Apuntes de Variable Compleja

Luis López

Septiembre 2025

Índice

Introducción

Los **números complejos**, denotados por $\mathbb{C}$, constituyen una extensión de los números reales $\mathbb{R}$, cumpliéndose que $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. A diferencia de los reales, los complejos forman un *cuerpo algebraicamente cerrado*, lo que significa que todo polinomio con coeficientes complejos admite todas sus raíces en $\mathbb{C}$.

Todo número complejo puede escribirse como

$$z = x + iy,$$

donde $x, y \in \mathbb{R}$ e i es la unidad imaginaria ($i^2 = -1$). También pueden representarse en *forma polar*, mediante su módulo y argumento.

El conjunto $\mathbb{C}$ no solo es fundamental en álgebra y análisis, sino que resulta indispensable en múltiples áreas de las matemáticas aplicadas y la física. Asimismo, los números complejos son herramientas habituales en ingeniería.

1. Números complejos

1.1 Teoría y estructura elemental

La imposibilidad de resolver ciertas ecuaciones con números reales nos obliga a introducir los **números imaginarios**, definidos a partir de la unidad i tal que

$$i^2 = -1.$$

1.2 Introducción elemental

Denotamos los números complejos como

$$\mathbb{C} = \{z = a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}\}.$$

Dado $z = a + bi \in \mathbb{C}$, se definen:

- Parte real: $\Re(z) = a \in \mathbb{R}$.
- Parte imaginaria: $\Im(z) = b \in \mathbb{R}$.
- Módulo: $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.
- Conjugado: $\overline{z} = a - bi$.

Ejemplo. Sea $z = 1 - 2i$. Entonces:

$$\Re(1-2i) = 1,\ \Im(1-2i) = -2,\ \overline{1-2i} = 1+2i,\ |1-2i| = \sqrt{1^2 + (-2)^2} = \sqrt{5}.$$

1.3 Propiedades elementales

1. $\overline{\overline{z}} = z$. Demostración: si $z = a + bi \Rightarrow \overline{z} = a - bi \Rightarrow \overline{\overline{z}} = a + bi = z$.
2. $z + \overline{z} = 2\Re(z)$.
3. $z - \overline{z} = 2i\Im(z)$.
4. $|\overline{z}| = |z|$.
5. $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$.
6. $\overline{z \cdot z'} = \overline{z} \cdot \overline{z'}$.

Además, tenemos las siguientes propiedades asociadas al **módulo**:

1. $|\Re(z)| \leq |z|$.

2. $|\Im(z)| \leq |z|$. En efecto, $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} \geq |b|$.

3. **Desigualdad triangular:** $|z + w| \leq |z| + |w| \quad \forall z, w \in \mathbb{C}$.

4. $z \cdot \overline{z} = |z|^2$.

5. **Desigualdad triangular inversa:** $\Big||z| - |z'|\Big| \leq |z - z'|$.

Todas estas propiedades, junto con la suma y producto de números complejos, generalizan las propiedades de los números reales:

$$z + z' = (x + iy) + (x' + iy') = (x + x') + (y + y')i \in \mathbb{C},$$

$$z \cdot z' = (x + iy)(x' + iy') = (xx' - yy') + (xy' + x'y)i \in \mathbb{C}.$$

En particular, si $z = a + bi$, se cumple que

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2},$$

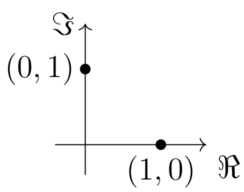
es decir, el módulo de z coincide con el valor absoluto en los reales.

1.4 Forma polar y geometría de los números complejos

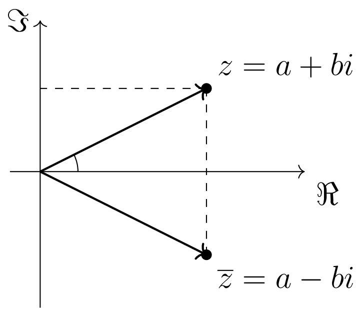
El conjunto $\mathbb{C}$ se puede representar como $\mathbb{R}^2$ mediante la asignación

$$z = a + bi \longmapsto (a, b) \in \mathbb{R}^2.$$

De esta forma obtenemos el denominado **plano complejo**; por lo tanto, la interpretación geométrica de *todo lo visto* sería:



Representación de 1 e i



Geometría de z y $\overline{z}$

Si $z = \frac{|z|}{|z|} z = |z| \frac{z}{|z|} = |z|(\cos\theta + i \sin\theta)$, decimos que z está en **forma polar**.

Sea:

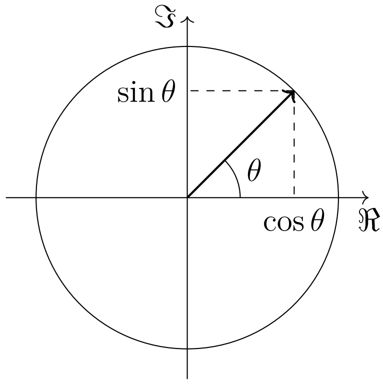
$$w = \frac{z}{|z|} \quad \Rightarrow \quad |w| = \frac{|z|}{|z|} = 1.$$

Es decir, $\frac{z}{|z|}$ es un número complejo de módulo 1, luego existe $\theta \in \mathbb{R}$ tal que

$$\frac{z}{|z|} = \cos\theta + i \sin\theta.$$

Ejemplo. El número complejo $1+i$ en forma polar es:

$$1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i \sin\frac{\pi}{4}\right).$$



Circunferencia unitaria: $w = \cos\theta + i \sin\theta$

Vemos que un mismo número complejo tiene infinitas representaciones polares por culpa del ángulo θ, llamado **argumento de** z. Para solucionar este problema introducimos el **argumento principal** de z, que es aquel ángulo $-\pi < \theta \leq \pi$ que verifica:

$$z = |z|(\cos\theta + i \sin\theta), \qquad \theta = \arg(z).$$

Además, si $z = x + iy$, entonces:

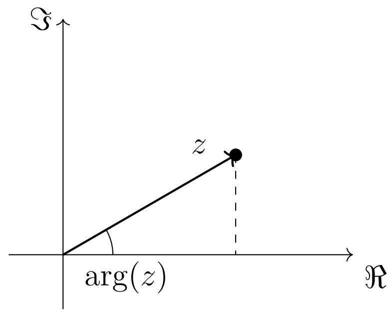
$$\arg(z) = \begin{cases} \arctan\left(\dfrac{y}{x}\right), & x > 0,\ y \geq 0, \\ \arctan\left(\dfrac{y}{x}\right) + \pi, & x < 0,\ y \geq 0, \\ \pi, & x < 0,\ y = 0, \\ \arctan\left(\dfrac{y}{x}\right) - \pi, & x < 0,\ y < 0, \\ -\dfrac{\pi}{2}, & x = 0,\ y < 0, \\ \dfrac{\pi}{2}, & x = 0,\ y > 0, \\ \arctan\left(\dfrac{y}{x}\right), & x > 0,\ y < 0. \end{cases}$$

Nótese que se verifica que

$$\arg(z) = \arg(z) + 2k\pi, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Así, geométricamente, un número complejo z tendría esta información:

$$z = |z|e^{i\arg(z)}.$$



Argumento de z.

Al tener el módulo de cualquier complejo podemos hablar de la noción de distancia entre complejos, dada por:

$$d(z, w) = |z - w|.$$

Definición. El disco centrado en $z_0 \in \mathbb{C}$ y de radio $\varepsilon > 0$ es:

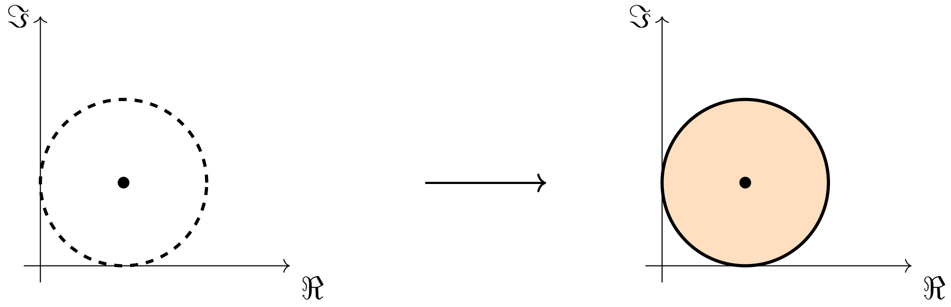
$$D(z_0, \varepsilon) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < \varepsilon\}.$$

Ejemplo.

$$D(1+i,1) = \{z \in \mathbb{C} : |z-(1+i)| < 1\}.$$

El disco cerrado se denota por:

$$\overline{D}(z_0,\varepsilon) = \{z \in \mathbb{C} : |z-z_0| \leq \varepsilon\}.$$



Disco abierto $D(1+i,1)$ Disco cerrado $\overline{D}(1+i,1)$

1.5 Forma exponencial y multiplicación de números complejos

Por conveniencia, escribimos

$$\cos\theta + i\sin\theta \;=\; e^{i\theta}.$$

Así, la forma polar $z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$ se expresa como

$$z = |z|\, e^{i\theta}.$$

Esta representación hace muy sencilla la multiplicación de complejos. En efecto, si:

$$z = r\, e^{i\theta}, \qquad w = \rho\, e^{i\varphi} \quad (r,\rho \geq 0),$$

entonces:

$$z\, w = (r\rho)\, e^{i(\theta+\varphi)}.$$

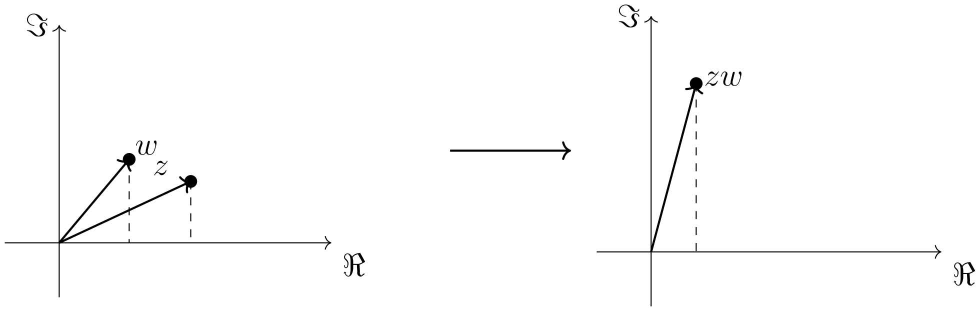
En particular,

$$|zw| = |z|\,|w|, \qquad \arg(zw) = \arg(z) + \arg(w) \pmod{2\pi}.$$

Nota. En general es *falso* que

$$\arg(zw) = \arg(z) + \arg(w),$$

pues arg es el argumento principal (restringido a $(-\pi,\pi]$) y puede requerir ajustar por múltiplos de 2π.



Multiplicación en forma polar (solo vectores).

Ejemplo.

$$\arg(i) = \frac{\pi}{2}, \qquad \arg(-i) = -\frac{\pi}{2},$$

mientras que

$$\arg(i) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \qquad \arg(-i) = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Potencias (fórmula de De Moivre). Si $z = r\,e^{i\theta}$ y $n \in \mathbb{N}$, entonces:

$$z^n = r^n\,e^{in\theta}.$$

1.6 Ejemplo: cálculo en forma exponencial

Ejemplo. Calcular $(1+i)^4$.

$$1 + i = \sqrt{2}\,e^{i\pi/4} \quad \Rightarrow \quad (1+i)^4 = (\sqrt{2})^4 e^{i\pi} = 4 \cdot (-1) = -4,$$

llegamos a:

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

(Fórmula de Euler, considerada la más bonita de las matemáticas).

1.7 Raíces de números complejos

Queremos estudiar qué números complejos cumplen la ecuación $z^n = w$ para un $n \geq 2$, $w \in \mathbb{C}$.

Proposición. Dado un número complejo no nulo $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ y $n \geq 2$, existen exactamente n números complejos que cumplen $z^n = w$. Si

$$w = r\,e^{i\theta} \quad (r > 0,\ \theta \in \mathbb{R}),$$

entonces las soluciones son

$$z_k = r^{1/n} e^{i(\theta+2k\pi)/n}, \qquad k = 0, 1, \ldots, n-1,$$

que son los vértices de un n-gono regular centrado en el origen.

Demostración. Si $z = \rho e^{i\varphi}$, entonces $z^n = \rho^n e^{in\varphi}$. Imponiendo $z^n = w = re^{i\theta}$ se obtiene $\rho^n = r \Rightarrow \rho = r^{1/n}$ y $n\varphi = \theta + 2k\pi \Rightarrow \varphi = (\theta + 2k\pi)/n$.

Definición. El *conjunto de las raíces n-ésimas de w* es

$$\sqrt[n]{w} := \left\{ r^{1/n} e^{i(\theta+2k\pi)/n} \ : \ k = 0, \ldots, n-1 \right\}.$$

Por abuso, se llama *raíz n-ésima principal* de w a

$$\sqrt[n]{w}_{\mathrm{pr}} := r^{1/n} e^{i \arg(w)/n},$$

donde $\arg(w) \in (-\pi, \pi]$ es el argumento principal.

Ejemplo. Resolver $z^3 = -8i$.

$$-8i = 8\, e^{-i\pi/2} \quad \Rightarrow \quad z_k = 2\, e^{i(-\pi/2+2k\pi)/3}, \ k = 0, 1, 2.$$

Explícitamente:

$$z_0 = 2e^{-i\pi/6} = \sqrt{3} - i, \quad z_1 = 2e^{i\pi/2} = 2i, \quad z_2 = 2e^{i7\pi/6} = -\sqrt{3} - i.$$

La raíz cúbica *principal* es $2e^{-i\pi/6}$.

Notas.

- $(z_k)^n = w$ para todo k, y $z_k = z_0\, e^{i2k\pi/n}$.
- $\sqrt[n]{w}$ denota un *conjunto*; la notación de raíz *principal* usa $\arg(w)$.

2. Teoría de las funciones de variable compleja

Estudiaremos funciones de la forma $f : A \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

Parte real e imaginaria. Si $z = x + iy$, toda función f puede escribirse como

$$f(z) = u(x, y) + i\, v(x, y),$$

donde $u = \Re f$ y $v = \Im f$.

Ejemplos.

$$\begin{aligned} f(z) = z^2 = (x+iy)^2 = (x^2 - y^2) + i(2xy) \quad &\Rightarrow \quad u(x,y) = x^2 - y^2, \;\; v(x,y) = 2xy, \\ f(z) = \overline{z} = x - iy \quad &\Rightarrow \quad u(x,y) = x, \;\; v(x,y) = -y. \end{aligned}$$