

# Apuntes de Variable Compleja

Luis López

Septiembre 2025

# Índice

<b>1. Números complejos</b>	<b>4</b>
1.1. Teoría y estructura elemental . . . . .	4
1.2. Introducción elemental . . . . .	4
1.3. Propiedades elementales . . . . .	4
1.4. Forma polar y geometría de los números complejos . . . . .	5

## Introducción

Los **números complejos**, denotados por  $\mathbb{C}$ , constituyen una extensión de los números reales  $\mathbb{R}$ , cumpliéndose que  $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ . A diferencia de los reales, los complejos forman un *cuerpo algebraicamente cerrado*, lo que significa que todo polinomio con coeficientes complejos admite todas sus raíces en  $\mathbb{C}$ .

Todo número complejo puede escribirse como

$$z = x + iy,$$

donde  $x, y \in \mathbb{R}$  e  $i$  es la unidad imaginaria ( $i^2 = -1$ ). También pueden representarse en *forma polar*, mediante su módulo y argumento.

El conjunto  $\mathbb{C}$  no solo es fundamental en álgebra y análisis, sino que resulta indispensable en múltiples áreas de las matemáticas aplicadas y la física. Asimismo, los números complejos son herramientas habituales en ingeniería.

# 1. Números complejos

## 1.1 Teoría y estructura elemental

La imposibilidad de resolver ciertas ecuaciones con números reales nos obliga a introducir los **números imaginarios**, definidos a partir de la unidad  $i$  tal que

$$i^2 = -1.$$

## 1.2 Introducción elemental

Denotamos los números complejos como

$$\mathbb{C} = \{z = a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}\}.$$

Dado  $z = a + bi \in \mathbb{C}$ , se definen:

- Parte real:  $\Re(z) = a \in \mathbb{R}$ .
- Parte imaginaria:  $\Im(z) = b \in \mathbb{R}$ .
- Módulo:  $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ .
- Conjugado:  $\bar{z} = a - bi$ .

**Ejemplo.** Sea  $z = 1 - 2i$ . Entonces:

$$\Re(1 - 2i) = 1, \quad \Im(1 - 2i) = -2, \quad \overline{1 - 2i} = 1 + 2i, \quad |1 - 2i| = \sqrt{1^2 + (-2)^2} = \sqrt{5}.$$

## 1.3 Propiedades elementales

1.  $\bar{\bar{z}} = z$ . Demostración: si  $z = a + bi \Rightarrow \bar{z} = a - bi \Rightarrow \bar{\bar{z}} = a + bi = z$ .
2.  $z + \bar{z} = 2\Re(z)$ .
3.  $z - \bar{z} = 2i\Im(z)$ .
4.  $|\bar{z}| = |z|$ .
5.  $\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z'}$ .
6.  $\overline{z \cdot z'} = \bar{z} \cdot \bar{z'}$ .

Además, tenemos las siguientes propiedades asociadas al **módulo**:

1.  $|\Re(z)| \leq |z|$ .

2.  $|\Im(z)| \leq |z|$ . En efecto,  $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} \geq |b|$ .
3. **Desigualdad triangular:**  $|z + w| \leq |z| + |w| \quad \forall z, w \in \mathbb{C}$ .
4.  $z \cdot \bar{z} = |z|^2$ .
5. **Desigualdad triangular inversa:**  $||z| - |z'|| \leq |z - z'|$ .

Todas estas propiedades, junto con la suma y producto de números complejos, generalizan las propiedades de los números reales:

$$z + z' = (x + iy) + (x' + iy') = (x + x') + (y + y')i \in \mathbb{C},$$

$$z \cdot z' = (x + iy)(x' + iy') = (xx' - yy') + (xy' + x'y)i \in \mathbb{C}.$$

En particular, si  $z = a + bi$ , se cumple que

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2},$$

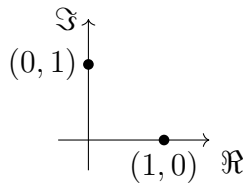
es decir, el módulo de  $z$  coincide con el valor absoluto en los reales.

#### 1.4 Forma polar y geometría de los números complejos

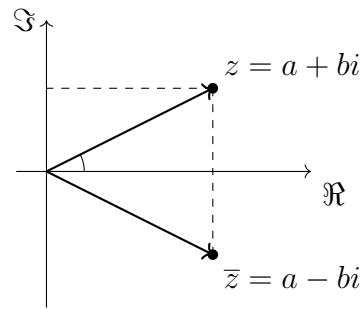
El conjunto  $\mathbb{C}$  se puede representar como  $\mathbb{R}^2$  mediante la asignación

$$z = a + bi \longmapsto (a, b) \in \mathbb{R}^2.$$

De esta forma obtenemos el denominado **plano complejo**; por lo tanto, la interpretación geométrica de *todo lo visto* sería:



Representación de 1 e  $i$



Geometría de  $z$  y  $\bar{z}$

Si  $z = \frac{|z|}{|z|}z = |z|\frac{z}{|z|} = |z|(\cos \theta + i \sin \theta)$ , decimos que  $z$  está en **forma polar**.

Sea:

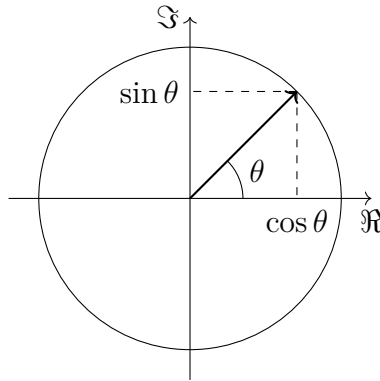
$$w = \frac{z}{|z|} \Rightarrow |w| = \frac{|z|}{|z|} = 1.$$

Es decir,  $\frac{z}{|z|}$  es un número complejo de módulo 1, luego existe  $\theta \in \mathbb{R}$  tal que

$$\frac{z}{|z|} = \cos \theta + i \sin \theta.$$

**Ejemplo.** El número complejo  $1 + i$  en forma polar es:

$$1 + i = \sqrt{2} \left( \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right).$$



Circunferencia unitaria:  $w = \cos \theta + i \sin \theta$

Vemos que un mismo número complejo tiene infinitas representaciones polares por culpa del ángulo  $\theta$ , llamado **argumento de  $z$** . Para solucionar este problema introducimos el **argumento principal** de  $z$ , que es aquel ángulo  $-\pi < \theta \leq \pi$  que verifica:

$$z = |z|(\cos \theta + i \sin \theta), \quad \theta = \arg(z).$$

Además, si  $z = x + iy$ , entonces:

$$\arg(z) = \begin{cases} \arctan\left(\frac{y}{x}\right), & x > 0, y \geq 0, \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi, & x < 0, y \geq 0, \\ \pi, & x < 0, y = 0, \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) - \pi, & x < 0, y < 0, \\ -\frac{\pi}{2}, & x = 0, y < 0, \\ \frac{\pi}{2}, & x = 0, y > 0, \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right), & x > 0, y < 0. \end{cases}$$

Nótese que se verifica que

$$\arg(z) = \arg(z) + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Así, geométricamente, un número complejo  $z$  tendría esta información:

$$z = |z|e^{i\arg(z)}.$$

Al tener el módulo de cualquier complejo podemos hablar de la noción de distancia entre complejos, dada por:

$$d(z, w) = |z - w|.$$

**Definición.** El disco centrado en  $z_0 \in \mathbb{C}$  y de radio  $\varepsilon > 0$  es:

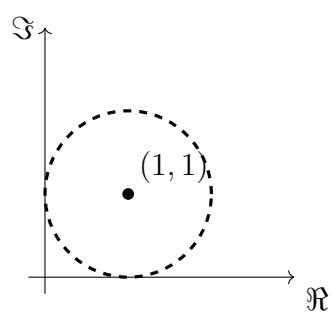
$$D(z_0, \varepsilon) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < \varepsilon\}.$$

**Ejemplo.**

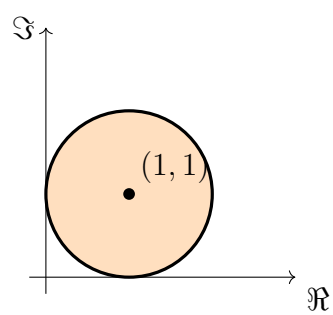
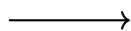
$$D(1 + i, 1) = \{z \in \mathbb{C} : |z - (1 + i)| < 1\}.$$

El disco cerrado se denota por:

$$\overline{D}(z_0, \varepsilon) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq \varepsilon\}.$$



Disco abierto  $D(1 + i, 1)$



Disco cerrado  $\overline{D}(1 + i, 1)$