

Criptografia RSA gaussiana

Luis Antonio Coêlho

Trabalho de Conclusão de Curso - apresentado à
Faculdade de Tecnologia da
Universidade Estadual de Campinas

Orientadora: **Profa. Dra. Juliana Bueno**

27 de março de 2017

Resumo

O presente artigo expõe o resultado da pesquisa para TCC sobre o algoritmo de criptografia RSA gaussiano.

Sumário

1	Introdução	2
2	Um passeio pela Teoria de Números	7
2.1	Ciclos e Restos	7
2.2	Números Primos e Compostos	8
2.3	Fatoração	8
3	Operações Modulares	10
3.1	Definição de módulo	10
3.2	Propriedades das congruências	11
4	Inversos Modulares	13
4.1	Inversos modulares	13
4.2	Inexistência e existência de inversos	14
4.3	Um teorema e um corolário	15
5	Teorema chinês do resto	17
5.1	Introdução a técnica	17
5.2	Provas ao teorema	18
5.3	O teorema chinês do resto	20
6	Potenciação	21
6.1	Restos na potenciação	21
6.2	O teorema de Fermat	22
6.3	Aplicando o teorema de Fermat	24
6.4	Teorema de Fermat para potências compostas	24
	Bibliografia	26

Capítulo 1

Introdução

O sigilo sempre foi uma arma explorada pelos seres humanos para vencer certas batalhas, mesmo que na cotidiana missão de se comunicar. Foi a partir dessa necessidade que se criou a *criptografia*, nome dado ao conjunto de técnicas usadas para se comunicar em códigos. Seu objetivo é garantir que apenas os envolvidos na comunicação possam compreender a mensagem codificada (ou criptografada), garantindo que terceiros não saibam o que foi conversado.

Para compreender como funciona o processo de codificação e decodificação faz-se necessário o uso de uma série de termos técnicos, e para fins pedagógicos iremos introduzir tais conceitos apresentando um dos primeiros algoritmos criptográficos que se tem conhecimento, a criptografia de César. Para mais detalhes sobre o tema, veja [Cou07].

A chamada *criptografia de César*, criada pelo imperador romano César Augusto, consistia em substituir cada letra da mensagem por outra que estivesse a três posições a frente, como, por exemplo, a letra A ser substituída pela letra D.

Uma forma muito natural de generalizar o algoritmo de César é fazer a troca de cada letra da mensagem por outra que venha em uma posição qualquer fixada. A chamada *criptografia de substituição monoalfabética* consiste em substituir cada letra por outra

que ocupe n posições a sua frente, sendo que o número n é conhecido apenas pelo emissor e pelo receptor da mensagem. O número n é a *chave criptográfica*. Para decifrar a mensagem, precisamos substituir as letras que formam a mensagem criptografada pelas letras que estão n posições antes.

O algoritmo monoalfabético tem a característica indesejada de ser de fácil decodificação, pois possui apenas 26 chaves possíveis, e isso faz com que no máximo em 26 tentativas o código seja decifrado. Com o intuito de dificultar a quebra do código monoalfabético foram propostas as *cifras de substituição polialfabéticas* em que a chave criptográfica passa a ser uma *palavra* ao invés de um número. A ideia é usar as posições ocupadas pelas letras da chave para determinar o número de posições que devemos avançar para obter a posição da letra encriptada. Vejamos, por meio de um exemplo, como funciona esse sistema criptográfico.

Sejam “SENHA” a nossa chave criptográfica e “ABOBORA” a mensagem a ser encriptada. Abaixo colocamos as letras do alfabeto com suas respectivas posições. Observe que repetimos a primeira linha de letras para facilitar a localização da posição da letra encriptada e usamos a barra para indicar que estamos no segundo ciclo.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
N	O	P	Q	R	S	T	U	V	X	Y	W	Z
27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
\overline{A}	\overline{B}	\overline{C}	\overline{D}	\overline{E}	\overline{F}	\overline{G}	\overline{H}	\overline{I}	\overline{J}	\overline{K}	\overline{L}	\overline{M}

Vejamos como encriptar a palavra “ABOBORA”. Iniciamos o processo escrevendo a mensagem. Ao lado de cada letra da mensagem aparece entre parênteses o número que indica a sua posição. Abaixo da mensagem escrevemos as letras da chave criptográfica, repetindo-as de forma cíclica quando necessário. Analogamente, ao lado de cada letra da chave aparece entre parênteses o número da posição ocupada de cada letra, e o sinal de soma indica que

devemos avançar aquele número de posições. Ao final do processo aparecem as letras encriptadas. Entre parênteses está a posição resultante da combinação das posições da mensagem e da chave.

$A(1)$	$B(2)$	$O(15)$	$B(2)$	$O(15)$	$R(18)$	$A(1)$	Mensagem Chave Mensagem encriptada
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	
$S(+19)$	$E(+5)$	$N(+14)$	$H(+8)$	$A(+1)$	$S(+19)$	$E(+5)$	
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	
$T(20)$	$G(7)$	$C(29)$	$J(10)$	$P(16)$	$K(37)$	$F(6)$	

Observe que a encriptação polialfabética é mais difícil de ser quebrada que a monoalfabética uma vez que letras iguais não têm, necessariamente, a mesma encriptação. Observe que neste tipo de criptografia o emissor precisa passar a chave para o receptor da mensagem de forma segura para que o receptor possa decifrar a mensagem, isto é, a chave usada para encriptar a mensagem é a mesma que deve ser usada para decifrar a mensagem. Veremos que esse é justamente o ponto fraco nesse tipo de encriptação pois usa a chamada *chave simétrica*, ou seja, a chave usada pelo emissor para codificar a mensagem é a mesma usada pelo receptor para decodificar a mensagem. Nesse processo, a chave deve ser mantida em segredo e bem guardada para garantir que o código não seja quebrado e isso requer algum tipo de contato físico entre emissor e receptor da mensagem.

Durante a Primeira Guerra Mundial o contato físico para a troca de chaves era complicado, e isso estimulou a criação de máquinas automáticas de criptografia. O *Enigma* foi uma dessas máquinas e era utilizada pelos alemães tanto para criptografar como para descriptografar códigos de guerra. Semelhante a uma máquina de escrever, os primeiros modelos foram patenteados por Arthur Scherbius em 1918. Essas máquinas ganharam popularidade entre as forças militares alemães devido a facilidade de uso e sua suposta indecifrábilidade do código.

O matemático Alan Turing foi o responsável por quebrar o código dos alemães durante a Segunda Guerra Mundial. A descoberta de Turing mostrou a fragilidade da criptografia baseada em chave simétrica e colocou novos desafios à criptografia. O

grande problema passou a ser a questão dos protocolos, isto é, como transmitir a chave para o receptor de forma segura sem que seja necessário o contato físico entre as partes?

Em 1949, com a publicação do artigo *Communication Theory of Secrecy Systems* [Sha49] de Shannon, temos a inauguração da criptografia moderna. Neste artigo ele escreve matematicamente que cifras teoricamente inquebráveis são semelhantes as cifras polialfabéticas. Com isso ele transformou a criptografia que até então era uma arte em uma ciência.

Em 1976 Diffie e Hellman publicaram *New Directions in Cryptography* [DH76]. Neste artigo há a introdução ao conceito de *chave assimétrica*, onde há chaves diferentes entre o emissor da mensagem e seu receptor. Com a assimetria de chaves não era mais necessário um contato tão próximo entre emissor e receptor. Neste mesmo artigo é apresentado o primeiro algoritmo de criptografia de chave assimétrica ou como é mais conhecido nos dias atuais *Algoritmo de Criptografia de Chave Pública*, o protocolo de Diffie-Hellman.

Um dos algoritmos mais famosos da criptografia de chave pública é o *RSA*(RIVEST et al, 1983) [RSA78], algoritmo desenvolvido por Rivest, Shamir e Adleman. Este algoritmo se tornou popular por estar presente em muitas aplicações de alta segurança, como bancos, sistemas militares e servidores de internet.

Para que se possa compreender por completo o algoritmo faz-se necessário possuir alguns conhecimentos em Teoria de números como fatoração e aritmética modular. Estes conhecimentos serão apresentados mais frente neste trabalho.

No algoritmo RSA existe uma chave pública n , que é a multiplicação dos primos p e q . O emissor E codifica a mensagem usando um número primo p . Em seguida E envia publicamente a mensagem codificada junto com a chave n para o receptor R. R possui o número q , que juntamente ao número n servem para decodificar a mensagem.

Embora a quebra do RSA seja aparentemente simples, bastando fatorar n para descobrir seus fatores. Porém a dificuldade neste caso não é matemática e sim computacional, pois usa-se como p e q números primos muito altos, próximos a 2^{512} . Com um número tão alto um computador comum levaria bem mais que uma vida humana para decifrar a mensagem.

Com base nestes conhecimentos sobre criptografia, temos que o objetivo deste trabalho é analisar a viabilidade de uma criptografia inspirada pelo algoritmo RSA clássico, a qual substitui os números primos pelo conjunto denominado de *primos de Gauss*, resultando, assim, no que chamamos por *criptografia RSA gaussiana*. Para que tal algoritmo seja viável é necessário adaptar uma série de resultados relativos aos números primos aos números primos de Gauss. Dessa forma, nossa tarefa será adaptar tanto quanto o possível os primos de Gauss às demonstrações desses teoremas.

Como se trata de uma proposta inovadora, deixamos para trabalhos futuros uma análise comparativa entre as criptografias RSA clássica e a RSA gaussiana.

Capítulo 2

Um passeio pela Teoria de Números

A Teoria de números é umas das mais antigas áreas dentro da matemática, ela é voltada ao estudo das propriedades dos números inteiros. Ao longo deste capítulo nós iremos passear pelas áreas da teoria de números que cuidam sobre os números primos e a fatoração, ue são os alicerces da criptografia RSA.

2.1 Ciclos e Restos

Para podermos compreender a aritmética modular, precisamos começar entendendo o conceito de ciclicidade, que são os fatos que ocorrem sempre após um determinado período constante. Um bom exemplo deste conceito é o nascer do sol, que é um evento que ocorre sempre após um ciclo de 24 horas, assim como o dia de seu aniversário ocorre uma vez a cada ciclo de um ano.

O mesmo tipo de evento é observado com o resto dos números inteiros. Tomemos por exemplo os restos de divisão dos números inteiros, abaixo mostrados de 1 à 12, pelo número inteiro 4:

<i>Inteiro</i>	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
<i>Resto</i>	1	2	3	0	1	2	3	0	1	2	3	0

É visível que após 4 números o resto tende a se repetir. O mesmo feito ocorre a qualquer número inteiro n , onde o ciclo se

repetirá sempre a cada n iterações. Os números que apresentam o resto 0 são conhecidos como múltiplos de n .

2.2 Números Primos e Compostos

Existe um tipo especial de número que só é múltiplo, ou seja, possui resto 0, em duas condições, quando n é igual a 1 ou quando ele é igual a n . A esse conjunto de números atribui-se o nome de *números primos*.

Existem infinitos números primos, caso não acredite vamos supor que o conjunto finito de primos seja composto por p_1, p_2, \dots, p_r . Considerando que o número inteiro $n = (p_1)(p_2)\dots(p_r) + 1$. n deve possuir um fator p , que está contido em p_1, p_2, \dots, p_r , mas isso significa q p divide 1, o que é absurdo e prova que o conjunto não tem fim.

Todo o número que não é primo é chamado de *Número Composto*, sendo que este número composto pode ser escrito em *uma combinação única de fatores primos*. O processo de se descobrir estes fatores é chamado de *fatoração* e é detalhado na próxima seção.

2.3 Fatoração

Anteriormente falamos que todo o número pode ser escrito por uma combinação de fatores primos, neste capítulo vamos abordar como se pode obter estes fatores.

Começamos por escolher o número inteiro n ao qual iremos fatorar, em seguida testamos a sua divisibilidade por 2, se for tente dividi-lo novamente por 2, senão passa-se para o próximo número primo, o 3. Repete-se esse procedimento até chegarmos a \sqrt{n} , caso não achemos nenhum fator primo até \sqrt{n} , n é primo.

Quando acabamos de realizar a fatoração, chegamos a um número fatorado da forma $n = (2^{a_1})(3^{a_2})\dots(p^{a_p})$, todo o número inteiro pode ser escrito nessa forma, chamada forma fatorada, veja, por exemplo o $12 = (2^2)(3^1)$ e o $19 = (19^1)$.

Essa forma fatorada nos é formalmente apresentada pelo *Teorema da Fatoração Única*. Ele nos diz que dado um número inteiro $n \geq 2$ pode-se escrevê-lo de forma única como:

$$n = (p_1^{e_1}) \dots (p_k^{e_k})$$

onde $1 < p_1 < \dots < p_k$ são primos e e_1, \dots, e_k são inteiros.

Mesmo algoritmo da fatoração sendo tão simples de se compreender, ele é demorado até para os mais modernos computadores. Para se ter uma ideia disto, um computador comum executa cerca de 50 divisões por segundo, para se calcular com certeza que um número próximo a 10^{100} é primo ele levaria cerca de 317 decilhões de anos. Essa demora computacional que torna os primos tão atraentes a criptografia, pois sua multiplicação é fácil para se obter o resultado, mas muito complexa para que se descubram quais os números envolvidos nela apenas com o resultado final.

Capítulo 3

Operações Modulares

Já lhe foi apresentado anteriormente o conceito da ciclicidade para a definição de restos, neste capítulo iremos nos aprofundar mais sobre esse conceito, estudando as propriedades necessárias da aritmética modular para a elaboração da criptografia RSA.

3.1 Definição de módulo

Um dos conceitos mais importantes da aritmética modular é o de congruência, representado pelo símbolo \equiv . Talvez o exemplo mais comum de congruência em nossas vidas sejam os dias da semana, embora o número do dia venha a variar ao longo do mês, sempre após 7 dias voltará a ser domingo, por exemplo, logo a semana é uma congruência de módulo 7.

Para exemplificar vamos supor que primeiro domingo deste mês foi dia 4, e o último será dia 25, logo temos que

$$4 \equiv 25(mod 7)$$

Fique claro que o que tornou 25 congruente a 4 no módulo 7 não foi o fato de caírem no mesmo dia, isso é apenas um consequência, o que os torna congruentes é o fato de que divididos pelo módulo, no caso 7, eles apresentam o mesmo resto. Esse fato não se repete, por exemplo, se o módulo for 5, neste caso $4 \equiv 4(mod 5)$ e $25 \equiv 0(mod 5)$.

3.2 Propiedades das congruências

Assim como as igualdades e desigualdades, as congruências também possuem uma listagem de propriedades em suas operações. Ao longo desta seção lhe serão demonstradas essas propriedades. Fique atento pois as propriedades das congruências nos facilitarão a compreensão de alguns conceitos importantes do algoritmo RSA mais a frente.

A primeira propriedade das congruências, e a mais simples dela, é a *reflexiva*, onde se diz que um número sempre é congruente a si mesmo. Para termos certeza vamos tomar um número qualquer a , sendo $a \equiv a(modn)$, é equivalente dizermos que $a - a \equiv 0(modn)$. Por 0 ser múltiplo de qualquer número podemos confirmar que $a \equiv a(modn)$.

A propriedade *simétrica* nos diz que se $a \equiv b(modn)$, $b \equiv a(modn)$. A afirmação anterior pode ser escrito como se $a - b$ é múltiplo de n , mas para isso deve ocorrer algum número k que equivala à:

$$a - b = k \cdot n$$

Caso multipliquemos esta equação por -1 , vamos obter:

$$b - a = (-k) \cdot n$$

Que nos prova que $b - a$ é múltiplo de n , logo $b \equiv a(modn)$.

A terceira propriedade das congruências é a *transitiva*, onde se diz que se $a \equiv b(modn)$ e $b \equiv c(modn)$, $a \equiv c(modn)$. Para prová-la vamos observar as equações

$$a - b = k \cdot n \quad e \quad b - c = l \cdot m$$

Sabendo que k e l são inteiros escolhidas de forma adequada as equações, podemos somar as equações, resultando em:

$$(a - b) + (b - c) = k \cdot n + l \cdot m$$

Que pode ser simplificada em:

$$a - c = (k + l) \cdot m$$

Essa equação equivale em valor a $a \equiv c(mod n)$, logo a propriedade transitiva é válida.

Capítulo 4

Inversos Modulares

Nosso objetivo com o decorrer deste capítulo é o de explicar a operação matemática mais importante para o algoritmo RSA. Para podermos compreendê-la vamos relembrar do conceito ensinado no colégio de inverso multiplicativo, que consiste em obter o número que multiplicado a um número n qualquer resulte em 1. Juntos, nós iremos ver que na operação do inverso modular se segue do mesmo princípio.

4.1 Inversos modulares

Para iniciarmos este capítulo, vamos supor que queremos obter o inverso modular de 6 para o módulo 7, o que nós teremos que fazer então é encontrar qual o número que multiplicado por 6 tem resto 1 quando dividido por 7. Começamos pelo 1, teremos que $6 \cdot 1 = 6$, $6 \equiv 6(mod7)$. Com 2 o resultado será 12, logo $12 \equiv 5(mod7)$, que para nós também não serve. Tentando o 3 obtemos 4 e com 4 obtemos 3. Com o 5 nosso retorno será 2. Finalmente quando chegamos ao 6 nós temos que $6 \cdot 6 = 36$, $36 \equiv 1(mod7)$. Com isso podemos concluir que o inverso multiplicativo de 6 no módulo 7 é o próprio 6.

Para simplificar o que foi dito acima, podemos dizer a operação de inverso multiplicativo no módulo n para a consiste em encontrar um número a' tal que:

$$a \cdot a' \equiv 1(modn)$$

4.2 Inexistência e existência de inversos

Antes de começarmos vamos tentar calcular o inverso multiplicativo de 2 no módulo 8, vamos lá:

$$\begin{aligned}2 \cdot 0 &\equiv 0 \not\equiv 1(\text{mod}8) \\2 \cdot 1 &\equiv 2 \not\equiv 1(\text{mod}8) \\2 \cdot 2 &\equiv 4 \not\equiv 1(\text{mod}8) \\2 \cdot 3 &\equiv 6 \not\equiv 1(\text{mod}8) \\2 \cdot 4 &\equiv 8 \equiv 0 \not\equiv 1(\text{mod}8) \\2 \cdot 5 &\equiv 10 \equiv 2 \not\equiv 1(\text{mod}8) \\2 \cdot 6 &\equiv 12 \equiv 4 \not\equiv 1(\text{mod}8) \\2 \cdot 7 &\equiv 14 \equiv 6 \not\equiv 1(\text{mod}8)\end{aligned}$$

Não encontramos nenhuma resposta pois, simplesmente, não há. Antes que se pergunte o motivo de não tentarmos com números maiores que 7, é válido lembrar que a partir do 8 teríamos a repetição de resultados por conta das congruências.

A operação de inverso multiplicativo só possui resultado em casos onde o número a ao qual queremos calcular o inverso e o módulo são *primos entre si*, ou seja, não possuam nenhum fator em comum. Por conta disso usamos os números primos no algoritmo RSA.

Para comprovar o que foi dito acima, vamos tomar um número a , tal que

$$a \cdot a' \equiv 1(\text{mod}n)$$

isso pode ser traduzido em linguagem humana como n divide $a \cdot a' - 1$. Isso em linguagem matemática pode ser escrito como:

$$a \cdot a' - 1 = n \cdot k$$

como estamos atrás de saber se a e n não possuem fator comum, então há de haver um k inteiro para a equação acima. Nosso primeiro passo para provar isso será de se criar o conjunto $V(a, n)$, esse conjunto é formado por inteiros positivos e pode ser escrito como

$$x \cdot a + y \cdot n$$

Em um primeiro momento este conjunto e esta nova fórmula podem parecer estranhos ao que se via antes, mas se comprovarmos que $1 \in V(a, n)$, concluímos que devem haver dois inteiros x_0 e y_0 , ou se preferir a' e k , logo:

$$1 = a \cdot a' - n \cdot k$$

Uma das propriedades deste conjunto é a de n pertencer a ele quando $x = a' = 0$ e $y = k = 1$. Isto significa que os inteiros que podem completar a equação estão entre m e n . Mas para podermos dar essa demonstração como completa, precisamos provar que $m = 1$. Como a e n são primos entre si, basta mostrar que m divide ambos. Vamos começar assumindo que $m \in V(a, m)$, logo devem existir x_1 e y_1 tais que:

$$m = x_1 \cdot a + y_1 \cdot n$$

Caso venhamos a dividir n por m , obtemos:

$$n = m \cdot q + r = (x_1 \cdot a + y_1 \cdot n) \cdot q + r \text{ e } 0 \leq r < m$$

Que pode ser organizada como:

$$r = (-x_1) \cdot a + (1 - y_1) \cdot n$$

Com isso podemos concluir que $r \in V(a, n)$, como r é o resto da divisão de n por m , de modo que $r = 0$ ou $r \neq 0$. $r \neq 0$ é absurdo por conta de $r < m$, com m divisor de n , por m ser o menor elemento de $V(a, n)$. Logo só nos resta conferir se $r = 0$, o que prova que m divide n . Pode se provar de forma semelhante que m divide a .

4.3 Um teorema e um corolário

Com base em tudo que já foi lido e provado anteriormente neste capítulo podemos concluir o seguinte teorema:

Sejam $a < n$ inteiros positivos. O resíduo a em inverso no módulo n se, e somente se, a e n não possuem fatores primos em comum.

Esta informação nos será muito útil mais a frente. Outra coisa muito importante para nosso prosseguimento é o seguinte corolário:

Sejam $a < n$ inteiros positivos sem fatores comuns, se :

$$a \cdot b \equiv a \cdot c \pmod{n}$$

então:

$$b \equiv c \pmod{n}$$

Nos capítulos seguintes poderemos ver como iremos aplicar estas propriedades, que nos serão muito úteis para agilizar nossos cálculos.

Capítulo 5

Teorema chinês do resto

O teorema chinês do resto tem como principal objetivo resolver congruências que a primeira vista parecem não possuir solução. Ao longo deste e do próximo capítulo iremos ver como ele pode vir a facilitar operações, ao ponto de tornar coisas que pareciam impossíveis possíveis.

5.1 Introdução a técnica

Para sermos iniciados nesta técnica, vamos analisar o seguinte problema: Qual o menor inteiro que possui resto 1 na divisão por 3 e resto 2 na divisão por 5. Podemos vir a transformar esse problema nas seguintes equações:

$$n = 3q_1 + 1 \text{ e } n = 5q_2 + 2$$

Essas equações também podem ser denotadas em forma modular como:

$$n \equiv 1(mod3) \text{ e } n \equiv 2(mod5)$$

Essa saída modular nos deixou com apenas uma variável, mas ainda não resolveu ao nosso problema. Para fazermos isso vamos substituir n por $5q_2 + 2$, montando a seguinte equação modular:

$$5q_2 + 2 \equiv 1(mod3)$$

Como $5 \equiv 2(mod3)$, substituímos:

$$2q_2 + 2 \equiv 1(mod3)$$

Feito isso, passamos 2 para o outro lado da equação

$$2q_2 \equiv -1(mod3)$$

Como $-1 \equiv 2(mod3)$, nós substituímos novamente, e depois dividimos a equação por 2, e obtemos

$$q_2 \equiv 1(mod3)$$

Com isso, concluimos que

$$q_2 \equiv q_3 + 1(mod3)$$

Sei que parece que mais uma equação só serve para tornar a resolução mais complexa, mas vamos a reorganizar como

$$q_2 = 3q_3 + 1$$

Agora substituímos

$$n = 5(3q_3 + 1) + 2 = 15q_3 + 7$$

Feito isso, vamos por o 3 em evidência em todos os lugares, obtendo:

$$n = 3(5q_3) + 3(2) + 1 = 3(5q_3 + 2) + 1$$

Este procedimento foi feito apenas para provar que a equação deixa resto 1 se dividida por 3, de forma análoga, abaixo é mostrado como ela deixa resto 2 quando dividida por 5.

$$n = 5(3q_3) + 5(1) + 2 = 5(3q_3 + 1) + 2$$

Após tudo isso feito ainda não possuímos a solução final, mas já sabemos que é um número da forma $15q_3 + 7$, substituindo q_3 por 0, iremos obter 7, que é o resultado procurado.

5.2 Provas ao teorema

O teorema chinês do resto é um procedimento tomado para resolver sistema de congruências, como o descrito acima. Ele foi descrito pela primeira vez pelo Manual de aritmética do mestre Sun, por volta do século III d.C.

Para ver a definição formal desse teorema, vamos considerar o sistema

$$\begin{aligned}x &\equiv a(\text{mod } n) \\ x &\equiv b(\text{mod } m)\end{aligned}$$

nele, n e m são inteiros diferentes entre si. Tomemos x_0 como um número cappaz de satisfazer ambas as congruência de forma simultânea e teremos:

$$\begin{aligned}x_0 &\equiv a(\text{mod } m) \\ x_0 &\equiv b(\text{mod } n)\end{aligned}$$

Para podermos juntar ambas as equações converteremos uma em equação, nesse caso teremos

$$x_0 = a + m \cdot k, \text{ com } k \text{ sendo um inteiro qualquer}$$

Feito isso, chegaremos em

$$a + m \cdot k \equiv b(\text{mod } n)$$

que pode ser substituída por

$$m \cdot k \equiv (b - a)(\text{mod } n)$$

Agora vamos supor que m e n são primos entre si. Pelo teorema apresentado no capítulo sobre inversos multiplicativos nós já sabemos que eles possuem inverso multiplicativo um para o outro. Tomemos m' como o inverso de m no módulo n . Multiplicando toda a congruência por m' obtemos

$$k \equiv m' \cdot (b - a)(\text{mod } n)$$

que pode ser escrita como:

$$k \equiv m' \cdot (b - a) + n \cdot t, \text{ para um inteiro } t \text{ qualquer}$$

Substituindo a parte de k , nós obtemos

$$x_0 \equiv a + m(m' \cdot (b - a) + n \cdot t)$$

Podemos ver agora que para qualquer t , $a + m(m' \cdot (b - a) + n \cdot t)$ é parte da solução da congruência, sabendo disso, agora podemos descrever o teorema em si, que será feito na próxima seção.

5.3 O teorema chinês do resto

Teorema chinês do resto - Sejam m e n inteiros positivos primos entre si. Se a e b são inteiros quaisquer, então o sistema

$$\begin{aligned}x &\equiv a \pmod{m} \\ x &\equiv b \pmod{n}\end{aligned}$$

sempre tem solução e qualquer uma de suas soluções pode ser escrita na forma

$$a + m \cdot (m' \cdot (b - a) + n \cdot t)$$

onde t é um inteiro qualquer e m' é o inverso de m no módulo n .

Capítulo 6

Potenciação

Ao longo deste capítulo vamos estudar como tornar as operações de potenciação e a obtenção de seus restos calculáveis de forma simples e rápida. Para isso vamos dispor de algumas artimanhas matemáticas, como o famoso *Teorema de Fermat* e o Teorema chinês do resto.

6.1 Restos na potenciação

Vamos começar tentando uma coisa que aparentemente é complexa, mas se converterá em uma operação bem simples: Calcular o resto da divisão de 10^{135} por 7. Podemos fazer da forma tradicional, mas dividir um número tão alto não seria nada prático.

O que faremos é tomar uma propriedade da multiplicação e da potenciação emprestadas, a do elemento neutro, nesse caso o 1. O que faremos é calcular em qual potência 10 é congruente a 1 no módulo 7. Logo teremos a tabela:

$$\begin{aligned}10^1 &\equiv 3(mod7) \\10^2 &\equiv 2(mod7) \\10^3 &\equiv 6(mod7) \\10^4 &\equiv 4(mod7) \\10^5 &\equiv 5(mod7) \\10^6 &\equiv 1(mod7)\end{aligned}$$

Como sabemos agora que 10^6 é o número que queríamos, vamos decompor o 135 em razão de 6 e teremos que $135 = (6 \cdot 22) + 3$, essa expressão nos levará a seguinte congruência:

$$10^{135} \equiv (10^6)^{22} \cdot 10^3 \equiv (1)^{22} \cdot 10^3 \equiv 10^3 \equiv 6(\text{mod}7)$$

Agora nós vamos deixar essa operação um pouco mais complexa, ao passo que vamos calcular o resto por 31 de 2^{124512} . Vamos pelo mesmo caminho que anteriormente, buscando a potência de 2 que é congruente a 1 no módulo 31. Obtemos:

$$\begin{aligned} 2^1 &\equiv 2(\text{mod}31) \\ 2^2 &\equiv 4(\text{mod}31) \\ 2^3 &\equiv 8(\text{mod}31) \\ 2^4 &\equiv 16(\text{mod}31) \\ 2^5 &\equiv 1(\text{mod}31) \end{aligned}$$

Vamos dividir 124512 por 5 e obteremos 4016 com resto 2, obtendo assim que $2^{124512} \equiv 2^2 \equiv 4(\text{mod}31)$.

Tornando um pouco mais difícil, podemos calcular o resto de $2^{1398765}$, é descobrir o resto de 13^{98765} por 5, podemos dizer que $13^{98765} \equiv 3^{98765}(\text{mod}5)$ como se sabe que $3^4 = 81 \equiv 1(\text{mod}5)$, podemos usar isso em nosso favor, pois teremos $3^{98765} \equiv 3^{4 \cdot 24691 + 1} \equiv 3(\text{mod}5)$, logo o resultado de 13^{98765} é um número da forma $5q' + 3$.

Como isso, nós podemos dizer que $2^{1398765} \equiv 2^{5q'+3} \equiv 2^{5q'} \cdot 2^3 \equiv 1^{q'} \cdot 2^3 \equiv 8(\text{mod}31)$.

6.2 O teorema de Fermat

Teorema de Fermat - Se p é um número primo e a é um inteiro não divisível por p , então:

$$a^{p-1} \equiv 1(\text{mod}p)$$

Embora esse seja denominado como o pequeno teorema de Fermat, ele possui suma importância para o algoritmo RSA clássico. Vamos apresentar abaixo uma de suas demonstrações.

Sabemos que os possíveis resíduos no módulo p são todos os inteiros entre 1 e $p-1$. Vamos multiplicá-los por a , obtendo assim:

$$a \cdot 1, a \cdot 2, a \cdot 3, \dots, a \cdot (p-1)$$

Vamos levar em conta que $r_1 \equiv a \cdot 1 \pmod{p}$, $r_2 \equiv a \cdot 2 \pmod{p}$, e assim por diante até $r_{p-1} \equiv a \cdot (p-1) \pmod{p}$. Tomemos par r_k e r_l um par de inteiros k e l que está entre 1 e $p-1$. Com isso teremos:

$$a \cdot k \equiv k \equiv l \equiv a \cdot l \pmod{p}$$

que equivale à:

$$a \cdot k \equiv a \cdot l \pmod{p}$$

Se viermos a cancelar pela equivalência, obteremos que $k \equiv l \pmod{p}$, mas sendo k e l positivos, inteiros e menores que p , estes só podem ser congruentes se forem iguais, logo se:

$$r_k = r_l \text{ então } k = l$$

Isto demonstra que $r_1, r_2, r_3, \dots, r_{p-1}$ são $p-1$ resíduos não nulos de módulo p , que serão $1, 2, 3, \dots, p-1$, o que nos permite dizer que a primeira sequência não é nada além de um reordenamento da segunda. Com isso podemos dizer que:

$$r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 \cdot \dots \cdot r_{p-1} = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot p-1$$

Sabendo disso vemos que:

$$a^{p-1}(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot p-1) \equiv (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot p-1) \pmod{p}$$

E apenas cortando os fatores iguais:

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$$

Provando assim o Teorema de Fermat.

6.3 Aplicando o teorema de Fermat

Antes de prosseguirmos para o próximo capítulo, vamos utilizar o Teorema de Fermat para resolver uma congruência. Neste caso vamos tentar descobrir quem é congruente a 3^{10342} no módulo 1033. Como 1033 é primo nós podemos usar o teorema de Fermat. Neste caso teremos que:

$$3^{1032} \equiv 1 \pmod{1033}$$

O que faremos agora consiste em “dividir” 1034 por 1032, de forma a obter o resto da divisão. e com isso vamos verificar que:

$$1034 \equiv 2 \pmod{1033}$$

e com essa simplificação chegamos à:

$$3^{1034} \equiv 3^{1032} \cdot 3^2 \equiv (3^{1032})^1 + 3^2 \pmod{1033}$$

Agora com a simples aplicação do Teorema de Fermat, podemos chegar a conclusão que:

$$3^{1034} \equiv 1 \cdot 9 \pmod{1033}$$

verificando assim que 3^{1034} deixa resto 9 na divisão por 1033.

6.4 Teorema de Fermat para potências compostas

Embora aplicar o teorema de Fermat diretamente sobre os números compostos não seja possível, nós ainda podemos resolver a estas congruências com o auxílio do teorema chinês d restos, como veremos a seguir.

Para que possamos entender como resolver este problema com números compostos vamos tentar resolver um problema numérico, nesse caso o cálculo do módulo de 2^{6754} por 1155.

Nosso primeiro passo é fatorar o 1155. Ao fim da fatoração vamos obter que $1155 = 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$. Em seguida vamos aplicar o teorema de Fermat a cada um dos primos, obtendo assim:

$$\begin{aligned}2^2 &\equiv 1(mod3) \\2^4 &\equiv 1(mod5) \\2^6 &\equiv 1(mod7) \\2^{10} &\equiv 1(mod11)\end{aligned}$$

Agora dividimos 6754 por $p - 1$ para cada um dos múltiplos:

$$\begin{aligned}6754 &= 2 \cdot 3377 \\6754 &= 4 \cdot 1688 + 2 \\6754 &= 6 \cdot 1125 + 4 \\6754 &= 10 \cdot 675 + 4\end{aligned}$$

Em seguida substituímos nas congruências e as reduzimos

$$\begin{aligned}2^{6754} &\equiv 2^{3377^2} \equiv 1(mod3) \\2^{6754} &\equiv 2^{1688^4} \cdot 2^2 \equiv 1 \cdot 4 \equiv 4(mod5) \\2^{6754} &\equiv 2^{1125^6} \cdot 2^4 \equiv 1 \cdot 16 \equiv 2(mod7) \\2^{6754} &\equiv 2^{675^{10}} \cdot 2^4 \equiv 1 \cdot 16 \equiv 5(mod11).\end{aligned}$$

Logo, nossa tarefa consiste em resolver o sistema

$$\begin{aligned}x &\equiv 1(mod3) \\x &\equiv 4(mod5) \\x &\equiv 2(mod7) \\x &\equiv 5(mod11)\end{aligned}$$

Podemos resolver esse sistema usando o algoritmo chinês, vamos começar substituindo na primeira congruência, onde $x = 3y + 1$, em seguida substituímos x por y na segunda congruência, tornando-a $3y + 1 \equiv 4(mod5)$, que equivale a $y \equiv 1(mod5)$ como 3 é inversível no módulo 5 ele pode ser anulado na equação. Com isso temos $x = 4 + 15z$ que se substituímos na terceira equação e resolvendo obtemos $z \equiv 5(mod7)$, que significa que $x = 79 + 105t$. Finalmente substituindo na última equação, teremos que $t \equiv 6(mod11)$, o que resulta em $x = 709 + 1155u$. Concluimos com isso que $26754 \equiv 709(mod1155)$.

Referências Bibliográficas

- [Cou07] Coutinho, Severino Collier: Criptografia. Rio de Janeiro, IMPA/SBM, Programa de Iniciação Científica da OBMEP, 2007.
- [DH76] Diffie, Whitfield e Martin Hellman: New directions in cryptography. IEEE transactions on Information Theory, 22(6):644–654, 1976.
- [Gau15] Gauss, Carl Friedrich: Methodus nova integralium valores per approximationem inveniendi. apvd Henricvm Dieterich, 1815.
- [mil] Millennium Problems — Clay Mathematics Institute. <http://www.claymath.org/millennium-problems>. Acessado em 15/11/2016.
- [Rie59] Riemann, Bernhard: Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grosse. Ges. Math. Werke und Wissenschaftlicher Nachlas, 2:145–155, 1859.
- [RSA78] Rivest, Ronald L, Adi Shamir e Leonard Adleman: A method for obtaining digital signatures and public-key cryptosystems. Communications of the ACM, 21(2):120–126, 1978.
- [SF09] Sinkov, Abraham e Todd Feil: Elementary cryptanalysis, volume 22. MAA, 2009.
- [Sha49] Shannon, Claude E: Communication theory of secrecy systems. Bell system technical journal, 28(4):656–715, 1949.