

# Apuntes Electromagnetismo I

Luis López

September 2025

# Índice

<b>1. Ley de Coulomb</b>	<b>4</b>
<b>2. Campos eléctricos</b>	<b>6</b>
2.1. Coordenadas cilíndricas . . . . .	10
2.2. Diferenciales de longitud, área y volumen (cartesianas) . . . .	11
2.3. Diferenciales de longitud, área y volumen (cilíndricas) . . . .	11
2.4. Coordenadas esféricas . . . . .	13
2.5. Ley de Gauss . . . . .	17
2.6. Conductores en equilibrio . . . . .	20
2.7. Conductores en equilibrio . . . . .	25
<b>3. Potencial eléctrico</b>	<b>31</b>

## Introducción.

La asignatura **Electromagnetismo I**, perteneciente al *Grado en Física*, aborda el estudio sistemático de los fenómenos eléctricos y magnéticos en el vacío y en medios materiales.

Se estructura en los siguientes bloques temáticos principales:

- **Tema 1. Campo electrostático en el vacío:** Fuerza eléctrica, Ley de Coulomb, Ley de Gauss y potencial eléctrico.
- **Tema 2. Campo electrostático en medios materiales:** Conductores y dieléctricos, polarización y vector desplazamiento, y condiciones de continuidad de los campos.
- **Tema 3. Campo magnetostático en el vacío:** Movimiento de cargas y corrientes, efecto Hall, fuentes de campo magnético (leyes de Biot-Savart y Ampère), potencial vectorial y ley de Gauss magnética.
- **Tema 4. Campo magnetostático en medios materiales:** Propiedades magnéticas de los materiales, campo generado por un material magnetizado y condiciones de contorno.
- **Tema 5. Campos electromagnéticos:** Ley de Faraday y transformadores electromagnéticos.
- **Tema 6. Leyes de Maxwell:** formulación y aplicación de las cuatro ecuaciones fundamentales en el vacío.

El **electromagnetismo** constituye una rama esencial de la física, ya que explica las interacciones entre las cargas eléctricas y los campos magnéticos. Dichas interacciones son responsables de una gran variedad de fenómenos naturales y tecnológicos, desde la luz visible hasta las ondas de radio, y desde el funcionamiento de los motores eléctricos hasta la transmisión y transformación de la energía eléctrica.

La base teórica de toda la asignatura se encuentra en las **Ecuaciones de Maxwell**, que veremos en el tramo final del curso y que condensan de forma unificada cómo los campos eléctricos y magnéticos se generan, interactúan y se propagan.

# 1. Ley de Coulomb

La **ley de Coulomb** describe la interacción eléctrica entre dos cargas puntuales en reposo. Establece que la fuerza es proporcional al producto de las cargas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que las separa, actuando a lo largo de la línea que une ambas cargas.

$$\vec{F}_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{r}_{12}$$

Siendo  $\epsilon_0$  la *permeabilidad eléctrica en el vacío*.

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$$

Hay que poner claramente el sistema de referencia que usamos en cada caso de forma explícita.

**Ejemplo:**

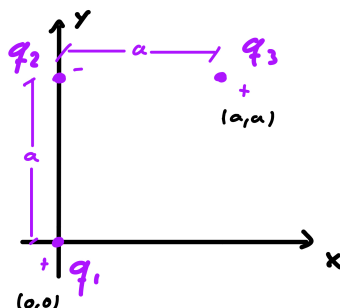


Figura 1: Descripción breve de la imagen.

Determinar la  $\vec{F}_e$  sobre  $q_3$ .

Atendiendo al principio de superposición tenemos:

$$\vec{F}_e = \vec{F}_{q_2 q_3} + \vec{F}_{q_1 q_3}$$

Aplicamos la ley de Coulomb:

$$\vec{F}_{q_1 q_3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_3}{r_{13}^2} \hat{r}_{13},$$

calculamos el vector unitario  $\hat{r}_{13}$ :

$$\vec{r}_{13} = (2a, 2a), \quad r_{13} = \sqrt{(2a)^2 + (2a)^2} = \sqrt{8a^2} = 2\sqrt{2} a$$

$$\hat{r}_{13} = \frac{\vec{r}_{13}}{|\vec{r}_{13}|} = \frac{2a\hat{i} + 2a\hat{j}}{2\sqrt{2}a} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\hat{i} + \hat{j})$$

Entonces:

$$\vec{F}_{q_1q_3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1q_3}{(2\sqrt{2}a)^2} \hat{r}_{13} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1q_3}{8a^2} \frac{\sqrt{2}}{2}(\hat{i} + \hat{j})$$

Vemos ahora  $q_2 \rightarrow q_3$ :

$$\vec{F}_{q_2q_3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2q_3}{r_{23}^2} \hat{r}_{23},$$

Calculamos el vector unitario  $\hat{r}_{23}$ :

$$\vec{r}_{23} = (a, 0), \quad r_{23} = a, \quad \hat{r}_{23} = \frac{\vec{r}_{23}}{|\vec{r}_{23}|} = \hat{i}$$

Entonces:

$$\vec{F}_{q_2q_3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2q_3}{a^2} \hat{i}$$

Por último calculamos la fuerza total en  $q_3$  con el principio de superposición:

$$\vec{F}_e = \vec{F}_{13} + \vec{F}_{23}$$

$$\vec{F}_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1q_3}{2a^2} \frac{\sqrt{2}}{2} (\hat{i} + \hat{j}) + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2q_3}{a^2} \hat{i} = \frac{q_3}{4\pi\epsilon_0} \left[ \left( \frac{q_2}{a^2} - \frac{q_1}{2a^2} \right) \hat{i} + \frac{q_1}{2a^2} \hat{j} \right]$$

## 2. Campos eléctricos

El **campo eléctrico** en un punto se define como la fuerza eléctrica por unidad de carga de prueba positiva colocada en ese punto:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \lim_{q_0 \rightarrow 0} \frac{\vec{F}_e(\vec{r})}{q_0}.$$

### Derivación desde la ley de Coulomb

Para una carga puntual  $q$  situada en  $\vec{r}'$ , la fuerza sobre una carga de prueba  $q_0$  en  $\vec{r}$  es

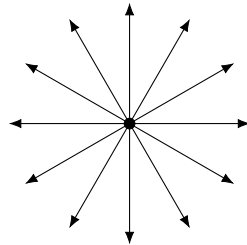
$$\vec{F}_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q q_0}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \hat{\mathbf{R}}, \quad \hat{\mathbf{R}} = \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}.$$

Dividiendo por  $q_0$ , queda:

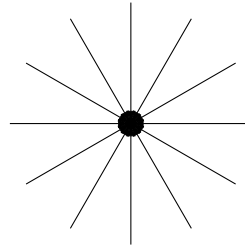
$$\boxed{\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \hat{\mathbf{R}}}$$

y, en el caso de tomar el origen en la carga y  $r = |\vec{r}|$ ,

$$\vec{E}_q = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{r}.$$



*Diverge*



*Lo succiona*

$$\vec{E}_q = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{r}_{qP}$$

## Distribuciones de carga

Pueden ser:

$$\text{Lineales} \Rightarrow \lambda = \frac{dq}{dl}, \quad \text{Superficiales} \Rightarrow \sigma = \frac{dq}{dA}, \quad \text{Volumétrica} \Rightarrow \rho = \frac{dq}{dV}.$$

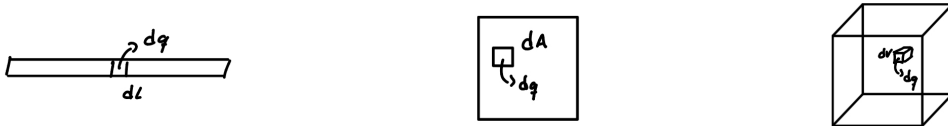


Figura 2: Descripción breve de la imagen.

## Ejemplo:

Tenemos una barra de longitud  $l$  con una distribución de carga lineal homogénea  $\lambda$ . Determine el campo eléctrico generado por la barra a una distancia  $d$  de uno de sus extremos. ¿Qué ocurre cuando  $d \gg l$ ?

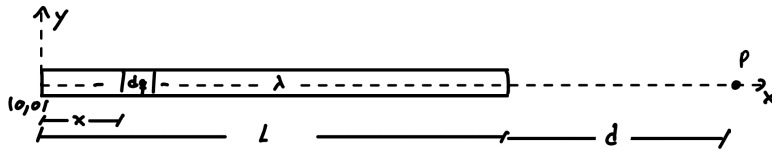


Figura 3: Descripción breve de la imagen.

Planteamos la solución del campo eléctrico

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq}{r^2} \hat{r}_{qP},$$

Siendo el vector unitario  $\hat{r}_{qP}$ :

$$\hat{r}_{qP} = \frac{\vec{r}_P - \vec{r}_q}{|\vec{r}_P - \vec{r}_q|} = \frac{(l+d)\hat{i} - x\hat{i}}{|(l+d) - x|} \hat{i}$$

Donde:

$$r^2 = ((l+d) - x)^2, \quad dq = \lambda dl = \lambda dx.$$

Entonces:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^l \frac{\lambda dx}{((l+d) - x)^2} \hat{i} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left[ -\frac{1}{(l+d) - x} \right]_0^l \hat{i} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{d} - \frac{1}{l+d} \right) \hat{i}.$$

(b)  $d \gg l$

$$\vec{E} \approx \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{l}{d(l+d)} \right) \hat{i} \approx \frac{\lambda l}{4\pi\epsilon_0 d^2} \hat{i} \approx \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 d^2} \hat{i} \quad \text{con } Q = \lambda l.$$

Llegamos a la expresión del campo eléctrico de una carga puntual  $Q$ . ya que al estar tan alejados la barra se comporta como una carga puntual.



**Ejemplo:**

Calcular  $\vec{E}$  en el punto  $P$ . ¿Qué ocurre si  $P \gg L$ ?

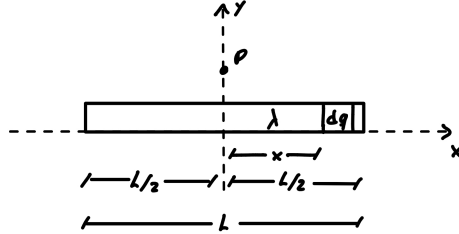


Figura 4: Descripción breve de la imagen.

Pista:

$$\int \frac{y}{(x^2 + y^2)^{3/2}} dx = \frac{x}{y\sqrt{x^2 + y^2}}$$

La solución del campo será:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq}{r^2} \hat{r}_{qP}, \quad \hat{r}_{qP} = \frac{\vec{r}_P - \vec{r}_q}{|\vec{r}_P - \vec{r}_q|} = \frac{-x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \hat{i} + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \hat{j}.$$

Sustituyendo:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{-L/2}^{L/2} \frac{\lambda dx}{(x^2 + y^2)} \left( -\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \hat{i} + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \hat{j} \right)$$

Al tratarse de una integral vectorial, se integra cada componente por separado:

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left[ \int_{-L/2}^{L/2} \frac{-x}{(x^2 + y^2)^{3/2}} dx \hat{i} + \int_{-L/2}^{L/2} \frac{y}{(x^2 + y^2)^{3/2}} dx \hat{j} \right] \\ &= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left[ -\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \Big|_{-L/2}^{L/2} \hat{i} + \frac{x}{y\sqrt{x^2 + y^2}} \Big|_{-L/2}^{L/2} \hat{j} \right] \end{aligned}$$

## 2.1 Coordenadas cilíndricas

Las **coordenadas cilíndricas** representan un punto en el espacio mediante la tripleta  $(r, \theta, z)$ , donde  $r$  es la distancia desde el punto al eje  $z$  (coordenada radial),  $\theta$  es el ángulo que forma el radio con el eje  $x$  (coordenada acimutal) y  $z$  es la altura del punto sobre el plano  $xy$  (coordenada vertical). Este sistema es una generalización de las coordenadas polares al espacio tridimensional y es útil en problemas con simetría cilíndrica.

Siendo las nuevas coordenadas:

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad z = z$$

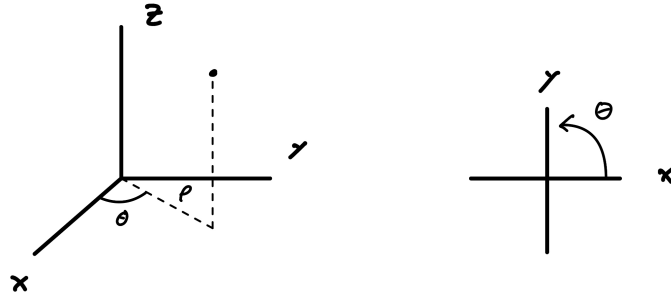


Figura 5: Descripción breve de la imagen.

Donde  $\theta$  va siempre desde el eje positivo de  $x$  al eje positivo de  $y$ . Al igual que en coordenadas cartesianas, las coordenadas cilíndricas también tienen *vectores unitarios*:

$$\hat{e}_r = \cos \theta \hat{i} + \sin \theta \hat{j}, \quad \hat{e}_\theta = -\sin \theta \hat{i} + \cos \theta \hat{j}, \quad \hat{e}_z = \hat{k}.$$

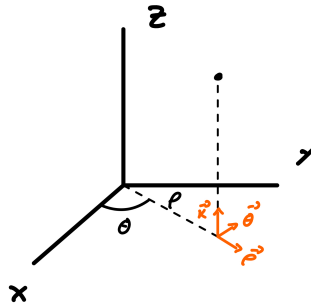


Figura 6: Descripción breve de la imagen.

## 2.2 Diferenciales de longitud, área y volumen (cartesianas)

De longitud:

$$d\vec{\ell} = dx \hat{i} + dy \hat{j} + dz \hat{k}$$

De área:

$$d\vec{A}_x = dy dz \hat{i},$$

$$d\vec{A}_y = dx dz \hat{j},$$

$$d\vec{A}_z = dx dy \hat{k}.$$

De volumen:

$$dV = dx dy dz$$

*Hacer esquemas visuales.*

## 2.3 Diferenciales de longitud, área y volumen (cilíndricas)

De longitud:

$$d\vec{\ell} = dr \hat{e}_r + r d\theta \hat{e}_\theta + dz \hat{e}_z$$

De área:

$$d\vec{S}_r = r d\theta dz \hat{e}_r,$$

$$d\vec{S}_\theta = dr dz \hat{e}_\theta,$$

$$d\vec{S}_z = r dr d\theta \hat{e}_z.$$

De volumen:

$$dV = r dr d\theta dz$$

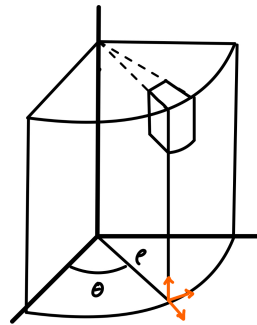


Figura 7: Descripción breve de la imagen.

**Ejemplo:**

Un anillo cargado con densidad de carga lineal variable  $\lambda = \cos^2 \theta$  y radio  $a$ . Determinar la carga total.

La densidad lineal, por tanto la carga vendrá dada como:

$$q_T = \oint \lambda dl = \int_0^{2\pi} \lambda a d\theta = a \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta.$$

*\* Los límites de integración varían dependiendo de nuestro sistema de referencia. En nuestro caso  $r = a$  y  $\theta \in [0, 2\pi]$ .*

**Ejemplo:**

Un disco cargado con densidad de carga superficial  $\sigma = \rho \sin^2 \theta$  y radio  $R$ . Determina la **carga total** del disco.

$$q_T = \iint_S \sigma dA = \int_0^{2\pi} \left( \int_0^R \rho \sin^2 \theta r dr \right) d\theta.$$

**Ejemplo:**

Un anillo cargado con densidad de carga lineal constante  $\lambda$  y radio  $a$ . Determine el valor del **campo eléctrico** en el punto  $P$  (sobre el eje del anillo, a altura  $z$ ).

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint \frac{dq}{r^2} \hat{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \frac{\lambda a d\theta}{a^2 + z^2} \frac{-a \cos \theta \hat{i} - a \sin \theta \hat{j} + z \hat{k}}{\sqrt{a^2 + z^2}}.$$

Como integral vectorial, se integran las componentes por separado:

$$\int_0^{2\pi} \frac{-a \cos \theta}{(a^2 + z^2)^{3/2}} d\theta = 0, \quad \int_0^{2\pi} \frac{-a \sin \theta}{(a^2 + z^2)^{3/2}} d\theta = 0,$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{z}{(a^2 + z^2)^{3/2}} d\theta = \frac{2\pi z}{(a^2 + z^2)^{3/2}}.$$

Por tanto,

$$\boxed{\vec{E}(P) = \frac{\lambda a z}{2 \epsilon_0 (a^2 + z^2)^{3/2}} \hat{k}}$$

## 2.4 Coordenadas esféricas

Las **coordenadas cilíndricas** representan un punto en el espacio mediante la tripleta  $(r, \theta, \phi)$ , donde  $r$  es la distancia desde el punto al origen (coordenada radial),  $\theta$  es el ángulo que forma el radio con el eje  $x$  (coordenada acimutal) y  $\phi$  es el ángulo que forma el radio con el eje  $z$  (coordenada polar). Este sistema es una generalización de las coordenadas polares al espacio tridimensional y es útil en problemas con simetría esférica.

Siendo las nuevas coordenadas:

$$x = r \sin \theta \cos \phi, \quad y = r \sin \theta \sin \phi, \quad z = r \cos \theta$$

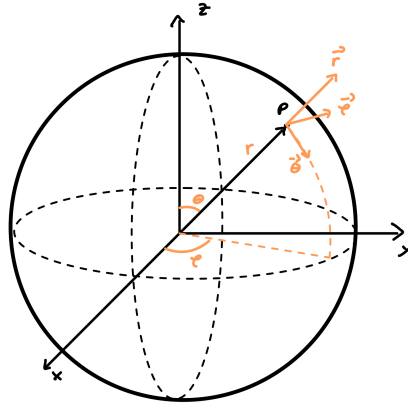


Figura 8: Coordenadas esféricas:  $r, \theta, \phi$ .

### Diferenciales de longitud, área y volumen (esféricas)

De longitud:

$$d\vec{\ell} = dr \hat{e}_r + r d\theta \hat{e}_\theta + r \sin \theta d\phi \hat{e}_\phi$$

De área:

$$d\vec{S}_r = r^2 \sin \theta d\theta d\phi \hat{e}_r,$$

$$d\vec{S}_\theta = r \sin \theta dr d\phi \hat{e}_\theta,$$

$$d\vec{S}_\phi = r dr d\theta \hat{e}_\phi.$$

De volumen:

$$dV = r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi$$

**Ejemplo:**

Una esfera de radio  $r$  tiene una densidad superficial dada como:

$$\sigma = x^2 + y^2 + z^2$$

Determina su carga total:

$$Q_T = \int_A \sigma dA$$

donde:

$$dA = r^2 \sin \theta d\theta d\phi$$

$$Q_T = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi r^2 \sin \theta d\theta d\phi = 4\pi r^4$$

**Ejemplo:**

$$V = \int_V dV = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^r r^2 \sin \theta d\phi d\theta dr$$

Una esfera de radio  $R$  tiene una densidad de carga volumétrica de

$$\rho = e^{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}} = e^r$$

Determina la carga total:

$$Q_T = \int_V \rho dV = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^R e^r r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi$$

$$Q_T = 4\pi \int_0^R e^r r^2 dr = \frac{4\pi}{3} (e^R - 1)$$

**Ejemplo:**

Determina el campo eléctrico que genera una carga puntual en cualquier punto del espacio. **a) Con coordenadas cartesianas**

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r_q^2} \hat{r}_q$$

Calculamos el vector unitario  $\hat{r}_q$ :

$$\hat{r}_q = \frac{\vec{r}_P - \vec{r}_q}{|\vec{r}_P - \vec{r}_q|} = \frac{x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k} - 0}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

La añadimos a la expresión del campo:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{x^2 + y^2 + z^2} \frac{x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q(x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k})}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}.$$

**b) Con coordenadas cilíndricas**

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r_q^2} \hat{r}_q$$

Calculamos el vector unitario  $\hat{r}_q$ :

$$\hat{r}_q = \frac{\vec{r}_P - \vec{r}_q}{|\vec{r}_P - \vec{r}_q|} = \frac{\rho\hat{e}_\rho + z\hat{k} - 0}{\sqrt{\rho^2 + z^2}}$$

La añadimos a la expresión del campo:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\rho^2 + z^2} \frac{\rho\hat{e}_\rho + z\hat{k}}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q(\rho\hat{e}_\rho + z\hat{k})}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}}.$$

**c) Con coordenadas esféricas**

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r_q^2} \hat{r}_q$$

Calculamos el vector unitario  $\hat{r}_q$ :

$$\hat{r}_q = \frac{\vec{r}_P - \vec{r}_q}{|\vec{r}_P - \vec{r}_q|} = \frac{r\hat{e}_r - 0}{r} = \hat{e}_r$$

La añadimos a la expresión del campo:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{e}_r.$$

**Ejercicio 2:** Un cilindro de radio  $R$  tiene su superficie circular cargada con una densidad de carga constante. Determina el campo eléctrico generado a una distancia  $d$  de su eje como muestra la figura.

El campo eléctrico generado por el cilindro vendrá dado como:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint \frac{dq}{r^2} \hat{r}_{qP}.$$

Con elemento de carga superficial

$$dq = \sigma dA = \sigma R d\theta dz; \quad \theta \in [0, 2\pi], \quad z \in [0, h].$$

Calculamos el vector

$$\vec{r}_{qP} = \vec{r}_P - \vec{r}_q = (h + d) \hat{\mathbf{k}} - (R \hat{\mathbf{e}}_r + z \hat{\mathbf{k}}),$$

$$|\vec{r}_{qP}| = \sqrt{R^2 + (h + d - z)^2}.$$

Sustituyendo:

$$\vec{E} = \frac{\sigma R}{4\pi\epsilon_0} \int_0^h \int_0^{2\pi} \left[ \frac{-R \hat{\mathbf{e}}_r}{(R^2 + (h + d - z)^2)^{3/2}} + \frac{(h + d - z) \hat{\mathbf{k}}}{(R^2 + (h + d - z)^2)^{3/2}} \right] d\theta dz.$$

*Nota:* hay que cambiar  $\hat{\mathbf{e}}_r$  por  $\cos \theta \hat{\mathbf{i}} + \sin \theta \hat{\mathbf{j}}$  ya que  $\hat{\mathbf{e}}_r$  depende de  $\theta$ .

**Ejercicio 3:** Un recipiente hemisférico de radio  $a$  tiene una carga total  $q$  repartida uniformemente en su superficie. Encuentre el campo eléctrico en el centro de curvatura (véase la figura).

El campo eléctrico viene dado como

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq}{r^2} \hat{r}.$$

Sustituimos:

Como por simetría sólo queda la componente sobre el eje,

$$E_z = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{dq}{a^2} \cos \theta, \quad dq = \sigma dA, \quad dA = a^2 \sin \theta d\theta d\varphi, \quad \sigma = \frac{q}{2\pi a^2}.$$

Por tanto:

$$E_z = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{\sigma a^2 \sin \theta d\theta d\varphi}{a^2} \cos \theta.$$

Además,

$$\hat{r}_{qP} = \frac{\vec{r}_P - \vec{r}_q}{|\vec{r}_P - \vec{r}_q|}, \quad |\vec{r}_P - \vec{r}_q| = a.$$



## 2.5 Ley de Gauss

La ley de Gauss en electrostática relaciona el flujo de campo eléctrico a través de una superficie cerrada con la carga neta encerrada en ella, afirmando que el flujo es igual a la carga neta dividida por la permitividad del vacío. Matemáticamente, se expresa como:

$$\oint_{\partial V} \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{\text{enc}}}{\varepsilon_0}.$$

La ley de Gauss proviene de la primera ley de Maxwell; para llegar a ella partimos del *teorema de la divergencia*:

$$\oint_{\partial V} \vec{E} \cdot d\vec{A} = \iiint_V (\nabla \cdot \vec{E}) dV,$$

$$\frac{q_{\text{enc}}}{\varepsilon_0} = \iiint_V \frac{\rho}{\varepsilon_0} dV$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (\text{primera ley de Maxwell en el vacío}).$$

Si hay divergencia en el campo, es decir,  $\nabla \cdot \vec{E} > 0$ , el campo *diverge* (fuente). Si por el contrario  $\nabla \cdot \vec{E} < 0$ , tenemos un *sumidero*, es decir, el campo *converge*.

Para usar la **ley de Gauss** tengo que crear una **superficie imaginaria** a mi conveniencia para poder integrar sobre ella.

### Ejemplo:

Se tiene una esfera aislante con una distribución de carga homogénea repartida uniformemente en su volumen. La esfera tiene radio  $R$ . Determina el campo eléctrico producido por la esfera en todo el espacio.

Primero calculamos el campo **fuera de la esfera** ( $r > R$ ). Para ello, mi **superficie gaussiana** será una esfera concéntrica de radio  $r$ .

$$\oint_{\partial V} \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{\text{enc}}}{\varepsilon_0}$$

$$\oint_{\partial V} \vec{E} \cdot d\vec{A} = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi |\vec{E}| r^2 \sin \theta d\theta d\phi = |\vec{E}| r^2 4\pi$$

$$\frac{q_{\text{enc}}}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0} \iiint \rho dV = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^R \rho r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi = \frac{4\pi}{3\varepsilon_0} \rho R^3$$

Igualando ambas ecuaciones:

$$|\vec{E}| 4\pi r^2 = \frac{4\pi}{3\varepsilon_0} \rho R^3$$

$$|\vec{E}| = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2}$$

Por lo tanto, el campo eléctrico para  $r > R$  es:

$$\boxed{\vec{E} = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2} \hat{r}}$$

Veamos lo que pasa ahora para  $r < R$  (**dentro de la esfera**). En este caso, la superficie gaussiana será una esfera concéntrica menor que la esfera original.

$$\oint_{\partial V} \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{\text{enc}}}{\varepsilon_0}$$

$$\oint_{\partial V} \vec{E} \cdot d\vec{A} = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi |\vec{E}| r^2 \sin \theta d\theta d\phi = |\vec{E}| r^2 4\pi$$

$$\frac{q_{\text{enc}}}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0} \iiint \rho dV = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^r \rho r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi = \frac{4\pi}{3\varepsilon_0} \rho r^3$$

Igualando ambas ecuaciones:

$$|\vec{E}| 4\pi r^2 = \frac{4\pi}{3\varepsilon_0} \rho r^3$$

$$\boxed{\vec{E} = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0} \hat{r}}$$

Resultado final:

$$\vec{E}(r) = \begin{cases} \frac{\rho r}{3\varepsilon_0} \hat{r}, & r < R \\ \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2} \hat{r}, & r > R \end{cases}$$

Ahora sustituimos en la ley de Gauss:

$$|\vec{E}| 4\pi r^2 = \frac{1}{\varepsilon_0} \frac{4\pi}{3} \rho r^3$$

$$|\vec{E}| = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0}$$

Por tanto, en forma vectorial quedaría:

$$\vec{E} = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0} \hat{r}$$

Entonces el campo eléctrico será:

$$\vec{E} = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0} \hat{r} \quad \text{si } r < R, \quad \vec{E} = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2} \hat{r} \quad \text{si } r > R.$$

### Ejemplo:

Tenemos una línea de carga de densidad lineal  $\lambda$  y longitud infinita. Determine el campo eléctrico producido en un punto a una distancia  $r$  del cable. Para conocer el campo eléctrico aplicaremos la **ley de Gauss** sobre la superficie gaussiana mostrada en la figura:

$$\Phi_E = \iint_{\partial V} \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{\text{enc}}}{\varepsilon_0}.$$

$$\iint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = \iint_{\text{tapa sup}} \vec{E} \cdot d\vec{A} + \iint_{\text{tapa inf}} \vec{E} \cdot d\vec{A} + \iint_{\text{pared}} \vec{E} \cdot d\vec{A}.$$

Sabemos que  $\vec{E} = |E| \hat{e}_\rho$  (radial) y es tangencial a las tapas  $\Rightarrow$  las contribuciones de las tapas son nulas; sólo aporta la pared cilíndrica:

$$\Phi_E = \iint_{\text{pared}} \vec{E} \cdot d\vec{A} = \int_0^h \int_0^{2\pi} |E| (\rho d\theta) dz = |E| (2\pi\rho h).$$

Por otro lado,

$$\frac{q_{\text{enc}}}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0} \int \lambda dl = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_0^h \lambda dz = \frac{\lambda h}{\varepsilon_0}.$$

Iguando términos:

$$|E| (2\pi\rho h) = \frac{\lambda h}{\varepsilon_0} \implies |E| = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 \rho}, \quad \boxed{\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 \rho} \hat{e}_\rho}$$

**Ejemplo:**

Caso de un plano cargado con densidad superficial constante  $\sigma$ . Determinar el campo eléctrico a una distancia  $d$  del plano. Aplicamos la ley de Gauss con una superficie cilíndrica (“pastilla”) que corta el plano:

$$\Phi_E = \iint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{\text{enc}}}{\varepsilon_0}, \quad d\vec{A} = \hat{n} dA, \quad \vec{E} = |E| \hat{n}.$$

La contribución de la pared lateral es nula ( $\vec{E} \perp d\vec{A}$  allí). Aportan sólo las tapas:

$$\Phi_E = |E| A_{\text{sup}} + |E| A_{\text{inf}} = 2|E| (\pi R^2).$$

La carga encerrada es

$$\frac{q_{\text{enc}}}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0} \iint \sigma dA = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \pi R^2.$$

Por tanto,

$$2|E| \pi R^2 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \pi R^2 \implies \boxed{|E| = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}} \quad (\text{constante, independiente de } d).$$

**2.6 Conductores en equilibrio**

Un conductor en equilibrio se comporta de manera peculiar: toda la carga se apantalla en la superficie y en su centro el campo eléctrico va a ser 0. Nunca vamos a poder tener una densidad volumétrica de carga. Si en su defecto se pone un conductor en un campo eléctrico, las cargas positivas y negativas se apantallan opuestamente y la suma neta de carga es 0.

**Ejemplo:**

Una esfera aislante sólida, de radio  $a$ , tiene una carga positiva neta  $Q$  distribuida de manera uniforme por todo su volumen. Un cascarón esférico conductor, con radio interior  $b$  y radio exterior  $c$ , es concéntrico con la esfera sólida y tiene una carga neta  $-2Q$ . Encuentre el campo eléctrico en todo el espacio y la distribución de carga en el cascarón, cuando todo el sistema se encuentra en equilibrio electrostático.

Lo primero es identificar las regiones en las que vamos a calcular el campo:

$$r < a \quad \rightarrow \quad \text{Dentro de la esfera}$$

$$a < r < b \quad \rightarrow \quad \text{Entre la esfera y el cascarón}$$

$$b < r < c \quad \rightarrow \quad \text{Dentro del cascarón}$$

$$r > c \quad \rightarrow \quad \text{Fuera del cascarón}$$

Observamos que existe simetría, por lo tanto vamos a aplicar la **ley de Gauss** sobre el área de la figura:

$$\Phi = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$$

Establecemos nuestro diferencial de área. Como estamos trabajando con coordenadas esféricas, será:

$$dA = r^2 \sin \theta \, d\theta \, d\phi$$

Ahora empezamos a calcular:

$$\vec{E} = |\vec{E}| \hat{r}$$

Calculamos la carga encerrada:

$$q_{\text{enc}} = \iiint \rho \, dV \quad \text{donde} \quad \rho = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi a^3}$$
$$q_{\text{enc}} = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^r \frac{3Q}{4\pi a^3} r'^2 \sin \theta \, dr' \, d\theta \, d\phi = \frac{Qr^3}{a^3}$$

Sustituyendo esto en la ley de Gauss:

$$4\pi r^2 |\vec{E}| = \frac{q_{\text{enc}}}{\varepsilon_0} = \frac{Qr^3}{\varepsilon_0 a^3}$$
$$|\vec{E}| = \frac{Qr}{4\pi \varepsilon_0 a^3}$$

Calculamos ahora el campo en la segunda región:  $a < r < b$

$$\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{\text{enc}}}{\varepsilon_0}$$

Nuestro diferencial de área sigue siendo el mismo (coordenadas esféricas):

$$dA = r^2 \sin \theta \, d\theta \, d\phi$$

$$\vec{E} = |\vec{E}| \hat{r} \quad (\text{el campo es perpendicular a la superficie gaussiana.})$$

La carga encerrada es la de toda la esfera maciza:

$$q_{\text{enc}} = \iiint \rho \, dV = Q.$$

Igualando,

$$4\pi r^2 |\vec{E}| = \frac{Q}{\varepsilon_0} \implies |\vec{E}| = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}.$$

Región  $b < r < c$  (dentro del cascarón): Dentro del conductor el campo es nulo (las cargas se redistribuyen de forma que anulan el campo en el interior):

$$\vec{E} = \vec{0}.$$

Región  $r > c$  (fuera del cascarón):

Aplicamos de nuevo Gauss:

$$\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{\text{enc}}}{\varepsilon_0}, \quad q_{\text{enc}} = Q + (-2Q) = -Q.$$

Por tanto,

$$4\pi r^2 |\vec{E}| = \frac{-Q}{\varepsilon_0} \implies \vec{E} = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \hat{r} \quad (r > c).$$

## b) Distribución de carga en el cascarón

El campo eléctrico dentro del conductor (cascarón) es nulo:

$$\oint_A \vec{E} \cdot d\vec{A} = 0 = \frac{q_{\text{enc}}}{\varepsilon_0}$$

Entonces:

$$q_{\text{enc}} = q_a + q_{b_{\text{int}}} = 0$$

$$q_{b_{\text{int}}} = -q_a = -Q$$

Para la superficie interior del cascarón:

$$\sigma_{\text{int}} = \frac{q_{b_{\text{int}}}}{A_{\text{int}}} = -\frac{Q}{4\pi b^2}$$

Sabemos que la carga total del conductor es  $-2Q$ , entonces:

$$q_{\text{total conductor}} = q_{b_{\text{int}}} + q_{b_{\text{ext}}} = -2Q$$

$$q_{b_{\text{ext}}} = -2Q - q_{b_{\text{int}}} = -2Q + Q = -Q$$

Por tanto, la densidad superficial exterior es:

$$\sigma_{\text{ext}} = \frac{q_{b_{\text{ext}}}}{A_{\text{ext}}} = -\frac{Q}{4\pi c^2}$$

### Ejemplo:

Considere un cable coaxial muy largo, compuesto por un cilindro sólido interior de radio  $a$  y densidad de carga volumétrica constante  $\rho$ , y por un cilindro exterior hueco de radio  $b$  ( $b > a$ ) que lleva una densidad de carga superficial  $\sigma$ . El sistema es eléctricamente neutro. Determinar el campo eléctrico producido por el cable en todo el espacio.

Definimos las regiones en las que calcularemos el campo:

$$\begin{aligned} \rho < a &\rightarrow \text{Dentro del cilindro} \\ a < \rho < b &\rightarrow \text{Vacío entre cilindros} \\ \rho > b &\rightarrow \text{Fuera del cable coaxial} \end{aligned}$$

Calculamos el campo en la primera región:  $\rho < a$ : En este caso, la superficie gaussiana será un cilindro coaxial con el eje del cable:

$$\Phi_E = \oint_A \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{\text{enc}}}{\epsilon_0}$$

El diferencial de área será:

$$d\vec{A} = \rho d\phi dz \hat{\rho}$$

donde:  $\vec{E} = |\vec{E}| \hat{\rho}$ .

Entonces:

$$\oint_A \vec{E} \cdot d\vec{A} = |\vec{E}| \rho 2\pi h$$

Calculamos la carga encerrada:

$$q_{\text{enc}} = \iiint \rho dV = \int_0^{2\pi} \int_0^\rho \int_0^h \rho \rho' d\rho' d\phi dz = \rho \pi \rho^2 h$$

Sustituyendo en la ley de Gauss:

$$|\vec{E}| 2\pi \rho h = \frac{\rho \pi \rho^2 h}{\varepsilon_0}$$

$$\boxed{\vec{E} = \frac{\rho \rho}{2\varepsilon_0} \hat{\rho}}$$

Campo en la segunda región ( $a < \rho < b$ ):

Aplicamos Gauss:

$$\oint_A \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{\text{enc}}}{\varepsilon_0}$$

$$|\vec{E}| 2\pi \rho h = \frac{\rho \pi a^2 h}{\varepsilon_0}$$

$$\boxed{\vec{E} = \frac{\rho a^2}{2\varepsilon_0 \rho} \hat{\rho}}$$

Campo en la tercera región ( $\rho > b$ ):

Sabemos que el sistema es eléctricamente neutro, por tanto:

$$q_{\text{enc}} = 0$$

$$\boxed{\vec{E} = 0}$$

### Relación entre $\rho_e$ y $\sigma$

Vemos la relación que existe entre  $\rho_e$  y  $\sigma$ :

$$Q_T = Q_e + Q_\sigma = 0 = \iiint \rho_e dV + \iint \sigma dA$$

De aquí obtenemos:

$$\iiint \rho_e dV = \int_0^h \int_0^{2\pi} \int_0^a \rho_e \rho d\rho d\theta dz = \rho_e 2\pi h \frac{a^2}{2} = \rho_e \pi h a^2$$



$$\iint \sigma dA = \int_0^h \int_0^{2\pi} \sigma b d\theta dz = \sigma 2\pi b h$$

Sustituyendo en la ecuación de neutralidad:

$$\rho_e \pi h a^2 + \sigma 2\pi b h = 0$$

Finalmente, despejando  $\sigma$ :

$$\sigma = -\frac{\rho_e a^2}{2b}$$

## 2.7 Conductores en equilibrio

Un conductor en equilibrio se comporta de manera peculiar: toda la carga se apantalla en la superficie y, en su centro, el campo eléctrico es 0. Nunca vamos a poder tener una densidad volumétrica de carga. Si, en su defecto, se pone un conductor en un campo eléctrico, las cargas positivas y negativas se apantallan opuestamente y la suma neta de carga es 0.

### Ejemplo:

Una esfera aislante sólida, de radio  $a$ , tiene una carga positiva neta  $Q$  distribuida de manera uniforme por todo su volumen. Un cascarón esférico conductor, con radio interior  $b$  y radio exterior  $c$ , es concéntrico con la esfera sólida y tiene una carga neta  $-2Q$ . Encuentre el campo eléctrico en todo el espacio y la distribución de carga en el cascarón, cuando todo el sistema se encuentra en equilibrio electrostático.

Lo primero es identificar las regiones en las que vamos a calcular el campo:

$$\left\{ \begin{array}{ll} r < a \rightarrow \text{Dentro de la esfera,} \\ a < r < b \rightarrow \text{Entre la esfera y el cascarón,} \\ b < r < c \rightarrow \text{Dentro del cascarón,} \\ r > c \rightarrow \text{Fuera del cascarón.} \end{array} \right.$$

Observamos que existe simetría; por lo tanto vamos a aplicar la **ley de Gauss** sobre una superficie esférica:

$$\Phi = \oint_A \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{\text{int}}}{\epsilon_0}.$$

Establecemos nuestro diferencial de área (coordenadas esféricas):

$$dA = r^2 \sin \theta d\theta d\phi.$$

Ahora empezamos a calcular. Supondremos:

$$\vec{E} = |\vec{E}| \hat{r}.$$

Calculamos la carga encerrada:

$$q_{\text{enc}} = \iiint \rho dV, \quad \rho = \frac{Q}{V_{\text{esf}}} = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi a^3}.$$

$$q_{\text{enc}} = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^r \frac{3Q}{4\pi a^3} r'^2 \sin \theta dr' d\theta d\phi = \frac{Qr^3}{a^3}.$$

Sustituyendo esto en la ley de Gauss:

$$4\pi r^2 |\vec{E}| = \frac{Qr^3}{\varepsilon_0 a^3} \Rightarrow |\vec{E}| = \frac{Q}{4\pi \varepsilon_0 a^3} r$$

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi \varepsilon_0 a^3} r \hat{r}$$

Calculamos el campo en la segunda región:  $a < r < b$

Aplicamos Gauss:

$$\Phi = \oint_A \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{\text{enc}}}{\varepsilon_0}$$

Nuestro diferencial de área sigue siendo el mismo:

$$dA = r^2 \sin \theta d\theta d\phi$$

$\vec{E} = |\vec{E}| \hat{r} \rightarrow$  Indica que el campo es perpendicular a la superficie gaussiana.

Calculamos la carga encerrada:

$$q_{\text{enc}} = \iiint \rho dV$$

$$\rho = \frac{Q}{V_{\text{esf}}} = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi a^3}$$

$$q_{\text{enc}} = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^r \rho dV = Q$$

Iguualamos las ecuaciones:

$$4\pi r^2 |\vec{E}| = \frac{Q}{\varepsilon_0} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \hat{r}}$$

Por lo que llegamos a la ley de Coulomb.

Calculamos el campo en la tercera región:  $b < r < c$ . Dentro del conductor el campo es nulo, ya que las cargas se apantallan de tal forma que anulan el campo en el interior del mismo:

$$\boxed{\vec{E} = \vec{0}}$$

Por último calculamos el campo en  $r > c$ .

Aplicamos Gauss:

$$\Phi_E = \iint_A \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{\text{enc}}}{\varepsilon_0} = 4\pi r^2 |\vec{E}|$$

Donde la carga encerrada es:

$$q_{\text{enc}} = Q + (-2Q) = -Q.$$

Sustituyendo,

$$4\pi r^2 |\vec{E}| = \frac{-Q}{\varepsilon_0} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\vec{E} = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \hat{r}}$$

### (b) Distribución de carga en el cascarón

El campo eléctrico dentro del conductor (cascarón) es 0. Aplicamos Gauss:

$$\oint_A \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{\text{enc}}}{\varepsilon_0}.$$

Como dentro del conductor  $\vec{E} = \vec{0}$ , se tiene  $q_{\text{enc}} = 0$ . Por tanto,

$$q_a + q_{b_{\text{int}}} = 0 \quad \Longrightarrow \quad q_{b_{\text{int}}} = -q_a = -Q,$$

$$\sigma_{\text{int}} = \frac{q_{b_{\text{int}}}}{A_{\text{int}}} = -\frac{Q}{4\pi b^2}.$$

La carga total del conductor es  $-2Q$ :

$$q_{\text{total}} = q_{b_{\text{int}}} + q_{b_{\text{ext}}} = -2Q \quad \Longrightarrow \quad q_{b_{\text{ext}}} = -Q, \quad \sigma_{\text{ext}} = \frac{q_{b_{\text{ext}}}}{A_{\text{ext}}} = -\frac{Q}{4\pi c^2}.$$

**Ejemplo: Cable coaxial largo y neutro.**

Considere un cable coaxial muy largo, compuesto por:

- Un cilindro sólido interior de radio  $a$  con densidad de carga volumétrica constante  $\rho$ ,
- Un cilindro exterior hueco de radio  $b (> a)$  que lleva una densidad de carga superficial  $\sigma$ ,

de modo que el conjunto es eléctricamente neutro. Encuentre el campo eléctrico en todo el espacio.

Definimos las regiones:

$$\begin{cases} \rho < a \rightarrow \text{Dentro del cilindro} \\ a < \rho < b \rightarrow \text{Vacío entre cilindros} \\ \rho > b \rightarrow \text{Fuera del cable} \end{cases}$$

Calculamos el campo en la primera región ( $\rho < a$ ). Superficie gaussiana: cilindro coaxial de radio  $\rho$  y altura  $h$ .

$$\Phi_E = \oint_A \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{\text{enc}}}{\varepsilon_0}, \quad d\vec{A} = \rho d\varphi dz \hat{\rho}, \quad \vec{E} = |E| \hat{\rho}.$$

Calculamos en la ley de Gauss:

$$\oint_A \vec{E} \cdot d\vec{A} = |E| (2\pi\rho h).$$

La carga encerrada es:

$$q_{\text{enc}} = \iiint \rho dV = \int_0^h \int_0^{2\pi} \int_0^\rho \rho \rho' d\rho' d\varphi dz = \rho \pi \rho^2 h.$$

Sustituyendo todo e igualando:

$$|E| (2\pi\rho h) = \frac{\rho \pi \rho^2 h}{\varepsilon_0} \implies \boxed{\vec{E}(\rho < a) = \frac{\rho \rho}{2\varepsilon_0} \hat{\rho}}$$

Si sustituimos nos queda:

$$\iint_A \vec{E} \cdot d\vec{A} = \int_0^h \int_0^{2\pi} |E| \rho d\phi dz = |E| \rho 2\pi h$$

Calculamos la carga:

$$Q_{\text{enc}} = \iiint \rho_e dv = \int_0^h \int_0^{2\pi} \int_0^\rho \rho_e \rho' d\rho' d\phi dz = h 2\pi \frac{\rho^2}{2} \rho_e$$

Sustituimos:

$$|E| 2\pi \rho h = \frac{h 2\pi \frac{\rho^2}{2} \rho_e}{\varepsilon_0} \implies \vec{E} = \frac{\rho_e}{2\varepsilon_0} \rho \hat{\rho}$$

Vemos lo que sucede en la segunda región.  $a < \rho < b$

Aplicamos Gauss:

$$\phi = \iint_A \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{\text{enc}}}{A}$$

Donde mi diferencial de área será:

$$d\vec{A} = \rho d\phi dz \hat{\rho} \quad \text{donde} \quad \vec{E} = |E| \hat{\rho}$$

Si: sustituimos nos queda:

$$\iint_A \vec{E} \cdot d\vec{A} = \int_0^h \int_0^{2\pi} |E| \rho d\phi dz = |E| \rho 2\pi h$$

Calculamos la carga:

$$Q_{\text{enc}} = \iiint \rho_e dv = \int_0^h \int_0^{2\pi} \int_0^a \rho_e \rho' d\rho' d\phi dz = \rho_e 2\pi h \frac{a^2}{2}$$

Sustituyendo en la ley de Gauss nos queda:

$$|E| 2\pi \rho h = \frac{\rho_e 2\pi h \frac{a^2}{2}}{\varepsilon_0} \implies \vec{E} = \frac{\rho_e a^2}{2\varepsilon_0 \rho} \hat{\rho}$$

Por último lo calculamos en la tercera región  $\rho > b$

Aplicamos Gauss

$$\phi = \iint_A \vec{E} \cdot d\vec{A} = |E| 2\pi \rho h = \frac{Q_{\text{enc}}}{\varepsilon_0}$$

Donde nuestra:

$$Q_{\text{enc}} = 0 \quad \text{es neutro}$$

Entonces  $|E| = 0$  y por lo tanto  $\vec{E} = 0$ .

Vemos la relación que existe entre  $\rho_e$  y  $\sigma$ :

$$Q_T = Q_\rho + Q_\sigma = 0 = \iiint \rho_e dv + \iint \sigma dA$$

De aquí obtenemos:

$$\iiint \rho_e dv = \iiint_0^h \iiint_0^{2\pi} \iiint_0^a \rho_e \rho d\rho d\theta dz = \rho_e 2\pi h \frac{a^2}{2}$$

$$\iint \sigma dA = \int_0^h \int_0^{2\pi} \sigma b d\theta dz = \sigma 2\pi b h$$

Sustituyendo:

$$\rho_e \pi a^2 h + \sigma 2\pi b h = 0$$

$$\sigma = -\frac{\rho_e a^2}{2b}$$

### 3. Potencial eléctrico

La fuerza eléctrica es conservativa, por lo tanto tiene asociada una energía potencial. La diferencia de energía potencial eléctrica viene dada como el trabajo realizado por la fuerza al desplazar una carga:

$$\Delta U = -q_0 \int_a^b \vec{E} ds$$

Donde el potencial eléctrico es el trabajo por unidad de carga:

$$\Delta V = \frac{\Delta U}{q_0} = - \int_a^b \vec{E} ds$$

Un campo vectorial  $\vec{F}$  se llama conservativo si existe una función diferenciable  $f$  tal que  $\vec{F} = \nabla f$ . La función  $f$  se llama función potencial para  $\vec{F}$ , y podemos calcular el campo eléctrico a partir del potencial:

$$\vec{E} = -\nabla V$$

Cada coordenada tiene su gradiente asociado:

- Coordenadas cilíndricas:

$$\nabla F = \frac{\partial F}{\partial \rho} \hat{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial F}{\partial \phi} \hat{\phi} + \frac{\partial F}{\partial z} \hat{k}$$

- Coordenadas esféricas:

$$\nabla F = \frac{\partial F}{\partial r} \hat{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial \theta} \hat{\theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial F}{\partial \phi} \hat{\phi}$$

Para calcular el potencial entre dos puntos:

$$\Delta V = V_B - V_A = - \int_A^B \vec{E} ds$$

Potencial eléctrico creado por distribuciones de carga:

$$V = k_e \int \frac{dq}{r}$$

**Ejemplo:**

Encuentre una expresión para el potencial eléctrico en un punto  $P$  ubicado sobre el eje central perpendicular de un anillo con carga uniforme de radio  $a$  y carga total  $Q$ . Calcule el campo eléctrico a partir del potencial.

$$\lambda = \frac{Q}{2\pi a}$$

Calculamos el potencial eléctrico:

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq}{r} \quad ; \quad \text{Siendo } dq = \lambda dl = \lambda a d\theta, \quad \forall \theta \in [0, 2\pi]$$

Calculamos la distancia  $r$ :

$$r = \sqrt{z^2 + a^2}$$

Sustituyendo en la expresión del potencial:

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \frac{\lambda a d\theta}{\sqrt{z^2 + a^2}}$$

Sustituyendo:

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{z^2 + a^2}}$$

A partir de esta expresión calculamos el campo eléctrico, sabiendo:

$$\vec{E} = -\nabla V = -\nabla \left( \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{z^2 + a^2}} \right)$$

Como calculamos el potencial en coordenadas cilíndricas, usamos el gradiente en coordenadas cilíndricas:

$$\begin{aligned} \vec{E} &= -\nabla V = -\left( \frac{\partial V}{\partial \rho} \hat{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial V}{\partial \phi} \hat{\phi} + \frac{\partial V}{\partial z} \hat{k} \right) = \\ &= -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\partial}{\partial z} (z^2 + a^2)^{-3/2} \hat{k} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{z}{(z^2 + a^2)^{3/2}} \hat{k} \end{aligned}$$



Si el campo eléctrico es conservativo, entonces su rotacional es nulo:

$$\nabla \times \vec{E} = 0 \quad \rightarrow \quad 3^{\text{a}} \text{ Ley de Maxwell en electrostática.}$$

Como habíamos visto anteriormente:

$$\Delta V = - \oint_L \vec{E} d\vec{l} = 0$$

Aplicando el teorema de Stokes, llegamos a que la integral de línea de un campo vectorial sobre una trayectoria cerrada es:

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = \iint_A (\nabla \times \vec{E}) d\vec{A} = 0$$

Por lo tanto, sí o sí:

$$\nabla \times \vec{E} = 0$$

### Ejercicio 2 (parcial):

Una esfera conductora de radio  $a$  tiene una carga total  $Q$ . Alrededor de la esfera se encuentra un casquete esférico de radios  $b$  y  $c$ , con una distribución de carga volumétrica dada en coordenadas esféricas como:

$$\rho_\rho = \frac{\rho_0 r}{\sin \theta}$$

donde  $\rho_0$  es una constante positiva. Determine:

- a) La densidad superficial en la esfera conductora y la carga total del casquete.

Calculamos la densidad de carga:

$$\sigma = \frac{Q}{A} = \frac{Q}{4\pi a^2}$$

Carga total del casquete:

$$\begin{aligned} Q &= \iiint \rho_q dv = \iiint \frac{\rho_0 r}{\sin \theta} r^2 \sin \theta d\theta d\phi dr = \rho_0 2\pi \int_b^c r^3 dr = \rho_0 2\pi \frac{r^4}{4} \Big|_b^c = \\ &= \rho_0 2\pi \frac{c^4 - b^4}{4} \end{aligned}$$

b) Campo eléctrico en todo el espacio

Estudiamos las regiones que tenemos:

$$\left\{ \begin{array}{ll} r < a & \Rightarrow \text{Dentro de la esfera conductora} \\ a < r < b & \Rightarrow \text{En el vacío entre la esfera y el casquete} \\ b < r < c & \Rightarrow \text{Dentro del casquete conductor} \\ r > c & \Rightarrow \text{Fuera del casquete} \end{array} \right.$$

Estudiando la region  $r > a$  sacamos automaticamente que el campo es nulo, ya que las cargas se apantallan de tal forma que anulan el campo en el interior del mismo:

$$\vec{E} = 0$$

Para calcular el campo aplicamos Gauss, siendo nuestra superficie gaussiana una esfera concéntrica de radio  $a < r < b$ :

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{\text{enc}}}{\varepsilon_0}$$

donde mi diferencial de área es:

$$d\vec{A} = r^2 \sin \theta \, d\theta \, d\phi$$

Y mi campo me queda:

$$\vec{E} = |\vec{E}| \hat{r}$$

Sustituyendo en la Ley de Gauss:

$$\oint_S |\vec{E}| r^2 \sin \theta \, d\theta \, d\phi = \frac{q_{\text{enc}}}{\varepsilon_0}$$

Sabiendo que mi  $q_{\text{enc}} = Q$ , tenemos:

$$|\vec{E}| 4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

Por lo tanto:

$$|\vec{E}| = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

Estudiamos ahora la región  $b < r < c$ , dentro del casquete. Aplicamos Gauss sobre mi superficie gaussiana:

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{\text{enc}}}{\varepsilon_0}$$

donde mi diferencial de área es:

$$d\vec{A} = r^2 \sin \theta \, d\theta \, d\phi$$

Y mi campo me queda:

$$\vec{E} = |\vec{E}| \hat{r}$$

Calculando la parte de la Ley de Gauss:

$$\oint_S d\vec{A} = |\vec{E}| 4\pi r^2 = \frac{q_{\text{enc}}}{\varepsilon_0}$$

En este caso mi carga encerrada sería:

$$q_{\text{enc}} = Q_{\text{esfera}} + Q_{\text{parte encerrada}}$$

Despejando e integrando:

$$\begin{aligned} Q_{\text{parte encerrada}} &= \iiint \rho_q \, dv = \iiint \frac{\rho_0 r}{\sin \theta} r^2 \sin \theta \, d\theta \, d\phi \, dr = \\ &= 2\pi \rho_0 \int_b^r \frac{r^4}{4} \, dr = 2\pi \rho_0 \left[ \frac{r^4}{4} - \frac{b^4}{4} \right] \end{aligned}$$

Una vez tenemos todo esto, sustituimos y calculamos el campo eléctrico:

$$|\vec{E}| 4\pi r^2 = \frac{Q + 2\pi^2 \rho_0 \left( \frac{r^4}{4} - \frac{b^4}{4} \right)}{\varepsilon_0}$$

Y despejando:

$$\vec{E} = \frac{Q + 2\pi^2 \rho_0 \left( \frac{r^4}{4} - \frac{b^4}{4} \right)}{4\pi r^2 \varepsilon_0}$$

Por último, estudiamos la última región  $r > c$  fuera del casquete: