Apuntes de Variable Compleja

Luis López

Septiembre 2025

Índice

Introducción

Los **números complejos**, denotados por $\mathbb{C}$, constituyen una extensión de los números reales $\mathbb{R}$, cumpliéndose que $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. A diferencia de los reales, los complejos forman un *cuerpo algebraicamente cerrado*, lo que significa que todo polinomio con coeficientes complejos admite todas sus raíces en $\mathbb{C}$.

Todo número complejo puede escribirse como

$$z = x + iy,$$

donde $x, y \in \mathbb{R}$ e i es la unidad imaginaria ($i^2 = -1$). También pueden representarse en *forma polar*, mediante su módulo y argumento.

El conjunto $\mathbb{C}$ no solo es fundamental en álgebra y análisis, sino que resulta indispensable en múltiples áreas de las matemáticas aplicadas y la física. Asimismo, los números complejos son herramientas habituales en ingeniería.

1. Números complejos

1.1. Teoría y estructura elemental

La imposibilidad de resolver ciertas ecuaciones con números reales nos obliga a introducir los **números imaginarios**, definidos a partir de la unidad i tal que

$$i^2 = -1.$$

1.2. Definiciones básicas

Denotamos los números complejos como

$$\mathbb{C} = \{z = a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}\}.$$

Dado $z = a + bi \in \mathbb{C}$, se definen:

- Parte real: $\Re(z) = a \in \mathbb{R}$.
- Parte imaginaria: $\Im(z) = b \in \mathbb{R}$.
- Módulo: $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.
- Conjugado: $\overline{z} = a - bi$.

1.3. Propiedades elementales

Para $z = a + bi \in \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} z + \overline{z} &= 2\Re(z), \\ z - \overline{z} &= 2i\Im(z), \\ z \cdot \overline{z} &= |z|^2. \end{aligned}$$

1.4. Forma polar

Si $z \neq 0$:

$$z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta) = |z|e^{i\theta},$$

donde $\theta = \arg(z)$.