Apuntes de Variable Compleja

Luis López

Septiembre 2025

Índice

Introducción

Los **números complejos**, denotados por $\mathbb{C}$, constituyen una extensión de los números reales $\mathbb{R}$, cumpliéndose que $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. A diferencia de los reales, los complejos forman un *cuerpo algebraicamente cerrado*, lo que significa que todo polinomio con coeficientes complejos admite todas sus raíces en $\mathbb{C}$.

Todo número complejo puede escribirse como

$$z = x + iy,$$

Donde $x, y \in \mathbb{R}$ e i es la unidad imaginaria ($i^2 = -1$). También pueden representarse en *forma polar*, mediante su módulo y argumento.

El conjunto $\mathbb{C}$ no solo es fundamental en álgebra y análisis, sino que resulta indispensable en múltiples áreas de las matemáticas aplicadas y la física.

Asimismo, los números complejos son herramientas habituales en ingeniería.

1. Números complejos

1.1 Teoría y estructura elemental

La imposibilidad de resolver ciertas ecuaciones con números reales nos obliga a introducir los **números imaginarios**, definidos a partir de la unidad i tal que:

$$i^2 = -1.$$

1.2 Introducción elemental

Denotamos los números complejos como

$$\mathbb{C} = \{z = a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}\}.$$

Dado $z = a + bi \in \mathbb{C}$, se definen:

- Parte real: $\Re(z) = a \in \mathbb{R}$.
- Parte imaginaria: $\Im(z) = b \in \mathbb{R}$.
- Módulo: $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.
- Conjugado: $\overline{z} = a - bi$.

Ejemplo: Sea $z = 1 - 2i$. Entonces:

$$\Re(1-2i) = 1;\ \Im(1-2i) = -2;\ \overline{1-2i} = 1+2i;\ |1-2i| = \sqrt{1^2 + (-2)^2} = \sqrt{5}.$$

1.3 Propiedades elementales

1. $\overline{\overline{z}} = z$. Demostración: si $z = a + bi \Rightarrow \overline{z} = a - bi \Rightarrow \overline{\overline{z}} = a + bi = z$.
2. $z + \overline{z} = 2\Re(z)$.
3. $z - \overline{z} = 2i\Im(z)$.
4. $|\overline{z}| = |z|$.
5. $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$.
6. $\overline{z \cdot z'} = \overline{z} \cdot \overline{z'}$.

Además, tenemos las siguientes propiedades asociadas al **módulo**:

1. $|\Re(z)| \leq |z|$.
2. $|\Im(z)| \leq |z|$. En efecto, $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} \geq |b|$.
3. **Desigualdad triangular:** $|z + w| \leq |z| + |w| \quad \forall z, w \in \mathbb{C}$.
4. $z \cdot \overline{z} = |z|^2$.
5. **Desigualdad triangular inversa:** $\Big||z| - |z'|\Big| \leq |z - z'|$.

Todas estas propiedades, junto con la suma y producto de números complejos, generalizan las propiedades de los números reales:

$$z + z' = (x + iy) + (x' + iy') = (x + x') + (y + y')i \in \mathbb{C},$$

$$z \cdot z' = (x + iy)(x' + iy') = (xx' - yy') + (xy' + x'y)i \in \mathbb{C}.$$

En particular, si $z = a + 0i$, se cumple que

$$|z| = \sqrt{a^2 + 0^2} = |a|$$

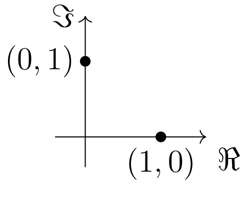
es decir, el módulo de z coincide con el valor absoluto en los reales.

1.4 Forma polar y geometría de los números complejos

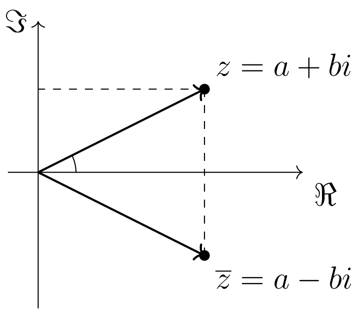
El conjunto $\mathbb{C}$ se puede representar como $\mathbb{R}^2$ mediante la asignación

$$z = a + bi \longmapsto (a, b) \in \mathbb{R}^2.$$

De esta forma obtenemos el denominado **plano complejo**; por lo tanto, la interpretación geométrica de *todo lo visto* sería:



Representación de 1 e i



Geometría de z y $\overline{z}$

Decimos que z está en **forma polar**, si:

$$z = \frac{|z|}{|z|} z = |z| \frac{z}{|z|} = |z|(\cos\theta + i \sin\theta)$$

Sea:

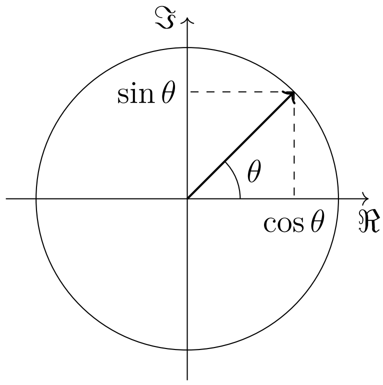
$$w = \frac{z}{|z|} \quad \Rightarrow \quad \text{cumple} \quad \Rightarrow \quad |w| = \frac{|z|}{|z|} = 1.$$

Es decir, $\dfrac{z}{|z|}$ es un número complejo de módulo 1, luego existe $\theta \in \mathbb{R}$ tal que

$$\frac{z}{|z|} = \cos\theta + i \sin\theta.$$

Ejemplo: El número complejo $1+i$ en forma polar es:

$$1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i \sin\frac{\pi}{4}\right).$$



Circunferencia unitaria: $w = \cos\theta + i \sin\theta$

Vemos que un mismo número complejo tiene infinitas representaciones polares por culpa del ángulo θ, llamado **argumento de** z. Para solucionar este problema introducimos el **argumento principal** de z, que es aquel ángulo $-\pi < \theta \leq \pi$ que verifica:

$$z = |z|(\cos\theta + i \sin\theta), \qquad \theta = \arg(z).$$

Además, si $z = x + iy$, entonces:

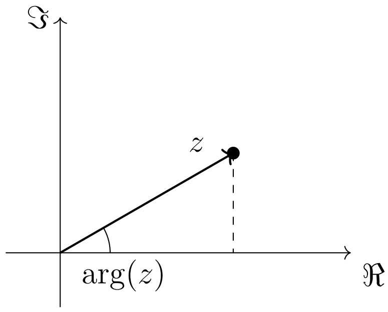
$$\arg(z) = \begin{cases} \arctan\left(\dfrac{y}{x}\right), & x > 0,\ y \geq 0, \\ \dfrac{\pi}{2}, & x = 0,\ y < 0, \\ \arctan\left(\dfrac{y}{x}\right) + \pi, & x < 0,\ y \geq 0, \\ \pi, & x < 0,\ y = 0, \\ \arctan\left(\dfrac{y}{x}\right) - \pi, & x < 0,\ y < 0, \\ -\dfrac{\pi}{2}, & x = 0,\ y > 0, \\ \arctan\left(\dfrac{y}{x}\right), & x > 0,\ y < 0. \end{cases}$$

Nótese que se verifica que:

$$\arg(z) = \arg(z) + 2k\pi, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Así, geométricamente, un número complejo z tendría esta información:

$$z = |z|e^{i\arg(z)}.$$



Argumento de z.

Al tener el módulo de cualquier complejo podemos hablar de la noción de distancia entre complejos, dada por:

$$d(z, w) = |z - w|.$$

Definición. El disco centrado en $z_0 \in \mathbb{C}$ y de radio $\varepsilon > 0$ es:

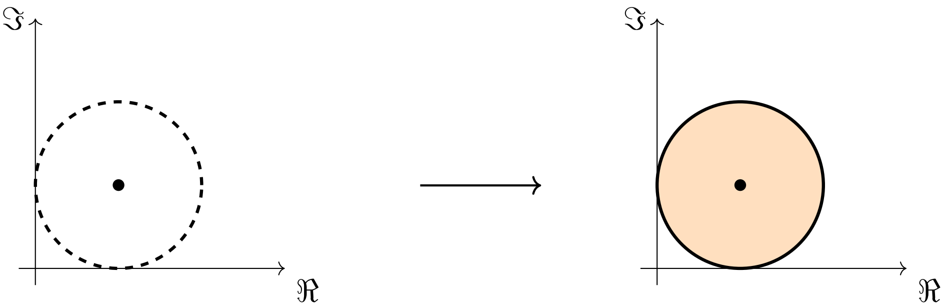
$$D(z_0, \varepsilon) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < \varepsilon\}.$$

Ejemplo:

$$D(1 + i, 1) = \{z \in \mathbb{C} : |z - (1 + i)| < 1\}.$$

El disco cerrado se denota por:

$$\overline{D}(z_0, \varepsilon) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq \varepsilon\}.$$



Disco abierto $D(1 + i, 1)$ Disco cerrado $\overline{D}(1 + i, 1)$

1.5 Forma exponencial y multiplicación de números complejos

Por conveniencia, escribimos

$$\cos\theta + i\sin\theta \;=\; e^{i\theta}.$$

Así, la forma polar $z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$ se expresa como

$$z = |z|\, e^{i\theta}.$$

Esta representación hace muy sencilla la multiplicación de complejos. En efecto, si:

$$z = r\, e^{i\theta}, \qquad w = \rho\, e^{i\varphi} \quad (r, \rho \geq 0),$$

entonces:

$$z\, w = (r\rho)\, e^{i(\theta+\varphi)}.$$

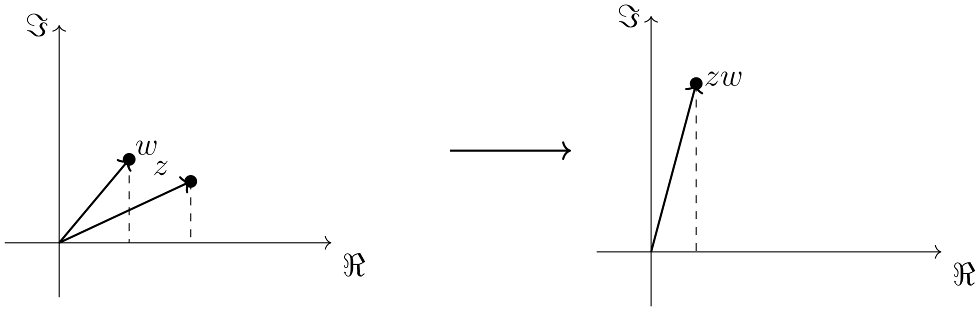
En particular,

$$|zw| = |z|\,|w|, \qquad \arg(zw) = \arg(z) + \arg(w) \pmod{2\pi}.$$

Nota. En general es *falso* que

$$\arg(zw) = \arg(z) + \arg(w),$$

pues arg es el argumento principal (restringido a $(-\pi, \pi]$) y puede requerir ajustar por múltiplos de 2π.



Multiplicación en forma polar (solo vectores).

Ejemplo.

$$\arg(i) = \frac{\pi}{2}, \qquad \arg(-i) = -\frac{\pi}{2},$$

mientras que

$$\arg(i) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \qquad \arg(-i) = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Potencias (fórmula de De Moivre). Si $z = r\,e^{i\theta}$ y $n \in \mathbb{N}$, entonces:

$$z^n = r^n\,e^{in\theta}.$$

1.6 Ejemplo: cálculo en forma exponencial

Ejemplo: Calcular $(1+i)^4$.

$$1 + i = \sqrt{2}\,e^{i\pi/4} \quad \Rightarrow \quad (1+i)^4 = (\sqrt{2})^4 e^{i\pi} = 4 \cdot (-1) = -4,$$

llegamos a:

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

(Fórmula de Euler, considerada la más bonita de las matemáticas).

1.7 Raíces de números complejos

Queremos estudiar qué números complejos cumplen la ecuación $z^n = w$ para un $n \geq 2$, $w \in \mathbb{C}$.

Proposición. Dado un número complejo no nulo $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ y $n \geq 2$, existen exactamente n números complejos que cumplen $z^n = w$. Si

$$w = r\,e^{i\theta} \quad (r > 0,\ \theta \in \mathbb{R}),$$

entonces las soluciones son

$$z_k = r^{1/n} e^{i(\theta+2k\pi)/n}, \qquad k = 0, 1, \ldots, n-1,$$

que son los vértices de un n-gono regular centrado en el origen.

Demostración. Si $z = \rho e^{i\varphi}$, entonces $z^n = \rho^n e^{in\varphi}$. Imponiendo $z^n = w = re^{i\theta}$ se obtiene $\rho^n = r \Rightarrow \rho = r^{1/n}$ y $n\varphi = \theta + 2k\pi \Rightarrow \varphi = (\theta + 2k\pi)/n$.

Definición. El *conjunto de las raíces n-ésimas de w* es

$$\sqrt[n]{w} := \left\{ r^{1/n} e^{i(\theta+2k\pi)/n} \ : \ k = 0, \ldots, n-1 \right\}.$$

Por abuso, se llama *raíz n-ésima principal* de w a

$$\sqrt[n]{w}_{\mathrm{pr}} := r^{1/n} e^{i \arg(w)/n},$$

donde $\arg(w) \in (-\pi, \pi]$ es el argumento principal.

Ejemplo. Resolver $z^3 = -8i$.

$$-8i = 8\, e^{-i\pi/2} \quad \Rightarrow \quad z_k = 2\, e^{i(-\pi/2+2k\pi)/3},\ k = 0, 1, 2.$$

Explícitamente:

$$z_0 = 2e^{-i\pi/6} = \sqrt{3} - i, \quad z_1 = 2e^{i\pi/2} = 2i, \quad z_2 = 2e^{i7\pi/6} = -\sqrt{3} - i.$$

La raíz cúbica *principal* es $2e^{-i\pi/6}$.

Notas.

- $(z_k)^n = w$ para todo k, y $z_k = z_0\, e^{i2k\pi/n}$.
- $\sqrt[n]{w}$ denota un *conjunto*; la notación de raíz *principal* usa $\arg(w)$.

2. Teoría de las funciones de variable compleja

Estudiaremos funciones de la forma $f : A \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

Parte real e imaginaria. Si $z = x + iy$, toda función f puede escribirse como

$$f(z) = u(x, y) + i\,v(x, y),$$

donde $u = \Re f$ y $v = \Im f$.

Ejemplos.

$$\begin{aligned} f(z) = z^2 = (x+iy)^2 = (x^2 - y^2) + i(2xy) \quad &\Rightarrow \quad u(x,y) = x^2 - y^2, \;\; v(x,y) = 2xy, \\ f(z) = \overline{z} = x - iy \quad &\Rightarrow \quad u(x,y) = x, \;\; v(x,y) = -y. \end{aligned}$$

2.1 Límites y continuidad de funciones complejas

Definición. Sea f definida en un conjunto $A \subset \mathbb{C}$, $f : A \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Diremos que el límite de f cuando z tiende a z_0 es $w \in \mathbb{C}$ si

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\exists\, \delta > 0 \text{ tal que } \; 0 < |z - z_0| < \delta \;\Rightarrow\; |f(z) - w| < \varepsilon.$$

Se denota por $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = w$.

Proposición. Sean f, g dos funciones tales que $f, g : A \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ y existen $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = w$ y $\lim\limits_{z \to z_0} g(z) = \ell$. Entonces:

1. $\lim\limits_{z \to z_0} \Big(f(z) + g(z)\Big) = \lim\limits_{z \to z_0} f(z) + \lim\limits_{z \to z_0} g(z) = w + \ell.$
2. $\lim\limits_{z \to z_0} \Big(f(z)\, g(z)\Big) = \lim\limits_{z \to z_0} f(z) \;\cdot\; \lim\limits_{z \to z_0} g(z) = w\,\ell.$
3. Si $\ell \neq 0$, entonces $\lim\limits_{z \to z_0} \dfrac{f(z)}{g(z)} = \dfrac{w}{\ell}.$

Proposición.

$$\exists \lim_{z \to z_0} f(z) = w \quad \Longleftrightarrow \quad \exists \lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} \Big(u(x,y) + i\,v(x,y)\Big) = a + ib$$

equivalentemente

$$\begin{cases} \exists \lim\limits_{(x,y) \to (x_0,y_0)} u(x,y) = a, \\ \exists \lim\limits_{(x,y) \to (x_0,y_0)} v(x,y) = b. \end{cases}$$

Demostración.

$\exists \lim\limits_{z\to z_0} f(z) = a{+}bi = w \iff \forall\varepsilon>0\,\exists\delta>0:\ 0<|z{-}z_0|<\delta \ \Rightarrow\ |f(z){-}(a{+}bi)|<\varepsilon.$

Analicemos lo siguiente:

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x,y)=a \iff \forall\varepsilon>0\,\exists\delta>0:\ 0<\|(x,y){-}(x_0,y_0)\|<\delta \Rightarrow |u(x,y){-}a|<\varepsilon.$$

En efecto,

$$|u(x,y){-}a| = \Big|\, u(x,y){-}a{+}i(v(x,y){-}b) - i(v(x,y){-}b)\,\Big| \le |f(z){-}(a{+}bi)|<\varepsilon,$$

y análogamente para la parte imaginaria $v(x,y)$. Además,

$$0<|z{-}z_0|<\delta \iff 0<|x{+}iy{-}(x_0{+}iy_0)|<\delta \iff 0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta.$$

La parte imaginaria es análoga. $\square$

Ejemplo: Analicemos $\lim\limits_{z\to 2i} z^2$. Como

$$(x+iy)^2=(x^2-y^2)+i(2xy),$$

se tiene

$$\lim_{(x,y)\to(0,2)}(x^2-y^2)=-4, \qquad \lim_{(x,y)\to(0,2)} 2xy=0,$$

luego $\lim\limits_{z\to 2i} z^2=-4$.

Ejemplo (analítico por definición): Probemos por ε-δ que $\lim\limits_{z\to 2i} z^2=-4$.
Sea $\varepsilon>0$. Observamos

$$|z^2-(2i)^2| = |z-2i|\,|z+2i| \le |z-2i|\Big(|z-2i|+|4i|\Big) = |z-2i|\,(|z-2i|+4).$$

Si imponemos $0<|z-2i|<\delta$ y además $\delta\le 1$, entonces

$$|z^2-(2i)^2|<\delta(\delta+4)\le 5\delta.$$

Eligiendo

$$\delta=\min\Big\{1,\ \frac{\varepsilon}{5}\Big\}$$

se obtiene $0<|z-2i|<\delta \Rightarrow |z^2+4|<\varepsilon$. Por lo tanto,

$$\lim_{z\to 2i} z^2=-4.$$

2.2 Continuidad

Definición. Sea $f : A \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Decimos que f es continua en $z_0 \in A$ si

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = f(z_0).$$

El ejercicio anterior muestra que:
Proposición. Sean $f, g : A \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ continuas en z_0. Entonces

(1) $f + g$ es continua en z_0.

(2) $f \cdot g$ es continua en z_0.

(3) $\dfrac{f}{g}$ es continua en z_0 si $g(z_0) \neq 0$.

Proposición. Si $f : A \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es continua en z_0 y $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es continua en $f(z_0)$, entonces $g \circ f$ es continua en z_0.

Ejercicio. Veamos que $f(z) \equiv k \in \mathbb{C}$ es continua en todo $z \in \mathbb{C}$. En efecto,

$$|f(z) - k| = |k - k| = 0 < \varepsilon \qquad (\forall\, \varepsilon > 0).$$

(2) *Estudiemos* $f(z) = |z|$: dado $\varepsilon > 0$, si $0 < |z - z_0| < \delta$ con $\delta = \varepsilon$, entonces

$$\Big||z| - |z_0|\Big| \leq |z - z_0| < \varepsilon.$$

(3) Todo polinomio $p(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$ es continuo (suma y producto de continuas).

(4) Para $f(z) = |z|$: usando $\Big||z| - |w|\Big| \leq |z - w|$, se obtiene continuidad.

(5) Para $f(z) = |z|^2$: $\big||z|^2 - |w|^2\big| = |z\overline{z} - w\overline{w}| \leq (|z| + |w|)\,|z - w|$, y eligiendo δ conveniente resulta continua.

2.3 Derivación de funciones complejas

Definición. Sea $f : A \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Se dice que f es *holomorfa* en $z_0 \in A$ si existe el límite

$$f'(z_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}.$$

Se dirá que f es holomorfa en A si lo es en todo punto de A; se denota $f \in H(A)$. Si f es holomorfa en $\mathbb{C}$ se dice *entera*, esto es, $f \in H(\mathbb{C})$.
Ejemplo: Veamos que $f(z) = z$ es entera:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(z_0 + h) - z_0}{h} = 1 = f'(z_0).$$

Proposición. Si $f : A \to \mathbb{C}$ es holomorfa en z_0, entonces f es continua en z_0.

Demostración.

$$\lim_{h\to 0}\Big(f(z_0+h) - f(z_0)\Big) = \lim_{h\to 0} h\,\frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h} = 0. \qquad \square$$

Observamos que se cumplen todas las reglas de derivación en $\mathbb{C}$ de la misma forma que en $\mathbb{R}$.

Ejercicios

1.1

Dado $z \neq 0 \in \mathbb{C} \;\Rightarrow\; z^{-1} \in \mathbb{C}$.

Sabemos que $z\,\overline{z} = |z|^2 \;\Rightarrow\; z^{-1} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2}$.

Además, si $z = x + iy$, entonces

$$z^{-1} = \frac{1}{x^2+y^2}(x - iy) = \frac{x}{x^2+y^2} - \frac{y}{x^2+y^2}\,i.$$

Así, por ejemplo,

$$(1+i)^{-1} = \frac{1-i}{1^2+1^2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\,i.$$

Por lo tanto,

$$1 = (1+i)\Big(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\,i\Big).$$

1.2

Calcula el módulo y argumento principal de los siguientes números.

(b) $\dfrac{i}{2-2i}$.

$$\frac{i}{2-2i} = \frac{i}{2-2i}\cdot\frac{2+2i}{2+2i} = \frac{i(2+2i)}{(2)^2+(2)^2} = \frac{2i-2}{8} = -\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\,i.$$

Una vez hecho esto, calculamos su módulo y argumento:

$$\left|-\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\,i\right| = \sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

$$\arg\Big(-\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4}\,i\Big) = \arctan\left(\frac{\frac{1}{4}}{-\frac{1}{4}}\right) + \pi = \arctan(-1) + \pi = \frac{3\pi}{4}.$$

Le sumamos π porque estamos en el segundo cuadrante (según la convención del* $\arctan$*).

1.3

$(\sqrt{3}-i)^6$.
Pasamos a forma exponencial:

$$\sqrt{3}-i = 2\,e^{-i\pi/6} \quad \Longrightarrow \quad (\sqrt{3}-i)^6 = (2e^{-i\pi/6})^6 = 2^6 e^{-i\pi} = 64\,e^{-i\pi}.$$

1.4

Representa los siguientes subconjuntos del plano complejo $\mathbb{C}$.
(a) $\Omega = \{\, z \in \mathbb{C} : \ |z-2+i| \leq 1 \,\}$.

$$|z-2+i| \leq 1 \iff |z-(2-i)| \leq 1 \implies \Omega = \overline{D}(2-i,1),$$

lo que quedaría como un disco centrado en $2-i$ y de radio 1.
c) $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : |2-4| \geq |2i|\}$ Para analizarlo, nos fijamos en que $z-2i$ tiene la misma distancia a 0 que a 4.
Así, $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : \Re(z) \leq 2\}$

1.8 - Calcula:

c)

$$\sqrt[5]{-1-i} = \sqrt[5]{w}\left[\cos\left(\frac{\arg w + 2k\pi}{5}\right) + i\sin\left(\frac{\arg w + 2k\pi}{5}\right)\right], \quad k = 0,1,2,3,4$$

Aplicamos la fórmula a nuestro caso, para ello calculamos el módulo y argumento:

$$|-1-i| = \sqrt{2}$$

$$\arg(-1-i) = -\frac{3\pi}{4}$$

$$= \sqrt[5]{\sqrt{2}}\left[\cos\left(\frac{-3\pi}{20}\right) + i\sin\left(\frac{-3\pi}{20}\right)\right]\dots$$

Teorema: Sea $f : \Omega \to \mathbb{C}$. Entonces, denotando $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$: Si f es holomorfa en z_0, es decir, existe la derivada en z_0, entonces existen las derivadas parciales de u y v verificando las llamadas *ecuaciones de Cauchy-Riemann (C-R)* dadas por:

$$\begin{cases} u_x(x_0,y_0) = v_y(x_0,y_0) \\ u_y(x_0,y_0) = -v_x(x_0,y_0) \end{cases}$$

donde $u_x(x_0,y_0)=\dfrac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0),\ v_x(x_0,y_0)=\dfrac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0)$
Además

$$f'(z_0)=u_x(x_0,y_0)+iv_x(x_0,y_0)$$

Demostración:

$$\exists f'(z_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{u(x_0+t,y_0)+iv(x_0+t,y_0)-u(x_0,y_0)-iv(x_0,y_0)}{t}$$

$$=u_x(x_0,y_0)+iv_x(x_0,y_0)$$

$$\lim_{t\to 0}\frac{i\Big(v(x_0,y_0+t)-v(x_0,y_0)\Big)-\Big(u(x_0,y_0+t)-u(x_0,y_0)\Big)}{it}=-iv_y(x_0,y_0)+u_y(x_0,y_0)$$

Ejemplo: Analicemos que $f(z)=z$ cumple las ecuaciones de Cauchy-Riemann

$$f(x+iy)=x+iy\Rightarrow\begin{cases}u(x,y)=x\\ v(x,y)=y\end{cases}$$

Recordando las ecuaciones de Cauchy-Riemann

$$\text{(CR)}\qquad\begin{cases}u_x(x_0,y_0)=v_y(x_0,y_0)\\ u_y(x_0,y_0)=-v_x(x_0,y_0)\end{cases}\qquad\Rightarrow\begin{cases}1=1\\ 0=0\end{cases}$$

Además:

$$f'(z)=u_x(x+iy)+iv_x(x,y)=v_y(x,y)+iu_x(x,y)=1$$

Observación: Ya sabíamos que $f(z)=z$ es holomorfa por definición.
Ejemplo: Analiza si $f(z)=z^2$ cumple las ecuaciones de Cauchy-Riemann

$$f(x+iy)=(x+iy)(x+iy)=(x^2-y^2)+i(2xy)\Rightarrow\begin{cases}u(x,y)=x^2-y^2\\ v(x,y)=2xy\end{cases}$$

$$\text{(C-R)}\qquad\begin{cases}u_x(x,y)=2x=v_y(x,y)\\ u_y(x,y)=-2y=-v_x(x,y)\end{cases}$$

Además:

$$f'(z) = u_x(x, y) + iv_x(x, y) = 2x + i2y = 2(x + iy) = 2z$$

Ejemplo: Analicemos si $f(z) = \bar{z}$ es holomorfa usando las ecuaciones de Cauchy-Riemann

$$f(x + iy) = x - iy \Rightarrow \begin{cases} u(x, y) = x \\ v(x, y) = -y \end{cases}$$

$$f(z) = \bar{z} \quad \text{no es holomorfa.}$$

Ejemplo: Analicemos si $f(z) = |z|^2$ es holomorfa usando las ecuaciones de Cauchy-Riemann

$$f(x + iy) = x^2 + y^2 \Rightarrow \begin{cases} u(x, y) = x^2 + y^2 \\ v(x, y) = 0 \end{cases}$$

Aplicamos las ecuaciones de Cauchy-Riemann

$$\text{(C-R)} \quad \begin{cases} 2x = 0 \\ 2y = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \text{Si } z \neq 0 \Rightarrow f(z) = |z|^2 \text{ no es holomorfa}$$

No obstante, en $z = 0$ se cumplen las ecuaciones de Cauchy-Riemann $\not\Rightarrow$ f sea holomorfa en $z = 0$

Analicemos por definición si $f(z) = |z|^2$ es holomorfa en $z = 0$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(0 + h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{|h|^2 - 0}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{|h|^2}{h} = \lim_{h \to 0} \bar{h} = 0$$

Por lo tanto $f(z) = |z|^2$ es holomorfa en $z = 0$

Proposición: Sea $f : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(x+iy) = u(x, y)+iv(x, y)$. Entonces

f es holomorfa en $z_0 \Rightarrow u, v : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ son diferenciables en (x_0, y_0) y se cumplen las ecuaciones de Cauchy-Riemann

$$\begin{cases} u_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0) \\ u_y(x_0, y_0) = -v_x(x_0, y_0) \end{cases}$$

Ejemplo: Analicemos por definición si $f(z) = |z|$ es holomorfa en $z_0 \in \mathbb{C}$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{|z_0 + h| - |z_0|}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{|h|}{h}$$

Vamos a acercarnos a 0 de varias formas diferentes:

- $\lim_{h\to 0^+} \frac{h}{h} = 1$
- $\lim_{h\to 0^-} \frac{-h}{h} = -1$

Como

$$\lim_{h\to 0^+} \neq \lim_{h\to 0^-}$$

entonces concluimos que f no es holomorfa en z_0.

Acercarme de formas distintas y que dé diferente garantiza que no es holomorfa. Pero si da lo mismo no me garantiza que sea holomorfa.

Proposición: Sean $f, g : \Omega \to \mathbb{C}$ y $\alpha \in \mathbb{C}$. Entonces:

- $f + g$ es holomorfa y cumple $(f+g)'(z) = f'(z) + g'(z)$
- αf es holomorfa y cumple $(\alpha f)'(z) = \alpha f'(z)$
- $f \cdot g$ es holomorfa y cumple $(f \cdot g)' = f'g + fg'$
- $\frac{f}{g}$ es holomorfa y cumple $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$
- $f(g(z))$ es holomorfa y cumple $(f \circ g)'(z) = f'(g(z)) \cdot g'(z)$