Análisis Combinatorio

Luis Cárcamo M.

17 de octubre de 2020

Soluciones Enteras

Ejemplo 1

¿Cuántos números entre 1 y 1.000.000 tienen la suma de sus dígitos igual a 15?

Solución: Inicialmente, se excluye a 1.000.000, dado que sus dígitos no alcanza a sumar 15 y además, así reduce el problema a contar los número de entre 1 y 6 dígitos cuya suma sea igual a 15.

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 15$$
$$\textit{sujeto a:} \quad 0 \leq x_i \leq 9, \quad i = 1, 2, ..., 5$$

1. Primero calculamos todas las posibles (sin restricciones)

$$\underset{x_1}{\underline{\quad}} \ \underset{x_2}{\underline{\quad}} \ \underset{x_3}{\underline{\quad}} \ \underset{x_4}{\underline{\quad}} \ \underset{x_5}{\underline{\quad}} \ \underset{x_6}{\underline{\quad}}$$

$$\left[\binom{15}{15}\binom{6+15-1}{15}\right]$$

2. Quitar las opciones que no cumplen con las restricciones. Es decir, todas las opciones en las que por lo menos un dígito tiene más de 9.

$$\underset{x_1}{\underline{10}} \ \underset{x_2}{\underline{\quad}} \ \underset{x_3}{\underline{\quad}} \ \underset{x_4}{\underline{\quad}} \ \underset{x_5}{\underline{\quad}} \ \underset{x_6}{\underline{\quad}}$$

$$\left[\binom{10}{10} \cdot \binom{6}{1}\right] \cdot \left[\binom{15-10}{15-10}\binom{6+(15-10)-1}{15-10}\right]$$

Finalmente, la respuesta es

$$n(\mathbb{S}) = \left[\binom{15}{15}\binom{6+15-1}{15}\right] - \left[\binom{10}{10} \cdot \binom{6}{1}\right] \cdot \left[\binom{15-10}{15-10}\binom{6+(15-10)-1}{15-10}\right]$$

Ejemplo 2

$$x1 + x2 + x3 + x4 = 17.$$

Sujeto a

$$x1 \geq 0,\ x2 \geq 1,\ x3 \geq 2,\ x4 \geq 3$$

Solución Primero planteamos el problema con palomares
Planteamiento:

$$\underset{x_1}{\underline{\ \ }}\ \underset{x_2}{\underline{1}}\ \underset{x_3}{\underline{2}}\ \underset{x_4}{\underline{3}}$$

Fórmula:

$$\underbrace{\left[\binom{1}{1}\binom{1}{1}\right]}_{x_2 \geq 1} \cdot \underbrace{\left[\binom{2}{2}\binom{1}{1}\right]}_{x_3 \geq 2} \cdot \underbrace{\left[\binom{3}{3}\binom{1}{1}\right]}_{x_4 \geq 3} \cdot \left[\binom{17-6}{17-6} \cdot \binom{4+(17-6)-1}{17-6}\right]$$

Nota: La solución a este problema es equivalente a la solución de

$$x1 + x2 + x3 + x4 = 13, \quad x1, x2, x3, x4 \geq 0$$

Ejemplo 3

$$x_1 + x_2 + x_3 = 15$$

sujeto a

$$0 \leq x_1 \leq 10,\ x_2 = 3,\ x_3 \geq 1$$

Solución:

$$\left\{ \underset{x_1}{\underline{\ \ }}\ 3\ \underset{x_3}{\underline{1}} \right\} - \left\{ \underset{x_1}{\underline{11}}\ 3\ \underset{x_3}{\underline{1}} \right\}$$

1. Primero contamos todos los casos

$$n(\mathbb{S}) = \underbrace{\left[\binom{3}{3} \cdot \binom{1}{1}\right]}_{x_2=3} \cdot \underbrace{\left[\binom{1}{1} \cdot \binom{1}{1}\right]}_{x_3 \geq 1} \cdot \left[\binom{15-4}{15-4} \cdot \binom{2+(15-4)-1}{15-4}\right]$$

2. Ahora quitamos todas esas opciones donde $x1 > 10$, es decir $x_1 \geq 11$.

$$\underbrace{\left[\binom{3}{3} \cdot \binom{1}{1}\right]}_{x_2=3} \cdot \underbrace{\left[\binom{1}{1} \cdot \binom{1}{1}\right]}_{x_3 \geq 1} \cdot \underbrace{\left[\binom{11}{11}\binom{1}{1}\right]}_{x_1 > 10} \cdot \left[\binom{15-11-3-1}{15-11-3-1} \cdot \binom{2+(15-11-3-1)-1}{15-11-3-1}\right]$$

Ejemplo 4

¿Cuántos números pares de 6 dígitos hay?

Solución:

$$\underbrace{\underline{[1-9]}}_{\binom{9}{1}}\ \underbrace{\underline{[0-9]}\ \underline{[0-9]}\ \underline{[0-9]}\ \underline{[0-9]}}_{\binom{10}{1}^4}\ \underbrace{\underline{[0,2,4,6,8]}}_{\binom{5}{1}}$$

$$n(\mathbb{S}) = \left[\binom{9}{1}\cdot\binom{10}{1}^4\cdot\binom{5}{1}\right]$$

Ejemplo 5

¿De cuántas maneras se pueden repartir 27 caramelos idénticos entre 3 niños?

Solución

$$n(\mathbb{S}) = \left[\binom{27}{27}\cdot\binom{3+27-1}{27}\right]$$

De aquí se observa que esto es equivalente a

$$x_1 + x_2 + x_3 = 27, \quad x_1,\, x_2,\, x_3 \geq 0$$