Instituto Federal de Educação Ciência e Tecnologia de São Paulo
Curso de Graduação em Engenharia Eletrônica

Método de Quine e McCluskey

RELATÓRIO DA DISCIPLINA LABORATÓRIO DE ELETRÔNICA 1 COM O PROF. GILBERTO CUARELLI E O PROF. HAROLDO GUIBU.

Gustavo Senzaki Lucente SP303724X
Luís Otávio Lopes Amorim SP3034178

SÃO PAULO

2020

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

1 INTRODUÇÃO TEÓRICA

O método de Quine McCluskey, assim como o método dos mapas de Veich-Karnaugh, é um método de simplificação de expressões booleanas. Ainda assim ele é muito utilizado por ter algumas vantagens em relação ao método dos mapas. Dentre essas vantegens está a simplicidade, principalmente para poucas variáveis e a garantia de obter a melhor simplificação possível (MORENO, 2018).

O algoritmo utiliza de alguns termos sendo o primeiro deles a definição de implicantes primos, termos produtos obtidos a partir de um mapa de Karnaugh ao considerar o maior número de células encostadas (KASTENSMIDT, 2008). Por exemplo a função $f(x, y, z) = x + \bar{x}yz + xz$ possuí três implicantes primos, sendo que cada parcela da adição é um deles. Por outro lado implicantes primos essenciais são aqueles que cobrem uma saída da função que nenhum outro pode cobrir. No exemplo fornecido, x é um implicante primo essencial, pois é o único que retorna nível lógico 1 para entradas $x = 1$, $y = 0$, $z = 0$.

O processo de simplificação ocorre em duas etapas distintas. A primeira delas é encontrar todos os implicantes primos da expressão e, em seguida, montar uma tabela de implicantes primos para encontrar os implicantes primos essenciais que comporão a função minimizada.

1.1 Objetivos

Entender e utilizar o método de Quine e McCluskey para simplificação de circuitos lógicos combinacionais e expressões booleanas, compreender as vantagens e desvantagens desse método em relação ao método dos mapas de Karnaugh para saber qual método é ideal para cada situação.

1.2 Materiais e Equipamentos Utilizados

- 1 CI 7400 (Porta NAND MED52)
- 1 CI 7402 (Porta NOR MED52)
- 1 CI 7408 (Porta AND MED52)
- 1 CI 7432 (Porta OR MED52)
- 1 CI 74266 (Porta XOR MED52)
- 1 CI 7486 (Porta XNOR MED52)

- 1 CI 7404 (Porta NOT MED52)
- 1 Fonte de alimentação DC (LEG200)
- 1 Gerador de sinais (LEG2000)
- Led's e resistores para monitoramento de níveis lógicos
- Software KiCad

2 PROCEDIMENTOS EXPERIMENTAIS

Os procedimentos experimentais desse trabalho envolvem a simplificação e construção de um circuito lógico a partir de uma expressão booleana. O primeiro é uma expressão fornecida na forma de soma de mintermos, já o segundo é uma aplicação de um problema real.

2.1 Projeto 1

A tarefa inicial foi simplificar a função $f(A, B, C, D) = \sum m(0, 2, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 13, 15)$ utilizando o método de Quine McCluskey. Para isso contruímos a tabela 1 que é a tabela verdade dessa expressão.

Tabela 1 – Tabela verdade da função booleana

A	B	C	D	S
0	0	0	0	1
0	0	1	1	0
0	1	0	0	1
0	1	1	1	0
0	0	0	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	0	0
0	1	1	1	0
1	0	0	0	0
1	0	1	1	0
1	1	0	0	0
1	1	1	1	0
1	0	0	0	0
1	0	1	1	0
1	1	0	0	0
1	1	1	1	0

Fonte: Elaborada pelos autores

A tabela verdade foi construída apenas por questões de visualização, já que não é necessária para a simplificação por esse método. Em seguida, contruímos a tabela 2, essa sim foi a tabela utilizada para a simplificação. Nela colocamos os mintermos agrupados pela quantidade de 1 e simplificamos as expressões ao unir dois mintermos (ou grupos de mintermos) em que a diferença era de apenas um bit.

Nessa tabela, as células coloridas são aquelas onde estão descritos os implicantes primos, eles foram utilizados para aconstruír a tabela 3 que mostra quais as saídas da expressão cada um deles cobre.

Tabela 2 – Tabela de simplificação da função booleana utilizando o método de Quine e McCluskey

Número de 1	Mintermo	Formato binário	Primeira comparação	Segunda comparação
0	0	0000	m(0,2) = 00-0	m(0,2,8,10) = -0-0
0	—	—	m(0,8) = -000	—
1	2	0010	m(2,6) = 0-10	—
1	8	1000	m(8,9) = 100-	—
1	—	—	m(2,10) = -010	—
1	—	—	m(8,10) = 10-0	—
2	5	0101	m(5,7) = 01-1	m(5,7,13,15) = -1-1
2	6	0110	m(6,7) = 011-	—
2	9	1001	m(9,13) = 1-01	—
2	10	1010	—	—
2	—	—	m(5,13) = -101	—
3	7	0111	m(7,15) = -111	—
3	13	1101	m(13,15) = -111	—
4	15	1111	—-	—

Fonte: Elaborada pelos autores

Tabela 3 – Tabela de cobertura da função booleana

Mintermo	-0-0	-1-1	0-10	100-	011-	1-01
0	X					
2	X		X			
5		X				
6			X		X	
7		X			X	
8	X			X		
9				X		X
10	X					
13		X				X
15		X				

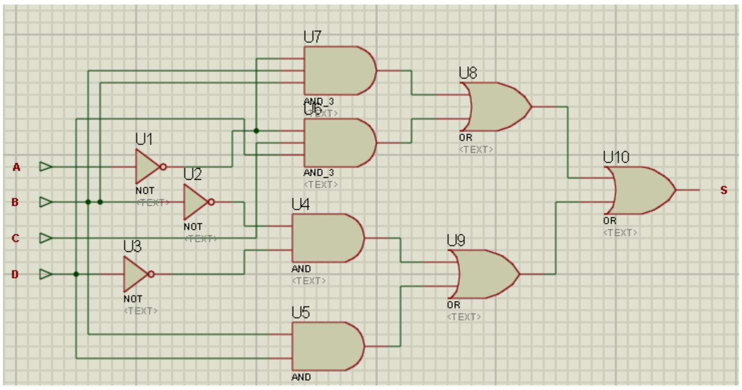
Fonte: Elaborada pelos autores

A partir da tabela 3 podemos ver quais implicantes são necessários para a construção da expressão simplificada. Uma escolha ideal é utilizar os dois primeiros implicantes: $\bar{B}\bar{D}$ e BD e outros dois que forneçam as outras duas saídas desejadas. Dessa forma a equação 2.1 explicita uma das possibilidades da expressão inicial de forma simplificada.

$$f(A, B, C, D) = \bar{B}\bar{D} + BD + \bar{A}C\bar{D} + \bar{A}BC \tag{2.1}$$

Podemos inclusive montar um circuito digital que realiza essa operação, ele pode ser visto na figura 1. Após a montagem aferimos os níveis lógicos de saída para cada uma das 16 entradas e pudemos verificar que a tabela verdade, de forma esperada, coincide com a tabela 1.

Figura 1 – Circuito digital cuja saída é a mesma da função booleana



Fonte: Elaborada pelos autores

2.2 Problema prático

O problema prático que foi proposto envolove o acionamento de sensores que medem o nível de água de uma caixa d'agua. São 5 sensores que acionam um após o outro, ou seja, o segundo sensor não pode acionar antes do primeiro, já que caso a água alcance o segundo ela com certeza já passou do nível do primeiro.

O nosso trabalho foi encontrar uma forma de verificar a consistência dos acionamentos desses sensores por meio de um circuito digital. Dessa forma, de acordo com as especificações do problema montames a tabela 4 que é a tabela verdade do circuito proposto. A forma como ela foi montada significa que caso a saída de nosso circuito seja 1 os sensores estão funcionando corretamente, caso contrário há algum tipo de mal funcionamento. A partir dela montamos a função booleana de soma de mintermos, que pode ser vista na equação 2.2.

$$\begin{gathered} f(A,B,C,D) = \sum m(0,1,3,7,15,31) \\ = \bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}\bar{E} + \bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}E + \bar{A}\bar{B}\bar{C}DE + \bar{A}\bar{B}CDE + \bar{A}BCDE + ABCDE \end{gathered} \tag{2.2}$$

Como é possível ver, a expressão 2.2 é muito complexa e pode causar muitos problemas ao ser construída em um circuito digital, já que com ela seriam necessários 15 portas do tipo NOT, 6 do tipo AND de 5 entradas cada um e 1 porta OR de 6 entradas. Por isso, uma boa ideia antes de realizar uma construção do circuito é simplificar essa expressão, essa simplificação foi feita utilizando o método de Quine McCluskey. Assim, da mesma forma que na etapa anterior do experimento, foi construída uma tabela de agrupamentos dos mintermos, a tabela 5 representa isso.

Novamente, a partir da tabela de comparações criamos também uma tabela de cobertura, que explicita a quais saídas cada implicante primo cobre para descobrir quais deles são essenciais. A tabela 6 mostra essa área de cobertura de cada um deles.

A partir da tabela 6 escolhemos quais implicantes utilizar para a construção da função

Tabela 4 – Tabela verdade da consistência dos sensores

A	B	C	D	E	S
0	0	0	0	0	1
0	0	0	1	1	0
0	0	1	0	0	1
0	0	1	1	1	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	1	0
0	0	1	0	0	0
0	0	1	1	1	0
0	1	0	0	0	0
0	1	0	1	1	0
0	1	1	0	0	0
0	1	1	1	1	0
0	1	0	0	0	0
0	1	0	1	1	0
0	1	1	0	0	0
0	1	1	1	1	0
1	0	0	0	0	1
1	0	0	1	1	0
1	0	1	0	0	1
1	0	1	1	1	0
1	0	0	0	0	0
1	0	0	1	1	0
1	0	1	0	0	0
1	0	1	1	1	0
1	1	0	0	0	0
1	1	0	1	1	0
1	1	1	0	0	0
1	1	1	1	1	0
1	1	0	0	0	0
1	1	0	1	1	0
1	1	1	0	0	0
1	1	1	1	1	0

Fonte: Elaborada pelos autores

booleana simplificada, com isso a equação 2.2 mostra essa expressão já simplificada e pronta para ter o seu circuito digital montado que pode ser visto na figura 2.

$$f(A,B,C,D) = \bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D} + \bar{A}\bar{B}DE + BCDE \tag{2.3}$$

Tabela 5 – Tabela de simplificação da consistência dos sensores utilizando o método de Quine e McCluskey

Número de 1	Mintermo	Formato binário	Primeira comparação
0	0	00000	m(0,1) = 0000-
1	1	00001	m(1,3) = 000-1
2	3	00011	m(3,7) = 00-11
3	7	00111	m(7,15) = 0-111
4	15	01111	m(15,31) = -1111
5	32	11111	—

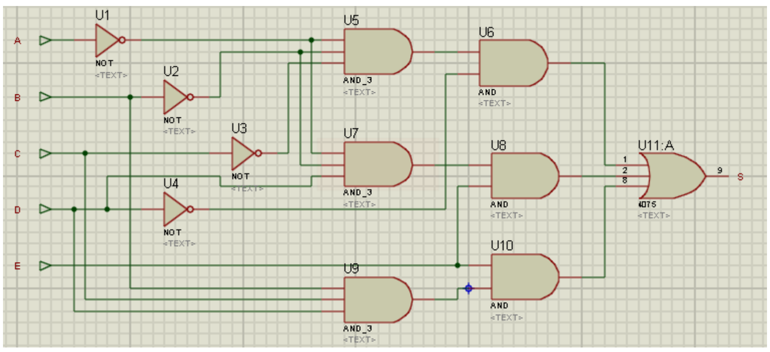
Fonte: Elaborada pelos autores

Tabela 6 – Tabela de cobertura da consistência dos sensores

Mintermo	0000-	000-1	00-11	0-111	-1111
0	X				
1	X	X			
3		X	X		
7			X	X	
15				X	X
31					X

Fonte: Elaborada pelos autores

Figura 2 – Circuito digital que verifica a consistência dos sensores



Fonte: Elaborada pelos autores

3 QUESTÕES

Após a finalização do experimento foi proposta uma questão para ser resolvida. A questão envolve um circuito lógico de 5 entradas, sendo 4 delas bits de um número hexadecimal e a 5 uma entrada de controle. A saída do circuito, quando a entrada de controle é nula será 0 exceto quando o número for múltiplo de 3.

Para a resolução desse exercício proposto iniciamos contruindo uma tabela verdade do circuito, isso pois com ela podemos encontrar uma expressão booleana na forma de soma de mintermos não simplificada e, em seguida, aplicar o método de simplificação de Quine e McCluskey. A tabela 7 representa essa tabela verdade já a equação 3.1 mostra a expressão booleana em sua forma de soma de mintermos.

Tabela 7 – Tabela verdade do problema proposto

$Controle$	A	B	C	D	S
0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	1	1
0	0	1	0	0	0
0	0	1	1	1	1
0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	1	1
0	0	1	0	0	0
0	0	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0
0	1	0	1	1	1
0	1	1	0	0	0
0	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0
0	1	0	1	1	1
0	1	1	0	0	0
0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	0
1	0	0	1	1	0
1	0	1	0	0	1
1	0	1	1	1	0
1	0	0	0	0	0
1	0	0	1	1	1
1	0	1	0	0	0
1	0	1	1	1	0
1	1	0	0	0	1
1	1	0	1	1	0
1	1	1	0	0	0
1	1	1	1	1	1

1	1	0	0	0	0
1	1	0	1	1	0
1	1	1	0	0	0
1	1	1	1	1	0

Fonte: Elaborada pelos autores

$$f(Controle, A, B, C, D) = \sum m(1,3,5,7,9,11,13,15,19,22,25,28,31) \tag{3.1}$$

Utlizando essa tabela e a equação contruímos as tabelas 8 para fazer a comparação dos mintermos e sua posterior simplificação.

Tabela 8 – Tabelas de simplificação do problema proposto utilizando o método de Quine e McCluskey

Número de 1	Mintermo	1ª Comparação
1	$m_1 = 00001$	$m(1,3) = 000-1$
1	—	$m(1,5) = 00-01$
1	—	$m(1,9) = 0-001$
2	$m_3 = 00011$	$m(3,7) = 00-11$
2	$m_5 = 00101$	$m(3,11) = 0-011$
2	$m_9 = 01001$	$m(3,19) = -0011$
2	—	$m(5,13) = 0-101$
2	—	$m(9,11) = 010-1$
2	—	$m(9,13) = 01-01$
2	—	$m(9,25) = 1-001$
3	$m_7 = 00111$	$m(7,15) = 0-111$
3	$m_{11} = 01011$	$m(11,15) = 01-11$
3	$m_{13} = 01101$	$m(13,15) = 011-1$
3	$m_{19} = 10011$	—
3	$m_{22} = 10110$	—
3	$m_{25} = 11001$	—
3	$m_{28} = 11100$	—
4	$m_{15} = 01111$	$m(15,31) = -1111$
5	$m_{31} = 11111$	—

Número de 1	2 ª Comparação	3ª Comparação
1	$m(1,3,5,7) = 00--1$	$m(1,3,5,7,9,11,13,15) = 0---1$
1	$m(1,3,9,11) = 0-0-1$	—
1	$m(1,5,9,13) = 0--01$	—
2	$m(3,7,11,15) = 0--11$	—
2	$m(5,7,13,15) = 00101$	—
2	$m(9,11,13,15) = 01--1$	—

Fonte: Elaborada pelos autores

Novamente os termos destacados em cinza são os implicantes primos, eles foram utilizados para construir a tabela 9, tabela de cobertura de cada um desses implicantes. A partir da tabela de cobertura podemos encontrar os implicantes primos essenciais. Por meio dela podemos perceber que a forma mais simples da expressão que desejavamo simplificar é aquela representada na equação 3.2. E, por fim, a montagem do circuito lógico combinacional que realiza a operação desejada pode ser vista na figura 3.

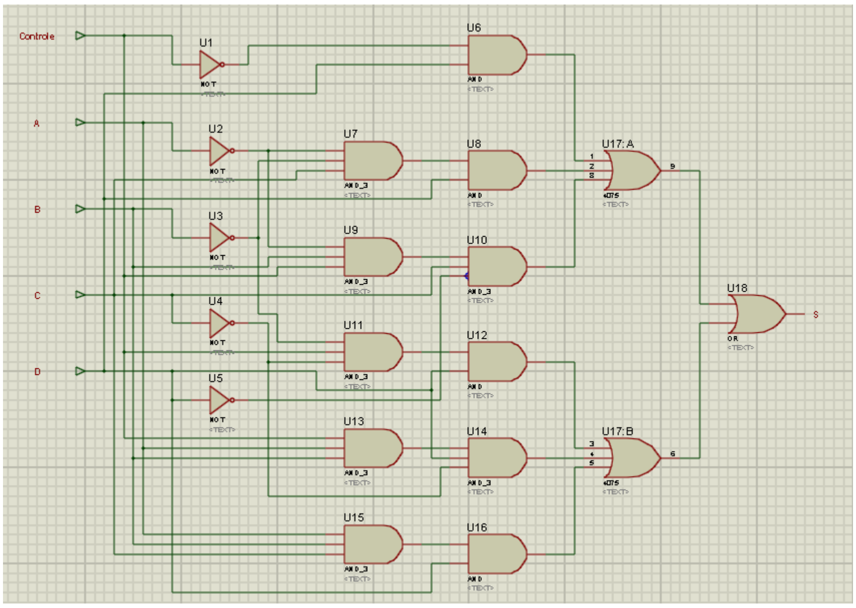
Tabela 9 – Tabela de cobertura do problema proposto

Mintermo	0—1	-0011	1-001	-1111	11100	10110
1	X					
3	X	X				
5	X					
7	X					
9	X		X			
11	X					
13	X					
15	X			X		
19		X				
22						X
25			X			
28					X	
31				X		

Fonte: Elaborada pelos autores

$$f(Controle, A, B, C, D) =$$
$$\overline{Controle}D + \bar{A}\bar{B}CD + Controle\bar{A}BC\bar{D} + Controle\bar{B}\bar{C}D + ControleAB\bar{C}\bar{D} + ABCD \tag{3.2}$$

Figura 3 – Circuito digital que realiza a operação lógica desejada



Fonte: Elaborada pelos autores

4 CONCLUSÃO

Nesse experimento utilizamos o método de Quine e McCluskey para a simplificação de expressões booleanas e circuitos lógicos combinacionais. Esse método pe especialmente útil pois garante a melhor simplificação possível, porém assim como o método dos mapas de Veich-Karnaugh pode se tornar complexo ao ser utilizado para expressões com muitas váriaveis, já que quanto maior o número de váriaveis mais combinações poderão ser feitas.

Vale notar que mesmo a forma simplificada das equações obtidas ainda eram muito complexas, isso ocorre devido à alta complexidade das funções que foram proposta. Por isso nas imagens dos circuitos montados pode-se perceber o uso de várias portas lógicas, muitas a mais do que a quantidade ncessária, isso ocorreu pois as equações simplificadas obtidas utilizam operações com 4 ou 5 entradas, porém no simulador ha portas de no máximo 3, dessa forma tivemos que combinar portas de 2 e 3 entradas para conseguir a contrução de portas com mais entrada. Isso fez com que os circuitos se tornem um pouco difíceis de serem comprendidos.

Além disso, por mais que os sistemas digitais finais continuam complexos, no dia a dia o engenheiro trabalha normalmente com dispositivos digitais com complexidade ainda maior, por isso é importante saber trabalhar com operações complicadas para a nossa formação, porém mais importante ainda é saber simplificar essas operações, para diminuir a complexidade o máximo possível, processo esse realizado durante o trabalho.

REFERÊNCIAS

KASTENSMIDT, F. L. **Minimização de funções booleanas**. 2008. Acesso em: 2 de mar de 2021. Citado na página 5.

MORENO, E. **Simplificação empregando o algoritmo de Quine McCluskey**. 2018. Disponível em: <https://www.inf.pucrs.br/~emoreno/undergraduate/EC/cirdig/sem18.2/index.php>. Acesso em: 2 de mar de 2021. Citado na página 5.