



UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Análise Numérica

Luís Karlos Mendes de Oliveira 202069032A

Atividade 01: Método de Euler Explícito (MEE) e Método da Série de Taylor (MST)

Prof.: Sandro Rodrigues Mazorche

24 de setembro de 2025

Exercício 1

Neste exercício, foram analisados oito Problemas de Valor Inicial (PVIs) distintos. Para cada problema, a solução foi obtida por via analítica, quando possível, e por métodos numéricos, especificamente o Método de Euler Explícito (MEE) e o Método da Série de Taylor (MST) de ordens variadas. A análise subsequente focou na verificação da ordem de convergência e na comparação das aproximações obtidas pelos métodos (MEE e MST) em relação às soluções exatas ou à solução melhor aproximada. Para as comparações foram utilizadas seis casas decimais.

Exercício 1 - letra A

O Problema de Valor Inicial (PVI) a ser resolvido é dado por:

$$\begin{cases} x'(t) = 2x(t) \\ x(0) = 1 \end{cases} \quad (1)$$

Solução Analítica

A equação diferencial ordinária $x'(t) = 2x(t)$ é linear de primeira ordem e separável. A sua solução geral pode ser encontrada através da separação de variáveis:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= 2x \\ \int \frac{1}{x} dx &= \int 2 dt \\ \ln|x| &= 2t + C_1 \\ x(t) &= e^{2t+C_1} = e^{C_1}e^{2t} \end{aligned}$$

Definindo a constante $C = e^{C_1}$, a solução geral é $x(t) = Ce^{2t}$. Para encontrar o valor de C , aplica-se a condição inicial $x(0) = 1$:

$$1 = Ce^{2(0)} \implies C = 1$$

Portanto, a solução exata para o Problema de Valor Inicial (PVI) é:

$$x(t) = e^{2t} \quad (2)$$

Método de Euler Explícito (MEE)

A convergência do MEE para o PVI (1) no intervalo $[0, 1]$ é garantida, pois a função $f(t, x) = 2x$ satisfaz a condição de Lipschitz na variável x com $L = 2$, como pode ser visto a seguir:

$$|f(t, x_1) - f(t, x_2)| = |2x_1 - 2x_2| = 2|x_1 - x_2|$$

As tabelas a seguir apresentam o erro local e o erro relativo obtidos da aproximação numérica ($x(t)$) em relação à solução analítica ($x_{\text{exato}}(t)$) do PVI (1), para diferentes passos de simulação h .

Tabela 1: Resultados da simulação para $h=0.1$ no intervalo $[0, 1]$.

t	$x_{\text{exato}}(t)$	$x(t)$	err_loc	err_rel (%)
0.000000	1.000000	1.000000	0.000000	0.000000
0.500000	2.718282	2.488320	0.229962	8.459823
1.000000	7.389056	6.191736	1.197320	16.203960

Tabela 2: Resultados da simulação para $h=0.05$ no intervalo $[0, 1]$.

t	$x_{\text{exato}}(t)$	$x(t)$	err_loc	err_rel (%)
0.000000	1.000000	1.000000	0.000000	0.000000
0.500000	2.718282	2.593742	0.124539	4.581547
1.000000	7.389056	6.727500	0.661556	8.953189

Tabela 3: Resultados da simulação para $h=0.025$ no intervalo $[0, 1]$.

t	$x_{\text{exato}}(t)$	$x(t)$	err_loc	err_rel (%)
0.000000	1.000000	1.000000	0.000000	0.000000
0.500000	2.718282	2.653298	0.064984	2.390632
1.000000	7.389056	7.039989	0.349067	4.724113

Tabela 4: Resultados da simulação para $h=0.01$ no intervalo $[0, 1]$.

t	$x_{\text{exato}}(t)$	$x(t)$	err_loc	err_rel (%)
0.000000	1.000000	1.000000	0.000000	0.000000
0.500000	2.718282	2.691588	0.026694	0.982010
1.000000	7.389056	7.244646	0.144410	1.954377

A Figura 1 compara graficamente a solução analítica com as aproximações numéricas obtidas do MEE.

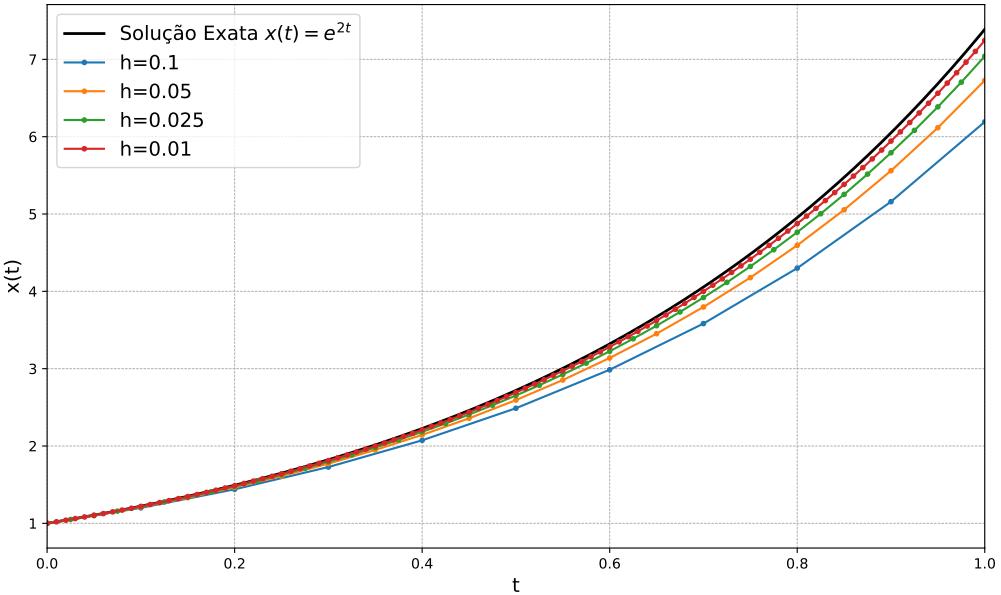


Figura 1: Resultados da simulação do MEE para o PVI (1)

Método da Série de Taylor (MST)

Nesta seção, são apresentadas as derivadas de ordem superior necessárias para a implementação do Método da Série de Taylor (MST) e, em seguida, são analisados os resultados numéricos comparando a precisão de métodos de diferentes ordens ($m = 1, 3, 5$).

Derivadas para o Método da Série de Taylor (MST)

Para o PVI (1), a EDO é $x'(t) = 2x(t)$. As derivadas subsequentes são obtidas de forma recursiva, como demonstrado a seguir, utilizando a notação $f_k = x^{(k+1)}(t)$.

- **Primeira derivada (f_0):** $f_0(t, x) = x'(t) = 2x(t)$
- **Segunda derivada (f_1):** $f_1(t, x) = x''(t) = 2x' = 2f_0$
- **Terceira derivada (f_2):** $f_2(t, x) = x'''(t) = 2x'' = 2f_1$
- **Quarta derivada (f_3):** $f_3(t, x) = x^{(4)}(t) = 2x''' = 2f_2$
- **Quinta derivada (f_4):** $f_4(t, x) = x^{(5)}(t) = 2x^{(4)} = 2f_3$

Resultados e Análise Numérica

As tabelas a seguir apresentam o erro local e o erro relativo obtidos da aproximação numérica ($x(t)$) em relação à solução analítica ($x_{\text{exato}}(t)$) do PVI (1), para diferentes ordens do polinômio e para uma passo $h = 0.1$.

Tabela 5: Resultados da simulação para ordem=1 no intervalo [0, 1].

t	x_exato(t)	x(t)	err_loc	err_rel (%)
0.000000	1.000000	1.000000	0.000000	0.000000
0.500000	2.718282	2.488320	0.229962	8.459823
1.000000	7.389056	6.191736	1.197320	16.203960

Tabela 6: Resultados da simulação para ordem=3 no intervalo [0, 1].

t	x_exato(t)	x(t)	err_loc	err_rel (%)
0.000000	1.000000	1.000000	0.000000	0.000000
0.500000	2.718282	2.717509	0.000772	0.028417
1.000000	7.389056	7.384857	0.004199	0.056826

Tabela 7: Resultados da simulação para ordem=5 no intervalo [0, 1].

t	x_exato(t)	x(t)	err_loc	err_rel (%)
0.000000	1.000000	1.000000	0.000000	0.000000
0.500000	2.718282	2.718281	0.000001	0.000037
1.000000	7.389056	7.389051	0.000006	0.000075

A Figura 2 compara graficamente a solução analítica com as aproximações numéricas obtidas do MST.

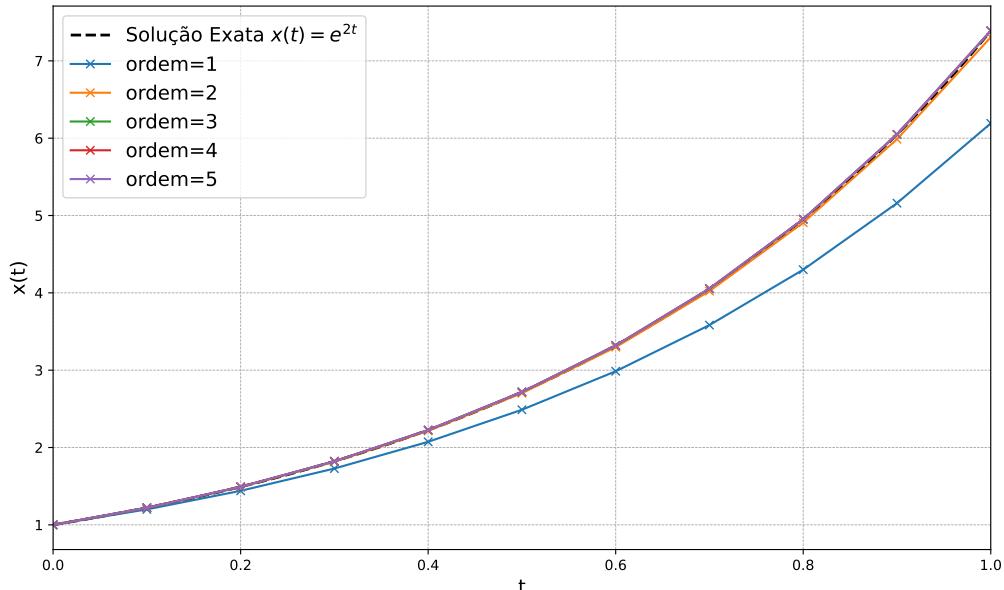


Figura 2: Resultados da simulação do MST com ordens $m \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ para o PVI (1), com $h = 0.1$.

Exercício 1 - letra B

O Problema de Valor Inicial (PVI) a ser resolvido é dado por:

$$\begin{cases} x'(t) = 1 + x^2(t) \\ x(0) = 0 \end{cases} \quad (3)$$

Solução Analítica

A equação diferencial ordinária $x'(t) = 1 + x^2(t)$ é de primeira ordem e separável. A solução é obtida por integração direta:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= 1 + x^2 \\ \int \frac{1}{1+x^2} dx &= \int 1 dt \\ \arctan(x) &= t + C \end{aligned}$$

Aplicando a condição inicial $x(0) = 0$, determina-se a constante C :

$$\arctan(0) = 0 + C \implies C = 0$$

Portanto, a solução exata para o PVI, válida para $t \in (-\pi/2, \pi/2)$, é:

$$x(t) = \tan(t) \quad (4)$$

Método de Euler Explícito (MEE)

A convergência do MEE para o PVI (3) no intervalo $[0, 1]$ é garantida, pois a função $f(t, x) = 1 + x^2$ é Lipschitziana na variável x com constante $L = 2 \tan(1)$ no domínio da solução, como pode ser visto a seguir:

$$\begin{aligned} |f(t, x_1) - f(t, x_2)| &= |(1 + x_1^2) - (1 + x_2^2)| = |x_1^2 - x_2^2| \\ &= |x_1 + x_2||x_1 - x_2| \\ &\leq 2 \tan(1)|x_1 - x_2|, \quad \text{pois } |x(t)| \leq \tan(1) \text{ para } t \in [0, 1] \end{aligned}$$

As tabelas a seguir apresentam o erro local e o erro relativo obtidos da aproximação numérica ($x(t)$) em relação à solução analítica ($x_{\text{exato}}(t)$) do PVI (3), para diferentes passos de simulação h .

Tabela 8: Resultados da simulação para $h=0.1$ no intervalo $[0, 1]$.

t	$x_{\text{exato}}(t)$	$x(t)$	err_loc	err_rel (%)
0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	-
0.500000	0.546302	0.531513	0.014789	2.707156
1.000000	1.557408	1.396394	0.161014	10.338586

Tabela 9: Resultados da simulação para $h=0.05$ no intervalo $[0, 1]$.

t	x_exato(t)	x(t)	err_loc	err_rel (%)
0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	-
0.500000	0.546302	0.538397	0.007905	1.447092
1.000000	1.557408	1.466347	0.091061	5.846953

Tabela 10: Resultados da simulação para $h=0.025$ no intervalo $[0, 1]$.

t	x_exato(t)	x(t)	err_loc	err_rel (%)
0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	-
0.500000	0.546302	0.542211	0.004092	0.748961
1.000000	1.557408	1.508587	0.048820	3.134711

Tabela 11: Resultados da simulação para $h=0.01$ no intervalo $[0, 1]$.

t	x_exato(t)	x(t)	err_loc	err_rel (%)
0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	-
0.500000	0.546302	0.544631	0.001672	0.305978
1.000000	1.557408	1.536977	0.020430	1.311813

A Figura 3 compara graficamente a solução analítica com as aproximações numéricas obtidas do MEE.

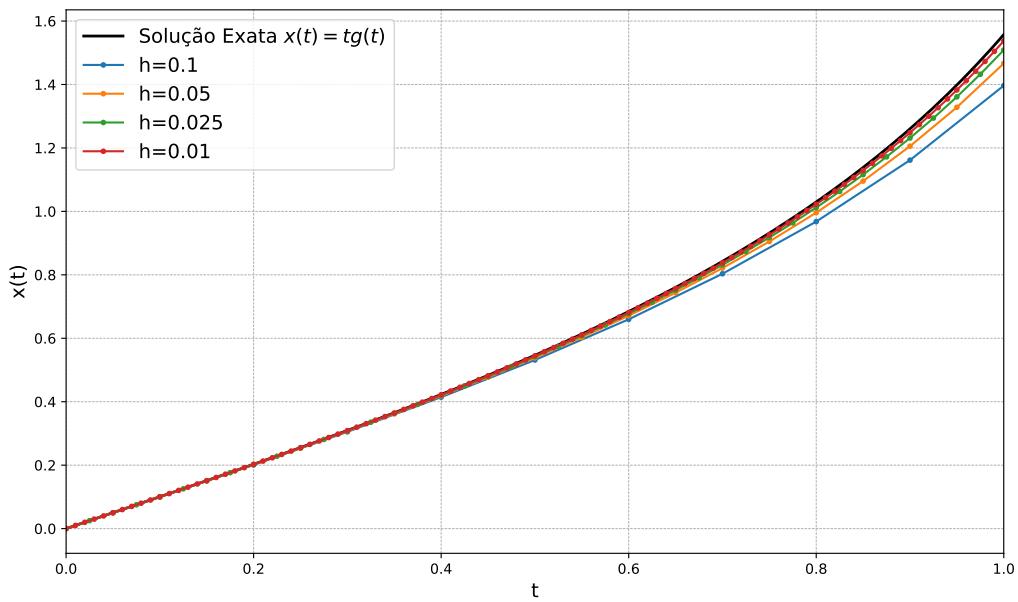


Figura 3: Resultados da simulação do MEE para o PVI (3)

Método da Série de Taylor (MST)

Nesta seção, são apresentadas as derivadas de ordem superior necessárias para a implementação do Método da Série de Taylor (MST) e, em seguida, são analisados os resultados numéricos comparando a precisão de métodos de diferentes ordens e passos.

Derivadas para o Método da Série de Taylor (MST)

Para o PVI (3), a EDO é $x'(t) = 1 + x^2(t)$. As derivadas subsequentes são obtidas de forma recursiva, utilizando a notação $f_k = x^{(k+1)}(t)$.

- **Primeira derivada (f_0):** $f_0(t, x) = x'(t) = 1 + x^2$
- **Segunda derivada (f_1):** $f_1(t, x) = x''(t) = 2xx' = 2xf_0$
- **Terceira derivada (f_2):** $f_2(t, x) = x'''(t) = 2(f_0)^2 + 2xf_1$
- **Quarta derivada (f_3):** $f_3(t, x) = x^{(4)}(t) = 6f_0f_1 + 2xf_2$
- **Quinta derivada (f_4):** $f_4(t, x) = x^{(5)}(t) = 6(f_1)^2 + 8f_0f_2 + 2xf_3$

Resultados e Análise Numérica

As tabelas a seguir apresentam o erro local e o erro relativo obtidos da aproximação numérica ($x(t)$) em relação à solução analítica ($x_{\text{exato}}(t)$) do PVI (3), para diferentes ordens do polinômio e para diferentes passos h .

Tabela 12: Resultados da simulação para $h=0.1$, $\text{ordem}=1$ no intervalo $[0, 1]$.

t	$x_{\text{exato}}(t)$	$x(t)$	err_loc	err_rel (%)
0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	-
0.500000	0.546302	0.531513	0.014789	2.707156
1.000000	1.557408	1.396394	0.161014	10.338586

Tabela 13: Resultados da simulação para $h=0.1$, $\text{ordem}=5$ no intervalo $[0, 1]$.

t	$x_{\text{exato}}(t)$	$x(t)$	err_loc	err_rel (%)
0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	-
0.500000	0.546302	0.546302	0.000001	0.000137
1.000000	1.557408	1.557368	0.000040	0.002560

Tabela 14: Resultados da simulação para $h=0.05$, $\text{ordem}=5$ no intervalo $[0, 1]$.

t	$x_{\text{exato}}(t)$	$x(t)$	err_loc	err_rel (%)
0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	-
0.500000	0.546302	0.546302	0.000000	0.000005
1.000000	1.557408	1.557406	0.000002	0.000102

Tabela 15: Resultados da simulação para $h=0.01$, ordem=5 no intervalo $[0, 1]$.

t	x_exato(t)	x(t)	err_loc	err_rel (%)
0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	-
0.500000	0.546302	0.546302	0.000000	0.000000
1.000000	1.557408	1.557408	0.000000	0.000000

A Figura 4 compara graficamente a solução analítica com as aproximações numéricas obtidas do MST.

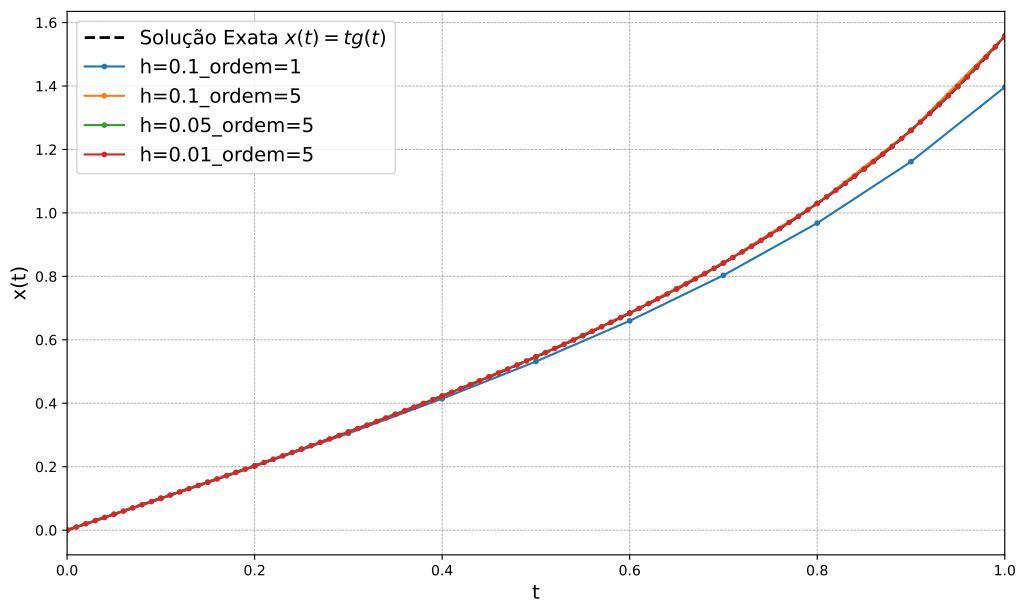


Figura 4: Resultados da simulação do MST com ordens $m \in \{1, 3, 5\}$ para o PVI (3)

Exercício 1 - letra C

O Problema de Valor Inicial (PVI) a ser resolvido é dado por:

$$\begin{cases} x'(t) = (t + \sin(x(t)))^2 \\ x(0) = 0 \end{cases} \quad (5)$$

Solução Analítica

A equação diferencial ordinária $x'(t) = (t + \sin(x(t)))^2$ é não linear e não possui uma solução analítica conhecida em termos de funções elementares. A ausência de uma solução exata torna a aplicação de métodos numéricos essencial para a análise do comportamento da solução.

Método de Euler Explícito (MEE)

Para este exercício, a análise numérica será realizada no intervalo de simulação $[0, 2]$.

A convergência do MEE para o PVI (5) é garantida localmente. A derivada parcial da função $f(t, x) = (t + \sin(x))^2$ em relação a x é:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2(t + \sin(x)) \cos(x)$$

Como $\frac{\partial f}{\partial x}$ é contínua em \mathbb{R}^2 , a função $f(t, x)$ é localmente Lipschitziana. Isso assegura a existência e unicidade da solução e a convergência do método para um passo h suficientemente pequeno no intervalo $[0, 2]$.

As tabelas a seguir apresentam o erro local e o erro relativo obtidos da aproximação numérica ($x(t)$) em relação à solução melhor aproximada ($x_{\text{exato}}(t)$) do PVI (5), para diferentes passos de simulação h . Para a solução melhor aproximada foi usado o MST de quinta ordem com um passo $h = 0.0001$.

Tabela 16: Resultados da simulação para $h=0.1$ no intervalo $[0, 2]$.

t	$x_{\text{exato}}(t)$	$x(t)$	err_loc	err_rel (%)
0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	-
0.500000	0.046302	0.031513	0.014789	31.939444
1.000000	0.550566	0.395466	0.155099	28.170870
1.500000	2.670771	2.317935	0.352836	13.211030
2.000000	3.882431	3.873018	0.009413	0.242446

Tabela 17: Resultados da simulação para $h=0.05$ no intervalo $[0, 2]$.

t	$x_{\text{exato}}(t)$	$x(t)$	err_loc	err_rel (%)
0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	-
0.500000	0.046302	0.038397	0.007905	17.072620
1.000000	0.550566	0.463859	0.086707	15.748643
1.500000	2.670771	2.523974	0.146797	5.496430
2.000000	3.882431	3.876270	0.006161	0.158689

Tabela 18: Resultados da simulação para $h=0.025$ no intervalo $[0, 2]$.

t	x_exato(t)	x(t)	err_loc	err_rel (%)
0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	-
0.500000	0.046302	0.042210	0.004091	8.836001
1.000000	0.550566	0.504485	0.046081	8.369759
1.500000	2.670771	2.603348	0.067424	2.524503
2.000000	3.882431	3.879061	0.003370	0.086790

A Figura 5 compara graficamente as aproximações numéricas obtidas do MEE, com a solução melhor aproximada.

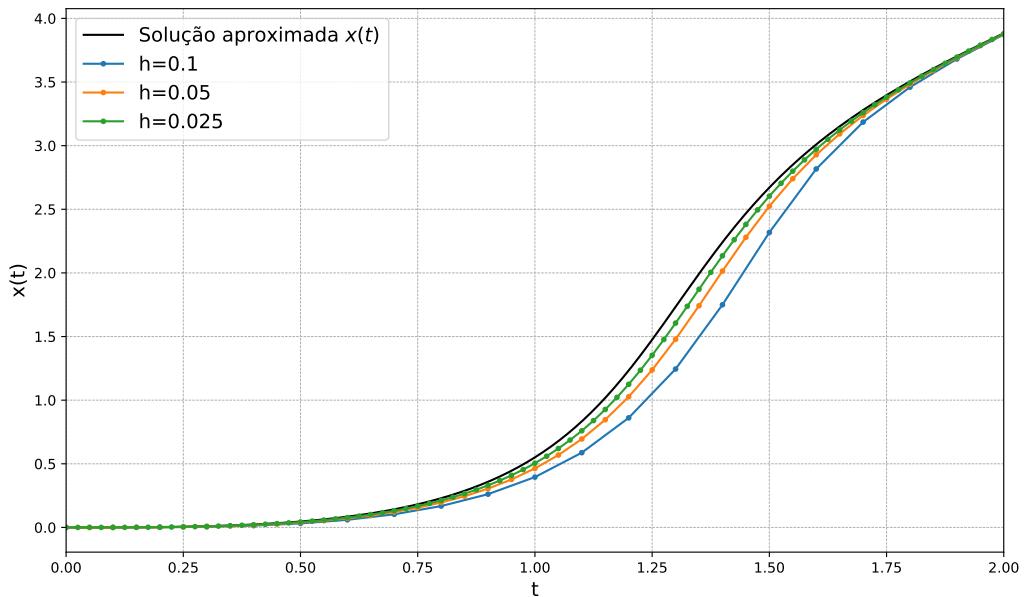


Figura 5: Resultados da simulação do MEE para o PVI (5)

Método da Série de Taylor (MST)

Nesta seção, são apresentadas as derivadas de ordem superior necessárias para a implementação do Método da Série de Taylor (MST) e, em seguida, são analisados os resultados numéricos comparando a precisão de métodos de diferentes ordens ($m = 1, 3, 5$).

Derivadas para o Método da Série de Taylor (MST)

Para o PVI (5), a EDO é $x'(t) = (t + \sin(x))^2$. As derivadas para este problema são complexas e foram obtidas de forma recursiva.

- Primeira derivada (f_0):

$$f_0 = (t + \sin(x))^2$$

- Segunda derivada (f_1):

$$f_1 = 2(t + \sin(x))(1 + f_0 \cos(x))$$

- Terceira derivada (f_2):

$$f_2 = 2(1 + f_0 \cos(x))^2 + 2(t + \sin(x))(f_1 \cos(x) - f_0^2 \sin(x))$$

- Quarta derivada (f_3):

$$f_3 = 6(1 + f_0 \cos x)(f_1 \cos x - f_0^2 \sin x) + 2(t + \sin x)(f_2 \cos x - 3f_0 f_1 \sin x - f_0^3 \cos x)$$

- Quinta derivada (f_4):

$$\begin{aligned} f_4 = & 6(f_1 \cos x - f_0^2 \sin x)^2 + 8(1 + f_0 \cos x)(f_2 \cos x - 3f_0 f_1 \sin x - f_0^3 \cos x) \\ & + 2(t + \sin x)(f_3 \cos x - 6f_0^2 f_1 \cos x - 4f_0 f_2 \sin x - 3f_1^2 \sin x + f_0^4 \sin x) \end{aligned}$$

Resultados e Análise Numérica

As tabelas a seguir apresentam o erro local e o erro relativo obtidos da aproximação numérica ($x(t)$) em relação à solução melhor aproximada ($x_{\text{exato}}(t)$) do PVI (1), para diferentes ordens do polinômio e para uma passo $h = 0.05$. Para a solução melhor aproximada foi usado o MST de quinta ordem com um passo $h = 0.0001$.

Tabela 19: Resultados da simulação para ordem=1 no intervalo [0, 2].

t	$x_{\text{exato}}(t)$	$x(t)$	err_loc	err_rel (%)
0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	-
0.500000	0.046302	0.038397	0.007905	17.072620
1.000000	0.550566	0.463859	0.086707	15.748643
1.500000	2.670771	2.523974	0.146797	5.496430
2.000000	3.882431	3.876270	0.006161	0.158689

Tabela 20: Resultados da simulação para ordem=3 no intervalo [0, 2].

t	$x_{\text{exato}}(t)$	$x(t)$	err_loc	err_rel (%)
0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	-
0.500000	0.046302	0.046286	0.000015	0.033218
1.000000	0.550566	0.550319	0.000247	0.044779
1.500000	2.670771	2.670450	0.000321	0.012031
2.000000	3.882431	3.882398	0.000032	0.000831

Tabela 21: Resultados da simulação para ordem=5 no intervalo [0, 2].

t	$x_{\text{exato}}(t)$	$x(t)$	err_loc	err_rel (%)
0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	-
0.500000	0.046302	0.046302	0.000000	0.000057
1.000000	0.550566	0.550566	0.000000	0.000071
1.500000	2.670771	2.670775	0.000004	0.000151
2.000000	3.882431	3.882431	0.000000	0.000002

A Figura 6 compara graficamente as aproximações numéricas obtidas do MST, com a solução melhor aproximada.

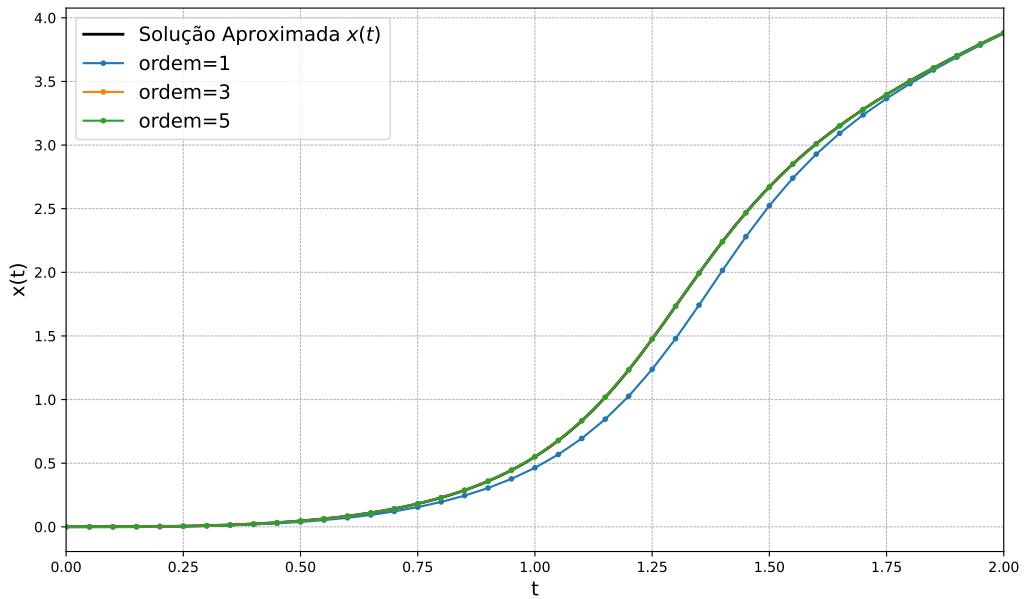


Figura 6: Resultados da simulação do MST com ordens $m \in \{1, 3, 5\}$ para o PVI (5)

Exercício 1 - letra D

O Problema de Valor Inicial (PVI) a ser resolvido é dado por:

$$\begin{cases} x'(t) = \cos(t) - \sin(x(t)) + t^2 \\ x(0) = 1 \end{cases} \quad (6)$$

Solução Analítica

A equação diferencial $x'(t) = \cos(t) - \sin(x(t)) + t^2$ é não linear devido ao termo $\sin(x(t))$ e não possui uma solução analítica conhecida em termos de funções elementares. A análise do problema, portanto, depende de métodos numéricos.

Método de Euler Explícito (MEE)

Para este exercício, a análise numérica será realizada no intervalo de simulação $[0, 2]$.

A convergência do MEE para o PVI (6) é garantida, pois a função $f(t, x) = \cos(t) - \sin(x) + t^2$ satisfaz a condição de Lipschitz globalmente na variável x . A derivada parcial de f em relação a x é:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\cos(x)$$

Como $|\cos(x)| \leq 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$, temos que $|\frac{\partial f}{\partial x}| \leq 1$. Portanto, a função é Lipschitziana com constante de Lipschitz $L = 1$, o que assegura a convergência do método em qualquer intervalo finito.

As tabelas a seguir apresentam o erro local e o erro relativo obtidos da aproximação numérica ($x(t)$) em relação à solução melhor aproximada ($x_{\text{exato}}(t)$) do PVI (6), para diferentes passos de simulação h . Para a solução melhor aproximada foi usado o MST de quinta ordem com um passo $h = 0.0001$.

Tabela 22: Resultados da simulação para $h=0.1$ no intervalo $[0, 2]$.

t	$x_{\text{exato}}(t)$	$x(t)$	err_loc	err_rel (%)
0.000000	1.000000	1.000000	0.000000	0.000000
0.500000	1.089679	1.086084	0.003595	0.329930
1.000000	1.283265	1.264810	0.018455	1.438096
1.500000	1.737272	1.683910	0.053362	3.071577
2.000000	2.802177	2.634042	0.168135	6.000170

Tabela 23: Resultados da simulação para $h=0.05$ no intervalo $[0, 2]$.

t	$x_{\text{exato}}(t)$	$x(t)$	err_loc	err_rel (%)
0.000000	1.000000	1.000000	0.000000	0.000000
0.500000	1.089679	1.087806	0.001873	0.171861
1.000000	1.283265	1.273902	0.009363	0.729637
1.500000	1.737272	1.710009	0.027262	1.569269
2.000000	2.802177	2.714127	0.088051	3.142220

Tabela 24: Resultados da simulação para $h=0.025$ no intervalo $[0, 2]$.

t	x_exato(t)	x(t)	err_loc	err_rel (%)
0.000000	1.000000	1.000000	0.000000	0.000000
0.500000	1.089679	1.088724	0.000955	0.087596
1.000000	1.283265	1.278549	0.004716	0.367471
1.500000	1.737272	1.723487	0.013785	0.793477
2.000000	2.802177	2.757065	0.045112	1.609889

A Figura 7 compara graficamente as aproximações numéricas obtidas do MEE, com a solução melhor aproximada.

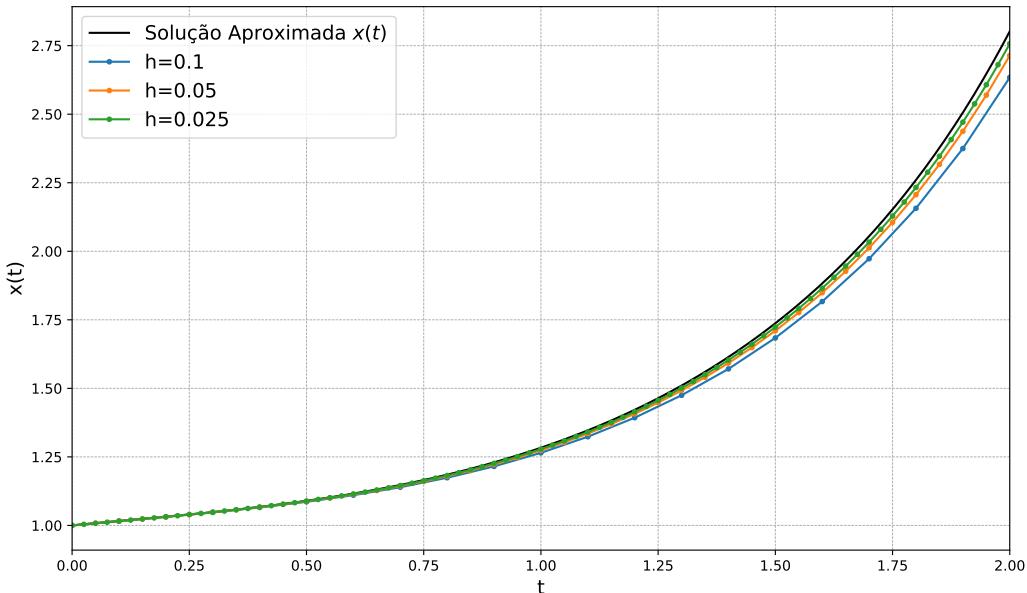


Figura 7: Resultados da simulação do MEE para o PVI (6) com diferentes passos

Método da Série de Taylor (MST)

Nesta seção, são apresentadas as derivadas de ordem superior necessárias a implementação do Método da Série de Taylor (MST) e, em seguida, são analisados os resultados numéricos comparando a precisão de métodos de diferentes ordens ($m = 1, 3, 5$).

Derivadas para o Método da Série de Taylor (MST)

Para o PVI (6), a EDO é $x'(t) = \cos(t) - \sin(x) + t^2$. As derivadas para este problema foram obtidas de forma recursiva.

- Primeira derivada (f_0):

$$f_0 = \cos(t) - \sin(x) + t^2$$

- Segunda derivada (f_1):

$$f_1 = -\sin(t) - f_0 \cos(x) + 2t$$

- Terceira derivada (f_2):

$$f_2 = -\cos(t) - f_1 \cos(x) + f_0^2 \sin(x) + 2$$

- Quarta derivada (f_3):

$$f_3 = \sin(t) - f_2 \cos(x) + 3f_0 f_1 \sin(x) + f_0^3 \cos(x)$$

- Quinta derivada (f_4):

$$f_4 = \cos(t) - f_3 \cos(x) + (4f_0 f_2 + 3f_1^2 - f_0^4) \sin(x) + 6f_0^2 f_1 \cos(x)$$

Resultados e Análise Numérica

As tabelas a seguir apresentam o erro local e o erro relativo obtidos da aproximação numérica ($x(t)$) em relação à solução melhor aproximada ($x_{\text{exato}}(t)$) do PVI (6), para diferentes ordens do polinômio e para uma passo $h = 0.05$. Para a solução melhor aproximada foi usado o MST de quinta ordem com um passo $h = 0.0001$.

Tabela 25: Resultados da simulação para ordem=1 no intervalo [0, 2].

t	$x_{\text{exato}}(t)$	$x(t)$	err_loc	err_rel (%)
0.000000	1.000000	1.000000	0.000000	0.000000
0.500000	1.089679	1.087806	0.001873	0.171861
1.000000	1.283265	1.273902	0.009363	0.729637
1.500000	1.737272	1.710009	0.027262	1.569269
2.000000	2.802177	2.714127	0.088051	3.142220

Tabela 26: Resultados da simulação para ordem=3 no intervalo [0, 2].

t	$x_{\text{exato}}(t)$	$x(t)$	err_loc	err_rel (%)
0.000000	1.000000	1.000000	0.000000	0.000000
0.500000	1.089679	1.089679	0.000000	0.000037
1.000000	1.283265	1.283263	0.000002	0.000163
1.500000	1.737272	1.737257	0.000015	0.000846
2.000000	2.802177	2.802110	0.000067	0.002394

Tabela 27: Resultados da simulação para ordem=5 no intervalo [0, 2].

t	$x_{\text{exato}}(t)$	$x(t)$	err_loc	err_rel (%)
0.000000	1.000000	1.000000	0.000000	0.000000
0.500000	1.089679	1.089679	0.000000	0.000000
1.000000	1.283265	1.283265	0.000000	0.000000
1.500000	1.737272	1.737272	0.000000	0.000001
2.000000	2.802177	2.802177	0.000000	0.000004

A Figura 8 compara graficamente as aproximações numéricas obtidas do MST, com a solução melhor aproximada.

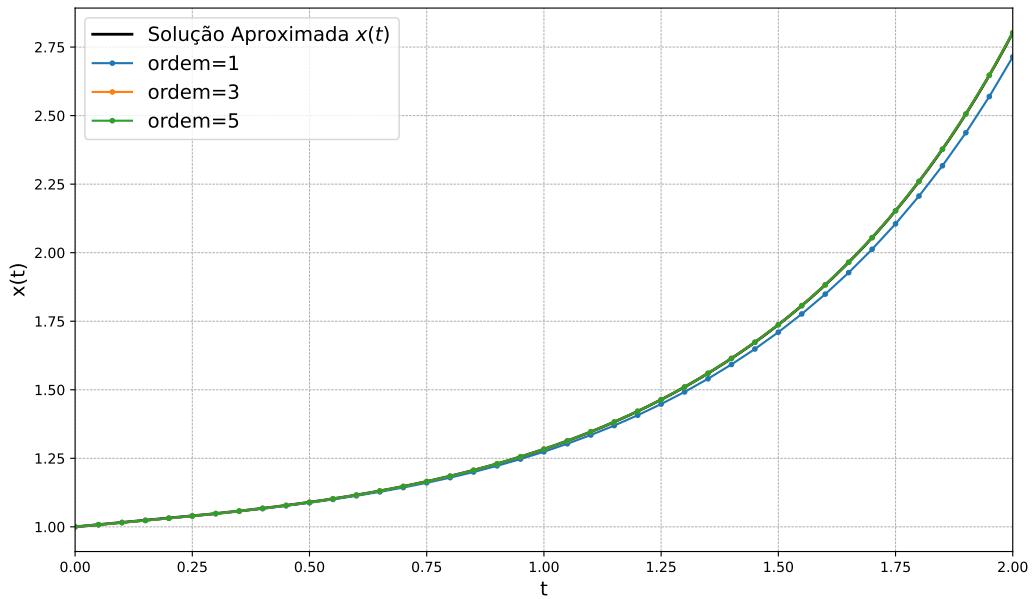


Figura 8: Resultados da simulação do MST com ordens $m \in \{1, 3, 5\}$ para o PVI (6)

Exercício 1 - letra E

O Problema de Valor Inicial (PVI) a ser resolvido é dado por:

$$\begin{cases} x'(t) = 4t\sqrt{x(t)} \\ x(0) = 1 \end{cases} \quad (7)$$

Solução Analítica

A equação diferencial ordinária $x'(t) = 4t\sqrt{x}$ é de primeira ordem e separável. A solução é obtida por integração:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{\sqrt{x}} &= 4t dt \\ \int x^{-1/2} dx &= \int 4t dt \\ 2\sqrt{x} &= 2t^2 + C \\ \sqrt{x} &= t^2 + C' \end{aligned}$$

Aplicando a condição inicial $x(0) = 1$, determina-se a constante C' :

$$\sqrt{1} = 0^2 + C' \implies C' = 1$$

Portanto, a solução exata para o PVI é:

$$x(t) = (t^2 + 1)^2 \quad (8)$$

Método de Euler Explícito (MEE)

A convergência do MEE no intervalo $[0, 1]$ é garantida, pois a função $f(t, x) = 4t\sqrt{x}$ é Lipschitziana na variável x no domínio da solução. A derivada parcial de f em relação a x é $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2t}{\sqrt{x}}$. Como a condição inicial é $x(0) = 1$ e $x'(t) \geq 0$ para $t \in [0, 1]$, temos $x(t) \geq 1$, garantindo que a derivada é contínua e limitada.

A constante de Lipschitz L é o valor máximo de $|\frac{\partial f}{\partial x}|$ no domínio da solução. Substituindo a solução exata $x(t) = (t^2 + 1)^2$:

$$L = \max_{t \in [0,1]} \left| \frac{2t}{\sqrt{(t^2 + 1)^2}} \right| = \max_{t \in [0,1]} \frac{2t}{t^2 + 1}$$

O máximo desta expressão em $[0, 1]$ ocorre em $t = 1$, resultando em $L = \frac{2(1)}{1^2 + 1} = 1$. Com $L = 1$, a convergência do método está garantida.

As tabelas a seguir apresentam o erro local e o erro relativo obtidos da aproximação numérica ($x(t)$) em relação à solução analítica ($x_{\text{exato}}(t)$) do PVI (7), para diferentes passos de simulação h .

Tabela 28: Resultados da simulação para $h=0.1$ no intervalo $[0, 1]$.

t	$x_{\text{exato}}(t)$	$x(t)$	err_loc	err_rel (%)
0.000000	1.000000	1.000000	0.000000	0.000000
0.500000	1.562500	1.427460	0.135040	8.642533
1.000000	4.000000	3.471543	0.528457	13.211418

Tabela 29: Resultados da simulação para $h=0.05$ no intervalo $[0, 1]$.

t	x_exato(t)	x(t)	err_loc	err_rel (%)
0.000000	1.000000	1.000000	0.000000	0.000000
0.500000	1.562500	1.493027	0.069473	4.446277
1.000000	4.000000	3.725301	0.274699	6.867484

Tabela 30: Resultados da simulação para $h=0.025$ no intervalo $[0, 1]$.

t	x_exato(t)	x(t)	err_loc	err_rel (%)
0.000000	1.000000	1.000000	0.000000	0.000000
0.500000	1.562500	1.527245	0.035255	2.256304
1.000000	4.000000	3.859908	0.140092	3.502298

A Figura 9 compara graficamente a solução analítica com as aproximações numéricas obtidas do MEE.

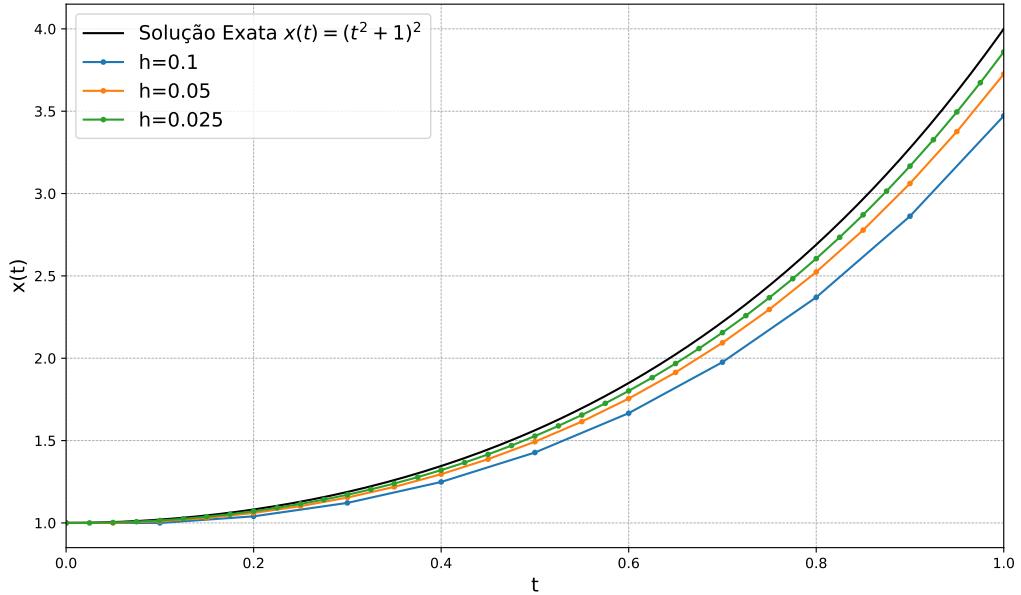


Figura 9: Resultados da simulação do MEE para o PVI (7)

Método da Série de Taylor (MST)

Nesta seção, são apresentadas as derivadas de ordem superior necessárias para a implementação do Método da Série de Taylor (MST) e, em seguida, são analisados os resultados numéricos comparando a precisão de métodos de diferentes ordens ($m = 1, 2, 4$).

Derivadas para o Método da Série de Taylor (MST)

Para o PVI (7), a solução exata $x(t) = (t^2 + 1)^2$ é um polinômio de quarto grau. Isso simplifica enormemente o cálculo das derivadas, que podem ser expressas explicitamente

em função de t :

- **Primeira derivada** (f_0): $x'(t) = 4t^3 + 4t$
- **Segunda derivada** (f_1): $x''(t) = 12t^2 + 4$
- **Terceira derivada** (f_2): $x'''(t) = 24t$
- **Quarta derivada** (f_3): $x^{(4)}(t) = 24$
- **Quinta derivada** (f_4): $x^{(5)}(t) = 0$

Como a quinta derivada é nula, o MST de ordem 4 já é exato (a menos de erros de ponto flutuante).

Resultados e Análise Numérica

As tabelas a seguir apresentam o erro local e o erro relativo obtidos da aproximação numérica ($x(t)$) em relação à solução analítica ($x_{\text{exato}}(t)$) do PVI (7), para diferentes ordens do polinômio e para uma passo $h = 0.05$.

Tabela 31: Resultados da simulação para ordem=1 no intervalo [0, 1].

t	$x_{\text{exato}}(t)$	$x(t)$	err_loc	err_rel (%)
0.000000	1.000000	1.000000	0.000000	0.000000
0.500000	1.562500	1.500625	0.061875	3.960000
1.000000	4.000000	3.802500	0.197500	4.937500

Tabela 32: Resultados da simulação para ordem=2 no intervalo [0, 1].

t	$x_{\text{exato}}(t)$	$x(t)$	err_loc	err_rel (%)
0.000000	1.000000	1.000000	0.000000	0.000000
0.500000	1.562500	1.561312	0.001188	0.076000
1.000000	4.000000	3.995125	0.004875	0.121875

Tabela 33: Resultados da simulação para ordem=4 no intervalo [0, 1].

t	$x_{\text{exato}}(t)$	$x(t)$	err_loc	err_rel (%)
0.000000	1.000000	1.000000	0.000000	0.000000
0.500000	1.562500	1.562500	0.000000	0.000000
1.000000	4.000000	4.000000	0.000000	0.000000

A Figura 10 compara graficamente a solução analítica com as aproximações numéricas obtidas do MST.

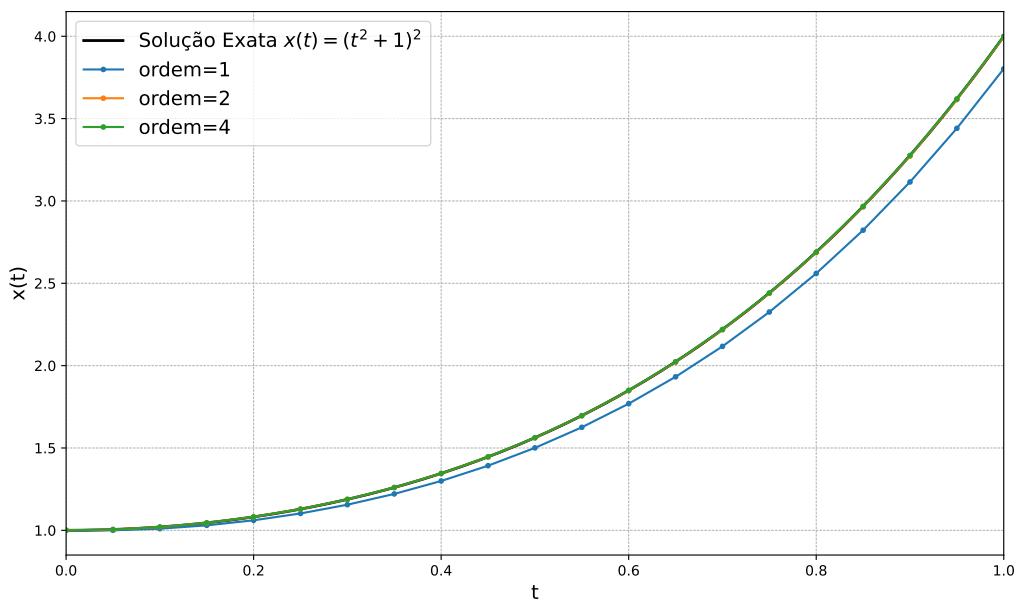


Figura 10: Resultados da simulação do MST com ordens $m \in \{1, 2, 4\}$ para o PVI (7)

Exercício 1 - letra F

O Problema de Valor Inicial (PVI) a ser resolvido é dado por:

$$\begin{cases} x'(t) = -10(x(t) - 1)^2 \\ x(0) = 2 \end{cases} \quad (9)$$

Solução Analítica

A equação diferencial é separável. Utilizando a substituição $u = x - 1$, temos $du = dx$ e a EDO torna-se $\frac{du}{dt} = -10u^2$. A separação de variáveis e integração levam a:

$$\begin{aligned} \int u^{-2} du &= \int -10 dt \\ -u^{-1} &= -10t + C \\ u(t) &= \frac{1}{10t - C} \end{aligned}$$

Substituindo $u = x - 1$ de volta, $x(t) = 1 + \frac{1}{10t - C}$. Com a condição inicial $x(0) = 2$, encontramos $C = -1$. Portanto, a solução exata para o PVI é:

$$x(t) = 1 + \frac{1}{10t + 1} \quad (10)$$

Método de Euler Explícito (MEE)

A análise numérica será realizada no intervalo de simulação $[0, 2]$. A função $f(t, x) = -10(x - 1)^2$ não é globalmente Lipschitziana. Contudo, a convergência é garantida no intervalo de análise, pois a função é Lipschitziana no domínio que contém a solução.

A solução $x(t) = 1 + \frac{1}{10t+1}$ é decrescente no intervalo $t \in [0, 2]$, com valores no range $[x(2), x(0)] = [1.0476, 2]$. A constante de Lipschitz L é o máximo do módulo da derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial x} = -20(x - 1)$ neste domínio:

$$L = \max_{x \in [1.0476, 2]} |-20(x - 1)| = 20 \cdot |2 - 1| = 20$$

Com $L = 20$, a convergência do método está garantida.

As tabelas a seguir apresentam o erro local e o erro relativo obtidos da aproximação numérica ($x(t)$) em relação à solução analítica ($x_{\text{exato}}(t)$) do PVI (9), para diferentes passos de simulação h .

Tabela 34: Resultados da simulação para $h=0.1$ no intervalo $[0, 2]$.

t	$x_{\text{exato}}(t)$	$x(t)$	err_loc	err_rel (%)
0.000000	2.000000	2.000000	0.000000	0.000000
0.500000	1.166667	1.000000	0.166667	14.285714
1.000000	1.090909	1.000000	0.090909	8.333333
1.500000	1.062500	1.000000	0.062500	5.882353
2.000000	1.047619	1.000000	0.047619	4.545455

Tabela 35: Resultados da simulação para $h=0.05$ no intervalo $[0, 2]$.

t	x_exato(t)	x(t)	err_loc	err_rel (%)
0.000000	2.000000	2.000000	0.000000	0.000000
0.500000	1.166667	1.138902	0.027765	2.379847
1.000000	1.090909	1.080113	0.010797	0.989683
1.500000	1.062500	1.056628	0.005872	0.552619
2.000000	1.047619	1.043883	0.003737	0.356670

Tabela 36: Resultados da simulação para $h=0.025$ no intervalo $[0, 2]$.

t	x_exato(t)	x(t)	err_loc	err_rel (%)
0.000000	2.000000	2.000000	0.000000	0.000000
0.500000	1.166667	1.153807	0.012860	1.102250
1.000000	1.090909	1.085839	0.005070	0.464727
1.500000	1.062500	1.059733	0.002767	0.260420
2.000000	1.047619	1.045855	0.001764	0.168350

A Figura 11 compara graficamente a solução analítica com as aproximações numéricas obtidas do MEE.

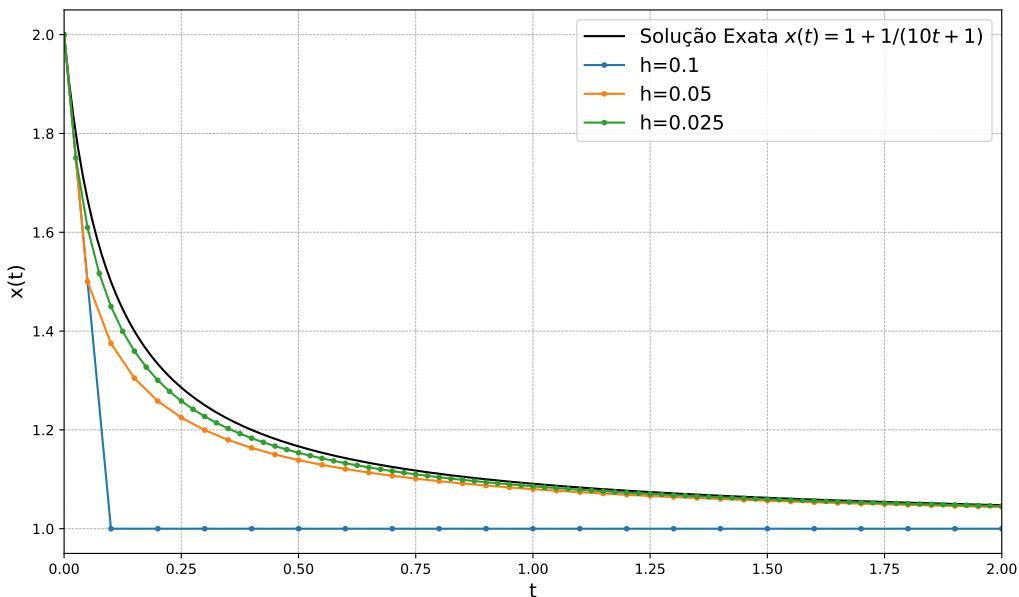


Figura 11: Resultados da simulação do MEE para o PVI (9)

Método da Série de Taylor (MST)

Nesta seção, são apresentadas as derivadas de ordem superior necessárias para a implementação do Método da Série de Taylor (MST) e, em seguida, são analisados os resultados numéricos comparando a precisão de métodos de diferentes ordens ($m = 1, 2, 5$).

Derivadas para o Método da Série de Taylor (MST)

Para o PVI (9), a EDO é $x'(t) = -10(x - 1)^2$. As derivadas podem ser encontradas de forma recursiva.

- **Primeira derivada (f_0):** $f_0 = -10(x - 1)^2$
- **Segunda derivada (f_1):** $f_1 = -20(x - 1)f_0$
- **Terceira derivada (f_2):** $f_2 = -20(f_0^2 + (x - 1)f_1)$
- **Quarta derivada (f_3):** $f_3 = -20(3f_0f_1 + (x - 1)f_2)$
- **Quinta derivada (f_4):** $f_4 = -20(3f_1^2 + 4f_0f_2 + (x - 1)f_3)$

Resultados e Análise Numérica

As tabelas a seguir apresentam o erro local e o erro relativo obtidos da aproximação numérica ($x(t)$) em relação à solução analítica ($x_{\text{exato}}(t)$) do PVI (1), para diferentes ordens do polinômio e para uma passo $h = 0.05$.

Tabela 37: Resultados da simulação para ordem=1 no intervalo [0, 2].

t	$x_{\text{exato}}(t)$	$x(t)$	err_loc	err_rel (%)
0.000000	2.000000	2.000000	0.000000	0.000000
0.500000	1.166667	1.138902	0.027765	2.379847
1.000000	1.090909	1.080113	0.010797	0.989683
1.500000	1.062500	1.056628	0.005872	0.552619
2.000000	1.047619	1.043883	0.003737	0.356670

Tabela 38: Resultados da simulação para ordem=2 no intervalo [0, 2].

t	$x_{\text{exato}}(t)$	$x(t)$	err_loc	err_rel (%)
0.000000	2.000000	2.000000	0.000000	0.000000
0.500000	1.166667	1.178840	0.012174	1.043459
1.000000	1.090909	1.094631	0.003722	0.341208
1.500000	1.062500	1.064271	0.001771	0.166693
2.000000	1.047619	1.048650	0.001031	0.098416

Tabela 39: Resultados da simulação para ordem=5 no intervalo [0, 2].

t	$x_{\text{exato}}(t)$	$x(t)$	err_loc	err_rel (%)
0.000000	2.000000	2.000000	0.000000	0.000000
0.500000	1.166667	1.165914	0.000753	0.064539
1.000000	1.090909	1.090685	0.000225	0.020582
1.500000	1.062500	1.062394	0.000106	0.009996
2.000000	1.047619	1.047557	0.000062	0.005888

A Figura 12 compara graficamente a solução analítica com as aproximações numéricas obtidas do MST.

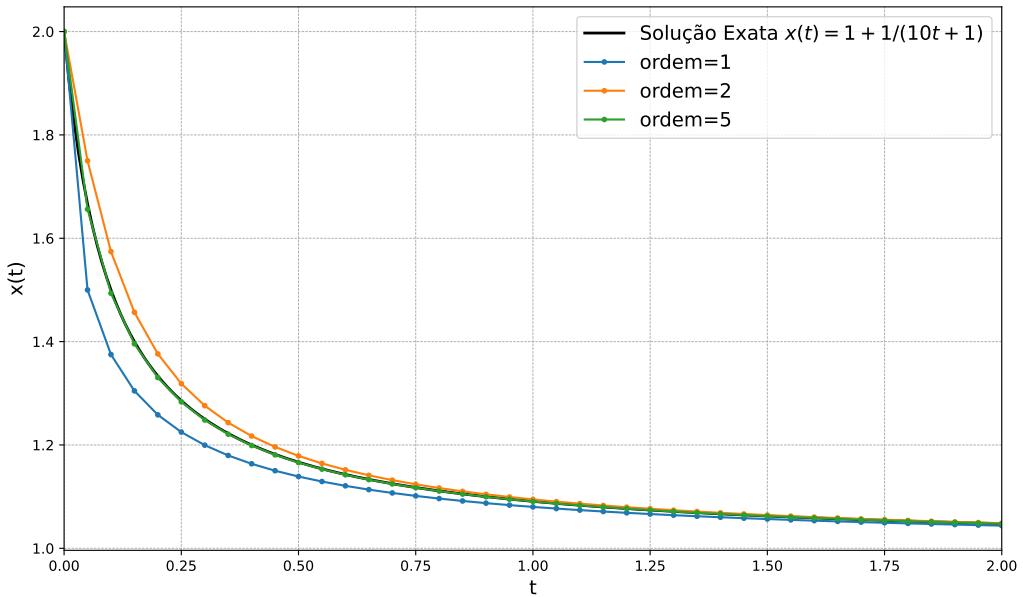


Figura 12: Resultados da simulação do MST com ordens $m \in \{1, 2, 5\}$ para o PVI (9)

Exercício 1 - letra G

O Problema de Valor Inicial (PVI) a ser resolvido é dado por:

$$\begin{cases} x'(t) = \frac{3t^2 + 4t + 2}{2(x(t) - 1)} \\ x(0) = 0 \end{cases} \quad (11)$$

Solução Analítica

A equação diferencial é de primeira ordem e separável. Integrando ambos os lados:

$$\begin{aligned} \int 2(x-1) dx &= \int (3t^2 + 4t + 2) dt \\ x^2 - 2x &= t^3 + 2t^2 + 2t + C \end{aligned}$$

Com a condição inicial $x(0) = 0$, determina-se que a constante $C = 0$. A solução para $x(t)$ é encontrada resolvendo-se a equação quadrática $x^2 - 2x - (t^3 + 2t^2 + 2t) = 0$:

$$x(t) = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4(-(t^3 + 2t^2 + 2t))}}{2} = 1 \pm \sqrt{1 + 2t + 2t^2 + t^3}$$

Para satisfazer a condição $x(0) = 0$, deve-se escolher o ramo negativo. Portanto, a solução exata é:

$$x(t) = 1 - \sqrt{t^3 + 2t^2 + 2t + 1} \quad (12)$$

Método de Euler Explícito (MEE)

A análise numérica será realizada no intervalo de simulação $[0, 2]$. A função $f(t, x) = \frac{3t^2 + 4t + 2}{2(x-1)}$ tem uma singularidade em $x = 1$. Contudo, a solução exata parte de $x(0) = 0$ e decresce para $x(2) = 1 - \sqrt{21} \approx -3.58$, afastando-se da singularidade.

A função é Lipschitziana no domínio da solução. A constante de Lipschitz L é o máximo de $|\frac{\partial f}{\partial x}| = |\frac{-(3t^2 + 4t + 2)}{2(x-1)^2}|$. Substituindo a solução exata:

$$L = \max_{t \in [0, 2]} \left| \frac{-(3t^2 + 4t + 2)}{2(1 - \sqrt{t^3 + 2t^2 + 2t + 1})^2} \right| = \max_{t \in [0, 2]} \frac{3t^2 + 4t + 2}{2(t^3 + 2t^2 + 2t + 1)}$$

O máximo desta função em $[0, 2]$ ocorre em $t = 0$, resultando em $L = \frac{2}{2(1)} = 1$. A convergência está garantida.

As tabelas a seguir apresentam o erro local e o erro relativo obtidos da aproximação numérica ($x(t)$) em relação à solução analítica ($x_exato(t)$) do PVI (11), para diferentes passos de simulação h .

Tabela 40: Resultados da simulação para $h=0.5$ no intervalo $[0, 5]$.

t	x_exato(t)	x(t)	err_loc	err_rel (%)
0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	-
0.500000	-0.620185	-0.500000	0.120185	19.378918
1.000000	-1.449490	-1.291667	0.157823	10.888182
2.500000	-4.841661	-4.649972	0.191689	3.959162
5.000000	-12.638182	-12.403568	0.234613	1.856384

Tabela 41: Resultados da simulação para $h=0.25$ no intervalo $[0, 5]$.

t	x_exato(t)	x(t)	err_loc	err_rel (%)
0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	-
0.500000	-0.620185	-0.568750	0.051435	8.293519
1.000000	-1.449490	-1.376530	0.072959	5.033447
2.500000	-4.841661	-4.745651	0.096009	1.982987
5.000000	-12.638182	-12.519288	0.118894	0.940749

Tabela 42: Resultados da simulação para $h=0.1$ no intervalo $[0, 5]$.

t	x_exato(t)	x(t)	err_loc	err_rel (%)
0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	-
0.500000	-0.620185	-0.601007	0.019178	3.092298
1.000000	-1.449490	-1.421454	0.028036	1.934175
2.500000	-4.841661	-4.803345	0.038316	0.791383
5.000000	-12.638182	-12.590325	0.047856	0.378666

A Figura 13 compara graficamente a solução analítica com as aproximações numéricas obtidas do MEE.

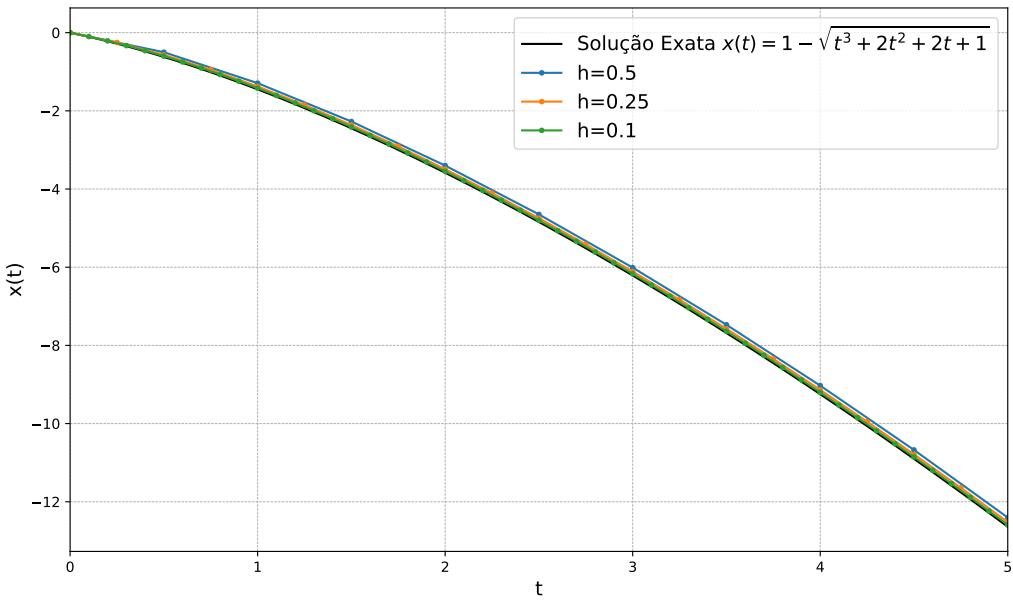


Figura 13: Resultados da simulação do MEE para o PVI (11)

Método da Série de Taylor (MST)

Nesta seção, são apresentadas as derivadas de ordem superior necessárias para a implementação do Método da Série de Taylor (MST) e, em seguida, são analisados os resultados numéricos comparando a precisão de métodos de diferentes ordens ($m = 1, 2, 5$).

Derivadas para o Método da Série de Taylor (MST)

Para o PVI (11), a EDO é $x'(t) = \frac{3t^2+4t+2}{2(x-1)}$. As derivadas foram obtidas de forma recursiva.

- Primeira derivada (f_0):

$$f_0 = \frac{3t^2 + 4t + 2}{2(x - 1)}$$

- Segunda derivada (f_1):

$$f_1 = \frac{3t + 2 - f_0^2}{x - 1}$$

- Terceira derivada (f_2):

$$f_2 = \frac{3 - 3f_0f_1}{x - 1}$$

- Quarta derivada (f_3):

$$f_3 = \frac{-3f_1^2 - 4f_0f_2}{x - 1}$$

- Quinta derivada (f_4):

$$f_4 = \frac{-10f_1f_2 - 5f_0f_3}{x - 1}$$

Resultados e Análise Numérica

As tabelas a seguir apresentam o erro local e o erro relativo obtidos da aproximação numérica ($x(t)$) em relação à solução analítica ($x_{\text{exato}}(t)$) do PVI (1), para diferentes ordens do polinômio e para uma passo $h = 0.25$.

Tabela 43: Resultados da simulação para ordem=1 no intervalo [0, 5].

t	$x_{\text{exato}}(t)$	$x(t)$	err_loc	err_rel (%)
0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	-
0.500000	-0.620185	-0.568750	0.051435	8.293519
1.000000	-1.449490	-1.376530	0.072959	5.033447
2.500000	-4.841661	-4.745651	0.096009	1.982987
5.000000	-12.638182	-12.519288	0.118894	0.940749

Tabela 44: Resultados da simulação para ordem=2 no intervalo [0, 5].

t	$x_{\text{exato}}(t)$	$x(t)$	err_loc	err_rel (%)
0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	-
0.500000	-0.620185	-0.621560	0.001375	0.221667
1.000000	-1.449490	-1.452097	0.002608	0.179891
2.500000	-4.841661	-4.844447	0.002786	0.057548
5.000000	-12.638182	-12.640264	0.002083	0.016480

Tabela 45: Resultados da simulação para ordem=5 no intervalo [0, 5].

t	x_exato(t)	x(t)	err_loc	err_rel (%)
0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	-
0.500000	-0.620185	-0.620205	0.000020	0.003218
1.000000	-1.449490	-1.449506	0.000016	0.001097
2.500000	-4.841661	-4.841667	0.000006	0.000134
5.000000	-12.638182	-12.638184	0.000003	0.000022

A Figura 14 compara graficamente a solução analítica com as aproximações numéricas obtidas do MST.

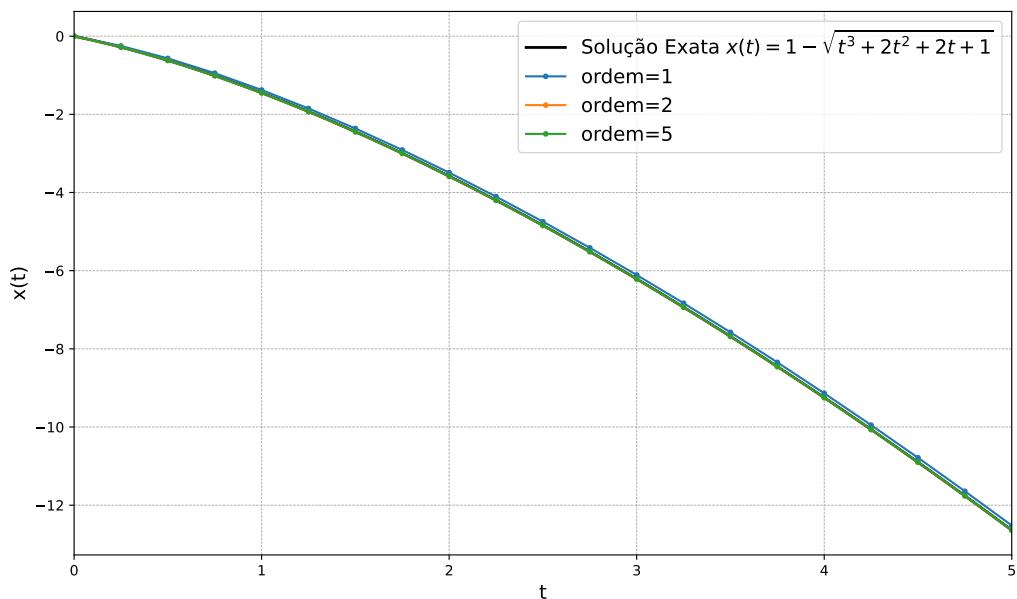


Figura 14: Resultados da simulação do MST com ordens $m \in \{1, 2, 5\}$ para o PVI (11)

Exercício 1 - letra H

O Problema de Valor Inicial (PVI) a ser resolvido é dado por:

$$\begin{cases} x'(t) = -\sin(x(t)) + t \\ x(0) = 0 \end{cases} \quad (13)$$

Solução Analítica

A equação diferencial $x'(t) = -\sin(x(t)) + t$ é não linear e não possui uma solução analítica conhecida que possa ser expressa em termos de funções elementares.

Método de Euler Explícito (MEE)

A análise numérica será realizada no intervalo de simulação $[0, 2]$.

A convergência do MEE para este PVI é garantida, pois a função $f(t, x) = -\sin(x) + t$ satisfaz a condição de Lipschitz globalmente na variável x . A derivada parcial de f em relação a x é:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\cos(x)$$

Como o módulo da derivada parcial é limitado por 1 para todo $x \in \mathbb{R}$ ($|\frac{\partial f}{\partial x}| = |-\cos(x)| \leq 1$), a função é Lipschitziana com constante de Lipschitz $L = 1$. Isso assegura a convergência do método em qualquer intervalo finito.

As tabelas a seguir apresentam o erro local e o erro relativo obtidos da aproximação numérica ($x(t)$) em relação à solução melhor aproximada ($x_{\text{exato}}(t)$) do PVI (13), para diferentes passos de simulação h . Para a solução melhor aproximada foi usado o MST de quinta ordem com um passo $h = 0.0001$.

Tabela 46: Resultados da simulação para $h=0.1$ no intervalo $[0, 2]$.

t	$x_{\text{exato}}(t)$	$x(t)$	err_loc	err_rel (%)
0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	-
0.500000	0.106545	0.090493	0.016052	15.065622
1.000000	0.369046	0.349371	0.019675	5.331205
1.500000	0.736350	0.715902	0.020448	2.776946
2.000000	1.205213	1.179711	0.025502	2.115937

Tabela 47: Resultados da simulação para $h=0.05$ no intervalo $[0, 2]$.

t	$x_{\text{exato}}(t)$	$x(t)$	err_loc	err_rel (%)
0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	-
0.500000	0.106545	0.098745	0.007800	7.321274
1.000000	0.369046	0.359400	0.009646	2.613717
1.500000	0.736350	0.726208	0.010142	1.377302
2.000000	1.205213	1.192393	0.012820	1.063749

Tabela 48: Resultados da simulação para $h=0.025$ no intervalo $[0, 2]$.

t	x_exato(t)	x(t)	err_loc	err_rel (%)
0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	-
0.500000	0.106545	0.102698	0.003847	3.610379
1.000000	0.369046	0.364269	0.004777	1.294414
1.500000	0.736350	0.731299	0.005051	0.685938
2.000000	1.205213	1.198785	0.006428	0.533352

A Figura 15 compara graficamente as aproximações numéricas obtidas do MEE, com a solução melhor aproximada.

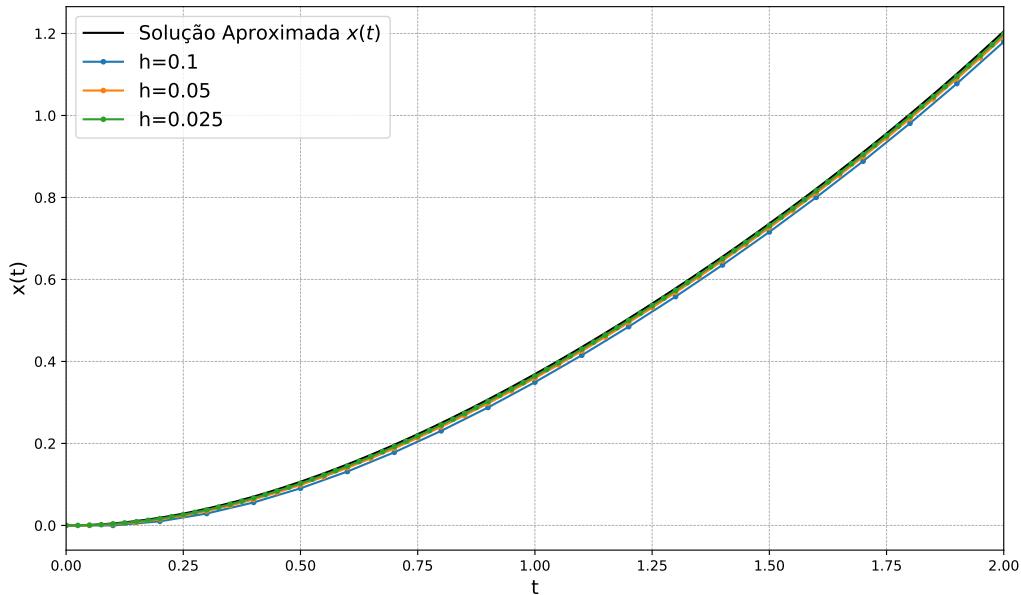


Figura 15: Resultados da simulação do MEE para o PVI (13) com diferentes passos

Método da Série de Taylor (MST)

Nesta seção, são apresentadas as derivadas de ordem superior necessárias para a implementação do Método da Série de Taylor (MST) e, em seguida, são analisados os resultados numéricos comparando a precisão de métodos de diferentes ordens ($m = 1, 2, 5$).

Derivadas para o Método da Série de Taylor (MST)

Para o PVI (13), a EDO é $x'(t) = -\sin(x) + t$. As derivadas foram obtidas de forma recursiva.

- Primeira derivada (f_0):

$$f_0 = -\sin(x) + t$$

- Segunda derivada (f_1):

$$f_1 = 1 - f_0 \cos(x)$$

- Terceira derivada (f_2):

$$f_2 = -f_1 \cos(x) + f_0^2 \sin(x)$$

- Quarta derivada (f_3):

$$f_3 = -f_2 \cos(x) + 3f_0 f_1 \sin(x) + f_0^3 \cos(x)$$

- Quinta derivada (f_4):

$$f_4 = -f_3 \cos(x) + (4f_0 f_2 + 3f_1^2 - f_0^4) \sin(x) + 6f_0^2 f_1 \cos(x)$$

Resultados e Análise Numérica

As tabelas a seguir apresentam o erro local e o erro relativo obtidos da aproximação numérica ($x(t)$) em relação à solução melhor aproximada ($x_{\text{exato}}(t)$) do PVI (13), para diferentes ordens do polinômio e para uma passo $h = 0.05$. Para a solução melhor aproximada foi usado o MST de quinta ordem com um passo $h = 0.0001$.

Tabela 49: Resultados da simulação para ordem=1 no intervalo [0, 2].

t	$x_{\text{exato}}(t)$	$x(t)$	err_loc	err_rel (%)
0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	-
0.500000	0.106545	0.098745	0.007800	7.321274
1.000000	0.369046	0.359400	0.009646	2.613717
1.500000	0.736350	0.726208	0.010142	1.377302
2.000000	1.205213	1.192393	0.012820	1.063749

Tabela 50: Resultados da simulação para ordem=2 no intervalo [0, 2].

t	$x_{\text{exato}}(t)$	$x(t)$	err_loc	err_rel (%)
0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	-
0.500000	0.106545	0.106676	0.000131	0.122534
1.000000	0.369046	0.369195	0.000149	0.040341
1.500000	0.736350	0.736452	0.000103	0.013964
2.000000	1.205213	1.205204	0.000009	0.000756

Tabela 51: Resultados da simulação para ordem=5 no intervalo [0, 2].

t	$x_{\text{exato}}(t)$	$x(t)$	err_loc	err_rel (%)
0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	-
0.500000	0.106545	0.106545	0.000000	0.000000
1.000000	0.369046	0.369046	0.000000	0.000000
1.500000	0.736350	0.736350	0.000000	0.000000
2.000000	1.205213	1.205213	0.000000	0.000000

A Figura 16 compara graficamente as aproximações numéricas obtidas do MST, com a solução melhor aproximada.

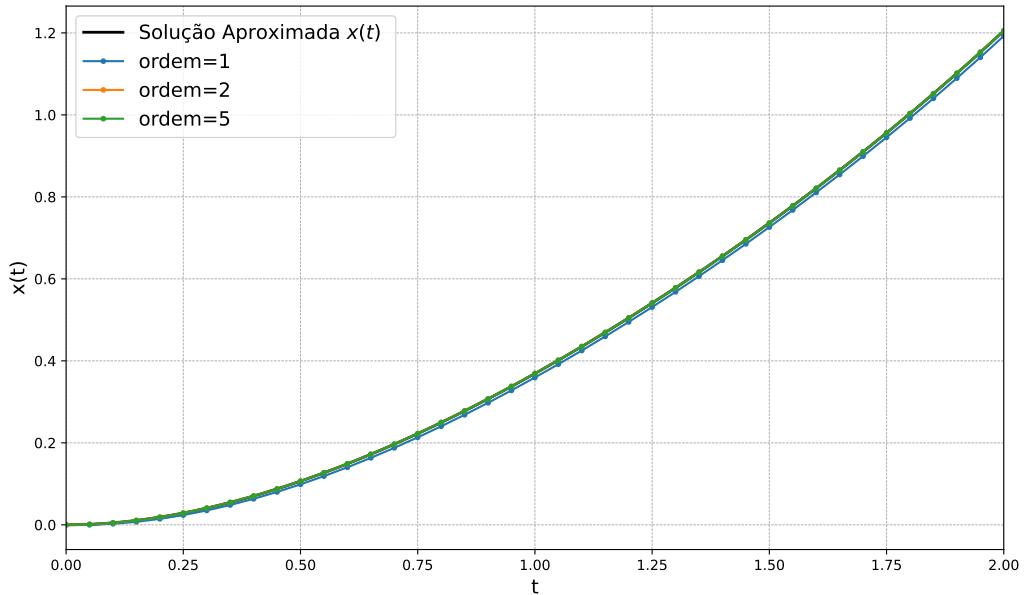


Figura 16: Resultados da simulação do MST com ordens $m \in \{1, 2, 5\}$ para o PVI (13)

Conclusão

A análise numérica dos Problemas de Valor Inicial (PVIs) permitiu verificar computacionalmente as propriedades teóricas dos métodos de Euler Explícito (MEE) e da Série de Taylor (MST).

Para o MEE, observou-se que ao reduzir o passo de iteração h pela metade, o erro também foi reduzido por um fator de aproximadamente 2. Este comportamento é esperado, tendo em vista que a ordem de convergência do MEE é $O(h)$ linear. Já para o MST, a análise demonstrou que, para um mesmo passo de iteração, o erro da aproximação diminui significativamente com o aumento da ordem do método.

A verificação da ordem de convergência do MST foi particularmente evidente na Questão 1b. Nela, ao utilizar o MST de ordem 5 e reduzir o passo h pela metade, o erro observado foi reduzido por um fator de aproximadamente 0.05 (resultado da razão $0.000002/0.000040$). Este valor se aproxima do fator esperado de $(0.5)^{5+1} = 0,015625$, em concordância com a ordem de convergência do método, que é $O(h^{m+1})$.

Exercício 2

Este exercício consiste no estudo numérico do modelo de crescimento logístico, uma equação diferencial ordinária que descreve a dinâmica de uma população em um ambiente com recursos limitados. O Problema de Valor Inicial (PVI) é dado por:

$$\begin{cases} x'(t) = rx(t) \left(1 - \frac{x(t)}{K}\right) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (14)$$

onde os parâmetros que governam a dinâmica são:

- r : a taxa intrínseca de variação da população.
- $K > 0$: a capacidade de suporte do ambiente, que representa o nível de equilíbrio estável da população.
- x_0 : a população inicial.

Solução Analítica

A equação diferencial logística é não linear, mas separável. A solução é obtida por separação de variáveis e integração por frações parciais:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= rx \frac{K-x}{K} \\ \int \frac{K}{x(K-x)} dx &= \int r dt \\ \int \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{K-x}\right) dx &= \int r dt \\ \ln|x| - \ln|K-x| &= rt + C_1 \\ \ln\left|\frac{x}{K-x}\right| &= rt + C_1 \\ \frac{x}{K-x} &= Ce^{rt} \end{aligned}$$

A constante C é determinada pela condição inicial $x(0) = x_0$, resultando em $C = \frac{x_0}{K-x_0}$. Substituindo a constante e isolando $x(t)$, chega-se à solução explícita:

$$x(t) = \frac{Kx_0e^{rt}}{K+x_0(e^{rt}-1)} \quad (15)$$

Método de Euler Explícito (MEE)

A análise de estabilidade do MEE para a equação logística é realizada em torno do ponto de equilíbrio estável não trivial, $\bar{x} = K$. A discretização de Euler é estável se $|1 + hf'(\bar{x})| \leq 1$, onde $f(x) = rx(1 - x/K)$. A derivada de $f(x)$ é:

$$f'(x) = r - \frac{2rx}{K}$$

Avaliando no ponto de equilíbrio $\bar{x} = K$:

$$f'(K) = r - \frac{2rK}{K} = -r$$

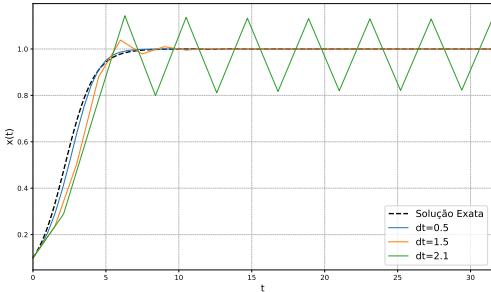
Substituindo na condição de estabilidade:

$$\begin{aligned} |1 + h(-r)| &\leq 1 \\ -1 &\leq 1 - hr \leq 1 \\ -2 &\leq -hr \leq 0 \\ 2 &\geq hr \end{aligned}$$

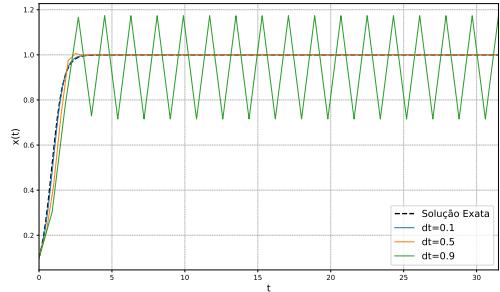
Portanto, a condição para a estabilidade do método de Euler é que o passo de simulação h deve satisfazer a seguinte inequação:

$$h \leq \frac{2}{r} \quad (16)$$

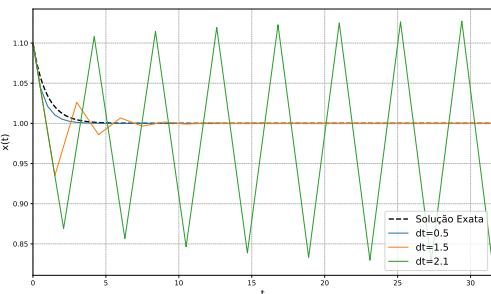
A influência dos parâmetros r e x_0 no comportamento da solução, bem como a performance do método de Euler, é demonstrada nos gráficos da Figura 17.



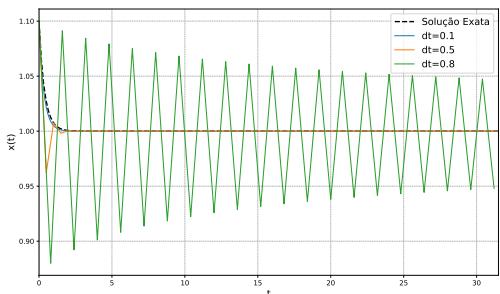
(a) $r = 1.0, K = 1.0, x_0 = 0.1$



(b) $r = 2.5, K = 1.0, x_0 = 0.1$



(c) $r = 1.0, K = 1.0, x_0 = 1.1$



(d) $r = 2.5, K = 1.0, x_0 = 1.1$

Figura 17: Análise do Método de Euler para a equação logística em quatro cenários, variando a taxa r e a condição inicial x_0 .

Nos Casos (a) e (c), com uma taxa $r = 1.0$, a condição de estabilidade é $h \leq 2/1.0$, ou seja, $h \leq 2.0$. As simulações com os passos $h = 0.5$ e $h = 1.5$ devem, portanto, convergir para o equilíbrio, uma vez que $0.5 \leq 2.0$ e $1.5 \leq 2.0$. Em contrapartida, o passo $h = 2.1$

viola a condição, pois $2.1 > 2.0$, e por isso espera-se que a solução numérica apresente oscilações.

Nos cenários com taxa mais elevada, $r = 2.5$, referentes aos Casos (b) e (d), o critério de estabilidade se torna mais restrito, exigindo $h \leq 2/2.5$, o que implica $h \leq 0.8$. Assim, os passos $h = 0.1$ e $h = 0.5$ são estáveis, pois $0.1 \leq 0.8$ e $0.5 \leq 0.8$. O passo $h = 0.9$ do Caso (b), por ser maior que o limite, gera uma solução instável e oscilatória. Já o passo $h = 0.8$ do Caso (d) testa o comportamento exatamente no limiar da estabilidade, onde podem ocorrer oscilações que não se amortecem.

Códigos implementados

Esta seção apresenta os códigos em Python que implementam os métodos numéricos estudados. São exibidas as funções para a resolução de Problemas de Valor Inicial (PVI) com o Método de Euler Explícito e a Série de Taylor, e para a análise de acurácia, através do cálculo dos erros local e relativo. O código-fonte completo está disponível no repositório do projeto no GitHub ([link](#)).

Código 1: Implementação, em Python, da função que calcula o erro relativo

```
def erro_relativo(y_exato, y_aproximado):
    return np.abs(np.divide(y_exato - y_aproximado, y_exato,
                           where=np.abs(y_exato) > 1e-8))
```

Código 2: Implementação, em Python, da função que calcula o erro local

```
def erro_local(y_exato, y_aproximado):
    return np.abs(y_exato - y_aproximado)
```

Código 3: Implementação, em Python, do Método de Euler Explícito

```
def metodo_euler_explicito(func, condicao_inicial, T, dt):
    t0 = condicao_inicial[0]
    y0 = condicao_inicial[1]

    5      n = int((T - t0) / dt)

    t_out = np.zeros(n + 1)
    y_out = np.zeros(n + 1)

    # Define o primeiro ponto da solução (a condição inicial)
    t_out[0] = t0
    y_out[0] = y0

    10     for i in range(n):
            # Pega os valores do passo anterior (usando o índice i)
            ti = t_out[i]
            yi = y_out[i]

            # A fórmula do método de Euler explícito
            15      y_out[i + 1] = yi + dt*func(ti, yi)

            # Atualiza o vetor de tempo
            t_out[i + 1] = ti + dt

    20      return t_out, y_out
```

Código 4: Implementação, em Python, do Método de Série de Taylor

```
def metodo_serie_taylor(func, condicao_inicial, T, dt):
```

```

t0 = condicao_inicial[0]
y0 = condicao_inicial[1]

5   n = int((T - t0) / dt)
    ordem = len(func)

    t_out = np.zeros(n + 1)
    y_out = np.zeros(n + 1)

10  # Define o primeiro ponto da solucao (a condicao inicial)
    t_out[0] = t0
    y_out[0] = y0

15  for i in range(n):
        # Pega os valores do passo anterior (usando o indice i)
        ti = t_out[i]
        yi = y_out[i]

20    soma_taylor = 0.0

        for k in range(ordem):
            # Termo (k+1) da serie de Taylor
            valor_derivada = func[k](ti, yi)
            fatorial = math.factorial(k + 1)
            soma_taylor += (dt**(k + 1) / fatorial) * valor_derivada

25    y_out[i + 1] = yi + soma_taylor

        # Atualiza o vetor de tempo
        t_out[i + 1] = ti + dt

30    return t_out, y_out

```
