Apuntes Ecuaciones Diferenciales

Luis López

September 2025

Índice

Introducción a las ecuaciones diferenciales.

Una **ecuación diferencial** es una relación matemática en la que intervienen una función desconocida y sus derivadas. Su objetivo es describir cómo varía una magnitud en función de otra, estableciendo vínculos entre la propia magnitud y su tasa de cambio.

Las ecuaciones diferenciales son fundamentales porque numerosos fenómenos naturales y tecnológicos se formulan de esta manera. En física, por ejemplo, permiten estudiar el movimiento de partículas (leyes de Newton), la propagación del calor, las ondas o el comportamiento de los circuitos eléctricos. En otras disciplinas también son esenciales: en biología modelan el crecimiento de poblaciones y la difusión de sustancias, en economía describen la evolución de sistemas dinámicos, y en ingeniería sirven para analizar vibraciones, fluidos o sistemas de control.

En definitiva, las ecuaciones diferenciales constituyen una herramienta matemática clave que conecta las teorías con la realidad dinámica, pues gran parte de los procesos que nos rodean se fundamentan en cambios que pueden expresarse mediante estas ecuaciones.

1. Ecuaciones diferenciales ordinarias

Se denomina **ecuación diferencial ordinaria (EDO)** a toda ecuación

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$$

donde x es la variable independiente, y la variable dependiente y $y', y'', \dots$ son derivadas de la variable dependiente. Llamamos **orden de la ecuación** al grado de la derivada más grande que aparece en la ecuación.

Se denomina **solución** de una EDO en (a, b) a toda función definida en (a, b) junto a sus derivadas de orden n, tal que al sustituirla en la EDO da una identidad respecto a x en (a, b).

Ejemplo:

$$y' = x^5 \quad \Rightarrow \quad y = \tfrac{x^6}{6} + C$$

Ecuación de primer orden $\Rightarrow$ 1 constante arbitraria.

$$y'' = y' \quad \Rightarrow \quad y = C_1 e^x + C_2$$

Si una EDO involucra varias variables independientes, se denomina **ecuación en derivadas parciales (EDP)**:

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n, \tfrac{\partial y}{\partial x_1}, \tfrac{\partial y}{\partial x_2}, \dots, \tfrac{\partial^2 y}{\partial x_i \partial x_j}, \dots) = 0$$

A la gráfica de una solución de una EDO también se le llama **integral**.

EDOs de primer orden

La forma más general de una EDO de primer orden es:

$$F(x, y, y') = 0 \quad \text{(forma implícita)}$$

$$y' = f(x, y) \quad \text{(forma explícita).}$$

Se dice que una EDO es **autónoma** si no depende explícitamente de la variable independiente, es decir:

$$y' = f(y) \quad \Leftrightarrow \quad F(y, y') = 0.$$

1.1 Problema de Cauchy

Consiste en la búsqueda de la solución de la EDO

$$y' = f(x, y) \quad \text{tal que} \quad y(x_0) = y_0$$

es decir, se añade una **condición inicial**:

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Ejemplo:

$$y' = y \quad \Rightarrow \quad y = Ce^x, \qquad y = e^x \text{ si } y(0) = 1$$

Ya que $1 = Ce^0 \Rightarrow C = 1$.

1.2 Teorema de Picard–Lindelöf (existencia y unicidad)

El problema de Cauchy tiene una única solución si, y solo si, $f(x, y)$ y $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ son continuas en (x, y). Es decir, si $f(x, y)$ y $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ son continuas en una cierta región del plano x, y, entonces $\exists!\ y(x)$ que pasa por cada punto de dicha región.

Ejemplo:

$$y' = \frac{y}{x} \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad \ln y = \ln x + C \quad \Rightarrow \quad y = Cx$$

Si $y(x_0) = y_0$ entonces $y_0 = Cx_0 \quad \Rightarrow \quad C = \dfrac{y_0}{x_0}$.

Por definición, la **solución general** de una EDO es la familia de curvas $y(x, C)$ que satisfacen $y' = f(x, y)$ para distintos valores admisibles de C.

Una **solución particular** es aquella que además cumple la condición inicial $y(x_0) = y_0$, es decir, es una curva concreta dentro de la familia general.

$$y' = y, \quad y = Ce^x \quad \Rightarrow \quad \text{solución general}$$
$$y_p = e^x \quad \Rightarrow \quad \text{solución particular}$$

2. Tipos de EDOs

2.1 EDOs de variables separables

Las EDOs de variables separadas son aquellas en las que se puede reescribir la ecuación diferencial de forma que cada variable quede en un lado distinto de la igualdad. Esto permite integrar ambas partes por separado para encontrar la solución. Suelen ser sencillas de resolver y aparecen con frecuencia en problemas físicos y de crecimiento poblacional. Además, siempre requieren una condición inicial para determinar la constante de integración y obtener la solución particular.

Una EDO de variables separables tiene la forma:

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y),$$

Que se puede reescribir como:

$$\frac{1}{g(y)}\,dy = f(x)\,dx.$$

Ejemplo:

$$3e^x \tan(y)\,dx = -(2 - e^x)\sec^2(y)\,dy$$

Integramos en ambos lados:

$$\int \frac{3e^x}{2 - e^x}\,dx = \int \frac{-\sec^2(y)}{\tan y}\,dy$$

Resolviendo:

$$-3\ln|2 - e^x| = -\ln|\tan y| + C$$

Despejando:

$$\tan(y) = D(e^x - 2)^3 \quad \Rightarrow \quad y = \arctan\Big(D(e^x - 2)^3\Big).$$

2.2 EDOs reducibles a separables

Las EDOs reducibles a variables separadas son aquellas que inicialmente no están en forma separable, pero pueden transformarse mediante un cambio de variable o manipulación algebraica para lograrlo. Una vez separadas, se resuelven igual que las de variables separadas, integrando cada lado por separado.

Son del tipo:

$$\frac{dy}{dx} = f(ax+by+c), \qquad a, b, c \text{ son constantes definidas.}$$

Se resuelven mediante el cambio de variable:

$$z = ax + by + c.$$

Entonces:

$$z' = a + b\,y' \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{z'-a}{b}.$$

Sustituyendo en la ecuación original:

$$z' = \frac{dz}{dx} = a + b\,f(z),$$

Integrando:

$$\int \frac{dz}{a + b\,f(z)} = x + D.$$

Ejemplo:

$$(x+y)^2\,y' = a^2, \qquad a = \text{cte.}$$

Reordenamos:

$$y' = \frac{a^2}{(x+y)^2}.$$

Hacemos el cambio de variable:

$$z = x + y \quad \Rightarrow \quad z' = 1 + y' \quad \Rightarrow \quad y' = z' - 1.$$

Sustituyendo:

$$z' - 1 = \frac{a^2}{z^2} \quad \Rightarrow \quad z' = 1 + \frac{a^2}{z^2} \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dz}{1 + \frac{a^2}{z^2}} = x + D.$$

Integramos y operamos:

$$\int \frac{dz}{1+\frac{a^2}{z^2}} = \int \frac{z^2}{z^2+a^2}\,dz = \int \frac{z^2+a^2-a^2}{z^2+a^2}\,dz.$$

$$\int \frac{z^2+a^2}{z^2+a^2}\,dz - \int \frac{a^2}{z^2+a^2}\,dz = z - a^2 \int \frac{1}{1+(\frac{z}{a})^2}\,dz = z - a\arctan\left(\frac{z}{a}\right).$$

Deshacemos el cambio de variable $z = x + y$

$$z - \operatorname{arc\,tg}\left(\tfrac{z}{a}\right) = x + D$$

$$x + y - \operatorname{arc\,tg}\left(\tfrac{x+y}{a}\right) = x + D \quad \Rightarrow \quad \text{Si} \quad y(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad D = 0$$

$$y_g = \operatorname{arc\,tg}\left(\tfrac{x+y}{a}\right) + D \quad \Rightarrow \quad y_p = \operatorname{arc\,tg}\left(\tfrac{x+y}{a}\right)$$

2.3 EDO's homogéneas

Las EDOs homogéneas son aquellas en las que la función y su derivada dependen de la relación entre las variables y no de ellas por separado. Se suelen resolver mediante un cambio de variable que simplifica la ecuación y permite separarla.

Se dice que $f(x, y)$ es homogénea de grado n si:

$$f(tx, ty) = t^n f(x, y)$$

Se dice que $y' = f(x, y)$ es homogénea si $f(x, y)$ es homogénea de grado 0:

$$f(tx, ty) = f(x, y), \qquad f(x, y) = \tfrac{y}{x}, \qquad f(tx, ty) = \tfrac{ty}{tx} = \tfrac{y}{x}$$

$$f(x, y) = xy \quad \Rightarrow \quad f(tx, ty) = t^2 xy$$

Ejemplo:

$$f(x, y) = \left(\tfrac{x}{y}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad \text{grado } 0$$

$$xy' = \sqrt{x^2 - y^2} + y \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{\sqrt{x^2 - y^2}}{\sqrt{x^2}} + \frac{y}{x}$$

$$\Rightarrow \quad y' = \sqrt{1 - \left(\tfrac{y}{x}\right)^2} + \frac{y}{x}$$

Hacemos el cambio de variable $z = \frac{y}{x}$

$$z' = \frac{y'x - y}{x^2} \quad \Rightarrow \quad y' = xz' + y$$

Operando:

$$y' = \sqrt{1 - z^2} + z \quad \Rightarrow \quad z + z'x = \sqrt{1 - z^2} + z$$

$$\Rightarrow \quad z' = \frac{\sqrt{1 - z^2}}{x} = \frac{dz}{dx}$$

Integrando:

$$\int \frac{dz}{\sqrt{1 - z^2}} = \int \frac{dx}{x} \ \Rightarrow \ \arcsin(z) = \ln|x| + C \ \Rightarrow \ z = \sin(\ln|x| + C)$$

Desacemos el cambio de variable $z = \frac{y}{x}$

$$y = x \sin(\ln|x| + C)$$

Familia de soluciones:

$$y' = \frac{dy}{dx} = f\left(\frac{ax + by + c}{a_1x + b_1y + c_1}\right)$$

Si $c = c_1 = 0$:

$$y' = \frac{dy}{dx} = f\left(\frac{ax + by}{a_1x + b_1y}\right) = f\left(\frac{a + b\frac{y}{x}}{a_1 + b_1\frac{y}{x}}\right) = f\left(\frac{2 + 3\frac{y}{x}}{5 + 4\frac{y}{x}}\right)$$

Cambio de variable:

$$z = \frac{y}{x} \quad \Rightarrow \quad y' = z'x + z$$

$$z'x + z = h\left(\frac{2 + 3z}{5 + 4z}\right)$$

Si $c \neq 0$ o $c_1 \neq 0$, no es homogénea, entonces:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{a_1}{a} = \frac{b_1}{b} = d \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} a_1 = da \\ \\ b_1 = db \end{bmatrix}$$

El cambio de variable sería:

$$z = ax + by$$

$$y' = f\left(\frac{ax + by + c}{a_1 x + b_1 y + c_1}\right) = f\left(\frac{ax + by + c}{d(ax + by) + c_1}\right) = g(ax + by) = g(z)$$

Ejemplo:

$$y' = \frac{x + y + 1}{-2x - 2y + 1} = \frac{(x + y) + 1}{-2(x + y) + 1}$$

Hacemos el cambio:

$$z = x + y \quad \Rightarrow \quad z' - 1 = \frac{z + 1}{-2z + 1}$$

Operando:

$$z' = \frac{z + 1}{-2z + 1} + 1 = \frac{-2z + 1 + z + 1}{-2z + 1} = \frac{-z + 2}{-2z + 1} = \frac{dz}{dx} = z'$$

$$\frac{-2z + 1}{-z + 2} dz = dx$$

Integrando:

$$C_1 + x = \int \frac{-2z + 1}{-z + 2} dz = \int \frac{-2z}{-z + 2} dz + \int \frac{1}{-z + 2} dz$$

$$= -2z + 2 + \int \frac{1}{-z + 2} dz = -\ln|2 - z|$$

Si c o $c_1 \neq 0$ y el determinante $\neq 0$:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = \xi + h \\ y = \eta + k \end{cases}$$

Entonces:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{d\eta}{d\xi} \cdot \frac{d\xi}{dx} = \frac{d\eta}{d\xi} \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{d\eta}{d\xi}$$

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{a\xi + b\eta + ah + bk + c}{a_1\xi + b_1\eta + a_1 h + b_1 k + c_1} = \frac{a + b\frac{\eta}{\xi}}{a_1 + b_1\frac{\eta}{\xi}} = \frac{d\eta}{d\xi}$$

Ejemplo:

$$(x+y-2)\,dx+(x-y+4)\,dy=0$$

Hacemos el cambio de variable:

$$y'=\frac{x+y-2}{-x+y-4}\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}x=\xi+h\\ y=\eta+k\end{cases}$$

Si sustituimos quedaría:

$$\frac{d\eta}{d\xi}=\frac{\xi+h+\eta+k-2}{-\xi-h+\eta+k-4}\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}h+k=2\\ -h+k=4\end{cases}\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}h=-1\\ k=3\end{cases}$$

Entonces:

$$\frac{d\eta}{d\xi}=\frac{\xi+\eta}{-\xi+\eta}=\frac{1+\frac{\eta}{\xi}}{-1+\frac{\eta}{\xi}}$$

Cambio de variable:

$$z=\frac{\eta}{\xi}\quad\Rightarrow\quad\eta=z\xi\quad\Rightarrow\quad\frac{d\eta}{d\xi}=\frac{d}{d\xi}(\xi z)=\xi\frac{dz}{d\xi}+z$$

Aplicando la sustitución:

$$\frac{1+z}{-1+z}=\frac{dz}{d\xi}\,\xi+z\quad\Rightarrow\quad\frac{1+z+z+z^2}{-1+z}=-\frac{dz}{d\xi}\,\xi$$

Integramos:

$$\int\frac{z-1}{-z^2+2z+1}\,dz=\int\frac{d\xi}{\xi}\quad\Rightarrow\quad\ln|1+2z-z^2|=\ln|\xi^{-2}|+C=\ln\left|\frac{D}{\xi^2}\right|$$

Aplicamos exponencial en ambos lados:

$$1+2z-z^2=\frac{D}{\xi^2}\quad\Rightarrow\quad\xi^2+2z\xi^2-z^2\xi^2=D$$

Deshacemos el cambio de variable:

$$(x+1)^2+2(x+1)(y-3)-(y-3)^2=D$$

2.4 EDOs exactas

Las ecuaciones diferenciales exactas son aquellas en las que existe una función potencial cuyo diferencial total coincide con la ecuación dada. Su solución se obtiene hallando dicha función potencial f(x,y) tal que sus derivadas parciales coincidan con los coeficientes de la ecuación.
Son de la forma:

$$f(x,y) = c \quad \Rightarrow \quad y' = 0$$

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}\,dy = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} M(x,y) = \dfrac{\partial f}{\partial x} \\ N(x,y) = \dfrac{\partial f}{\partial y} \end{cases}$$

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy \quad \Leftrightarrow \quad \exists f \;\text{ tal que } f(x,y) = \text{constante.}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = M \quad \Rightarrow \quad f(x,y) = \int M\,dx + g(y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = N \quad \Rightarrow \quad \int \frac{\partial M}{\partial y}\,dx + g'(y)$$

Por lo tanto,

$$g'(y) = N - \int \frac{\partial M}{\partial y}\,dx \quad \Rightarrow \quad g(y) = \int \left[N - \int \frac{\partial M}{\partial y}\,dx \right] dy + C$$

“Demostración”

Podemos hacer esto ya que si $f(x,y) = c \quad \Rightarrow \quad df = 0$, entonces

$$\frac{\partial f}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}\,dy = 0.$$

Entonces:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial y}.$$

Ejemplo:

$$(x+y-2)\,dx+(x-y+4)\,dy=0$$

Llamamos M a la primera parte y N a la segunda:

$$M=(x+y-2)\,dx, \qquad N=(x-y+4)\,dy$$

Comprobamos que sea exacta:

$$\begin{cases} \frac{\partial M}{\partial y}=1 \\ \frac{\partial N}{\partial x}=1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \text{Es exacta.}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=x+y-2$$

Integramos:

$$f=\int (x+y-2)\,dx+g(y)=\frac{x^2}{2}+xy-2x+g(y)$$

$$N=\frac{\partial f}{\partial y}=x+g'(y)=x-y+4 \;\Rightarrow\; g(y)=\int(-y+4)\,dy=-\frac{y^2}{2}+4y+C$$

Resultando en:

$$f(x,y)=\frac{x^2}{2}-2x-\frac{y^2}{2}+4y+xy+C=0$$

Ejemplo:

$$(\operatorname{sen}(xy)+xy\cos(xy))\,dx+x^2\cos(xy)\,dy=0$$

Donde:

$$\begin{cases} (\operatorname{sen}(xy)+xy\cos(xy))\,dx \quad\longrightarrow\; M \\ x^2\cos(xy)\,dy \quad\longrightarrow\; N \end{cases}$$

Comprobamos que sea exacta.

$$\begin{cases} \frac{\partial M}{\partial y}=x\cos(xy)+x\cos(xy)+xy(-x\operatorname{sen}(xy)) \\ \frac{\partial N}{\partial x}=2x\cos(xy)-x^2y\operatorname{sen}(xy) \end{cases}$$

Queda comprobado que es una EDO exacta ya que son iguales.

Resolvemos:

$$f = \int \Big[x^2 \cos(xy)\Big]\, dy + g(x) = -x\ \operatorname{sen}(xy) + g(x)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = M \ \Rightarrow\ -\operatorname{sen}(xy) - xy\cos(xy) + g'(x) = \operatorname{sen}(xy) + xy\cos(xy)$$

$$g'(x) = 2\operatorname{sen}(xy) + 2xy\cos(xy)$$

$$g(x) = \int \Big[\, 2\operatorname{sen}(xy) + 2xy\cos(xy) \,\Big]\, dx$$

2.5 EDO's cuasi-exactas

Las ecuaciones diferenciales cuasiexactas son aquellas que no son exactas inicialmente, pero pueden convertirse en exactas al multiplicarlas por un factor integrante adecuado. Una vez transformadas, se resuelven como una ecuación exacta encontrando la función potencial cuya derivada total reproduce la ecuación original.

$$M\,dx + N\,dy = 0 \ \Rightarrow\ \frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x} \qquad \mu(x,y) = \text{factor integrante.}$$

Si $\exists\, \mu(x,y)$ tal que $\mu(x,y)M\,dx + \mu(x,y)N\,dy = 0$ es una EDO exacta, entonces la EDO original es cuasi-exacta.

Supongamos que $\exists\, f(x,y) = c,\ \frac{\partial f}{\partial x} = \mu M$ y $\frac{\partial f}{\partial y} = \mu N$
Entonces:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} \ \Rightarrow\ \frac{\partial}{\partial y}(\mu M) = \frac{\partial}{\partial x}(\mu N)$$

$$N\,\frac{\partial \mu}{\partial x} + \mu\,\frac{\partial N}{\partial x} = M\,\frac{\partial \mu}{\partial y} + \mu\,\frac{\partial M}{\partial y} \ \Rightarrow\ N\,\frac{\partial \mu}{\partial x} - M\,\frac{\partial \mu}{\partial y} = \mu\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)$$

- Si: $\dfrac{\partial_y M - \partial_x N}{N}$ solo depende de $x \Rightarrow \mu = \mu(x)$

$$\mu = \mu(x) \Rightarrow \quad \frac{\partial \mu}{\partial y} = 0 \Rightarrow \quad N\,\frac{\partial \mu}{\partial x} = \mu\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)$$
$$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} dx$$

Resolvemos:

$$\int \frac{d\mu}{\mu} = \int g(x)\,dx \;\Rightarrow\; \ln\mu = \int g(x)\,dx + \alpha \;\Rightarrow\; \mu(x) = c\,e^{\int g(x)\,dx}$$

- Si: $\dfrac{\partial_x N - \partial_y M}{M}$ solo depende de $y \Rightarrow \mu = \mu(y)$

$$\mu(y) = e^{\int h(y)\,dy} \qquad \text{con} \qquad h(y) = \frac{\partial_x N - \partial_y M}{M}$$

Ejemplo:

$$(x+y^2)\,dx - 2xy\,dy = 0 \;\Rightarrow\; \begin{cases} \frac{\partial M}{\partial y} = 2y, \\ \frac{\partial N}{\partial x} = -2y \end{cases} \quad \Rightarrow \text{ No es exacta.}$$

Reslvemos:

$$\frac{\partial_y M - \partial_x N}{N} = \frac{2y - (-2y)}{-2xy} = \frac{4y}{-2xy} = -\frac{2}{x} = g(y) = 0 \;\Rightarrow\; \mu = \mu(x)$$

Integrando:

$$\int \frac{d\mu}{\mu} = \int -\frac{2}{x}\,dx \;\Rightarrow\; \ln\mu = -2\ln x + C = \ln\left(\frac{C}{x^2}\right) \;\Rightarrow\; \mu(x) = \frac{C}{x^2}$$

Multiplicamos la EDO por el factor integrante:

$$\mu M\,dx + \mu N\,dy = 0 \quad\Rightarrow\quad \frac{1}{x^2}\Big[(x+y^2)\,dx - 2xy\,dy\Big] = 0$$

$$\left(\frac{1}{x} + \frac{y^2}{x^2}\right) dx - \frac{2y}{x}\,dy = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y^2}{x^2} + g'(x) = \frac{1}{x} + \frac{y^2}{x^2} \quad\Rightarrow\quad g'(y) = \frac{-1}{x} \quad\Rightarrow\quad g(x) = \ln x + C$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-2y}{x} \quad\Rightarrow\quad f = \int \frac{-2y}{x}\,dy + g(x) = \frac{-y^2}{x} + g(x)$$

$$f(x,y) = \frac{-y^2}{x} + \ln x + C$$

2.6 EDOs lineales de primer orden

Las ecuaciones diferenciales lineales de primer orden se resuelven usando un factor integrante que permite escribir la ecuación como una derivada total, facilitando así la integración directa para encontrar la solución general.

La forma general es:

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)$$

Una EDO es lineal si la combinación lineal de soluciones también es solución. Si y_1, y_2 son soluciones $\quad\Rightarrow\quad \alpha y_1 + \beta y_2$ también es solución.

Hay dos tipos:

$$\text{Si } q(x) = 0 \quad\Rightarrow\quad \text{EDO homogénea}$$

$$\text{Si } q(x) \neq 0 \quad\Rightarrow\quad \text{EDO inhomogénea}$$

Es decir:

$$\frac{d}{dx}(\alpha y_1 + \beta y_2) + p(x)(\alpha y_1 + \beta y_2) = \alpha\frac{dy_1}{dx} + \beta\frac{dy_2}{dx} + \alpha p(x)y_1 + \beta p(x)y_2$$

$$= \alpha\left(\frac{dy_1}{dx} + p(x)y_1\right) + \beta\left(\frac{dy_2}{dx} + p(x)y_2\right) = (\alpha+\beta)q(x)$$

2.7 Homogénea q(x)=0

$$\frac{dy}{dx}+p(x)y=0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{y}=-p(x)\,dx \quad \Rightarrow \quad \ln y=-\int p(x)\,dx \quad \Rightarrow \quad y=Ce^{-\int p(x)\,dx}$$

2.8 Inhomogénea ($q(x)\neq 0$)

$$\frac{dy}{dx}+p(x)y=g(x)$$

$$y_g(x)=y_h(x)+y_p(x)$$

$$\frac{d}{dx}(y_h+y_p)+p(x)(y_h+y_p)=\frac{dy}{dx}+p(x)y=q(x)$$

Primero resuelvo la homogénea:

$$y_h=Ce^{-\int p(x)\,dx}$$

Luego la particular:

$$y_p=C(x)y_h \quad \Rightarrow \quad y_p=C(x)e^{-\int p(x)\,dx}$$

$$\frac{dy_p}{dx}+p(x)y_p=C'(x)y_h+C(x)+y_h'+p(x)y_h=q(x)$$

$$C(x)\int\frac{q(x)}{y_h(x)}\,dx+D \quad \Rightarrow \quad y_p=Dy_h+y_h\int\frac{q(x)}{y_h}\,dx$$

Ejemplo:

$$y'+2y=e^{-x}$$

Primero resolvemos la homogénea:

$$y'+2y=0 \quad \Rightarrow \quad \int\frac{dy}{y}=\int -2dx \quad \Rightarrow \quad \ln y=-2x$$

$$y_h=Ce^{-2x}$$

Ahora resolvemos la particular:

$$y_p = C(x)e^{-2x} \quad \Rightarrow \quad y'_p = C'(x)e^{-2x} - 2C(x)e^{-2x}$$

$$C'(x)e^{-2x} - 2C(x)e^{-2x} + 2C(x)e^{-2x} = e^{-x} \quad \Rightarrow \quad C''(x) = e^{x}$$

$$C'(x) = e^{x} \quad \Rightarrow \quad C(x) = \int e^{x} dx + D = e^{x} + D$$

La solución particular quedaría:

$$y_p = (e^{x} + D)e^{-2x} = e^{-x} + De^{-2x}$$

La solución general quedaría:

$$y_g = y_h + y_p = Ce^{-2x} + e^{-x} + De^{-2x} = Ae^{-2x} + e^{-x}$$

Ejemplo:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x\cos y + \operatorname{sen} 2y} \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{dy} = x\cos y + \operatorname{sen} 2y$$

$$\frac{dx}{dy} - x\cos y = \operatorname{sen} 2y \qquad \text{donde} \begin{cases} \cos y = p(y) \\ \operatorname{sen} 2y = q(y) \end{cases} \qquad \begin{array}{l} y' + p(x)\, y = g(x) \\ x' + p(y)\, x = g(y) \end{array}$$

Resolvemos la homogénea:

$$x'_h - x_h \cos y = 0 \;\Rightarrow\; \int \frac{dx_h}{x_h} = \int \cos y\, dy \;\Rightarrow\; \ln x_h = \operatorname{sen} y + D$$

$$x_h = e^{\operatorname{sen} y}$$

Resolvemos la particular:

$$x_p = C(y)e^{\operatorname{sen} y} \;\Rightarrow\; x'_p = C'(y)e^{\operatorname{sen} y} + C(y)\cos y\, e^{\operatorname{sen} y}$$

$$x'_p - y_p \cos y = \operatorname{sen}(2y)$$

$$C'(y)e^{\operatorname{sen} y} + C(y)\cos y\, e^{\operatorname{sen} y} - C(y)e^{\operatorname{sen} y}\cos y = \operatorname{sen} 2y$$

$$C'(y) = e^{\operatorname{sen} y} \;\Rightarrow\; C(y) = \int \operatorname{sen} 2y\, e^{-\operatorname{sen} y}\, dy = 2\int \cos y\, \operatorname{sen} y\, e^{-\operatorname{sen} y}\, dy$$

Hacemos un cambio de variable:

$$z = \operatorname{sen} y \ \Rightarrow \ dz = \cos y \, dy$$

$$2 \int \cos y \ \operatorname{sen} y \, e^{-\operatorname{sen} y} \, dy = 2 \int z \, e^{-z} \, dz$$

2.9 Método de los coeficientes indeterminados

Las ecuaciones diferenciales con coeficientes indeterminados se resuelven encontrando primero la solución general de la ecuación homogénea asociada y luego una solución particular para la parte no homogénea. Esta última se obtiene proponiendo una forma adecuada según el término independiente y determinando los coeficientes desconocidos.

Ecuaciones de la forma:

$$y' + py = g(x) \quad \rightarrow \quad p = \text{cte}$$

Donde $p(x)$ es "sencilla", es decir, polinómica, exponencial o aritmética.

La solución general es:

$$y_g(x) = y_h(x) + y_p(x)$$

Ejemplo:

$$y' + 2y = e^{-x} \ \Rightarrow \ \begin{cases} p(x) = 2 \\ q(x) = e^{-x} \end{cases}$$

Ecuación homogénea:

$$y' + 2y = 0 \quad \Rightarrow \quad y_h = Ce^{-2x}$$

Solución particular:

$$y_p = Ae^{-x} \quad \Rightarrow \quad y_p' = -Ae^{-x} \quad \Rightarrow \quad y_p' + 2y_p = e^{-x}$$

Sustituyendo en la ecuación:

$$-Ae^{-x} + 2Ae^{-x} = e^{-x} \quad \Rightarrow \quad Ae^{-x} = e^{-x} \quad \Rightarrow \quad A = 1$$

Solución general:

$$y = y_h + y_p = Ce^{-2x} + e^{-x}$$

Ejemplo:

$$y' + y = x^2 + x + 1$$

Resolvemos la homogénea:

$$y' + y = 0 \quad \Rightarrow \quad y_h = Ce^{-x}$$

Buscamos la particular:

$$y_p = Ax^2 + Bx + C \quad \Rightarrow \quad y_p' = 2Ax + B$$

Sustituyendo:

$$2Ax + B + Ax^2 + Bx + C = x^2 + x + 1$$
$$Ax^2 + (2A + B)x + B + C = x^2 + x + 1$$

Igualando coeficientes:

$$\begin{cases} A = 1 \\ 2A + B = 1 \quad \Rightarrow \quad B = 0 \\ B + C = 1 \quad \Rightarrow \quad C = 1 \end{cases}$$

De aquí saco la ecuación particular:

$$y_p = x^2 + 2$$

Y la solución general:

$$y_g = y_h + y_p = Ce^{-x} + x^2 + 2$$

Ejemplo:

$$y' + y = \sin x$$

Primero resolvemos la homogénea:

$$y' + y = 0 \quad \Rightarrow \quad y_h = Ce^{x}$$

Ahora buscamos la particular:

$$y_p = A\sin x + B\cos x \quad \Rightarrow \quad y_p' = A\cos x - B\sin x$$

Sustituyendo:

$$A\cos x - B\sin x + A\sin x + B\cos x = \sin x$$

$$(A-B)\sin x + (A+B)\cos x = \sin x$$

Igualando coeficientes:

$$\begin{cases} A - B = 1 \\ A + B = 0 \end{cases}$$

Resolvemos el sistema:

$$\begin{cases} 2A = 1 \quad \Rightarrow \quad A = \frac{1}{2} \\ A = -B \quad \Rightarrow \quad B = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

La ecuación particular queda:

$$y_p = \tfrac{1}{2}\sin x - \tfrac{1}{2}\cos x$$

Y la ecuación general queda:

$$y = y_h + y_p = Ce^{-x} + \tfrac{1}{2}\sin x - \tfrac{1}{2}\cos x$$

2.10 EDO's de Bernoulli

Las ecuaciones de Bernoulli son no lineales pero pueden transformarse en lineales mediante un cambio de variable adecuado.

Son EDOs de la forma:

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)y^n \quad \text{donde } n \neq 0, 1$$

Se puede reducir a una EDO lineal haciendo un cambio de variable:

$$z = y^{1-n} \quad \Rightarrow \quad z' = (1-n)y^{-n}y'$$

$$y' = \frac{1}{1-n}y^n z' = \frac{1}{1-n}z' z^{\frac{n}{1-n}}$$

Sustituyendo en la ecuación original:

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)y^n \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{1-n} z' z^{\frac{n}{1-n}} + p(x) z^{\frac{1}{1-n}} = q(x) z^{\frac{n}{1-n}}$$

Multiplicando todo por $z^{(1-n)}$:

$$\frac{1}{1-n} z' + p(x)z = q(x)$$

Resultado: una EDO lineal.

Ejemplo

$$y' - xy = -xy^3 \quad \Rightarrow \quad \text{donde} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} p(x) = -x \\ q(x) = -x \end{cases}$$

Hacemos el cambio de variable:

$$z = \frac{1}{y^2} = y^{-2} \quad \Rightarrow \quad y = \frac{1}{\sqrt{z}} \quad \Rightarrow \quad y' = -\frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{z^3}} z'$$

Desarrollando:

$$-\frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{z^3}} z' - x \frac{1}{\sqrt{z}} = -x \frac{1}{\sqrt{z^3}}$$

Multiplicando por $\sqrt{z^3}$:

$$-\frac{1}{2} z' - xz = -x \quad \Rightarrow \quad z' + 2xz = 2x$$

Resolviendo la lineal que nos queda

$$z' + 2xz = 2x$$

Resolviendo la homogénea:

$$z_h' + 2xz_h = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dz}{z} = -2x\,dx$$

Integrando:

$$\int \frac{dz}{z} = \int -2x\,dx \quad \Rightarrow \quad \ln z = -x^2$$

$$z_h = Ce^{-x^2}$$

Resolviendo la particular:

$$z_p = Ce^{-x^2} \quad \Rightarrow \quad z_p' = C'(x)e^{-x^2} - 2xCe^{-x^2}$$

Sustituyendo y resolviendo:

$$C'(x)e^{-x^2} - 2xC(x)e^{-x^2} + 2xC(x)e^{-x^2} = 2x$$

$$C(x) = \int 2xe^{x^2}\,dx = e^{x^2}$$

$$z_p = e^{x^2}e^{-x^2} = \frac{e^{x^2}}{e^{x^2}} = 1$$

2.11 EDO's de solución paramétrica

Las ecuaciones diferenciales paramétricas se resuelven expresando la solución en función de un parámetro auxiliar. Este parámetro permite transformar la ecuación original en una o varias más sencillas, que al resolverse proporcionan la solución en forma paramétrica.

Son del tipo:

$$\begin{cases} x = x(p) \\ y = y(p) \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \text{es una curva de forma paramétrica.}$$

Ejemplo:

$$y' = p$$

$$y' = 2x \quad \Rightarrow \quad y = x^2$$

Si pasamos a forma paramétrica:

$$x(p) = \frac{p}{2}, \quad y(p) = \frac{p^2}{4}$$

1. EDO's del tipo F(y, y') = 0

1.1

$$y' = g(y) = \frac{dx}{dx} \quad \Rightarrow \quad \int \frac{1}{g(y)}\, dy = \int dx$$

1.2 (Las importantes)

$$y = g(y') \quad \Rightarrow \quad y = g(p)$$

$$\begin{cases} p = y' \quad \Rightarrow \quad \dfrac{dy}{dx} = p \quad \Rightarrow \quad dy = p\, dx \\ y = g(p) \quad \Rightarrow \quad \dfrac{d}{dp} \quad \Rightarrow \quad dy = g'(p)\, dp \end{cases}$$

Lo que resulta en:

$$x = \int \frac{g'(p)}{p}\, dp + C$$

Ejemplo:

$$y = (y')^2 + (y')^3 \quad \Rightarrow \quad \text{donde} \quad \Rightarrow \quad y' = p = dy/dx$$

$$y = p^2 + p^3 \quad \Rightarrow \quad dy = (2p + 3p^2)\, dp = pdx$$

$$\int (2 + 3p)\, dp = \int dx \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x(p) = 2p + \frac{3}{2}p^2 \\ y(p) = p^2 + p^3 \end{cases}$$

2. EDO's del tipo F(x, y') = 0

2.1

$$y' = g(x) \quad \Rightarrow \quad y = \int g(x)\, dx + C$$

2.2

$$x = g(y') \quad \Rightarrow \quad p = y' \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = p \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{p} = dx$$

$$x = g(p) \quad \Rightarrow \quad dx = g'(p)dp = \frac{dy}{p}$$

$$y = \int p\, g'(p)\, dp + C \quad ; \quad x(p) = g(p)$$

Ejemplo:

$$x = ay' + by'^2 \quad ; \quad y' = p \quad \Rightarrow \quad x = ap + bp^2$$

donde a, b son constantes.

$$dx = (a + 2bp)\, dp = \frac{dy}{p} \quad \Rightarrow \quad y = \int (ap + 2bp^2)\, dp$$

$$\begin{cases} y(p) = \frac{a}{2}p^2 + \frac{2b}{3}p^3 + C \\ x(p) = ap + bp^2 \end{cases}$$

2.12 EDO´s de Lagrange

Las ecuaciones de Lagrange tienen la forma $y = x\, f(p) + g(p)$, donde $p = y'$. Se resuelven tratando p como variable independiente y expresando x y y en función de p. Esto permite reducir la ecuación a una forma paramétrica más sencilla que puede integrarse directamente.

$$y = xf(y') + g(y') \quad \text{donde establecemos que} \quad y' = p.$$

$$y = xf(p) + g(p) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} dy = dxf(p) + xf'(p)\, dp + g'(p)\, dp \\ dy = p\, dx \end{cases}$$

$$\frac{dx}{dp}[f(p) - p] + xf'(p) + g'(p) = 0$$

Multiplico todo por dp:

$$dx f(p) + x f'(p)\,dp + g'(p)\,dp = p dx$$

$$dx[f(p) - p] + x f'(p)\,dp + g'(p)\,dp$$

$$\frac{dx}{dp}[f(p) - p] + x f'(p) + g'(p) = 0$$

Divido todo por $f(p) - p$:

$$\frac{dx}{dp} + \frac{f'(p)}{f(p) - p} x = -\frac{g'(p)}{f(p) - p} \quad \Rightarrow \quad \text{EDO lineal para } x(p)$$

Donde:

$$\begin{cases} P(p) = \frac{f'(p)}{f(p)-p} \\ Q(p) = -\frac{g'(p)}{f(p)-p} \end{cases}$$

$$y(p,c) = x(p,c) f(p) + g(p)$$

Ejemplo:

$$y = 2xy' + \ln y$$

Hacemos el cambio:

$$p = y' \quad ; \quad y = 2xp + \ln p \quad \Rightarrow \quad dy = 2p\,dx + 2x\,dp + \frac{dp}{p} = p dx$$

$$p\,dx + (2x + \frac{1}{p})\,dp = 0 \quad \Rightarrow \quad p\frac{dx}{dp} + 2x + \frac{1}{p} = 0$$

$$\frac{dx}{dp} + \frac{2x}{p} = -\frac{1}{p^2}$$

Resolvemos la EDO homogénea:

$$\frac{dx}{dp} + \frac{2x}{p} = 0$$

$$\frac{dx}{x} = -\frac{2\,dp}{p} \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dx}{2x} = \int -\frac{dp}{p} \quad \Rightarrow \quad \ln x = -2\ln p + a$$

$$x(p) = \frac{C}{p^2}$$

Resolvemos la solución particular:

$$x(p) = \frac{C(p)}{p^2} \quad \Rightarrow \quad x'(p) = \frac{C'(p)}{p^2} - \frac{2C(p)}{p^3}$$

$$\frac{C'(p)}{p^2} - \frac{2C(p)}{p^3} + \frac{2C(p)}{p^3} = -\frac{1}{p^2}$$

$$C'(p) = 1 \quad \Rightarrow \quad C(p) = p$$

$$x_p = \frac{p}{p^2} = \frac{1}{p}$$

Solución general:

$$y_g = \frac{C}{p^2} + \frac{1}{p} \quad \rightarrow \quad x(p) = \frac{C}{p^2} + \frac{1}{p} \quad ; \quad y = 2xy' + \ln y'$$

$$y = 2\left(\frac{C}{p^2} + \frac{1}{p}\right)p + \ln p = 2\left(\frac{C}{p} + 1\right) + \ln p$$

2.13 EDO's de Clairaut

Las ecuaciones de Clairaut tienen la forma $y = x\,y' + f(y')$. Se resuelven derivando la ecuación y eliminando la variable y' para obtener la solución general. Además, pueden presentar una solución singular que se obtiene al resolver simultáneamente la ecuación original y su derivada respecto a y'.

Se hace el cambio de variable:

$$y' = p$$

$$y = xp + g(p) = xp + g(p)$$

Entonces:

$$\begin{cases} dy = p\,dx \\ dy = p\,dx + x\,dp + g'(p)\,dp \end{cases}$$

$$p\,dx = p\,dx + x\,dp + g'(p)\,dp = 0 \quad \Rightarrow \quad (x + g'(p))dp = 0$$

Posibles soluciones:

- Si $x + g'(p) = 0$:

$$x = g'(p), \text{despejo p} \quad \Rightarrow \quad y = y(x) \quad (soluci\acute{o}nsingular).$$

- Si $dp = 0$:

$$p = \text{cte} = C \quad \Rightarrow \quad y = Cx + g(C) \quad (soluci\acute{o}ngeneral).$$

3. Ejercicios hoja 1

3.1 Ejercicio 1

$$y' \sin x - y \cos x = 0 \quad ; \quad y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \quad \rightarrow \quad \text{condición}$$

Identificamos que se trata de una edo de variables separables, por lo tanto resolvemos separando las variables:

$$y' = y\frac{\cos x}{\sin x}$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{\cos x}{\sin x}dx \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dy}{y} = \int \frac{\cos x}{\sin x}\,dx$$

Hacemos el cambio de variable para resolver la integral con u = sin x:

$$u = \sin x$$

$$du = \cos x\,dx$$

$$\ln|y| = \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C$$

$$y = C\sin x \quad \rightarrow \quad y = \sin x$$

3.2 Ejercicio 11

$$x + y - 2 + (1-x)y' = 0 \quad ; \quad \forall x \neq 0$$

$$y' + \frac{y}{1-x} = \frac{2-x}{1-x}$$

Ecuación homogénea:

$$y_h' + \frac{y}{1-x} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-y}{1-x}$$

Integrando:

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{-1+x}$$

$$\ln y = \ln(x-1) + \ln C$$

$$y_h = C(x-1)$$

Sacamos una solución particular:

$$y_p = C(x)(x-1) \quad \Rightarrow \quad y_p' = C'(x)(x-1) + C(x)$$

$$C'(x)(x-1) + C(x) = \frac{2-x}{1-x}$$

$$C'(x)(x-1)^2 = \frac{2-x}{1-x}(1-x)^2$$

$$C'(x) = \frac{2-x}{(1-x)^2}$$

$$C(x) = \int \frac{2-x}{(1-x)^2}\, dx$$

Hacemos el cambio de variable $u = 1 - x$:

$$u = 1 - x \quad du = -dx$$

$$C(x) = \int \frac{u+1}{u^2}\, du = \int \frac{du}{u} + \int \frac{du}{u^2} = \ln u - \frac{1}{u} + D$$

$$C(x) = \ln(1-x) + \frac{1}{x-1} + D$$

$$y_p = C(x)(x-1) = \ln(1-x) + \frac{1}{x-1} + D$$

12.)

$$8x + 4y + 1 + (4x + 2y + 1)y' = 0$$

Reescribimos la ecuación:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-8x - 4y - 1}{4x + 2y + 1}$$

$$y' = \frac{-8x - 4y - 1}{4x + 2y + 1} \quad \Rightarrow \quad z = 4x + 2y + 1$$

$$\frac{dz}{dx} = 4 + 2y'$$

$$y' = \frac{1}{2}\frac{dz}{dx} - 2$$

$$\frac{1}{2}\frac{dz}{dx} - 2 = \frac{-2z + 1}{z}$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{-4z + 2}{z} + 4$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{-4z + 2 + 4z}{z} = \frac{2}{z}$$

$$z\,dz = 2dx$$

$$\int z\,dz = \int 2dx$$

$$\frac{z^2}{2} = 2x + C$$

Deshacemos el cambio de variable:

$$(4x + 2y + 1)^2 = 4x + C$$

$$16x^2 + 16xy + 4x + 4y^2 + 4y + 1 = 4x + C$$

$$4x^2 + 4xy + y^2 + 2y + \frac{1}{4} = C$$

—

13.

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dy + \frac{1}{y}dx + \frac{x}{y^2}dy = 0$$

Comprobamos que sea exacta:

$$M = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{1}{y}$$

$$N = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{x}{y^2}$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \ldots \quad \frac{\partial N}{\partial x} = \ldots$$

Si es exacta:

$$g(x,y) = \int M\,dx + C$$

$$\int M\,dx = \int \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}dx + \int \frac{1}{y}dx$$

$$u = x^2 + y^2 \quad du = 2x\,dx$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}dx = \sqrt{x^2+y^2}$$

$$\int \frac{1}{y}dx = \frac{x}{y}$$

$$g(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} + \frac{x}{y} + C$$

$$|x| + \frac{x}{y} + \sqrt{x^2+y^2} + C = 0$$

15.

$$(x-y)dx + x\,dy = 0$$

$$M = x - y \quad N = x$$

Comprobamos si es exacta:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -1 \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 1 \quad \Rightarrow \quad \text{No es exacta}$$

Buscamos un factor integrante:

$$\mu' : \frac{\partial_y M - \partial_x N}{N} = \frac{-1-1}{x} = \frac{-2}{x} \quad \Rightarrow \quad \mu = \mu(x)$$

$$\int d\mu = \int \frac{-2}{x} dx \quad \Rightarrow \quad \ln|\mu| = -2\ln|x| + C \quad \Rightarrow \quad \mu = \frac{C}{x^2}$$

Multiplicamos la ecuación original por μ:

$$\frac{C}{x^2}(x-y)dx + \frac{C}{x^2}x\,dy = 0$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -\frac{1}{x^2} \quad \frac{\partial N}{\partial x} = -\frac{1}{x^2}$$

Ahora es exacta:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{y}{x^2} + g'(y)$$

$$M = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{-y}{x^2} + g'(y) = \frac{1}{x} - \frac{y}{x^2}$$

$$g'(y) = \frac{1}{x} \quad g(y) = \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + D$$

$$f(x,y) = \frac{y}{x} + \ln|x| + D$$

16.

$$(x^4 \ln x - 2xy^3)dx + 3x^2y^2dy = 0$$

Comprobamos si es exacta:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -6xy^2 \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 6xy^2 \quad \Rightarrow \quad \text{No es exacta}$$

$$\frac{\partial_y M - \partial_x N}{N} = \frac{-6xy^2 - 6xy^2}{3x^2y^2} = -\frac{4}{x}$$

$$\mu = \mu(x) \quad \ln \mu = -4 \ln x \quad \Rightarrow \quad \mu = \frac{C}{x^4}$$

Multiplicamos por μ:

$$\frac{\ln x}{x^4} dx - \frac{2y^3}{x^3} dx + \frac{3y^2}{x^2} dy = 0$$

Comprobamos si ahora es exacta:

$$M = \ln x - \frac{2y^3}{x^3} \qquad N = \frac{3y^2}{x^2}$$

Hacemos las parciales:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -\frac{6y^2}{x^3} \quad \frac{\partial N}{\partial x} = -\frac{6y^2}{x^3}$$

Es exacta.

$$\int M\,dx = \int \ln x\,dx - \int \frac{2y^3}{x^3}\,dx$$

$$g'(y) = \int \frac{3y^2}{x^2}\,dy = \frac{y^3}{x^2}$$

$$g(y) = \int \ln x\,dx$$

$$g(y) = x(\ln x - 1)$$

$$f(x,y) = \frac{y^3}{x^2} + x(\ln x - 1) + D$$

—

22.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}, \quad y(0) = 0$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\ln|y| = \ln|x| + C$$

$$y = Cx$$

$\Rightarrow$ Familia de rectas que pasan por $(0, 0)$.
En el caso de $y(0) = 1$:

$$1 = C \cdot 0 = 0$$

No existe solución.
$\Rightarrow$ No está en la familia de curvas.
—