Introducción al análisis topológico de datos

Luis Alberto

2025

Índice general

Capítulo 1

Complejos simpliciales

En este capítulo seguimos [1]. Para cualquier conjunto V, su conjunto potencia es denotado por $\mathcal{P}(V)$. La carnalidad de V es $\#V$

Definición 1. Un *complejo simplicial* sobre un conjunto V es un conjunto finito $K \subseteq \mathcal{P}(V) \setminus \{\emptyset\}$ cerrado bajo subconjuntos.

Formalmente, la definición de arriba corresponde a la de los *complejos simpliciales abstractos y finitos* [2, Definition 2.1]; dado que no estudiaremos otro tipo de complejos simpliciales omitimos los otros adjetivos.

Observación 1. En la Definición 1 tenemos dos complejos simpliciales que son importantes. El primero es el complejo simplicial *vano* (*void* en inglés), es decir $\emptyset \subseteq \mathcal{P}(V)$. El segundo es el complejo simplicial *vacío* (*empty* en inglés): $\{\emptyset\}$ [2, Remark 2.3].

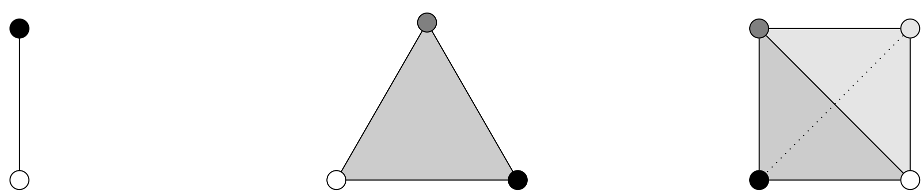
1.1. Notación y nomenclatura estándar

Sea K un complejo simplicial. Cada elemento de K se llama *simplejo*[1] (*simplex* y plural *simplices* en inglés). La *dimensión* de σ es $\dim(\sigma) = \#\sigma - 1$. Si $\dim(\sigma) = k$ decimos que σ es un k-*simplejo*. Un *vértice* de un complejo simplicial es un 0-simplejo; El conjunto de n-simplejos de K será denotado por K_n.

[1] También es común en español, quizás lo es más, utilizar el término *cara*. No lo adopto porque viene del uso geométrico de esa palabra: *las caras del poliedro*. Aunque es verdad que los complejos simpliciales pueden considerarse objetos geométricos, su combinatoria es más natural. Véanse [2], [3]

La dimensión de K es $\dim(K) = \max\{\dim(\sigma) \mid \sigma \in K\}$. Una *faceta* (o *careta* si se usa cara) de un complejo simplicial es un simplejo máximal con respecto a la contención; es decir, σ es faceta si $\sigma \subseteq \tau$, entonces $\tau = \sigma$. Diremos que un complejo simplicial es *puro* wsiempre que todas sus facetas tengan la misma dimensión.

Los complejos simpliciales son objectos combinatorios. Usualmente se representan gráficamente como sigue. Un punto representa un vértice, las aristas, 1-simplejos; los triángulos representan 2-simplejos, etc. En la Figura 1.1 encontramos ejemplos de simplejos y en la Figura 1.2, de complejos simpliciales. Nótese que el triángulo hueco en la Figura 1.2b no es un simplejo. También, es importante notar que del dibujo solo es imposible determinar si el tetraedro de la Figura 1.1c es un 3-simplejo o es la unión de 4 2-simplejos. Es por esto último que sólo representamos con fines ilustrativos.



(a) Un 1-simplejo. (b) Un 2-simplejo. (c) Un 3-simplejo.

Figura 1.1: Representación gráfica de alguno simplejos. el tetraedro en (c) es un sólido 3-dimensional.

(a) A pure simplicial complex. (b) A non-pure simplicial complex.

Figura 1.2: Examples of simplicial complexes. All triangles in (a) are filled but the simplicial complex itself is not a 3-dimensional solid.

Sea σ un simplejo. Vamos a sobrecargar la notación y usaremos σ para denotar al complejo simplicial $\mathcal{P}(\sigma)$ como a la única faceta de tal complejo simplicial. En este sentido, todo simplejo es un complejo simplicial.

Ejercicio 1. ¿Cuántos k-simplejos tiene un n-simplejo?

El *complejo simplicial generado* por $F \subseteq \mathcal{P}(V)$ es el complejo simplicial mínimo con respecto a contener todos los simplejos $\sigma \in F$. Tal complejo simplicial es denotado por

$$\bigcup F = \bigcup_{\sigma \in F} \sigma.$$

Ejercicio 2. Muestra que todo complejo simplicial es generado por sus facetas.

Un *subcomplejo* de un complejo simplicial K es un subconjunto de K que es un complejo simplicial. El n*-esqueleto* de K es el subcomplejo de K generado por todos los k-simplejos en K con $k \leq n$ y es denotado por $\mathrm{skel}_n(K)$.

Ejercicio 3. Muestra que $\mathrm{skel}_n(K)$ es puro de dimensión n.

Ejercicio 4. Muestra que $\mathrm{skel}_n(K) = K_n$ si y sólo sí $n = -1$ o K es vano. ¿Qué pasaría con esta equivalencia si en la Definición 1 eliminamos los complejos simpliciales vacío y vano?

Un *simplejo frontera* de un k-simplejo σ, es un $k-1$-simplejo $\tau \in \sigma$. La *frontera* de σ es $\partial\sigma = \bigcup\{\tau \mid \tau \text{ es un simplejo frontera de } \sigma\}$.

Ejercicio 5. $\partial\sigma$ es un complejo simplicial.

1.2. Realización geométrica

Intuitivamente, el complejo simplicial de la Figura 1.2a es una 2-esfera. Esta sección formaliza tal intuición. Usamos $\mathbb{R}^V$ para denotar el $\mathbb{R}$ espacio vectorial con base V, en particular, $\mathbb{R}^n$ es el espacio euclidiano de n dimensiones. Siempre consideramos $\mathbb{R}^V$ como espacio topológico con la topología inducida por la métrica euclidiana.

Definición 2. Un *conjunto afinmente independiente* en $\mathbb{R}^n$ es un conjunto $A = \{v_0, \ldots, v_k\}$ tal que para cada $t_i, s_i \geq 0$ con

$$\sum_{i=0}^{k} s_i = \sum_{i=0}^{k} t_i = 1,$$

si

$$\sum_{i=0}^{k} s_i v_i = \sum_{i=0}^{k} t_i v_i,$$

entonces $s_i = t_i$ para cada i. Un vector $x \in \mathbb{R}^n$ es una *combinación afín* de A si $x = \sum_{i=0}^{k} s_i v_i$ con $\sum_{i=0}^{k} s_i = 1$ y $s_i \geq 0$ para cada i. La *cápsula convexa* (*convex hull* en inglés) de A es el conjunto de todas las combinaciones afines de A.

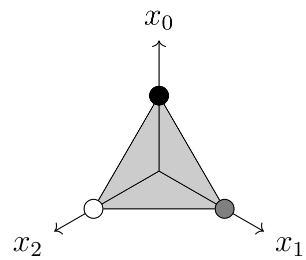


Figura 1.3: El V-simplejo estándar para $V = \{x_0, x_1, x_2\}$.

Ejercicio 6. Demuestra que todo conjunto linealmente independiente de $\mathbb{R}^n$ es afín independiente.

Tomamos las definiciones 3 y 4 de [2, Section 2.2.1].

Definición 3. Sea V un conjunto finito. El *V-simplejo estándar* es la cápsula convexa de la base ortnonormal estándar de $\mathbb{R}^V$.

En la Figura 1.3, tenemos el V-simplejo estándar para $V = \{x_0, x_1, x_2\}$.

Definición 4. Sea K un complejo simplicial. Consideremos la unión de todos los σ-simplejos estándar en $\mathbb{R}^{K_0}$ con $\sigma \in K$. Este conjunto con la topología de subespacio de $\mathbb{R}^{K_0}$ es la *realización geométrica estándar* de K. Cualquier espacio homeomorfo a la realización geométrica estándar de K como $|K|$ y la llamaremos la *realización geométrica* de K.

Observación 2. La realización geométrica es definida mediante los V-simplejos estándar. Como ellos tienen la topología de subespacio de $\mathbb{R}^V$ siempre supondremos que $|K|$ tiene una métrica que le induce la topología adecuada. También, cualquier afirmación topológica hecha sobre un complejo simplicial estará hecha sobre su realización geométrica..

Ejercicio 7. Sea K un complejo simplicial. En este ejercicio veremos cómo podemos estudiar complejos simpliciales infinitos y sus realizaciones geométricas. La equivalencia de la última parte sirve como definición de la topología de la realización geométrica de complejos simpliciales infinitos [4, p. 8].

1. Prueba que si $\sigma \in K$, entonces $|\sigma| \subseteq |K|$.

2. Muestra que la realización geométrica de cualquier simplejo es un espacio compacto.

3. Demuestra que si $\sigma \in K$, entonces $|\sigma|$ es un conjunto cerrado de $|K|$.

4. Demuestra que $C \subseteq |K|$ es cerrado si y solo si $C \cap |\sigma|$ es cerrado para cada $\sigma \in \Delta$.

Notemos que el espacio subyacente de $|K|$ está bien definido incluso si removemos la condicón de finitud sobre K is a non-finite simplicial complex. In $|\Delta|$ we say that $C \subseteq |\Delta|$ is closed if and only if $C \cap |\sigma|$ is closed for each $\sigma \in \Delta$. The space thus obtained is the *geometric realization* of Δ. This topology in $|\Delta|$ coincides with the subspace topology if Δ is finite but we do not need this description.

Bibliografía

[1] Alberto, L. Pseudospheres: combinatorics, topology and distributed systems. *Journal of Applied and Computational Topology 8* (2024), 1023–1052.

[2] Kozlov, D. N. *Combinatorial Algebraic Topology*, vol. 21 of *Algorithms and computation in mathematics*. Springer, Berlin, Heidelberg, 2008.

[3] May, J. *Simplicial Objects in Algebraic Topology.* Chicago Lectures in Mathematics. University of Chicago Press, 1967.

[4] Munkres, J. R. *Elements of algebraic topology.* Addison-wesley, 1984.