Funciones Generadoras

Luis Cárcamo M.

September 11, 2020

1 Funciones Generadoras Exponenciales (EGFs)

Dada una secuencia $\{f_n\}_{n\geq 0}$, entonces su EGF $F(z)$ viene dada de la siguiente manera:

$$F(z) = f_0 \cdot \frac{z^0}{0!} + f_1 \cdot \frac{z^1}{1!} + f_2 \cdot \frac{z^2}{2!} + f_3 \cdot \frac{z^3}{3!} + \cdots = \sum_{n\geq 0} f_n \cdot \frac{z^n}{n!}.$$

Esto es: Convertimos los términos de las secuencia el coeficientes de una serie de potencias.

1.1 Ejemplo 1

Dada la secuencia $\{1\}_{n\geq 0}$, hallar su función generadora.

$$F(z) = 1 \cdot \frac{z^0}{0!} + 1 \cdot \frac{z^1}{1!} + 1 \cdot \frac{z^2}{2!} + 1 \cdot \frac{z^3}{3!} + \cdots = \sum_{n\geq 0} 1 \cdot \frac{z^n}{n!}.$$

Donde

$$F(z) = \sum_{n\geq 0} 1 \cdot \frac{z^n}{n!} = e^z.$$

Por lo tanto, la EGF de $\{1\}_{n\geq 0}$ es e^z.
Esto se escribe:

$$n![z^n]e^z = 1.$$

1.2 Ejemplo 2

Dada la secuencia $\{2\}_{n\geq 0}$, hallar su función generadora.

$$\begin{aligned} F(z) &= 2 \cdot \frac{z^0}{0!} + 2 \cdot \frac{z^1}{1!} + 2 \cdot \frac{z^2}{2!} + 2 \cdot \frac{z^3}{3!} + \cdots = \sum_{n\geq 0} 2 \cdot \frac{z^n}{n!} \\ &= 2 \cdot \left(1 \cdot \frac{z^0}{0!} + 1 \cdot \frac{z^1}{1!} + 1 \cdot \frac{z^2}{2!} + 1 \cdot \frac{z^3}{3!} + \cdots\right) = 2 \cdot \left(\sum_{n\geq 0} 1 \cdot \frac{z^n}{n!}\right) \\ F(z) &= 2 \cdot e^z. \end{aligned}$$

Entonces:

$$n![z^n]2 \cdot e^z = 2.$$

1.3 Ejemplo 3

Dada la secuencia $\{2\}_{n \geq 0}$, hallar su función generadora.

$$\begin{aligned} F(z) &= 2 \cdot \frac{z^0}{0!} + 2 \cdot \frac{z^1}{1!} + 2 \cdot \frac{z^2}{2!} + 2 \cdot \frac{z^3}{3!} + \cdots = \sum_{n \geq 0} 2 \cdot \frac{z^n}{n!} \\ &= \sum_{n \geq 0} (1+1) \cdot \frac{z^n}{n!} = \underbrace{\sum_{n \geq 0} 1 \cdot \frac{z^n}{n!}}_{e^z} + \underbrace{\sum_{n \geq 0} 1 \cdot \frac{z^n}{n!}}_{e^z} \\ F(z) &= e^z + e^z = 2 \cdot e^z. \end{aligned}$$

Entonces:

$$n![z^n]2 \cdot e^z = 2.$$