

Introducción al análisis topológico de datos

Luis Alberto

2025

Índice general

1. Complejos simpliciales	1
1.1. Notación y nomenclatura estándar	1
1.2. Realización geométrica	3
1.3. Funciones simpliciales	5
1.4. Subdivisiones	5
1.5. Teorema de aproximación simplicial	8
2. Teorema del nervio	10

Capítulo 1

Complejos simpliciales

En este capítulo seguimos [1] y [2] como introducción a los complejos simpliciales. Para cualquier conjunto V , su conjunto potencia es denotado por $\mathcal{P}(V)$. La cardinalidad de V es $\#V$.

Definición 1. Un *complejo simplicial* sobre un conjunto V es un conjunto finito $K \subseteq \mathcal{P}(V)$ cerrado bajo subconjuntos.

Formalmente, la definición de arriba corresponde a la de los *complejos simpliciales abstractos y finitos* [2, Definition 2.1]; dado que no estudiaremos otro tipo de complejos simpliciales omitimos los otros adjetivos.

Observación 1. En la Definición 1 tenemos dos complejos simpliciales que son importantes. El primero es el complejo simplicial *vano* (*void* en inglés), es decir $\emptyset \subseteq \mathcal{P}(V)$. El segundo es el complejo simplicial *vacío* (*empty* en inglés): $\{\emptyset\}$ [2, Remark 2.3].

1.1. Notación y nomenclatura estándar

Sea K un complejo simplicial. Cada elemento de K se llama *simplejo*¹ (*simplex* y plural *simplices* en inglés). La *dimensión* de σ es $\dim(\sigma) = \#\sigma - 1$. Si $\dim(\sigma) = k$ decimos que σ es un *k-simplejo*. Un *vértice* de un complejo simplicial es un 0-simplejo; El conjunto de *n*-simplejos de K será denotado por K_n .

¹También es común en español, quizás lo es más, utilizar el término *cara*. No lo adopto porque viene del uso geométrico de esa palabra: *las caras del poliedro*. Aunque es verdad que los complejos simpliciales pueden considerarse objetos geométricos, su combinatoria es más natural. Véanse [2], [3]

La dimensión de K es $\dim(K) = \max\{\dim(\sigma) \mid \sigma \in K\}$. Una *faceta* (o *careta* si se usa cara) de un complejo simplicial es un simplejo maximal con respecto a la contención; es decir, σ es faceta si $\sigma \subseteq \tau$, entonces $\tau = \sigma$. Diremos que un complejo simplicial es *puro* siempre que todas sus facetas tengan la misma dimensión.

Los complejos simpliciales son objetos combinatorios. Usualmente se representan gráficamente como sigue. Un punto representa un vértice, las aristas, 1-simplejos; los triángulos representan 2-simplejos, etc. En la Figura 1.1 encontramos ejemplos de simplejos y en la Figura 1.2, de complejos simpliciales. Nótese que el triángulo hueco en la Figura 1.2b no es un simplejo. También, es importante notar que del dibujo solo es imposible determinar si el tetraedro de la Figura 1.1c es un 3-simplejo o es la unión de 4 2-simplejos. Es por esto último que sólo representamos con fines ilustrativos.

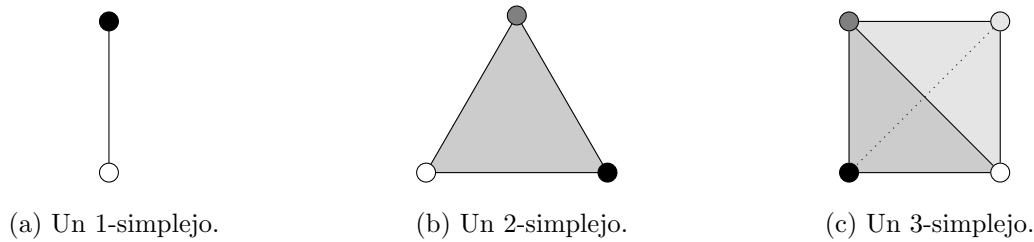


Figura 1.1: Representación gráfica de algunos simplejos. el tetraedro en (c) es un sólido 3-dimensional.

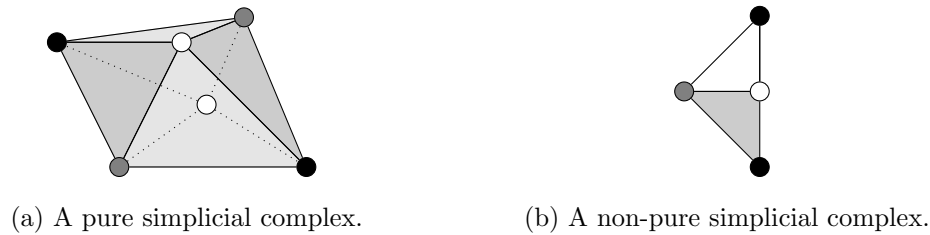


Figura 1.2: Examples of simplicial complexes. All triangles in (a) are filled but the simplicial complex itself is not a 3-dimensional solid.

Sea σ un simplejo. Vamos a sobrecargar la notación y usaremos σ para denotar al complejo simplicial $\mathcal{P}(\sigma)$ como a la única faceta de tal complejo simplicial. En este sentido, todo simplejo es un complejo simplicial.

Ejercicio 1. ¿Cuántos k -simplejos tiene un n -simplejo?

El *complejo simplicial generado* por $F \subseteq \mathcal{P}(V)$ es el complejo simplicial mínimo con respecto a contener todos los simplejos $\sigma \in F$. Tal complejo simplicial es denotado por

$$\bigcup F = \bigcup_{\sigma \in F} \sigma.$$

Ejercicio 2. Muestra que todo complejo simplicial es generado por sus facetas.

Un *subcomplejo* de un complejo simplicial K es un subconjunto de K que es un complejo simplicial. El *n-esqueleto* de K es el subcomplejo de K generado por todos los k -simplejos en K con $k \leq n$ y es denotado por $\text{skel}_n(K)$.

Ejercicio 3. Muestra que $\text{skel}_n(K)$ es puro de dimensión n .

Ejercicio 4. Muestra que $\text{skel}_n(K) = K_n$ si y sólo si $n = -1$ o K es vano. ¿Qué pasaría con esta equivalencia si en la Definición 1 eliminamos los complejos simpliciales vacío y vano?

Un *simplejo frontera* de un k -simplejo σ , es un $k - 1$ -simplejo $\tau \in \sigma$. La *frontera* de σ es $\partial\sigma = \bigcup \{\tau \mid \tau \text{ es un simplejo frontera de } \sigma\}$.

Ejercicio 5. $\partial\sigma$ es un complejo simplicial.

1.2. Realización geométrica

Intuitivamente, el complejo simplicial de la Figura 1.2a es una 2-esfera. Esta sección formaliza tal intuición. Usamos \mathbb{R}^V para denotar el \mathbb{R} espacio vectorial con base V , en particular, \mathbb{R}^n es el espacio euclidiano de n dimensiones. Siempre consideramos \mathbb{R}^V como espacio topológico con la topología inducida por la métrica euclidiana.

Definición 2. Un *conjunto afinmente independiente* en \mathbb{R}^n es un conjunto $A = \{v_0, \dots, v_k\}$ tal que para cada $t_i, s_i \geq 0$ con

$$\sum_{i=0}^k s_i = \sum_{i=0}^k t_i = 1,$$

si

$$\sum_{i=0}^k s_i v_i = \sum_{i=0}^k t_i v_i,$$

entonces $s_i = t_i$ para cada i . Un vector $x \in \mathbb{R}^n$ es una *combinación afín* de A si $x = \sum_{i=0}^k s_i v_i$ con $\sum_{i=0}^k s_i = 1$ y $s_i \geq 0$ para cada i . La *cápsula convexa* (*convex hull* en inglés) de A es el conjunto de todas las combinaciones afines de A .

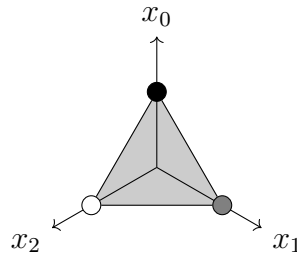


Figura 1.3: El V -simplejo estándar para $V = \{x_0, x_1, x_2\}$.

Ejercicio 6. Demuestra que todo conjunto linealmente independiente de \mathbb{R}^n es afín independiente.

Tomamos las definiciones 3 y 4 de [2, Section 2.2.1].

Definición 3. Sea V un conjunto finito. El V -simplejo estándar es la cápsula convexa de la base orthonormal estándar de \mathbb{R}^V .

En la Figura 1.3, tenemos el V -simplejo estándar para $V = \{x_0, x_1, x_2\}$.

Definición 4. Sea K un complejo simplicial. Consideremos la unión de todos los σ -simplejos estándar en \mathbb{R}^{K_0} con $\sigma \in K$. Este conjunto con la topología de subespacio de \mathbb{R}^{K_0} es la *realización geométrica estándar* de K . Cualquier espacio homeomorfo a la realización geométrica estándar de K como $|K|$ y la llamaremos la *realización geométrica* de K .

Observación 2. La realización geométrica es definida mediante los V -simplejos estándar. Como ellos tienen la topología de subespacio de \mathbb{R}^V siempre supondremos que $|K|$ tiene una métrica que le induce la topología adecuada. También, cualquier afirmación topológica hecha sobre un complejo simplicial estará hecha sobre su realización geométrica..

Ejercicio 7. Sea K un complejo simplicial. En este ejercicio veremos cómo podemos estudiar complejos simpliciales infinitos y sus realizaciones geométricas. La equivalencia de la última parte sirve como definición de la topología de la realización geométrica de complejos simpliciales infinitos [4, p. 8].

1. Prueba que si $\sigma \in K$, entonces $|\sigma| \subseteq |K|$.
2. Muestra que la realización geométrica de cualquier simplejo es un espacio compacto.
3. Demuestra que si $\sigma \in K$, entonces $|\sigma|$ es un conjunto cerrado de $|K|$.
4. Demuestra que $C \subseteq |K|$ es cerrado si y solo si $C \cap |\sigma|$ es cerrado para cada $\sigma \in K$.

1.3. Funciones simpliciales

Si $f: X \rightarrow Y$ es una función, usamos $f(A)$ para denotar la imagen de $A \subseteq X$ bajo f .

Definición 5. Dados dos complejos simpliciales K and L , una *función simplicial*² de K a L es una función $f: K_0 \rightarrow L_0$ tal que si $\sigma \in K$ entonces $f(\sigma) \in L$.

Observación 3. Toda función simplicial $f: K_0 \rightarrow L_0$ induce una función $f: K \rightarrow L$. Así, cuando decimos que $f: K \rightarrow L$ es una función simplicial, lo que queremos decir es que es inducida por un mapa simplicial.

Ejercicio 8. Demuestre que la clase de complejos simpliciales \mathcal{CS} junto con las funciones simpliciales es una categoría; es decir, demuestre que la composición de funciones simpliciales es simplicial y que para cada $K \in \mathcal{CS}$ existe una función simplicial $1_K: K \rightarrow K$ tal que $1_K \circ f = f$ y $g \circ 1_K = g$ para cualesquiera funciones simpliciales $f: L \rightarrow K$ y $g: K \rightarrow L$.

Ejercicio 9. ¿Quiénes son 1_\emptyset y $1_{\{\emptyset\}}$? ¿Tu prueba del ejercicio anterior consideró esto?

Ejercicio 10. Muestra que no toda función entre los vértices de dos complejos simpliciales induce una función simplicial.

Ejercicio 11. Muestra que toda función simplicial $f: K \rightarrow L$ induce una función continua $|f|: |K| \rightarrow |L|$ dada por

$$|f|(\sum_{i=0}^k s_i v_i) = \sum_{i=0}^k s_i f(v_i).$$

1.4. Subdivisiones

Definición 6. Una *subdivisión* de un complejo simplicial K es un complejo simplicial K' tal que existen subdivisiones $|K|$ y $|K'|$ tales que:

1. La realización geométrica de cada simplejo en K' está contenida en la realización geométrica de algún simplejo de K .
2. Para cada $\sigma \in K$, hay un subcomplejo σ' de K' tal que $|\sigma| = |\sigma'|$.

²Es usual en la literatura en inglés encontrar esto como *simplicial map*. Yo mismo les llamo así a veces.

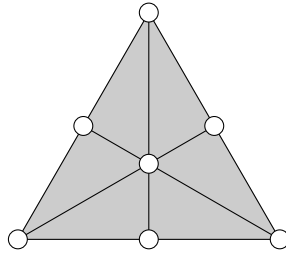


Figura 1.4: La primera subdivisión baricéntrica de un 2-simplejo.

Los siguientes ejercicios están diseñados para una mejor y pronta comprensión de la definición de arriba.

Ejercicio 12. Si K' es una subdivisión de K , entonces $|K| \cong |K'|$.

Ejercicio 13. Representa gráficamente los siguientes complejos simpliciales

1. $K = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$.
2. $K' = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, c\}, \{c, b\}\}$

Muestra que K' es una subdivisión de K .

Ejercicio 14. Muestra que la imagen en la Figura 1.4 es una subdivisión de un 2-simplejo.

Intuitivamente, una subdivisión de K se obtiene agregando simplejos internos a (algunos de) los simplejos de K . Sin embargo, esto debe hacerse con cuidado. En la Figura ?? vemos que este procedimiento fue realizado sin **preservar la estructura combinatoria** del complejo simplicial original. Esto quiere decir que aunque el espacio topológico asociado al objeto en esa figura (es decir el triángulo) es la realización geométrica del 2-simplejo, como objeto combinatorio no es un complejo simplicial.

Ejercicio 15. Demuestra que si L es una subdivisión de K y K lo es de L , entonces existe un isomorfismo $K \cong L$.

Aunque existen diferentes subdivisiones generadas con un método, nosotros solamente estudiaremos la subdivisión baricéntrica. Para ello necesitamos algunas definiciones relacionadas a órdenes parciales.

Definición 7. Un *conjunto parcialmente ordenado* (abreviado *orden parcial*) es una pareja $(P, <)$ donde P es un conjunto y $<$ es una relación binaria sobre P que es transitiva, irreflexiva y

asimétrica. Simplificaremos esto y diremos que P es un orden parcial y $<$ es el *orden* de P . Una *cadena* σ en un orden parcial P es subconjunto de P tal que la restricción de $<$ a σ satisface *tricotomía*, es decir $(C, <)$ es un *conjunto totalmente ordenado* (abreviado *orden total*).

Aunque no profundizaremos en la teoría de órdenes parciales, para poder entender más fácilmente qué es el complejo de orden de un orden parcial, usaremos la representación gráfica de los órdenes parciales.

Definición 8. Sean P un orden parcial y $x < y$ en P . Decimos que y *cubre* x si no existe $z \in P$ tal que $x < z < y$. El *diagrama de Hasse* \mathcal{H} de P es la gráfica con conjunto de vértices P y aristas definidos por pares x, y tales que x cubre y o viceversa.

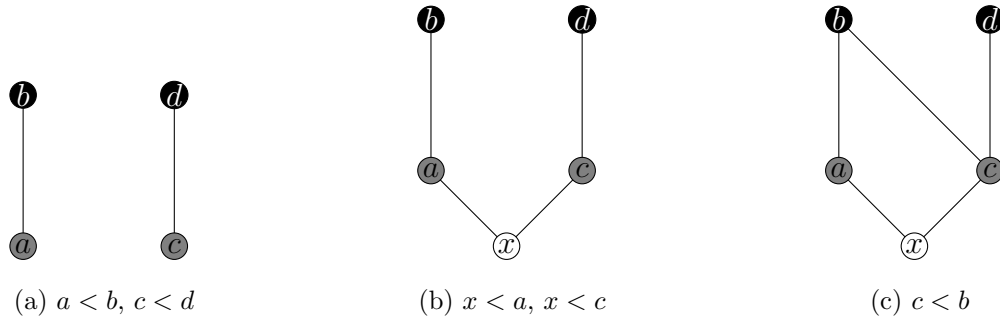


Figura 1.5: Diagramas de Hasse de tres órdenes parciales. En (a) tenemos dos relaciones de cobertura solamente. Agregamos dos relaciones más y obtenemos (b). Con una relación más se obtiene (c)

Definición 9. El *complejo de orden* de un orden parcial P es el complejo simplicial $\Delta(P)$ generado por las cadenas maximales de P . En otras palabras $\sigma \subseteq P$ es un simplejo de $\Delta(P)$ si y solo si es un orden total con el orden heredado de P .

Ejercicio 16. Dibuja los complejos de orden de los órdenes de la Figura 1.5.

Definición 10. La *primera subdivisión baricéntrica* de un complejo simplicial K es el complejo de orden de K visto como orden parcial y lo denotamos mediante $\text{Bar}(K)$. La N -ésima *subdivisión baricéntrica* de K es la primera subdivisión baricéntrica de $\text{Bar}^{N-1}(K)$.

En otras palabras, los simplejos de $\text{Bar}(K)$ son cadenas de simplejos en K . En la Figura 1.4 encontramos la forma usual de representar gráficamente una subdivisión baricéntrica. El vértice central, el baricentro del triángulo, corresponde a la única faceta del 2-simplejo. En general, el baricentro de un simplejo corresponde a su única faceta.

1.5. Teorema de aproximación simplicial

El teorema de aproximación simplicial nos asegura que dada cualquier función continua f entre las realizaciones geométricas de dos complejos simpliciales, podemos encontrar una función simplicial de una subdivisión del dominio de f al codominio de f que se “parece” a f . Por supuesto, para formalizar esto necesitamos varias definiciones.

Definición 11. El *diámetro* $\text{diam}(X)$ de un conjunto $X \subseteq \mathbb{R}^k$ es $\sup\{d(x, y) \mid x, y \in X\}$.

Aunque no hemos definido qué es una operación para obtener subdivisiones, intuitivamente, son métodos que permiten subdividir cualquier simplejo iterativamente. Un ejemplo son las subdivisiones baricéntricas.

Definición 12. Una operación para obtener subdivisiones Div *refina* si para cada $\epsilon > 0$ y cada complejo simplicial K existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sup\{\text{diam}(\sigma) \mid \sigma \in \text{Div}^N(K)\} < \epsilon.$$

La prueba del teorema de aproximación simplicial necesita un número de Lebesgue de una cubierta de espacio compacto.

Definición 13. Sean C un subespacio compacto de \mathbb{R}^k y \mathcal{U} una cubierta abierta de C . Decimos que $\lambda > 0$ es un *número de Lebesgue* de \mathcal{U} si para cada $x \in C$ y $\epsilon < \lambda$ la bola abierta $B_\epsilon(x)$ está contenida en algún elemento de \mathcal{U} .

Definición 14. La *estrella abierta* de un vértice v de un complejo simplicial K es $\text{St}(v) = \bigcup_{v \in \sigma} |\sigma|^\circ$.

Ejercicio 17. Demuestra que $\bigcap_{v \in \sigma} \text{St}(v) \neq \emptyset$ si y solo si $\sigma \in K$

Recordemos que nuestros complejos simpliciales son finitos. Una versión general del siguiente teorema puede encontrarse en [4, Theorem 16.5]

Teorema 1 (Aproximación simplicial). Sea $f: |K| \rightarrow |L|$ una función continua entre las realizaciones geométricas de dos complejos simpliciales. Si Div refina, entonces existen $N \in \mathbb{N}$ y una función simplicial $\bar{f}: \text{Div}^N(K) \rightarrow L$ tales que $f(\text{St}(v)) \subseteq \text{St}(\bar{f}(v))$ para cada $v \in S_0(\text{Div}^N(K))$.

Demostración. Supongamos que tenemos métricas para $|K|$ y $|L|$ que nos dan la topología adecuada. Las estrellas abiertas $\text{St}(w)$ con $w \in L_0$ forman una cubierta abierta de $|L|$. Sea λ un número de Lebesgue de esa cubierta. Dado que f es continua y $|K|$ es compacto existe $\delta > 0$ such that $f(B_\delta(x)) \subseteq B_\lambda(f(x)) \subseteq \text{St}(w)$ para algún $w \in L_0$. Elijamos N tal que $\sup\{\text{diam}(\sigma) \mid \sigma \in \text{Div}^N(K)\} < \frac{\delta}{2}$. Definamos $\bar{f}: \text{Div}^N(K) \rightarrow L$ mediante $\bar{f}(v) = w$ para algún w tal que $f(\text{St}(v)) \subseteq \text{St}(w)$. Este es una función simplicial bien definida por Ejercicio 17. \square

Finalmente, tenemos que la subdivisión baricéntrica refina [4, Theorem 15.4]; por tanto, podemos usar el teorema anterior con subdivisiones baricéntricas.

Proposición 1. La subdivisión baricéntrica refina.

Demostración. Sea σ un k -simplejo. Por definición $(\text{Bar}(\sigma))_0 = \{\tau \mid \tau \in \sigma\}$. Identificamos τ con $\sum_{v \in \tau} \frac{v}{\#\tau} \in |\sigma|$, en otras palabras τ es el baricentro de $|\tau|$.

Para cada $v \in \sigma$,

$$d(\sigma, v) = d\left(\sum_{w \in \sigma} \frac{1}{k+1} w, \sum_{w \in \sigma'} \frac{1}{k+1} v\right) \quad (1.1)$$

$$\leq \sum_{w \in \sigma} d\left(\frac{1}{k+1} w, \frac{1}{k+1} v\right) \quad (1.2)$$

$$= \frac{1}{k+1} \sum_{w \in \sigma} d(w, v) \quad (1.3)$$

$$\leq \frac{k}{k+1} \sup\{d(w, v) \mid w \in \sigma\} \quad (1.4)$$

$$= \frac{k}{k+1} \text{diam}(\sigma). \quad (1.5)$$

Dado que $\text{diam}(\sigma)$ se alcanza para algún par $v, w \in \sigma$, de los cálculos de arriba concluimos que $\sup\{\text{diam}(\tau) \mid \tau \in \text{Bar}(\sigma)\} \leq \frac{k}{k+1} \text{diam}(\sigma)$. Debido a que $\frac{k}{k+1} < 1$ la proposición queda probada. \square

Ejercicio 18. Muestra con todo detalle la Proposición 1.

Miscelánea de ejercicios

Ejercicio 19. Muestra que para todo comple simplicial $\text{skel}_n(K) \leq \text{skel}_{n+1}(K)$

Ejercicio 20. Prueba que para todo compacto $C \subseteq \mathbb{R}^N$ y toda cubierta abierta de C existe un número de Lebesgue.

Capítulo 2

Teorema del nervio

En este capítulo presentaremos una versión del Teorema del Nervio. Este resultado es multifacético en el sentido de que hay diferentes enunciados no equivalentes pero que esencialmente dicen que algunas propiedades topológicas de un espacio son compartidas por un complejo simplicial que se obtiene de una cubierta del espacio original.

La razón para no proveer una prueba de este teorema es que cualquiera de sus enunciados requiere material de topología algebraica que no vamos a revisar. A pesar de ello, para entender su enunciado necesitamos diferentes conceptos que ilustraremos antes del teorema del nervio. La mayoría de las pruebas que se omiten y no se dejan como ejercicio se pueden hallar en [?, 4, ?].

Homotopía

Empezamos con conexidad por trayectorias y homotopías ([?, Section 2.1]).

Definición 15. Sean X un espacio topológico, $x, y \in X$ y $I = [0, 1] \subseteq \mathbb{R}$. Una *trayectoria* en X de x a y es una función continua $u: I \rightarrow X$ tal que $u(0) = x$ y $u(1) = y$. En este caso decimos que x es *conectable por trayectorias* con y .

Ejercicio 21. Usa lo siguiente para demostrar que ser conectable por trayectorias es una relación de equivalencia.

- La función constante es una trayectoria.
- La trayectoria inversa u^- de u es la composición $u \circ \text{inv}$ donde $\text{inv}(t) = 1 - t$ para cada $t \in [0, 1]$.

- La función que manda t a $2t$ puede usarse para reparametrizar cualquier trayectoria de manera que la traza de u se recorra en la mitad del tiempo.

Las clases de equivalencia bajo esta relación se llaman las componentes conexas por trayectorias de X .

Definición 16. The set of all path components of X will be denoted by $\pi_0(X)$. We say X is *0-connected* or *path connected* if $\#\pi_0(X) = 1$.

Definición 17. Let X and Y be topological spaces. Two continuous functions $f, g: X \rightarrow Y$ are *homotopic* ($f \simeq g$) if there is a *homotopy* H from f to g , that is a continuous function $H: X \times I \rightarrow Y$ such that $H|_{X \times \{0\}} = f$ and $H|_{X \times \{1\}} = g$. We usually write $H_t = H|_{X \times \{t\}}$.

Observación 4. In the same way we proved that being connectable by paths is an equivalence relation, being homotopic is an equivalence relation.

Definición 18. A *homotopy inverse* of a continuous map $f: X \rightarrow Y$ is a continuous function $g: Y \rightarrow X$ such that $f \circ g$ and $g \circ f$ are homotopic to the identity. In such case f is a *homotopy equivalence* and X and Y are called *homotopy equivalent* or *have the same homotopy type*. When X is homotopy equivalent to a point is called *contractible*.

Let $X, Y \in \mathcal{C}$, $x \in X$ and $y \in Y$, a continuous function $f: X \rightarrow Y$ is called a pointed function if $f(x) = y$. The set of pointed functions from (X, x) to (Y, y) is denoted by ${}^0((X, x), (Y, y))$.

Definición 19. Let $f, g \in {}^0((X, x), (Y, y))$. A *pointed homotopy* from f to g is a homotopy H from f to g such that $H_t(x) = y$.

The above concepts and properties are generalized straightforward for pointed homotopies. So, \simeq is an equivalence relation on ${}^0((X, x), (Y, y))$.

In what follows, the material has been taken from [?, Chapter 11]. When $X = S^n$ in (X, x) we assume that $x = (1, 0, \dots, 0)$.

Definición 20. Let $n > 0$. The *n-th homotopy group* of (X, x) with $x \in X$ is $\pi_n(X, x) = {}^0((S^n, *), (X, x)) / \simeq$.

Observación 5. We will not prove $\pi_n(X, x)$ is in fact a group, a complete proof can be found in [?, Section 6.1] and [?, Theorem 11.4 and Corollary 11.17].

Of course, if x and y are not in the same path component of X then it could be possible that $\pi_n(X, x) \not\cong \pi_n(X, y)$. However, when x and y lie in the same path component $\pi_n(X, x) \cong \pi_n(X, y)$ ([?, Theorem 11.24]). Thus we write $\pi_n(X)$ instead of $\pi_n(X, x)$.

In this work the following is essential, the proof can be found in [?, Corollary 11.26].

Teorema 2. If X and Y are homotopy equivalent, then $\pi_n(X) \cong \pi_n(Y)$

Definición 21. A topological space X is n -connected if $\#\pi_0(X) = 1$ and $\pi_i(X)$ is a trivial group for $i \leq n$. We say that $X \in$ is (-1) -connected if it is non-empty.

Theorem 2 implies the following.

Lema 1. If X is contractible, then it is n -connected for every $n \in \mathbb{N}$.

Demostración. Since a contractible space is homotopy equivalent to a point, from Theorem 2, it is enough to note that ${}^0((S^n, *), (x, x))$ is a singleton. \square

Proposición 2. The cone $X * a$ is contractible. Therefore an n -ball is contractible.

Demostración. The homotopy between the constant map $X * a \rightarrow a$ and the inclusion $a \rightarrow X * a$ is given by the line segments joining a with $x \in X$. \square

We will prove that several spaces are n -connected for some n but our strategy needs to show explicitly that they are 1-connected. So, we recall a result that simplifies the calculation of $\pi_1(X)$. A simple proof of the next result can be found in [?, Theorem 2.6.2]

Teorema 3 (Seifert-van Kampen). Let $X \in$ and assume that $X_0^\circ \cup X_1^\circ = X$. If X_v and $X_0 \cap X_1$ are 0-connected, then

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(X_0 \cap X_1) & \xrightarrow{(i_1)_*} & \pi_1(X_1) \\ (i_0)_* \downarrow & & \downarrow (j_1)_* \\ \pi_1(X_0) & \xrightarrow{(j_0)_*} & \pi_1(X) \end{array}$$

is a pushout in the category of groups.

Observación 6. The pushout in the category of groups is the free product with amalgamation [?, Chapter 11]. However, we do not need its construction but the following two properties under the hypothesis of Theorem 3:

1. If $\pi_1(X_1)$ and $\pi_1(X_0)$ are trivial then $\pi_1(X)$ is trivial.
2. If $\pi_1(X_0 \cap X_1)$ is trivial, then $\pi_1(X)$ is the free product of $\pi_1(X_1)$ and $\pi_1(X_0)$.

Teorema 4. For $n > 1$, the following equation holds: $\pi_1(S^n) = 0$

Demostración. The sphere S^n is the union of two n -balls whose intersection is S^{n-1} . Since an n -ball is contractible, the equation $\pi_1(S^n) = 0$ follows from Theorem 3 and Remark 6. \square

Definición 22. Let \mathcal{X} be a family of non-empty topological spaces and let $f \in \prod_{X \in \mathcal{X}} X$. The *wedge sum* of \mathcal{X} is the quotient

$$\bigvee_{X \in \mathcal{X}} X = \bigsqcup_{X \in \mathcal{X}} X / \{f(X) \mid X \in \mathcal{X}\};$$

that is, in the sum we identify all the selected points.

Proposición 3. The fundamental group of the wedge sum of two topological spaces is the free product of their fundamental groups. Thus, if two spaces are 1-connected then their wedge sum is 1-connected.

Demostración. From Theorem 3 and Lemma 1 the fundamental group of $X \vee Y$ is the pushout of $\pi_1(X) \leftarrow \{1\} \rightarrow \pi_1(Y)$. From Remark 6, we have finished. \square

Bibliografía

- [1] ALBERTO, L. Pseudospheres: combinatorics, topology and distributed systems. *Journal of Applied and Computational Topology* 8 (2024), 1023–1052.
- [2] KOZLOV, D. N. *Combinatorial Algebraic Topology*, vol. 21 of *Algorithms and computation in mathematics*. Springer, Berlin, Heidelberg, 2008.
- [3] MAY, J. *Simplicial Objects in Algebraic Topology*. Chicago Lectures in Mathematics. University of Chicago Press, 1967.
- [4] MUNKRES, J. R. *Elements of algebraic topology*. Addison-wesley, 1984.