Relaciones de Recurrencia: Cambio de variable

Luis Cárcamo M.

04 de septiembre de 2020

1 Cambio de Variable

1.1 Ejemplo 1: Transformación logarítmica

$$f_n = \sqrt{f_{n-1} \cdot f_{n-2}}\,, f_0 = 1,\ f_1 = 1,\ n > 1.$$

En este caso aprovecharemos las siguientes propiedades del logaritmo:

$$\log(a \cdot b) = \log(a) + \log(b)$$

además

$$\log(a^b) = b \log a$$

Entonces, al aplicar logaritmo a ambos lados de la recurrencia:

$$\begin{aligned}
\log f_n &= \frac{1}{2} \cdot \log(f_{n-1} \cdot f_{n-2}) \\
&= \frac{1}{2} \cdot (\log f_{n-1} + \log f_{n-2})
\end{aligned}$$

Aquí aplicamos el siguiente cambio de variable:

$$g_n = \log f_n,\ \underbrace{g_0 = \log f_0,\ g_1 = \log f_1}_{\text{Casos base}}$$

Reescribiendo la recurrencia a partir del cambio de variable se obtiene:

$$g_n = \frac{1}{2} \cdot (g_{n-1} + g_{n-2})$$

1.2 Ejemplo 2:

$$f_n = \sqrt{1 + f_{n-1}^2},\ f_0 = 0,\ n > 0$$

Si aplicamos logaritmo, obtenemos:

$$\log f_n = \frac{1}{2} \cdot \log\left(1 + f_{n-1}^2\right)$$

Lo que no es tan sencillo de resolver, porque no hay manera de deshacernos de la suma dentro del logaritmo.

Aplicaremos otra transformación al elevar ambos lados al cuadrado.

$$f_n^2 = 1 + f_{n-1}^2$$

Procedemos a realizar el siguiente cambio de variable

$$g_n = f_n^2,\ g_0 = f_0^2$$

Por lo tanto

$$g_n = g_{n-1} + 1,\ g_0 = 0,\ n > 0$$

1.2.1 Método de iteraciones

$$\begin{aligned}
&k = 1.\ g_n = g_{n-1} + 1 \\
&k = 2.\ g_n = g_{n-2} + 1 + 1 \\
&k = 3.\ g_n = g_{n-3} + 1 + 1 + 1
\end{aligned}$$

Escribimos la ecuación paramétrica:

$$\begin{aligned}
g(n,k) &= g_{n-k} + \sum_{i=0}^{k-1} 1 \\
&= g_{n-k} + k
\end{aligned}$$

Lo siguiente es deshacernos del parámetro k. Esto se hace usando los casos base.

$$n - k = 0 \implies n = k \implies g_{n-k} = g_0$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned}
g_n &= g_0 + n = 0 + n \\
g_n &= n.
\end{aligned}$$

Una vez hemos hallado g_n, debemos hallar f_n.

Recordemos que

$$g_n = f_n^2$$

por lo tanto (luego de despejar f_n)

$$f_n = \sqrt{g_n}$$

Por lo que finalmente obtenemos:

$$f_n = \sqrt{n}.$$

1.2.2 Una forma de demostrar

A partir de la recurrencia original

$$f_n = \sqrt{1 + f_{n-1}^2}$$

reemplazamos la expresión cerrada que se halló para f_n.

$$\begin{aligned}
\sqrt{n} &= \sqrt{1 + \left(\sqrt{n-1}\right)^2} \\
&= \sqrt{1 + n - 1} = \sqrt{n - 0} \\
\sqrt{n} &= \sqrt{n}.
\end{aligned}$$

1.3 Ejemplo 3

$$f_n = f_{n-1} \cdot \sqrt{1 - f_{n-2}^2},\ n > 0,\ f_0 = \frac{1}{2}$$

Elevando al cuadrado ambos lados de la recurrencia se obtiene:

$$f_n^2 = f_{n-1}^2 \cdot (1 - f_{n-2}^2) = f_{n-1}^2 - f_{n-1}^2 \cdot f_{n-2}^2$$

al intentar aplicar logaritmo sucede lo siguiente:

$$2 \log f_n = \log f_{n-1}^2 + \log(1 - f_{n-2}^2),$$

ó

$$2 \log f_n = \log(f_{n-1}^2 - f_{n-1}^2 \cdot f_{n-2}^2),$$

lo que muy probablemente no nos lleve a ningún lado.

1.4 Ejemplo 4

Resolver la siguiente relación de recurrencia:

$$f_n = 2 \cdot f_{n-1} + 2^n,\ n > 0,\ f_0 = 1$$

Dividimos 2^n de ambos lados.

$$\begin{aligned}
\frac{f_n}{2^n} &= 2 \cdot \frac{f_{n-1}}{2^n} + \frac{2^n}{2^n} \\
\frac{f_n}{2^n} &= \frac{f_{n-1}}{2^{n-1}} + 1
\end{aligned}$$

Ahora hacemos el cambio de variable:

$$g_n = \frac{f_n}{2^n},\ g_0 = \frac{f_0}{2^0} = 1.$$

Por lo que tenemos la nueva recurrencia:

$$g_n = g_{n-1} + 1,\ n > 0,\ g_0 = 1.$$

Donde $g_n = n + 1$. Y a partir del cambio de variable que se hizo, al despejar f_n se obtiene:

$$f_n = 2^n \cdot g_n = 2^n \cdot (n + 1).$$

Por lo que tenemos la solución a nuestra recurrencia:

$$f_n = n2^n + 2^n.$$

1.4.1 Una forma de demostrar

$$\begin{aligned} f_n &= 2 \cdot f_{n-1} + 2^n \\ 2^n \cdot (n+1) &= 2 \cdot 2^{n-1} \cdot n + 2^n \\ &= 2^n \cdot n + 2^n \\ &= 2^n \cdot (n+1). \end{aligned}$$