

Apuntes de Variable Compleja

Luis López

Septiembre 2025

Índice

1. Números complejos	4
1.1. Teoría y estructura elemental	4
1.2. Introducción elemental	4
1.3. Propiedades elementales	4
1.4. Forma polar y geometría de los números complejos	5

Introducción

Los **números complejos**, denotados por \mathbb{C} , constituyen una extensión de los números reales \mathbb{R} , cumpliéndose que $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. A diferencia de los reales, los complejos forman un *cuerpo algebraicamente cerrado*, lo que significa que todo polinomio con coeficientes complejos admite todas sus raíces en \mathbb{C} .

Todo número complejo puede escribirse como

$$z = x + iy,$$

donde $x, y \in \mathbb{R}$ e i es la unidad imaginaria ($i^2 = -1$). También pueden representarse en *forma polar*, mediante su módulo y argumento.

El conjunto \mathbb{C} no solo es fundamental en álgebra y análisis, sino que resulta indispensable en múltiples áreas de las matemáticas aplicadas y la física. Asimismo, los números complejos son herramientas habituales en ingeniería.

1. Números complejos

1.1 Teoría y estructura elemental

La imposibilidad de resolver ciertas ecuaciones con números reales nos obliga a introducir los **números imaginarios**, definidos a partir de la unidad i tal que

$$i^2 = -1.$$

1.2 Introducción elemental

Denotamos los números complejos como

$$\mathbb{C} = \{z = a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}\}.$$

Dado $z = a + bi \in \mathbb{C}$, se definen:

- Parte real: $\Re(z) = a \in \mathbb{R}$.
- Parte imaginaria: $\Im(z) = b \in \mathbb{R}$.
- Módulo: $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.
- Conjugado: $\bar{z} = a - bi$.

Ejemplo. Sea $z = 1 - 2i$. Entonces:

$$\Re(1 - 2i) = 1, \quad \Im(1 - 2i) = -2, \quad \overline{1 - 2i} = 1 + 2i, \quad |1 - 2i| = \sqrt{1^2 + (-2)^2} = \sqrt{5}.$$

1.3 Propiedades elementales

1. $\bar{\bar{z}} = z$. Demostración: si $z = a + bi \Rightarrow \bar{z} = a - bi \Rightarrow \bar{\bar{z}} = a + bi = z$.
2. $z + \bar{z} = 2\Re(z)$.
3. $z - \bar{z} = 2i\Im(z)$.
4. $|\bar{z}| = |z|$.
5. $\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z'}$.
6. $\overline{z \cdot z'} = \bar{z} \cdot \bar{z'}$.

Además, tenemos las siguientes propiedades asociadas al **módulo**:

1. $|\Re(z)| \leq |z|$.

2. $|\Im(z)| \leq |z|$. En efecto, $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} \geq |b|$.

3. **Desigualdad triangular:** $|z + w| \leq |z| + |w| \quad \forall z, w \in \mathbb{C}$.

4. $z \cdot \bar{z} = |z|^2$.

5. **Desigualdad triangular inversa:** $||z| - |z'|| \leq |z - z'|$.

Todas estas propiedades, junto con la suma y producto de números complejos, generalizan las propiedades de los números reales:

$$z + z' = (x + iy) + (x' + iy') = (x + x') + (y + y')i \in \mathbb{C},$$

$$z \cdot z' = (x + iy)(x' + iy') = (xx' - yy') + (xy' + x'y)i \in \mathbb{C}.$$

En particular, si $z = a + bi$, se cumple que

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2},$$

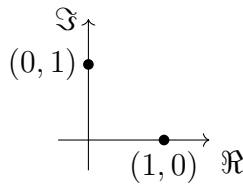
es decir, el módulo de z coincide con el valor absoluto en los reales.

1.4 Forma polar y geometría de los números complejos

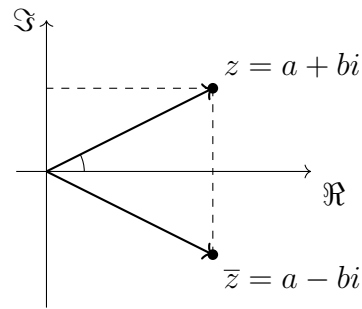
El conjunto \mathbb{C} se puede representar como \mathbb{R}^2 mediante la asignación

$$z = a + bi \longmapsto (a, b) \in \mathbb{R}^2.$$

De esta forma obtenemos el denominado **plano complejo**; por lo tanto, la interpretación geométrica de *todo lo visto* sería:



Representación de 1 e i



Geometría de z y \bar{z}

Si $z = \frac{|z|}{|z|}z = |z|\frac{z}{|z|} = |z|(\cos \theta + i \sin \theta)$, decimos que z está en **forma polar**.

Sea:

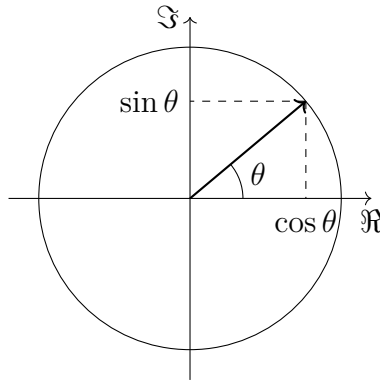
$$w = \frac{z}{|z|} \Rightarrow |w| = \frac{|z|}{|z|} = 1.$$

Es decir, $\frac{z}{|z|}$ es un número complejo de módulo 1, luego existe $\theta \in \mathbb{R}$ tal que

$$\frac{z}{|z|} = \cos \theta + i \sin \theta.$$

Ejemplo. El número complejo $1 + i$ en forma polar es:

$$1 + i = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right).$$



Circunferencia unitaria: $w = \cos \theta + i \sin \theta$

Vemos que un mismo número complejo tiene infinitas representaciones polares por culpa del ángulo θ , llamado **argumento de z** . Para solucionar este problema introducimos el **argumento principal** de z , que es aquel ángulo $-\pi < \theta \leq \pi$ que verifica:

$$z = |z|(\cos \theta + i \sin \theta), \quad \theta = \arg(z).$$

Además, si $z = x + iy$, entonces:

$$\arg(z) = \begin{cases} \arctan\left(\frac{y}{x}\right), & x > 0, y \geq 0, \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi, & x < 0, y \geq 0, \\ \pi, & x < 0, y = 0, \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) - \pi, & x < 0, y < 0, \\ -\frac{\pi}{2}, & x = 0, y < 0, \\ \frac{\pi}{2}, & x = 0, y > 0, \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right), & x > 0, y < 0. \end{cases}$$

Nótese que se verifica que

$$\arg(z) = \arg(z) + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$