Apuntes Ecuaciones Diferenciales

Luis López

September 2025

Índice

Introducción a las ecuaciones diferenciales.

Una **ecuación diferencial** es una relación matemática en la que intervienen una función desconocida y sus derivadas. Su objetivo es describir cómo varía una magnitud en función de otra, estableciendo vínculos entre la propia magnitud y su tasa de cambio.

Las ecuaciones diferenciales son fundamentales porque numerosos fenómenos naturales y tecnológicos se formulan de esta manera. En física, por ejemplo, permiten estudiar el movimiento de partículas (leyes de Newton), la propagación del calor, las ondas o el comportamiento de los circuitos eléctricos. En otras disciplinas también son esenciales: en biología modelan el crecimiento de poblaciones y la difusión de sustancias, en economía describen la evolución de sistemas dinámicos, y en ingeniería sirven para analizar vibraciones, fluidos o sistemas de control.

En definitiva, las ecuaciones diferenciales constituyen una herramienta matemática clave que conecta las teorías con la realidad dinámica, pues gran parte de los procesos que nos rodean se fundamentan en cambios que pueden expresarse mediante estas ecuaciones.

1. Ecuaciones diferenciales ordinarias

Se denomina **ecuación diferencial ordinaria (EDO)** a toda ecuación

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0$$

donde x es la variable independiente, y la variable dependiente y $y', y'', \ldots$ son derivadas de la variable dependiente. Llamamos **orden de la ecuación** al grado de la derivada más grande que aparece en la ecuación.

Se denomina **solución** de una EDO en (a, b) a toda función definida en (a, b) junto a sus derivadas de orden n, tal que al sustituirla en la EDO da una identidad respecto a x en (a, b).

Ejemplo:

$$y' = x^5 \quad \Rightarrow \quad y = \tfrac{x^6}{6} + C$$

Ecuación de primer orden $\Rightarrow$ 1 constante arbitraria.

$$y'' = y' \quad \Rightarrow \quad y = C_1 e^x + C_2$$

Si una EDO involucra varias variables independientes, se denomina **ecuación en derivadas parciales (EDP)**:

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n, \tfrac{\partial y}{\partial x_1}, \tfrac{\partial y}{\partial x_2}, \ldots, \tfrac{\partial^2 y}{\partial x_i \partial x_j}, \ldots) = 0$$

A la gráfica de una solución de una EDO también se le llama **integral**.

EDOs de primer orden

La forma más general de una EDO de primer orden es:

$$F(x, y, y') = 0 \quad \text{(forma implícita)}$$

$$y' = f(x, y) \quad \text{(forma explícita).}$$

Se dice que una EDO es **autónoma** si no depende explícitamente de la variable independiente, es decir:

$$y' = f(y) \quad \Leftrightarrow \quad F(y, y') = 0.$$

1.1 Problema de Cauchy

Consiste en la búsqueda de la solución de la EDO

$$y' = f(x, y) \quad \text{tal que} \quad y(x_0) = y_0$$

es decir, se añade una **condición inicial**:

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Ejemplo:

$$y' = y \quad \Rightarrow \quad y = Ce^x, \qquad y = e^x \text{ si } y(0) = 1$$

Ya que $1 = Ce^0 \Rightarrow C = 1$.

1.2 Teorema de Picard–Lindelöf (existencia y unicidad)

El problema de Cauchy tiene una única solución si, y solo si, $f(x, y)$ y $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ son continuas en (x, y). Es decir, si $f(x, y)$ y $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ son continuas en una cierta región del plano x, y, entonces $\exists!\ y(x)$ que pasa por cada punto de dicha región.

Ejemplo:

$$y' = \frac{y}{x} \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad \ln y = \ln x + C \quad \Rightarrow \quad y = Cx$$

Si $y(x_0) = y_0$ entonces $y_0 = Cx_0 \quad \Rightarrow \quad C = \dfrac{y_0}{x_0}$.

Por definición, la **solución general** de una EDO es la familia de curvas $y(x, C)$ que satisfacen $y' = f(x, y)$ para distintos valores admisibles de C.

Una **solución particular** es aquella que además cumple la condición inicial $y(x_0) = y_0$, es decir, es una curva concreta dentro de la familia general.

$$y' = y, \quad y = Ce^x \quad \Rightarrow \quad \text{solución general}$$
$$y_p = e^x \quad \Rightarrow \quad \text{solución particular}$$

2. Tipos de EDOs

2.1 EDOs de variables separables

Las EDOs de variables separadas son aquellas en las que se puede reescribir la ecuación diferencial de forma que cada variable quede en un lado distinto de la igualdad. Esto permite integrar ambas partes por separado para encontrar la solución. Suelen ser sencillas de resolver y aparecen con frecuencia en problemas físicos y de crecimiento poblacional. Además, siempre requieren una condición inicial para determinar la constante de integración y obtener la solución particular.

Una EDO de variables separables tiene la forma:

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y),$$

Que se puede reescribir como:

$$\frac{1}{g(y)}\,dy = f(x)\,dx.$$

Ejemplo:

$$3e^x \tan(y)\,dx = -(2 - e^x)\sec^2(y)\,dy$$

Integramos en ambos lados:

$$\int \frac{3e^x}{2 - e^x}\,dx = \int \frac{-\sec^2(y)}{\tan y}\,dy$$

Resolviendo:

$$-3\ln|2 - e^x| = -\ln|\tan y| + C$$

Despejando:

$$\tan(y) = D(e^x - 2)^3 \quad \Rightarrow \quad y = \arctan\Big(D(e^x - 2)^3\Big).$$

2.2 EDOs reducibles a separables

Las EDOs reducibles a variables separadas son aquellas que inicialmente no están en forma separable, pero pueden transformarse mediante un cambio de variable o manipulación algebraica para lograrlo. Una vez separadas, se resuelven igual que las de variables separadas, integrando cada lado por separado.

Son del tipo:

$$\frac{dy}{dx} = f(ax + by + c), \qquad a, b, c \text{ son constantes definidas.}$$

Se resuelven mediante el cambio de variable:

$$z = ax + by + c.$$

Entonces:

$$z' = a + b\,y' \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{z' - a}{b}.$$

Sustituyendo en la ecuación original:

$$z' = \frac{dz}{dx} = a + b\,f(z),$$

Integrando:

$$\int \frac{dz}{a + b\,f(z)} = x + D.$$

Ejemplo:

$$(x + y)^2\,y' = a^2, \qquad a = \text{cte.}$$

Reordenamos:

$$y' = \frac{a^2}{(x + y)^2}.$$

Hacemos el cambio de variable:

$$z = x + y \quad \Rightarrow \quad z' = 1 + y' \quad \Rightarrow \quad y' = z' - 1.$$

Sustituyendo:

$$z' - 1 = \frac{a^2}{z^2} \quad \Rightarrow \quad z' = 1 + \frac{a^2}{z^2} \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dz}{1 + \frac{a^2}{z^2}} = x + D.$$

Integramos y operamos:

$$\int \frac{dz}{1+\frac{a^2}{z^2}} = \int \frac{z^2}{z^2+a^2}\,dz = \int \frac{z^2+a^2-a^2}{z^2+a^2}\,dz.$$

$$\int \frac{z^2+a^2}{z^2+a^2}\,dz - \int \frac{a^2}{z^2+a^2}\,dz = z - a^2\int \frac{1}{1+(\frac{z}{a})^2}\,dz = z - a\arctan\Big(\frac{z}{a}\Big).$$

Deshacemos el cambio de variable $z = x + y$

$$z - \operatorname{arc\,tg}\Big(\tfrac{z}{a}\Big) = x + D$$

$$x + y - \operatorname{arc\,tg}\Big(\tfrac{x+y}{a}\Big) = x + D \quad \Rightarrow \quad \text{Si} \quad y(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad D = 0$$

$$y_g = \operatorname{arc\,tg}\Big(\tfrac{x+y}{a}\Big) + D \quad \Rightarrow \quad y_p = \operatorname{arc\,tg}\Big(\tfrac{x+y}{a}\Big)$$

2.3 EDO's homogéneas

Las EDOs homogéneas son aquellas en las que la función y su derivada dependen de la relación entre las variables y no de ellas por separado. Se suelen resolver mediante un cambio de variable que simplifica la ecuación y permite separarla.

Se dice que $f(x, y)$ es homogénea de grado n si:

$$f(tx, ty) = t^n f(x, y)$$

Se dice que $y' = f(x, y)$ es homogénea si $f(x, y)$ es homogénea de grado 0:

$$f(tx, ty) = f(x, y), \qquad f(x, y) = \tfrac{y}{x}, \qquad f(tx, ty) = \tfrac{ty}{tx} = \tfrac{y}{x}$$

$$f(x, y) = xy \quad \Rightarrow \quad f(tx, ty) = t^2xy$$

Ejemplo:

$$f(x, y) = \Big(\tfrac{x}{y}\Big)^2 \quad \Rightarrow \quad \text{grado } 0$$

$$xy' = \sqrt{x^2 - y^2} + y \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{\sqrt{x^2 - y^2}}{\sqrt{x^2}} + \frac{y}{x}$$

$$\Rightarrow \quad y' = \sqrt{1 - \Big(\tfrac{y}{x}\Big)^2} + \frac{y}{x}$$

Hacemos el cambio de variable $z = \frac{y}{x}$

$$z' = \frac{y'x - y}{x^2} \quad \Rightarrow \quad y' = xz' + y$$

Operando:

$$y' = \sqrt{1 - z^2} + z \quad \Rightarrow \quad z + z'x = \sqrt{1 - z^2} + z$$

$$\Rightarrow \quad z' = \frac{\sqrt{1 - z^2}}{x} = \frac{dz}{dx}$$

Integrando:

$$\int \frac{dz}{\sqrt{1 - z^2}} = \int \frac{dx}{x} \ \Rightarrow \ \arcsin(z) = \ln|x| + C \ \Rightarrow \ z = \sin(\ln|x| + C)$$

Desacemos el cambio de variable $z = \frac{y}{x}$

$$y = x \sin(\ln|x| + C)$$

Familia de soluciones:

$$y' = \frac{dy}{dx} = f\left(\frac{ax + by + c}{a_1x + b_1y + c_1}\right)$$

Si $c = c_1 = 0$:

$$y' = \frac{dy}{dx} = f\left(\frac{ax + by}{a_1x + b_1y}\right) = f\left(\frac{a + b\frac{y}{x}}{a_1 + b_1\frac{y}{x}}\right) = f\left(\frac{2 + 3\frac{y}{x}}{5 + 4\frac{y}{x}}\right)$$

Cambio de variable:

$$z = \frac{y}{x} \quad \Rightarrow \quad y' = z'x + z$$

$$z'x + z = h\left(\frac{2 + 3z}{5 + 4z}\right)$$

Si $c \neq 0$ o $c_1 \neq 0$, no es homogénea, entonces:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{a_1}{a} = \frac{b_1}{b} = d \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} a_1 = da \\ \\ b_1 = db \end{bmatrix}$$

El cambio de variable sería:

$$z = ax + by$$

$$y' = f\left(\frac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1}\right) = f\left(\frac{ax+by+c}{d(ax+by)+c_1}\right) = g(ax+by) = g(z)$$

Ejemplo:

$$y' = \frac{x+y+1}{-2x-2y+1} = \frac{(x+y)+1}{-2(x+y)+1}$$

Hacemos el cambio:

$$z = x+y \quad \Rightarrow \quad z'-1 = \frac{z+1}{-2z+1}$$

Operando:

$$z' = \frac{z+1}{-2z+1} + 1 = \frac{-2z+1+z+1}{-2z+1} = \frac{-z+2}{-2z+1} = \frac{dz}{dx} = z'$$

$$\frac{-2z+1}{-z+2}dz = dx$$

Integrando:

$$C_1 + x = \int \frac{-2z+1}{-z+2}dz = \int \frac{-2z}{-z+2}dz + \int \frac{1}{-z+2}dz$$

$$= -2z + 2 + \int \frac{1}{-z+2}dz = -\ln|2-z|$$

Si c o $c_1 \neq 0$ y el determinante $\neq 0$:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = \xi + h \\ y = \eta + k \end{cases}$$

Entonces:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{d\eta}{d\xi} \cdot \frac{d\xi}{dx} = \frac{d\eta}{d\xi} \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{d\eta}{d\xi}$$

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{a\xi + b\eta + ah + bk + c}{a_1\xi + b_1\eta + a_1h + b_1k + c_1} = \frac{a + b\frac{\eta}{\xi}}{a_1 + b_1\frac{\eta}{\xi}} = \frac{d\eta}{d\xi}$$

Ejemplo:

$$(x+y-2)\,dx+(x-y+4)\,dy=0$$

Hacemos el cambio de variable:

$$y'=\frac{x+y-2}{-x+y-4} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} x=\xi+h \\ y=\eta+k \end{cases}$$

Si sustituimos quedaría:

$$\frac{d\eta}{d\xi}=\frac{\xi+h+\eta+k-2}{-\xi-h+\eta+k-4} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} h+k=2 \\ -h+k=4 \end{cases} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} h=-1 \\ k=3 \end{cases}$$

Entonces:

$$\frac{d\eta}{d\xi}=\frac{\xi+\eta}{-\xi+\eta}=\frac{1+\frac{\eta}{\xi}}{-1+\frac{\eta}{\xi}}$$

Cambio de variable:

$$z=\frac{\eta}{\xi} \quad\Rightarrow\quad \eta=z\xi \quad\Rightarrow\quad \frac{d\eta}{d\xi}=\frac{d}{d\xi}(\xi z)=\xi\frac{dz}{d\xi}+z$$

Aplicando la sustitución:

$$\frac{1+z}{-1+z}=\frac{dz}{d\xi}\,\xi+z \quad\Rightarrow\quad \frac{1+z+z+z^2}{-1+z}=-\frac{dz}{d\xi}\,\xi$$

Integramos:

$$\int\frac{z-1}{-z^2+2z+1}\,dz=\int\frac{d\xi}{\xi} \quad\Rightarrow\quad \ln|1+2z-z^2|=\ln|\xi^{-2}|+C=\ln\left|\frac{D}{\xi^2}\right|$$

Aplicamos exponencial en ambos lados:

$$1+2z-z^2=\frac{D}{\xi^2} \quad\Rightarrow\quad \xi^2+2z\xi^2-z^2\xi^2=D$$

Deshacemos el cambio de variable:

$$(x+1)^2+2(x+1)(y-3)-(y-3)^2=D$$

2.4 EDOs exactas

Las ecuaciones diferenciales exactas son aquellas en las que existe una función potencial cuyo diferencial total coincide con la ecuación dada. Su solución se obtiene hallando dicha función potencial f(x,y) tal que sus derivadas parciales coincidan con los coeficientes de la ecuación.
Son de la forma:
$$f(x,y) = c \quad \Rightarrow \quad y' = 0$$

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}\,dy = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}}{\dfrac{\partial f}{\partial y}} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} M(x,y) = \dfrac{\partial f}{\partial x} \\ N(x,y) = \dfrac{\partial f}{\partial y} \end{cases}$$

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy \quad \Leftrightarrow \quad \exists f \ \text{ tal que } f(x,y) = \text{constante.}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = M \quad \Rightarrow \quad f(x,y) = \int M\,dx + g(y)$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = N \quad \Rightarrow \quad \int \frac{\partial M}{\partial y}\,dx + g'(y)$$

Por lo tanto,

$$g'(y) = N - \int \frac{\partial M}{\partial y}\,dx \quad \Rightarrow \quad g(y) = \int \left[N - \int \frac{\partial M}{\partial y}\,dx\right] dy + C$$

"Demostración"

Podemos hacer esto ya que si $f(x,y) = c \quad \Rightarrow \quad df = 0$, entonces

$$\frac{\partial f}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}\,dy = 0.$$

Entonces:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial y}.$$

Ejemplo:

$$(x+y-2)\,dx+(x-y+4)\,dy=0$$

Llamamos M a la primera parte y N a la segunda:

$$M=(x+y-2)\,dx, \qquad N=(x-y+4)\,dy$$

Comprobamos que sea exacta:

$$\begin{cases} \frac{\partial M}{\partial y}=1 \\ \frac{\partial N}{\partial x}=1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \text{Es exacta.}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=x+y-2$$

Integramos:

$$f=\int (x+y-2)\,dx+g(y)=\frac{x^2}{2}+xy-2x+g(y)$$

$$N=\frac{\partial f}{\partial y}=x+g'(y)=x-y+4 \;\Rightarrow\; g(y)=\int(-y+4)\,dy=-\frac{y^2}{2}+4y+C$$

Resultando en:

$$f(x,y)=\frac{x^2}{2}-2x-\frac{y^2}{2}+4y+xy+C=0$$

Ejemplo:

$$(\operatorname{sen}(xy)+xy\cos(xy))\,dx+x^2\cos(xy)\,dy=0$$

Donde:

$$\begin{cases} (\operatorname{sen}(xy)+xy\cos(xy))\,dx \quad \longrightarrow \; M \\ x^2\cos(xy)\,dy \quad \longrightarrow \; N \end{cases}$$

Comprobamos que sea exacta.

$$\begin{cases} \frac{\partial M}{\partial y}=x\cos(xy)+x\cos(xy)+xy(-x\operatorname{sen}(xy)) \\ \frac{\partial N}{\partial x}=2x\cos(xy)-x^2y\operatorname{sen}(xy) \end{cases}$$

Queda comprobado que es una EDO exacta ya que son iguales.

Resolvemos:

$$f = \int \Big[x^2 \cos(xy)\Big]\, dy + g(x) = -x\ \text{sen}(xy) + g(x)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = M \;\Rightarrow\; -\text{sen}(xy) - xy\cos(xy) + g'(x) = \text{sen}(xy) + xy\cos(xy)$$

$$g'(x) = 2\,\text{sen}(xy) + 2xy\cos(xy)$$

$$g(x) = \int \Big[\,2\,\text{sen}(xy) + 2xy\cos(xy)\,\Big]\, dx$$

2.5 EDO's cuasi-exactas

Las ecuaciones diferenciales cuasiexactas son aquellas que no son exactas inicialmente, pero pueden convertirse en exactas al multiplicarlas por un factor integrante adecuado. Una vez transformadas, se resuelven como una ecuación exacta encontrando la función potencial cuya derivada total reproduce la ecuación original.

$$M\,dx + N\,dy = 0 \;\Rightarrow\; \frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x} \qquad \mu(x,y) = \text{factor integrante.}$$

Si $\exists\, \mu(x,y)$ tal que $\mu(x,y)M\,dx + \mu(x,y)N\,dy = 0$ es una EDO exacta, entonces la EDO original es cuasi-exacta.

Supongamos que $\exists\, f(x,y) = c,\ \frac{\partial f}{\partial x} = \mu M$ y $\frac{\partial f}{\partial y} = \mu N$
Entonces:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} \;\Rightarrow\; \frac{\partial}{\partial y}(\mu M) = \frac{\partial}{\partial x}(\mu N)$$

$$N\,\frac{\partial \mu}{\partial x} + \mu\,\frac{\partial N}{\partial x} = M\,\frac{\partial \mu}{\partial y} + \mu\,\frac{\partial M}{\partial y} \;\Rightarrow\; N\,\frac{\partial \mu}{\partial x} - M\,\frac{\partial \mu}{\partial y} = \mu\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)$$

- Si: $\dfrac{\partial_y M - \partial_x N}{N}$ solo depende de $x \Rightarrow \mu = \mu(x)$

$$\mu = \mu(x) \Rightarrow \quad \frac{\partial \mu}{\partial y} = 0 \Rightarrow \quad N\,\frac{\partial \mu}{\partial x} = \mu\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)$$
$$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} dx$$

Resolvemos:

$$\int \frac{d\mu}{\mu} = \int g(x)\,dx \;\Rightarrow\; \ln\mu = \int g(x)\,dx + \alpha \;\Rightarrow\; \mu(x) = c\,e^{\int g(x)\,dx}$$

- Si: $\dfrac{\partial_x N - \partial_y M}{M}$ solo depende de $y \Rightarrow \mu = \mu(y)$

$$\mu(y) = e^{\int h(y)\,dy} \qquad \text{con} \qquad h(y) = \frac{\partial_x N - \partial_y M}{M}$$

Ejemplo:

$$(x + y^2)\,dx - 2xy\,dy = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \frac{\partial M}{\partial y} = 2y, \\ \frac{\partial N}{\partial x} = -2y \end{cases} \qquad \Rightarrow \;\text{No es exacta.}$$

Reslvemos:

$$\frac{\partial_y M - \partial_x N}{N} = \frac{2y - (-2y)}{-2xy} = \frac{4y}{-2xy} = -\frac{2}{x} = g(y) = 0 \quad \Rightarrow \quad \mu = \mu(x)$$

Integrando:

$$\int \frac{d\mu}{\mu} = \int -\frac{2}{x}\,dx \quad \Rightarrow \quad \ln\mu = -2\ln x + C = \ln\left(\frac{C}{x^2}\right) \quad \Rightarrow \quad \mu(x) = \frac{C}{x^2}$$

Multiplicamos la EDO por el factor integrante:

$$\mu M\,dx + \mu N\,dy = 0 \quad\Rightarrow\quad \frac{1}{x^2}\Big[(x+y^2)\,dx - 2xy\,dy\Big] = 0$$

$$\left(\frac{1}{x} + \frac{y^2}{x^2}\right)dx - \frac{2y}{x}\,dy = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y^2}{x^2} + g'(x) = \frac{1}{x} + \frac{y^2}{x^2} \quad\Rightarrow\quad g'(y) = \frac{-1}{x} \quad\Rightarrow\quad g(x) = \ln x + C$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-2y}{x} \quad\Rightarrow\quad f = \int \frac{-2y}{x}\,dy + g(x) = \frac{-y^2}{x} + g(x)$$

$$f(x,y) = \frac{-y^2}{x} + \ln x + C$$

2.6 EDOs lineales de primer orden

Las ecuaciones diferenciales lineales de primer orden se resuelven usando un factor integrante que permite escribir la ecuación como una derivada total, facilitando así la integración directa para encontrar la solución general.

La forma general es:

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)$$

Una EDO es lineal si la combinación lineal de soluciones también es solución. Si y_1, y_2 son soluciones $\;\Rightarrow\;$ $\alpha y_1 + \beta y_2$ también es solución.

Hay dos tipos:

$$\text{Si } q(x) = 0 \quad\Rightarrow\quad \text{EDO homogénea}$$

$$\text{Si } q(x) \neq 0 \quad\Rightarrow\quad \text{EDO inhomogénea}$$

Es decir:

$$\frac{d}{dx}(\alpha y_1 + \beta y_2) + p(x)(\alpha y_1 + \beta y_2) = \alpha\frac{dy_1}{dx} + \beta\frac{dy_2}{dx} + \alpha p(x)y_1 + \beta p(x)y_2$$

$$= \alpha\left(\frac{dy_1}{dx} + p(x)y_1\right) + \beta\left(\frac{dy_2}{dx} + p(x)y_2\right) = (\alpha+\beta)q(x)$$

2.7 Homogénea q(x)=0

$$\frac{dy}{dx}+p(x)y=0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{y}=-p(x)\,dx \quad \Rightarrow \quad \ln y=-\int p(x)\,dx \quad \Rightarrow \quad y=Ce^{-\int p(x)\,dx}$$

2.8 Inhomogénea ($q(x) \neq 0$)

$$\frac{dy}{dx}+p(x)y=g(x)$$

$$y_g(x)=y_h(x)+y_p(x)$$

$$\frac{d}{dx}(y_h+y_p)+p(x)(y_h+y_p)=\frac{dy}{dx}+p(x)y=q(x)$$

Primero resuelvo la homogénea:

$$y_h=Ce^{-\int p(x)\,dx}$$

Luego la particular:

$$y_p=C(x)y_h \quad \Rightarrow \quad y_p=C(x)e^{-\int p(x)\,dx}$$

$$\frac{dy_p}{dx}+p(x)y_p=C'(x)y_h+C(x)+y_h'+p(x)y_h=q(x)$$

$$C(x)\int \frac{q(x)}{y_h(x)}\,dx+D \quad \Rightarrow \quad y_p=Dy_h+y_h\int \frac{q(x)}{y_h}\,dx$$

Ejemplo:

$$y'+2y=e^{-x}$$

Primero resolvemos la homogénea:

$$y'+2y=0 \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dy}{y}=\int -2dx \quad \Rightarrow \quad \ln y=-2x$$

$$y_h=Ce^{-2x}$$

Ahora resolvemos la particular:

$$y_p = C(x)e^{-2x} \quad \Rightarrow \quad y_p' = C'(x)e^{-2x} - 2C(x)e^{-2x}$$

$$C'(x)e^{-2x} - 2C(x)e^{-2x} + 2C(x)e^{-2x} = e^{-x} \quad \Rightarrow \quad C''(x) = e^{x}$$

$$C'(x) = e^{x} \quad \Rightarrow \quad C(x) = \int e^{x} dx + D = e^{x} + D$$

La solución particular quedaría:

$$y_p = (e^{x} + D)e^{-2x} = e^{-x} + De^{-2x}$$

La solución general quedaría:

$$y_g = y_h + y_p = Ce^{-2x} + e^{-x} + De^{-2x} = Ae^{-2x} + e^{-x}$$

Ejemplo:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x\cos y + \operatorname{sen} 2y} \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{dy} = x\cos y + \operatorname{sen} 2y$$

$$\frac{dx}{dy} - x\cos y = \operatorname{sen} 2y \qquad \text{donde} \quad \begin{cases} \cos y = p(y) \\ \operatorname{sen} 2y = q(y) \end{cases} \qquad \begin{array}{l} y' + p(x)\,y = g(x) \\ x' + p(y)\,x = g(y) \end{array}$$

Resolvemos la homogénea:

$$x_h' - x_h \cos y = 0 \;\Rightarrow\; \int \frac{dx_h}{x_h} = \int \cos y\, dy \;\Rightarrow\; \ln x_h = \operatorname{sen} y + D$$

$$x_h = e^{\operatorname{sen} y}$$

Resolvemos la particular:

$$x_p = C(y)e^{\operatorname{sen} y} \;\Rightarrow\; x_p' = C'(y)e^{\operatorname{sen} y} + C(y)\cos y\, e^{\operatorname{sen} y}$$

$$x_p' - y_p \cos y = \operatorname{sen}(2y)$$

$$C'(y)e^{\operatorname{sen} y} + C(y)\cos y\, e^{\operatorname{sen} y} - C(y)e^{\operatorname{sen} y}\cos y = \operatorname{sen} 2y$$

$$C'(y) = e^{\operatorname{sen} y} \;\Rightarrow\; C(y) = \int \operatorname{sen} 2y\, e^{-\operatorname{sen} y}\, dy = 2\int \cos y\, \operatorname{sen} y\, e^{-\operatorname{sen} y}\, dy$$

Hacemos un cambio de variable:

$$z = \operatorname{sen} y \;\Rightarrow\; dz = \cos y \, dy$$

$$2\int \cos y \, \operatorname{sen} y \, e^{-\operatorname{sen} y} \, dy = 2\int z \, e^{-z} \, dz$$

2.9 Método de los coeficientes indeterminados

Las ecuaciones diferenciales con coeficientes indeterminados se resuelven encontrando primero la solución general de la ecuación homogénea asociada y luego una solución particular para la parte no homogénea. Esta última se obtiene proponiendo una forma adecuada según el término independiente y determinando los coeficientes desconocidos.

Ecuaciones de la forma:

$$y' + py = g(x) \quad \rightarrow \quad p = \text{cte}$$

Donde $p(x)$ es "sencilla", es decir, polinómica, exponencial o aritmética.

La solución general es:

$$y_g(x) = y_h(x) + y_p(x)$$

Ejemplo:

$$y' + 2y = e^{-x} \;\Rightarrow\; \begin{cases} p(x) = 2 \\ q(x) = e^{-x} \end{cases}$$

Ecuación homogénea:

$$y' + 2y = 0 \quad \Rightarrow \quad y_h = Ce^{-2x}$$

Solución particular:

$$y_p = Ae^{-x} \quad \Rightarrow \quad y_p' = -Ae^{-x} \quad \Rightarrow \quad y_p' + 2y_p = e^{-x}$$

Sustituyendo en la ecuación:

$$-Ae^{-x} + 2Ae^{-x} = e^{-x} \quad \Rightarrow \quad Ae^{-x} = e^{-x} \quad \Rightarrow \quad A = 1$$

Solución general:

$$y = y_h + y_p = Ce^{-2x} + e^{-x}$$

Ejemplo:

$$y' + y = x^2 + x + 1$$

Resolvemos la homogénea:

$$y' + y = 0 \quad \Rightarrow \quad y_h = Ce^{-x}$$

Buscamos la particular:

$$y_p = Ax^2 + Bx + C \quad \Rightarrow \quad y_p' = 2Ax + B$$

Sustituyendo:

$$2Ax + B + Ax^2 + Bx + C = x^2 + x + 1$$
$$Ax^2 + (2A + B)x + B + C = x^2 + x + 1$$

Igualando coeficientes:

$$\begin{cases} A = 1 \\ 2A + B = 1 \quad \Rightarrow \quad B = 0 \\ B + C = 1 \quad \Rightarrow \quad C = 1 \end{cases}$$

De aquí saco la ecuación particular:

$$y_p = x^2 + 2$$

Y la solución general:

$$y_g = y_h + y_p = Ce^{-x} + x^2 + 2$$

Ejemplo:

$$y' + y = \sin x$$

Primero resolvemos la homogénea:

$$y' + y = 0 \quad \Rightarrow \quad y_h = Ce^{x}$$

Ahora buscamos la particular:

$$y_p = A\sin x + B\cos x \quad \Rightarrow \quad y_p' = A\cos x - B\sin x$$

Sustituyendo:

$$A\cos x - B\sin x + A\sin x + B\cos x = \sin x$$

$$(A-B)\sin x + (A+B)\cos x = \sin x$$

Igualando coeficientes:

$$\begin{cases} A - B = 1 \\ A + B = 0 \end{cases}$$

Resolvemos el sistema:

$$\begin{cases} 2A = 1 \quad \Rightarrow \quad A = \frac{1}{2} \\ A = -B \quad \Rightarrow \quad B = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

La ecuación particular queda:

$$y_p = \tfrac{1}{2}\sin x - \tfrac{1}{2}\cos x$$

Y la ecuación general queda:

$$y = y_h + y_p = Ce^{-x} + \tfrac{1}{2}\sin x - \tfrac{1}{2}\cos x$$

2.10 EDO's de Bernoulli

Las ecuaciones de Bernoulli son no lineales pero pueden transformarse en lineales mediante un cambio de variable adecuado.

Son EDOs de la forma:

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)y^n \quad \text{donde } n \neq 0, 1$$

Se puede reducir a una EDO lineal haciendo un cambio de variable:

$$z = y^{1-n} \quad \Rightarrow \quad z' = (1-n)y^{-n}y'$$

$$y' = \frac{1}{1-n}y^n z' = \frac{1}{1-n}z' z^{\frac{n}{1-n}}$$

Sustituyendo en la ecuación original:

$$\frac{dy}{dx}+p(x)y=q(x)y^n \quad\Rightarrow\quad \frac{1}{1-n}z'z^{\frac{n}{1-n}}+p(x)z^{\frac{1}{1-n}}=q(x)z^{\frac{n}{1-n}}$$

Multiplicando todo por $z^{(1-n)}$:

$$\frac{1}{1-n}z'+p(x)z=q(x)$$

Resultado: una EDO lineal.

Ejemplo

$$y'-xy=-xy^3 \quad\Rightarrow\quad \text{donde} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} p(x)=-x \\ q(x)=-x \end{cases}$$

Hacemos el cambio de variable:

$$z=\frac{1}{y^2}=y^{-2} \quad\Rightarrow\quad y=\frac{1}{\sqrt{z}} \quad\Rightarrow\quad y'=-\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{z^3}}z'$$

Desarrollando:

$$-\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{z^3}}z'-x\frac{1}{\sqrt{z}}=-x\frac{1}{\sqrt{z^3}}$$

Multiplicando por $\sqrt{z^3}$:

$$-\frac{1}{2}z'-xz=-x \quad\Rightarrow\quad z'+2xz=2x$$

Resolviendo la lineal que nos queda

$$z'+2xz=2x$$

Resolviendo la homogénea:

$$z_h'+2xz_h=0 \quad\Rightarrow\quad \frac{dz}{z}=-2x\,dx$$

Integrando:

$$\int\frac{dz}{z}=\int -2x\,dx \quad\Rightarrow\quad \ln z=-x^2$$

$$z_h=Ce^{-x^2}$$

Resolviendo la particular:

$$z_p = Ce^{-x^2} \quad \Rightarrow \quad z_p' = C'(x)e^{-x^2} - 2xCe^{-x^2}$$

Sustituyendo y resolviendo:

$$C'(x)e^{-x^2} - 2xC(x)e^{-x^2} + 2xC(x)e^{-x^2} = 2x$$

$$C(x) = \int 2xe^{x^2}\,dx = e^{x^2}$$

$$z_p = e^{x^2}e^{-x^2} = \frac{e^{x^2}}{e^{x^2}} = 1$$

2.11 EDO's de solución paramétrica

Las ecuaciones diferenciales paramétricas se resuelven expresando la solución en función de un parámetro auxiliar. Este parámetro permite transformar la ecuación original en una o varias más sencillas, que al resolverse proporcionan la solución en forma paramétrica.

Son del tipo:

$$\begin{cases} x = x(p) \\ y = y(p) \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \text{es una curva de forma paramétrica.}$$

Ejemplo:

$$y' = p$$

$$y' = 2x \quad \Rightarrow \quad y = x^2$$

Si pasamos a forma paramétrica:

$$x(p) = \frac{p}{2}, \quad y(p) = \frac{p^2}{4}$$

1. EDO's del tipo F(y, y') = 0

1.1

$$y' = g(y) = \frac{dx}{dx} \quad \Rightarrow \quad \int \frac{1}{g(y)}\, dy = \int dx$$

1.2 (Las importantes)

$$y = g(y') \quad \Rightarrow \quad y = g(p)$$

$$\begin{cases} p = y' \quad \Rightarrow \quad \dfrac{dy}{dx} = p \quad \Rightarrow \quad dy = p\, dx \\ y = g(p) \quad \Rightarrow \quad \dfrac{d}{dp} \quad \Rightarrow \quad dy = g'(p)\, dp \end{cases}$$

Lo que resulta en:

$$x = \int \frac{g'(p)}{p}\, dp + C$$

Ejemplo:

$$y = (y')^2 + (y')^3 \quad \Rightarrow \quad \text{donde} \quad \Rightarrow \quad y' = p = dy/dx$$

$$y = p^2 + p^3 \quad \Rightarrow \quad dy = (2p + 3p^2)\, dp = pdx$$

$$\int (2 + 3p)\, dp = \int dx \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x(p) = 2p + \frac{3}{2}p^2 \\ y(p) = p^2 + p^3 \end{cases}$$

2. EDO's del tipo F(x, y') = 0

2.1

$$y' = g(x) \quad \Rightarrow \quad y = \int g(x)\, dx + C$$

2.2

$$x = g(y') \quad \Rightarrow \quad p = y' \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = p \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{p} = dx$$

$$x = g(p) \quad \Rightarrow \quad dx = g'(p)dp = \frac{dy}{p}$$

$$y = \int p\, g'(p)\, dp + C \quad ; \quad x(p) = g(p)$$

Ejemplo:

$$x = ay' + by'^2 \quad ; \quad y' = p \quad \Rightarrow \quad x = ap + bp^2$$

donde a, b son constantes.

$$dx = (a + 2bp)\, dp = \frac{dy}{p} \quad \Rightarrow \quad y = \int (ap + 2bp^2)\, dp$$

$$\begin{cases} y(p) = \frac{a}{2}p^2 + \frac{2b}{3}p^3 + C \\ x(p) = ap + bp^2 \end{cases}$$

2.12 EDO´s de Lagrange

Las ecuaciones de Lagrange tienen la forma $y = x\, f(p) + g(p)$, donde $p = y'$. Se resuelven tratando p como variable independiente y expresando x y y en función de p. Esto permite reducir la ecuación a una forma paramétrica más sencilla que puede integrarse directamente.

$$y = xf(y') + g(y') \quad \text{donde establecemos que} \quad y' = p.$$

$$y = xf(p) + g(p) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} dy = dx f(p) + xf'(p)\, dp + g'(p)\, dp \\ dy = p\, dx \end{cases}$$

$$\frac{dx}{dp}[f(p) - p] + xf'(p) + g'(p) = 0$$

Multiplico todo por dp:

$$dxf(p) + xf'(p)\,dp + g'(p)\,dp = pdx$$

$$dx[f(p) - p] + xf'(p)\,dp + g'(p)\,dp$$

$$\frac{dx}{dp}[f(p) - p] + xf'(p) + g'(p) = 0$$

Divido todo por $f(p) - p$:

$$\frac{dx}{dp} + \frac{f'(p)}{f(p) - p}x = -\frac{g'(p)}{f(p) - p} \quad \Rightarrow \quad \text{EDO lineal para } x(p)$$

Donde:

$$\begin{cases} P(p) = \frac{f'(p)}{f(p)-p} \\ \\ Q(p) = -\frac{g'(p)}{f(p)-p} \end{cases}$$

$$y(p,c) = x(p,c)f(p) + g(p)$$

Ejemplo:

$$y = 2xy' + \ln y$$

Hacemos el cambio:

$$p = y' \quad ; \quad y = 2xp + \ln p \quad \Rightarrow \quad dy = 2p\,dx + 2x\,dp + \frac{dp}{p} = pdx$$

$$p\,dx + (2x + \frac{1}{p})\,dp = 0 \quad \Rightarrow \quad p\frac{dx}{dp} + 2x + \frac{1}{p} = 0$$

$$\frac{dx}{dp} + \frac{2x}{p} = -\frac{1}{p^2}$$

Resolvemos la EDO homogénea:

$$\frac{dx}{dp} + \frac{2x}{p} = 0$$

$$\frac{dx}{x} = -\frac{2\,dp}{p} \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dx}{2x} = \int -\frac{dp}{p} \quad \Rightarrow \quad \ln x = -2\ln p + a$$

$$x(p) = \frac{C}{p^2}$$

Resolvemos la solución particular:

$$x(p) = \frac{C(p)}{p^2} \quad \Rightarrow \quad x'(p) = \frac{C'(p)}{p^2} - \frac{2C(p)}{p^3}$$

$$\frac{C'(p)}{p^2} - \frac{2C(p)}{p^3} + \frac{2C(p)}{p^3} = -\frac{1}{p^2}$$

$$C'(p) = 1 \quad \Rightarrow \quad C(p) = p$$

$$x_p = \frac{p}{p^2} = \frac{1}{p}$$

Solución general:

$$y_g = \frac{C}{p^2} + \frac{1}{p} \quad \rightarrow \quad x(p) = \frac{C}{p^2} + \frac{1}{p} \quad ; \quad y = 2xy' + \ln y'$$

$$y = 2\left(\frac{C}{p^2} + \frac{1}{p}\right)p + \ln p = 2\left(\frac{C}{p} + 1\right) + \ln p$$

2.13 EDO's de Clairaut

Las ecuaciones de Clairaut tienen la forma $y = x\,y' + f(y')$. Se resuelven derivando la ecuación y eliminando la variable y' para obtener la solución general. Además, pueden presentar una solución singular que se obtiene al resolver simultáneamente la ecuación original y su derivada respecto a y'.

Se hace el cambio de variable:

$$y' = p$$

$$y = xp + g(p) = xp + g(p)$$

Entonces:

$$\begin{cases} dy = p\,dx \\ dy = p\,dx + x\,dp + g'(p)\,dp \end{cases}$$

$$p\,dx = p\,dx + x\,dp + g'(p)\,dp = 0 \quad \Rightarrow \quad (x + g'(p))dp = 0$$

Posibles soluciones:

- Si $x + g'(p) = 0$:

$$x = g'(p), \text{despejo p} \quad \Rightarrow \quad y = y(x) \quad \text{(solución singular).}$$

- Si $dp = 0$:

$$p = \text{cte} = C \quad \Rightarrow \quad y = Cx + g(C) \quad \text{(solución general).}$$

2.14 EDO's de Riccati

Las EDO's de Riccati son ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden y no lineales. Generalmente no se pueden resolver de forma directa, salvo que se conozca una solución particular. Mediante un cambio de variable pueden transformarse en una ecuación de Bernoulli o lineal.
Formulación general:

$$y' + a(x)y^2 + b(x)y + c(x) = 0$$

- Si a, b, c son constantes $\longrightarrow$ ecuaciones de variables separables:

$$\frac{dy}{dx} = ay^2 + by + c \quad \Longrightarrow \quad \int \frac{dy}{ay^2 + by + c} = \int dx$$

- Si a, b, c son funciones de x, en general no se puede integrar salvo que se conozca una solución particular y_1

$$y_g(x) = y_1(x) + z(x) \quad \Longrightarrow \quad y_g' = y_1' + z'$$

$$y_g^2(x) = y_1^2(x) + z^2(x) + 2y_1 z \quad \Rightarrow \quad (y' + a(x)y^2 + b(x)y + c(x) = 0)$$

$$y_1' + z' + a(x)(y_1^2 + z^2 + 2y_1 z) + b(x)(y_1 + z) + c(x) = 0$$

$$\Big[y_1' + a(x)y_1^2 + b(x)y_1 + c(x)\Big] + \Big[z' + 2a(x)y_1 z + a(x)z^2 + b(x)z\Big] = 0$$

La primera parte es 0, por lo tanto queda:

$$z' + [2a(x)y_1 + b(x)]z = -a(x)z^2$$

Ecuación de Bernoulli pura $z(x)$

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)y^n$$

Ejemplo:

$$y' + y^2 - 2y \operatorname{sen} x + \operatorname{sen}^2 x - \cos x = 0 \quad ; \quad y_1 = \operatorname{sen} x$$

Entonces:

$$\begin{cases} a(x) = 1 \\ b(x) = -2 \operatorname{sen} x \\ c(x) = \operatorname{sen}^2 x - \cos x \end{cases}$$

Resolvemos:

$$y = \operatorname{sen} x + z(x) \quad \Longrightarrow \quad y' = \cos x + z'$$

$$y' = \operatorname{sen} x + z'(x) + 2 \operatorname{sen} x \, z(x)$$

$$\cos x + z' + \operatorname{sen}^2 x + 2 \operatorname{sen} x \, z - 2(\operatorname{sen} x + z) \operatorname{sen} x + \operatorname{sen}^2 x - \cos x = 0$$

$$z' + z^2 + 2 \operatorname{sen} x \, z - 2 \operatorname{sen} x \, z = 0 \quad \Longrightarrow \quad z' + z^2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{dz}{dx} = -z^2$$

Integramos:

$$\int \frac{dz}{z^2} = -\int dx \quad \Longrightarrow \quad -\frac{1}{z} = -x + c$$

$$z = \frac{1}{x+c} \quad \Longrightarrow \quad y_g = \operatorname{sen} x + z = \operatorname{sen} x + \frac{1}{x+c}$$

2.15 Familias de curvas:

Las familias de curvas son conjuntos de funciones que dependen de un parámetro, expresadas como: $\quad y = y(x, c)$

Cada valor de c genera una curva diferente dentro de la familia. Para obtener su ecuación diferencial, se elimina dicho parámetro mediante derivación y sustitución.

Ejemplo:

$$y = cx \quad \Longrightarrow \quad y' = c \quad \Longrightarrow \quad y = y'x \quad \Longrightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$$

$$y = a(1 - e^{-x/a})$$

$$y' = e^{-x/a}\left(\frac{1}{a}\right)a = e^{-x/a} \quad \Longrightarrow \quad \ln y' = -\frac{x}{a} \quad \Longrightarrow \quad a = -\frac{x}{\ln y'}$$

$$y = -\frac{x}{\ln y'}\left(1 - e^{\frac{-x}{-x \ln y'}}\right) = \frac{-x}{lny'}(1 - y') \quad \Longrightarrow \quad y \ln y' = -x(1 - y')$$

$$x(1 - y') + y \ln y' = 0 \quad \Longrightarrow \quad \text{Ecuación diferencial de familia de curvas}$$

Si tengo una ecuación diferencial de la forma $F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$, se encuentra la familia derivando n veces la ecuación y eliminando los parámetros entre todas las ecuaciones.

$$y = c_1 x + \frac{c_2}{x} + c_3 \quad \Longrightarrow \quad y' = c_1 - \frac{c_2}{x^2} \quad \Longrightarrow \quad y'' = \frac{2c_2}{x^3} \quad \Longrightarrow \quad y''' = -\frac{6c_2}{x^4}$$

$$\frac{x^3 y''}{2} = \frac{-x^4 y'''}{6} \quad \Longrightarrow \quad \frac{xy''}{3} + y''' = 0$$

$$c_2 = \frac{x^3 y''}{2}, \quad c_2 = \frac{-x^4 y'''}{6}$$

2.16 Trayectorias ortogonales:

Dada una familia de curvas con ecuaciones $h(x, y, a) = 0$, toda otra curva perteneciente a otra familia que corte a cada una de éstas formando un mismo ángulo $\alpha = \frac{\pi}{2}$, se denomina *trayectoria ortogonal.* Dos familias son ortogonales si todas lo son.

$$y_1 = y_1(x, c_1) \quad \Longrightarrow \quad F(x, y, y_1') = 0$$

La EDO de la segunda familia será:

$$F\left(x, y, -\frac{1}{y'}\right) = 0 \quad \Longrightarrow \quad y_2 = y_2(x, c) \quad \text{tal que} \quad y_1' \cdot y_2' = 1$$

$$h(x, y, c) = 0 \quad \xrightarrow{\text{hallar las EDO's}} \quad F(x, y, y') = 0$$

$$\xrightarrow{\text{planteo la EDO forma ortogonal}} \quad F\left(x, y, -\frac{1}{y'}\right) = 0 \quad \xrightarrow{\text{resolver}} \quad g(x, y, k) = 0$$

3. EDO's de segundo orden y superior

Se denomina EDO de orden n:

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y'^{(n)}) = 0 \quad \text{con} \quad y^{(n)} = \frac{d^n y}{dx^n}$$

La solución general es una familia n–paramétrica:

$$y = y(x, c_1, c_2, \ldots, c_n)$$

Un problema de valor inicial requiere n condiciones iniciales.

Sistema de ecuaciones:

En las EDOs de segundo orden y superior, un sistema de ecuaciones establece las condiciones necesarias para determinar una solución única. Cada condición inicial, como $y(x_0)$, $y'(x_0)$, $y''(x_0)$, etc., fija los valores de las constantes de integración. Por lo tanto, un problema de orden n requiere n condiciones iniciales para definir completamente la solución.

$$y(x_1) = y_1, \quad y(x_2) = y_2, \quad y(x_3) = y_3, \ldots$$

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_0', \quad y''(x_0) = y_0'', \ldots$$

3.1 EDOs lineales de segundo orden

Las EDOs lineales de segundo orden tienen la forma:

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = R(x)$$

Diferenciamos dos tipos:

$$\begin{cases} R(x) = 0 & \text{homogénea (EDOLH)} \\ R(x) \neq 0 & \text{inhomogénea (EDOLI)} \end{cases}$$

3.2 Teorema de existencia y unicidad

El teorema de existencia y unicidad establece que una EDO lineal de segundo orden tiene una única solución si las funciones $P(x)$, $Q(x)$ y $R(x)$ son continuas en un intervalo que contiene el punto inicial. Esto garantiza que el problema de Cauchy definido por $y(x_0)$ y $y'(x_0)$ posee una sola solución válida en dicho intervalo.

Dado un problema de Cauchy:

$$\begin{cases} y'' + P(x)y' + Q(x)y = R(x) \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y'_0 \end{cases}$$

$\exists!$ solución si $P(x)$, $Q(x)$ y $R(x)$ son continuas en $x \approx x_0$!

3.3 EDO equivalente

Las EDOs equivalentes se expresan en la forma operatorial $L[y] = R(x)$, donde L es un operador diferencial que actúa sobre y. La solución general se obtiene como la suma de la solución homogénea y_h (cuando $R(x) = 0$) y una solución particular y_p (cuando $R(x) \neq 0$). Por lo tanto, toda solución cumple $y_g = y_h + y_p$.

$$L[y] = R(x) \quad \text{con} \quad L = \frac{d^2}{dx^2} + P(x)\frac{d}{dx} + Q(x)$$

Si y_h es una solución de la EDOLH y y_p es una solución de la EDOLI:

$$y_g = y_h + y_p$$

$$L[y_h] = 0, \quad L[y_p] = R(x) \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} L[y_h] = 0 \\ L[y_p] = R(x) \end{cases}$$

Resultando en:

$$L[y_h + y_p] = L[y_h] + L[y_p] = 0 + R(x) = R(x)$$

3.4 EDOLH

$$y = 0 \quad \text{siempre es solución:} \quad L[0] = 0$$

Si y_1 e y_2 son soluciones

$$C_1y_1 + C_2y_2 \quad \text{también lo es.}$$

$$L(C_1y_1 + C_2y_2) = C_1L(y_1) + C_2L(y_2) = 0$$

La combinación lineal de dos soluciones independientes es la solución general. Dos funciones son linealmente dependientes si una es múltiplo de la otra.

$$\frac{y_2}{y_1} = C \quad \Longrightarrow \text{para no independientes.}$$

$$\text{Solución general} \Rightarrow y_g = C_1 y_1 + C_2 y_2$$

Entonces:

$$y_g = C_1 y_1 + C_2 y_2$$

$$\text{deben satisfacer cualquier condición inicial:} \quad \begin{cases} y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_0' \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_g(x_0) = C_1 y_1(x_0) + C_2 y_2(x_0) = y_0 \\ y_g'(x_0) = C_1 y_1'(x_0) + C_2 y_2'(x_0) = y_0' \end{cases} \quad \Rightarrow \text{saco } C_1 \text{ y } C_2$$

Aplico el Wronskiano:

$$W = \begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{vmatrix} \neq 0 \quad \text{para poder obtener } C_1 \text{ y } C_2$$

Si y_1 e y_2 son soluciones, entonces W se anula siempre o nunca se anula.

Si:

$$L[y_1] = L[y_2] = 0 \quad \text{en } [a,b] \quad \Rightarrow \quad W(x) = \begin{cases} 0 & \forall x \in [a,b] \\ \neq 0 & \forall x \in [a,b] \end{cases}$$

$$W(x) = y_1 y_2' - y_1' y_2$$

$$W'(x) = y_1' y_2' + y_1 y_2'' - y_1'' y_2 - y_1' y_2' = y_1 y_2'' - y_1'' y_2$$

$$\begin{cases} y_1'' + P(x) y_1' + Q(x) y_1 = 0 \\ y_2'' + P(x) y_2' + Q(x) y_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x y_2 \\ x y_1 \end{cases}$$

$$y_1 y_2'' - y_1'' y_2 + P(y_1 y_2' - y_1' y_2) = 0$$

$$W'(x) + P(x) W(x) = 0$$

$$y_1'y_2'' - y_1''y_2' + P(y_1'y_2 - y_1y_2') = 0 = DW' = P(x) + W(x)$$

$$W(x) = Ce^{-\int P(x)\,dx}$$

$$\text{Si } C = 0 \Longrightarrow W = 0 \quad \forall x \in [a,b] \quad \Rightarrow \text{Linealmente dependientes}$$

$$\text{Si } C \neq 0 \Longrightarrow W \neq 0 \quad \forall x \in [a,b] \quad \Rightarrow \text{Linealmente independientes}$$

Si y_1 e y_2 son linealmente dependientes:

$$\frac{y_1}{y_2} = \text{cte} \quad \Rightarrow \quad W = \begin{vmatrix} y_1 & ky_1 \\ y_1' & ky_1' \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad y_1 = ky_2 \quad \Rightarrow \quad y_1' = ky_2'$$

$$W = y_1y_2' - y_1'y_2 = ky_1y_1' - ky_1'y_1 = 0$$

$$\frac{W}{y_2} = \frac{y_1y_2' - y_1'y_2}{y_2^2} = \left(\frac{y_2}{y_1}\right)' = 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{y_2}{y_1} = k$$

Si y_1 e y_2 son linealmente independientes:

$$W \neq 0 \Longrightarrow \exists!\, C_1, C_2 \text{ tales que } y_g = C_1y_1 + C_2y_2$$

Ejemplo:

$$y'' - y = 0$$

Entonces:

$$\begin{cases} y = e^{-x}, \quad y'' = -e^{-x} \\ y = e^{x}, \quad y'' = e^{x} \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} y_1 = senhx \\ y_2 = coshx \end{cases}$$

Sabiendo que:

$$\begin{cases} senhx = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \\ coshx = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \end{cases}$$

$$y = C_1 \sinh x + C_2 \cosh x$$

Linealmente dependientes: $y_1 = e^x,\ y_2 = 3e^x$

Linealmente independientes: $y_1 = e^x,\ y_2 = e^{-x}$

$$C_1 e^{-x} + C_2 \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \Rightarrow \quad \left(C_1 + \frac{C_2}{2}\right) e^{-x} + \frac{C_2}{2} e^x$$

Obtención de segundas soluciones:

Si y_1 es una solución conocida de una EDOLH, entonces:

$$y_2 = U(x) y_1 \quad \text{es la segunda solución.}$$

$$y_2' = U'(x) y_1 + U(x) y_1' \quad \Rightarrow \quad y_2'' = U''(x) y_1 + 2U'(x) y_1' + U(x) y_1''$$

$$y_2'' + P(x) y_2' + Q(x) y_2 = 0$$

$$U'' y_1 + 2U' y_1' + U y_1'' + P(x)(U' y_1 + U y_1') + Q(x) U y_1 = 0$$

Ahora resolvemos la última parte.

$$U'' y_1 + 2U' y_1' + P U' y_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{U''}{U'} y_1 + 2y_1' + P(x) y_1 = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{U''}{U'} + 2\frac{y_1'}{y_1} + P = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{U''}{U'} = -P - 2\frac{y_1'}{y_1}$$

$$\Rightarrow \quad (\ln U')' = -P - 2(\ln y_1)' \quad \Rightarrow \quad \ln U' = \int -P dx - 2 \ln y_1$$

$$U' = \frac{e^{-\int P(x)dx}}{y_1^2} \quad \Rightarrow \quad U = \int \frac{e^{-\int P(x)dx}}{y_1^2} dx \quad \Rightarrow \quad y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int P(x)dx}}{y_1^2} dx$$

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \neq 0$$

Ejemplo:

$$x^2y'' - 2xy' + 2y = 0 \quad \text{con} \quad y(0) = 1,\ y'(0) = 1$$

Nos quitamos x^2:

$$y'' - \frac{2y'}{x} + \frac{2y}{x^2} = 0$$

$$y_2 = U(x)y_1 = U(x)x \quad \Rightarrow \quad y_2' = U'x + U \quad ; \quad y_2'' = U''x + 2U'$$

$$U''x + 2U' - \frac{2}{x}(U'x + U) + \frac{2}{x^2}(Ux) = 0$$

$$U''x + 2U' - 2U' - \frac{2U}{x} + \frac{2U}{x} = 0$$

De aquí sacamos:

$$\Rightarrow \quad U''x = 0 \quad \Rightarrow \quad U' = C_1 \quad \Rightarrow \quad U = C_1x + C_2$$

$$y_2 = (C_1x + C_2)x = C_1x^2 + C_2x$$

$$y_g = D_1y_1 + D_2y_2 = D_1x + D_2(C_1x^2 + C_2x) = S_1x + S_2x^2$$

Sustituyendo las condiciones iniciales:

$$y_g(0) = S_1 \cdot 0 + S_2 \cdot 0 = 0 \neq 1$$

No hay solución para esas combinaciones lineales.

3.5 Teorema de existencia y unicidad

El teorema de existencia y unicidad establece que una EDO lineal de segundo orden tiene una única solución si las funciones $p(x)$ y $q(x)$ son continuas y derivables en un intervalo I. Además, la solución depende de las condiciones iniciales $y(x_0)$ y $y'(x_0)$. De esta forma, el problema de Cauchy queda bien definido en dicho intervalo.

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

$$\begin{cases} y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_0' \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \exists! \text{ solución si } p(x) \text{ y } q(x) \text{ son derivables en } x \in I$$

3.6 EDOLH de coeficientes constantes

Las EDO lineales homogéneas de coeficientes constantes son ecuaciones diferenciales en las que los coeficientes que acompañan a las derivadas son números fijos. Permiten obtener soluciones mediante una ecuación característica de segundo grado.

Son de la forma:

$$y'' + py' + qy = 0 \quad \text{con } p, q \text{ constantes.}$$

Proponemos una solución de la forma:

$$y = e^{mx}, \quad y' = me^{mx}, \quad y'' = m^2 e^{mx}$$

$$m^2 e^{mx} + pme^{mx} + qe^{mx} = 0$$

Dividimos por e^{mx} (nunca es 0):

$$m^2 + pm + q = 0 \quad \Longrightarrow \quad m_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$$

Las posibles soluciones son:

a) 2 soluciones reales distintas

b) 2 soluciones imaginarias

c) 2 soluciones reales iguales

a) 2 soluciones reales distintas: $p^2 - 4q > 0 \Rightarrow m_1, m_2 \in \mathbb{R}$

$$y_1 = e^{m_1 x}, \quad y_2 = e^{m_2 x} \quad \Rightarrow \quad y = C_1 e^{m_1 x} + C_2 e^{m_2 x}$$

Entonces:

$$y'' + y' - 6y = 0 \quad ; \quad y = e^{mx},\ y' = me^{mx},\ y'' = m^2 e^{mx}$$

Sustituimos en la ecuación:

$$m^2 e^{mx} + me^{mx} - 6e^{mx} = 0 \quad \Rightarrow \quad m^2 + m - 6 = 0$$

$$m_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \frac{-1 \pm 5}{2}$$

$$m_1 = 2, \quad m_2 = -3 \quad \Rightarrow \quad y_1 = e^{2x}, \quad y_2 = e^{-3x}$$

La solución general es:

$$y_g = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-3x}$$

b) 2 Soluciones imaginarias: $p^2 - 4q < 0 \Rightarrow m_{1,2} = a \pm bi$

$$y_1 = C_1 e^{(a+bi)x}, \quad y_2 = C_2 e^{(a-bi)x} \quad \Rightarrow \quad y_g = C_1 e^{ax} e^{ibx} + C_2 e^{ax} e^{-ibx}$$

Entonces:

$$y_g = e^{ax}[C_1 e^{ibx} + C_2 e^{-ibx}] = e^{ax}[C_1(\cos bx + i \sin bx) + C_2(\cos bx - i \sin bx)]$$

$$= e^{ax}[(C_1 + C_2)\cos bx + i(C_1 - C_2)\sin bx] = e^{ax}[C_3 \cos bx + C_4 \sin bx]$$

La solución general es:

$$\text{donde } \begin{cases} y_3 = e^{ax}\cos bx \\ y_4 = e^{ax}\sin bx \end{cases} \quad \Rightarrow \quad y_g = C_3 y_3 + C_4 y_4$$

c) 2 Soluciones reales iguales: $\quad p^2 - 4q = 0 \quad \Rightarrow \quad m_1 = m_2 = m$

Donde:

$$\begin{cases} y_1 = e^{mx} \\ y_2 = U(x)e^{mx} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} U(x) = x \\ y_2 = xe^{mx} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad y = C_1 e^{mx} + C_2 x e^{mx}$$

Ejemplo:

$y'' + 2y' + y = 0 \quad \Rightarrow \quad m^2 + 2m + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad (m+1)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad m = -1$

Donde:

$$y_1 = e^{-x}, \quad y_2 = xe^{-x}$$

$$y_g = C_1 y_1 + C_2 y_2 = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x} = e^{-x}(C_1 + C_2 x)$$

3.7 Ecuación equidimensional de Euler

La ecuación equidimensional de Euler es una EDO lineal de segundo orden donde los coeficientes dependen de potencias de x.

Son de la forma:

$$x^2 y'' + pxy' + qy = 0 \quad \text{con } p, q \text{ constantes.}$$

Se resuelve con el cambio de variable:

$$y' = \frac{dy}{dx} \quad ; \quad \dot{y} = \frac{dy}{dz} \quad \text{donde } z = \ln x$$

Resolvemos aplicando el cambio de variable:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz}\frac{dz}{dx} = \dot{y}\frac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad pxy' = p\dot{y}$$

$$y'' = \frac{d}{dx}(\dot{y}\frac{1}{x}) = \frac{d}{dx}(\dot{y})\frac{1}{x} + \dot{y}\frac{d}{dx}(\frac{1}{x}) = \frac{dz}{dx}\frac{d}{dz}(\dot{y})\frac{1}{x} - \dot{y}\frac{1}{x^2} = \ddot{y}\frac{1}{x^2} - \dot{y}\frac{1}{x^2}$$

$$= \frac{1}{x^2}(\ddot{y} - \dot{y}) \quad \Rightarrow \quad x^2 y'' = \ddot{y} - \dot{y}$$

Sustituyo en la ecuación inicial:

$$x^2\left(\frac{1}{x^2}(\ddot{y}-\dot{y})\right)+px\left(\frac{1}{x}\dot{y}\right)+qy=0$$

Entonces:

$$\ddot{y}-\dot{y}+p\dot{y}+qy=0 \quad \Rightarrow \quad \ddot{y}+(p-1)\dot{y}+qy=0$$

Ejemplo:

$$x^2y''+xy'+10y=0 \quad \text{con} \quad x=e^z$$

$$\ddot{y}+2\dot{y}+10y=0 \quad \Rightarrow \quad m^2+2m+10=0 \quad \Rightarrow \quad m_{1,2}=-1\pm 3i$$

$$y(z)=e^{-z}\left(C_1\sin(3z)+C_2\cos(3z)\right)$$

$$y(x)=\frac{1}{x}\left[C_1\sin(3\ln x)+C_2\cos(3\ln x)\right]$$

Otra forma de resolverlo:

$$\begin{cases} x=e^z \\ y=e^{mz} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad y=x^m \quad \Rightarrow \quad y'=mx^{m-1}, \quad y''=m(m-1)x^{m-2}$$

Entonces:

$$x^2y''+pxy'+qy=0 \quad \Rightarrow \quad x^m[m(m-1)+pm+q]=0$$

$$m^2+m(p-1)+q=0$$

Ejemplo:

$$m=-1\pm 3i \quad \Rightarrow \quad y=x^{-1\pm 3i}$$

$$y_1=\frac{(e^{\ln x})^{\pm 3i}}{x}=\frac{e^{\pm 3i\ln x}}{x}=\frac{\cos(3\ln x)+i\sin(3\ln x)}{x}$$

$$y_2=\frac{\cos(3\ln x)-i\sin(3\ln x)}{x}$$

$$y_3=\frac{y_1+y_2}{2}=\frac{\cos(3\ln x)}{x}$$

$$y_4=\frac{y_1-y_2}{2}=\frac{\sin(3\ln x)}{x}$$

$$y_g=C_3y_3+C_4y_4=\frac{1}{x}[C_3\cos(3\ln x)+C_4\sin(3\ln x)]$$

3.8 EDOLI de coeficientes constantes

Una EDOLI de coeficientes constantes es una ecuación diferencial lineal no homogénea donde los coeficientes p y q son números fijos.

Son de la forma:

$$y'' + py' + qy = R(x) \quad \text{donde} \quad y_g = y_h + y_p$$

Se reselve utilizando el método de los coeficientes indeterminados:

$R(x)$ es una función sencilla:

$$\begin{cases} \text{trigonométrica} \\ \text{exponencial} \\ \text{polinómica} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \text{y siendo } p, q \text{ constantes.}$$

a) Exponenciales

$$y'' + py' + qy = e^{ax}$$

$$y_p = Ae^{ax}, \quad y_p' = Aae^{ax}, \quad y_p'' = Aa^2e^{ax}$$

sustituyendo en la ecuación:

$$Aa^2e^{ax} + pAae^{ax} + qAe^{ax} = e^{ax}$$

$$A(a^2 + pa + q) = 1 \quad \Rightarrow \quad A = \frac{1}{a^2 + pa + q}$$

Siempre que $a^2 + pa + q \neq 0$, en caso contrario, a es una raíz de la ecuación inicial ($e^{ax} \in y_h$).

Si $a^2 + pa + q = 0$, entonces:

$$y_p = Ae^{ax}x$$

Entonces:

$$y_p' = Ae^{ax}(ax + 1)$$

$$y_p'' = Ae^{ax}(a^2x + 2a)$$

$$A[2a+p+x(a^2+pa+q)]=1 \quad \Rightarrow \quad A=\frac{1}{2a+p}$$

$$A=\frac{1}{2}$$

Ejemplo:

$$y''+3y'-10y=6e^{4x}$$

Sacamos la homogénea igualando a 0

$$y''+3y'-10y=0 \quad \Rightarrow \quad y_h=e^{mx} \quad \Rightarrow \quad m^2+3m-10=0$$

$$\begin{cases} m_1=-5 \\ m_2=2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad y_h=C_1e^{-5x}+C_2e^{2x}$$

Sacamos la particular:

$$y_p=Ae^{4x}, \quad y_p'=4Ae^{4x}, \quad y_p''=16Ae^{4x}$$

Sustituimos en la ecuación principal:

$$16Ae^{4x}+12Ae^{4x}-10Ae^{4x}=6e^{4x} \quad \text{Dividimos ambos lados por } e^{4x}$$

$$16A+12A-10A=6 \quad \Rightarrow \quad 18A=6 \quad \Rightarrow \quad A=\frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \quad y_p=\frac{1}{3}e^{4x}$$

Sacamos la general:

$$y_g=C_1e^{-5x}+C_2e^{2x}+\frac{1}{3}e^{4x}$$

Ejemplo:

$$y''+10y'+25y=14e^{-5x}$$

Sacamos la homogénea:

$$y_h=e^{mx} \quad \Rightarrow \quad m^2+10m+25=0 \quad \Rightarrow \quad m_{1,2}=-5 \text{ (doble)}$$

$$y_h=C_1e^{-5x}+C_2xe^{-5x}$$

Sacamos la particular:

$$y_p = Ax^2e^{-5x}, \quad y_p' = 2Axe^{-5x} - 5Ax^2e^{-5x}, \quad y_p'' = e^{-5x}A(2 - 20x + 25x^2)$$

Sustituimos en la ecuación principal:

$$Ae^{-5x}(2 - 20x - 25x^2) + 20Axe^{-5x} - 50Axe^{-5x} + 25Ax^2e^{-5x} = 14e^{-5x}$$

$$A(2 - 20x - 25x^2 + 20x - 50x + 25x^2)e^{-5x} = 14e^{-5x} \quad \Rightarrow \quad A = 7$$

$$y_p = 7x^2e^{-5x}$$

Sacamos la general:

$$y_g = C_1e^{-5x} + C_2xe^{-5x} + 7x^2e^{-5x}$$

b) Trigonométricas

$$R(x) = \sin(bx) \quad (\text{o } \cos(bx)) \quad y'' + py' + qy = \sin(bx)$$

$$\begin{aligned} y_p &= A\sin(bx) + B\cos(bx) \\ y_p' &= Ab\cos(bx) - Bb\sin(bx) \\ y_p'' &= -Ab^2\sin(bx) - Bb^2\cos(bx) \end{aligned}$$

Sustituyendo en la ecuación:

$$\begin{aligned} &- Ab^2\sin(bx) - Bb^2\cos(bx) + p\Big(Ab\cos(bx) - Bb\sin(bx)\Big) \\ &\quad + q\Big(A\sin(bx) + B\cos(bx)\Big) = \sin(bx) \end{aligned}$$

$$\sin(bx)[-Ab^2 - pBb + qA] + \cos(bx)[-Bb^2 + pAb + qB] = \sin(bx)$$

$$\begin{cases} -Ab^2 - pBb + qA = 1 \\ -Bb^2 + pAb + qB = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} A(q - b^2) + Bpb = 1 \\ Apb + B(q - b^2) = 0 \end{cases}$$

Encontramos las soluciones para A y B, y para que existan tienen que ser linealmente independientes.

$$\exists A, B \text{ si } \begin{vmatrix} q - b^2 & pb \\ pb & q - b^2 \end{vmatrix} \neq 0 \quad ; \quad \begin{vmatrix} q - b^2 & pb \\ pb & q - b^2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} p = 0 \\ q = b^2 \end{cases}$$

$Si\ p = 0,\ q = b^2: \quad \Rightarrow \quad y'' + b^2 y = 0 \quad \Rightarrow \quad y_h = C_1 \sin(bx) + C_2 \cos(bx)$

Se propone una solución diferente multiplicando por x

$$y_p = x(A\sin(bx) + B\cos(bx))$$

Ejemplo:

$$y'' + 4y = \sin(3x)$$

Por lo tanto:

$$y_h = e^{mx}, \quad m^2 + 4 = 0 \Rightarrow m = \pm 2i \quad \Rightarrow \quad y_h = C_1 \sin(2x) + C_2 \cos(2x)$$

$$y_p = A\sin(3x) + B\cos(3x)$$
$$y_p' = 3A\cos(3x) - 3B\sin(3x)$$
$$y_p'' = -9A\sin(3x) - 9B\cos(3x)$$

Sustituyendo en la ecuación principal:

$$-9A\sin(3x) - 9B\cos(3x) + 4A\sin(3x) + 4B\cos(3x) = \sin(3x)$$

$$-5A\sin(3x) - 5B\cos(3x) = \sin(3x)$$

Resolvemos el sistema:

$$\begin{cases} B = 0 \\ A = -\dfrac{1}{5} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad y_p = -\frac{1}{5}\sin(3x)$$

Poniendo la ecuación general:

$$y_g = C_1 \sin(2x) + C_2 \cos(2x) - \frac{1}{5}\sin(3x)$$

c) Polinómicas

$$y'' + py' + qy = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$$

Propongo una solución particular:

$$y_p = \sum_{i=0}^{n} A_i x^i, \quad y_p' = \sum_{i=0}^{n} i A_i x^{i-1}, \quad y_p'' = \sum_{i=0}^{n} i(i-1) A_i x^{i-2}$$

Sustituyendo en la ecuación principal:

$$\sum i(i-1)A_i x^{i-2} + p\sum iA_i x^{i-1} + q\sum A_i x^i =$$
$$= \sum i(i-1)A_i x^{i-2} + piA_i x^{i-1} + qA_i x^i = \sum a_i x^i$$

Existe A_i si $q \neq 0$; si $q = 0$, propongo otra solución multiplicando por x:

$$y_p = x\sum A_i x^i = \sum A_i x^{i+1}$$

Ejemplo:

$$y'' - 2y' + 5y = 25x^2 + 12$$

Sacamos las particulares:

$$y_p = Ax^2 + Bx + C, \quad y_p' = 2Ax + B, \quad y_p'' = 2A$$

Sustituyendo en la ecuación principal:

$$2A-2(2Ax+B)+5(Ax^2+Bx+C) = 2A-4Ax-2B+5Ax^2+5Bx+5C = 25x^2+12$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 5A = 25 \\ 5B - 4A = 0 \\ 2A2B + 5C = R \end{cases} \quad \Rightarrow \quad A = 5,\ B = 4,\ C = 2$$

$$y_p = 5x^2 + 4x + 2$$

Proponemos una homogénea:

$$y_h = e^{mx}, \quad m^2 - 2m + 5 = 0 \quad \Rightarrow \quad m_{1,2} = 1 \pm 2i$$

$$y_h = e^x(C_1\cos 2x + C_2\sin 2x)$$

Ponemos la ecuación general:

$$y_g = e^x(C_1\cos 2x + C_2\sin 2x) + 5x^2 + 4x + 2$$

Para varios términos inhomogéneos:

$$y'' + py' + qy = R_1(x) + R_2(x) + \dots$$

La general es la suma de la homogénea y las particulares:

$$y_g = y_h + y_{p1} + y_{p2} + \dots$$

4. Ejercicios hoja 1

4.1 Ejercicio 1

$$y' \sin x - y \cos x = 0 \quad ; \quad y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \quad \rightarrow \quad \text{condición}$$

Identificamos que se trata de una edo de variables separables, por lo tanto resolvemos separando las variables:

$$y' = y\frac{\cos x}{\sin x}$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{\cos x}{\sin x}dx \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dy}{y} = \int \frac{\cos x}{\sin x}\,dx$$

Hacemos el cambio de variable para resolver la integral con u = sin x:

$$u = \sin x$$

$$du = \cos x\,dx$$

$$\ln|y| = \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C$$

$$y = C\sin x \quad \rightarrow \quad y = \sin x$$

4.2 Ejercicio 11

$$x + y - 2 + (1-x)y' = 0 \quad ; \quad \forall x \neq 0$$

$$y' + \frac{y}{1-x} = \frac{2-x}{1-x}$$

Ecuación homogénea:

$$y_h' + \frac{y}{1-x} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-y}{1-x}$$

Integrando:

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{-1+x}$$

$$\ln y = \ln(x-1) + \ln C$$

$$y_h = C(x-1)$$

Sacamos una solución particular:

$$y_p = C(x)(x-1) \quad \Rightarrow \quad y_p' = C'(x)(x-1) + C(x)$$

$$C'(x)(x-1) + C(x) = \frac{2-x}{1-x}$$

$$C'(x)(x-1)^2 = \frac{2-x}{1-x}(1-x)^2$$

$$C'(x) = \frac{2-x}{(1-x)^2}$$

$$C(x) = \int \frac{2-x}{(1-x)^2}\, dx$$

Hacemos el cambio de variable $u = 1-x$:

$$u = 1-x \quad du = -dx$$

$$C(x) = \int \frac{u+1}{u^2}\, du = \int \frac{du}{u} + \int \frac{du}{u^2} = \ln u - \frac{1}{u} + D$$

$$C(x) = \ln(1-x) + \frac{1}{x-1} + D$$

$$y_p = C(x)(x-1) = \ln(1-x) + \frac{1}{x-1} + D$$

12.)

$$8x + 4y + 1 + (4x + 2y + 1)y' = 0$$

Reescribimos la ecuación:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-8x - 4y - 1}{4x + 2y + 1}$$

$$y' = \frac{-8x - 4y - 1}{4x + 2y + 1} \quad \Rightarrow \quad z = 4x + 2y + 1$$

$$\frac{dz}{dx} = 4 + 2y'$$

$$y' = \frac{1}{2}\frac{dz}{dx} - 2$$

$$\frac{1}{2}\frac{dz}{dx} - 2 = \frac{-2z + 1}{z}$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{-4z + 2}{z} + 4$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{-4z + 2 + 4z}{z} = \frac{2}{z}$$

$$z\,dz = 2dx$$

$$\int z\,dz = \int 2dx$$

$$\frac{z^2}{2} = 2x + C$$

Deshacemos el cambio de variable:

$$(4x + 2y + 1)^2 = 4x + C$$

$$16x^2 + 16xy + 4x + 4y^2 + 4y + 1 = 4x + C$$

$$4x^2 + 4xy + y^2 + 2y + \frac{1}{4} = C$$

—

13.

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dy + \frac{1}{y}dx + \frac{x}{y^2}dy = 0$$

Comprobamos que sea exacta:

$$M = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{1}{y}$$

$$N = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{x}{y^2}$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \ldots \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = \ldots$$

Si es exacta:

$$g(x,y) = \int M\,dx + C$$

$$\int M\,dx = \int \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}dx + \int \frac{1}{y}dx$$

$$u = x^2 + y^2 \quad du = 2x\,dx$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}dx = \sqrt{x^2+y^2}$$

$$\int \frac{1}{y}dx = \frac{x}{y}$$

$$g(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} + \frac{x}{y} + C$$

$$|x| + \frac{x}{y} + \sqrt{x^2+y^2} + C = 0$$

15.

$$(x-y)dx + x\,dy = 0$$

$$M = x - y \quad N = x$$

Comprobamos si es exacta:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -1 \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 1 \quad \Rightarrow \quad \text{No es exacta}$$

Buscamos un factor integrante:

$$\mu' : \frac{\partial_y M - \partial_x N}{N} = \frac{-1-1}{x} = \frac{-2}{x} \quad \Rightarrow \quad \mu = \mu(x)$$

$$\int d\mu = \int \frac{-2}{x} dx \quad \Rightarrow \quad \ln|\mu| = -2\ln|x| + C \quad \Rightarrow \quad \mu = \frac{C}{x^2}$$

Multiplicamos la ecuación original por μ:

$$\frac{C}{x^2}(x-y)dx + \frac{C}{x^2}x\,dy = 0$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -\frac{1}{x^2} \quad \frac{\partial N}{\partial x} = -\frac{1}{x^2}$$

Ahora es exacta:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{y}{x^2} + g'(y)$$

$$M = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{-y}{x^2} + g'(y) = \frac{1}{x} - \frac{y}{x^2}$$

$$g'(y) = \frac{1}{x} \quad g(y) = \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + D$$

$$f(x,y) = \frac{y}{x} + \ln|x| + D$$

16.

$$(x^4 \ln x - 2xy^3)dx + 3x^2y^2dy = 0$$

Comprobamos si es exacta:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -6xy^2 \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 6xy^2 \quad \Rightarrow \quad \text{No es exacta}$$

$$\frac{\partial_y M - \partial_x N}{N} = \frac{-6xy^2 - 6xy^2}{3x^2y^2} = -\frac{4}{x}$$

$$\mu = \mu(x) \quad \ln \mu = -4 \ln x \quad \Rightarrow \quad \mu = \frac{C}{x^4}$$

Multiplicamos por μ:

$$\frac{\ln x}{x^4} dx - \frac{2y^3}{x^3} dx + \frac{3y^2}{x^2} dy = 0$$

Comprobamos si ahora es exacta:

$$M = \ln x - \frac{2y^3}{x^3} \qquad N = \frac{3y^2}{x^2}$$

Hacemos las parciales:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -\frac{6y^2}{x^3} \quad \frac{\partial N}{\partial x} = -\frac{6y^2}{x^3}$$

Es exacta.

$$\int M\,dx = \int \ln x\,dx - \int \frac{2y^3}{x^3}\,dx$$

$$g'(y) = \int \frac{3y^2}{x^2}\,dy = \frac{y^3}{x^2}$$

$$g(y) = \int \ln x\,dx$$

$$g(y) = x(\ln x - 1)$$

$$f(x, y) = \frac{y^3}{x^2} + x(\ln x - 1) + D$$

—

22.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}, \quad y(0) = 0$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\ln|y| = \ln|x| + C$$

$$y = Cx$$

$\Rightarrow$ Familia de rectas que pasan por $(0,0)$.
En el caso de $y(0) = 1$:

$$1 = C \cdot 0 = 0$$

No existe solución.
$\Rightarrow$ No está en la familia de curvas.
—