Funciones Generadoras Exponenciales

Luis Cárcamo M.

September 25, 2020

1 Sumatorias

1.1 Ejemplo 1

Hallar la EGF de

$$\left\{ \sum_{0\le k\le n} 1 \right\}_{n\ge 0}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{0\le k\le n} 1 &= \underbrace{1+1+\cdots+1}_{n+1 \text{ veces}} = n+1,\\
\sum_{1\le k\le n} 1 &= \underbrace{1+1+\cdots+1}_{n \text{ veces}} = n,\\
\sum_{0\le k\le n} k &= \sum_{1\le k\le n} k = \binom{n+1}{2} = \frac{1}{2}\cdot n\cdot (n+1).
\end{aligned}$$

1.2 Ejemplo 2

Hallar la EGF de

$$\left\{ \sum_{0\le k\le n} \binom{n}{k} a^k \right\}_{n\ge 0}$$

Solución Definimos $H(z)$ como la EGF de la secuencia.

$$H(z) = \sum_{n\geq 0} \sum_{0\leq k\leq n} \binom{n}{k} a^k \cdot \frac{z^n}{n!}.$$

Aquí usaremos la suma binomial. En este caso

$$f_k = a^k \rightarrow f_n = a^n.$$
$$g_{n-k} = 1 \rightarrow g_n = 1.$$

Dados f_n y g_n, entonces sus EGFs son:

$$F(z) = e^{az}.$$
$$G(z) = e^z.$$

Dado que $H(z)$ resulta de la convolución binomial de $F(z)$ y $G(z)$, entonces $H(z) = F(z) \cdot G(z)$. Es decir

$$H(z) = e^{az} \cdot e^z = e^{(a+1)\cdot z}.$$

Para $H(z)$ se cumple que

$$n![z^n]H(z) = (a+1)^n.$$

Es decir

$$\sum_{0\leq k\leq n} \binom{n}{k} a^k = (a+1)^n.$$

1.3 Ejemplo 3

$$f_n = 3^n.$$

Y dado que $F(z)$ es su EGF, sabemos que $F(z) = e^{3z}$.

Entonces, aplicando la multiplicación por el índice varias veces, tenemos:

$$
\begin{aligned}
e^{3z} &= \sum_{n\geq 0} 3^n \cdot \frac{z^n}{n!} \\
ze^{3z} &= \sum_{n\geq 0} n \cdot 3^{n-1} \cdot \frac{z^n}{n!} \\
z^2e^{3z} &= \sum_{n\geq 0} n \cdot (n-1) \cdot 3^{n-2} \cdot \frac{z^n}{n!}
\end{aligned}
$$

1.4 Ejemplo 4

Hallar la EGF de

$$
\left\{ \sum_{0\leq k\leq n} \binom{n}{k} \cdot a^n \right\}_{n\geq 0}
$$

Solución

$$
\sum_{0\leq k\leq n} \binom{n}{k} \cdot a^n = \sum_{0\leq k\leq n} \binom{n}{k} \cdot a^k \cdot a^{n-k}
$$

Definimos $F(z)$ como la EGF de la secuencia.

$$
\begin{aligned}
F(z) &= \sum_{n\geq 0} \sum_{0\leq k\leq n} \binom{n}{k} \cdot a^n \cdot \frac{z^n}{n!} \\
&= \sum_{n\geq 0} \sum_{0\leq k\leq n} \binom{n}{k} \cdot a^k \cdot a^{n-k} \cdot \frac{z^n}{n!} \\
&= \left(\sum_{n\geq 0} a^n \cdot \frac{z^n}{n!} \right) \left(\sum_{n\geq 0} a^n \cdot \frac{z^n}{n!} \right) = \left(\sum_{n\geq 0} a^n \cdot \frac{z^n}{n!} \right)^2 \\
F(z) &= (e^{a\cdot z})^2 = e^{2\cdot a\cdot z}.
\end{aligned}
$$

De esto, se concluye que

$$n![z^n]F(z) = (2 \cdot a)^n.$$

1.5 Ejemplo 5

Hallar la EGF de

$$\left\{ \sum_{0 \le k \le n} \binom{n}{k} \cdot a^n \right\}_{n \ge 0}$$

Solución Definimos $F(z)$ como la EGF de la secuencia.

$$\begin{aligned} F(z) &= \sum_{n \ge 0} \sum_{0 \le k \le n} \binom{n}{k} \cdot a^n \cdot \frac{z^n}{n!} \\ &= \sum_{n \ge 0} \left(a^n \cdot \sum_{0 \le k \le n} \binom{n}{k} \cdot \frac{z^n}{n!} \right) = \sum_{n \ge 0} a^n \cdot 2^n \cdot \frac{z^n}{n!} \\ &= \sum_{n \ge 0} (2 \cdot a)^n \cdot \frac{z^n}{n!} \\ F(z) &= e^{2 \cdot a \cdot z}. \end{aligned}$$

Extra

$$
\begin{aligned}
F(z) &= F\left(\frac{z}{1+z}\right) \\
\sum_{n\geq 0} f_n \cdot \frac{z^n}{n!} &= \sum_{n\geq 0} f_n \cdot \frac{1}{n!} \cdot \left(\frac{z}{1+z}\right)^n \\
&= \sum_{n\geq 0} f_n \cdot \left(\frac{1}{1+z}\right)^n \cdot \frac{z^n}{n!} \\
&= \sum_{n\geq 0} f_n \cdot (1+z)^{-n} \cdot \frac{z^n}{n!} \\
&= \sum_{n\geq 0} f_n \cdot \left(\sum_{k\geq 0} \binom{-n}{k} \cdot z^k\right) \cdot \frac{z^n}{n!}.
\end{aligned}
$$

Nota: Este coeficiente binomial corresponde a los usados en la generalización del teorema del bionomio de Newton.

$$\binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1)}{k!}.$$

Otro ejemplo

$$e^z = \sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n!}.$$

Entonces

$$e^{z^2} = \sum_{n\geq 0} \frac{{z^2}^n}{n!}.$$