# Introducción al análisis topológico de datos

Luis Alberto

2025

# Índice general

# Capítulo 1

# Complejos simpliciales

Para cualquier conjunto $V$, su conjunto potencia es denotado por $\mathcal{P}(V)$. La carnalidad de $V$ es $\#V$

**Definición 1.** Un *complejo simplicial* sobre un conjunto $V$ es un conjunto finito $K \subseteq \mathcal{P}(V) \setminus \{\emptyset\}$ cerrado bajo subconjuntos.

Formalmente, la definición de arriba corresponde a la de los *complejos simpliciales abstractos y finitos* [1, Definition 2.1]; dado que no estudiaremos otro tipo de complejos simpliciales omitimos los otros adjetivos.

**Observación 1.** En la Definición 1 tenemos dos complejos simpliciales que son importantes. El primero es el complejo simplicial *vano* (*void* en inglés), es decir $\emptyset \subseteq \mathcal{P}(V)$. El segundo es el complejo simplicial *vacío* (*empty* en inglés): $\{\emptyset\}$ [1, Remark 2.3].

## 1.1. Notación y nomenclatura estándar.

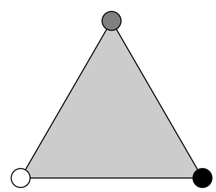
Sea $K$ un complejo simplicial. Cada elemento de $K$ se llama *simplejo*[1] (*simplex* y plural *simplices* en inglés). La *dimensión* de $\sigma$ es $\dim(\sigma) = \#\sigma - 1$. Si $\dim(\sigma) = k$ decimos que $\sigma$ es un $k$-*simplejo*. Un *vértice* de un complejo simplicial es un 0-simplejo; El conjunto de $n$-simplejos de $K$ será denotado por $K_n$.

[1] También es común en español, quizás lo es más, utilizar el término *cara*. No lo adopto porque viene del uso geométrico de esa palabra: *las caras del poliedro*. Aunque es verdad que los complejos simpliciales pueden considerarse objetos geométricos, su combinatoria es más natural. Veanse [1], [2]

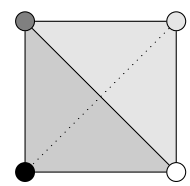
La dimensión de $K$ es $\dim(K) = \text{máx}\{\dim(\sigma) \mid \sigma \in K\}$. Una *faceta* (o *careta* si se usa cara) de un complejo simplicial es un simplejo máximal con respecto a la contención; es decir, $\sigma$ es faceta si $\sigma \subseteq \tau$, entonces $\tau = \sigma$. Diremos que un complejo simplicial es *puro* wsiempre que todas sus facetas tengan la misma dimensión.

Los complejos simpliciales son objectos combinatorios. Usualmente se representan gráficamente como sigue. Un punto representa un vértice, las aristas, 1-simplejos; los triángulos representan 2-simplejos, etc. In Figure 1.1 we found examples of simplices and in Figure 1.2 we present examples of simplicial complexes. We remark that the hollow triangle in Figure 1.2b is not a simplex. Also, it is worth to notice that from the picture only it is not clear whether the tetrahedron in Figure 1.1c is hollow or not. For these reason we only draw simplicial complexes for illustrative purposes.

(a) Un 1-simplejo.

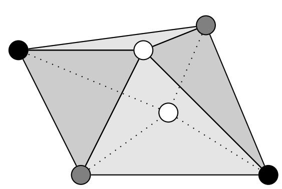


(b) Un 2-simplejo.

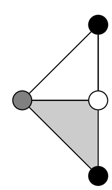


(c) Un 3-simplejo.

Figura 1.1: Representación gráfica de alguno simplejos. el tetraedro en (c) es un sólido 3-dimensional.



(a) A pure simplicial complex.



(b) A non-pure simplicial complex.

Figura 1.2: Examples of simplicial complexes. All triangles in (a) are filled but the simplicial complex itself is not a 3-dimensional solid.

# Bibliografía

[1] Kozlov, D. N. *Combinatorial Algebraic Topology*, vol. 21 of *Algorithms and computation in mathematics*. Springer, Berlin, Heidelberg, 2008.

[2] May, J. *Simplicial Objects in Algebraic Topology.* Chicago Lectures in Mathematics. University of Chicago Press, 1967.