

# Introducción al análisis topológico de datos

Luis Alberto

2025

# Índice general

<b>1. Complejos simpliciales</b>	<b>1</b>
1.1. Notación y nomenclatura estándar . . . . .	1
1.2. Realización geométrica . . . . .	3
1.3. Funciones simpliciales . . . . .	5
1.4. Subdivisiones . . . . .	5
1.5. Teorema de aproximación simplicial . . . . .	8
1.6. Miscelánea de ejercicios . . . . .	10
<b>2. Lema del nervio</b>	<b>12</b>

# Capítulo 1

## Complejos simpliciales

En este capítulo seguimos [1] y [2] como introducción a los complejos simpliciales. Para cualquier conjunto  $V$ , su conjunto potencia es denotado por  $\mathcal{P}(V)$ . La cardinalidad de  $V$  es  $\#V$ .

**Definición 1.** Un *complejo simplicial* sobre un conjunto  $V$  es un conjunto finito  $K \subseteq \mathcal{P}(V)$  cerrado bajo subconjuntos.

Formalmente, la definición de arriba corresponde a la de los *complejos simpliciales abstractos y finitos* [2, Definition 2.1]; dado que no estudiaremos otro tipo de complejos simpliciales omitimos los otros adjetivos.

**Observación 1.** En la Definición 1 tenemos dos complejos simpliciales que son importantes. El primero es el complejo simplicial *vano* (*void* en inglés), es decir  $\emptyset \subseteq \mathcal{P}(V)$ . El segundo es el complejo simplicial *vacío* (*empty* en inglés):  $\{\emptyset\}$  [2, Remark 2.3].

### 1.1. Notación y nomenclatura estándar

Sea  $K$  un complejo simplicial. Cada elemento de  $K$  se llama *simplejo*<sup>1</sup> (*simplex* y plural *simplices* en inglés). La *dimensión* de  $\sigma$  es  $\dim(\sigma) = \#\sigma - 1$ . Si  $\dim(\sigma) = k$  decimos que  $\sigma$  es un *k-simplejo*. Un *vértice* de un complejo simplicial es un 0-simplejo; El conjunto de  $n$ -simplejos de  $K$  será denotado por  $K_n$ .

---

<sup>1</sup>También es común en español, quizás lo es más, utilizar el término *cara*. No lo adopto porque viene del uso geométrico de esa palabra: *las caras del poliedro*. Aunque es verdad que los complejos simpliciales pueden considerarse objetos geométricos, su combinatoria es más natural. Véanse [2], [3]

La dimensión de  $K$  es  $\dim(K) = \max\{\dim(\sigma) \mid \sigma \in K\}$ . Una *faceta* (o *careta* si se usa cara) de un complejo simplicial es un simplejo maximal con respecto a la contención; es decir,  $\sigma$  es faceta si  $\sigma \subseteq \tau$ , entonces  $\tau = \sigma$ . Diremos que un complejo simplicial es *puro* siempre que todas sus facetas tengan la misma dimensión.

Los complejos simpliciales son objetos combinatorios. Usualmente se representan gráficamente como sigue. Un punto representa un vértice, las aristas, 1-simplejos; los triángulos representan 2-simplejos, etc. En la Figura 1.1 encontramos ejemplos de simplejos y en la Figura 1.2, de complejos simpliciales. Nótese que el triángulo hueco en la Figura 1.2b no es un simplejo. También, es importante notar que del dibujo solo es imposible determinar si el tetraedro de la Figura 1.1c es un 3-simplejo o es la unión de 4 2-simplejos. Es por esto último que sólo representamos con fines ilustrativos.

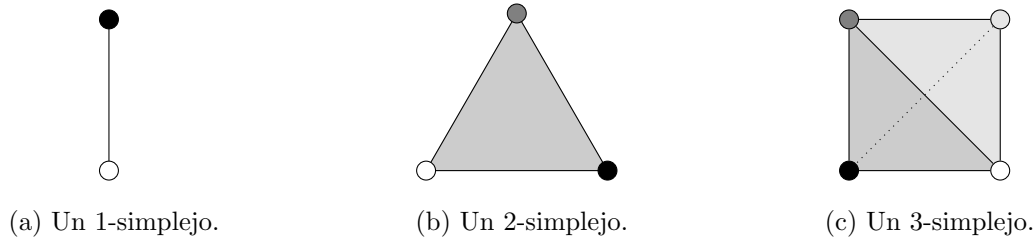


Figura 1.1: Representación gráfica de algunos simplejos. el tetraedro en (c) es un sólido 3-dimensional.

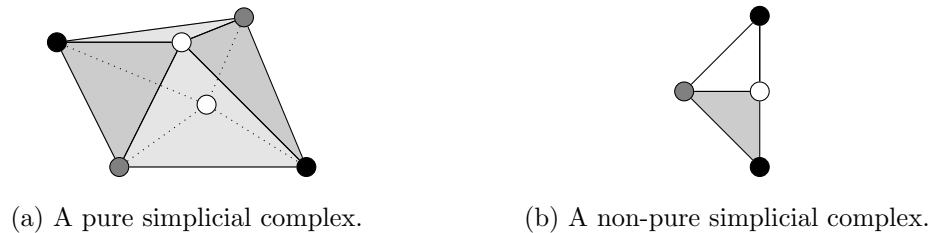


Figura 1.2: Examples of simplicial complexes. All triangles in (a) are filled but the simplicial complex itself is not a 3-dimensional solid.

Sea  $\sigma$  un simplejo. Vamos a sobrecargar la notación y usaremos  $\sigma$  para denotar al complejo simplicial  $\mathcal{P}(\sigma)$  como a la única faceta de tal complejo simplicial. En este sentido, todo simplejo es un complejo simplicial.

**Ejercicio 1.** ¿Cuántos  $k$ -simplejos tiene un  $n$ -simplejo?

El *complejo simplicial generado* por  $F \subseteq \mathcal{P}(V)$  es el complejo simplicial mínimo con respecto a contener todos los simplejos  $\sigma \in F$ . Tal complejo simplicial es denotado por

$$\bigcup F = \bigcup_{\sigma \in F} \sigma.$$

**Ejercicio 2.** Muestra que todo complejo simplicial es generado por sus facetas.

Un *subcomplejo* de un complejo simplicial  $K$  es un subconjunto de  $K$  que es un complejo simplicial. El  *$n$ -esqueleto* de  $K$  es el subcomplejo de  $K$  generado por todos los  $k$ -simplejos en  $K$  con  $k \leq n$  y es denotado por  $\text{skel}_n(K)$ .

**Ejercicio 3.** Muestra que en general  $\text{skel}_n(K)$  no es puro de dimensión  $n$ ; es decir,  $\text{skel}_n(K)$  puede contener facetas de dimensión  $k < n$ .

**Ejercicio 4.** Muestra que  $\text{skel}_n(K) = K_n$  si y sólo si  $n = -1$  o  $K$  es vano. ¿Qué pasaría con esta equivalencia si en la Definición 1 eliminamos los complejos simpliciales vacío y vano?

Un *simplejo frontera* de un  $k$ -simplejo  $\sigma$ , es un  $(k-1)$ -simplejo  $\tau \in \sigma$ . La *frontera* de  $\sigma$  es  $\partial\sigma = \bigcup \{\tau \mid \tau \text{ es un simplejo frontera de } \sigma\}$ .

**Ejercicio 5.**  $\partial\sigma$  es un complejo simplicial.

## 1.2. Realización geométrica

Intuitivamente, el complejo simplicial de la Figura 1.2a es una 2-esfera. Esta sección formaliza tal intuición. Usamos  $\mathbb{R}^V$  para denotar el  $\mathbb{R}$  espacio vectorial con base  $V$ , en particular,  $\mathbb{R}^n$  es el espacio euclidiano de  $n$  dimensiones. Siempre consideramos  $\mathbb{R}^V$  como espacio topológico con la topología inducida por la métrica euclidiana.

**Definición 2.** Un *conjunto afinmente independiente* en  $\mathbb{R}^n$  es un conjunto  $A = \{v_0, \dots, v_k\}$  tal que para cada  $t_i, s_i \geq 0$  con

$$\sum_{i=0}^k s_i = \sum_{i=0}^k t_i = 1,$$

si

$$\sum_{i=0}^k s_i v_i = \sum_{i=0}^k t_i v_i,$$

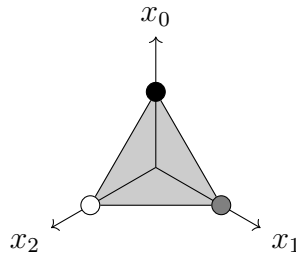


Figura 1.3: El  $V$ -simplejo estándar para  $V = \{x_0, x_1, x_2\}$ .

entonces  $s_i = t_i$  para cada  $i$ . Un vector  $x \in \mathbb{R}^n$  es una *combinación afín* de  $A$  si  $x = \sum_{i=0}^k s_i v_i$  con  $\sum_{i=0}^k s_i = 1$  y  $s_i \geq 0$  para cada  $i$ . La *cápsula convexa* (*convex hull* en inglés) de  $A$  es el conjunto de todas las combinaciones afines de  $A$ .

**Ejercicio 6.** Demuestra que todo conjunto linealmente independiente de  $\mathbb{R}^n$  es afín independiente.

Tomamos las definiciones 3 y 4 de [2, Section 2.2.1].

**Definición 3.** Sea  $V$  un conjunto finito. El  $V$ -simplejo estándar es la cápsula convexa de la base ortonormal estándar de  $\mathbb{R}^V$ .

En la Figura 1.3, tenemos el  $V$ -simplejo estándar para  $V = \{x_0, x_1, x_2\}$ .

**Definición 4.** Sea  $K$  un complejo simplicial. Consideremos la unión de todos los  $\sigma$ -simplejos estándar en  $\mathbb{R}^{K_0}$  con  $\sigma \in K$ . Este conjunto con la topología de subespacio de  $\mathbb{R}^{K_0}$  es la *realización geométrica estándar* de  $K$ . Cualquier espacio homeomorfo a la realización geométrica estándar de  $K$  como  $|K|$  y la llamaremos la *realización geométrica* de  $K$ .

**Observación 2.** La realización geométrica es definida mediante los  $V$ -simplejos estándar. Como ellos tienen la topología de subespacio de  $\mathbb{R}^V$  siempre supondremos que  $|K|$  tiene una métrica que le induce la topología adecuada. También, cualquier afirmación topológica hecha sobre un complejo simplicial estará hecha sobre su realización geométrica..

**Ejercicio 7.** Sea  $K$  un complejo simplicial. En este ejercicio veremos cómo podemos estudiar complejos simpliciales infinitos y sus realizaciones geométricas. La equivalencia de la última parte sirve como definición de la topología de la realización geométrica de complejos simpliciales infinitos [4, p. 8].

1. Prueba que si  $\sigma \in K$ , entonces  $|\sigma| \subseteq |K|$ .

2. Muestra que la realización geométrica de cualquier simplejo es un espacio compacto.
3. Demuestra que si  $\sigma \in K$ , entonces  $|\sigma|$  es un conjunto cerrado de  $|K|$ .
4. Demuestra que  $C \subseteq |K|$  es cerrado si y solo si  $C \cap |\sigma|$  es cerrado para cada  $\sigma \in K$ .

### 1.3. Funciones simpliciales

Si  $f: X \rightarrow Y$  es una función, usamos  $f(A)$  para denotar la imagen de  $A \subseteq X$  bajo  $f$ .

**Definición 5.** Dados dos complejos simpliciales  $K$  and  $L$ , una *función simplicial*<sup>2</sup> de  $K$  a  $L$  es una función  $f: K_0 \rightarrow L_0$  tal que si  $\sigma \in K$  entonces  $f(\sigma) \in L$ .

**Observación 3.** Toda función simplicial  $f: K_0 \rightarrow L_0$  induce una función  $f: K \rightarrow L$ . Así, cuando decimos que  $f: K \rightarrow L$  es una función simplicial, lo que queremos decir es que es inducida por un mapa simplicial.

**Ejercicio 8.** Demuestre que la clase de complejos simpliciales  $\mathcal{CS}$  junto con las funciones simpliciales es una categoría; es decir, demuestre que la composición de funciones simpliciales es simplicial y que para cada  $K \in \mathcal{CS}$  existe una función simplicial  $1_K: K \rightarrow K$  tal que  $1_K \circ f = f$  y  $g \circ 1_K = g$  para cualesquiera funciones simpliciales  $f: L \rightarrow K$  y  $g: K \rightarrow L$ .

**Ejercicio 9.** ¿Quiénes son  $1_\emptyset$  y  $1_{\{\emptyset\}}$ ? ¿Tu prueba del ejercicio anterior consideró esto?

**Ejercicio 10.** Muestra que no toda función entre los vértices de dos complejos simpliciales induce una función simplicial.

**Ejercicio 11.** Muestra que toda función simplicial  $f: K \rightarrow L$  induce una función continua  $|f|: |K| \rightarrow |L|$  dada por

$$|f|(\sum_{i=0}^k s_i v_i) = \sum_{i=0}^k s_i f(v_i).$$

### 1.4. Subdivisiones

**Definición 6.** Una *subdivisión* de un complejo simplicial  $K$  es un complejo simplicial  $K'$  tal que para una realización geométrica fija  $|K|$ , existe una realización geométrica  $|K'|$  tale que:

---

<sup>2</sup>Es usual en la literatura en inglés encontrar esto como *simplicial map*. Yo mismo les llamo así a veces.

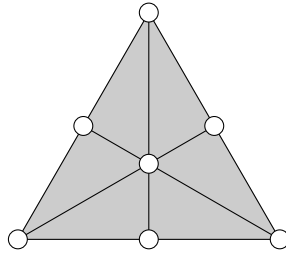


Figura 1.4: La primera subdivisión baricéntrica de un 2-simplejo.

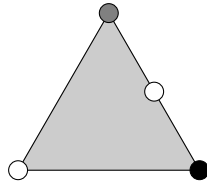


Figura 1.5: Esto no es una subdivisión de un 2-simplejo.

1. La realización geométrica de cada simplejo en  $K'$  está contenida en la realización geométrica de algún simplejo de  $K$ .
2. Para cada  $\sigma \in K$ , hay un subcomplejo  $\sigma'$  de  $K'$  tal que  $|\sigma| = |\sigma'|$ .

Los siguientes ejercicios están diseñados para una mejor y pronta comprensión de la definición de arriba.

**Ejercicio 12.** Si  $K'$  es una subdivisión de  $K$ , entonces  $|K| \cong |K'|$ .

**Ejercicio 13.** Representa gráficamente los siguientes complejos simpliciales

1.  $K = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$ .
2.  $K' = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, c\}, \{c, b\}\}$

Muestra que  $K'$  es una subdivisión de  $K$ .

**Ejercicio 14.** Muestra que la imagen en la Figura 1.4 es una subdivisión de un 2-simplejo.

Intuitivamente, una subdivisión de  $K$  se obtiene agregando simplejos internos a (algunos de) los simplejos de  $K$ . Sin embargo, esto debe hacerse con cuidado. En la Figura 1.5 vemos que este procedimiento fue realizado sin **preservar la estructura combinatoria** del complejo simplicial original. Esto quiere decir que aunque el espacio topológico asociado al objeto en esa figura (es decir el triángulo) es la realización geométrica del 2-simplejo, como objeto combinatorio no es un complejo simplicial.



**Ejercicio 15.** Demuestra que si  $L$  es una subdivisión de  $K$  y  $K$  lo es de  $L$ , entonces existe un isomorfismo  $K \cong L$ .

Aunque existen diferentes subdivisiones generadas con un método, nosotros solamente estudiaremos la subdivisión baricéntrica. Para ello necesitamos algunas definiciones relacionadas a órdenes parciales.

**Definición 7.** Un *conjunto parcialmente ordenado* (abreviado *orden parcial*) es una pareja  $(P, <)$  donde  $P$  es un conjunto y  $<$  es una relación binaria sobre  $P$  que es transitiva, irreflexiva y asimétrica. Simplificaremos esto y diremos que  $P$  es un orden parcial y  $<$  es el *orden* de  $P$ . Una *cadena*  $\sigma$  en un orden parcial  $P$  es subconjunto de  $P$  tal que la restricción de  $<$  a  $\sigma$  satisface *tricotomía*, es decir  $(C, <)$  es un *conjunto totalmente ordenado* (abreviado *orden total*).

Aunque no profundizaremos en la teoría de órdenes parciales, para poder entender más fácilmente qué es el complejo de orden de un orden parcial, usaremos la representación gráfica de los órdenes parciales.

**Definición 8.** Sean  $P$  un orden parcial y  $x < y$  en  $P$ . Decimos que  $y$  *cubre*  $x$  si no existe  $z \in P$  tal que  $x < z < y$ . El *diagrama de Hasse*  $\mathcal{H}$  de  $P$  es la gráfica con conjunto de vértices  $P$  y aristas definidos por pares  $x, y$  tales que  $x$  cubre  $y$  o viceversa.

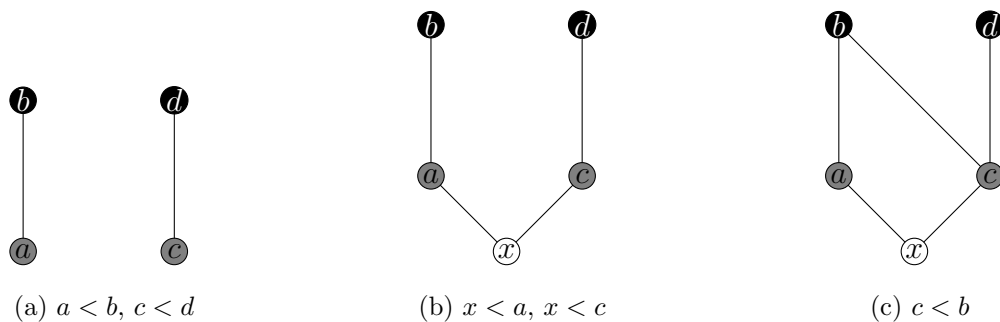


Figura 1.6: Diagramas de Hasse de tres órdenes parciales. En (a) tenemos dos relaciones de cobertura solamente. Agregamos dos relaciones más y obtenemos (b). Con una relación más se obtiene (c)

**Definición 9.** El *complejo de orden* de un orden parcial  $P$  es el complejo simplicial  $\Delta(P)$  generado por las cadenas maximales de  $P$ . En otras palabras  $\sigma \subseteq P$  es un simplejo de  $\Delta(P)$  si y solo si es un orden total con el orden heredado de  $P$ .

**Ejercicio 16.** Dibuja los complejos de orden de los órdenes de la Figura 1.6.

**Definición 10.** La *primera subdivisión baricéntrica* de un complejo simplicial  $K$  es el complejo de orden de  $K \setminus \{\emptyset\}$  visto como orden parcial y lo denotamos mediante  $\text{Bar}(K)$ . La  $N$ -ésima *subdivisión baricéntrica* de  $K$  es la primera subdivisión baricéntrica de  $\text{Bar}^{N-1}(K)$ .

En otras palabras, los simplejos de  $\text{Bar}(K)$  son cadenas de simplejos en  $K$ . En la Figura 1.4 encontramos la forma usual de representar gráficamente una subdivisión baricéntrica. El vértice central, el baricentro del triángulo, corresponde a la única faceta del 2-simplejo. En general, el baricentro de un simplejo corresponde a su única faceta.

## 1.5. Teorema de aproximación simplicial

El teorema de aproximación simplicial nos asegura que dada cualquier función continua  $f$  entre las realizaciones geométricas de dos complejos simpliciales, podemos encontrar una función simplicial de una subdivisión del dominio de  $f$  al codominio de  $f$  que se “parece” a  $f$ . Por supuesto, para formalizar esto necesitamos varias definiciones.

**Definición 11.** El *diámetro*  $\text{diam}(X)$  de un conjunto  $X \subseteq \mathbb{R}^k$  es  $\sup\{d(x, y) \mid x, y \in X\}$ .

Aunque no hemos definido qué es una operación para obtener subdivisiones, intuitivamente, son métodos que permiten subdividir cualquier simplejo iterativamente. Un ejemplo son las subdivisiones baricéntricas.

**Definición 12.** Una operación para obtener subdivisiones  $\text{Div}$  *refina* si para cada  $\epsilon > 0$  y cada complejo simplicial  $K$  existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que

$$\sup\{\text{diam}(\sigma) \mid \sigma \in \text{Div}^N(K)\} < \epsilon.$$

La prueba del teorema de aproximación simplicial necesita el número de Lebesgue de una cubierta de espacio compacto.

**Definición 13.** Sean  $C$  un subespacio compacto de  $\mathbb{R}^k$  y  $\mathcal{U}$  una cubierta abierta de  $C$ . Decimos que  $\lambda > 0$  es un *número de Lebesgue* de  $\mathcal{U}$  si para cada  $x \in C$  y  $\epsilon < \lambda$  la bola abierta  $B_\epsilon(x)$  está contenida en algún elemento de  $\mathcal{U}$ .

**Definición 14.** La *estrella abierta* de un vértice  $v$  de un complejo simplicial  $K$  es  $\text{St}(v) = \bigcup_{v \in \sigma} |\sigma|^\circ$ .

**Ejercicio 17.** Demuestra que  $\bigcap_{v \in \sigma} \text{St}(v) \neq \emptyset$  si y solo si  $\sigma \in K$

Recordemos que nuestros complejos simpliciales son finitos. Una versión general del siguiente teorema puede encontrarse en [4, Theorem 16.5]

**Teorema 1** (Aproximación simplicial). Sea  $f: |K| \rightarrow |L|$  una función continua entre las realizaciones geométricas de dos complejos simpliciales. Si  $\text{Div}$  refina, entonces existen  $N \in \mathbb{N}$  y una función simplicial  $\bar{f}: \text{Div}^N(K) \rightarrow L$  tales que  $f(\text{St}(v)) \subseteq \text{St}(\bar{f}(v))$  para cada  $v \in S_0(\text{Div}^N(K))$ .

*Demostración.* Supongamos que tenemos métricas para  $|K|$  y  $|L|$  que nos dan la topología adecuada. Las estrellas abiertas  $\text{St}(w)$  con  $w \in L_0$  forman una cubierta abierta de  $|L|$ . Sea  $\lambda$  un número de Lebesgue de esa cubierta. Dado que  $f$  es continua y  $|K|$  es compacto existe  $\delta > 0$  such that  $f(B_\delta(x)) \subseteq B_\lambda(f(x)) \subseteq \text{St}(w)$  para algún  $w \in L_0$ . Elijamos  $N$  tal que  $\sup\{\text{diam}(\sigma) \mid \sigma \in \text{Div}^N(K)\} < \frac{\delta}{2}$ . Definamos  $\bar{f}: \text{Div}^N(K) \rightarrow L$  mediante  $\bar{f}(v) = w$  para algún  $w$  tal que  $f(\text{St}(v)) \subseteq \text{St}(w)$ . Este es una función simplicial bien definida por Ejercicio 17.  $\square$

Finalmente, tenemos que la subdivisión baricéntrica refina [4, Theorem 15.4]; por tanto, podemos usar el teorema anterior con subdivisiones baricéntricas.

**Proposición 1.** La subdivisión baricéntrica refina.

*Demostración.* Sea  $\sigma$  un  $k$ -simplejo. Por definición  $(\text{Bar}(\sigma))_0 = \{\tau \mid \tau \in \sigma\}$ . Identificamos  $\tau$  con  $\sum_{v \in \tau} \frac{v}{\#\tau} \in |\sigma|$ , en otras palabras  $\tau$  es el baricentro de  $|\tau|$ .

Para cada  $v \in \sigma$ ,

$$d(\sigma, v) = d\left(\sum_{w \in \sigma} \frac{1}{k+1} w, \sum_{w \in \sigma'} \frac{1}{k+1} v\right) \quad (1.1)$$

$$\leq \sum_{w \in \sigma} d\left(\frac{1}{k+1} w, \frac{1}{k+1} v\right) \quad (1.2)$$

$$= \frac{1}{k+1} \sum_{w \in \sigma} d(w, v) \quad (1.3)$$

$$\leq \frac{k}{k+1} \sup\{d(w, v) \mid w \in \sigma\} \quad (1.4)$$

$$= \frac{k}{k+1} \text{diam}(\sigma). \quad (1.5)$$

Dado que  $\text{diam}(\sigma)$  se alcanza para algún par  $v, w \in \sigma$ , de los cálculos de arriba concluimos que  $\sup\{\text{diam}(\tau) \mid \tau \in \text{Bar}(\sigma)\} \leq \frac{k}{k+1} \text{diam}(\sigma)$ . Debido a que  $\frac{k}{k+1} < 1$  la proposición queda probada.  $\square$

**Ejercicio 18.** Muestra con todo detalle la Proposición 1.

## 1.6. Miscelánea de ejercicios

En estos ejercicios vamos a explorar con mayor generalidad algunos de los conceptos de este capítulo

**Definición 15.** Un *complejo simplicial infinito* sobre un conjunto  $V$  es un subconjunto  $K \subseteq \mathcal{P}(V)$  cerrado bajo subconjuntos.

La mayoría de los conceptos que se revisaron en este capítulo se pueden generalizar de manera directa para complejos simpliciales infinitos.

**Ejercicio 19.** Demuestra que todo complejo simplicial, no necesariamente finito, es generado por sus facetas.

**Definición 16.** Un *n-simplejo geométrico* es la cápsula convexa de un conjunto afinmente independiente de cardinalidad  $n + 1$ . Una *cara* de un simplejo geométrico  $\sigma$  generado por  $A$  es un simplejo geométrico generado por un subconjunto de  $A$ .

**Definición 17.** Un *complejo simplicial geométrico*,  $\tilde{K}$  en  $\mathbb{R}^N$  es una colección de simplejos geométricos en  $\mathbb{R}^N$  tales que

1.  $\tilde{K}$  es cerrado bajo caras.
2. La intersección de cualesquiera dos simplejos geométricos en  $\tilde{K}$  es un simplejo geométrico.

**Ejercicio 20.** Prueba que la realización geométrica estándar de un complejo simplicial es un complejo simplicial geométrico. (No necesitas la topología de la realización geométrica para probar esto).

**Ejercicio 21.** Da un ejemplo de una colección de simplejos geométricos que no sea un complejo simplicial geométrico porque falla el segundo punto de la definición. Concluye que en general es falso que la unión de realizaciones geométricas de los simplejos de un complejo simplicial  $K$  es la realización geométrica de  $K$ .

**Definición 18.** Una *cubierta* de un conjunto  $X$  es una familia de subconjuntos de  $X$ , digamos  $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{P}(X)$ , tal que  $X = \bigcup \mathcal{U}$ .

**Definición 19.** El *nervio* de una cubierta  $\mathcal{U}$  de  $X$  es

$$\mathcal{N}(\mathcal{U}) = \{S \subseteq \mathcal{U} \mid \emptyset \neq \bigcap S \text{ y } \#S \in \mathbb{N}\}$$

**Ejercicio 22.** Prueba que el nervio de una cubierta es un complejo simplicial.

**Definición 20.** Una *cubierta con índices* de un conjunto  $X$  es una familia de subconjuntos de  $X$  indicada por un conjunto  $\mathcal{J}$ , digamos  $\mathcal{U} = (U_j)_{j \in \mathcal{J}}$ , tal que  $X = \bigcup_{j \in \mathcal{J}} U_j$ .

**Definición 21.** El *nervio* de una cubierta indicada  $\mathcal{U}$  de  $X$  es

$$\mathcal{N}(\mathcal{U}) = \{J \subseteq \mathcal{J} \mid \emptyset \neq U_J \text{ y } \#J \in \mathbb{N}\}$$

donde  $U_J = \bigcap_{j \in J} U_j$ .

**Ejercicio 23.** Es claro que el nervio de una cubierta indicada es un complejo simplicial. También es claro que si olvidamos los índices de una cubierta indicada, obtenemos una cubierta. Da un ejemplo de una cubierta indicada  $(U_j)_{j \in \mathcal{J}}$  tal que la cubierta obtenida al olvidar los índices tenga un nervio distinto al de la cubierta indicada original.

# Capítulo 2

## Lema del nervio

En este capítulo presentaremos una versión del Teorema (Lema) del Nervio. Este resultado es multifacético en el sentido de que hay diferentes enunciados no equivalentes pero que esencialmente dicen que algunas propiedades topológicas de un espacio son compartidas por un complejo simplicial que se obtiene de una cubierta del espacio original.

La razón para no proveer una prueba de este teorema es que cualquiera de sus enunciados requiere material de topología algebraica que no vamos a revisar. A pesar de ello, para entender su enunciado necesitamos diferentes conceptos que ilustraremos antes del teorema del nervio. La mayoría de las pruebas que se omiten y no se dejan como ejercicio se pueden hallar en [6, 4, 5].

## Homotopía

El material presentado aquí no debe considerarse una introducción a este tema. Lo único que presentamos son las definiciones y algunos ejercicios para poder entender intuitivamente el Lema del Nervio. Para una comprensión más amplia recomendamos [6] o [5].

**Definición 22.** Sean  $X$  un espacio topológico,  $x, y \in X$  y  $I = [0, 1] \subseteq \mathbb{R}$ . Una *trayectoria* en  $X$  de  $x$  a  $y$  es una función continua  $u: I \rightarrow X$  tal que  $u(0) = x$  y  $u(1) = y$ . En este caso decimos que  $x$  es *conectable por trayectorias* con  $y$ .

**Ejemplo 1.** La realización geométrica de una gráfica  $K$  es conectable por trayectorias. Dados cualesquiera dos puntos en la realización geométrica o bien son vértices, o están en el interior de una arista o uno es un vértice y el otro está en el interior de una arista.

Si los puntos son vértices, sabemos que existe un camino entre ellos en la gráfica. Así basta con parametrizar la realización geométrica de este camino para obtener una trayectoria en  $|K|$ .

Si uno de ellos, digamos  $x$ , está en el interior de una arista  $e$ , podemos replicar el argumento anterior con el otro punto y cualquiera de los vértices de  $e$ . Finalmente, parametrizar la curva entre el último vértice y  $x$ .

El otro caso es similar.

**Ejercicio 24.** Usa lo siguiente para demostrar que ser conectable por trayectorias es una relación de equivalencia.

- La función constante es una trayectoria.
- La trayectoria inversa  $u^-$  de  $u$  es la composición  $u \circ \text{inv}$  donde  $\text{inv}(t) = 1 - t$  para cada  $t \in [0, 1]$ .
- La función que manda  $t$  a  $2t$  puede usarse para reparametrizar cualquier trayectoria de manera que la traza de  $u$  se recorra en la mitad del tiempo.

Las clases de equivalencia bajo esta relación se llaman las componentes conexas por trayectorias de  $X$ .

**Definición 23.** El conjunto de las componentes conexas por trayectorias de  $X$  es denotado por  $\pi_0(X)$ . Decimos que  $X$  es *0-conexo* si  $\#\pi_0(X) = 1$ .

**Definición 24.** Sean  $X$  y  $Y$  dos espacios topológicos. Dos funciones continuas  $f, g: X \rightarrow Y$  son *homotópicas* ( $f \simeq g$ ) si existe una *homotopía*  $H$  de  $f$  a  $g$ , es decir, si existe una función continua  $H: X \times I \rightarrow Y$  tal que las siguientes ecuaciones entre restricciones de  $H$  se cumplen:  $H|_{X \times \{0\}} = f$  y  $H|_{X \times \{1\}} = g$ . Usualmente escribimos  $H_t = H|_{X \times \{t\}}$ .

**Ejemplo 2.** Sean  $f, g: I \rightarrow \mathbb{R}^2$  definidas como  $f(s) = (s, s^2)$  y  $g(s) = (s, s)$ . Definamos  $H: I \times I \rightarrow \mathbb{R}^2$  como  $H(t, s) = (s, ts^2 + (1-t)s)$ .  $H$  es continua pues sus funciones coordenadas son continuas en ambas variables. Luego  $H_0 = g$  y  $H_1 = f$ . Por lo tanto,  $f \simeq g$ . Intuitivamente,  $H$  está deformando la gráfica de la identidad en la de la función  $x \mapsto x^2$  en el intervalo  $I$ .

**Definición 25.** Una homotopía como en el ejemplo anterior se llama *homotopía lineal*.

**Ejercicio 25.** Muestra, como en el Ejercicio 24, que ser homotópicas es una relación de equivalencia en las funciones continuas entre dos espacios topológicos. Formalmente debes tener cuidado puesto que las homotopías son funciones de dos variables, por lo que la continuidad se debe verificar utilizando la topología del producto: Un argumento de cálculo multivariado es suficiente.

**Ejercicio 26.** Si  $f \simeq f'$  y  $g \simeq g'$  con  $f: X \rightarrow Y$  y  $g: Y \rightarrow Z$ , entonces  $g \circ f \simeq g' \circ f'$ . Como antes, un argumento de cálculo multivariado ayudará a mostrar que la función que propones es continua.

**Definición 26.** Un *inverso homotópico* de una función continua  $f: X \rightarrow Y$  es una función continua  $g: Y \rightarrow X$  tal que  $f \circ g$  y  $g \circ f$  son homotópicas a la identidad. En tal caso, diremos que  $f$  es una *equivalencia homotópica* y  $X$  y  $Y$  serán llamados *homotópicamente equivalentes* o *del mismo tipo de homotopía*. Si  $X$  es homotópicamente equivalente a un punto, diremos que es *contráctil*.

**Ejercicio 27.** Muestra que todo subconjunto convexo de  $\mathbb{R}^n$  es contráctil. Pista: puedes suponer que el origen está contenido en el subconjunto.

**Ejercicio 28.** Muestra que  $X$  es contráctil si y solo sí,  $1_X$  es homotópica a una constante.

**Ejercicio 29.** Un *anillo* es el conjunto de puntos que se encuentran entre dos círculos concéntricos; en otras palabras un conjunto de la forma

$$A = \{(x, y) \mid r \leq \|(x, y)\| \leq R\}$$

Con este ejercicio demostrarás que un anillo es homotópicamente equivalente a  $S^1$ . Para ello supondremos que tenemos un anillo como arriba en el que  $r = 1$ .

1. Considera la función  $H: A \times I \rightarrow S^1$  definida mediante  $H(x, y, t) = \frac{t(x, y)}{\|(x, y)\|} + (1 - t)(x, y)$ . Demuestra que esta función es una homotopía entre  $1_A$  y  $H_1$ .
2. Si  $p = H_1$  y  $i: S^1 \rightarrow A$  es la inclusión, demuestra que  $p \circ i = 1_{S^1}$ .
3. Muestra que existe una homotopía  $\bar{H}$  entre  $i \circ p$  y  $1_{S^1}$ . Concluye que  $S^1$  es homotópicamente equivalente a  $A$  y por tanto,  $A$  no es contráctil.



# Bibliografía

- [1] ALBERTO, L. Pseudospheres: combinatorics, topology and distributed systems. *Journal of Applied and Computational Topology* 8 (2024), 1023–1052.
- [2] KOZLOV, D. N. *Combinatorial Algebraic Topology*, vol. 21 of *Algorithms and computation in mathematics*. Springer, Berlin, Heidelberg, 2008.
- [3] MAY, J. *Simplicial Objects in Algebraic Topology*. Chicago Lectures in Mathematics. University of Chicago Press, 1967.
- [4] MUNKRES, J. R. *Elements of algebraic topology*. Addison-wesley, 1984.
- [5] ROTMAN, J. J. *An Introduction to Algebraic Topology*. Graduate Texts in Mathematics: 119. Springer New York, 1988.
- [6] TOM DIECK, T. *Algebraic topology*. European Mathematical Society, Germany, 2008.