Álgebra Linear
Lista 9

Luís Otávio Lopes Amorim

18 de outubro de 2020

1. Seja o operador linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definido pela matriz $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

   (a) Mostrar que T é isomorfismo.

SOLUÇÃO

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+z \\ 2x-y+z \\ -z \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 1x + 0y + 1z = 0 \\ 2x - 1y + 1z = 0 \\ 0x + 0y - 1z = 0 \end{cases}$$

Como a única solução desse sistema é a solução homogênea, ou seja $x = y = z = 0$, temos que $Ker(T) = \{0\}$. Por isso, pelo teorema do núcleo o da imagem, sabemos que $dimV = dimIm$, ou seja, T é isomorfismo.

   (b) Determinar a lei que define o operador T^{-1}

SOLUÇÃO

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} L_1 = L_1 + L_3 \\ L_2 = L_2 + L_3 \\ L_3 = -L_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \; L_2 = 2L_1 - L_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

Portanto, temos:

$$[T]^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad T^{-1}(x, y, z) = (x + 2y, -y, x + y - z)$$

2. Seja a matriz $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -3 \\ -1 & 5 & 3 \\ 2 & -4 & -3 \end{pmatrix}$. Verifique que $\lambda = 3$ é um autovalor de A e determine uma base para o auto-espaço associado.

SOLUÇÃO

$$det \begin{bmatrix} 4-\lambda & -2 & -3 \\ -1 & 5-\lambda & 3 \\ 2 & -4 & -3-\lambda \end{bmatrix} = det \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ -1 & 2 & 3 \\ 2 & -4 & -6 \end{pmatrix}$$

$$1 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -4 & -6 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -6 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

Logo, $\lambda = 3$ é autovalor de A. Para encontrar o auto espaço:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & -4 & -6 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} L_2 = L_2 + L_1 \\ L_3 = L_3 - 2L_1 \end{matrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dessa forma, o auto-espaço associado a $\lambda = 3$ é $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y - 3z = 0\}$. Uma base de U é $B = \{(2,\ 1,\ 0), (3,\ 0,\ 1)\}$.

3. Verifique se $\begin{bmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$ é autovetor da matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & 7 & 9 \\ -4 & -5 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$. Caso seja, determine o autovalor correspondente.

SOLUÇÃO

$$\begin{bmatrix} 3 & 7 & 9 \\ -4 & -5 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12-21+9 \\ -16+15+1 \\ 8-12+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Assim, $v = (4,\ -3,\ 1)$ é autovetor associado ao autovalor 0.

4. Calcule os autovalores da matriz $A = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -3 \end{vmatrix}$, determine uma base para o auto-espaço associado a cada autovalor.

SOLUÇÃO

$$det \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} = (2-\lambda)(1-\lambda)(3+\lambda)$$

$$\lambda_1 = -3 \ \lambda_2 = 1 \ \lambda_3 = 2$$

Encontrando os autovetores:

$$\begin{pmatrix} 5 & -1 & 5 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} 5x - y + 5z = 5x + 6z \Rightarrow x = -\dfrac{6z}{5} \\ y = -z \end{matrix} \quad v_1 = (-6,\ -5,\ 5)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} x = y \\ z = 0 \end{matrix} \quad v_2 = (1,\ 1,\ 0)$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 5 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} y = 0 \\ z = 0 \end{matrix} \quad v_3 = (1,\ 0,\ 0)$$

Portanto, temos os 3 autovalores e autovetores, assim podemos escrever as 3 bases dos auto-espaços:

$$\begin{matrix} \lambda_1 = -3 & \lambda_2 = 1 & \lambda_3 = 2 \\ \mathbb{B}_1 = \{(-6\,,-6\,,5)\} & \mathbb{B}_2 = \{(1\,,1\,,0)\} & \mathbb{B}_3 = \{(1\,,0\,,0)\} \end{matrix}$$

5. Calcular os autovalores e autovetores das seguintes matrizes

   (a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$

SOLUÇÃO

$$det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 3 \\ -1 & 5-\lambda \end{bmatrix} = (1-\lambda)(5-\lambda)+3 = \lambda^2 - 6\lambda + 8 = 0$$

$$\Delta = 6^2 - 4\cdot 1\cdot 8 = 4\lambda = \frac{6\pm\sqrt{4}}{2}$$

$$\lambda_1 = 2 \ \lambda_2 = 4$$

Agora, encontrando os autovetores:

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} x = 3y \ \ v_1 = (3,\, 1)$$

$$\begin{pmatrix} -3 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} x = y \ \ v_2 = (1,\, 1)$$

Portanto, temos:

$$\begin{matrix} \lambda_1 = 2 & \lambda_2 = 4 \\ v_1 = (3,\, 1) & v_2 = (1,\, 1) \end{matrix}$$

(b) $A = \begin{bmatrix} 3 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 8 & 6 & -5 \end{bmatrix}$

SOLUÇÃO

$$det \begin{pmatrix} 3-\lambda & 3 & -1 \\ 0 & -1-\lambda & 0 \\ 8 & 6 & -5-\lambda \end{pmatrix} = (3-\lambda)\begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 \\ 6 & -5-\lambda \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 8 & -5-\lambda \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 0 & -1-\lambda \\ 8 & 6 \end{vmatrix}$$

$$(3-\lambda)(1+\lambda)(5+\lambda) - 16(1+\lambda) = (1+\lambda)\left[(3-\lambda)(5+\lambda)-16\right] = 0$$
$$(1+\lambda)(-\lambda^2-2\lambda-1) = -(1+\lambda)(\lambda^2+2\lambda+1) = -(1+\lambda)^3 = 0 \Rightarrow \lambda = -1$$

Portanto, temos apenas um valor $\lambda = 1$ com multiplicidade 3. Procurando os autovetores:

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 6 & -4 & 0 \end{pmatrix} \ L_3 = L_3 - 2L_1 \quad \begin{pmatrix} 4 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} 4x + 3y - 2z = 0$$

Isolando x na equação encontrada, podemos encontrar a base do plano que determina o auto-esaço da matriz.

$$x = -\frac{3y}{4} + \frac{z}{2}$$
$$(x,\, y,\, z) = y(-3,\, 4,\, 0) + z(1,\, 0,\, 2)$$

Desta base, podemos tirar os autovetores:

$$\lambda = -1$$
$$v_1 = (-3,\, 4,\, 0) \qquad\qquad v_2 = (1,\, 0,\, 2)$$

6. Determinar uma matriz P que diagonaliza A e calcular $P^{-1}AP$. Calcule A^{30} e B^{101}.

(a) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

SOLUÇÃO

$$det \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 2 \\ 0 & -1-\lambda & 0 \\ 2 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} = -\lambda \begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 \\ 0 & -\lambda \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 2 & -\lambda \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 0 & -1-\lambda \\ 2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$-\lambda^2(1+\lambda) + 4(1+\lambda) = (1+\lambda)(4-\lambda^2) = 0$$

$$\lambda_1 = -2 \quad \lambda_2 = -1 \quad \lambda_3 = 2$$

Agora, basta encontrar os autovetores.

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} x = -z \\ y = 0 \end{matrix} \quad v_1 = (1,\, 0,\, -1)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad L_3 = 2L_3 - L_1 \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} z = 0 \\ \\ x = 0 \end{matrix} \quad v_2 = (0,\, 1,\, 0)$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} L_1 = \frac{L_1}{2} \\ \\ L_3 = L_1 + L_3 \end{matrix} \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} x = z \\ y = 0 \end{matrix} \quad v_3 = (1,\, 0,\, 1)$$

A matriz P é a matriz cujas colunas são os autovetores de A, ou seja, $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Para encontrar P^{-1} basta transformar P em I ao lado da matri I:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} L_1 = \frac{L_1 - L_3}{2} \\ \\ L_3 = \frac{L_1 + L_3}{2} \end{matrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Desta forma, $P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, com isso podemos calcular $P^{-1}AP$ e checar que esta matriz é a matriz cuja diagonal principal são os autovalores de A e o resto dos valores são todos nulos.

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

Finalmente, utilizarei a matri diagonalizada para calcular A^{30}. Isso pois, multiplicações com matrizes diagonalizadas são muito mais fáceis. Além disso, sendo D a matriz A diagonalizada, da relação $D = P^{-1}AP$, podemos encontrar $A = PDP{-}1$. Portanto, após encontrar D^{30}, encontrar A^{30} é um processo fácil.

$$D^2 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$D^3 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

Com isso, podemos perceber que elevar uma matriz diagonalizada a um número n é o mesmo que elevar os valores de sua diagonal principal a n, assim::

$$D^{30} = \begin{pmatrix} (-2)^{30} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^{30} \end{pmatrix}$$

Por fim, basta encontrar A^{30}

$$A^{30} = PD^{30}P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-2)^{30} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^{30} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$A^{30} = \begin{pmatrix} 2^{30} & 0 & 2^{30} \\ 0 & 1 & 0 \\ -2^{30} & 0 & 2^{30} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{30} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^{30} \end{pmatrix}$$

Desta forma, temos como respostas:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad A^{30} = \begin{pmatrix} 1073741824 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1073741824 \end{pmatrix}$$

(b) $\begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 5 \end{bmatrix}$

SOLUÇÃO

$$det\begin{pmatrix} 2-\lambda & -2 & 1 \\ -2 & 2-\lambda & 1 \\ -1 & 1 & 5-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 5-\lambda \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 5-\lambda \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} -2 & 2-\lambda \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$(2-\lambda)(\lambda^2 - 7\lambda + 9) + 2(2\lambda - 9) + \lambda = 0$$

$$\lambda^3 - 9\lambda^2 - 18\lambda = \lambda(\lambda^2 - 9\lambda - 18) = 0$$

$$\Delta = 81 - 72 = 9 \quad \lambda = \frac{9 \pm 3}{2}$$

$$\lambda_1 = 0 \quad \lambda_2 = 3 \quad \lambda = 6$$

Agora encontrando os autovetores:

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 5 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ L_2 = L_2 + L_1 \\ L_3 = 2L_3 + L_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} x = y \\ \\ z = 0 \end{matrix} \quad v_1 = (1,\, 1,\, 0)$$

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ L_2 = L_2 + L_1 \\ L_3 = L_3 + 2L_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 & 0 \\ -3 & -3 & 0 & 0 \\ -3 & -3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} -x - 2y - z = 0 \Rightarrow y = -z \\ x = -y \\ v_2 = (1,\, -1,\, 1) \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} -4 & -2 & 1 & 0 \\ -2 & -4 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 = -L_3 \\ L_2 = L_2 - 2L_3 \\ L_3 = L_1 - 4L_3 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & 3 & 0 \\ 0 & -6 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} x - y + z = 0 \Rightarrow x = -y \\ z = 2y \\ v_3 = (1,\, -1,\, -2) \end{matrix}$$

Encontrados os três autovetores, podemos escrever a matriz P, colocando cada um dos autovetores em uma coluna, assim $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$. Com isso, podemos encontrar P^{-1} e verificar que $P^{-1}BP$ é uma matriz cuja diagonal principal são os autovalores de B e os outros elementos são nulos.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 = \dfrac{L_1 + L_2}{2} \\ L_2 = L_1 - L_2 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{matrix}1 & 0 & 0 & \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2} & 0\\ 0 & 2 & 2 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1\end{matrix}\right) \quad \begin{matrix} L_2 = \dfrac{L_2 + L_3}{3} \\ L_3 = \dfrac{L_2 - 2L_3}{6}\end{matrix} \quad \left(\begin{matrix}1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0\\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3}\\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{3}\end{matrix}\right)$$

Finalmente, encontrando $P^{-1}AP$:

$$P^{-1}BP = \begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0\\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{3}\end{pmatrix} \begin{pmatrix}2 & -2 & 1\\ -2 & 2 & 1\\ -1 & 1 & 5\end{pmatrix} \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & -1\\ 0 & 1 & -2\end{pmatrix}$$

$$P^{-1}BP = \begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0\\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{3}\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0 & 3 & 6\\ 0 & -3 & -6\\ 0 & 3 & -12\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_2 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_3\end{pmatrix}$$

O processo para encontrar B^{101} será o mesmo que foi utilizado para encontrar B^{30}.

$$D^{101} = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 3^{101} & 0\\ 0 & 0 & 6^{101}\end{pmatrix}$$

$$B^{101} = PD^{101}P{-1} = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & -1\\ 0 & 1 & -2\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 3^{101} & 0\\ 0 & 0 & -6^{101}\end{pmatrix} \begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0\\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{3}\end{pmatrix}$$

$$B^{101} = \begin{pmatrix}0 & 3^{101} & 6^{101}\\ 0 & -3^{101} & -6^{101}\\ 0 & 3^{101} & -2 \cdot 6^{-101}\end{pmatrix} \begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0\\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{3}\end{pmatrix}$$

$$B^{101} = \begin{pmatrix}3^{100}(1+2^{100}) & -3^{100}(1+2^{100}) & 3^{100}(1-2^{101})\\ -3^{100}(1+2^{100}) & 3^{100}(1+2^{100}) & -3^{100}(1-2^{101})\\ 3^{100}(1-2^{101}) & -3^{100}(1-2^{101}) & 3^{100}(1+2^{102})\end{pmatrix}$$

Assim, as respostas das perguntas são:

$$P = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & -1\\ 0 & 1 & -2\end{pmatrix}$$

$$P^{-1}BP = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 6\end{pmatrix}$$

$$B^{101} = \begin{pmatrix}6,5 \cdot 10^{77} & -6,5 \cdot 10^{77} & -1,3 \cdot 10^{7}8\\ -6,5 \cdot 10^{77} & 6,5 \cdot 10^{77} & 1,3 \cdot 10^{7}8\\ -1,3 \cdot 10^{78} & -1,3 \cdot 10^{78} & 2,6 \cdot 10^{78}\end{pmatrix}$$