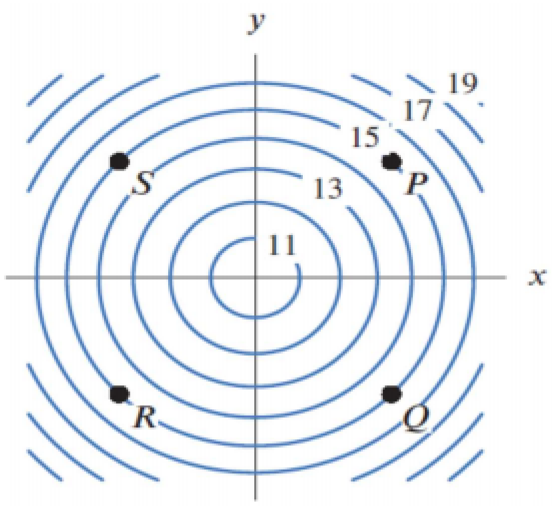
Cálculo Diferencial e Integral 2
Lista 3

Igor Galdeano Rodrigues - SP3037223
Luís Otávio Lopes Amorim - SP3034178

20 de outubro de 2020

1. Na figura abaixo, estão representadas as curvas de nível (ou o diagrama de contornos) de uma função de duas variáveis. Em relação a elas, marque a alternativa ou alternativas que contenham as duas afirmações verdadeiras:



   (a) $f_x(S) < 0$ e $f_y(R) > 0$
   (b) $f_x(S) < 0$ e $f_y(R) > 0$
   (c) $f_x(S) < 0$ e $f_y(R) > 0$
   (d) $f_x(S) < 0$ e $f_y(R) > 0$
   (e) $f_x(S) < 0$ e $f_y(R) > 0$

SOLUÇÃO

A única alternativa correta é a letra a.

2. Considere as funções $f(x, y) = x \cdot e^{x^2-y^2}$ e $g(x, y) = \ln \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$. Sobre estas funções, marque a alternativa ou alternativas que contenham duas afirmações verdadeiras.

   (a) $f_y(x, y) = -2y \cdot e^{x^2-y^2}$ e $g_{xy}(x, y) + g_{yx}(x, y) = 0$
   (b) $f_{yx}(x, y) = -2y \cdot (1 + 2x^2) \cdot e^{x^2-y^2}$ e $g_{xx}(x, y) + g_{yy}(x, y) = 0$
   (c) $f_x(x, y) = (1 + 2x^2) \cdot e^{x^2-y^2}$ e $g_{xx}(x, y) - g_{yy}(x, y) = 0$
   (d) $f_y(x, y) = -2xy \cdot e^{x^2-y^2}$ e $g_{xy}(x, y) - g_{yx}(x, y) = 0$
   (e) $f_{xy}(x, y) = -2y \cdot (1 + 2x^2) \cdot e^{x^2-y^2}$ e $g_{xx}(x, y) + g_{yy}(x, y) = 0$

   Calculando cada uma das derivadas parciais obtivemos:

SOLUÇÃO

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x \cdot e^{(x^2-y^2)} \quad \frac{\partial f}{\partial x} = e^{(x^2-y^2)}(1 + 2x^2) \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -2y(1 + 2x^2)e^{(x^2-y^2)}$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} \quad \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} \quad \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}$$

   Com isso, analisando as alternativas, apenas as letras b, d e e apresentam duas afirmações corretas.

3. Determine f_{zyx}, onde $f(x, y, z) = e^{-xyz}$. Desenvolva todos os passos para chegar à sua resposta.

SOLUÇÃO

   Para isso, é preciso derivar f três vezes, cada vez em relação a uma das variáveis, independente da ordem.

   - Encontrando f_x:

$$f_x(x, y, z) = -yze^{-xyz}$$

   - Encontrando f_{xy}:

$$f_{xy}(x, y, z) = -z(e^{(-xyz)} - xyze^{(-xyz)}) = -ze^{(-xyz)}(1 - xyz)$$

$$f_{xy}(x, y, z) = xyz^2e^{(-xyz)} - ze^{-xyz}$$

- Encontrando f_{xyz}:

$$f_{xyz}(x,y,z) = xy(2ze^{(-xyz)} - xyz^2e^{(-xyz)}) - (e^{(-xyz)} - xyze^{(-xyz)})$$

$$f_{xyz}(x,y,z) = 2xyze^{(-xyz)} - x^2y^2z^2e^{(-xyz)} - e^{(-xyz)} + xyze^{(-xyz)}$$

$$f_{xyz}(x,y,z) = e^{(-xyz)}(3xyz - x^2y^2z^2 - 1)$$

Assim, como $f_{xyz}(x,y,z) = f_{zyx}(x,y,z)$, temos que:

$$f_{zyx}(x,y,z) = e^{(-xyz)}(3xyz - x^2y^2z^2 - 1)$$

4. Seja $w = f(x,y)$, onde f é uma função diferenciavel. Se $x = r\cos\theta$ e $y = r\operatorname{sen}\theta$, quais das afirmações abaixo são verdadeiras (pode haver mais de uma)?

   Sugestão: neste exercício você deve usar a regra da cadeia.

   (a) $\left(\frac{\partial w}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial \theta}\right)^2 = \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\cdot\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2$

   (b) $\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial w}{\partial r}\right)^2 - \frac{1}{r^2}\cdot\left(\frac{\partial w}{\partial \theta}\right)^2$

   (c) $\left(\frac{\partial w}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial \theta}\right)^2 = \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + r^2\cdot\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2$

   (d) $\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial w}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\cdot\left(\frac{\partial w}{\partial \theta}\right)^2$

   (e) $\left(\frac{\partial w}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\cdot\left(\frac{\partial w}{\partial \theta}\right)^2$

SOLUÇÃO

Inicialmente calculamos as derivadas parciais de w em relação a r e θ.

$$\frac{\partial w}{\partial r} = \frac{\partial w}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial w}{\partial y}\operatorname{sen}\theta$$

$$\frac{\partial w}{\partial \theta} = -\frac{\partial w}{\partial x}r\operatorname{sen}\theta + \frac{\partial w}{\partial y}r\cos\theta$$

Em seguida, elevamos ambas as derivadas ao quadrado obtendo:

$$\left(\frac{\partial w}{\partial r}\right)^2 = \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 \cos^2\theta + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 \operatorname{sen}^2\theta + 2\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}\cos\theta\operatorname{sen}\theta$$

$$\left(\frac{\partial w}{\partial \theta}\right)^2 = \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right) r^2\operatorname{sen}^2\theta + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right) r^2\cos^2\theta - 2r^2\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}\cos\theta\operatorname{sen}\theta$$

Observando as alternativas, podemos perceber que se resumem a 3 somas: $f_r^2 + f_\theta^2$, $f_r^2 + \frac{1}{r^2}f_\theta^2$ e $f_r^2 - \frac{1}{r^2}f_\theta^2$, realizando elas, chegamos aos resultados:

$$\left(\frac{\partial w}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial \theta}\right)^2 = \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 (\cos\theta + r^2\operatorname{sen}\theta) + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 (\operatorname{sen}\theta + r^2\cos\theta) + 2r\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}\operatorname{sen}\theta\cos\theta(1-r^2)$$

$$\left(\frac{\partial w}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial w}{\partial \theta}\right)^2 = \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2$$

$$\left(\frac{\partial w}{\partial r}\right)^2 - \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial w}{\partial \theta}\right)^2 = \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 \cos(2\theta) - \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 \cos(2\theta) + 4\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}\operatorname{sen}\theta\cos\theta$$

Desta forma, a única alternativa correta é a letra d.

5. Quais das afirmações abaixo são verdadeiras?

   (a) A derivada de $f(x,y,z) = xyz$ no ponto $P(1,\,1,\,3)$ e na direção que vai de P para o ponto Q dado por $Q = (4,\,4,\,6)$ é $\frac{7}{\sqrt{3}}$

   SOLUÇÃO

   A derivada de uma função $f(x,y,z)$ na direção do vetor unitário u em um ponto P pode ser encontrada pelo produto escalar do vetor gradiente de f no ponto P com o vetor u. Portanto, precisamos encontrar um vetor u com mesma direção de $\overrightarrow{PQ}$.

$$\vec{u} = \frac{\overrightarrow{PQ}}{|\overrightarrow{PQ}|} = \frac{(4,\,4,\,,6) - (1,\,1,\,3)}{|\overrightarrow{PQ}|} = \frac{(3,\,3,\,3)}{\sqrt{3}} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

   Em seguida, vamos encontrar o vetor gradiente no ponto (1, 1, 3):

$$\nabla f(x,y,z) = (f_x,\, f_y,\, f_z) = (yz,\, xz,\, xy)$$

$$\nabla f(1,1,3) = (3,\,3,\,1)$$

   Desta forma, a derivada direcional é o produto interno dos dois vetores:

$$D_u f(1,1,3) = \nabla f(1,1,3) \cdot \vec{u} = (3,\, 3,\, 1) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right) = \frac{7}{\sqrt{3}}$$

Assim, a letra a está correta.

(b) Suponha que $T(x, y) = x^2 + 3y^2$ representa a distribuição de temperatura em uma vesta região plana, sendo x e y dados em centímetros e T em $°C$. Se estivermos no ponto $P = (2,\, 1/2)$ então a direção e sentido de maior crescimento da temperatura a partir deste ponto é representado pelo vetor $\vec{v} = 4\vec{i} + 3\vec{j}$ e esta taxa de variação máxima da temperatura é de $5°C/m$

SOLUÇÃO

A direção e o sentido de maior aumento da temperatura é fornecida pelo vetor gradiente, portanto, basta encontrar e verificar se ele é paralelo a $\vec{v}$. A taxa de variação máxima é basicamente o módulo deste vetor.

$$\nabla T(x, y) = (T_x,\, T_y) = (2x,\, 6y)$$

$$\nabla T(2, 1/2) = (4,\, 3)$$

Assim, como $\nabla T(2, 1/2) = \vec{v}$ a direção e o sentido da maior taxa de aumento de temperatura são representados pelo vetor $\vec{v}$.

$$D_v T(2, 1/2) = |\nabla T(2, 1/2)| = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$$

Como podemos ver, o módulo do vetor gradiente realmente é igual a 5, portanto esta afirmação está correta.

(c) A derivada da função $f(x, y) = x^2 - 3xy + 4y^2$ no ponto $P = (1,\, 2)$ e na direção e sentido do vetor unitário que faz angulo $\frac{\pi}{6}$ com o eixo x (sentido positivo) é $\frac{13 - 3\sqrt{3}}{2}$.

SOLUÇÃO

Novamente, basta calcular o vetor gradiente e encontrar seu produto escalar com o vetor unitário que nos fornece a direção.

Neste caso, a direção foi fornecida como um ângulo, então temos que $u = (\cos\theta,\, \sin\theta) = \left(\frac{1}{2},\, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

$$\nabla f(x, y) = (f_x,\, f_y) = (2x - 3y,\, -3x + 8y)$$

$$\nabla f(1, 2) = (-4,\, 13)$$

Finalmente, encontrando o valor da derivada:

$$D_v f(1,2) = \nabla T(1,2) \cdot \vec{u} = (-4, 13) \cdot \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{13\sqrt{3} - 4}{2}$$

Dessa forma, o valor da derivada nesta direção não é aquele que foi dito na afirmação, portanto ela está incorreta.

(d) A derivada da função $f(x,y) = 2500 + 100(x^2 + y^2)e^{-0,3y^3}$ no ponto $P = (-1,\,-1)$ e na direção e sentido do vetor unitário que faz ângulo $\theta = \frac{\pi}{4}$ com o vetor gradiente neste ponto é ≈ 117.

SOLUÇÃO

Como a derivada direcional é encontrada como um produto interno, podemos enconrtra-lá sabendo apenas o módulo dos vetores e o ângulo entre eles:

$$\nabla f(x,y) \cdot \vec{u} = |\nabla f(x,y)||\vec{u}| \cos\theta$$

O enunciado diz que $\theta = \frac{\pi}{4}$, portanto $\cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ além disso, como $\vec{u}$ deve ser um veotr unitário, seu módulo é 1. Assim, precisamos encontrar apenas o módulo de $\nabla f(x,y)$.

$$\nabla f(x,y) = \left(100e^{-o,3y^3},\, 110e^{-o,3y^3}\right)$$

$$\nabla f(-1,-1) = \left(100e^{0,3}, 110e^{-0,3}\right)$$

$$|\nabla f(-1,-1)| = \sqrt{\nabla f(-1,-1) \cdot \nabla f(-1,-1)} = \sqrt{10000e^{0,6} + 12100e^{0,6}} = \sqrt{22100e^{0,6}}$$

Finalmente, basta encontrar $Duf(-1,-1)$:

$$Duf(-1,-1) = \sqrt{22100e^{0,6}} \cdot 1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{\frac{44200e^{0,6}}{4}} = \sqrt{11050e^{0,6}} \approx 142$$

Desta forma, a afirmação está incorreta.

(e) Se $f(x,y) = \frac{x^4}{y^2}$ e $P = (2,\,1)$ então a maior taxa de crescimento desta função a partir deste ponto é $32\sqrt{2}$.

SOLUÇÃO

Neste caso, basta encontrar o módulo do vetor gradiente e ver se ele é o mesmo que o fornecido na afirmação.

$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{4x^3}{y^2}, \frac{-2x^4}{y^3}\right)$$

$$\nabla f(2,1) = (32, -32)$$

$$|\nabla f(2,1)| = \sqrt{32^2 + 32^2} = 32\sqrt{2}$$

Assim, a afirmação esta correta.

Desta forma, as únicas afirmações incorretas são as letras c e d.

6. Determine e classifique todos os potos críticos da função:

$$f(x,y) = \frac{x^3}{3} + \frac{4y^3}{3} - x^2 - 3x - 4y - 3$$

SOLUÇÃO

Os pontos críticos de uma função de duas variáveis são aqueles em que ou ambas as derivadas parciais são nulas, ou, no mínimo uma delas, não existe. Por ser uma função polinomial, as duas derivadas parciais existem em todo o domínio. Assim, basta encontrar os pontos em que elas são iguais a zero.

$$f_x(x,y) = x^2 - 2x - 3$$

$$x^2 - 2x - 3 = 0 \qquad \Delta = 2^2 + 12 = 16$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2} \qquad \begin{array}{c} x_1 = 3 \\ x_2 = -1 \end{array}$$

$$f_y(x,y) = 4y^2 - 4$$

$$4y^2 - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad y^2 = 1$$

$$y_1 = 1 \qquad\qquad y_2 = -1$$

Assim, obtivemos 4 pontos críticos: $P_1(3,\ 1)$ $P_2(3,\ -1)$ $P_3(-1,\ 1)$ $P_4(-1,\ -1)$. Para classificá-los, devemos fazer o teste da segunda derivada.

$$\begin{array}{c} f_{xx}(x,y) = 2x - 2 \\ f_{yy}(x,y) = 8y \\ f_{xy}(x,y) = 0 \end{array}$$

$$D = \begin{vmatrix} f_{xx} & fxy \\ f_{xy} & fyy \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2x-2 & 0 \\ 0 & 8y \end{vmatrix} = 16y(x-1)$$

Calculando o valor de D em cada ponto:

$$\begin{array}{cc} D_1 = 32 & D_2 = -32 \\ D_3 = -32 & D_4 = 32 \end{array}$$

Calculando o valor de f_{xx} em cada ponto:

$$\begin{array}{cc} f_{xx}(3,1) = 4 & f_{xx}(3,-1) = 4 \\ f_{xx}(-1,1) = -4 & f_{xx}(-1,-1) = -4 \end{array}$$

Com os valores de D e f_{xx} de todos os pontos, podemos classificá-los:

Ponto	Tipo
(3, 1)	Mínimo local
(3, −1)	Ponto de sela
(−1, 1)	Ponto de sela
(−1, −1)	Máximo local