# Análisis Combinatorio

Luis Cárcamo M.

17 de octubre de 2020

### Soluciones Enteras

### Ejemplo 1

¿Cuántos números entre 1 y 1.000.000 tienen la suma de sus dígitos igual a 15?

**Solución:** Inicialmente, se excluye a 1.000.000, dado que sus dígitos no alcanza a sumar 15 y además, así reduce el problema a contar los número de entre 1 y 6 dígitos cuya suma sea igual a 15.

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 15$$
  
sujeto a:  $0 \le x_i \le 9$ ,  $i = 1, 2, ..., 5$ 

1. Primero calculamos todas las posibles (sin restricciones)

$$\overline{x_1}$$
  $\overline{x_2}$   $\overline{x_3}$   $\overline{x_4}$   $\overline{x_5}$   $\overline{x_6}$ 

$$\left[ \binom{15}{15} \binom{6+15-1}{15} \right]$$

2. Quitar las opciones que no cumplen con las restricciones. Es decir, todas las opciones en las que por lo menos un dígito tiene más de 9.

$$\frac{10}{x_1}$$
  $\frac{1}{x_2}$   $\frac{1}{x_3}$   $\frac{1}{x_4}$   $\frac{1}{x_5}$   $\frac{1}{x_6}$ 

$$\begin{bmatrix} \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} 15 - 10 \\ 15 - 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 + (15 - 10) - 1 \\ 15 - 10 \end{bmatrix}$$

Finalmente, la respuesta es

$$n(\mathbb{S}) = \begin{bmatrix} \binom{15}{15} \binom{6+15-1}{15} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \binom{10}{10} \cdot \binom{6}{1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \binom{15-10}{15-10} \binom{6+(15-10)-1}{15-10} \end{bmatrix}$$

### Ejemplo 2

$$x1 + x2 + x3 + x4 = 17.$$

Sujeto a

$$x1 \ge 0, x2 \ge 1, x3 \ge 2, x4 \ge 3$$

**Solución** Primero planteamos el problema con palomares **Planteamiento:** 

$$\frac{1}{x_1} \frac{1}{x_2} \frac{2}{x_3} \frac{3}{x_4}$$

Fórmula:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{bmatrix}}_{x_3 > 1} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{bmatrix}}_{x_3 > 2} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{bmatrix}}_{x_4 > 3} \cdot \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} 17 - 6 \\ 17 - 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 + (17 - 6) - 1 \\ 17 - 6 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

Nota: La solución a este problema es equivalente a la solución de

$$x1 + x2 + x3 + x4 = 13$$
,  $x1, x2, x3, x4 \ge 0$ 

### Ejemplo 3

$$x_1 + x_2 + x_3 = 15$$

sujeto a

$$0 \le x_1 \le 10, x_2 = 3, x_3 \ge 1$$

Solución:

$$\left\{ \, \frac{}{x_{1}} \, 3 \, \frac{1}{x_{3}} \, \right\} - \left\{ \, \frac{11}{x_{1}} \, 3 \, \frac{1}{x_{3}} \, \right\}$$

1. Primero contamos todos los casos

$$n(\mathbb{S}) = \underbrace{\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}}_{x_2 = 3} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}}_{x_3 > 1} \cdot \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} 15 - 4 \\ 15 - 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 + (15 - 4) - 1 \\ 15 - 4 \end{bmatrix}$$

2. Ahora quitamos todas esas opciones donde x1 > 10, es decir  $x_1 \ge 11$ .

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{bmatrix}}_{x_2 - 3} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{bmatrix}}_{x_2 - 1} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \begin{pmatrix} 11 \\ 11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{bmatrix}}_{x_2 - 10} \cdot \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} 15 - 11 - 3 - 1 \\ 15 - 11 - 3 - 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 + (15 - 11 - 3 - 1) - 1 \\ 15 - 11 - 3 - 1 \end{pmatrix} \end{bmatrix}$$

## Ejemplo 4

¿Cuántos números pares de 6 dígitos hay?

#### Solución:

$$\underbrace{ \begin{bmatrix} 1-9 \end{bmatrix}}_{\left(1\right)} \underbrace{ \begin{bmatrix} 0-9 \end{bmatrix}}_{\left[0\right]} \underbrace{ \begin{bmatrix} 0-9 \end{bmatrix}}_{\left[0\right]} \underbrace{ \begin{bmatrix} 0-9 \end{bmatrix}}_{\left[0\right]} \underbrace{ \begin{bmatrix} 0,2,4,6,8 \end{bmatrix}}_{\left(1\right)}$$

$$n(\mathbb{S}) = \left[ \begin{pmatrix} 9 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 1 \end{pmatrix}^4 \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$$

## Ejemplo 5

¿De cuántas maneras se pueden repartir 27 caramelos idénticos entre 3 niños?

#### Solución

$$n(\mathbb{S}) = \left[ \begin{pmatrix} 27\\27 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3+27-1\\27 \end{pmatrix} \right]$$

De aquí se observa que esto es equivalente a

$$x_1 + x_2 + x_3 = 27$$
,  $x_1, x_2, x_3 \ge 0$