seja,  $\lambda^2 - \mu\lambda + 1 = 0$ . Os autovalores são  $\lambda = \frac{\mu \pm \sqrt{\mu^2 - 4}}{2}$ .

- Se  $\mu = 0$ ,  $\lambda = \pm i$ . O sistema é um centro (oscilador harmônico simples).
- Se  $0 < \mu < 2$ ,  $\lambda = \frac{\mu}{2} \pm i\frac{\sqrt{4-\mu^2}}{2}$ . Autovalores complexos com parte real positiva ( $\frac{\mu}{2} > 0$ ).
- Se  $\mu \geq 2$ ,  $\lambda = \frac{\mu \pm \sqrt{\mu^2 - 4}}{2}$ . Autovalores reais e positivos.

Portanto, para qualquer  $\mu > 0$ , o ponto  $(\mathbf{0}, \mathbf{0})$  é instável (um repulsor), sendo uma espiral instável para  $0 < \mu < 2$  e um nó instável para  $\mu \geq 2$ .

## Resultados da Simulação

**Caso  $\mu = 0$  (Oscilador Harmônico):** Se  $\mu = 0$ , o sistema (28) se reduz a  $x' = y$  e  $y' = -x$ , que é o oscilador harmônico linear simples. Como visto na análise do ponto crítico, a origem  $(0, 0)$  é um centro estável. O sistema possui uma família infinita de órbitas periódicas fechadas (elipses ou círculos) ao redor da origem. A trajetória específica seguida pelo sistema depende inteiramente das condições iniciais e não há atração ou repulsão para uma órbita específica. As figuras (22) e (23) apresentam os planos de fase para  $\mu = 0$ . Nas figuras, os pontos críticos estão destacados com um x vermelho enquanto que os pontos iniciais das trajetórias com um x azul.

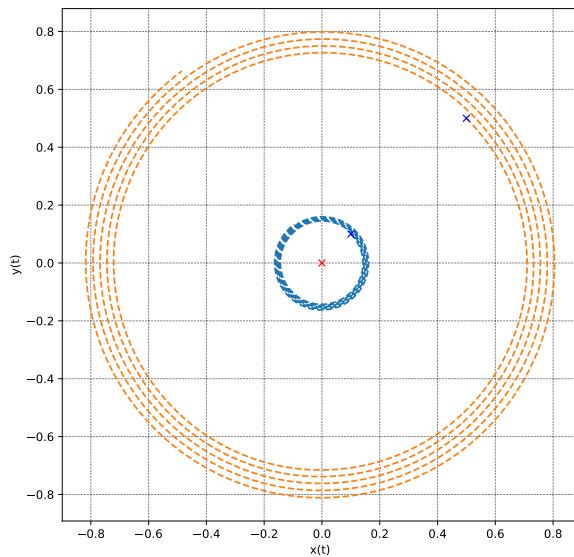


Figura 22: Resultados do MEE para  $\mu = 0$  do modelo (28).

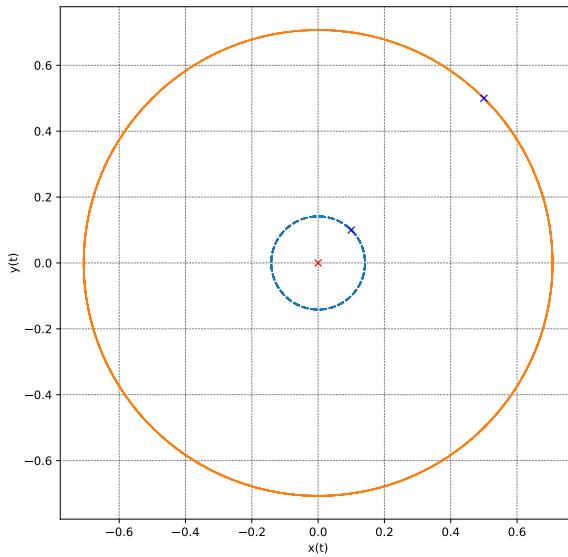


Figura 23: Resultados do RK4 para  $\mu = 0$  do modelo (28).

**Caso  $\mu$  pequeno (ex:  $\mu = 0.5$ ):** Para valores pequenos de  $\mu$ , o sistema é fracamente não linear e o ciclo limite é quase circular, próximo de uma senóide. As figuras (24) e (25) apresentam os planos de fase para  $\mu = 1$ , com passo  $h = 0.01$  e  $T = 30$ . Nas figuras, os pontos críticos estão destacados com um x vermelho enquanto que os pontos iniciais das trajetórias com um x azul.

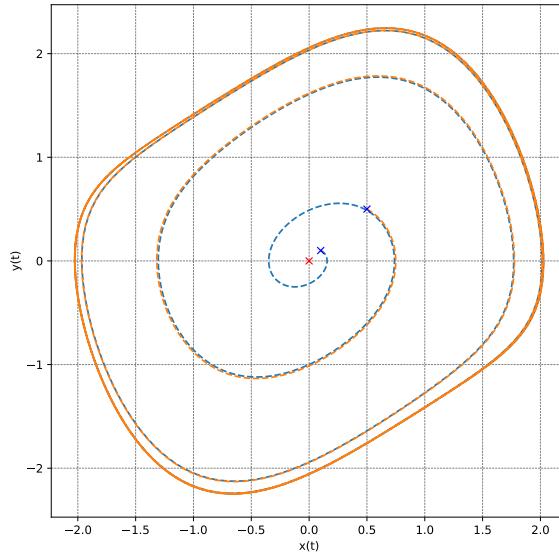


Figura 24: Resultados do MEE para  $\mu = 0.5$  do modelo (28).

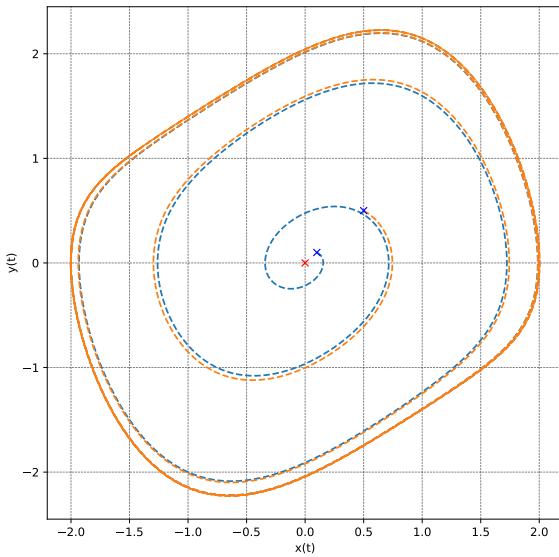


Figura 25: Resultados do RK4 para  $\mu = 0.5$  do modelo (28).

**Caso  $\mu$  grande (ex:  $\mu = 5$ ):** Para valores grandes de  $\mu$ , o sistema é fortemente não linear e o ciclo limite é muito distorcido, caracterizando um oscilador de relaxação. As figuras (26) e (27) apresentam os planos de fase para  $\mu = 5$ , com passo  $h = 0.01$  e  $T = 30$ . Nas figuras, os pontos críticos estão destacados com um x vermelho enquanto que os pontos iniciais das trajetórias com um x azul.

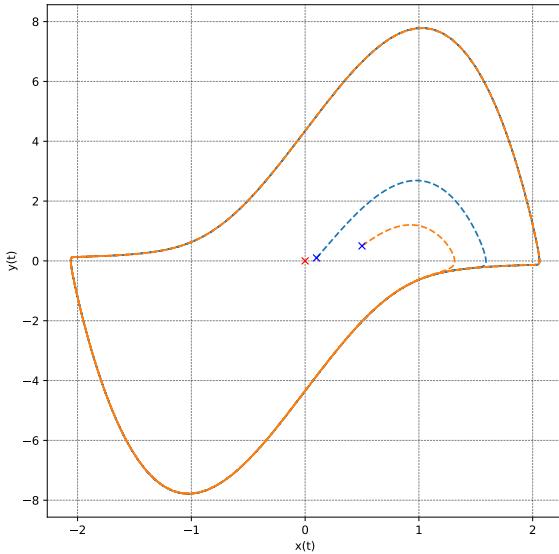


Figura 26: Resultados do MEE para  $\mu = 5$  do modelo (28).

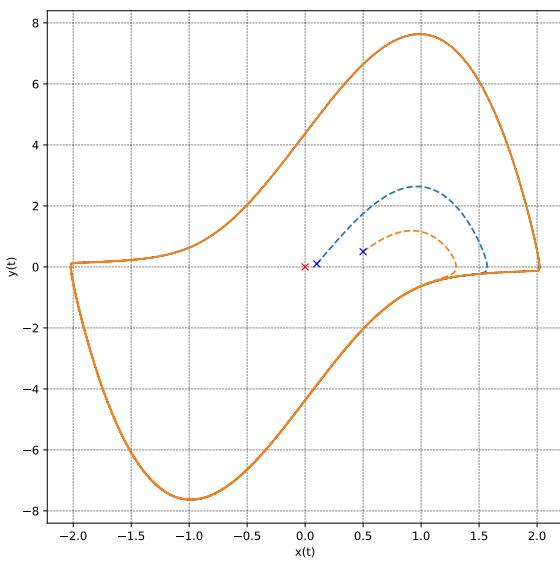


Figura 27: Resultados do RK4 para  $\mu = 5$  do modelo (28).

## Exercício 5

O modelo de Lorenz é definido pelo seguinte sistema de equações diferenciais:

$$\begin{cases} x' = \sigma(-x + y) \\ y' = rx - y - xz \\ z' = -bz + xy \end{cases} \quad (31)$$

Este sistema é um modelo simplificado para a convecção atmosférica, um sistema tridimensional que apresenta grande sensibilidade às condições iniciais. Dependendo dos parâmetros  $\sigma$ ,  $r$  e  $b$ , o sistema pode convergir para pontos de equilíbrio estáveis ou exibir comportamento caótico (atrator de Lorenz).

### Análise do Modelo

Para determinar os pontos críticos do modelo (31) fazemos  $x' = 0$ ,  $y' = 0$  e  $z' = 0$ :

$$\sigma(-x + y) = 0 \quad (32)$$

$$rx - y - xz = 0 \quad (33)$$

$$-bz + xy = 0 \quad (34)$$

De (32), temos imediatamente que  $y = x$ . Substituindo isso em (34), temos  $-bz + x^2 = 0$ , o que implica  $z = x^2/b$ . Por fim, substituindo  $y$  e  $z$  em (33):

$$rx - x - x \left( \frac{x^2}{b} \right) = 0 \implies x \left( r - 1 - \frac{x^2}{b} \right) = 0$$

Temos então dois casos. O primeiro caso é  $x = 0$ , o que implica  $y = 0$  e  $z = 0$ , levando ao ponto  $\mathbf{P}_0 = (0, 0, 0)$ . O segundo caso  $x^2 = b(r - 1)$ . Esta solução só existe se  $r > 1$ . Neste caso, temos dois pontos simétricos:  $C^\pm = (\pm\sqrt{b(r - 1)}, \pm\sqrt{b(r - 1)}, r - 1)$ .

A matriz Jacobiana  $J(x, y, z)$  do modelo é dada por:

$$J(x, y, z) = \begin{bmatrix} \frac{\partial x'}{\partial x} & \frac{\partial x'}{\partial y} & \frac{\partial x'}{\partial z} \\ \frac{\partial y'}{\partial x} & \frac{\partial y'}{\partial y} & \frac{\partial y'}{\partial z} \\ \frac{\partial z'}{\partial x} & \frac{\partial z'}{\partial y} & \frac{\partial z'}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ r - z & -1 & -x \\ y & x & -b \end{bmatrix}$$

**Ponto  $(0, 0, 0)$ :**

$$J(0, 0, 0) = \begin{bmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ r & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{bmatrix}$$

Os autovalores são  $\lambda_1 = -b$  e as raízes de  $\lambda^2 + (\sigma + 1)\lambda + \sigma(1 - r) = 0$ .

- Caso  $r < 1$ , todos os autovalores têm parte real negativa. A origem é estável.
- Caso  $r > 1$ , temos um autovalor positivo. A origem torna-se instável (sela).

**Pontos  $C^\pm$ :** Para analisar a estabilidade destes pontos quando  $r > 1$ , utilizamos o critério de Routh-Hurwitz. O polinômio característico é dado por:

$$\lambda^3 + (\sigma + b + 1)\lambda^2 + b(\sigma + r)\lambda + 2b\sigma(r - 1) = 0$$

Identificando os coeficientes  $a_1 = \sigma + b + 1$ ,  $a_2 = b(\sigma + r)$  e  $a_3 = 2b\sigma(r - 1)$ , a condição crítica para estabilidade ocorre quando  $a_1a_2 = a_3$ . Substituindo as expressões:

$$(\sigma + b + 1)[b(\sigma + r)] = 2b\sigma(r - 1)$$

Simplificando  $b$  e isolando  $r$ , encontramos a relação crítica  $r_H$  (Bifurcação de Hopf):

$$r_H = \frac{\sigma(\sigma + b + 3)}{\sigma - b - 1} \quad (35)$$

- Caso  $1 < r < r_H$ , os pontos  $C^\pm$  são estáveis (atratores).
- Caso  $r > r_H$ , os pontos tornam-se instáveis e o sistema evolui para o caos.

Para os valores  $\sigma = 10$  e  $b = 8/3$ , temos  $r_H \approx 24.74$ .

## Resultados da Simulação

As simulações foram realizadas comparando os métodos de Euler Explícito (MEE) e Runge-Kutta de 4ª ordem (RK4). Para analisar a sensibilidade às condições iniciais, foram simuladas simultaneamente duas trajetórias com pontos de partida muito próximos:  $\mathbf{P}_1 = (2, 2, 2)$  e  $\mathbf{P}_2 = (2.5, 2.5, 2.5)$ . O tempo total de simulação foi  $T = 25$ . Foi utilizado um passo de integração  $h = 10^{-4}$  para o MEE, enquanto utilizou-se um passo  $h = 10^{-3}$  para o RK4.

**Cenário 1: Regime Estável ( $r = 20$ )** Como  $r = 20 < r_H$ , os pontos críticos  $C^\pm$  são estáveis. As Figuras (28) e (29) mostram que, independentemente da pequena diferença inicial, ambas as trajetórias (azul e laranja) espiralam em direção ao mesmo atrator ( $C^-$  neste caso), demonstrando que o sistema é robusto a pequenas perturbações neste regime. Nas figuras, os pontos críticos estão destacados com um x vermelho enquanto que os pontos iniciais das trajetórias com um x azul.

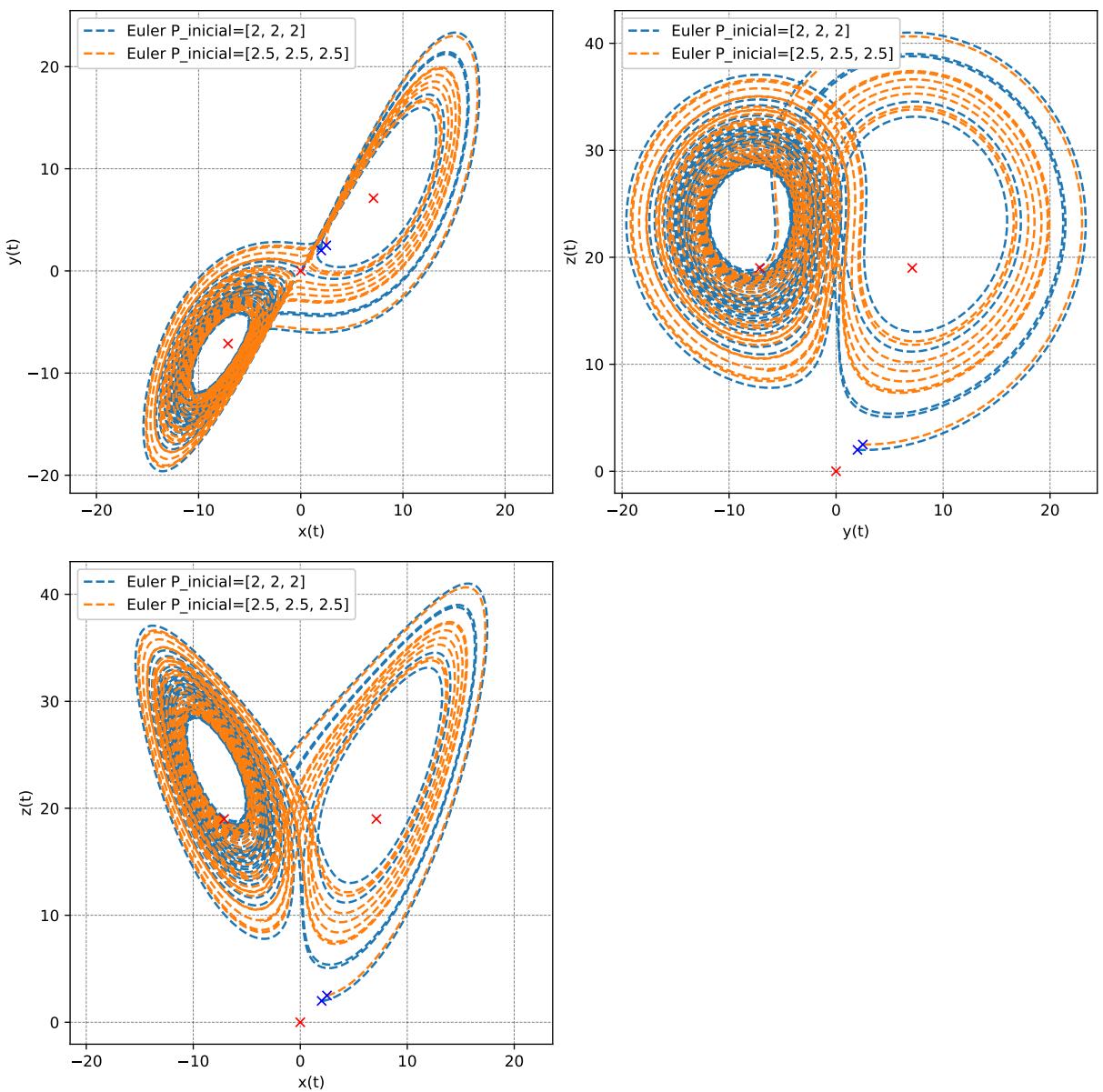


Figura 28: Simulação via Euler ( $r = 20$ ) mostrando convergência para o ponto fixo.

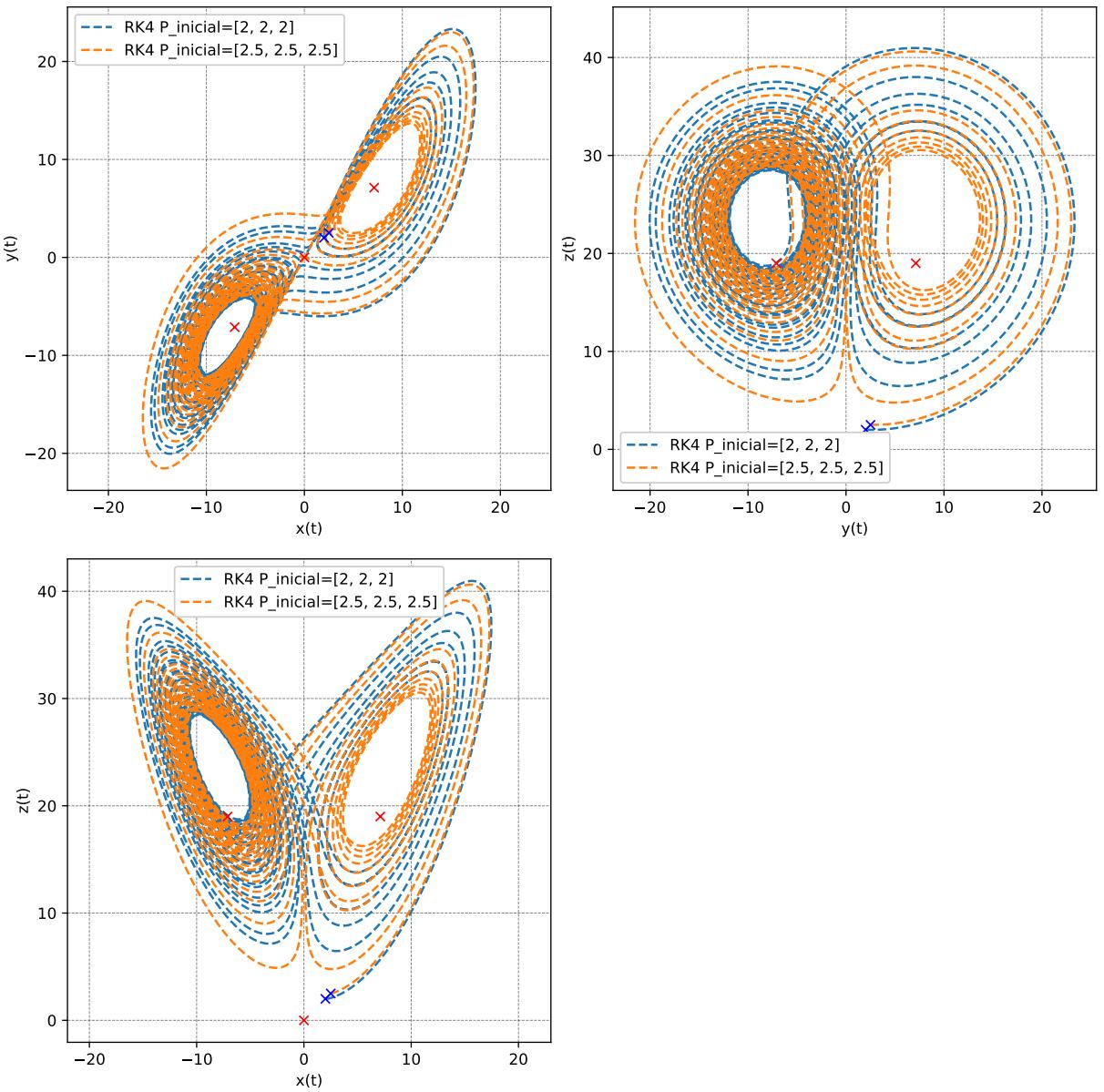


Figura 29: Simulação via RK4 ( $r = 20$ ) confirmando o comportamento de foco estável.

**Cenário 2: Regime Caótico ( $r = 28$ )** Ao ajustar  $r = 28 > r_H$ , o sistema entra em regime caótico. As Figuras (30) e (31) ilustram o efeito borboleta. Embora as trajetórias  $P_1$  e  $P_2$  comecem próximas, elas divergem rapidamente após o transiente inicial, tornando impossível a previsão de longo prazo baseada na condição inicial aproximada. Nas figuras, os pontos críticos estão destacados com um x vermelho enquanto que os pontos iniciais das trajetórias com um x azul.

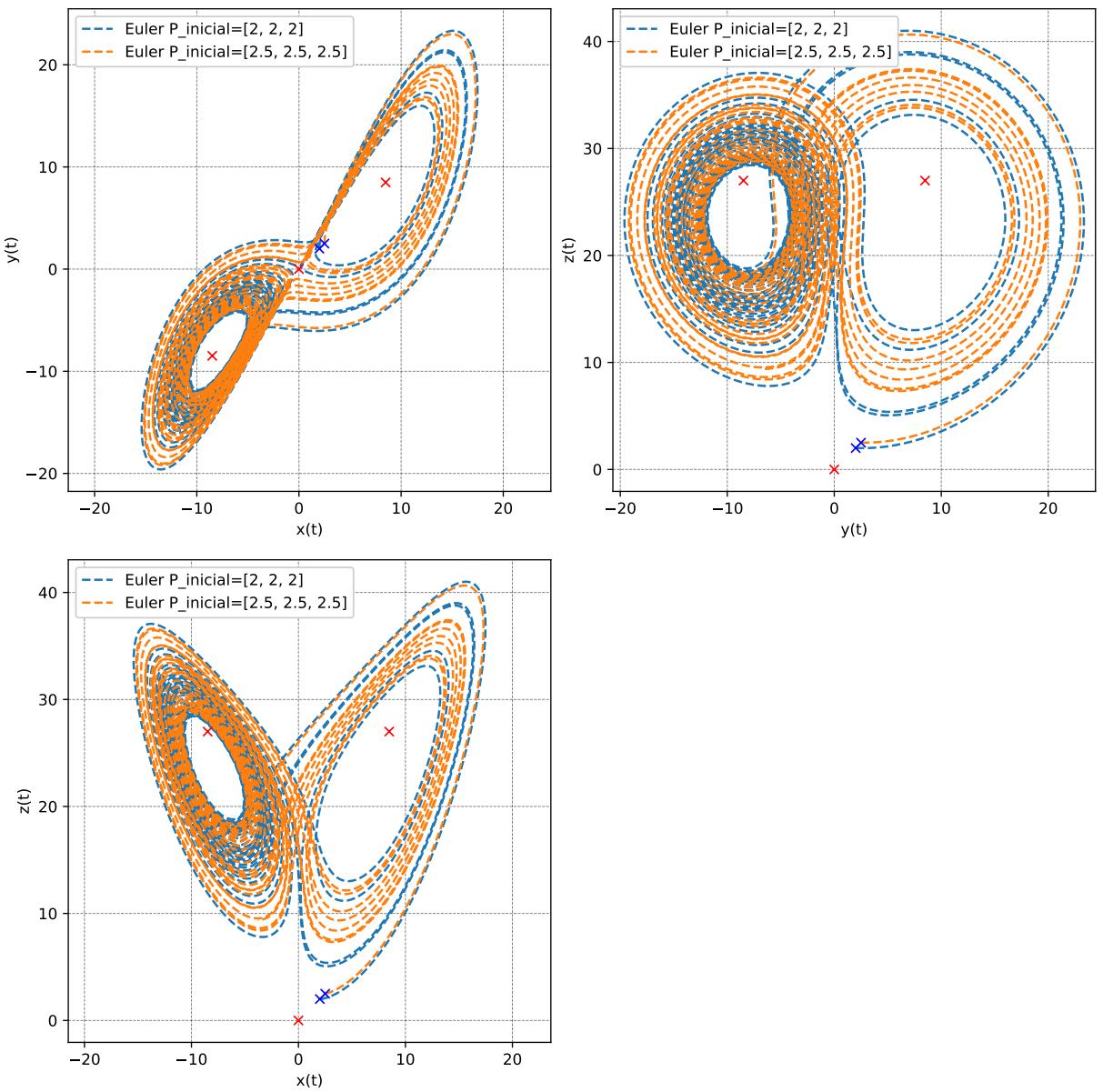


Figura 30: Simulação via Euler ( $r = 28$ ). Note a divergência das trajetórias (azul e laranja).

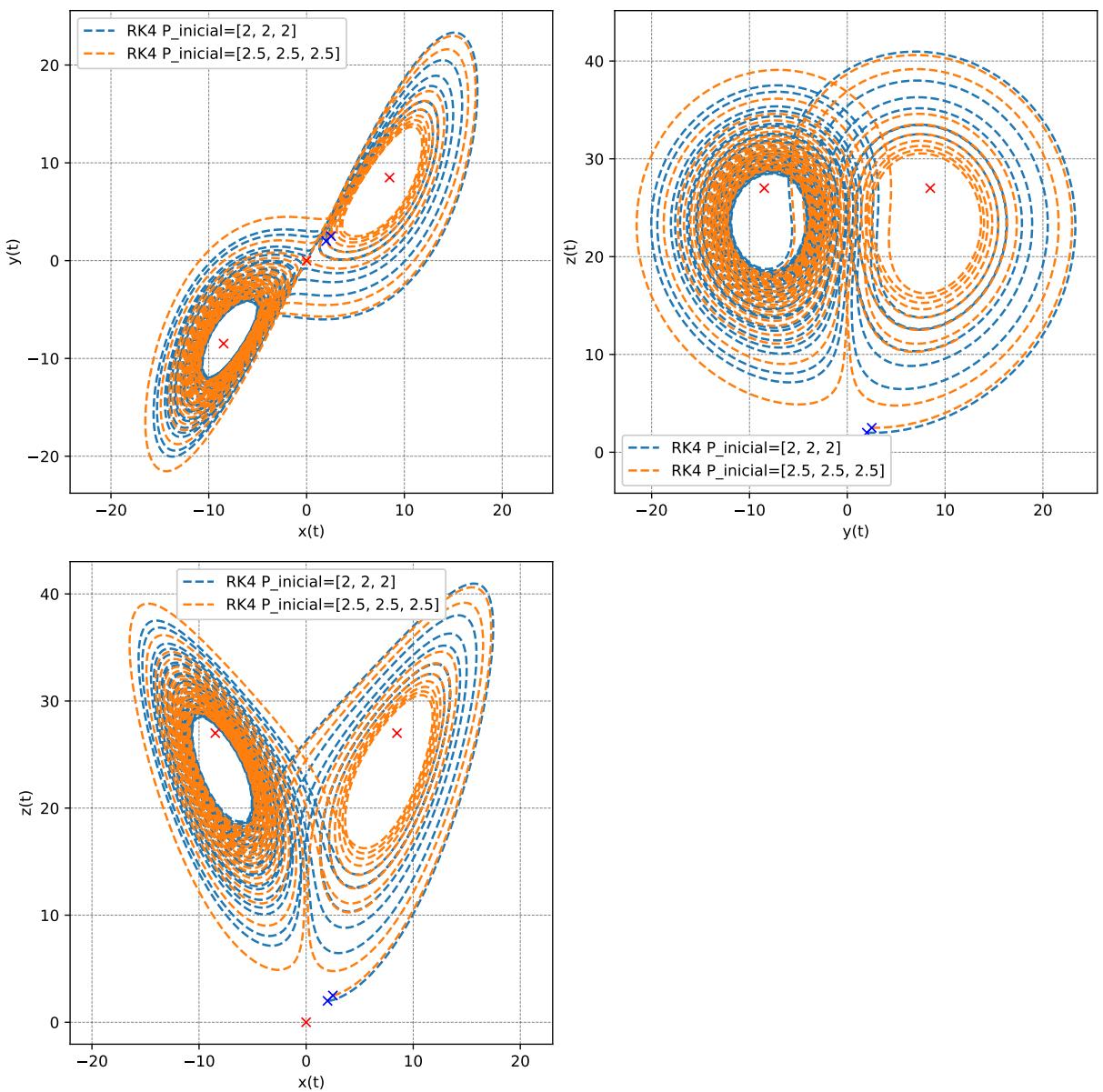


Figura 31: Simulação via RK4 ( $r = 28$ ) evidenciando o Atrator Estranho de Lorenz.

## Códigos Implementados

### Códigos Implementados

Esta seção apresenta os códigos em Python desenvolvidos para a resolução numérica dos sistemas de Equações Diferenciais Ordinárias (EDOs) abordados neste trabalho. Foram implementados algoritmos para dois métodos de passo simples: o Método de Euler Explícito e o Método de Runge-Kutta de 4<sup>a</sup> Ordem (RK4), ambos adaptados para a solução de sistemas vetoriais. O código-fonte completo está disponível no repositório do projeto no GitHub ([link](#)).

Código 1: Implementação, em Python, do Método de Euler Explícito.

---

```
def metodo_euler_explicito(func, condicao_inicial, T, dt):
    t0 = condicao_inicial[0]
    y0 = condicao_inicial[1]
    d = len(y0)
    n = int((T - t0) / dt)

    5
    t_out = np.zeros(n + 1)
    y_out = np.zeros((n + 1, d))

    # Define o primeiro ponto da solucao (a condicao inicial)
    t_out[0] = t0
    y_out[0] = y0

    for i in range(n):
        10
        # Pega os valores do passo anterior (usando o indice i)
        ti = t_out[i]
        yi = y_out[i]

        # A formula do metodo de Euler explicito
        y_out[i + 1] = yi + dt*func(ti, yi)

        # Atualiza o vetor de tempo
        t_out[i + 1] = ti + dt

    20
    return t_out, y_out
```

---

Código 2: Implementação, em Python, do Método de Runge-Kutta de 4<sup>a</sup> Ordem (RK4).

---

```
def metodo_rk4(func, condicao_inicial, T, dt):
    t0 = condicao_inicial[0]
    y0 = condicao_inicial[1]
    d = len(y0)
    n = int((T - t0) / dt)

    t_out = np.zeros(n + 1)
    y_out = np.zeros((n + 1, d))

    5
    # Define o primeiro ponto da solucao (a condicao inicial)
```

```

t_out[0] = t0
y_out[0] = y0

A = np.array([
    [0, 0, 0, 0],
    [0.5, 0, 0, 0],
    [0, 0.5, 0, 0],
    [0, 0, 1, 0]
])
B = np.array([1/6, 1/3, 1/3, 1/6])
C = np.array([0, 0.5, 0.5, 1])

for i in range(n):
    # Pega os valores do passo anterior (usando o indice i)
    ti = t_out[i]
    yi = y_out[i]

    f1 = dt * func(ti, yi)
    f2 = dt*func(ti + C[1]*dt, yi + A[1,0]*f1)
    f3 = dt*func(ti + C[2]*dt, yi + A[2,1]*f2)
    f4 = dt*func(ti + C[3]*dt, yi + A[3,2]*f3)

    y_out[i + 1] = yi + B[0]*f1 + B[1]*f2 + B[2]*f3 + B[3]*f4
    t_out[i + 1] = ti + dt

```

---