Funciones Generadoras Exponenciales

Luis Cárcamo M.

September 17, 2020

1 Funciones Generadoras Exponenciales (EGFs)

Dada una secuencia $\{f_n\}_{n\geq 0}$, entonces su EGF $F(z)$ viene dada de la siguiente manera:

1.1 Definición

$$F(z) = f_0 \cdot \frac{z^0}{0!} + f_1 \cdot \frac{z^1}{1!} + f_2 \cdot \frac{z^2}{2!} + f_3 \cdot \frac{z^3}{3!} + \cdots = \sum_{n\geq 0} f_n \cdot \frac{z^n}{n!}.$$

Esto es: Convertimos los términos de las secuencia el coeficientes de una serie de potencias. Una serie de potencias es algo de la forma

$$F(z) = \sum_{n\geq 0} f_n \cdot k(z)$$

Donde $k(z)$ es el *kernel*, que debe ser de la forma $z^{p(n)} \cdot q(n)$.
Un ejemplo básico sería:

$$F(z) = \sum_{n\geq 0} f_n \cdot z^n$$

En el caso de las funciones generadoras exponenciales (EGFs) el *kernel* es $\frac{z^n}{n!}$.
Lo que significa que la EGF de una secuencia $\{f_n\}_{n\geq 0}$ es:

$$F(z) = \sum_{n\geq 0} f_n \cdot \frac{z^n}{n!}$$

El *kernel* en una EGF **debe** estar explícito.

1.2 Ejemplos

1.2.1 Ejemplo 1

Dada la secuencia $\{1\}_{n\geq 0}$, determinar su EGF.

Esto significa que $f_n = 1$, $n \geq 0$. Por lo tanto esto representa la secuencia $\langle 1, 1, 1, 1, \ldots, 1, \ldots \rangle$. En general f_n es $\langle f_0, f_1, f_2, f_3, \ldots, f_n, \ldots \rangle$.

Dado esto, la EGF de $\{1\}_{n\geq 0}$ es:

$$F(z) = \sum_{n\geq 0} \underbrace{1}_{f_n} \cdot \frac{z^n}{n!} = 1\cdot\frac{z^0}{0!} + 1\cdot\frac{z^1}{1!} + 1\cdot\frac{z^2}{2!} + 1\cdot\frac{z^3}{3!} + \cdots + 1\cdot\frac{z^n}{n!} + \cdots$$
$$F(z) = e^z.$$

Esto se escribe:

$$n![z^n]e^z = 1.$$

Esto se lee como *el coeficiente de la EGF $F(z) = e^z$ es 1, para* $n \geq 0$.

1.2.2 Ejemplo 2

Dada la secuencia $\{2\}_{n\geq 0}$, determinar su EGF.

Esto significa que la secuencia es:

$$\langle 2,\, 2,\, 2,\, 2\,, \ldots,\, 2,\, \ldots\rangle$$

Es decir, $f_n = 2$.

Primero definimos $F(z)$ como su EGF:

$$F(z) = \sum_{n\geq 0} 2\cdot\frac{z^n}{n!}$$

Este ejercicio se puede resolver de dos maneras distintas

Una posible solución

$$F(z) = \sum_{n\geq 0} 2\cdot\frac{z^n}{n!} = 2\cdot\frac{z^0}{0!} + 2\cdot\frac{z^1}{1!} + \cdots + 2\cdot\frac{z^n}{n!} + \cdots$$

Entonces despejamos el 2 por ser una constante respecto al índice de la sumatoria (n) y por estar multiplicando a todos los términos.

$$F(z) = 2\cdot \underbrace{\left(\sum_{n\geq 0} 1\cdot\frac{z^n}{n!}\right)}_{e^z} = 2\cdot \underbrace{\left(1\cdot\frac{z^0}{0!} + 1\cdot\frac{z^1}{1!} + \cdots + 1\cdot\frac{z^n}{n!} + \cdots\right)}_{e^z}$$
$$F(z) = 2\cdot e^z.$$

Es decir: La función generadora de $\{2\}_{n\geq 0}$ es $2\cdot e^z$.

Otra forma de resolverlo

$$F(z) = \sum_{n\geq 0} 2 \cdot \frac{z^n}{n!} = 2 \cdot \frac{z^0}{0!} + 2 \cdot \frac{z^1}{1!} + \cdots + 2 \cdot \frac{z^n}{n!} + \cdots$$

Si en lugar de un 2 hubiese un 1 en el coeficiente, esto sería más sencillo.

$$F(z) = \sum_{n\geq 0} (1+1) \cdot \frac{z^n}{n!} = (1+1) \cdot \frac{z^0}{0!} + (1+1) \cdot \frac{z^1}{1!} + \cdots + (1+1) \cdot \frac{z^n}{n!} + \cdots$$

Recordemos que una propiedas de las sumatorias es:

$$\sum_{P(n)} (f_n + g_n) = \sum_{P(n)} f_n + \sum_{P(n)} g_n.$$

Por lo tanto, en nuestro ejemplo tenemos

$$\begin{aligned} F(z) &= \underbrace{\left(\sum_{n\geq 0} 1 \cdot \frac{z^n}{n!} \right)}_{e^z} + \underbrace{\left(\sum_{n\geq 0} 1 \cdot \frac{z^n}{n!} \right)}_{e^z} \\ &= e^z + e^z = 2 \cdot e^z \\ F(z) &= 2 \cdot e^z. \end{aligned}$$

Comprobación Es posible comprobar nuestra solución. Esto se hace de la siguiente manera:

Si $F(z)$ es la EGF de f_n, entonces, la n-ésima derivada de $F(z)$ evaluada en 0 debe ser igual a f_n.

Es decir $F^{(n)}(0) = f_n$.

En este caso, la n-ésima derivada de $2 \cdot e^z$ evaluada en 0 debe ser igual a 2.

1.2.3 Ejemplo 3

Hallar la EGF de $\{n+1\}_{n>4}$.

Primero definimos $F(z)$ como la EGF de esta secuencia.

$$F(z) = \sum_{n>4} (n+1) \cdot \frac{z^n}{n!} \tag{1}$$

Una forma de resolverlo En este enfoque partimos de $F(z)$. Ahora, cambiaremos el dominio de estas sumatorias, de modo que queden como está definido para $F(z)$ en (1).

$$\underbrace{\sum_{n\geq 5} (n+1) \cdot \frac{z^n}{n!}}_{F(z)} = \left(\sum_{n\geq 5} n \cdot \frac{z^n}{n!} \right) + \left(\sum_{n\geq 5} 1 \cdot \frac{z^n}{n!} \right) \qquad \langle 0,0,0,0,0,\underbrace{6,7,8,\cdots,n+1,\ldots}_{n\geq 5} \rangle$$

Esto se puede re-escribir como

$$F(z) = \left(\underbrace{\sum_{n\geq 0} n \cdot \frac{z^n}{n!}}_{ze^z} - \sum_{0\leq n\leq 4} n \cdot \frac{z^n}{n!} \right) + \left(\underbrace{\sum_{1\geq 0} 1 \cdot \frac{z^n}{n!}}_{e^z} - \sum_{0\leq n\leq 4} 1 \cdot \frac{z^n}{n!} \right)$$

$$F(z) = ze^z + e^z - \sum_{0\leq n\leq 4} n \cdot \frac{z^n}{n!} - \sum_{0\leq n\leq 4} 1 \cdot \frac{z^n}{n!}$$

Expandiendo las sumatorias se obtiene

$$\begin{aligned}
F(z) =& ze^z + e^z \\
& - \left(0 \cdot \frac{z^0}{0!} + 1 \cdot \frac{z^1}{1!} + 2 \cdot \frac{z^2}{2!} + 3 \cdot \frac{z^3}{3!} + 4 \cdot \frac{z^4}{4!} \right) - \left(1 \cdot \frac{z^0}{0!} + 1 \cdot \frac{z^1}{1!} + 1 \cdot \frac{z^2}{2!} + 1 \cdot \frac{z^3}{3!} + 1 \cdot \frac{z^4}{4!} \right) \\
=& ze^z + e^z \\
& - \left(0 \cdot \frac{z^0}{0!} + 1 \cdot \frac{z^1}{1!} + 2 \cdot \frac{z^2}{2!} + 3 \cdot \frac{z^3}{3!} + 4 \cdot \frac{z^4}{4!} + 1 \cdot \frac{z^0}{0!} + 1 \cdot \frac{z^1}{1!} + 1 \cdot \frac{z^2}{2!} + 1 \cdot \frac{z^3}{3!} + 1 \cdot \frac{z^4}{4!} \right) \\
=& ze^z + e^z \\
& - \left(1 \cdot \frac{z^1}{1!} + 2 \cdot \frac{z^2}{2!} + 3 \cdot \frac{z^3}{3!} + 4 \cdot \frac{z^4}{4!} + 1 \cdot \frac{z^0}{0!} + 1 \cdot \frac{z^1}{1!} + 1 \cdot \frac{z^2}{2!} + 1 \cdot \frac{z^3}{3!} + 1 \cdot \frac{z^4}{4!} \right) \\
=& ze^z + e^z - \left(1 \cdot \frac{z^0}{0!} + 2 \cdot \frac{z^1}{1!} + 3 \cdot \frac{z^2}{2!} + 4 \cdot \frac{z^3}{3!} + 5 \cdot \frac{z^4}{4!} \right) \\
F(z) =& ze^z + e^z - \left(1 + 2z + 3 \cdot \frac{z^2}{2!} + 4 \cdot \frac{z^3}{3!} + 5 \cdot \frac{z^4}{4!} \right)
\end{aligned}$$

Otra posible solución En esta primera solución a este problema, partiremos de la EGF básica.

$$e^z = \sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n!}$$

La idea es aplicar distintas operaciones sobre esta EGF hasta llegar a la expresión de (1). Entonces aplicamos la operación de multiplicación por el índice.

$$\begin{aligned}
z \cdot e^z &= \sum_{n\geq 0} n \cdot \underbrace{1}_{f_{n-1}} \cdot \frac{z^n}{n!} && \langle 0, 1, 2, \dots, n, \dots \rangle \\
z \cdot e^z &= \sum_{n\geq 0} n \cdot \frac{z^n}{n!} && \langle 0, 1, 2, \dots, n, \dots \rangle
\end{aligned}$$

El siguiente paso es procurar que el dominio de esta sumatoria sea el mismo de (1).

$$\sum_{n\geq 5} n\cdot\frac{z^n}{n!} = \sum_{n\geq 0} n\cdot\frac{z^n}{n!} - \sum_{0\leq n\leq 4} n\cdot\frac{z^n}{n!}$$

$$\sum_{n\geq 5} n\cdot\frac{z^n}{n!} + \sum_{n\geq 5} 1\cdot\frac{z^n}{n!} = \sum_{n\geq 0} n\cdot\frac{z^n}{n!} - \sum_{0\leq n\leq 4} n\cdot\frac{z^n}{n!} + \sum_{n\geq 5} 1\cdot\frac{z^n}{n!}$$

$$\underbrace{\sum_{n\geq 5} (n+1)\cdot\frac{z^n}{n!}}_{F(z)} = \sum_{n\geq 0} n\cdot\frac{z^n}{n!} - \sum_{0\leq n\leq 4} n\cdot\frac{z^n}{n!} + \sum_{n\geq 0} 1\cdot\frac{z^n}{n!} - \sum_{0\leq n\leq 4} 1\cdot\frac{z^n}{n!}$$

$$F(z) = \left(\sum_{n\geq 0} n\cdot\frac{z^n}{n!}\right) + \left(\sum_{n\geq 0} 1\cdot\frac{z^n}{n!}\right) - \left(\sum_{0\leq n\leq 4} n\cdot\frac{z^n}{n!} + \sum_{0\leq n\leq 4} 1\cdot\frac{z^n}{n!}\right)$$

Esta parte ya está resuelta en la forma de resolverlo que se mostró antes.