# FORMULARIO DE ECUACIONES DIFERENCIALES

---

## 1 EDO DE PRIMER ORDEN

### 1) Variables separables

**Forma típica:**

$$y' = f(x)\, g(y)$$

**Cambio / propuesta:** separar variables.
**Procedimiento:**

1. $\dfrac{dy}{g(y)} = f(x)\, dx$
2. Integrar: $\displaystyle\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)\, dx + C$
3. Aplicar condición inicial si existe.

**Ejemplo de forma:** $y' = -\sin x\, y^2$.

---

### 2) Lineal de 1$^{\text{er}}$ orden (factor integrante)

**Forma típica:**

$$y' + p(x)y = q(x)$$

**Cambio / propuesta:** factor integrante

$$\mu(x) = e^{\int p(x)\, dx}.$$

**Procedimiento:**

1. Multiplicar por $\mu$: $\mu y' + \mu p\, y = \mu q$
2. Reconocer: $(\mu y)' = \mu q$
3. Integrar: $\mu y = \int \mu q\, dx + C$
4. Despejar:

$$y = \frac{1}{\mu(x)} \left( \int \mu(x)\, q(x)\, dx + C \right).$$

**Ejemplo de forma:** $y' + 2y = e^{-x}$.

---

### 3) Bernoulli

**Forma típica:**

$$y' + p(x)y = q(x)y^n, \qquad n \neq 0, 1$$

**Cambio:**

$$u = y^{\,1-n} \quad \Rightarrow \quad u' = (1-n)y^{-n}y'.$$

**Procedimiento:**

1. Multiplicar por $y^{-n}$ y sustituir $u$.
2. Queda lineal:

$$u' + (1-n)p(x)\, u = (1-n)q(x).$$

3. Resolver con factor integrante y volver a $y = u^{1/(1-n)}$.

**Ejemplo de forma:** $y' + 2xy = 2xy^2$.

---

## 4) Homogénea de 1$^{\text{er}}$ orden (sustitución $y = vx$)

**Forma típica:**

$$y' = F\left(\frac{y}{x}\right)$$

**Cambio:**

$$y = vx \quad \Rightarrow \quad y' = v + xv'.$$

**Procedimiento:**

1. Sustituir: $v + xv' = F(v)$
2. Separar:
$$\frac{dv}{F(v) - v} = \frac{dx}{x}$$
3. Integrar y volver a $y = vx$.

**Ejemplo de forma:** $xy' = y + x\cos^2(y/x)$.

---

## 5) Exacta

**Forma típica:**

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$$

**Criterio de exactitud:**

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

**Procedimiento:**

1. Hallar $\Phi$ tal que $d\Phi = M dx + N dy$.
2. $\Phi(x,y) = \displaystyle\int M(x,y)\,dx + g(y)$.
3. Derivar respecto a $y$, igualar a $N$ y obtener $g(y)$.
4. Solución implícita: $\Phi(x,y) = C$.

**Ejemplo de forma:** $(x + \sin x + \cos x)\,dx + \cos y\,dy = 0$.

---

## 6) No exacta con factor integrante $\mu(x)$ o $\mu(y)$

**Forma:**

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0 \quad \text{(no exacta)}.$$

**Criterios:**

Si

$$\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) = f(x), \quad \Rightarrow \quad \mu(x) = e^{\int f(x)\,dx}.$$

Si

$$\frac{1}{M}\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) = g(y), \quad \Rightarrow \quad \mu(y) = e^{\int g(y)\,dy}.$$

**Procedimiento:**

1. Detectar si el criterio depende solo de $x$ o solo de $y$.
2. Multiplicar toda la ecuación por $\mu$ y convertirla en exacta.
3. Resolver con el método del potencial $\Phi$.

---

## 7) Dependencia $x \pm y$ (sustitución $u = x \pm y$)

**Forma típica:** aparece $x - y$ o $x + y$, p.ej. $y' = F(x - y)$.
**Cambio (caso $u = x - y$):**

$$u = x - y \quad \Rightarrow \quad u' = 1 - y'.$$

**Procedimiento:**

1. Sustituir $y' = 1 - u'$ en la EDO.
2. Resolver la EDO resultante (normalmente separable/lineal) para $u(x)$.
3. Volver a $y = x - u$ (o $y = u - x$ según el caso).

**Ejemplo de forma:** $y' = \sin(x - y)$.

---

## 8) Sustitución $u = \ln y$

**Forma típica:**

$$y' = \frac{y \ln y}{x} \quad \text{o} \quad y \ln y \, dx + x \, dy = 0.$$

**Cambio:**

$$u = \ln y \quad \Rightarrow \quad y' = yu'.$$

**Procedimiento:**

1. Sustituir $y' = yu'$.
2. Resolver la EDO en $u(x)$ (separable/lineal).
3. Volver: $y = e^u$.

---

## 9) Riccati

**Forma típica:**

$$y' = a(x)y^2 + b(x)y + c(x).$$

**Cambio (si se conoce una particular $y_1$):**

$$y = y_1 + \frac{1}{v}.$$

**Procedimiento:**

1. Sustituir $y = y_1 + \frac{1}{v}$ y simplificar.
2. Queda lineal en $v$:
$$v' + (2ay_1 + b)v + a = 0.$$
3. Resolver con factor integrante y volver a $y$.

---

## 10) Clairaut y Lagrange

**Idea común:** definir $p = y'$.

### 10A) Clairaut

**Forma:**

$$y = xp + f(p), \qquad p = y'.$$

**Procedimiento:**

1. Derivar:

$$p = p + xp' + f'(p)p' \Rightarrow (x + f'(p))p' = 0.$$

2. Familia: $p = C \Rightarrow y = Cx + f(C)$.
3. Singular: $x = -f'(p)$ y $y = xp + f(p)$.

**Ejemplo de forma:** $y = xy' + (y')^2$.

**10B) Lagrange**

**Forma:**

$$y = x\phi(p) + \psi(p), \qquad p = y'.$$

**Procedimiento (resumen):**

1. Derivar y obtener una EDO lineal para $x(p)$.
2. Resolver $x(p)$.
3. Recuperar $y = x\phi(p) + \psi(p)$.

---

# 2 EDO DE ORDEN 2 (Y SUPERIOR)

## 11) Lineal homogénea con coeficientes constantes

**Forma:**

$$y'' + ay' + by = 0.$$

**Propuesta:** $y = e^{rx}$.

**Procedimiento:**

1. Característica: $r^2 + ar + b = 0$.
2. Según raíces:
   - $r_1 \neq r_2 : \; y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$.
   - doble $r : \; y = (C_1 + C_2 x)e^{rx}$.
   - $\alpha \pm i\beta : \; y = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$.

---

## 12) Lineal no homogénea con coeficientes constantes

**Forma:**

$$y'' + ay' + by = g(x).$$

**Métodos:** coeficientes indeterminados o variación de parámetros.

**Procedimiento (indeterminados):**

1. Hallar $y_h$.
2. Proponer $y_p$ según la forma de $g(x)$.
3. Si hay resonancia, multiplicar por $x$ lo necesario.
4. Solución: $y = y_h + y_p$.

---

## 13) Cauchy–Euler (equidimensional)

**Forma:**

$$x^2 y'' + axy' + by = 0.$$

**Propuesta:** $y = x^m$ (con $x \neq 0$).

**Procedimiento:**

1. Sustituir $y = x^m$ y obtener ecuación indicial en $m$.
2. Resolver como una característica (raíces distintas/doble/complejas).
3. Alternativa: $x = e^t$ reduce a coeficientes constantes.

---

# 3 MÉTODOS DE SERIES

## 14) Series de potencias (punto ordinario)

**Forma:**

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0 \quad \text{con } P, Q \text{ analíticas en } x_0.$$

**Propuesta:**

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n.$$

**Procedimiento:**

1. Calcular $y', y''$ en serie.
2. Sustituir, agrupar potencias y obtener recurrencia.
3. $a_0, a_1$ libres $\Rightarrow$ dos soluciones LI.

---

## 15) Frobenius (punto singular regular)

**Forma:**

$$x^2 y'' + xp(x)y' + q(x)y = 0 \quad \text{con } p, q \text{ analíticas en } 0.$$

**Propuesta:**

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}.$$

**Procedimiento:**

1. Sustituir y obtener ecuación indicial (para $r$).
2. Hallar $r_1, r_2$ y la recurrencia para $a_n$.
3. Si $r_1 - r_2 \in \mathbb{Z}$ o coinciden $\Rightarrow$ puede aparecer $\ln x$.

---

## 16) Ecuaciones especiales por series

**Airy:**

$$y'' \pm xy = 0.$$

**Chebyshev:**

$$(1 - x^2)y'' - xy' + p^2 y = 0.$$

**Truco tipo Hermite (dado):** Si

$$y'' + \left(p + \frac{1}{2} - \frac{x^2}{4}\right) y = 0, \quad \text{usar} \quad y = w(x)e^{-x^2/4}.$$

---

# 4 SISTEMAS DE EDO

## 17) Sistemas lineales homogéneos con matriz constante

**Forma:**

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}.$$

**Propuesta:** $\mathbf{x}(t) = e^{At}\mathbf{x}(0)$ o combinación de $e^{\lambda t}\mathbf{v}$.
**Procedimiento:**

1. Calcular autovalores $\lambda$ y autovectores $\mathbf{v}$.
2. Si diagonalizable: $A = PDP^{-1} \Rightarrow e^{At} = Pe^{Dt}P^{-1}$.
3. $\mathbf{x}(t) = \sum_k C_k e^{\lambda_k t}\mathbf{v}_k$.

---

## 18) Sistemas lineales no homogéneos

**Forma:**

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + \mathbf{b}(t).$$

**Variación de constantes:**

$$\mathbf{x}(t) = e^{At}\left(\mathbf{c} + \int e^{-At}\mathbf{b}(t)\,dt\right).$$

---

## 19) Sistemas no lineales: puntos críticos y linealización

**Forma:** $\dot{x} = f(x,y)$, $\dot{y} = g(x,y)$.
**Procedimiento:**

1. Puntos críticos: $f = 0$, $g = 0$.
2. Jacobiano:
$$J = \begin{pmatrix} \partial f/\partial x & \partial f/\partial y \\ \partial g/\partial x & \partial g/\partial y \end{pmatrix}.$$
3. Linealizar: $\dot{\mathbf{u}} = J(\mathbf{u}_0)\mathbf{u}$.
4. Clasificar por autovalores (nodo, silla, foco, centro).

---

## 20) Estabilidad 2D lineal (traza/determinante)

Para $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$:

**Asintóticamente estable** si

$$\mathrm{tr}(A) = a + d < 0, \qquad \det(A) = ad - bc > 0.$$