Relaciones de Recurrencia

Luis Cárcamo M.

03 de septiembre de 2020

1 Recurrencias

1.1 Ejemplo 1: Método de iteraciones

Resolver la siguiente relación de recurrencia.

$$f_n = f_{n-1} + 2, \ \underbrace{f_0 = 1}_{\text{Caso base}}, \ \underbrace{n > 0}_{\text{Dominio}}$$

En este ejercicio no se puede aplicar *el teorema*, porque no es homogénea la recurrencia. Entonces usaremos el método de iteraciones.

1.1.1 Iteraciones

$$\begin{aligned}
k = 1.\ & f_n = f_{n-1} + 2 \\
k = 2.\ & f_n = \underbrace{f_{n-2} + 2}_{f_{n-1}} + 2 \\
k = 3.\ & f_n = \underbrace{f_{n-3} + 2}_{f_{n-2}} + 2 + 2
\end{aligned}$$

Nota: La paramétrica también se puede escribir de la forma

$$f_n = f_{n-k} + \sum_{i=0}^{k-1} 2$$

Una vez hemos hecho las iteraciones, procedemos a definir la **ecuación paramétrica**.

1.1.2 Ecuación paramétrica

$$f(n,k) = f_{n-k} + 2 \cdot k \tag{1}$$

Llegado este punto, la idea es deshacernos del parámetro k, para eso nos valemos de los casos base. A partir del caso base tenemos:

$$f_{n-k} = f_0 \iff n - k = 0 \implies n = k.$$

Adicionalmente, $f_{n-k} = f_{n-n} = f_0 = 1$.

La razón de $n - k = 0$ es que $n - k$ debe ser igual al **índice** del caso base.

Reemplazando estos datos en (1), tenemos:

$$\begin{aligned} f_n &= f_0 + 2 \cdot n \\ &= 1 + 2 \cdot n \end{aligned}$$

Finalmente, tenemos:

$$f_n = 2 \cdot n + 1.$$

1.2 Ejemplo 2: Método de iteraciones. Serie arimética.

Resolver la siguiente relación de recurrencia.

$$f_n = f_{n-1} + n + 1,\ f_0 = 1,\ n > 0.$$

1.2.1 Método de iteraciones

$$\begin{aligned} k = 1.\ f_n &= f_{n-1} + n + 1 \\ k = 2.\ f_n &= \underbrace{f_{n-2} + (n-1) + 1}_{f_{n-1}} + (n-0) + 1 \\ &= f_{n-2} + (n-1) + (n-0) + 1 + 1 \\ k = 3.\ f_n &= f_{n-3} + (n-2) + 1 + (n-1) + (n-0) + 1 + 1 \\ &= f_{n-3} + (n-2) + (n-1) + (n-0) + 1 + 1 + 1 \end{aligned}$$

1.2.2 Ecuación paramétrica

$$f(n,k) = f_{n-k} + \sum_{i=0}^{k-1} (n-i) + k \cdot 1$$

$$f(n,k) = f_{n-k} + \sum_{i=0}^{k-1} (n-i) + k$$

Primero, nos deshacemos del parámetro k.

$$n - k = 0 \implies n = k \implies f_{n-k} = f_0$$

Reemplazamos esto en la ecuación paramétrica.

$$f_n = f_0 + \sum_{i=0}^{n-1} (n-i) + n \tag{2}$$

$$\tag{3}$$

Esta sumatoria la resolvemos como la suma de una progresión arimética.

$$A(n, a, b) = \sum_{i=0}^{n} (a + b \cdot i) = a + b + a + 2b + \cdots + (a + nb)$$

Donde

$$A(n, a, b) = \sum_{i=0}^{n} (a + b \cdot i) = a \cdot (n + 1) + \frac{b \cdot n(n + 1)}{2} \tag{4}$$

Entonces, a partir de esto, tenemos que

$$\begin{aligned} A(n-1, n, -1) = \sum_{i=0}^{n-1} (n - i) &= n \cdot (n - 1 + 1) + \frac{(-1) \cdot (n - 1) \cdot (n - 1 + 1)}{2} \\ &= n^2 - \frac{(n-1) \cdot n}{2} = \frac{2 \cdot n^2 - n^2 + n}{2} = \frac{n^2 + n}{2} \\ &= \frac{n(n+1)}{2}. \end{aligned}$$

Reemplazamos entonces el resultado de la sumatoria en (2).

$$\begin{aligned} f_n &= f_0 + \sum_{i=0} n - 1(n - i) + n \\ &= 1 + \frac{n(n+1)}{2} + n = \frac{n(n+1)}{2} + (n + 1) = \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} \\ f_n &= \frac{(n+1)(n+2)}{2} \end{aligned}$$

Finalmente,

$$f_n = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

1.3 Ejemplo 3: Método de iteraciones. Serie geométrica

$$f_n = 2f_{n-1} + 3, \; f_0 = 2, \; n > 0.$$

1.3.1 Método de iteraciones

$$\begin{aligned} k = 1.\, f_n &= 2 \cdot f_{n-1} + 3 \\ k = 2.\, f_n &= 2 \cdot (2 \cdot f_{n-2} + 3) + 3 \\ &= 2^2 \cdot f_{n-2} + 2^1 \cdot 3 + 2^0 \cdot 3 \\ k = 3.\, f_n &= 2^2 \cdot (2 \cdot f_{n-3} + 3) + 2^1 \cdot 3 + 2^0 \cdot 3 \\ &= 2^3 \cdot f_{n-3} + 2^2 \cdot 3 + 2^1 \cdot 3 + 2^0 \cdot 3 \end{aligned}$$

1.3.2 Ecuación paramétrica

$$f(n,k) = 2^k \cdot f_{n-k} + \sum_{i=0}^{k-1} 3 \cdot 2^i$$

Nos desharemos de k. A partir del caso base, tenemos

$$n - k = 0 \implies n = k \implies f_{n-k} = f_0$$

Entonces:

$$f_n = 2^n \cdot f_0 + \sum_{i=0}^{n-1} 3 \cdot 2^i$$

Esta sumatoria la resolvemos como la suma de una progresión geométrica.

$$G(n,r,a) = \sum_{i=0}^{n-1} a \cdot r^i = a \cdot \frac{1-r^n}{1-r} \tag{5}$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} f_n &= 2^n \cdot f_0 + \underbrace{\sum_{i=0}^{n-1} 3 \cdot 2^i}_{G(n,2,3)} = 2 \cdot 2^n + 3 \cdot \frac{1-2^n}{1-2} \\ &= 2^{n+1} + 3 \cdot (2^n - 1) = 2^n \cdot 2 + 2^n \cdot 3 - 3 = 2^n \cdot (2+3) - 3 \\ f_n &= 5 \cdot 2^n - 3. \end{aligned}$$

Finalmente, la solución a la recurrencia es:

$$f_n = 5 \cdot 2^n - 3.$$

1.4 Ejercicios

- $f_n = 3 \cdot f_{n-1} + 2,\ n > 1,\ f_1 = 2$
- $f_n = 4 \cdot f_{n-1} + 2,\ n > 2,\ f_2 = 0$
- $f_n = \frac{1}{2} \cdot f_{n-1} + 2,\ n > 0,\ f_0 = 1$
- $f_n = f_{n-1} + \frac{n}{3},\ n > 0,\ f_0 = 1$