

# Apuntes Electromagnetismo I

Luis López

September 2025

# Índice

1. Ley de Coulomb	4
2. Campos eléctricos	6

## Introducción.

La asignatura **Electromagnetismo I**, perteneciente al *Grado en Física*, aborda el estudio sistemático de los fenómenos eléctricos y magnéticos en el vacío y en medios materiales.

Se estructura en los siguientes bloques temáticos principales:

- **Tema 1. Campo electrostático en el vacío:** Fuerza eléctrica, Ley de Coulomb, Ley de Gauss y potencial eléctrico.
- **Tema 2. Campo electrostático en medios materiales:** Conductores y dieléctricos, polarización y vector desplazamiento, y condiciones de continuidad de los campos.
- **Tema 3. Campo magnetostático en el vacío:** Movimiento de cargas y corrientes, efecto Hall, fuentes de campo magnético (leyes de Biot-Savart y Ampère), potencial vectorial y ley de Gauss magnética.
- **Tema 4. Campo magnetostático en medios materiales:** Propiedades magnéticas de los materiales, campo generado por un material magnetizado y condiciones de contorno.
- **Tema 5. Campos electromagnéticos:** Ley de Faraday y transformadores electromagnéticos.
- **Tema 6. Leyes de Maxwell:** formulación y aplicación de las cuatro ecuaciones fundamentales en el vacío.

El **electromagnetismo** constituye una rama esencial de la física, ya que explica las interacciones entre las cargas eléctricas y los campos magnéticos. Dichas interacciones son responsables de una gran variedad de fenómenos naturales y tecnológicos, desde la luz visible hasta las ondas de radio, y desde el funcionamiento de los motores eléctricos hasta la transmisión y transformación de la energía eléctrica.

La base teórica de toda la asignatura se encuentra en las **Ecuaciones de Maxwell**, que veremos en el tramo final del curso y que condensan de forma unificada cómo los campos eléctricos y magnéticos se generan, interactúan y se propagan.

# 1. Ley de Coulomb

## Explicación de la ley de Coulomb

La **ley de Coulomb** describe la interacción eléctrica entre dos cargas puntuales en reposo. Establece que la fuerza es proporcional al producto de las cargas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que las separa, actuando a lo largo de la línea que une ambas cargas.

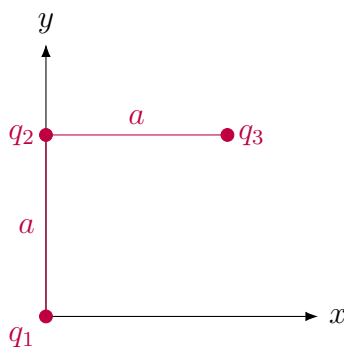
$$\vec{F}_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{r}_{12}$$

Siendo  $\epsilon_0$  la *permeabilidad eléctrica en el vacío*.

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$$

Hay que poner claramente el sistema de referencia que usamos en cada caso de forma explícita.

### Ejemplo:



Determinar la  $\vec{F}_e$  sobre  $q_3$ .

Atendiendo al principio de superposición tenemos:

$$\vec{F}_e = \vec{F}_{q_2 q_3} + \vec{F}_{q_1 q_3}$$

Aplicamos la ley de Coulomb:

$$\vec{F}_{q_1 q_3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_3}{r_{13}^2} \hat{r}_{13},$$

calculamos el vector unitario  $\hat{r}_{13}$ :

$$\vec{r}_{13} = (2a, 2a), \quad r_{13} = \sqrt{(2a)^2 + (2a)^2} = \sqrt{8a^2} = 2\sqrt{2} a$$

$$\hat{r}_{13} = \frac{\vec{r}_{13}}{|\vec{r}_{13}|} = \frac{2a\hat{i} + 2a\hat{j}}{2\sqrt{2}a} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\hat{i} + \hat{j})$$

Entonces:

$$\vec{F}_{q_1q_3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1q_3}{(2\sqrt{2}a)^2} \hat{r}_{13} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1q_3}{8a^2} \frac{\sqrt{2}}{2}(\hat{i} + \hat{j})$$

Vemos ahora  $q_2 \rightarrow q_3$ :

$$\vec{F}_{q_2q_3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2q_3}{r_{23}^2} \hat{r}_{23},$$

calculamos el vector unitario  $\hat{r}_{23}$ :

$$\vec{r}_{23} = (a, 0), \quad r_{23} = a, \quad \hat{r}_{23} = \frac{\vec{r}_{23}}{|\vec{r}_{23}|} = \hat{i}$$

Entonces:

$$\vec{F}_{q_2q_3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2q_3}{a^2} \hat{i}$$

Por último calculamos la fuerza total en  $q_3$  con el principio de superposición:

$$\vec{F}_e = \vec{F}_{13} + \vec{F}_{23}$$

$$\vec{F}_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1q_3}{2a^2} \frac{\sqrt{2}}{2} (\hat{i} + \hat{j}) + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2q_3}{a^2} \hat{i} = \frac{q_3}{4\pi\epsilon_0} \left[ \left( \frac{q_2}{a^2} - \frac{q_1}{2a^2} \right) \hat{i} + \frac{q_1}{2a^2} \hat{j} \right]$$

## 2. Campos eléctricos

El **campo eléctrico** en un punto se define como la fuerza eléctrica por unidad de carga de prueba positiva colocada en ese punto:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \lim_{q_0 \rightarrow 0} \frac{\vec{F}_e(\vec{r})}{q_0}.$$

### Derivación desde la ley de Coulomb

Para una carga puntual  $q$  situada en  $\vec{r}'$ , la fuerza sobre una carga de prueba  $q_0$  en  $\vec{r}$  es

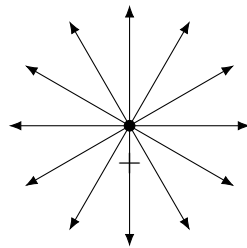
$$\vec{F}_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q q_0}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \hat{\mathbf{R}}, \quad \hat{\mathbf{R}} = \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}.$$

Dividiendo por  $q_0$ , queda:

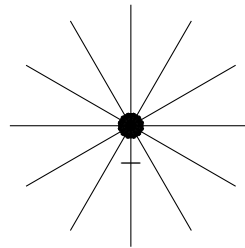
$$\boxed{\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \hat{\mathbf{R}}}$$

y, en el caso de tomar el origen en la carga y  $r = |\vec{r}|$ ,

$$\vec{E}_q = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{r}.$$



*Diverge*



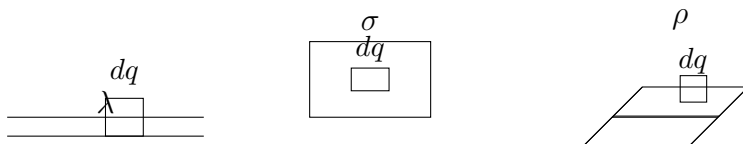
*Lo succiona*

$$\vec{E}_q = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{r}_{qP}$$

## Distribuciones de carga

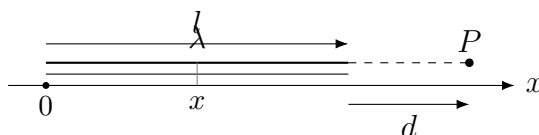
Pueden ser:

$$\text{Lineales} \Rightarrow \lambda = \frac{dq}{dl}, \quad \text{Superficiales} \Rightarrow \sigma = \frac{dq}{dA}, \quad \text{Volumétrica} \Rightarrow \rho = \frac{dq}{dV}.$$



### Ejemplo:

Tenemos una barra de longitud  $l$  con una distribución de carga lineal homogénea  $\lambda$ . Determine el campo eléctrico generado por la barra a una distancia  $d$  de uno de sus extremos. ¿Qué ocurre cuando  $d \gg l$ ?



Planteamos la solución del campo eléctrico

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq}{r^2} \hat{r}_{qP},$$

Siendo el vector unitario  $\hat{r}_{qP}$ :

$$\hat{r}_{qP} = \frac{\vec{r}_P - \vec{r}_q}{|\vec{r}_P - \vec{r}_q|} = \frac{(l+d)\hat{i} - x\hat{i}}{|(l+d) - x|} \hat{i}$$

Donde:

$$r^2 = ((l+d) - x)^2, \quad dq = \lambda dl = \lambda dx.$$

Entonces:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^l \frac{\lambda dx}{((l+d) - x)^2} \hat{i} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left[ -\frac{1}{(l+d) - x} \right]_0^l \hat{i} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{d} - \frac{1}{l+d} \right) \hat{i}.$$

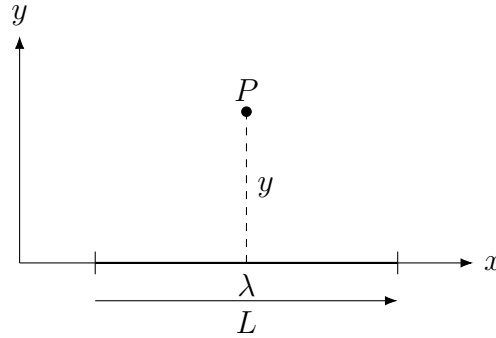
b)  $d \gg l$

$$\vec{E} \approx \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{l}{d(l+d)} \right) \hat{i} \approx \frac{\lambda l}{4\pi\epsilon_0 d^2} \hat{i} \approx \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 d^2} \hat{i} \quad \text{con } Q = \lambda l.$$

Llegamos a la expresión del campo eléctrico de una carga puntual  $Q$ . ya que al estar tan alejados la barra se comporta como una carga puntual.

**Ejemplo:**

Calcular  $\vec{E}$  en el punto  $P$ . ¿Qué ocurre si  $P \gg L$ ?



Pista:

$$\int \frac{y}{(x^2 + y^2)^{3/2}} dx = \frac{x}{y\sqrt{x^2 + y^2}}$$

La solución del campo será:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq}{r^2} \hat{r}_{qP}, \quad \hat{r}_{qP} = \frac{\vec{r}_P - \vec{r}_q}{|\vec{r}_P - \vec{r}_q|} = \frac{-x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \hat{i} + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \hat{j}.$$

Sustituyendo:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{-L/2}^{L/2} \frac{\lambda dx}{(x^2 + y^2)} \left( -\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \hat{i} + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \hat{j} \right)$$

Al tratarse de una integral vectorial, se integra cada componente por separado:

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left[ \int_{-L/2}^{L/2} \frac{-x}{(x^2 + y^2)^{3/2}} dx \hat{i} + \int_{-L/2}^{L/2} \frac{y}{(x^2 + y^2)^{3/2}} dx \hat{j} \right] \\ &= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left[ -\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \Big|_{-L/2}^{L/2} \hat{i} + \frac{x}{y\sqrt{x^2 + y^2}} \Big|_{-L/2}^{L/2} \hat{j} \right] \end{aligned}$$

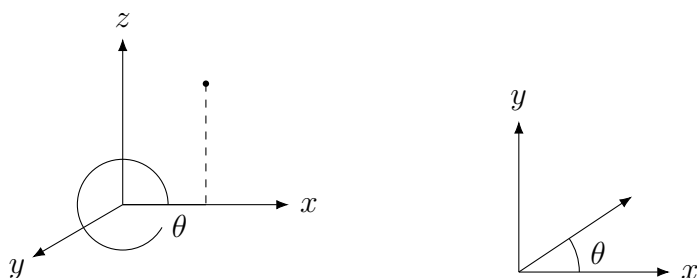


## Coordenadas cilíndricas

Las **coordenadas cilíndricas** representan un punto en el espacio mediante la tripleta  $(r, \theta, z)$ , donde  $r$  es la distancia desde el punto al eje  $z$  (coordenada radial),  $\theta$  es el ángulo que forma el radio con el eje  $x$  (coordenada acimutal) y  $z$  es la altura del punto sobre el plano  $xy$  (coordenada vertical). Este sistema es una generalización de las coordenadas polares al espacio tridimensional y es útil en problemas con simetría cilíndrica.

Siendo las nuevas coordenadas:

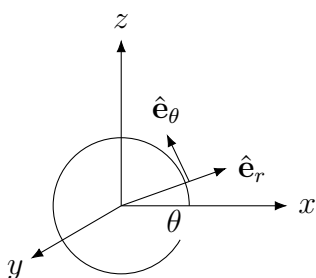
$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad z = z$$



Donde  $\theta$  va siempre desde el eje positivo de  $x$  al eje positivo de  $y$ .

Al igual que en coordenadas cartesianas, las coordenadas cilíndricas también tienen *vectores unitarios*:

$$\hat{\mathbf{e}}_r = \cos \theta \hat{\mathbf{i}} + \sin \theta \hat{\mathbf{j}}, \quad \hat{\mathbf{e}}_\theta = -\sin \theta \hat{\mathbf{i}} + \cos \theta \hat{\mathbf{j}}, \quad \hat{\mathbf{e}}_z = \hat{\mathbf{k}}.$$



### Diferenciales de longitud, área y volumen (cartesianas)

De longitud:

$$d\vec{\ell} = dx \hat{i} + dy \hat{j} + dz \hat{k}$$

De área:

$$d\vec{A}_x = dy dz \hat{i},$$

$$d\vec{A}_y = dx dz \hat{j},$$

$$d\vec{A}_z = dx dy \hat{k}.$$

De volumen:

$$dV = dx dy dz$$

*Hacer esquemas visuales.*

### Diferenciales de longitud, área y volumen (cilíndricas)

De longitud:

$$d\vec{\ell} = dr \hat{e}_r + r d\theta \hat{e}_\theta + dz \hat{e}_z$$

De área:

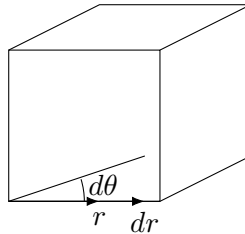
$$d\vec{S}_r = r d\theta dz \hat{e}_r,$$

$$d\vec{S}_\theta = dr dz \hat{e}_\theta,$$

$$d\vec{S}_z = r dr d\theta \hat{e}_z.$$

De volumen:

$$dV = r dr d\theta dz$$



### Ejemplo:

Un anillo cargado con densidad de carga lineal variable  $\lambda = \cos^2 \theta$  y radio  $a$ . Determinar la carga total.

Densidad lineal, por tanto la carga vendrá dada como:

$$q_T = \oint \lambda dl = \int_0^{2\pi} \lambda a d\theta = a \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta.$$

\* Los límites de integración varían dependiendo de nuestro sistema de referencia. En nuestro caso  $r = a$  y  $\theta \in [0, 2\pi]$ .

**Ejemplo:**

*Ejemplo:* Un disco cargado con densidad de carga superficial  $\sigma = \rho \sin^2 \theta$  y radio  $R$ . Determina la **carga total** del disco.

$$q_T = \iint_S \sigma dA = \int_0^{2\pi} \left( \int_0^R \rho \sin^2 \theta r dr \right) d\theta.$$

**Ejemplo: anillo con densidad lineal constante**

*Ejemplo:* Un anillo cargado con densidad de carga lineal constante  $\lambda$  y radio  $a$ . Determine el valor del **campo eléctrico** en el punto  $P$  (sobre el eje del anillo, a altura  $z$ ).

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint \frac{dq}{r^2} \hat{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \frac{\lambda a d\theta}{a^2 + z^2} \frac{-a \cos \theta \hat{i} - a \sin \theta \hat{j} + z \hat{k}}{\sqrt{a^2 + z^2}}.$$

Como integral vectorial, se integran las componentes por separado:

$$\int_0^{2\pi} \frac{-a \cos \theta}{(a^2 + z^2)^{3/2}} d\theta = 0, \quad \int_0^{2\pi} \frac{-a \sin \theta}{(a^2 + z^2)^{3/2}} d\theta = 0,$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{z}{(a^2 + z^2)^{3/2}} d\theta = \frac{2\pi z}{(a^2 + z^2)^{3/2}}.$$

Por tanto,

$$\boxed{\vec{E}(P) = \frac{\lambda a z}{2 \epsilon_0 (a^2 + z^2)^{3/2}} \hat{k}}$$

(dirección del eje del anillo).