Análisis Combinatorio

Luis Cárcamo M.

1 de octubre de 2020

1. Cadenas

Para los siguientes ejercicios, considere las letras *ABC-DEF*, para cadenas sin repetición.

1.1. Ejemplo 1

Cadenas de longitud 6 que contengan la subcadena AB.
Palomar

$$\_\_\ AB\ \_\_$$

Fórmula

1. Primero escogemos A y B y las ubicamos en un palomar.

$$\left[\binom{2}{2}\cdot\binom{1}{1}\right]$$

2. Escogemos las letras restantes (C, D, E y F) y las distribuimos en los palomares. Adicionalmente, debemos permutarlas.

$$\left[\underbrace{\binom{6-2}{6-2}}_{\text{Seleccionar}}\cdot\underbrace{\binom{2+(6-2)-1}{6-2}}_{\text{Distribuir}}\cdot\underbrace{\binom{6-2}{1,1,1,1}}_{\text{Permutar}}\right]$$

3. Finalmente, juntamos el resultado de cada paso.

$$\left[\binom{2}{2}\cdot\binom{1}{1}\right]\cdot\left[\binom{6-2}{6-2}\cdot\binom{2+(6-2)-1}{6-2}\cdot\binom{6-2}{1,1,1,1}\right]$$

1.2. Ejemplo 2

Cadenas de longitud 6 que contengan las letras A y B juntas.

Palomar A diferencia del primer ejemplo, en este caso no importa el orden en que vayan A y B, sino que solo importa que estén juntas. Es decir, tanto la subcadena AB como BA son válidas.

$$\_\_\ AB\ \_\_$$

Fórmula

1. Primero escogemos A y B, las ubicamos en un palomar y las permutamos.

$$\left[\binom{2}{2} \cdot \binom{1}{1} \cdot \binom{2}{1,1}\right]$$

2. Escogemos las letras restantes (C, D, E y F) y las distribuimos en los palomares. Adicionalmente, debemos permutarlas.

$$\left[\underbrace{\binom{6-2}{6-2}}_{\text{Seleccionar}} \cdot \underbrace{\binom{2+(6-2)-1}{6-2}}_{\text{Distribuir}} \cdot \underbrace{\binom{6-2}{1,1,1,1}}_{\text{Permutar}}\right]$$

3. Finalmente, juntamos el resultado de cada paso.

$$\left[\binom{2}{2} \cdot \binom{1}{1} \cdot \binom{2}{1,1}\right] \cdot \left[\binom{6-2}{6-2} \cdot \binom{2+(6-2)-1}{6-2} \cdot \binom{6-2}{1,1,1,1}\right]$$

1.3. Ejemplo 3

Cadenas de longitud 6 que contengan las letras D y E no estén juntas.

1.3.1. Solución Directa

Palomar Ubicamos un palomar **no vacío** entre D y E. Además, es importante tener en cuenta que no importa en qué orden estén las dos letras, es decir, puede ir tanto la D antes de la E o la D antes de la E, por lo que debemos permutarlas.

$$\_\_\ D\ \underline{*}\ E\ \_\_$$

Fórmula

1. Primero seleccionamos D y E y las permutamos.

$$\left[\binom{2}{2} \cdot \binom{2}{2} \cdot \binom{2}{1,1}\right]$$

2. Ahora debemos asegurarnos de que en el comodín vaya al menos una letra. Por lo que escogemos una cualquiera de las letras restantes.
$$\left[\binom{6-2}{1}\cdot\binom{1}{1}\right]$$
3. Por último, seleccionamos las ahora restantes y las distribuimos en los tres palomares y las permutamos.
$$\left[\binom{6-3}{6-3}\cdot\binom{3+(6-3)-1}{6-3}\cdot\binom{6-3}{1,1,1}\right]$$

Por lo tanto, la respuesta final es
$$f_n=\left[\binom{2}{2}\cdot\binom{2}{2}\cdot\binom{2}{1,1}\right]\cdot\left[\binom{6-2}{1}\cdot\binom{1}{1}\right]\cdot\left[\binom{6-3}{6-3}\cdot\binom{3+(6-3)-1}{6-3}\cdot\binom{6-3}{1,1,1}\right]$$

1.3.2. Solución por Complemento

Palomar Esta cantidad se puede definir como el total de palabras posibles menos las palabras que tienen a D y E juntas.
$$\{\ \_\ \}-\{\ \_\ DE\ \_\ \}$$

Fórmula

1. Lo primero es definir el gran total:
$$\left[\binom{6}{6}\cdot\binom{1+6-1}{6}\cdot\binom{6}{1,1,1,1,1,1}\right]$$
2. Recordemos que la cantidad de palabras a partir las letras definidas que se pueden formar de tal modo que D y E estén juntas es
$$\left[\binom{2}{2}\cdot\binom{1}{1}\cdot\binom{2}{1,1}\right]\cdot\left[\binom{6-2}{6-2}\cdot\binom{2+(6-2)-1}{6-2}\cdot\binom{6-2}{1,1,1,1}\right]$$

$$\begin{aligned}f_n=&\left[\binom{6}{6}\cdot\binom{1+6-1}{6}\cdot\binom{6}{1,1,1,1,1,1}\right]\\&-\left[\binom{2}{2}\cdot\binom{1}{1}\cdot\binom{2}{1,1}\right]\cdot\left[\binom{6-2}{6-2}\cdot\binom{2+(6-2)-1}{6-2}\cdot\binom{6-2}{1,1,1,1}\right]\end{aligned}$$

2. Soluciones Enteras

2.1. Ejemplo 1

$$x1+x2+x3=10,\quad x_1\geq 1,\ x_2\geq 2,\ x3\geq 0$$

Solución

1. Primero nos aseguramos de de que $x1 \geq 1$ y $x2 \geq 2$.

$$\left[\binom{1}{1} \cdot \binom{1}{1}\right] \cdot \left[\binom{2}{2} \cdot \binom{1}{1}\right]$$

2. Distribuimos la cantidad restante en $x1$, $x2$ y $x3$.

$$\left[\binom{10-3}{10-3} \cdot \binom{3+(10-3)-1}{10-3}\right]$$

Por lo tanto

$$f_n = \left[\binom{1}{1} \cdot \binom{1}{1}\right] \cdot \left[\binom{2}{2} \cdot \binom{1}{1}\right] \cdot \left[\binom{10-3}{10-3} \cdot \binom{3+(10-3)-1}{10-3}\right]$$