Análisis Combinatorio

Luis Cárcamo M.

16 de octubre de 2020

Cadenas

Ejemplo 1

¿Cuantas subcadenas de longitud 4 pueden formarse con los caracteres de la cadena MISSISSIPPI?

Solución

1. Primero definimos $n = 11$.
2. Posterior a esto, debemos definir el número de categorías, $c = 4$.
3. Después de definir n y c, determinamos la cantidad de categoría.
$$\begin{aligned} &n_1 = n_2 = 4; (I, S) \\ &n_3 = 2; (P) \\ &n_4 = 1; (M) \end{aligned}$$
4. Lo siguiente es escribir las particiones válidas para $m = 4$. Este valor m corresponde a la longitud de las cadenas que se nos pide contar.

   Entonces: En este caso, todas las particiones son válidas.
$$\begin{array}{llll} 4 & & & \\ 3 & 1 & & \\ 2 & 2 & & \\ 2 & 1 & 1 & \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}$$
5. Finalmente, procedemos a contar.
   - Para **4**: *IIII*
$$n(\mathbb{S}_1) = \left[\binom{2}{1} \cdot \binom{4}{4}\right]$$
     Esto es: Hay dos categorías que tienen por lo menos 4 elementos. Escogemos una de esas categorías y ubicamos 4 elementos de esta. No es necesario permutar porque los 4 elementos son idénticos.

- Para **3 1**: *IIIM*

$$n(\mathbb{S}_2) = \underbrace{\left[\binom{2}{1}\cdot\binom{3}{3}\right]}_{3}\cdot\underbrace{\left[\binom{4-1}{1}\cdot\binom{1}{1}\right]}_{1}\cdot\underbrace{\binom{4}{3,1}}_{\text{Permutar}}$$

- Para **2 2**: *IIPP*

$$n(\mathbb{S}_3) = \left[\binom{3}{2}\binom{2}{2}\right]\cdot\binom{4}{2,2}$$

- Para **2 1 1**: *IIMP*

$$n(\mathbb{S}_4) = \underbrace{\left[\binom{3}{1}\binom{2}{2}\right]}_{2}\cdot\underbrace{\left[\binom{4-1}{2}\binom{1}{1}\right]}_{1\ 1}\cdot\binom{4}{2,1,1}$$

- Para **1 1 1 1**: *IMPS*

$$n(\mathbb{S}_5) = \left[\binom{4}{4}\binom{1}{1}\right]\cdot\binom{4}{1,1,1,1}$$

6. Finalmente, sumamos todos estos elementos, y obtenemos:

$$n(\mathbb{S}) = n(\mathbb{S}_1) + n(\mathbb{S}_2) + n(\mathbb{S}_3) + n(\mathbb{S}_4) + n(\mathbb{S}_5)$$

Ejemplo 2

¿Cuántas cadenas de longitud 4 pueden formarse con los caracteres de la cadena PARALELEPIPEDO?

1. $n = 14$.
2. $c = 8$.
3. Eelementos de cada categoría:

$$\begin{aligned} n_1 = n_2 &= 3; (E, P) \\ n_3 = n_4 &= 2; (A, L) \\ n_5 = n_6 = n_7 = n_8 &= 1; (D, I, O, R) \end{aligned}$$

4. Particiones:

$$\begin{array}{llll} 3 & 1 & & \\ 2 & 2 & & \\ 2 & 1 & 1 & \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}$$

5. ▪ Para **3 1**: *EEEA*

$$n(\mathbb{S}_{3,1}) = \left[\binom{2}{1} \cdot \binom{3}{3}\right] \cdot \left[\binom{8-1}{1} \cdot \binom{1}{1}\right] \cdot \binom{4}{3,1}$$

   ▪ Para **2 2**: *AAEE*

$$n(\mathbb{S}_{2,2}) = \left[\binom{4}{2} \cdot \binom{2}{2}\right] \cdot \binom{4}{2,2}$$

   ▪ Para **2 1 1**: *AADE*

$$n(\mathbb{S}_{2,1,1}) = \left[\binom{4}{1} \cdot \binom{2}{2}\right] \cdot \left[\binom{8-1}{2}\binom{1}{1}\right] \cdot \binom{4}{2,1,1}$$

   ▪ Para **1 1 1 1**: *ADEI*

$$n(\mathbb{S}_{1,1,1,1}) = \left[\binom{8}{4} \cdot \binom{1}{1}\right] \cdot \binom{4}{1,1,1,1}$$

6. Finalmente:

$$n(\mathbb{S}) = n(\mathbb{S}_{3,1}) + n(\mathbb{S}_{2,2}) + n(\mathbb{S}_{2,1,1}) + n(\mathbb{S}_{1,1,1,1})$$

Ejemplo 3

¿Cuántas cadenas de longitud 5 pueden formarse con los caracteres de la cadena PARALELEPIPEDO?

1. $n = 14$.
2. $c = 8$.
3. Eelementos de cada categoría:

$$\begin{aligned} n_1 = n_2 &= 3; (E, P) \\ n_3 = n_4 &= 2; (A, L) \\ n_5 = n_6 = n_7 = n_8 &= 1; (D, I, O, R) \end{aligned}$$

4. Particiones:

$$\begin{array}{ccccc} 3 & 2 & & & \\ 3 & 1 & 1 & & \\ 2 & 2 & 1 & & \\ 2 & 1 & 1 & 1 & \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}$$

5. Conteo para cada partición

- Para **3 2**:

$$n(\mathbb{S}_1) = \left[\binom{2}{1} \cdot \binom{3}{3}\right] \cdot \left[\binom{4-1}{1} \cdot \binom{2}{2}\right] \cdot \binom{5}{3,2}$$

- Para **3 1 1**:

$$n(\mathbb{S}_2) = \left[\binom{2}{1} \cdot \binom{3}{3}\right] \cdot \left[\binom{8-1}{2} \cdot \binom{1}{1}\right] \cdot \binom{5}{3,1,1}$$

- Para **2 2 1**:

$$n(\mathbb{S}_3) = \underbrace{\left[\binom{4}{2} \cdot \binom{2}{2}\right]}_{2,2} \cdot \underbrace{\left[\binom{8-2}{1} \cdot \binom{1}{1}\right]}_{1} \cdot \binom{5}{2,2,1}$$

- Para **2 1 1 1**:

$$n(\mathbb{S}_4) = \underbrace{\left[\binom{4}{1} \cdot \binom{2}{2}\right]}_{2,2} \cdot \underbrace{\left[\binom{8-1}{3} \cdot \binom{1}{1}\right]}_{1} \cdot \binom{5}{2,1,1,1}$$

- Para **1 1 1 1 1**

$$n(\mathbb{S}_5) = \underbrace{\left[\binom{8}{5} \cdot \binom{1}{1}\right]}_{1,1,1,1,1} \cdot \binom{5}{1,1,1,1,1}$$

6. Finalmente:

$$n(\mathbb{S}) = n(\mathbb{S}_1) + n(\mathbb{S}_2) + n(\mathbb{S}_3) + n(\mathbb{S}_4) + n(\mathbb{S}_5)$$

Proyecto Computacional

Ejemplo 1

¿Cuántas cadenas binarias hay tal que el número 1 no aparece exactamente 2 o 3 veces?

Solución

$$F(z) = \underbrace{\left(\sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n!}\right)}_{\text{Ceros}} \cdot \underbrace{\left(\sum_{\substack{n\geq 0\\ n\neq 2,\ n\neq 3}} \frac{z^n}{n!}\right)}_{\text{Unos}}$$

A partir de la tabla EGFs, tenemos:

$$\begin{aligned} F(z) &= e^z \cdot \left(e^z - z^2/2 - z^3/6\right) \\ &= e^{2z} - \frac{z^2 e^z}{2} - \frac{z^3 e^z}{6} \end{aligned}$$

De aquí, tenemos que:

$$f_n = 2^n - \binom{n}{2} - \binom{n}{3}$$

Ejemplo 2

¿Cuántas cadenas binarias hay tal que el número 1 no aparece exactamente 1 vez y el número 0 aparece por lo menos una vez?

Solución

$$F(z) = \underbrace{\left(\sum_{\substack{n\geq 0\\ n\neq 0}} \frac{z^n}{n!}\right)}_{\text{Ceros}} \cdot \underbrace{\left(\sum_{\substack{n\geq 0\\ n\neq 1}} \frac{z^n}{n!}\right)}_{\text{Unos}}$$

A partir de la tabla EGFs, tenemos:

$$\begin{aligned} F(z) &= (e^z - 1) \cdot (e^z - z) \\ &= e^{2z} - ze^z - e^z + z \end{aligned}$$

De aquí, tenemos que:

$$f_n = 2^n - n - 1$$

Esta respuesta NO es complementamente correcta.

Recordemos que dado f_n, el n-ésimo término de su EGF es $f_n \cdot \dfrac{z^n}{n!}$.
Entonces, z corresponde a un f_1 (es decir, $\frac{z^1}{1!}$).
De f_n tenemos que $f_1 = 0$, sin embargo, esto no es correcto.
Entonces, dado que $n![z^1]z = 1$, entonces $f_n = 0 + 1 = 1$.
Por lo tanto:

$$f_n = \begin{cases} 2^n - n - 1, & n \neq 1, \\ 1, & n = 1 \end{cases}$$

Ejemplo 3

Dado $F(z) = e^{4z} - 8z^2 - 1$ hallar f_n.
Para mayor claridad, esto es:

$$F(z) = e^{4z} - 16 \cdot \frac{z^2}{2!} - 1 \cdot \frac{z^0}{0!} \qquad = \left(\sum_{n\geq 0} 4^n \cdot \frac{z^n}{n!}\right) - 16 \cdot \frac{z^2}{2!} - 1 \cdot \frac{z^0}{0!}$$

Inicialmente, podríamos escribir

$$f_n = 4^n.$$

Sin embargo, esta respuesta NO es correcta.
De $F(z)$ sabemos que:

$$f_0 = 4^0 - 0 - 1 = 1 - 1 = 0$$

Por otro lado,

$$f_2 = 4^2 - 16 - 0 = 16 - 16 = 0$$

Finalmente, la respuesta correcta es

$$f_n = \begin{cases} 4^n, & n \neq 0, n \neq 2, \\ 0, & n = 0, 2 \end{cases}$$

Otro

$$F(z) = \sum_{\substack{n \geq 4 \\ n \bmod 2 = 0}} \frac{z^n}{n!} = \frac{e^z + e^{-z}}{2} - \frac{z^2}{2!} - \frac{z^0}{0!}$$