1 a)

$$\begin{cases} x + y + z + w = 20 \\ 2x - 2y + 3z + w = 15 \\ -x - y + z + w = -10 \\ 2x + y - z - 5w = 0 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc} 2 & -2 & 3 & 1 & 15 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 20 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & -10 \\ 2 & 1 & -1 & -5 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ L_2 = 2L_2 - L_1 \\ L_3 = 2L_3 + L_1 \\ L_4 = L_4 - L_1 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc} 2 & -2 & 3 & 1 & 15 \\ 0 & 4 & -1 & 1 & 25 \\ 0 & -4 & 5 & 3 & -5 \\ 0 & 3 & -4 & -6 & -15 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ L_3 = L_2 + L_3 \\ L_4 = 4L_4 - 3L_2 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc} 2 & -2 & 3 & 1 & 15 \\ 0 & 4 & -1 & 1 & 25 \\ 0 & 0 & 4 & 4 & 20 \\ 0 & 0 & -13 & -27 & -135 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \\ L_4 = 4L_4 + 13L_3 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -2 & 3 & 1 & 15 \\ 0 & 4 & -1 & 1 & 25 \\ 0 & 0 & 4 & 4 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & -56 & -280 \end{array}\right)$$

Assim:

$$w = \frac{-280}{-56} = 5$$

$$z = \frac{20 - 4w}{4} = 0$$

$$y = \frac{25 - w + z}{4} = 5$$

$$x = \frac{15 - w - 3z + 2y}{2} = 10$$

$$\boxed{\text{Resposta: } x = 10,\ y = 5,\ z = 0,\ w = 5}$$

b) Temos que: $\varepsilon = 0{,}13$

$$\begin{cases} x_1^{k+1} = (3 - 2x_2^k - 2x_3^k)/5 \\ x_2^{k+1} = (-2 - x_1^k - x_3^k)/3 \\ x_3^{k+1} = (-6 - 6x_2^k)/8 \end{cases}$$

1ª iteração: $x^{(1)} = (0{,}6; -0{,}67; -0{,}75)$

$x_1 = (3-0-0)/5 = 0{,}6$

$x_2 = (-2-0-0)/3 = -0{,}67$

$x_3 = (-6-0)/8 = -0{,}75$

Erro: $|-0{,}75 - 0| = 0{,}75$

2ª iteração: $x^{(2)} = (1{,}17; -0{,}62; -0{,}25)$

$x_1 = (3 - 2(-0{,}67) - 2(-0{,}75))/5 = 1{,}17$

$x_2 = (-2 - 0{,}6 + 0{,}75)/3 = -0{,}62$

$x_3 = (-6 - 6(-0{,}67))/8 = -0{,}25$

Erro: $|1{,}17 - 0{,}6| = 0{,}57$

3ª iteração: $x^{(3)} = (0{,}95; -0{,}97; -0{,}29)$

$x_1 = (3 - 2(-0{,}62) - 2(-0{,}25))/5 = 0{,}95$

$x_2 = (-2 - 1{,}17 + 0{,}25)/3 = -0{,}97$

$x_3 = (-6 - 6(-0{,}62))/8 = -0{,}29$

Erro: $|-0{,}97 - (-0{,}62)| = 0{,}3$

4ª iteração $x^{(4)} = (1,1; -0,89; -0,02)$

$x_1 = (3 - 2(-0,97) - 2(-0,29))/5 = 1,1$

$x_2 = (-2 - 0,95 + 0,29)/3 = -0,89$ Erro: $|-0,02 - (-0,29)| = 0,27$

$x_3 = (-6 - 6(-0,97))/8 = -0,02$

5ª iteração: $x^{(5)} = (0,96; -1,03; -0,08)$

$x_1 = (3 - 2(-0,89) - 2(-0,02))/5 = 0,96$

$x_2 = (-2 - 1,1 + 0,02)/3 = -1,03$ Erro: $|0,96 - 1,1| = 0,14$

$x_3 = (-6 - 6(-0,89))/8 = -0,08$

6^a iteração: $x^{(6)} = (1{,}04; -0{,}96; 0{,}02)$

$x_1 = (3 - 2(-1{,}03) - 2(-0{,}08))/5 = 1{,}04$

$x_2 = (-2 - 0{,}96 + 0{,}08)/3 = -0{,}96$ Erro: $|0{,}02 - (-0{,}08)| = 0{,}10$

$x_3 = (-6 - 6(-1{,}03))/8 = 0{,}02$

Assim, $\bar{x} = x^{(6)}$, portanto a aproximação da solução é $(1{,}04; -0{,}96; 0{,}02)$

c) Temos que:

$$\begin{cases} x^{k+1} = (19 - y^k - z^k)/3 \\ y^{k+1} = (-10 - x^{k+1} - z^k)/7 \\ z^{k+1} = (19 - 2x^{k+1} + y^{k+1})/5 \end{cases}$$

$\varepsilon = 0{,}01$

1ª iteração:

$x^{(1)} = (6{,}333; -2{,}333; 0{,}8)$

$x = (19 - 0 - 0)/3 = 6{,}333$

$y = (-10 - 6{,}333 - 0)/7 = -2{,}333$

Erro: $|6{,}333 - 0| = 6{,}333$

$z = (19 - 2(6{,}333) + (-2{,}333))/5 = 0{,}8$

2ª iteração:

$x^{(2)} = (6{,}844; -2{,}521; 0{,}558)$

$x = (19 + 2{,}333 - 0{,}8)/3 = 6{,}844$

$y = (-10 - 6{,}844 - 0{,}8)/7 = -2{,}521$

Erro: $|6{,}844 - 6{,}333| = 0{,}511$

$z = (19 - 2(6{,}844) - 2{,}521)/5 = 0{,}558$

3ª iteração:

$x^{(3)} = (6{,}988; -2{,}507; 0{,}503)$

$x = (19 + 2{,}521 - 0{,}558)/3 = 6{,}988$

$y = (-10 - 6{,}988 - 0{,}558)/7 = -2{,}507$

Erro: $|6{,}988 - 6{,}844| = 0{,}144$

$z = (19 - 2(6{,}988) - 2{,}507)/5 = 0{,}503$

4ª iteração $\qquad x^{(4)} = (7,001; -2,501; 0,499)$

$x = (19 + 2,507 - 0,503)/3 = 7,001$

$y = (-10 - 7,001 - 0,503)/7 = -2,501$ $\quad$ erro: $|-2,501 - (-2,507)| = 0,006$

$z = (19 - 2(7,001) - 2,501)/5 = 0,499$

Assim, $\bar{x} = x^{(4)}$, portanto a aproximação da solução é $(7,001, -2,501, 0,499)$

② Para Gauss-Jacobi

$\alpha_1 = \frac{7+2}{1} = 9$ $\alpha_2 = \frac{8+1}{1} = 9$ $\alpha_3 = \frac{2+1}{9} = \frac{1}{3}$

Assim, como $\alpha_1 = \alpha_2 > 1$, esse sistema como está não converge pelo método de Gauss-Jacobi. Porém, trocando L_1 e L_2 temos:

$$\begin{cases} 8x + y - z = 8 \\ x - 7y + 2z = -4 \\ 2x + y + 9z = 12 \end{cases}$$

$\alpha_1 = \frac{1}{4}$ $\alpha_2 = \frac{3}{7}$ $\alpha_3 = \frac{1}{3}$

E dessa forma o sistema converge

Para Gauss-Seidel

Utilizando o critério de Sassenfeld $\alpha_1 = \beta_1$, assim devemos fazer a mesma troca de L_1 por L_2

$\beta_1 = \frac{1}{4}$ $\beta_2 = \frac{\frac{1}{4}+2}{7} = \frac{9}{28}$ $\beta_3 = \frac{\frac{1}{4}+\frac{9}{28}}{9} = \frac{4}{63}$

1) a) $a = \varphi b$

b) $\dfrac{\varphi b + b}{\varphi b} = \dfrac{\varphi b}{b} \Rightarrow \dfrac{b(\varphi+1)}{\varphi b} = \dfrac{\varphi b}{b}$

$b^2(\varphi+1) = \varphi^2 b^2 \Rightarrow \varphi^2 b^2 - \varphi b^2 - b^2 = 0$

$\boxed{\varphi^2 - \varphi - 1 = 0}$