

# Teorema de Steiner

## Guion de laboratorio

### 1. Objetivos

En esta práctica se estudiarán experimentalmente fenómenos de rotación de un sólido rígido, empleando un montaje basado en un muelle de torsión. De esta forma, se podrán determinar experimentalmente sus momentos de inercia y comprobar el cumplimiento del teorema de Steiner.

### 2. Introducción teórica

En un muelle de torsión, la fuerza recuperadora asociada a la ley de Hooke se traduce en una expresión análoga para el momento de fuerza  $\tau$  y el desplazamiento angular  $\varphi$ :

$$\tau = -v\varphi, \quad (1)$$

siendo  $v$  la constante recuperadora angular del muelle de torsión, análoga a la constante elástica habitual.

En el caso del movimiento de un sólido rígido acoplado a un muelle de torsión, suponiendo un giro con respecto a uno de los ejes principales del sólido, el momento de fuerza es directamente proporcional a la aceleración angular:

$$\tau = I \frac{d^2\varphi}{dt^2}, \quad (2)$$

donde  $I$  es el momento de inercia del sólido con respecto a dicho eje. Combinando las dos ecuaciones previas, se obtiene la ecuación diferencial que describe el movimiento angular del sólido:

$$\ddot{\varphi}(t) + \frac{v}{I} \varphi(t) = 0. \quad (3)$$

Esta ecuación diferencial corresponde a un movimiento oscilatorio de periodo

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{v}}. \quad (4)$$

De esta forma, es posible relacionar los periodos de oscilación de un sólido rígido acoplado a un muelle de torsión con su momento de inercia.

Además, el teorema de Steiner permite relacionar los momentos de inercia con respecto a dos ejes paralelos. Conocido uno de ellos, el momento de inercia con respecto a un segundo eje, separado del primero una distancia  $a$ , viene dado por

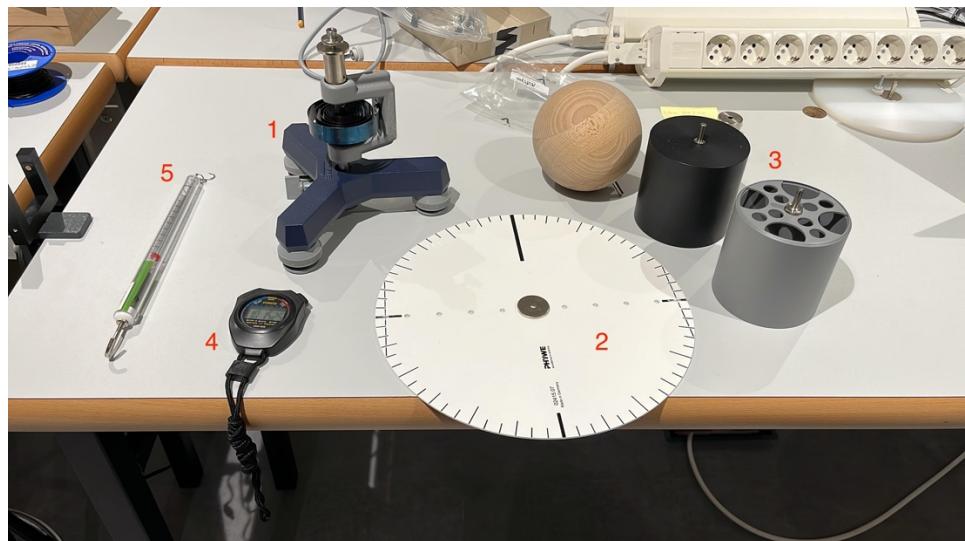
$$I_a = I + ma^2. \quad (5)$$

Por tanto, es posible relacionar los períodos de las oscilaciones centradas en dos puntos:

$$T_a^2 = T^2 + \frac{4\pi^2 ma^2}{v}. \quad (6)$$

### 3. Material

- Péndulo de torsión y base (1).
- Disco graduado (2).
- Distintos sólidos rígidos (varillas, esferas, cilindros) (3).
- Cronómetro (4).
- Dinamómetro (5).



### 4. Procedimiento experimental

#### 4.1. Constante del muelle

La primera parte de la práctica consiste en determinar experimentalmente la constante recuperadora  $v$  del muelle de torsión. Para ello, se girará el muelle distintos ángulos, medidos mediante el disco graduado. Para cada uno, se determinará el momento de fuerza ejercido sobre el muelle, fijando un dinamómetro a una distancia dada del centro del disco. Conocida dicha distancia y la lectura del dinamómetro, se podrán determinar los torques necesarios para girar el muelle.

## 4.2. Momentos de inercia

A continuación, se procederá a medir los momentos de inercia de diferentes sólidos rígidos (varilla, esfera, cilindro y el propio disco graduado). Para ello, se acoplarán dichos objetos (en su centro) al muelle de torsión, y se medirán sus períodos de oscilación, tomando varias medidas para efectuar una media. Se recomienda medir el tiempo transcurrido en varias oscilaciones en lugar de un único periodo, para tomar medidas más precisas.

## 4.3. Teorema de Steiner

Por último, se procederá a comprobar experimentalmente el teorema de Steiner en el caso de la varilla y del disco. Para ello, se repetirán medidas similares a las del apartado anterior, pero modificando el centro de giro. En el caso de la varilla, se medirán los distintos períodos de oscilación de la varilla para distintas posiciones, registrando la distancia entre el eje de giro y el centro de masas. El disco se acoplará a la base del péndulo en las distintas muescas, variando el eje de giro.

# **5. Análisis de datos y discusión**

## 5.1. Constante del muelle

Se representarán gráficamente los momentos de fuerza ejercidos sobre el muelle en función del ángulo de giro. Estos datos se ajustarán a una recta. Según la ecuación (1), la pendiente de dicha recta corresponde a la constante recuperadora del muelle.

## 5.2. Momentos de inercia

Aplicando la ecuación (4), se determinarán los momentos de inercia de los distintos sólidos, una vez conocidos sus períodos de oscilación y la constante recuperadora del muelle. Midiendo la masa y dimensiones de estos objetos, es posible calcular de forma teórica sus momentos de inercia. ¿Se corresponden estos valores con los resultados experimentales?

## 5.3. Teorema de Steiner

Se representarán gráficamente los períodos de oscilación al cuadrado en función del cuadrado de la distancia entre el centro de la varilla y su eje de giro. Estos datos se ajustarán a una recta. ¿Se verifica experimentalmente el teorema de Steiner? Según la ecuación (6), la pendiente de dicha recta está relacionada con la constante recuperadora del muelle. Obtener el valor de dicha constante mediante el ajuste lineal. ¿Se corresponden los resultados con los obtenidos en el primer apartado?

## **Bibliografía**

- Taylor, J.R. (2005). *Classical Mechanics*, University Science Books.
- Thornton, S.T., Marion, J.B. (2003). *Classical Dynamics of Particles and Systems*, 5<sup>a</sup> edición, Brooks Cole.