Modelo del tamaño de la fuerza de trabajo

Las necesidades de mano de obra en proyectos de construcción pueden satisfacerse contratando y despidiendo trabajadores. Ambas actividades incurren en un costo. El objetivo es minimizar el costo total de la mano de obra requerida para el proyecto.

Supongamos que el proyecto se ejecutara durante el lapso de semanas i y que la fuerza de trabajo mínima requerida en la semana i es b_i trabajadores. El modelo asume que se incurre en un costo adicional si la fuerza de trabajo de una semana excede el requerimiento mínimo o si en una semana se realiza una contratación adicional. Por sencillez, no se incurre en ningún costo cuando ocurre un despido.

Sin embargo de acuerdo con los parámetros de costos, podría ser más económico dejar que fluctué el tamaño de la fuerza de trabajo. Como x_i es la cantidad de trabajadores empleados en la semana i, en esa semana i se pueden incurrir en 2 costos:

$C_1(x_i - b_i)$ El costo de mantener el exceso de personal.

$C_2(x_i - x_{i-1})$ El costo de contratar $x_i - x_{i-1}$ trabajadores adicionales. Tiempo

Los elementos de programación dinámica se definen como:

1- La etapa i se representa por la semana i, $i = 1,2,3 \dots, n$.
2- Las alternativas en las etapas i son x_i, la cantidad de trabajadores en la semana i.
3- El estado de cada etapa i se representa por la cantidad de trabajadores disponibles en cada etapa $i - 1$, que es x_{i-1}.

La ecuación recursiva de la programación dinámica es la siguiente:

$$f_i(x_{i-1}) = min\,\{C_1(x_i - b_i) + C_2(x_i - x_{i-1}) + f_{i+1}(x_i)\}\ \ i = 1,2,\dots,n$$

$f_{n+1}(x_n) = 0$

Los cálculos para resolver el problema comienzan en la última etapa y terminan en la etapa 1.

<u>Ejemplo (Extraído del libro investigación de operaciones Handy A. Taha)</u>

12.3-2 Un contratista estima que el tamaño de la fuerza de trabajo necesaria durante las siguientes 5 semanas es de 5, 7, 8, 4 y 6 trabajadores, respectivamente. La mano de obra excedente conservada en la fuerza de trabajo costará $300 por trabajador por semana, y una nueva contratación en cualquier semana incurrirá en un costo fijo de $400 más $200 por trabajador por semana. Minimizar el costo total de la mano de obra requerida para el proyecto.

1er pasó. Extraer los datos del problema:

$b_1 = 5,\ b_2 = 7,\ b_3 = 8,\ \ b_4 = 4,\ \ b_5 = 6$

Costo exceso → $C_1(x_i - b_i) = 300(x_i - b_i),\ x_i > b_i,\ \ i = 1,2,3,4,5$

Costo Contratación → $C_2(x_i - x_{i-1}) = [400 + 200(x_i - x_{i-1})]$,
$x_i > x_{i-1},\ \ i = 1,2,3,4,5$

2do pasó. Definir la etapa

ETAPA 5 (i=5, $b_5 = 6$) (Se especifica el número de etapa, el número de semana, los trabajadores a requerir en esa semana)

3er pasó. Definir la función recursiva
Función recursiva

$$f_i(x_{i-1}) = min\,\{C_1(x_i - b_i) + C_2(x_i - x_{i-1}) + f_{i+1}(x_i)\}\ \ i = 1,2,\ldots,n$$

$f_5(x_4) = min\,\{C_1(x_5 - b_5) + C_2(x_5 - x_4) + f_6(x_5)\}\ \ f_{n+1}(x_n) = 0$
$f_5(x_4) = min\,\{C_1(x_5 - b_5) + C_2(x_5 - x_4)\}$

Se ha de tener en cuenta que:

- C1= implicara el costo exceso: para este ejemplo será 300$.
- C2= el costo por contratación: para este ejemplo 200$ al cual se le sumara el costo fijo 400$.

4to pasó. Plantear la tabla de resultados, para hallar la solución óptima

Donde se especificara las distintas alternativas en este caso empezara en $x_4 = 4$ Hasta $x_4 = 6$ ya que $x_5 = 6$ y si se sobrepasa este valor estaríamos incurriendo en costos innecesarios

$$\boldsymbol{C_1(x_5 - b_5) + C_2(x_5 - x_4)}$$

Alternativas

Solución optima

Estado

$\boldsymbol{x_4}$	$x_5 = 6$	$f_5(x_4)$	x_5*
4	0+[400+200(2)] = 800	800	6
5	0+[400+200(1)] =600	600	6
6	0+0=0	0	6

<u>Los cálculos se tomaron en cuenta de la siguiente manera</u>
$C_1(x_5 - b_5) + C_2(x_5 - x_4) = 300(x_5 - b_5) + [400 + 200(x_5 - x_4)]$
$C_1(x_5 - b_5) + C_2(x_5 - x_4) = 300(6 - 6) + [400 + 200(6 - 4)]$
$C_1(x_5 - b_5) + C_2(x_5 - x_4) = 0 + [400 + 200(2)] = 800$

5to pasó. Calcular las demás etapas

ETAPA 4 ($i = 4,\ b_4 = 4$)

Función recursiva

$f_4(x_3) = min\,\{C_1(x_4 - b_4) + C_2(x_4 - x_3) + f_5(x_4)\}$

$$\boldsymbol{C_1(x_4 - b_4) + C_2(x_4 - x_3) + f_5(x_4)}$$

$\boldsymbol{x_3}$	$x_4 = 4$	$x_4 = 5$	$x_4 = 6$	$f_4(x_3)$	x_4*
8	0+0+800=800	300(1)+0+600=900	300(2)+0+0=600	600	6

Los cálculos se tomaron de la siguiente manera

1- Si no se genera un costo por contratación $C_2(x_4 - x_3)$ es igual a 0, es decir $x_3 \geq x_4$.
2- Se obtiene el valor de $f_5(x_4)$ de la tabla generada en la iteración anterior.
3- Los estados de la etapa anterior(i=5) se convierten en las alternativas de la etapa siguiente (i=4)

Para $x_4 = 4$
$C_1(x_4 - b_4\ ) + C_2(x_4 - x_3) + f_5(x_4) = C_1(4 - 4\ ) + C_2(4\ - 8) + f_5(4)$
$C_1(x_4 - b_4\ ) + C_2(x_4 - x_3) + f_5(x_4) = 300(0) + 0 + 800 = 800$

ETAPA 3 $(i = 3,\ b_3 = 8\ )$

Función recursiva

$f_3(x_2) = min\ \{C_1(x_3 - \ b_3\ ) + \ C_2(x_3 - \ x_2) + \ f_4(x_3)\}$

$\boldsymbol{x_2}$	$\boldsymbol{C_1(x_3 - \ b_3\ ) + \ C_2(x_3 - \ x_2) + \ f_4(x_3)}$ $x_3 = 8$	$f_3(x_2)$	$x_3\ *$
7	0+[400+200(1)]+600 =1200	1200	8
8	0+0+600=600	600	8

ETAPA 2 $(i = 2,\ b_2 = 7\ )$

Función recursiva

$f_2(x_1) = min\ \{C_1(x_2 - \ b_2\ ) + \ C_2(x_2 - \ x_1) + \ f_3(x_2)\}$

$$C_1(x_2 - \ b_2\ ) + \ C_2(x_2 - \ x_1) + \ f_3(x_2)$$

$\boldsymbol{x_1}$	$\boldsymbol{x_2 = 7}$	$\boldsymbol{x_2 = 8}$	$\boldsymbol{f_2(x_1)}$	$\boldsymbol{x_2\ *}$
5	0+[400+200(2)]+1200 =2000	300(1)+[400+200(3)]+600 =1900	1900	8
6	0+[400+200(1)]+1200 =1800	300(1)+[400+200(2)]+600 =1700	1700	8
7	0+0+1200 =1200	300(1)+[400+200(1)]+600 =1500	1200	7
8	0+0+1200 =1200	300(1)+0+600=900	900	8

ETAPA 1 $(i = 1,\ b_1 = 5\ )$

Función recursiva

$f_1(x_0) = min\ \{C_1(x_1 - \ b_1\ ) + \ C_2(x_1 - \ x_0) + \ f_2(x_1)\}$

$$\boldsymbol{C_1(x_1 - \ b_1\ ) + \ C_2(x_1 - \ x_0) + \ f_2(x_1)}$$

$\boldsymbol{x_0}$	$x_1 = 5$	$x_1 = 6$	$x_1 = 7$	$x_1 = 8$	$f_1(x_0)$	x_1*
0	0+[400+200(5)] +1900= 3300	300(1)+[400+200(6)] +1700= 3600	300(2)+[400+200(7)] +1200= 3600	300(3)+[400+200(8)] +900= 3800	3300	5

6to paso. Plantear la solución óptima

Solución Óptima

Para hallar se va a cada tabla y se obtienen los resultados óptimos de cada etapa correspondientes a la solución de la última etapa estudiada i=1.

$$x_0 = 0 \rightarrow x_1 *= 5 \rightarrow \ x_2 *= 8\ \rightarrow\ x_3 *= 8\ \rightarrow\ x_4 *= 6 \rightarrow x_5 *= 6$$

$f_1(x_0) = \$3300$, con $x_1 = 5,\ x_2 = 8,\ x_3 = 8,\ x_4 = 6,\ x_5 = 6$

Semana (i)	Fuerza de mano de obra mínima(bi)	Fuerza de mano de obra real (xi)	Decisión	Costo
1	5	5	Contratar 5 trabajadores	400 + (200 * 5) = 1400
2	7	8	Contratar 3 trabajadores	400 + (200 * 3) + (1* 300) = 1300
3	8	8	Ningún cambio	0
4	4	6	Despedir 2 trabajadores	300 * 2 = 600
5	6	6	Ningún cambio	0

$\boldsymbol{Semana\ 1} = C_1(x_1 - b_1) + C_2(x_1 - x_0)$
$300(5-5) + [400 + 200(5-0)] = 1400$

$\mathbf{Semana\ 2} = \mathrm{C}_1(\mathrm{x}_2 - \mathrm{b}_2) + \mathrm{C}_2(\mathrm{x}_2 - \mathrm{x}_1)$
$300(8-7) + [400 + 200(8-5)] = 1300$

$\boldsymbol{Semana\ 3} = C_1(x_3 - b_3) + C_2(x_3 - x_2)$
$300(8-8) + [400 + 200(8-8)] = 0$

$\boldsymbol{Semana\ 4} = C_1(x_4 - b_4) + C_2(x_4 - x_3)$
$300(6-4) + [400 + 200(6-8)] = 600$

$\boldsymbol{Semana\ 5} = C_1(x_5 - b_5) + C_2(x_5 - x_4)$

$$300(6-6) + [400 + 200(6-8)] = 0$$
$$1400 + 1300 + 600 = 3300\$$$

Ejercicios:

1. Una agencia de viajes realiza salidas de una semana a Brasil, la agencia ha obtenido un contrato para promocionar 7, 4, 7 y 8 casas a grupos de turistas las siguientes 4 semanas respectivamente, la agencia subcontrata el servicio de alquiler de casas para cubrir sus necesidades de hospedaje, el alquiler es de $220 por casa por semana más una tarifa fija de $500 por cualquier transacción de alquiler sin embargo la agencia de viajes puede optar por no regresar las casa rentadas al término de cada semana en cuyo caso deberá pagar solo $220.¿Cuál es la máxima optima de mantener las casas alquiladas?

$b_1 = 7,\ b_2 = 4,\ b_3 = 7,\ \ b_4 = 8$

Se ha de tener en cuenta que:

- C1= costo exceso: para este ejemplo será 220$.
- C2= costo por contratación: para este ejemplo 220$ por cada casa alquilada, el cual se le sumara una tarifa costo fija 500$.

$C_1(x_i - b_i) = 220(x_i - b_i),\ x_i > b_i,\ \ i = 1,2,3,4$
$C_2(x_i - x_{i-1}) = [500 + 220(x_i - x_{i-1})],\ \ \ x_i > x_{i-1},\ \ i = 1,2,3,4$

$$f_i(x_{i-1}) = min\,\{C_1(x_i - b_i) + C_2(x_i - x_{i-1}) + f_{i+1}(x_i)\}\ \ i = 1,2,\ldots,n$$

<u>ETAPA 4</u> $(i = 4,\ b_4 = 8)$

Función recursiva

$f_4(x_3) = min\,\{C_1(x_4 - b_4) + C_2(x_4 - x_3) + f_5(x_4)\} \qquad f_5(x_4) = 0$

$f_4(x_3) = min\,\{C_1(x_4 - b_4) + C_2(x_4 - x_3)\}$

$$C_1(x_4 - 8) + C_2(x_4 - x_3)$$

x_3	$x_4 = 8$	$f_4(x_3)$	$x_4 *$
7	220(0)+[500+220(1)] = 720	720	8
8	220(0)+0 = 0	0	8

ETAPA 3 $(i = 3,\ b_3 = 7)$

Función recursiva

$$f_3(x_2) = min\{C_1(x_3 - 7) + C_2(x_3 - x_2) + f_4(x_3)\}$$

$$\mathbf{C_1(x_3 - 7) + C_2(x_3 - x_2) + f_4(x_3)}$$

x_2	$x_3 = 7$	$x_3 = 8$	$f_3(x_2)$	$x_3 *$
4	220(0)+[500+220(3)]+720=1880	220(1)+[500+220](4)+0=1600	1600	8
5	220(0)+[500+220(2)]+720=1660	220(1)+[500+220(3)]+0=1380	1380	8
6	220(0)+[500+220(1)]+720=1440	220(1)+[500+220(2)]+0=1160	1160	8
7	220(0)+0+720=720	220(1)+[500+220(1)]+0=940	720	7
8	220(0)+0+720=720	220(1)+0+0=220	220	8

ETAPA 2 $(i = 2,\ b_2 = 4)$

Función recursiva

$$f_2(x_1) = min\{C_1(x_2 - 4) + C_2(x_2 - x_1) + f_3(x_2)\}$$

$$C_1(x_2 - 4) + C_2(x_2 - x_1) + f_3(x_2)$$

x_1	$x_2 = 4$	$x_2 = 5$	$x_2 = 6$	$x_2 = 7$	$x_2 = 8$	$f_2(x_1)$	$x_1 *$
7	220(0)+0+1600 =1600	220(1)+0+1380 =1600	220(2)+0+1160 =1600	220(3)+0+ 720=1380	220(4)+[500+22 0(1)]+220=1820	1380	7
8	220(0)+0+1600 =1600	220(1)+0+1380 =1600	220(2)+0+1160 =1600	220(3)+0+ 720=1380	220(4)+0+220= 1100	1100	8

ETAPA 1 $(i = 1,\ b_1 = 7)$

Función recursiva

$$f_1(x_0) = min\{C_1(x_1 - b_1) + C_2(x_1 - x_0) + f_2(x_1)\}$$

$$C_1(x_1 - 7) + C_2(x_1 - x_0) + f_2(x_1)$$

x_0	$x_1 = 7$	$x_1 = 8$	$f_1(x_0)$	$x_1 *$
0	220(0)+[500+220(7)]+ 1380=3420	220(1)+[500+220(8)]+1100=3580	3420	7

Solución Óptima

$$x_0 = 0 \rightarrow x_1 *= 7 \rightarrow x_2 *= 4 \rightarrow x_3 *= 8 \rightarrow x_4 *= 8$$

$f_1(x_0) = \$3420$, con $x_1 = 7,\ x_2 = 4,\ x_3 = 8,\ x_4 = 8;$

Semana(i)	*Fuerza de mano de obra mínima($\boldsymbol{b_i}$)*	*Fuerza de mano de obra real ($\boldsymbol{x_i}$)*	*Decisión*	*Costo*
1	7	7	Se alquilan 7 casas	500+7*220=2040
2	4	7	Mantener 3 casas por una semana adicional	3*220=660
3	7	7	Ningún cambio	0
4	8	8	Se Aquila 1 casa mas	500+1*220=720

$\boldsymbol{Semana\ 1} = C_1(x_1 - b_1) + C_2(x_1 - x_0)$
$220(7-7) + [500 + 220(7-0)] = 2040$

$\mathbf{Semana\ 2} = \mathrm{C}_1(\mathrm{x}_2 - \mathrm{b}_2) + \mathrm{C}_2(\mathrm{x}_2 - \mathrm{x}_1)$
$220(7-4) + [500 + 220(7-7)] = 660$

$\boldsymbol{Semana\ 3} = C_1(x_3 - b_3) + C_2(x_3 - x_2)$
$220(7-7) + [500 + 220(7-7)] = 0$

$\boldsymbol{Semana\ 4} = C_1(x_4 - b_4) + C_2(x_4 - x_3)$
$220(8-8) + [500 + 220(8-7)] = 720$

2040+660+720=3420$

(Ejercicio extraído del libro investigación de operaciones Handy A. Taha)

1. Luxor Travels organiza viajes de una semana al sur de Egipto obtiene un contrato para proporcionar 7, cuatro, siete y ocho automóviles de alquiler a grupos de turistas durante las próxima 4 semanas, respectivamente. Sub contrata con un agente local de alquiler de automóviles para que cubra sus necesidades. El agente cobra una renta de 220$ por vehículo por semana, más una tarifa de $500 por cualquier transacción de alquiler. Sin embargo Luxor Travels puede optar por no regresar los automóviles rentados al término de una semana, en cuyo caso la empresa solo pagara la renta semanal de $220. ¿Cuál es la mejor manera para Luxor Travels de manejar la situación de la renta?