

Introducción al análisis topológico de datos

Luis Alberto

2025

Índice general

| | |
|---|----------|
| 1. Complejos simpliciales | 1 |
| 1.1. Notación y nomenclatura estándar | 1 |
| 1.2. Realización geométrica | 3 |
| 1.3. Funciones simpliciales | 5 |
| 1.4. Subdivisiones | 5 |
| 1.5. Teorema de aproximación simplicial | 7 |

Capítulo 1

Complejos simpliciales

En este capítulo seguimos [1] y [2] como introducción a los complejos simpliciales. Para cualquier conjunto V , su conjunto potencia es denotado por $\mathcal{P}(V)$. La cardinalidad de V es $\#V$.

Definición 1. Un *complejo simplicial* sobre un conjunto V es un conjunto finito $K \subseteq \mathcal{P}(V) \setminus \{\emptyset\}$ cerrado bajo subconjuntos.

Formalmente, la definición de arriba corresponde a la de los *complejos simpliciales abstractos y finitos* [2, Definition 2.1]; dado que no estudiaremos otro tipo de complejos simpliciales omitimos los otros adjetivos.

Observación 1. En la Definición 1 tenemos dos complejos simpliciales que son importantes. El primero es el complejo simplicial *vano* (*void* en inglés), es decir $\emptyset \subseteq \mathcal{P}(V)$. El segundo es el complejo simplicial *vacío* (*empty* en inglés): $\{\emptyset\}$ [2, Remark 2.3].

1.1. Notación y nomenclatura estándar

Sea K un complejo simplicial. Cada elemento de K se llama *simplejo*¹ (*simplex* y plural *simplices* en inglés). La *dimensión* de σ es $\dim(\sigma) = \#\sigma - 1$. Si $\dim(\sigma) = k$ decimos que σ es un *k-simplejo*. Un *vértice* de un complejo simplicial es un 0-simplejo; El conjunto de n -simplejos de K será denotado por K_n .

¹También es común en español, quizás lo es más, utilizar el término *cara*. No lo adopto porque viene del uso geométrico de esa palabra: *las caras del poliedro*. Aunque es verdad que los complejos simpliciales pueden considerarse objetos geométricos, su combinatoria es más natural. Véanse [2], [3]

La dimensión de K es $\dim(K) = \max\{\dim(\sigma) \mid \sigma \in K\}$. Una *faceta* (o *careta* si se usa cara) de un complejo simplicial es un simplejo maximal con respecto a la contención; es decir, σ es faceta si $\sigma \subseteq \tau$, entonces $\tau = \sigma$. Diremos que un complejo simplicial es *puro* siempre que todas sus facetas tengan la misma dimensión.

Los complejos simpliciales son objetos combinatorios. Usualmente se representan gráficamente como sigue. Un punto representa un vértice, las aristas, 1-simplejos; los triángulos representan 2-simplejos, etc. En la Figura 1.1 encontramos ejemplos de simplejos y en la Figura 1.2, de complejos simpliciales. Nótese que el triángulo hueco en la Figura 1.2b no es un simplejo. También, es importante notar que del dibujo solo es imposible determinar si el tetraedro de la Figura 1.1c es un 3-simplejo o es la unión de 4 2-simplejos. Es por esto último que sólo representamos con fines ilustrativos.

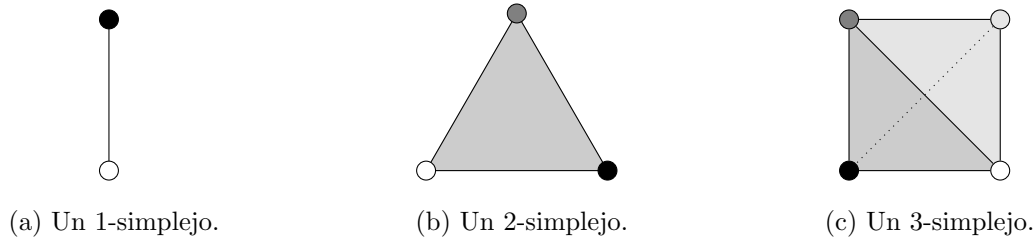


Figura 1.1: Representación gráfica de algunos simplejos. el tetraedro en (c) es un sólido 3-dimensional.

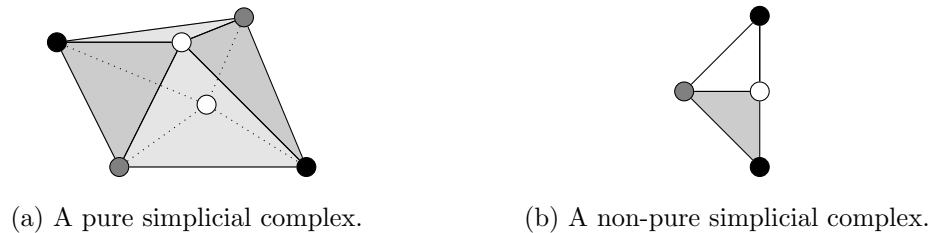


Figura 1.2: Examples of simplicial complexes. All triangles in (a) are filled but the simplicial complex itself is not a 3-dimensional solid.

Sea σ un simplejo. Vamos a sobrecargar la notación y usaremos σ para denotar al complejo simplicial $\mathcal{P}(\sigma)$ como a la única faceta de tal complejo simplicial. En este sentido, todo simplejo es un complejo simplicial.

Ejercicio 1. ¿Cuántos k -simplejos tiene un n -simplejo?

El *complejo simplicial generado* por $F \subseteq \mathcal{P}(V)$ es el complejo simplicial mínimo con respecto a contener todos los simplejos $\sigma \in F$. Tal complejo simplicial es denotado por

$$\bigcup F = \bigcup_{\sigma \in F} \sigma.$$

Ejercicio 2. Muestra que todo complejo simplicial es generado por sus facetas.

Un *subcomplejo* de un complejo simplicial K es un subconjunto de K que es un complejo simplicial. El *n-esqueleto* de K es el subcomplejo de K generado por todos los k -simplejos en K con $k \leq n$ y es denotado por $\text{skel}_n(K)$.

Ejercicio 3. Muestra que $\text{skel}_n(K)$ es puro de dimensión n .

Ejercicio 4. Muestra que $\text{skel}_n(K) = K_n$ si y sólo si $n = -1$ o K es vano. ¿Qué pasaría con esta equivalencia si en la Definición 1 eliminamos los complejos simpliciales vacío y vano?

Un *simplejo frontera* de un k -simplejo σ , es un $k - 1$ -simplejo $\tau \in \sigma$. La *frontera* de σ es $\partial\sigma = \bigcup \{\tau \mid \tau \text{ es un simplejo frontera de } \sigma\}$.

Ejercicio 5. $\partial\sigma$ es un complejo simplicial.

1.2. Realización geométrica

Intuitivamente, el complejo simplicial de la Figura 1.2a es una 2-esfera. Esta sección formaliza tal intuición. Usamos \mathbb{R}^V para denotar el \mathbb{R} espacio vectorial con base V , en particular, \mathbb{R}^n es el espacio euclidiano de n dimensiones. Siempre consideramos \mathbb{R}^V como espacio topológico con la topología inducida por la métrica euclidiana.

Definición 2. Un *conjunto afinmente independiente* en \mathbb{R}^n es un conjunto $A = \{v_0, \dots, v_k\}$ tal que para cada $t_i, s_i \geq 0$ con

$$\sum_{i=0}^k s_i = \sum_{i=0}^k t_i = 1,$$

si

$$\sum_{i=0}^k s_i v_i = \sum_{i=0}^k t_i v_i,$$

entonces $s_i = t_i$ para cada i . Un vector $x \in \mathbb{R}^n$ es una *combinación afín* de A si $x = \sum_{i=0}^k s_i v_i$ con $\sum_{i=0}^k s_i = 1$ y $s_i \geq 0$ para cada i . La *cápsula convexa* (*convex hull* en inglés) de A es el conjunto de todas las combinaciones afines de A .

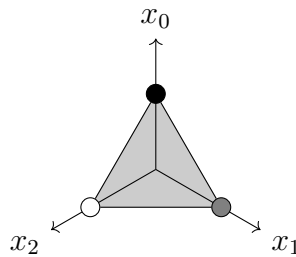


Figura 1.3: El V -simplejo estándar para $V = \{x_0, x_1, x_2\}$.

Ejercicio 6. Demuestra que todo conjunto linealmente independiente de \mathbb{R}^n es afín independiente.

Tomamos las definiciones 3 y 4 de [2, Section 2.2.1].

Definición 3. Sea V un conjunto finito. El V -simplejo estándar es la cápsula convexa de la base orthonormal estándar de \mathbb{R}^V .

En la Figura 1.3, tenemos el V -simplejo estándar para $V = \{x_0, x_1, x_2\}$.

Definición 4. Sea K un complejo simplicial. Consideremos la unión de todos los σ -simplejos estándar en \mathbb{R}^{K_0} con $\sigma \in K$. Este conjunto con la topología de subespacio de \mathbb{R}^{K_0} es la *realización geométrica estándar* de K . Cualquier espacio homeomorfo a la realización geométrica estándar de K como $|K|$ y la llamaremos la *realización geométrica* de K .

Observación 2. La realización geométrica es definida mediante los V -simplejos estándar. Como ellos tienen la topología de subespacio de \mathbb{R}^V siempre supondremos que $|K|$ tiene una métrica que le induce la topología adecuada. También, cualquier afirmación topológica hecha sobre un complejo simplicial estará hecha sobre su realización geométrica..

Ejercicio 7. Sea K un complejo simplicial. En este ejercicio veremos cómo podemos estudiar complejos simpliciales infinitos y sus realizaciones geométricas. La equivalencia de la última parte sirve como definición de la topología de la realización geométrica de complejos simpliciales infinitos [4, p. 8].

1. Prueba que si $\sigma \in K$, entonces $|\sigma| \subseteq |K|$.
2. Muestra que la realización geométrica de cualquier simplejo es un espacio compacto.
3. Demuestra que si $\sigma \in K$, entonces $|\sigma|$ es un conjunto cerrado de $|K|$.
4. Demuestra que $C \subseteq |K|$ es cerrado si y solo si $C \cap |\sigma|$ es cerrado para cada $\sigma \in \Delta$.

1.3. Funciones simpliciales

Si $f: X \rightarrow Y$ es una función, usamos $f(A)$ para denotar la imagen de $A \subseteq X$ bajo f .

Definición 5. Dados dos complejos simpliciales K and L , una *función simplicial*² de K a L es una función $f: K_0 \rightarrow L_0$ tal que si $\sigma \in K$ entonces $f(\sigma) \in L$.

Observación 3. Toda función simplicial $f: K_0 \rightarrow L_0$ induce una función $f: K \rightarrow L$. Así, cuando decimos que $f: K \rightarrow L$ es una función simplicial, lo que queremos decir es que es inducida por un mapa simplicial.

Ejercicio 8. Demuestre que la clase de complejos simpliciales \mathcal{CS} junto con las funciones simpliciales es una categoría; es decir, demuestre que la composición de funciones simpliciales es simplicial y que para cada $K \in \mathcal{CS}$ existe una función simplicial $1_K: K \rightarrow K$ tal que $1_K \circ f = f$ y $g \circ 1_K = g$ para cualesquiera funciones simpliciales $f: L \rightarrow K$ y $g: K \rightarrow L$.

Ejercicio 9. ¿Quiénes son 1_\emptyset y $1_{\{\emptyset\}}$? ¿Tu prueba del ejercicio anterior consideró esto?

Ejercicio 10. Muestra que no toda función entre los vértices de dos complejos simpliciales induce una función simplicial.

Ejercicio 11. Muestra que toda función simplicial $f: K \rightarrow L$ induce una función continua $|f|: |K| \rightarrow |L|$ dada por

$$|f|(\sum_{i=0}^k s_i v_i) = \sum_{i=0}^k s_i f(v_i).$$

1.4. Subdivisiones

Definición 6. Una *subdivisión* de un complejo simplicial K es un complejo simplicial K' tal que existen subdivisiones $|K|$ y $|K'|$ tales que:

1. La realización geométrica de cada simplejo en K' está contenida en la realización geométrica de algún simplejo de K .
2. Para cada $\sigma \in K$, hay un subcomplejo σ' de K' tal que $|\sigma| = |\sigma'|$.

²Es usual en la literatura en inglés encontrar esto como *simplicial map*. Yo mismo les llamo así a veces.

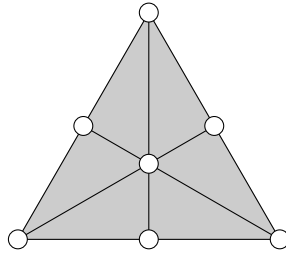


Figura 1.4: La primera subdivisión baricéntrica de un 2-simplejo.

Los siguientes ejercicios están diseñados para una mejor y pronta comprensión de la definición de arriba.

Ejercicio 12. Si K' es una subdivisión de K , entonces $|K| \cong |K'|$.

Ejercicio 13. Muestra que si K' es una subdivisión de K entonces todo vértice de K

Ejercicio 14. Representa gráficamente los siguientes complejos simpliciales

1. $K = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$.
2. $K' = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, c\}, \{c, b\}\}$

Muestra que K' es una subdivisión de K .

Ejercicio 15. Muestra que la imagen en la Figura 1.4 es una subdivisión de un 2-simplejo.

Intuitivamente, una subdivisión de K se obtiene agregando simplejos internos a (algunos de) los simplejos de K . Sin embargo, esto debe hacerse con cuidado. En la Figura ?? vemos que este procedimiento fue realizado sin **preservar la estructura combinatoria** del complejo simplicial original. Esto quiere decir que aunque el espacio topológico asociado al objeto en esa figura (es decir el triángulo) es la realización geométrica del 2-simplejo, como objeto combinatorio no es un complejo simplicial.

Ejercicio 16. Demuestra que si L es una subdivisión de K y K lo es de L , entonces K

Intuitively this means that a subdivision is obtained from a simplicial complex adding to each simplex new vertices and simplices internally preserving their combinatorial structure. The most common subdivisions are stellar and barycentric subdivisions. We only recall the latter.

Definición 7. The *first barycentric subdivision* of a simplicial complex Δ is the order complex of the face poset of Δ and it is denoted by $\text{Bar}(\Delta)$. The N -th *barycentric subdivision* of Δ is the first barycentric subdivision of $\text{Bar}^{N-1}(\Delta)$.

In other words simplices of $\text{Bar}(\Delta)$ are chains of simplices of Δ . In Figure 1.4 we find the usual picture of a barycentric subdivision. The central vertex, the barycenter of the triangle, corresponds to the unique facet of the 2-simplex. In general, the barycenter of a simplex corresponds to the unique facet of the simplex.

Recall that the simplicial complex Δ is a *triangulation* of the topological space X whenever $X \cong |\Delta|$.

1.5. Teorema de aproximación simplicial

El teorema de aproximación simplicial nos asegura que dada cualquier función continua f entre las realizaciones geométricas de dos complejos simpliciales, podemos encontrar una función simplicial de una subdivisión del dominio de f al codominio de f que se “parece” a f . Recall that the diameter $\text{diam}(X)$ of a set $X \subseteq \mathbb{R}^k$ is $\sup\{d(x, y) \mid x, y \in X\}$.

Definición 8. A subdivision operator Div is *mesh shrinking* if for any $\epsilon > 0$ and each simplicial complex Δ there is $N \in \mathbb{N}$ such that

$$\sup\{\text{diam}(\sigma) \mid \sigma \in \text{Div}^N(\Delta)\} < \epsilon.$$

The proof of the Simplicial approximation theorem needs the Lebesgue number of an open cover of a compact space.

Definición 9. Let K be a compact subspace of \mathbb{R}^k and \mathcal{U} be an open cover of K . We say $\lambda > 0$ is a *Lebesgue number* of \mathcal{U} if for any $x \in K$ and $\epsilon < \lambda$ the open ball $B_\epsilon(x)$ lies in some element of \mathcal{U} .

Observación 4. Recall that the open star of a vertex v in a simplicial complex Δ is $\text{St}(v) = \bigcup_{v \in \sigma} |\sigma|^\circ$. It is well known that $\bigcap_{v \in \sigma} \text{St}(v) \neq \emptyset$ if and only if $\sigma \in \Delta$.

Recall all our simplicial complexes are finite, a more general form of the following can be found in [4, Theorem 16.5]

Teorema 1 (Simplicial approximation theorem). Let $f: |\Delta| \rightarrow |\Gamma|$ be a continuous map between simplicial complexes. If Div is mesh shrinking, there are $N \in \mathbb{N}$ and a simplicial map $\bar{f}: \text{Div}^N(\Delta) \rightarrow \Gamma$ such that $f(\text{St}(v)) \subseteq \text{St}(\bar{f}(v))$ for each $v \in S_0(\text{Div}^N(\Delta))$.

Demostración. Assume both $|\Delta|$ and $|\Gamma|$ have a metric giving them the adequate topology. The open stars $\text{St}(w)$ with $w \in S_0(\Gamma)$ form an open cover of $|\Gamma|$. Let λ be the Lebesgue number of that cover. Because f is continuous and $|\Delta|$ is compact there is $\delta > 0$ such that $f(B_\delta(x)) \subseteq B_\lambda(f(x)) \subseteq \text{St}(w)$ for some $w \in S_0(\Gamma)$. Choose N such that $\sup\{\text{diam}(\sigma) \mid \sigma \in \text{Div}^N(\Delta)\} < \frac{\delta}{2}$. Define $\bar{f}: \text{Div}^N(\Delta) \rightarrow \Gamma$ as $\bar{f}(v) = w$ for some w such that $f(\text{St}(v)) \subseteq \text{St}(w)$. This is a well defined simplicial map from Remark 4. \square

Finally we offer a well known property of barycentric subdivisions [4, Theorem 15.4]

Proposición 1. The barycentric subdivision is mesh-shrinking

Demostración. Let σ be a k -simplex. By definition $S_0(\text{Bar}(\sigma)) = \{\tau \mid \tau \in \sigma\}$. We identify τ with $\sum_{v \in \tau} \frac{v}{\#\tau} \in |\sigma|$, in other words τ is the barycenter of $|\tau|$.

For each $v \in \sigma$,

$$d(\sigma, v) = d\left(\sum_{w \in \sigma} \frac{1}{k+1} w, \sum_{w \in \sigma'} \frac{1}{k+1} v\right) \quad (1.1)$$

$$\leq \sum_{w \in \sigma} d\left(\frac{1}{k+1} w, \frac{1}{k+1} v\right) \quad (1.2)$$

$$= \frac{1}{k+1} \sum_{w \in \sigma} d(w, v) \quad (1.3)$$

$$\leq \frac{k}{k+1} \sup\{d(w, v) \mid w \in \sigma\} \quad (1.4)$$

$$= \frac{k}{k+1} \text{diam}(\sigma). \quad (1.5)$$

Since $\text{diam}(\sigma)$ is reached by some pair $v, w \in \sigma$, from the above calculation we conclude that $\sup\{\text{diam}(\tau) \mid \tau \in \text{Bar}(\sigma)\} \leq \frac{k}{k+1} \text{diam}(\sigma)$. Since $\frac{k}{k+1} < 1$ the result follows. \square

Bibliografía

- [1] ALBERTO, L. Pseudospheres: combinatorics, topology and distributed systems. *Journal of Applied and Computational Topology* 8 (2024), 1023–1052.
- [2] KOZLOV, D. N. *Combinatorial Algebraic Topology*, vol. 21 of *Algorithms and computation in mathematics*. Springer, Berlin, Heidelberg, 2008.
- [3] MAY, J. *Simplicial Objects in Algebraic Topology*. Chicago Lectures in Mathematics. University of Chicago Press, 1967.
- [4] MUNKRES, J. R. *Elements of algebraic topology*. Addison-wesley, 1984.