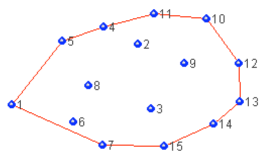
Computación geométrica

Convex hull. Introducción y algoritmos elementales

Índice

- Definición, aplicaciones y propiedades
- Algoritmos triviales
- Gift wrapping
- Quick hull
- Algoritmo de Graham
- Algoritmo incremental

Definición



- Dado un conjunto S de puntos, su convex hull es el polígono convexo más pequeño que incluye a todos los puntos de S

Aplicaciones

- Planificación de movimientos sin colisiones
- Optimización: investigación operativa
- Análisis de forma

Conjunto convexo

- **Un conjunto S es convexo, si, para cualquier se cumple que $x, y \in S$**

$$\overline{xy} \in S$$

Combinación convexa

- **Una combinación convexa de los puntos $x_1, \ldots, x_n$ es el un punto que se expresa como**

$$\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n$$

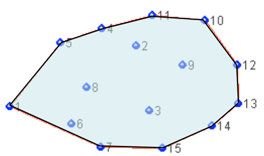
y que cumple la propiedad

$$\alpha_1 + \ldots + \alpha_n = 1$$

El segmento $\overline{xy}$ se puede definir como el conjunto de combinaciones convexas de x e y

Combinación convexa y RC

- **El recubrimiento convexo de $x_1, \ldots, x_n$ es el conjunto de todas sus combinaciones convexas**



Propiedades geométricas

- **El RC de S es la unión de todos los triángulos determinados por puntos de S**
- **El RC de S es la intersección de todos los semiespacios que contienen S**
- **Un punto de S es un vértice del RC si no existe ningún triángulo determinado por puntos de S que lo incluya**

Algoritmo trivial 1

- **Determinación de puntos extremos**

1. Para cada i hacer
2. Para cada j ≠ i hacer
3. Para cada k ≠ i ≠ j hacer
4. Para cada h ≠ i ≠ k ≠ j hacer
5. Si Ph está a la izqda de (Pi,Pj) y
6. Ph está a la izqda de (Pj,Pk) y
7. Ph está a la izqda de (Pk,Pi)
8. entonces Ph no es extremo

- **Complejidad: $O(n^4)$**

Algoritmo trivial 2

- **Determinación de aristas extremas**

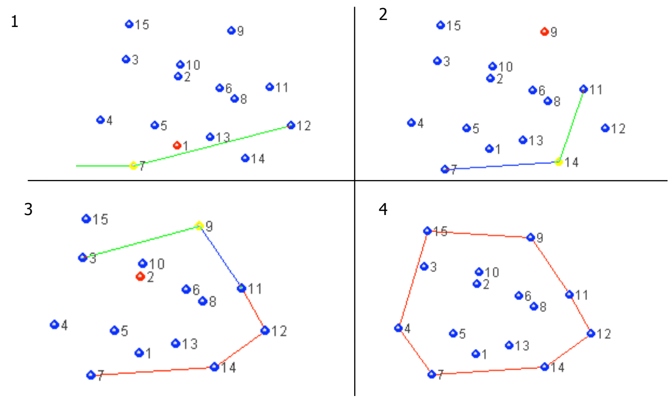
1. Para cada i hacer
2. Para cada j ≠ i hacer
3. Para cada k ≠ i ≠ j hacer
4. Si Pk no está a la izqda de (Pi,Pj)
5. entonces (Pi,Pj) no es extremo

- **Complejidad: $O(n^3)$**

Gift Wrapping

1. Encontrar punto p más pequeño en coord. y, sea i0 su índice
2. i := i0
3. Repetir
4. Para cada j ≠ i hacer
5. Calcular el ángulo en sentido antihorario entre Pj y la arista anterior del RC
6. Sea k el índice del punto con ángulo menor
7. Marcar (Pi,Pk) como una arista del RC
8. i := k
9. Hasta que i = i0

Gift Wrapping (ejemplo)

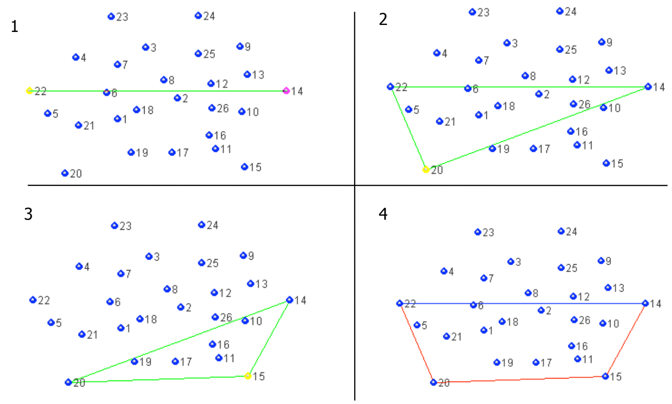


QuickHull

QuickHull(a,b,S)
1. Si S={a,b} entonces devolver (a,b)
2. sino
3. c := índice del punto con máxima distancia a (a,b)
4. A := puntos a la derecha de (a,c)
5. B := puntos a la derecha de (c,b)
6. devolver
   concatenar(QuickHull(a,c,A),QuickHull(c,b,B))

ConvexHull(S)
1. a := punto más a la derecha de S
2. b := punto más a la izquierda de S
3. devolver concatenar(QuickHull(a,b,S),QuickHull(b,a,S))

QuickHull



Complejidad temporal

- **Supongamos**
- **Coste mejor caso** ($|S| = n, |A| = \alpha, |B| = \beta$)

$$\alpha = \beta = n/2$$

$$T(n) = 2T(n/2) + O(n) = O(n \log n)$$

- **Coste peor caso** ($\alpha = n - 1, \beta = 1$)

$$T(n) = T(n-1) + O(n) = T(n-1) + cn =$$
$$= c(n-1) + c(n-2) + \ldots + c = O(n^2)$$