Apuntes de Variable Compleja

Luis López

Septiembre 2025

Índice

Introducción

Los **números complejos**, denotados por $\mathbb{C}$, constituyen una extensión de los números reales $\mathbb{R}$, cumpliéndose que $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. A diferencia de los reales, los complejos forman un *cuerpo algebraicamente cerrado*, lo que significa que todo polinomio con coeficientes complejos admite todas sus raíces en $\mathbb{C}$.

Todo número complejo puede escribirse como

$$z = x + iy,$$

donde $x, y \in \mathbb{R}$ e i es la unidad imaginaria ($i^2 = -1$). También pueden representarse en *forma polar*, mediante su módulo y argumento.

El conjunto $\mathbb{C}$ no solo es fundamental en álgebra y análisis, sino que resulta indispensable en múltiples áreas de las matemáticas aplicadas y la física. Asimismo, los números complejos son herramientas habituales en ingeniería.

1. Números complejos

1.1 Teoría y estructura elemental

La imposibilidad de resolver ciertas ecuaciones con números reales nos obliga a introducir los **números imaginarios**, definidos a partir de la unidad i tal que

$$i^2 = -1.$$

1.2 Introducción elemental

Denotamos los números complejos como

$$\mathbb{C} = \{z = a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}\}.$$

Dado $z = a + bi \in \mathbb{C}$, se definen:

- Parte real: $\Re(z) = a \in \mathbb{R}$.
- Parte imaginaria: $\Im(z) = b \in \mathbb{R}$.
- Módulo: $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.
- Conjugado: $\overline{z} = a - bi$.

Ejemplo. Sea $z = 1 - 2i$. Entonces:

$$\Re(1-2i) = 1,\ \Im(1-2i) = -2,\ \overline{1-2i} = 1+2i,\ |1-2i| = \sqrt{1^2 + (-2)^2} = \sqrt{5}.$$

1.3 Propiedades elementales

1. $\overline{\overline{z}} = z$. Demostración: si $z = a + bi \Rightarrow \overline{z} = a - bi \Rightarrow \overline{\overline{z}} = a + bi = z$.
2. $z + \overline{z} = 2\Re(z)$.
3. $z - \overline{z} = 2i\Im(z)$.
4. $|\overline{z}| = |z|$.
5. $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$.
6. $\overline{z \cdot z'} = \overline{z} \cdot \overline{z'}$.

Además, tenemos las siguientes propiedades asociadas al **módulo**:

1. $|\Re(z)| \leq |z|$.

2. $|\Im(z)| \leq |z|$. En efecto, $|z| = \sqrt{a^2+b^2} \geq |b|$.

3. **Desigualdad triangular:** $|z+w| \leq |z| + |w| \quad \forall z, w \in \mathbb{C}$.

4. $z \cdot \overline{z} = |z|^2$.

5. **Desigualdad triangular inversa:** $\Big||z| - |z'|\Big| \leq |z - z'|$.

Todas estas propiedades, junto con la suma y producto de números complejos, generalizan las propiedades de los números reales:

$$z + z' = (x+iy) + (x'+iy') = (x+x') + (y+y')i \in \mathbb{C},$$

$$z \cdot z' = (x+iy)(x'+iy') = (xx' - yy') + (xy' + x'y)i \in \mathbb{C}.$$

En particular, si $z = a + bi$, se cumple que

$$|z| = \sqrt{a^2+b^2},$$

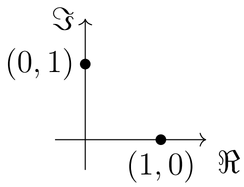
es decir, el módulo de z coincide con el valor absoluto en los reales.

1.4 Forma polar y geometría de los números complejos

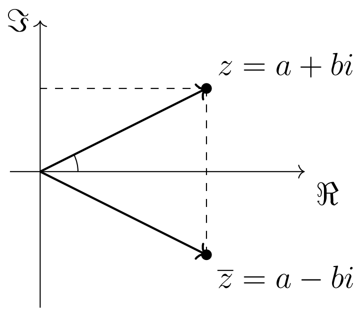
El conjunto $\mathbb{C}$ se puede representar como $\mathbb{R}^2$ mediante la asignación

$$z = a + bi \longmapsto (a,b) \in \mathbb{R}^2.$$

De esta forma obtenemos el denominado **plano complejo**; por lo tanto, la interpretación geométrica de *todo lo visto* sería:



Representación de 1 e i



Geometría de z y $\overline{z}$

Si $z = \frac{|z|}{|z|} z = |z| \frac{z}{|z|} = |z|(\cos\theta + i \sin\theta)$, decimos que z está en **forma polar**.

Sea:

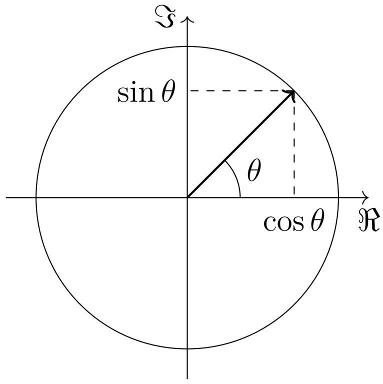
$$w = \frac{z}{|z|} \quad \Rightarrow \quad |w| = \frac{|z|}{|z|} = 1.$$

Es decir, $\frac{z}{|z|}$ es un número complejo de módulo 1, luego existe $\theta \in \mathbb{R}$ tal que

$$\frac{z}{|z|} = \cos\theta + i \sin\theta.$$

Ejemplo. El número complejo $1 + i$ en forma polar es:

$$1 + i = \sqrt{2} \left(\cos\frac{\pi}{4} + i \sin\frac{\pi}{4} \right).$$



Circunferencia unitaria: $w = \cos\theta + i \sin\theta$

Vemos que un mismo número complejo tiene infinitas representaciones polares por culpa del ángulo θ, llamado **argumento de** z. Para solucionar este problema introducimos el **argumento principal** de z, que es aquel ángulo $-\pi < \theta \leq \pi$ que verifica:

$$z = |z|(\cos\theta + i \sin\theta), \qquad \theta = \arg(z).$$

Además, si $z = x + iy$, entonces:

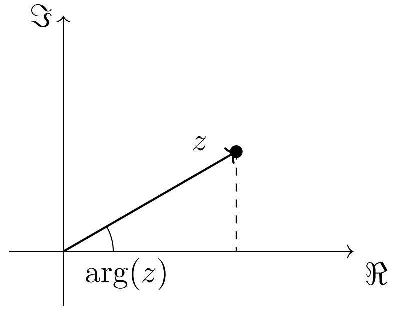
$$\arg(z) = \begin{cases} \arctan\left(\dfrac{y}{x}\right), & x > 0,\ y \geq 0, \\ \arctan\left(\dfrac{y}{x}\right) + \pi, & x < 0,\ y \geq 0, \\ \pi, & x < 0,\ y = 0, \\ \arctan\left(\dfrac{y}{x}\right) - \pi, & x < 0,\ y < 0, \\ -\dfrac{\pi}{2}, & x = 0,\ y < 0, \\ \dfrac{\pi}{2}, & x = 0,\ y > 0, \\ \arctan\left(\dfrac{y}{x}\right), & x > 0,\ y < 0. \end{cases}$$

Nótese que se verifica que

$$\arg(z) = \arg(z) + 2k\pi, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Así, geométricamente, un número complejo z tendría esta información:

$$z = |z| e^{i \arg(z)}.$$



Argumento de z.

Al tener el módulo de cualquier complejo podemos hablar de la noción de distancia entre complejos, dada por:

$$d(z, w) = |z - w|.$$

Definición. El disco centrado en $z_0 \in \mathbb{C}$ y de radio $\varepsilon > 0$ es:

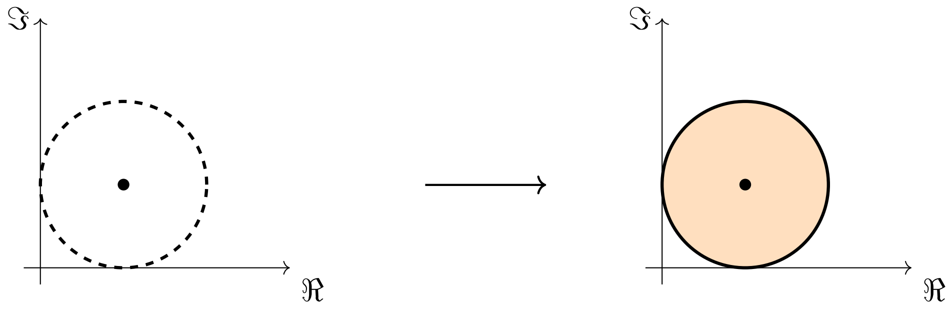
$$D(z_0, \varepsilon) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < \varepsilon\}.$$

Ejemplo.

$$D(1+i,1) = \{z \in \mathbb{C} : |z-(1+i)| < 1\}.$$

El disco cerrado se denota por:

$$\overline{D}(z_0,\varepsilon) = \{z \in \mathbb{C} : |z-z_0| \le \varepsilon\}.$$



Disco abierto $D(1+i,1)$ Disco cerrado $\overline{D}(1+i,1)$

1.5 Forma exponencial y multiplicación de números complejos

Por conveniencia, escribimos

$$\cos\theta + i\sin\theta \;=\; e^{i\theta}.$$

Así, la forma polar $z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$ se expresa como

$$z = |z|\, e^{i\theta}.$$

Esta representación hace muy sencilla la multiplicación de complejos. En efecto, si:

$$z = r\, e^{i\theta}, \qquad w = \rho\, e^{i\varphi} \quad (r,\rho \ge 0),$$

entonces:

$$z\, w = (r\rho)\, e^{i(\theta+\varphi)}.$$

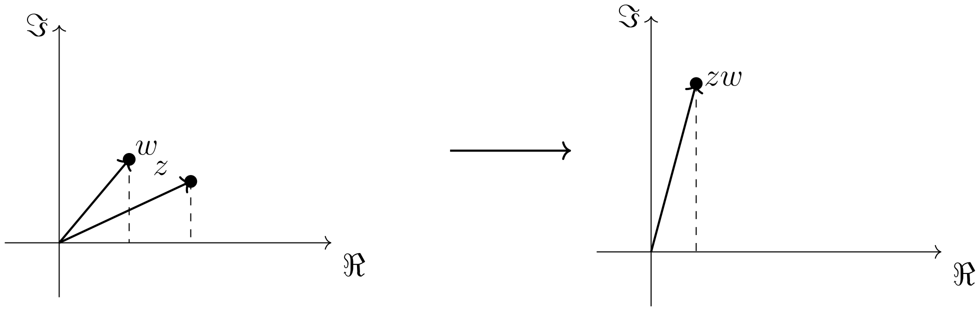
En particular,

$$|zw| = |z|\,|w|, \qquad \arg(zw) = \arg(z) + \arg(w) \pmod{2\pi}.$$

Nota. En general es *falso* que

$$\arg(zw) = \arg(z) + \arg(w),$$

pues arg es el argumento principal (restringido a $(-\pi,\pi]$) y puede requerir ajustar por múltiplos de 2π.



Multiplicación en forma polar (solo vectores).

Ejemplo.

$$\arg(i) = \frac{\pi}{2}, \qquad \arg(-i) = -\frac{\pi}{2},$$

mientras que

$$\arg(i) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \qquad \arg(-i) = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Potencias (fórmula de De Moivre). Si $z = r\,e^{i\theta}$ y $n \in \mathbb{N}$, entonces:

$$z^n = r^n\,e^{in\theta}.$$