

Apuntes de Variable Compleja

Luis López

Septiembre 2025

Índice

1. Números complejos	4
1.1. Teoría y estructura elemental	4
1.2. Introducción elemental	4
1.3. Propiedades elementales	4
1.4. Forma polar y geometría de los números complejos	5
1.5. Forma exponencial y multiplicación de números complejos	8
1.6. Ejemplo: cálculo en forma exponencial	10
1.7. Raíces de números complejos	10
2. Teoría de las funciones de variable compleja	11
2.1. Límites y continuidad de funciones complejas	12
2.2. Continuidad	14
2.3. Derivación de funciones complejas	15

Introducción

Los **números complejos**, denotados por \mathbb{C} , constituyen una extensión de los números reales \mathbb{R} , cumpliéndose que $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. A diferencia de los reales, los complejos forman un *cuerpo algebraicamente cerrado*, lo que significa que todo polinomio con coeficientes complejos admite todas sus raíces en \mathbb{C} .

Todo número complejo puede escribirse como

$$z = x + iy,$$

donde $x, y \in \mathbb{R}$ e i es la unidad imaginaria ($i^2 = -1$). También pueden representarse en *forma polar*, mediante su módulo y argumento.

El conjunto \mathbb{C} no solo es fundamental en álgebra y análisis, sino que resulta indispensable en múltiples áreas de las matemáticas aplicadas y la física. Asimismo, los números complejos son herramientas habituales en ingeniería.

1. Números complejos

1.1 Teoría y estructura elemental

La imposibilidad de resolver ciertas ecuaciones con números reales nos obliga a introducir los **números imaginarios**, definidos a partir de la unidad i tal que

$$i^2 = -1.$$

1.2 Introducción elemental

Denotamos los números complejos como

$$\mathbb{C} = \{z = a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}\}.$$

Dado $z = a + bi \in \mathbb{C}$, se definen:

- Parte real: $\Re(z) = a \in \mathbb{R}$.
- Parte imaginaria: $\Im(z) = b \in \mathbb{R}$.
- Módulo: $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.
- Conjugado: $\bar{z} = a - bi$.

Ejemplo: Sea $z = 1 - 2i$. Entonces:

$$\Re(1 - 2i) = 1, \quad \Im(1 - 2i) = -2, \quad \overline{1 - 2i} = 1 + 2i, \quad |1 - 2i| = \sqrt{1^2 + (-2)^2} = \sqrt{5}.$$

1.3 Propiedades elementales

1. $\bar{\bar{z}} = z$. Demostración: si $z = a + bi \Rightarrow \bar{z} = a - bi \Rightarrow \bar{\bar{z}} = a + bi = z$.
2. $z + \bar{z} = 2\Re(z)$.
3. $z - \bar{z} = 2i\Im(z)$.
4. $|\bar{z}| = |z|$.
5. $\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z'}$.

$$6. \overline{z \cdot z'} = \bar{z} \cdot \bar{z'}.$$

Además, tenemos las siguientes propiedades asociadas al **módulo**:

1. $|\Re(z)| \leq |z|$.
2. $|\Im(z)| \leq |z|$. En efecto, $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} \geq |b|$.
3. **Desigualdad triangular:** $|z + w| \leq |z| + |w| \quad \forall z, w \in \mathbb{C}$.
4. $z \cdot \bar{z} = |z|^2$.
5. **Desigualdad triangular inversa:** $||z| - |z'|| \leq |z - z'|$.

Todas estas propiedades, junto con la suma y producto de números complejos, generalizan las propiedades de los números reales:

$$z + z' = (x + iy) + (x' + iy') = (x + x') + (y + y')i \in \mathbb{C},$$

$$z \cdot z' = (x + iy)(x' + iy') = (xx' - yy') + (xy' + x'y)i \in \mathbb{C}.$$

En particular, si $z = a + bi$, se cumple que

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2},$$

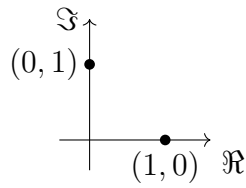
es decir, el módulo de z coincide con el valor absoluto en los reales.

1.4 Forma polar y geometría de los números complejos

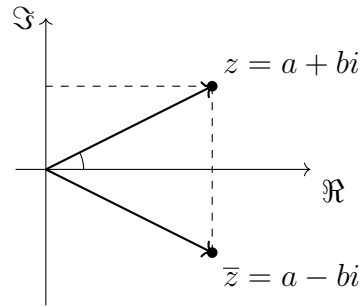
El conjunto \mathbb{C} se puede representar como \mathbb{R}^2 mediante la asignación

$$z = a + bi \longmapsto (a, b) \in \mathbb{R}^2.$$

De esta forma obtenemos el denominado **plano complejo**; por lo tanto, la interpretación geométrica de *todo lo visto* sería:



Representación de 1 e i



Geometría de z y \bar{z}

Si $z = \frac{|z|}{|z|} z = |z| \frac{z}{|z|} = |z|(\cos \theta + i \sin \theta)$, decimos que z está en **forma polar**.

Sea:

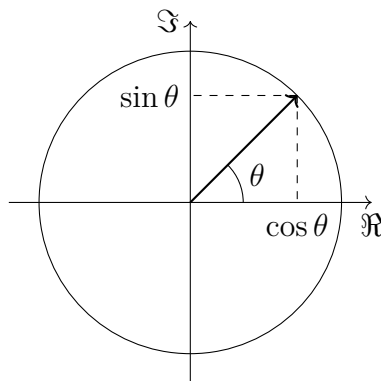
$$w = \frac{z}{|z|} \Rightarrow |w| = \frac{|z|}{|z|} = 1.$$

Es decir, $\frac{z}{|z|}$ es un número complejo de módulo 1, luego existe $\theta \in \mathbb{R}$ tal que

$$\frac{z}{|z|} = \cos \theta + i \sin \theta.$$

Ejemplo: El número complejo $1 + i$ en forma polar es:

$$1 + i = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right).$$



Circunferencia unitaria: $w = \cos \theta + i \sin \theta$

Vemos que un mismo número complejo tiene infinitas representaciones polares por culpa del ángulo θ , llamado **argumento de z** . Para solucionar este problema

introducimos el **argumento principal** de z , que es aquel ángulo $-\pi < \theta \leq \pi$ que verifica:

$$z = |z|(\cos \theta + i \sin \theta), \quad \theta = \arg(z).$$

Además, si $z = x + iy$, entonces:

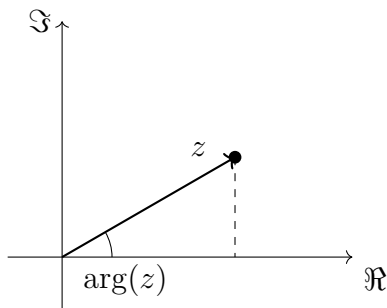
$$\arg(z) = \begin{cases} \arctan\left(\frac{y}{x}\right), & x > 0, y \geq 0, \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi, & x < 0, y \geq 0, \\ \pi, & x < 0, y = 0, \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) - \pi, & x < 0, y < 0, \\ -\frac{\pi}{2}, & x = 0, y < 0, \\ \frac{\pi}{2}, & x = 0, y > 0, \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right), & x > 0, y < 0. \end{cases}$$

Nótese que se verifica que

$$\arg(z) = \arg(z) + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Así, geométricamente, un número complejo z tendría esta información:

$$z = |z|e^{i \arg(z)}.$$



Argumento de z .

Al tener el módulo de cualquier complejo podemos hablar de la noción de

distancia entre complejos, dada por:

$$d(z, w) = |z - w|.$$

Definición. El disco centrado en $z_0 \in \mathbb{C}$ y de radio $\varepsilon > 0$ es:

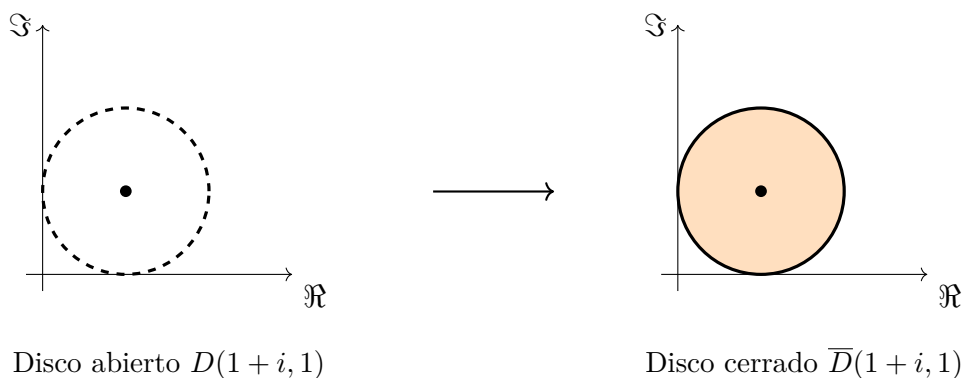
$$D(z_0, \varepsilon) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < \varepsilon\}.$$

Ejemplo:

$$D(1 + i, 1) = \{z \in \mathbb{C} : |z - (1 + i)| < 1\}.$$

El disco cerrado se denota por:

$$\overline{D}(z_0, \varepsilon) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq \varepsilon\}.$$



1.5 Forma exponencial y multiplicación de números complejos

Por conveniencia, escribimos

$$\cos \theta + i \sin \theta = e^{i\theta}.$$

Así, la forma polar $z = |z|(\cos \theta + i \sin \theta)$ se expresa como

$$z = |z| e^{i\theta}.$$

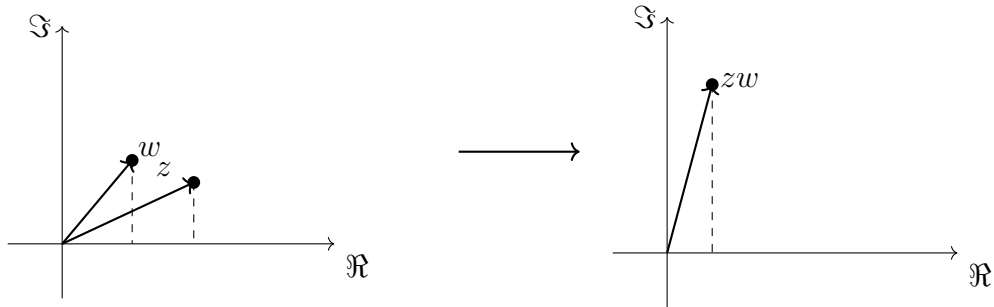
Esta representación hace muy sencilla la multiplicación de complejos. En efecto,

si:

$$z = r e^{i\theta}, \quad w = \rho e^{i\varphi} \quad (r, \rho \geq 0),$$

entonces:

$$z w = (r\rho) e^{i(\theta+\varphi)}.$$



Multiplicación en forma polar (solo vectores).

En particular,

$$|zw| = |z| |w|, \quad \arg(zw) = \arg(z) + \arg(w) \quad (\text{mód } 2\pi).$$

Nota. En general es *falso* que

$$\arg(zw) = \arg(z) + \arg(w),$$

pues \arg es el argumento principal (restringido a $(-\pi, \pi]$) y puede requerir ajustar por múltiplos de 2π .

Ejemplo.

$$\arg(i) = \frac{\pi}{2}, \quad \arg(-i) = -\frac{\pi}{2},$$

mientras que

$$\arg(i) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad \arg(-i) = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Potencias (fórmula de De Moivre). Si $z = r e^{i\theta}$ y $n \in \mathbb{N}$, entonces:

$$z^n = r^n e^{in\theta}.$$

1.6 Ejemplo: cálculo en forma exponencial

Ejemplo: Calcular $(1+i)^4$.

$$1+i = \sqrt{2} e^{i\pi/4} \Rightarrow (1+i)^4 = (\sqrt{2})^4 e^{i\pi} = 4 \cdot (-1) = -4,$$

llegamos a:

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

(Fórmula de Euler, considerada la más bonita de las matemáticas).

1.7 Raíces de números complejos

Queremos estudiar qué números complejos cumplen la ecuación $z^n = w$ para un $n \geq 2$, $w \in \mathbb{C}$.

Proposición. Dado un número complejo no nulo $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ y $n \geq 2$, existen exactamente n números complejos que cumplen $z^n = w$. Si

$$w = r e^{i\theta} \quad (r > 0, \theta \in \mathbb{R}),$$

entonces las soluciones son

$$z_k = r^{1/n} e^{i(\theta+2k\pi)/n}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1,$$

que son los vértices de un n -gono regular centrado en el origen.

Demostración. Si $z = \rho e^{i\varphi}$, entonces $z^n = \rho^n e^{in\varphi}$. Imponiendo $z^n = w = r e^{i\theta}$ se obtiene $\rho^n = r \Rightarrow \rho = r^{1/n}$ y $n\varphi = \theta + 2k\pi \Rightarrow \varphi = (\theta + 2k\pi)/n$.

Definición. El conjunto de las raíces n -ésimas de w es

$$\sqrt[n]{w} := \left\{ r^{1/n} e^{i(\theta+2k\pi)/n} : k = 0, \dots, n-1 \right\}.$$

Por abuso, se llama *raíz n -ésima principal* de w a

$$\sqrt[n]{w}_{\text{pr}} := r^{1/n} e^{i \arg(w)/n},$$

donde $\arg(w) \in (-\pi, \pi]$ es el argumento principal.

Ejemplo. Resolver $z^3 = -8i$.

$$-8i = 8 e^{-i\pi/2} \quad \Rightarrow \quad z_k = 2 e^{i(-\pi/2 + 2k\pi)/3}, \quad k = 0, 1, 2.$$

Explícitamente:

$$z_0 = 2e^{-i\pi/6} = \sqrt{3} - i, \quad z_1 = 2e^{i\pi/2} = 2i, \quad z_2 = 2e^{i7\pi/6} = -\sqrt{3} - i.$$

La raíz cúbica *principal* es $2e^{-i\pi/6}$.

Notas.

- $(z_k)^n = w$ para todo k , y $z_k = z_0 e^{i2k\pi/n}$.
- $\sqrt[n]{w}$ denota un *conjunto*; la notación de raíz *principal* usa $\arg(w)$.

2. Teoría de las funciones de variable compleja

Estudiaremos funciones de la forma $f : A \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$.

Parte real e imaginaria. Si $z = x + iy$, toda función f puede escribirse como

$$f(z) = u(x, y) + i v(x, y),$$

donde $u = \Re f$ y $v = \Im f$.

Ejemplos.

$$\begin{aligned} f(z) = z^2 = (x + iy)^2 = (x^2 - y^2) + i(2xy) &\Rightarrow u(x, y) = x^2 - y^2, \quad v(x, y) = 2xy, \\ f(z) = \bar{z} = x - iy &\Rightarrow u(x, y) = x, \quad v(x, y) = -y. \end{aligned}$$

2.1 Límites y continuidad de funciones complejas

Definición. Sea f definida en un conjunto $A \subset \mathbb{C}$, $f : A \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$. Diremos que el límite de f cuando z tiende a z_0 es $w \in \mathbb{C}$ si

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ tal que } 0 < |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - w| < \varepsilon.$$

Se denota por $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w$.

Proposición. Sean f, g dos funciones tales que $f, g : A \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ y existen $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w$ y $\lim_{z \rightarrow z_0} g(z) = \ell$. Entonces:

1. $\lim_{z \rightarrow z_0} (f(z) + g(z)) = \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) + \lim_{z \rightarrow z_0} g(z) = w + \ell$.
2. $\lim_{z \rightarrow z_0} (f(z) g(z)) = \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) \cdot \lim_{z \rightarrow z_0} g(z) = w \ell$.
3. Si $\ell \neq 0$, entonces $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{w}{\ell}$.

Proposición.

$$\exists \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w \iff \exists \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} (u(x, y) + i v(x, y)) = a + ib$$

equivalentemente

$$\begin{cases} \exists \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} u(x, y) = a, \\ \exists \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} v(x, y) = b. \end{cases}$$

Demostración.

$$\exists \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = a+bi = w \iff \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : 0 < |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - (a+bi)| < \varepsilon.$$

Analicemos lo siguiente:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} u(x,y) = a \iff \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : 0 < \|(x,y)-(x_0,y_0)\| < \delta \Rightarrow |u(x,y)-a| < \varepsilon.$$

En efecto,

$$|u(x,y)-a| = \left| u(x,y)-a+i(v(x,y)-b)-i(v(x,y)-b) \right| \leq |f(z)-(a+bi)| < \varepsilon,$$

y análogamente para la parte imaginaria $v(x,y)$. Además,

$$0 < |z-z_0| < \delta \iff 0 < |x+iy-(x_0+iy_0)| < \delta \iff 0 < \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta.$$

La parte imaginaria es análoga. \square

Ejemplo: Analicemos $\lim_{z \rightarrow 2i} z^2$. Como

$$(x+iy)^2 = (x^2-y^2) + i(2xy),$$

se tiene

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,2)} (x^2-y^2) = -4, \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,2)} 2xy = 0,$$

luego $\lim_{z \rightarrow 2i} z^2 = -4$.

Ejemplo (analítico por definición): Probemos por ε - δ que $\lim_{z \rightarrow 2i} z^2 = -4$.

Sea $\varepsilon > 0$. Observamos

$$|z^2 - (2i)^2| = |z-2i| |z+2i| \leq |z-2i| (|z-2i| + |4i|) = |z-2i| (|z-2i| + 4).$$

Si imponemos $0 < |z-2i| < \delta$ y además $\delta \leq 1$, entonces

$$|z^2 - (2i)^2| < \delta(\delta + 4) \leq 5\delta.$$

Eligiendo

$$\delta = \min \left\{ 1, \frac{\varepsilon}{5} \right\}$$

se obtiene $0 < |z-2i| < \delta \Rightarrow |z^2 + 4| < \varepsilon$. Por lo tanto,

$$\lim_{z \rightarrow 2i} z^2 = -4.$$

2.2 Continuidad

Definición. Sea $f : A \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$. Decimos que f es continua en $z_0 \in A$ si

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0).$$

El ejercicio anterior muestra que:

Proposición. Sean $f, g : A \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ continuas en z_0 . Entonces

- (1) $f + g$ es continua en z_0 .
- (2) $f \cdot g$ es continua en z_0 .
- (3) $\frac{f}{g}$ es continua en z_0 si $g(z_0) \neq 0$.

Proposición. Si $f : A \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ es continua en z_0 y $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ es continua en $f(z_0)$, entonces $g \circ f$ es continua en z_0 .

Ejercicio. Veamos que $f(z) \equiv k \in \mathbb{C}$ es continua en todo $z \in \mathbb{C}$. En efecto,

$$|f(z) - k| = |k - k| = 0 < \varepsilon \quad (\forall \varepsilon > 0).$$

(2) *Estudiemos $f(z) = |z|$:* dado $\varepsilon > 0$, si $0 < |z - z_0| < \delta$ con $\delta = \varepsilon$, entonces

$$||z| - |z_0|| \leq |z - z_0| < \varepsilon.$$

(3) Todo polinomio $p(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$ es continuo (suma y producto de continuas).

(4) Para $f(z) = |z|$: usando $||z| - |w|| \leq |z - w|$, se obtiene continuidad.

(5) Para $f(z) = |z|^2$: $||z|^2 - |w|^2| = |z\bar{z} - w\bar{w}| \leq (|z| + |w|)|z - w|$, y eligiendo δ conveniente resulta continua.

2.3 Derivación de funciones complejas

Definición. Sea $f : A \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$. Se dice que f es *holomorfa* en $z_0 \in A$ si existe el límite

$$f'(z_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}.$$

Se dirá que f es holomorfa en A si lo es en todo punto de A ; se denota $f \in H(A)$. Si f es holomorfa en \mathbb{C} se dice *entera*, esto es, $f \in H(\mathbb{C})$.

Ejemplo: Veamos que $f(z) = z$ es entera:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(z_0 + h) - z_0}{h} = 1 = f'(z_0).$$

Proposición. Si $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ es holomorfa en z_0 , entonces f es continua en z_0 .

Demostración.

$$\lim_{h \rightarrow 0} (f(z_0 + h) - f(z_0)) = \lim_{h \rightarrow 0} h \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} = 0. \quad \square$$

Observamos que se cumplen todas las reglas de derivación en \mathbb{C} de la misma forma que en \mathbb{R} .

Ejercicios

1.1

Dado $z \neq 0 \in \mathbb{C} \Rightarrow z^{-1} \in \mathbb{C}$.

Sabemos que $z \bar{z} = |z|^2 \Rightarrow z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$.

Además, si $z = x + iy$, entonces

$$z^{-1} = \frac{1}{x^2 + y^2}(x - iy) = \frac{x}{x^2 + y^2} - \frac{y}{x^2 + y^2}i.$$

Así, por ejemplo,

$$(1+i)^{-1} = \frac{1-i}{1^2+1^2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i.$$

Por lo tanto,

$$1 = (1+i)\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\right).$$

1.2

Calcula el módulo y argumento principal de los siguientes números.

(b) $\frac{i}{2-2i}$.

$$\frac{i}{2-2i} = \frac{i}{2-2i} \cdot \frac{2+2i}{2+2i} = \frac{i(2+2i)}{(2)^2+(2)^2} = \frac{2i-2}{8} = -\frac{1}{4} + \frac{1}{4}i.$$

Una vez hecho esto, calculamos su módulo y argumento:

$$\left|-\frac{1}{4} + \frac{1}{4}i\right| = \sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

$$\arg\left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{4}i\right) = \arctan\left(\frac{\frac{1}{4}}{-\frac{1}{4}}\right) + \pi = \arctan(-1) + \pi = \frac{3\pi}{4}.$$

Le sumamos π porque estamos en el segundo cuadrante (según la convención del \arctan).

1.3

$(\sqrt{3}-i)^6$.

Pasamos a forma exponencial:

$$\sqrt{3}-i = 2e^{-i\pi/6} \implies (\sqrt{3}-i)^6 = (2e^{-i\pi/6})^6 = 2^6e^{-i\pi} = 64e^{-i\pi}.$$

1.4

Representa los siguientes subconjuntos del plano complejo \mathbb{C} .

(a) $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : |z - 2 + i| \leq 1\}$.

$$|z - 2 + i| \leq 1 \iff |z - (2 - i)| \leq 1 \implies \Omega = \overline{D}(2 - i, 1),$$

lo que quedaría como un disco centrado en $2 - i$ y de radio 1.

c) $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : |2 - 4| \geq |2i|\}$ Para analizarlo, nos fijamos en que $z - 2i$ tiene la misma distancia a 0 que a 4.

Así, $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : \Re(z) \leq 2\}$

1.8 - Calcula:

c)

$$\sqrt[5]{-1 - i} = \sqrt[5]{w} \left[\cos \left(\frac{\arg w + 2k\pi}{5} \right) + i \sin \left(\frac{\arg w + 2k\pi}{5} \right) \right], \quad k = 0, 1, 2, 3, 4$$

Aplicamos la fórmula a nuestro caso, para ello calculamos el módulo y argumento:

$$|-1 - i| = \sqrt{2}$$

$$\arg(-1 - i) = -\frac{3\pi}{4}$$

$$= \sqrt[5]{\sqrt{2}} \left[\cos \left(\frac{-3\pi}{20} \right) + i \sin \left(\frac{-3\pi}{20} \right) \right] \dots$$

Teorema: Sea $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$. Entonces, denotando $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$: Si f es holomorfa en z_0 , es decir, existe la derivada en z_0 , entonces existen las derivadas parciales de u y v verificando las llamadas *ecuaciones de Cauchy-Riemann* ($C-R$) dadas por:

$$\begin{cases} u_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0) \\ u_y(x_0, y_0) = -v_x(x_0, y_0) \end{cases}$$

donde $u_x(x_0, y_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0)$, $v_x(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0)$

Además

$$f'(z_0) = u_x(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0)$$

Demostración:

$$\exists f'(z_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{u(x_0 + t, y_0) + iv(x_0 + t, y_0) - u(x_0, y_0) - iv(x_0, y_0)}{t}$$

$$= u_x(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0)$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{i(v(x_0, y_0 + t) - v(x_0, y_0)) - (u(x_0, y_0 + t) - u(x_0, y_0))}{it} = -iv_y(x_0, y_0) + u_y(x_0, y_0)$$

Ejemplo: Analicemos que $f(z) = z$ cumple las ecuaciones de Cauchy-Riemann

$$f(x + iy) = x + iy \Rightarrow \begin{cases} u(x, y) = x \\ v(x, y) = y \end{cases}$$

Recordando las ecuaciones de Cauchy-Riemann

$$(CR) \quad \begin{cases} u_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0) \\ u_y(x_0, y_0) = -v_x(x_0, y_0) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 = 1 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Además:

$$f'(z) = u_x(x + iy) + iv_x(x, y) = v_y(x, y) + iu_x(x, y) = 1$$

Observación: Ya sabíamos que $f(z) = z$ es holomorfa por definición.

Ejemplo: Analiza si $f(z) = z^2$ cumple las ecuaciones de Cauchy-Riemann

$$f(x + iy) = (x + iy)(x + iy) = (x^2 - y^2) + i(2xy) \Rightarrow \begin{cases} u(x, y) = x^2 - y^2 \\ v(x, y) = 2xy \end{cases}$$

$$(C-R) \quad \begin{cases} u_x(x, y) = 2x = v_y(x, y) \\ u_y(x, y) = -2y = -v_x(x, y) \end{cases}$$

Además:

$$f'(z) = u_x(x, y) + iv_x(x, y) = 2x + i2y = 2(x + iy) = 2z$$

Ejemplo: Analicemos si $f(z) = \bar{z}$ es holomorfa usando las ecuaciones de Cauchy-Riemann

$$f(x + iy) = x - iy \Rightarrow \begin{cases} u(x, y) = x \\ v(x, y) = -y \end{cases}$$

$$f(z) = \bar{z} \quad \text{no es holomorfa.}$$

Ejemplo: Analicemos si $f(z) = |z|^2$ es holomorfa usando las ecuaciones de Cauchy-Riemann

$$f(x + iy) = x^2 + y^2 \Rightarrow \begin{cases} u(x, y) = x^2 + y^2 \\ v(x, y) = 0 \end{cases}$$

Aplicamos las ecuaciones de Cauchy-Riemann

$$(C-R) \quad \begin{cases} 2x = 0 \\ 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{Si } z \neq 0 \Rightarrow f(z) = |z|^2 \text{ no es holomorfa}$$

No obstante, en $z = 0$ se cumplen las ecuaciones de Cauchy-Riemann $\nRightarrow f$ sea holomorfa en $z = 0$

Analicemos por definición si $f(z) = |z|^2$ es holomorfa en $z = 0$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0 + h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|h|^2 - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|h|^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \bar{h} = 0$$

Por lo tanto $f(z) = |z|^2$ es holomorfa en $z = 0$

Proposición: Sea $f : \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$. Entonces

f es holomorfa en $z_0 \Rightarrow u, v : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ son diferenciables en (x_0, y_0) y se cumplen las ecuaciones de Cauchy-Riemann

$$\begin{cases} u_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0) \\ u_y(x_0, y_0) = -v_x(x_0, y_0) \end{cases}$$

Ejemplo: Analicemos por definición si $f(z) = |z|$ es holomorfa en $z_0 \in \mathbb{C}$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|z_0 + h| - |z_0|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|h|}{h}$$

Vamos a acercarnos a 0 de varias formas diferentes:

- $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h}{h} = 1$
- $\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-h}{h} = -1$

Como

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \neq \lim_{h \rightarrow 0^-}$$

entonces concluimos que f no es holomorfa en z_0 .

Acercarme de formas distintas y que dé diferente garantiza que no es holomorfa. Pero si da lo mismo no me garantiza que sea holomorfa.

Proposición: Sean $f, g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ y $\alpha \in \mathbb{C}$. Entonces:

- $f + g$ es holomorfa y cumple $(f + g)'(z) = f'(z) + g'(z)$
- αf es holomorfa y cumple $(\alpha f)'(z) = \alpha f'(z)$
- $f \cdot g$ es holomorfa y cumple $(f \cdot g)' = f'g + fg'$
- $\frac{f}{g}$ es holomorfa y cumple $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$
- $f(g(z))$ es holomorfa y cumple $(f \circ g)'(z) = f'(g(z)) \cdot g'(z)$