

# Apuntes Electromagnetismo I

Luis López

September 2025

# Índice

<b>1. Ley de Coulomb</b>	<b>4</b>
<b>2. Campos eléctricos</b>	<b>6</b>
2.1. Coordenadas cilíndricas . . . . .	10
2.2. Diferenciales de longitud, área y volumen (cartesianas) . . . .	11
2.3. Diferenciales de longitud, área y volumen (cilíndricas) . . . . .	11
2.4. Coordenadas esféricas . . . . .	13
2.5. Ley de Gauss . . . . .	17
2.6. Conductores en equilibrio . . . . .	20

## Introducción.

La asignatura **Electromagnetismo I**, perteneciente al *Grado en Física*, aborda el estudio sistemático de los fenómenos eléctricos y magnéticos en el vacío y en medios materiales.

Se estructura en los siguientes bloques temáticos principales:

- **Tema 1. Campo electrostático en el vacío:** Fuerza eléctrica, Ley de Coulomb, Ley de Gauss y potencial eléctrico.
- **Tema 2. Campo electrostático en medios materiales:** Conductores y dieléctricos, polarización y vector desplazamiento, y condiciones de continuidad de los campos.
- **Tema 3. Campo magnetostático en el vacío:** Movimiento de cargas y corrientes, efecto Hall, fuentes de campo magnético (leyes de Biot-Savart y Ampère), potencial vectorial y ley de Gauss magnética.
- **Tema 4. Campo magnetostático en medios materiales:** Propiedades magnéticas de los materiales, campo generado por un material magnetizado y condiciones de contorno.
- **Tema 5. Campos electromagnéticos:** Ley de Faraday y transformadores electromagnéticos.
- **Tema 6. Leyes de Maxwell:** formulación y aplicación de las cuatro ecuaciones fundamentales en el vacío.

El **electromagnetismo** constituye una rama esencial de la física, ya que explica las interacciones entre las cargas eléctricas y los campos magnéticos. Dichas interacciones son responsables de una gran variedad de fenómenos naturales y tecnológicos, desde la luz visible hasta las ondas de radio, y desde el funcionamiento de los motores eléctricos hasta la transmisión y transformación de la energía eléctrica.

La base teórica de toda la asignatura se encuentra en las **Ecuaciones de Maxwell**, que veremos en el tramo final del curso y que condensan de forma unificada cómo los campos eléctricos y magnéticos se generan, interactúan y se propagan.

# 1. Ley de Coulomb

La **ley de Coulomb** describe la interacción eléctrica entre dos cargas puntuales en reposo. Establece que la fuerza es proporcional al producto de las cargas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que las separa, actuando a lo largo de la línea que une ambas cargas.

$$\vec{F}_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{r}_{12}$$

Siendo  $\epsilon_0$  la *permeabilidad eléctrica en el vacío*.

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$$

Hay que poner claramente el sistema de referencia que usamos en cada caso de forma explícita.

**Ejemplo:**

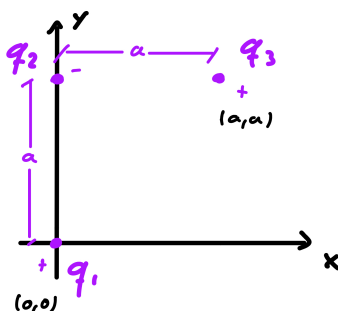


Figura 1: Descripción breve de la imagen.

Determinar la  $\vec{F}_e$  sobre  $q_3$ .

Atendiendo al principio de superposición tenemos:

$$\vec{F}_e = \vec{F}_{q_2 q_3} + \vec{F}_{q_1 q_3}$$

Aplicamos la ley de Coulomb:

$$\vec{F}_{q_1 q_3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_3}{r_{13}^2} \hat{r}_{13},$$

calculamos el vector unitario  $\hat{r}_{13}$ :

$$\vec{r}_{13} = (2a, 2a), \quad r_{13} = \sqrt{(2a)^2 + (2a)^2} = \sqrt{8a^2} = 2\sqrt{2} a$$

$$\hat{r}_{13} = \frac{\vec{r}_{13}}{|\vec{r}_{13}|} = \frac{2a\hat{i} + 2a\hat{j}}{2\sqrt{2}a} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\hat{i} + \hat{j})$$

Entonces:

$$\vec{F}_{q_1 q_3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_3}{(2\sqrt{2}a)^2} \hat{r}_{13} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_3}{8a^2} \frac{\sqrt{2}}{2} (\hat{i} + \hat{j})$$

Vemos ahora  $q_2 \rightarrow q_3$ :

$$\vec{F}_{q_2 q_3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2 q_3}{r_{23}^2} \hat{r}_{23},$$

Calculamos el vector unitario  $\hat{r}_{23}$ :

$$\vec{r}_{23} = (a, 0), \quad r_{23} = a, \quad \hat{r}_{23} = \frac{\vec{r}_{23}}{|\vec{r}_{23}|} = \hat{i}$$

Entonces:

$$\vec{F}_{q_2 q_3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2 q_3}{a^2} \hat{i}$$

Por último calculamos la fuerza total en  $q_3$  con el principio de superposición:

$$\vec{F}_e = \vec{F}_{13} + \vec{F}_{23}$$

$$\vec{F}_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_3}{2a^2} \frac{\sqrt{2}}{2} (\hat{i} + \hat{j}) + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2 q_3}{a^2} \hat{i} = \frac{q_3}{4\pi\epsilon_0} \left[ \left( \frac{q_2}{a^2} - \frac{q_1}{2a^2} \right) \hat{i} + \frac{q_1}{2a^2} \hat{j} \right]$$

## 2. Campos eléctricos

El **campo eléctrico** en un punto se define como la fuerza eléctrica por unidad de carga de prueba positiva colocada en ese punto:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \lim_{q_0 \rightarrow 0} \frac{\vec{F}_e(\vec{r})}{q_0}.$$

### Derivación desde la ley de Coulomb

Para una carga puntual  $q$  situada en  $\vec{r}'$ , la fuerza sobre una carga de prueba  $q_0$  en  $\vec{r}$  es

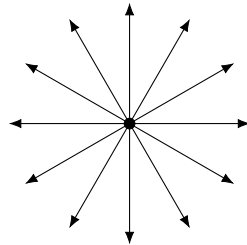
$$\vec{F}_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q q_0}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \hat{\mathbf{R}}, \quad \hat{\mathbf{R}} = \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}.$$

Dividiendo por  $q_0$ , queda:

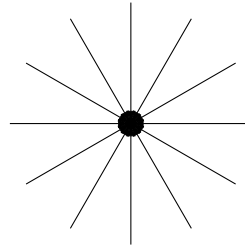
$$\boxed{\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \hat{\mathbf{R}}}$$

y, en el caso de tomar el origen en la carga y  $r = |\vec{r}|$ ,

$$\vec{E}_q = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{r}.$$



*Diverge*



*Lo succiona*

$$\vec{E}_q = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{r}_{qP}$$

## Distribuciones de carga

Pueden ser:

$$\text{Lineales} \Rightarrow \lambda = \frac{dq}{dl}, \quad \text{Superficiales} \Rightarrow \sigma = \frac{dq}{dA}, \quad \text{Volumétrica} \Rightarrow \rho = \frac{dq}{dV}.$$

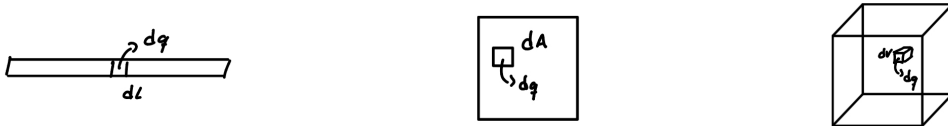


Figura 2: Descripción breve de la imagen.

## Ejemplo:

Tenemos una barra de longitud  $l$  con una distribución de carga lineal homogénea  $\lambda$ . Determine el campo eléctrico generado por la barra a una distancia  $d$  de uno de sus extremos. ¿Qué ocurre cuando  $d \gg l$ ?

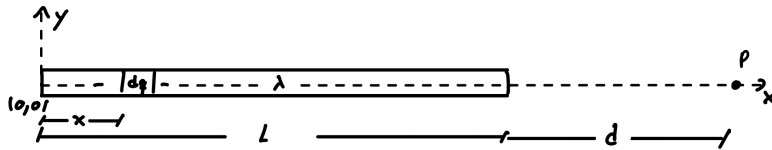


Figura 3: Descripción breve de la imagen.

Planteamos la solución del campo eléctrico

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq}{r^2} \hat{r}_{qP},$$

Siendo el vector unitario  $\hat{r}_{qP}$ :

$$\hat{r}_{qP} = \frac{\vec{r}_P - \vec{r}_q}{|\vec{r}_P - \vec{r}_q|} = \frac{(l+d)\hat{i} - x\hat{i}}{|(l+d) - x|} \hat{i}$$

Donde:

$$r^2 = ((l+d) - x)^2, \quad dq = \lambda dl = \lambda dx.$$

Entonces:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^l \frac{\lambda dx}{((l+d) - x)^2} \hat{i} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left[ -\frac{1}{(l+d) - x} \right]_0^l \hat{i} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{d} - \frac{1}{l+d} \right) \hat{i}.$$

(b)  $d \gg l$

$$\vec{E} \approx \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{l}{d(l+d)} \right) \hat{i} \approx \frac{\lambda l}{4\pi\epsilon_0 d^2} \hat{i} \approx \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 d^2} \hat{i} \quad \text{con } Q = \lambda l.$$

Llegamos a la expresión del campo eléctrico de una carga puntual  $Q$ . ya que al estar tan alejados la barra se comporta como una carga puntual.



**Ejemplo:**

Calcular  $\vec{E}$  en el punto  $P$ . ¿Qué ocurre si  $P \gg L$ ?

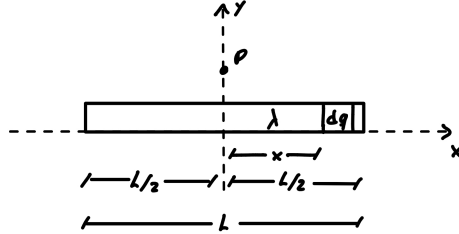


Figura 4: Descripción breve de la imagen.

Pista:

$$\int \frac{y}{(x^2 + y^2)^{3/2}} dx = \frac{x}{y\sqrt{x^2 + y^2}}$$

La solución del campo será:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq}{r^2} \hat{r}_{qP}, \quad \hat{r}_{qP} = \frac{\vec{r}_P - \vec{r}_q}{|\vec{r}_P - \vec{r}_q|} = \frac{-x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \hat{i} + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \hat{j}.$$

Sustituyendo:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{-L/2}^{L/2} \frac{\lambda dx}{(x^2 + y^2)} \left( -\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \hat{i} + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \hat{j} \right)$$

Al tratarse de una integral vectorial, se integra cada componente por separado:

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left[ \int_{-L/2}^{L/2} \frac{-x}{(x^2 + y^2)^{3/2}} dx \hat{i} + \int_{-L/2}^{L/2} \frac{y}{(x^2 + y^2)^{3/2}} dx \hat{j} \right] \\ &= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left[ -\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \Big|_{-L/2}^{L/2} \hat{i} + \frac{x}{y\sqrt{x^2 + y^2}} \Big|_{-L/2}^{L/2} \hat{j} \right] \end{aligned}$$

## 2.1 Coordenadas cilíndricas

Las **coordenadas cilíndricas** representan un punto en el espacio mediante la tripleta  $(r, \theta, z)$ , donde  $r$  es la distancia desde el punto al eje  $z$  (coordenada radial),  $\theta$  es el ángulo que forma el radio con el eje  $x$  (coordenada acimutal) y  $z$  es la altura del punto sobre el plano  $xy$  (coordenada vertical). Este sistema es una generalización de las coordenadas polares al espacio tridimensional y es útil en problemas con simetría cilíndrica.

Siendo las nuevas coordenadas:

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad z = z$$

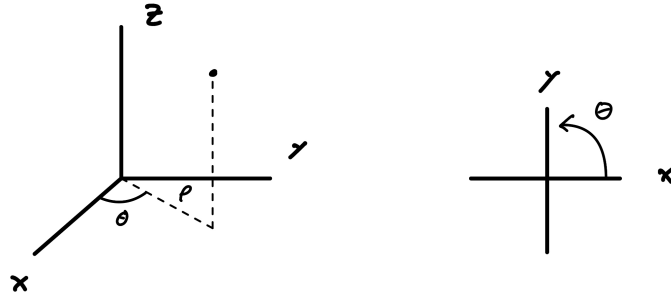


Figura 5: Descripción breve de la imagen.

Donde  $\theta$  va siempre desde el eje positivo de  $x$  al eje positivo de  $y$ . Al igual que en coordenadas cartesianas, las coordenadas cilíndricas también tienen *vectores unitarios*:

$$\hat{e}_r = \cos \theta \hat{i} + \sin \theta \hat{j}, \quad \hat{e}_\theta = -\sin \theta \hat{i} + \cos \theta \hat{j}, \quad \hat{e}_z = \hat{k}.$$

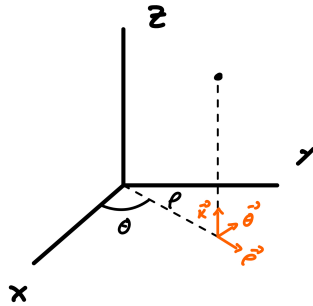


Figura 6: Descripción breve de la imagen.

## 2.2 Diferenciales de longitud, área y volumen (cartesianas)

De longitud:

$$d\vec{\ell} = dx \hat{i} + dy \hat{j} + dz \hat{k}$$

De área:

$$d\vec{A}_x = dy dz \hat{i},$$

$$d\vec{A}_y = dx dz \hat{j},$$

$$d\vec{A}_z = dx dy \hat{k}.$$

De volumen:

$$dV = dx dy dz$$

*Hacer esquemas visuales.*

## 2.3 Diferenciales de longitud, área y volumen (cilíndricas)

De longitud:

$$d\vec{\ell} = dr \hat{e}_r + r d\theta \hat{e}_\theta + dz \hat{e}_z$$

De área:

$$d\vec{S}_r = r d\theta dz \hat{e}_r,$$

$$d\vec{S}_\theta = dr dz \hat{e}_\theta,$$

$$d\vec{S}_z = r dr d\theta \hat{e}_z.$$

De volumen:

$$dV = r dr d\theta dz$$

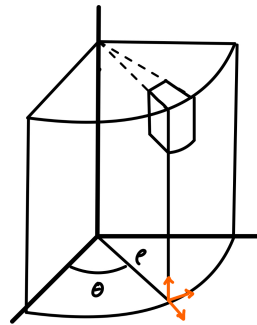


Figura 7: Descripción breve de la imagen.

**Ejemplo:**

Un anillo cargado con densidad de carga lineal variable  $\lambda = \cos^2 \theta$  y radio  $a$ . Determinar la carga total.

La densidad lineal, por tanto la carga vendrá dada como:

$$q_T = \oint \lambda dl = \int_0^{2\pi} \lambda a d\theta = a \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta.$$

*\* Los límites de integración varían dependiendo de nuestro sistema de referencia. En nuestro caso  $r = a$  y  $\theta \in [0, 2\pi]$ .*

**Ejemplo:**

Un disco cargado con densidad de carga superficial  $\sigma = \rho \sin^2 \theta$  y radio  $R$ . Determina la **carga total** del disco.

$$q_T = \iint_S \sigma dA = \int_0^{2\pi} \left( \int_0^R \rho \sin^2 \theta r dr \right) d\theta.$$

**Ejemplo:**

Un anillo cargado con densidad de carga lineal constante  $\lambda$  y radio  $a$ . Determine el valor del **campo eléctrico** en el punto  $P$  (sobre el eje del anillo, a altura  $z$ ).

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint \frac{dq}{r^2} \hat{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \frac{\lambda a d\theta}{a^2 + z^2} \frac{-a \cos \theta \hat{i} - a \sin \theta \hat{j} + z \hat{k}}{\sqrt{a^2 + z^2}}.$$

Como integral vectorial, se integran las componentes por separado:

$$\int_0^{2\pi} \frac{-a \cos \theta}{(a^2 + z^2)^{3/2}} d\theta = 0, \quad \int_0^{2\pi} \frac{-a \sin \theta}{(a^2 + z^2)^{3/2}} d\theta = 0,$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{z}{(a^2 + z^2)^{3/2}} d\theta = \frac{2\pi z}{(a^2 + z^2)^{3/2}}.$$

Por tanto,

$$\boxed{\vec{E}(P) = \frac{\lambda a z}{2 \epsilon_0 (a^2 + z^2)^{3/2}} \hat{k}}$$

## 2.4 Coordenadas esféricas

Las **coordenadas cilíndricas** representan un punto en el espacio mediante la tripleta  $(r, \theta, \phi)$ , donde  $r$  es la distancia desde el punto al origen (coordenada radial),  $\theta$  es el ángulo que forma el radio con el eje  $x$  (coordenada acimutal) y  $\phi$  es el ángulo que forma el radio con el eje  $z$  (coordenada polar). Este sistema es una generalización de las coordenadas polares al espacio tridimensional y es útil en problemas con simetría esférica.

Siendo las nuevas coordenadas:

$$x = r \sin \theta \cos \phi, \quad y = r \sin \theta \sin \phi, \quad z = r \cos \theta$$

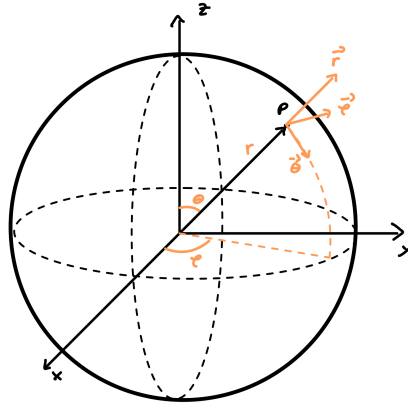


Figura 8: Coordenadas esféricas:  $r$ ,  $\theta$ ,  $\phi$ .

### Diferenciales de longitud, área y volumen (esféricas)

De longitud:

$$d\vec{\ell} = dr \hat{e}_r + r d\theta \hat{e}_\theta + r \sin \theta d\phi \hat{e}_\phi$$

De área:

$$d\vec{S}_r = r^2 \sin \theta d\theta d\phi \hat{e}_r,$$

$$d\vec{S}_\theta = r \sin \theta dr d\phi \hat{e}_\theta,$$

$$d\vec{S}_\phi = r dr d\theta \hat{e}_\phi.$$

De volumen:

$$dV = r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi$$

**Ejemplo:**

Una esfera de radio  $r$  tiene una densidad superficial dada como:

$$\sigma = x^2 + y^2 + z^2$$

Determina su carga total:

$$Q_T = \int_A \sigma dA$$

donde:

$$dA = r^2 \sin \theta d\theta d\phi$$

$$Q_T = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi r^2 \sin \theta d\theta d\phi = 4\pi r^4$$

**Ejemplo:**

$$V = \int_V dV = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^r r^2 \sin \theta d\phi d\theta dr$$

Una esfera de radio  $R$  tiene una densidad de carga volumétrica de

$$\rho = e^{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}} = e^r$$

Determina la carga total:

$$Q_T = \int_V \rho dV = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^R e^r r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi$$

$$Q_T = 4\pi \int_0^R e^r r^2 dr = \frac{4\pi}{3} (e^R - 1)$$

**Ejemplo:**

Determina el campo eléctrico que genera una carga puntual en cualquier punto del espacio.

**a) Con coordenadas cartesianas**

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r_q^2} \hat{r}_q$$

Calculamos el vector unitario  $\hat{r}_q$ :

$$\hat{r}_q = \frac{\vec{r}_P - \vec{r}_q}{|\vec{r}_P - \vec{r}_q|} = \frac{x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k} - 0}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

La añadimos a la expresión del campo:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{x^2 + y^2 + z^2} \frac{x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q(x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k})}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}.$$

**b) Con coordenadas cilíndricas**

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r_q^2} \hat{r}_q$$

Calculamos el vector unitario  $\hat{r}_q$ :

$$\hat{r}_q = \frac{\vec{r}_P - \vec{r}_q}{|\vec{r}_P - \vec{r}_q|} = \frac{\rho\hat{e}_\rho + z\hat{k} - 0}{\sqrt{\rho^2 + z^2}}$$

La añadimos a la expresión del campo:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\rho^2 + z^2} \frac{\rho\hat{e}_\rho + z\hat{k}}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q(\rho\hat{e}_\rho + z\hat{k})}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}}.$$

**c) Con coordenadas esféricas**

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r_q^2} \hat{r}_q$$

Calculamos el vector unitario  $\hat{r}_q$ :

$$\hat{r}_q = \frac{\vec{r}_P - \vec{r}_q}{|\vec{r}_P - \vec{r}_q|} = \frac{r\hat{e}_r - 0}{r} = \hat{e}_r$$

La añadimos a la expresión del campo:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{e}_r.$$

**Ejercicio 2:** Un cilindro de radio  $R$  tiene su superficie circular cargada con una densidad de carga constante. Determina el campo eléctrico generado a una distancia  $d$  de su eje como muestra la figura.

El campo eléctrico generado por el cilindro vendrá dado como:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint \frac{dq}{r^2} \hat{r}_{qP}.$$

Con elemento de carga superficial

$$dq = \sigma dA = \sigma R d\theta dz; \quad \theta \in [0, 2\pi], \quad z \in [0, h].$$

Calculamos el vector

$$\begin{aligned} \vec{r}_{qP} &= \vec{r}_P - \vec{r}_q = (h + d) \hat{\mathbf{k}} - (R \hat{\mathbf{e}}_r + z \hat{\mathbf{k}}), \\ |\vec{r}_{qP}| &= \sqrt{R^2 + (h + d - z)^2}. \end{aligned}$$

Sustituyendo:

$$\vec{E} = \frac{\sigma R}{4\pi\epsilon_0} \int_0^h \int_0^{2\pi} \left[ \frac{-R \hat{\mathbf{e}}_r}{(R^2 + (h + d - z)^2)^{3/2}} + \frac{(h + d - z) \hat{\mathbf{k}}}{(R^2 + (h + d - z)^2)^{3/2}} \right] d\theta dz.$$

*Nota:* hay que cambiar  $\hat{\mathbf{e}}_r$  por  $\cos \theta \hat{i} + \sin \theta \hat{j}$  ya que  $\hat{\mathbf{e}}_r$  depende de  $\theta$ .

**Ejercicio 3.** Un recipiente hemisférico de radio  $a$  tiene una carga total  $q$  repartida uniformemente en su superficie. Encuentre el campo eléctrico en el centro de curvatura (véase la figura).

El campo eléctrico viene dado como

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq}{r^2} \hat{r}.$$

**Sustituimos.** Como por simetría sólo queda la componente sobre el eje,

$$E_z = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{dq}{a^2} \cos \theta, \quad dq = \sigma dA, \quad dA = a^2 \sin \theta d\theta d\varphi, \quad \sigma = \frac{q}{2\pi a^2}.$$

Por tanto:

$$E_z = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{\sigma a^2 \sin \theta d\theta d\varphi}{a^2} \cos \theta.$$

Además,

$$\hat{r}_{qP} = \frac{\vec{r}_P - \vec{r}_q}{|\vec{r}_P - \vec{r}_q|}, \quad |\vec{r}_P - \vec{r}_q| = a.$$



## 2.5 Ley de Gauss

La ley de Gauss en electrostática relaciona el flujo de campo eléctrico a través de una superficie cerrada con la carga neta encerrada en ella, afirmando que el flujo es igual a la carga neta dividida por la permitividad del vacío. Matemáticamente, se expresa como:

$$\oint_{\partial V} \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{\text{enc}}}{\varepsilon_0}.$$

La ley de Gauss proviene de la primera ley de Maxwell; para llegar a ella partimos del *teorema de la divergencia*:

$$\oint_{\partial V} \vec{E} \cdot d\vec{A} = \iiint_V (\nabla \cdot \vec{E}) dV,$$

$$\frac{q_{\text{enc}}}{\varepsilon_0} = \iiint_V \frac{\rho}{\varepsilon_0} dV$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (\text{primera ley de Maxwell en el vacío}).$$

Si hay divergencia en el campo, es decir,  $\nabla \cdot \vec{E} > 0$ , el campo *diverge* (fuente). Si por el contrario  $\nabla \cdot \vec{E} < 0$ , tenemos un *sumidero*, es decir, el campo *converge*.

Para usar la **ley de Gauss** tengo que crear una **superficie imaginaria** a mi conveniencia para poder integrar sobre ella.

### Ejemplo:

Se tiene una esfera aislante con una distribución de carga homogénea repartida uniformemente en su volumen. La esfera tiene radio  $R$ . Determina el campo eléctrico producido por la esfera en todo el espacio.

Primero calculamos el campo **fuera de la esfera** ( $r > R$ ). Para ello, mi **superficie gaussiana** será una esfera concéntrica de radio  $r$ .

$$\oint_{\partial V} \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{\text{enc}}}{\varepsilon_0}$$

$$\oint_{\partial V} \vec{E} \cdot d\vec{A} = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi |\vec{E}| r^2 \sin \theta d\theta d\phi = |\vec{E}| r^2 4\pi$$

$$\frac{q_{\text{enc}}}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0} \iiint \rho dV = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^R \rho r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi = \frac{4\pi}{3\varepsilon_0} \rho R^3$$

Igualando ambas ecuaciones:

$$|\vec{E}| 4\pi r^2 = \frac{4\pi}{3\varepsilon_0} \rho R^3$$

$$|\vec{E}| = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2}$$

Por lo tanto, el campo eléctrico para  $r > R$  es:

$$\boxed{\vec{E} = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2} \hat{r}}$$

Veamos lo que pasa ahora para  $r < R$  (**dentro de la esfera**). En este caso, la superficie gaussiana será una esfera concéntrica menor que la esfera original.

$$\oint_{\partial V} \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{\text{enc}}}{\varepsilon_0}$$

$$\oint_{\partial V} \vec{E} \cdot d\vec{A} = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi |\vec{E}| r^2 \sin \theta d\theta d\phi = |\vec{E}| r^2 4\pi$$

$$\frac{q_{\text{enc}}}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0} \iiint \rho dV = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^r \rho r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi = \frac{4\pi}{3\varepsilon_0} \rho r^3$$

Igualando ambas ecuaciones:

$$|\vec{E}| 4\pi r^2 = \frac{4\pi}{3\varepsilon_0} \rho r^3$$

$$\boxed{\vec{E} = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0} \hat{r}}$$

Resultado final:

$$\vec{E}(r) = \begin{cases} \frac{\rho r}{3\varepsilon_0} \hat{r}, & r < R \\ \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2} \hat{r}, & r > R \end{cases}$$

Ahora sustituimos en la ley de Gauss:

$$|\vec{E}| 4\pi r^2 = \frac{1}{\varepsilon_0} \frac{4\pi}{3} \rho r^3$$

$$|\vec{E}| = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0}$$

Por tanto, en forma vectorial quedaría:

$$\vec{E} = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0} \hat{r}$$

Entonces el campo eléctrico será:

$$\vec{E} = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0} \hat{r} \quad \text{si } r < R, \quad \vec{E} = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2} \hat{r} \quad \text{si } r > R.$$

### Ejemplo:

Tenemos una línea de carga de densidad lineal  $\lambda$  y longitud infinita. Determine el campo eléctrico producido en un punto a una distancia  $r$  del cable. Para conocer el campo eléctrico aplicaremos la **ley de Gauss** sobre la superficie gaussiana mostrada en la figura:

$$\Phi_E = \iint_{\partial V} \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{\text{enc}}}{\varepsilon_0}.$$

$$\iint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = \iint_{\text{tapa sup}} \vec{E} \cdot d\vec{A} + \iint_{\text{tapa inf}} \vec{E} \cdot d\vec{A} + \iint_{\text{pared}} \vec{E} \cdot d\vec{A}.$$

Sabemos que  $\vec{E} = |E| \hat{e}_\rho$  (radial) y es tangencial a las tapas  $\Rightarrow$  las contribuciones de las tapas son nulas; sólo aporta la pared cilíndrica:

$$\Phi_E = \iint_{\text{pared}} \vec{E} \cdot d\vec{A} = \int_0^h \int_0^{2\pi} |E| (\rho d\theta) dz = |E| (2\pi\rho h).$$

Por otro lado,

$$\frac{q_{\text{enc}}}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0} \int \lambda dl = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_0^h \lambda dz = \frac{\lambda h}{\varepsilon_0}.$$

Iguando términos:

$$|E| (2\pi\rho h) = \frac{\lambda h}{\varepsilon_0} \implies |E| = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 \rho}, \quad \boxed{\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 \rho} \hat{e}_\rho}$$

**Ejemplo:**

Caso de un plano cargado con densidad superficial constante  $\sigma$ . Determinar el campo eléctrico a una distancia  $d$  del plano. Aplicamos la ley de Gauss con una superficie cilíndrica (“pastilla”) que corta el plano:

$$\Phi_E = \iint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{\text{enc}}}{\varepsilon_0}, \quad d\vec{A} = \hat{n} dA, \quad \vec{E} = |E| \hat{n}.$$

La contribución de la pared lateral es nula ( $\vec{E} \perp d\vec{A}$  allí). Aportan sólo las tapas:

$$\Phi_E = |E| A_{\text{sup}} + |E| A_{\text{inf}} = 2|E| (\pi R^2).$$

La carga encerrada es

$$\frac{q_{\text{enc}}}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0} \iint \sigma dA = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \pi R^2.$$

Por tanto,

$$2|E| \pi R^2 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \pi R^2 \implies \boxed{|E| = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}} \quad (\text{constante, independiente de } d).$$

**2.6 Conductores en equilibrio**

Un conductor en equilibrio se comporta de manera peculiar: toda la carga se apantalla en la superficie y en su centro el campo eléctrico va a ser 0. Nunca vamos a poder tener una densidad volumétrica de carga. Si en su defecto se pone un conductor en un campo eléctrico, las cargas positivas y negativas se apantallan opuestamente y la suma neta de carga es 0.

**Ejemplo:**

Una esfera aislante sólida, de radio  $a$ , tiene una carga positiva neta  $Q$  distribuida de manera uniforme por todo su volumen. Un cascarón esférico conductor, con radio interior  $b$  y radio exterior  $c$ , es concéntrico con la esfera sólida y tiene una carga neta  $-2Q$ . Encuentre el campo eléctrico en todo el espacio y la distribución de carga en el cascarón, cuando todo el sistema se encuentra en equilibrio electrostático.

Lo primero es identificar las regiones en las que vamos a calcular el campo:

$$r < a \quad \rightarrow \quad \text{Dentro de la esfera}$$

$$a < r < b \quad \rightarrow \quad \text{Entre la esfera y el cascarón}$$

$$b < r < c \quad \rightarrow \quad \text{Dentro del cascarón}$$

$$r > c \quad \rightarrow \quad \text{Fuera del cascarón}$$

Observamos que existe simetría, por lo tanto vamos a aplicar la **ley de Gauss** sobre el área de la figura:

$$\Phi = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$$

Establecemos nuestro diferencial de área. Como estamos trabajando con coordenadas esféricas, será:

$$dA = r^2 \sin \theta \, d\theta \, d\phi$$

Ahora empezamos a calcular:

$$\vec{E} = |\vec{E}| \hat{r}$$

Calculamos la carga encerrada:

$$q_{\text{enc}} = \iiint \rho \, dV \quad \text{donde} \quad \rho = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi a^3}$$

$$q_{\text{enc}} = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^r \frac{3Q}{4\pi a^3} r'^2 \sin \theta \, dr' \, d\theta \, d\phi = \frac{Qr^3}{a^3}$$

Sustituyendo esto en la ley de Gauss:

$$4\pi r^2 |\vec{E}| = \frac{q_{\text{enc}}}{\varepsilon_0} = \frac{Qr^3}{\varepsilon_0 a^3}$$

$$|\vec{E}| = \frac{Qr}{4\pi \varepsilon_0 a^3}$$

Calculamos ahora el campo en la segunda región:  $a < r < b$

$$\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{\text{enc}}}{\varepsilon_0}$$

Nuestro diferencial de área sigue siendo el mismo (coordenadas esféricas):

$$dA = r^2 \sin \theta \, d\theta \, d\phi, \quad \vec{E} = |\vec{E}| \hat{r} \quad (\text{el campo es perpendicular a la superficie gaussiana}).$$

La carga encerrada es la de toda la esfera maciza:

$$q_{\text{enc}} = \iiint \rho \, dV = Q.$$

Igualando,

$$4\pi r^2 |\vec{E}| = \frac{Q}{\varepsilon_0} \implies |\vec{E}| = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}.$$

Región  $b < r < c$  (dentro del cascarón): Dentro del conductor el campo es nulo (las cargas se redistribuyen de forma que anulan el campo en el interior):

$$\vec{E} = \vec{0}.$$

Región  $r > c$  (fuera del cascarón):

Aplicamos de nuevo Gauss:

$$\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{\text{enc}}}{\varepsilon_0}, \quad q_{\text{enc}} = Q + (-2Q) = -Q.$$

Por tanto,

$$4\pi r^2 |\vec{E}| = \frac{-Q}{\varepsilon_0} \implies \vec{E} = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \hat{r} \quad (r > c).$$

## b) Distribución de carga en el cascarón

El campo eléctrico dentro del conductor (cascarón) es nulo:

$$\oint_A \vec{E} \cdot d\vec{A} = 0 = \frac{q_{\text{enc}}}{\varepsilon_0}$$

Entonces:

$$q_{\text{enc}} = q_a + q_{b_{\text{int}}} = 0$$

$$q_{b_{\text{int}}} = -q_a = -Q$$

Para la superficie interior del cascarón:

$$\sigma_{\text{int}} = \frac{q_{b_{\text{int}}}}{A_{\text{int}}} = -\frac{Q}{4\pi b^2}$$

Sabemos que la carga total del conductor es  $-2Q$ , entonces:

$$q_{\text{total conductor}} = q_{b_{\text{int}}} + q_{b_{\text{ext}}} = -2Q$$

$$q_{b_{\text{ext}}} = -2Q - q_{b_{\text{int}}} = -2Q + Q = -Q$$

Por tanto, la densidad superficial exterior es:

$$\sigma_{\text{ext}} = \frac{q_{b_{\text{ext}}}}{A_{\text{ext}}} = -\frac{Q}{4\pi c^2}$$

### Ejemplo:

Considere un cable coaxial muy largo, compuesto por un cilindro sólido interior de radio  $a$  y densidad de carga volumétrica constante  $\rho$ , y por un cilindro exterior hueco de radio  $b$  ( $b > a$ ) que lleva una densidad de carga superficial  $\sigma$ . El sistema es eléctricamente neutro. Determinar el campo eléctrico producido por el cable en todo el espacio.

Definimos las regiones en las que calcularemos el campo:

$$\begin{aligned} \rho < a &\rightarrow \text{Dentro del cilindro} \\ a < \rho < b &\rightarrow \text{Vacío entre cilindros} \\ \rho > b &\rightarrow \text{Fuera del cable coaxial} \end{aligned}$$

Calculamos el campo en la primera región:  $\rho < a$ : En este caso, la superficie gaussiana será un cilindro coaxial con el eje del cable:

$$\Phi_E = \oint_A \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{\text{enc}}}{\epsilon_0}$$

El diferencial de área será:

$$d\vec{A} = \rho d\phi dz \hat{\rho}$$

donde:  $\vec{E} = |\vec{E}| \hat{\rho}$ .

Entonces:

$$\oint_A \vec{E} \cdot d\vec{A} = |\vec{E}| \rho 2\pi h$$

Calculamos la carga encerrada:

$$q_{\text{enc}} = \iiint \rho dV = \int_0^{2\pi} \int_0^\rho \int_0^h \rho \rho' d\rho' d\phi dz = \rho \pi \rho^2 h$$

Sustituyendo en la ley de Gauss:

$$|\vec{E}| 2\pi \rho h = \frac{\rho \pi \rho^2 h}{\varepsilon_0}$$

$$\boxed{\vec{E} = \frac{\rho \rho}{2\varepsilon_0} \hat{\rho}}$$

Campo en la segunda región ( $a < \rho < b$ ):

Aplicamos Gauss:

$$\oint_A \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{\text{enc}}}{\varepsilon_0}$$

$$|\vec{E}| 2\pi \rho h = \frac{\rho \pi a^2 h}{\varepsilon_0}$$

$$\boxed{\vec{E} = \frac{\rho a^2}{2\varepsilon_0 \rho} \hat{\rho}}$$

Campo en la tercera región ( $\rho > b$ ):

Sabemos que el sistema es eléctricamente neutro, por tanto:

$$q_{\text{enc}} = 0$$

$$\boxed{\vec{E} = 0}$$

### Relación entre $\rho_e$ y $\sigma$

Vemos la relación que existe entre  $\rho_e$  y  $\sigma$ :

$$Q_T = Q_e + Q_\sigma = 0 = \iiint \rho_e dV + \iint \sigma dA$$

De aquí obtenemos:

$$\iiint \rho_e dV = \int_0^h \int_0^{2\pi} \int_0^a \rho_e \rho d\rho d\theta dz = \rho_e 2\pi h \frac{a^2}{2} = \rho_e \pi h a^2$$



$$\iint \sigma \, dA = \int_0^h \int_0^{2\pi} \sigma \, b \, d\theta \, dz = \sigma \, 2\pi b h$$

Sustituyendo en la ecuación de neutralidad:

$$\rho_e \pi h a^2 + \sigma \, 2\pi b h = 0$$

Finalmente, despejando  $\sigma$ :

$$\sigma = -\frac{\rho_e a^2}{2b}$$