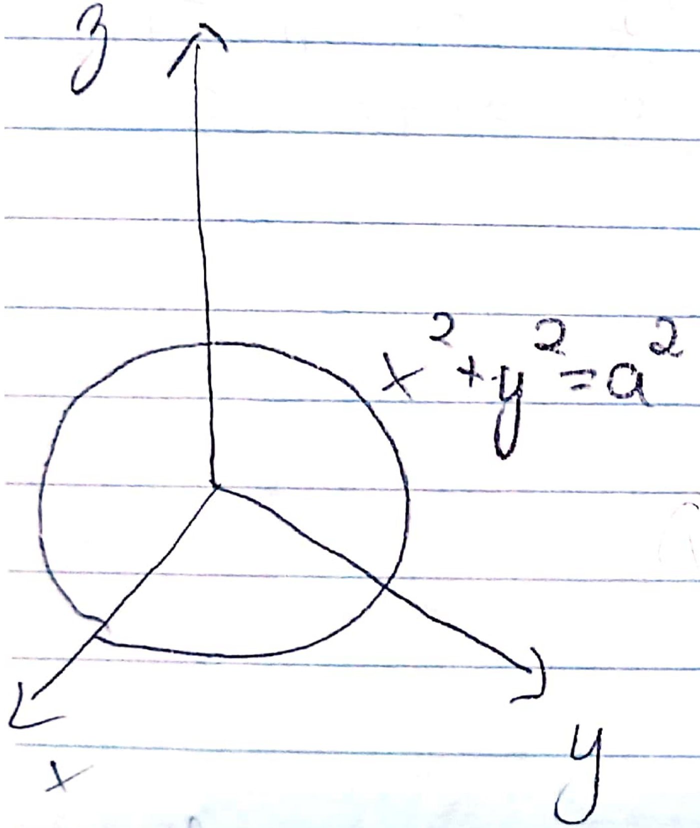
3.5 Obtenha $\vec{E}$ V num ponto P no eixo central perpendicular de um anel uniformemente carregado de raio a e carga Q.

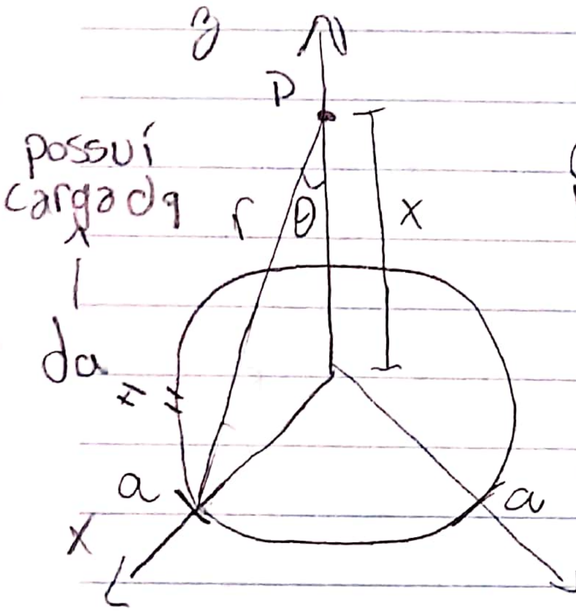


$$V = \int \frac{K\,dq}{r} = K \int \frac{dq}{\sqrt{a^2+x^2}}$$

$$V = \frac{K}{\sqrt{a^2+x^2}} \int dq = \frac{KQ}{\sqrt{a^2+x^2}}$$

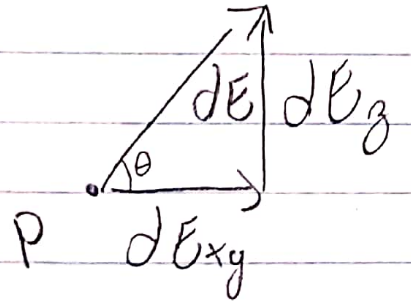
$$\boxed{V = \frac{KQ}{\sqrt{a^2+x^2}}}$$

Digitalizado com CamScanner



Devido à simetria do problema as componentes x e y do campo em P serão nulas, basta encontrar a componente z.

Dividindo o anel em infinitos segmentos de comprimento da com carga dq podemos calcular dE_z y A integral de dE_z resulta E_z



$$dE_z = dE\cos(\theta)$$

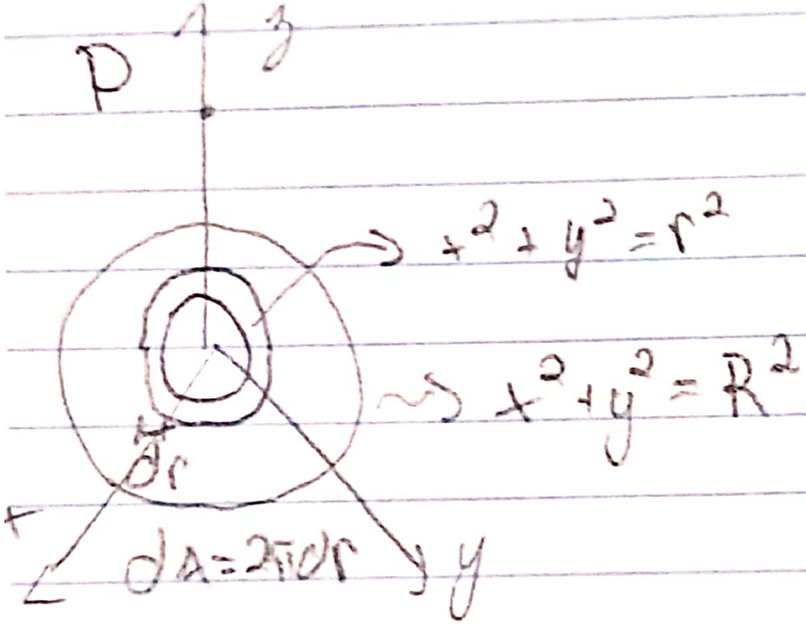
$$\cos(\theta) = \frac{x}{r} \Rightarrow dE_z = \frac{dE\,x}{r}$$

$$dE = \frac{K\,dq}{r^2} \Rightarrow dE_z = \frac{x\,K\,dq}{r^3}$$

$$E = \int \frac{x\,K\,dq}{r^3} = \frac{Kx}{r^3}\int dq = \frac{Kx}{r^3}Q \qquad r = \sqrt{x^2+a^2}$$

$$\boxed{E = \frac{Kx}{(x^2+a^2)^{3/2}}\,Q}$$

Digitalizado com CamScanner



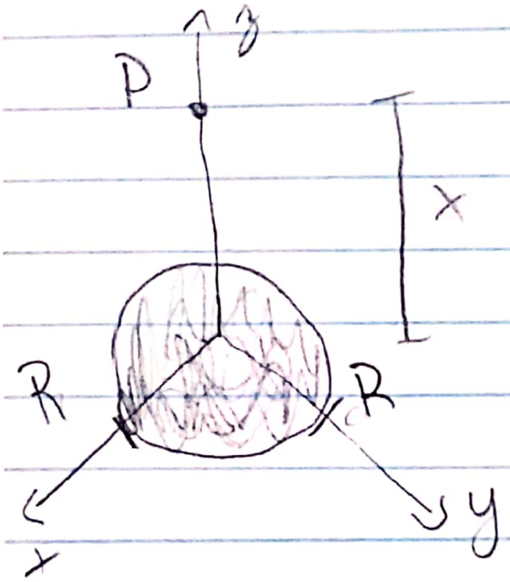
Tratando o disco como anéis de espessura dr podemos usar a fórmula do anel.

$$\sigma = \frac{Q}{A} \Rightarrow Q = A\sigma \Rightarrow dq = \sigma dA = \sigma 2\pi dr$$

$$\boxed{dq = \sigma 2\pi dr}$$

$$dV = \frac{k\,dq}{\sqrt{r^2+x^2}} \Rightarrow V = \int \frac{k\,dq}{\sqrt{r^2+x^2}} = k\sigma 2\pi \int_0^R \frac{dr}{\sqrt{a^2+x^2}}$$

$$\boxed{V = 2\pi k\sigma\left[(R^2+x^2)^{1/2} - x\right]}$$



Podemos considerar o disco como se fossem infinitos anéis de largura da. Como já calculamos E para anel, basta calcular dE e integrar

$$\sigma = \frac{Q}{A} = \frac{Q}{\pi r^2} \Rightarrow Q = \sigma \pi r^2 \Rightarrow \boxed{dq = 2\pi \sigma r\, dr}$$

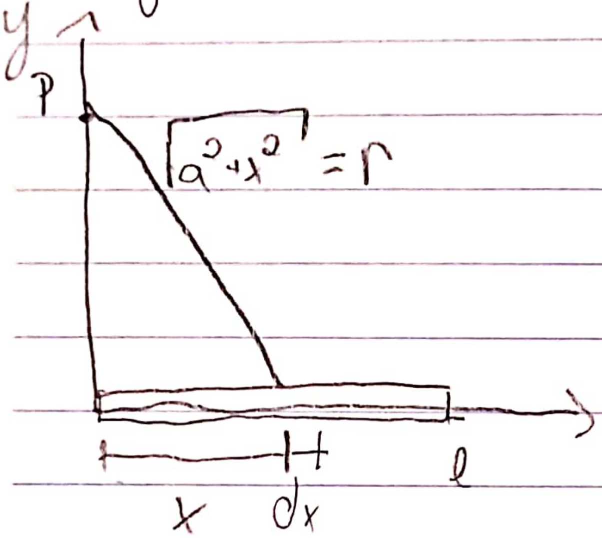
$$E = \frac{kx}{(x^2+r^2)^{3/2}} Q \Rightarrow dE = \frac{kx}{(x^2+r^2)^{3/2}} dq = \boxed{\frac{kx\, 2\pi \sigma r\, dr}{(x^2+r^2)^{3/2}}}$$

$$E = \int_0^R dE = \int_0^R \frac{kx 2\pi \sigma r\, dr}{(x^2+r^2)^{3/2}} = kx 2\pi\sigma \int_0^R \frac{r}{(x^2+r^2)^{3/2}} dr$$

$$E = \pi k x \sigma \left[\frac{(r^2+x^2)^{-1/2}}{-1/2} \right]_0^R$$

$$\boxed{E = 2\pi k \sigma \left(1 - \frac{x}{(R^2+x^2)^{1/2}} \right)}$$

3.7 Uma haste de comprimento ℓ localizada ao longo do eixo x tem carga Q e densidade de carga linear uniforme λ. Determine V em um ponto P em Oy, a uma distância a da origem.



$$\lambda = \frac{Q}{\ell} \Rightarrow \boxed{dQ = \lambda dx}$$

$$dV = \frac{KQ}{r} = \frac{K\lambda}{\sqrt{a^2+x^2}}\, dx$$

$$V = \int dV = \int_0^{\ell} \frac{K\lambda}{\sqrt{a^2+x^2}} = K\lambda \int_0^{\ell} (a^2+x^2)^{-1/2} dx$$

$$V = K\lambda \int_0^{\ell} (a^2+x^2)^{-1/2} dx = \frac{KQ}{\ell} \ln\left(\frac{\ell + \sqrt{a^2+\ell^2}}{a}\right)$$

$$\boxed{V = \frac{KQ}{\ell} \ln\left(\frac{\ell + \sqrt{a^2+\ell^2}}{a}\right)}$$

3.8 Dois condutores esféricos de raio r_1 e r_2 separados por uma distância muito maior que os raios. São ligadas por um fio condutor. As esferas equilibradas tem carga q_1 e q_2. Determine a proporção dos módulos de E na superfície das esferas.

Os potenciais são iguais:

$$\frac{Kq_1}{r_1} = \frac{Kq_2}{r_2} \Rightarrow \frac{q_1}{r_1} = \frac{q_2}{r_2} \Rightarrow \boxed{\frac{q_1}{q_2} = \frac{r_1}{r_2}}$$

$$E_1 = \frac{Kq_1}{r_1^2} \qquad E_2 = \frac{Kq_2}{r_2^2} \qquad \frac{E_1}{E_2} = \frac{\frac{Kq_1}{r_1^2}}{\frac{Kq_2}{r_2^2}}$$

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{Kq_1}{r_1^2} \cdot \frac{r_2^2}{Kq_2} = \frac{q_1}{q_2}\frac{r_2^2}{r_1^2} = \frac{r_1}{r_2} \cdot \frac{r_2^2}{r_1^2}$$

$$\boxed{\frac{E_1}{E_2} = \frac{r_2}{r_1}}$$