FORMULARIO DE MECÁNICA Y ONDAS I

---

1 SISTEMAS DE REFERENCIA NO INERCIALES Y ROTACIÓN

GLOSARIO DE VARIABLES

- $\vec{r}, \vec{r}'$ = posición
- $\vec{v}, \vec{v}'$ = velocidad
- $\vec{a}, \vec{a}'$ = aceleración
- $\vec{\Omega}$ = velocidad angular del sistema (rad/s), $\omega = |\vec{\Omega}|$
- $\dot{\vec{\Omega}}$ = aceleración angular (rad/s^2)
- r, R = radios (m)
- g = gravedad (9,8 m/s^2)
- $\vec{\Omega}_T$ = rotación de la Tierra (rad/s)
- λ = latitud
- α = ángulo de tiro
- v_0 = velocidad inicial
- d = desviación lateral
- t_c = tiempo de caída corregido
- R_0 = alcance sin rotación, ΔR = corrección del alcance

FÓRMULAS

Derivada en sistema en rotación:

$$\left(\frac{d\vec{A}}{dt}\right)_{in} = \left(\frac{d\vec{A}}{dt}\right)_{rot} + \vec{\Omega} \times \vec{A}$$

Velocidad y aceleración (inercial vs. rotante):

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{\Omega} \times \vec{r}' + \vec{v}_{orig}$$
$$\vec{a} = \vec{a}' + \dot{\vec{\Omega}} \times \vec{r}' + \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}') + 2\vec{\Omega} \times \vec{v}' + \vec{a}_{orig}$$

Aceleraciones ficticias:

$$\vec{a}_{cor} = 2\vec{\Omega} \times \vec{v}'$$
$$\vec{a}_{cf} = \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}')$$

Ecuación de movimiento en el sistema no inercial:

$$m\vec{a}_{rot} = \sum \vec{F}_{\text{reales}} + \vec{F}_{\text{fict}}$$

Fuerzas ficticias (forma estándar):

$$\vec{F}_C = -2m\,\vec{\Omega} \times \vec{v}_{rot}$$
$$\vec{F}_{cf} = -m\,\vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r})$$
$$\vec{F}_E = -m\,\dot{\vec{\Omega}} \times \vec{r}$$

Movimiento circular (cinemática):

$$v = \omega r$$
$$a_c = \omega^2 r = \frac{v^2}{r}$$

Gravedad artificial en anillo:

$$\omega^2 R = g \quad \Rightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{g}{R}}, \qquad v = \omega R = \sqrt{gR}$$

Superficie de un líquido en rotación:

$$z(r) = \frac{\omega^2}{2g}\, r^2 + \text{cte}$$

Coriolis en la Tierra (aprox.):

$$\vec{a}_C = -2\vec{\Omega}_T \times \vec{v}$$

Desviación lateral (resultado dado):

$$d = \frac{4v_0^3}{g^2}\, \omega\, \sin\lambda\, \sin^2\alpha\, \cos\alpha$$

Tiempo de caída corregido (resultado dado):

$$t_c = \frac{2v_0 \sin\alpha}{g - 2\omega v_0 \cos\alpha \cos\lambda}$$

Aproximación:

$$(1-x)^{-1} \approx 1 + x \qquad (|x| \ll 1)$$

Corrección del alcance (resultado dado):

$$\Delta R = \sqrt{\frac{2R_0^3}{g}}\, \omega \cos\lambda \left(\cot^{1/2}\alpha - \frac{1}{3}\tan^{3/2}\alpha\right)$$

---

2 SISTEMAS DE PARTÍCULAS, CHOQUES Y DISPERSIÓN

GLOSARIO DE VARIABLES

- m_i = masa de la partícula i, $M = \sum_i m_i$ = masa total
- $\vec{r}_i, \vec{v}_i$ = posición/velocidad de la partícula i
- $\vec{R}_{CM}, \vec{V}_{CM}, \vec{A}_{CM}$ = posición/velocidad/aceleración del CM
- $\vec{P}$ = momento lineal total
- $\vec{L}$ = momento angular, $\vec{\tau}$ = torque
- $\vec{F}_{ext}$ = fuerza externa total
- $\vec{J}$ = impulso
- k = constante del muelle, x_{max} = compresión máxima
- N_0 = incidentes, n = densidad numérica, t = espesor
- σ = sección eficaz, $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ = sección diferencial
- b = parámetro de impacto, θ, φ = ángulos, $d\Omega$ = ángulo sólido

FÓRMULAS

Centro de masas:

$$\vec{R}_{CM} = \frac{1}{M}\sum_i m_i \vec{r}_i, \qquad M = \sum_i m_i$$

$$\vec{V}_{CM} = \dot{\vec{R}}_{CM} = \frac{1}{M}\sum_i m_i \vec{v}_i$$

Momento lineal total y 2ª ley para el sistema:

$$\vec{P} = \sum_i m_i \vec{v}_i = M\vec{V}_{CM}$$

$$\sum \vec{F}_{ext} = \frac{d\vec{P}}{dt} = M\vec{A}_{CM}$$

Momento angular y torque:

$$\vec{L} = \sum_i \vec{r}_i \times (m_i \vec{v}_i)$$

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}, \qquad \vec{\tau}_{ext} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

Descomposición del momento angular:

$$\vec{L} = \vec{L}_{CM} + \vec{R}_{CM} \times \vec{P}$$

$$\vec{L} = \vec{R}_{CM} \times \vec{P} + \sum_i \vec{r}_i' \times \vec{p}_i' \qquad (\vec{r}_i' = \vec{r}_i - \vec{R}_{CM})$$

Energía cinética (descomposición):

$$K = \frac{1}{2}MV_{CM}^2 + K_{int}, \qquad K_{int} = \sum_i \frac{1}{2}m_i|\vec{v}_i - \vec{V}_{CM}|^2$$

Impulso:

$$\vec{J} = \int \vec{F}\, dt = \Delta\vec{P}$$

Choques:

$$\sum \vec{p}_i = \sum \vec{p}_f$$

Elástico: además $K_i = K_f$.
Inelástico perfecto (1D):

$$v_f = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}$$

Proyectil que comprime un muelle (esquema típico):

$$V = \frac{mv}{M+m}$$

$$\frac{1}{2}(M+m)V^2 = \frac{1}{2}kx_{max}^2 \quad \Rightarrow \quad x_{max} = V\sqrt{\frac{M+m}{k}}$$

Dispersión (scattering):

$$N_{disp} \approx N_0\, n\, t\, \sigma$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{b}{\sin\theta}\left|\frac{db}{d\theta}\right|$$

$$\sigma = \int \frac{d\sigma}{d\Omega}\, d\Omega$$

$$d\Omega = \sin\theta\, d\theta\, d\varphi$$

---

3 SÓLIDO RÍGIDO: MASA, CM, INERCIA Y TORQUE

GLOSARIO DE VARIABLES

- λ, σ, ρ = densidades lineal/superficial/volumétrica
- M = masa total, $\vec{R}_{CM}$ = centro de masas
- $\mathbf{I}$ = tensor de inercia, I_{ij} = componentes
- δ_{ij} = delta de Kronecker
- $\vec{\omega}$ = velocidad angular, $\vec{L}$ = momento angular
- $\vec{\tau}$ = torque, T_{rot} = energía cinética de rotación
- R, L = radio/longitud, a = aceleración, α = aceleración angular
- T = tensión

FÓRMULAS

Elementos de masa y masa total:

$$dm = \lambda\, dl, \qquad dm = \sigma\, dA, \qquad dm = \rho\, dV$$
$$M = \int dm$$

Centro de masas (continuo):

$$\vec{R}_{CM} = \frac{1}{M} \int \vec{r}\, dm$$

Tensor de inercia (componentes):

$$I_{xx} = \int (y^2 + z^2)\, dm, \quad I_{yy} = \int (x^2 + z^2)\, dm, \quad I_{zz} = \int (x^2 + y^2)\, dm$$
$$I_{xy} = I_{yx} = -\int xy\, dm, \quad I_{xz} = -\int xz\, dm, \quad I_{yz} = -\int yz\, dm$$

Tensor de inercia (forma compacta con densidad):

$$I_{ij} = \int \rho\, (\delta_{ij} r^2 - x_i x_j)\, dV$$

Relación compacta:

$$\vec{L} = \mathbf{I} \cdot \vec{\omega}$$

Identidad (lámina en x, y):

$$I_{xx} + I_{yy} = I_{zz}$$

Energía cinética de rotación:

$$T_{rot} = \frac{1}{2}\, \vec{\omega} \cdot \vec{L} = \frac{1}{2}\, \vec{\omega}^{\,T} \mathbf{I}\, \vec{\omega}$$

Torque:

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

Si $\vec{\omega}$ constante y $\vec{L} \not\parallel \vec{\omega}$:

$$\vec{\tau} = \vec{\omega} \times \vec{L} = \vec{\omega} \times (\mathbf{I} \cdot \vec{\omega})$$

Cilindro con cuerda + masa colgante:

$$a = \alpha R$$
$$mg - T = ma$$
$$\tau = TR = I\alpha$$

Momentos de inercia típicos:

$$I_{\text{barra (centro)}} = \frac{1}{12}ML^2, \qquad I_{\text{barra (extremo)}} = \frac{1}{3}ML^2$$
$$I_{\text{disco/cilindro macizo}} = \frac{1}{2}MR^2, \qquad I_{\text{anillo/cilindro hueco}} = MR^2$$
$$I_{\text{esfera maciza}} = \frac{2}{5}MR^2, \qquad I_{\text{esfera hueca}} = \frac{2}{3}MR^2$$

---

4 OSCILACIONES: MAS, AMORTIGUADO Y FORZADO

GLOSARIO DE VARIABLES

- x = desplazamiento, A = amplitud, ϕ = fase
- ω = frecuencia angular, ω_0 = frecuencia natural
- T = periodo, f = frecuencia
- k = constante elástica, m = masa
- b = rozamiento viscoso, β = amortiguamiento
- F_0 = amplitud de la fuerza externa, Ω = frecuencia externa
- ρ = densidad del fluido, A (sección) = área de sección
- $U(x)$ = potencial

FÓRMULAS

Movimiento armónico simple (MAS):

$$x(t) = A\cos(\omega t + \phi) \quad \text{o} \quad x(t) = A\sin(\omega t + \phi)$$
$$\omega = \frac{2\pi}{T}, \qquad f = \frac{1}{T}, \qquad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Si $x = C\sin(\omega t) + D\cos(\omega t)$:

$$A = \sqrt{C^2 + D^2}$$

Masa que se duplica (misma k):

$$\omega' = \sqrt{\frac{k}{2m}}$$

Oscilación por empuje (flotación):

$$\Delta E = \rho g A\, x$$
$$m\ddot{x} + (\rho g A)x = 0$$
$$\omega = \sqrt{\frac{\rho g A}{m}}, \qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{\rho g A}}$$

Oscilador amortiguado (viscoso):

$$F_{roz} = -b\dot{x}$$
$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0$$
$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \qquad \beta = \frac{b}{2m}$$
$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} \quad \text{(subamortiguado)}$$
$$\beta = \omega_0 \quad \Leftrightarrow \quad b_c = 2m\omega_0 = 2\sqrt{km} \quad \text{(crítico)}$$
$$\delta = \ln\left(\frac{A_n}{A_{n+1}}\right) = \frac{2\pi\beta}{\omega}$$

Forzado:

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F_0 \cos(\Omega t)$$
$$A(\Omega) = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\beta\Omega)^2}}$$

Pequeñas oscilaciones desde potencial:

$$U'(x_0) = 0$$
$$U(x) \approx U(x_0) + \frac{1}{2}U''(x_0)(x - x_0)^2$$
$$k_{eq} = U''(x_0), \qquad \omega = \sqrt{\frac{U''(x_0)}{m}}, \qquad T = \frac{2\pi}{\omega}$$

---

5 MECÁNICA LAGRANGIANA Y HAMILTONIANA

GLOSARIO DE VARIABLES

- $\mathcal{L}$ = lagrangiano
- T = energía cinética, U o V = energía potencial
- $q_i, \dot{q}_i$ = coordenadas/velocidades generalizadas
- p_i = momento conjugado
- H = hamiltoniano
- r, θ, φ = coordenadas esféricas
- L_z = componente z del momento angular
- v = rapidez, R = radio, ω = velocidad angular
- dl = diferencial de camino

FÓRMULAS

Lagrangiano:

$$\mathcal{L} = T - U \qquad (\text{equiv. } L = T - V)$$

Ecuaciones de Euler–Lagrange:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0$$

Energía cinética en coordenadas esféricas:

$$T = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2\right)$$

Coordenada cíclica: Si $\partial\mathcal{L}/\partial q = 0$,

$$p_q = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} = \text{cte}$$

Ejemplo:

$$p_\varphi = mr^2\sin^2\theta\,\dot{\varphi} = L_z$$

Momento conjugado:

$$p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}$$

Hamiltoniano:

$$H = \sum_i p_i\dot{q}_i - \mathcal{L}$$

Si conservativo y vínculos fijos:

$$H = T + V$$

Ecuaciones de Hamilton:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \qquad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$$

Rodadura sin deslizamiento:

$$v = \omega R$$

Braquistócrona (funcional):

$$t = \int_A^B dt = \int_A^B \frac{dl}{v}$$
$$dl = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$