Relaciones de Recurrencia

Luis Cárcamo M.

05 de septiembre de 2020

1 Relaciones de recurrencia

1.1 Ejemplo 1

Resolver la siguiente relación de recurrencia.

$$f_n = f_{n-1} + (-1)^n,\ f_1 = 2,\ n > 1$$

1.2 Metodo de iteraciones

$$\begin{aligned}
&k = 1.\ f_n = f_{n-1} + (-1)^n \\
&k = 2.\ f_n = f_{n-2} + (-1)^{n-1} + (-1)^n \\
&k = 3.\ f_n = f_{n-3} + (-1)^{n-2} + (-1)^{n-1} + (-1)^n
\end{aligned}$$

A partir de esto escribimos la ecuación paramétrica:

$$f(n,k) = f_{n-k} + \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^{n-i}$$

A partir del caso base, tenemos:

$$n - k = 1 \implies k = n - 1 \implies f_{n-k} = f_1.$$

Aplicamos esto sobre la ecuación paramétrica y obtenemos entonces:

$$f_n = f_1 + \sum_{i=0}^{n-2} (-1)^{n-i}.$$

Pero sabemos que

$$\begin{aligned}
f_n &= f_1 + \sum_{i=0}^{n-2} (-1)^{n-i} \\
&= f_1 + (-1)^{n-0} + (-1)^{n-1} + (-1)^{n-2} + \cdots + (-1)^{n-(n-2)} \\
&= f_1 + (-1)^n \cdot \left((-1)^0 + (-1)^{-1} + (-1)^{-2} + (-1)^{-3} + \cdots + (-1)^{n-2}\right) \\
&= f_1 + \sum_{i=0}^{n-2} (-1)^{-i} = f_1 + \sum_{i=0}^{n-2} \frac{1}{(-1)^i} = f_1 + \sum_{i=0}^{n-2} \left(\frac{1}{-1}\right)^i
\end{aligned}$$

El siguiente paso es resolver la siguiente expresión

$$f_n = f_1 + \sum_{i=0}^{n-2} \left(\frac{1}{-1} \right)^i = f_1 + \sum_{i=0}^{n-2} (-1)^i$$

Esta sumatoria la resolvemos como la suma de una progresión geométrica.

$$G(n, r, a) = \sum_{i=0}^{n-1} a \cdot r^i = a \cdot \frac{1 - r^n}{1 - r} \tag{1}$$

$$\begin{aligned} f_n = f_1 + \underbrace{\sum_{i=0}^{n-2} \left(\frac{1}{-1} \right)^i}_{G(n-1,-1,1)} &= f_1 + 1 \cdot \frac{1 - (-1)^{n-1}}{1 - (-1)} \\ &= 2 + \frac{1 - (-1)^{n-1}}{2} = \frac{4 + 1 - (-1)^{n-1}}{2} = \frac{5 - (-1)^{n-1}}{2} \end{aligned}$$

Por lo que la solución a la recurrencia es:

$$f_n = \frac{5 + (-1)^n}{2}$$

1.2.1 Prueba

Caso base:

$$f_1 = \frac{5 - 1}{2} = \frac{4}{2} = 2.$$

$$\begin{aligned} f_n &= f_{n-1} + (-1)^n \\ \frac{5 + (-1)^n}{2} &= \frac{5 + (-1)^{n-1}}{2} + (-1)^n \\ &= \frac{5 + (-1)^{n-1} + 2 \cdot (-1)^n}{2} = \frac{5 - (-1)^n + 2 \cdot (-1)^n}{2} \\ &= \frac{5 + (-1)^n}{2}. \end{aligned}$$

1.3 Ejempo 2

Resolver la siguiente relación de recurrencia:

$$f_n = -f_{n-1} + 1,\ f_2 = 1,\ n > 2.$$

Dividimos por $(-1)^n$ de ambos lados.

$$\frac{f_n}{(-1)^n} = \frac{-f_{n-1}}{(-1)^n} + \frac{1}{(-1)^n}$$
$$\frac{f_n}{(-1)^n} = \frac{f_{n-1}}{(-1)^{n-1}} + (-1)^n$$

Aplicamos el siguiente cambio de variable:

$$g_n = \frac{f_n}{(-1)^n}$$

Por lo que tenemos la siguiente relación de recurrencia:

$$g_n = g_{n-1} + (-1)^n,\ g_2 = \frac{f_2}{(-1)^2} = 1,\ n > 2$$

Esta recurrencia es similar a la resuelta en en el primer ejemplo. Lo único que cambia es el índice y valor del caso base.

1.4 Ejemplo 3

Resolver la siguiente relación de recurrencia

$$nf_n = (n+1)f_{n-1} + 2n,\ n > 0,\ f_0 = 0$$

Primero reescribimos nuestra recurrencia.

$$f_n = \frac{n+1}{n} f_{n-1} + 2$$

De aquí:

$$\frac{f_n}{n+1} = \frac{f_{n-1}}{n} + \frac{2}{n+1}$$

1.5 Ejemplo 4

$$f_n = -2 \cdot n \cdot f_{n-1} + 3 \cdot n \cdot (n-1) \cdot f_{n-2},\ f_0 = 1,\ f_1 = 2,\ n > 1$$

Dividimos ambos lados sobre $n!$.

$$\frac{f_n}{n!} = -2 \cdot \frac{n \cdot f_{n-1}}{n!} + 3 \cdot \frac{n \cdot (n-1) \cdot f_{n-2}}{n!}$$

Recordemos que: $n! = n \cdot (n-1)!$ Entonces:

$$\frac{f_n}{n!} = -2 \cdot \frac{n \cdot f_{n-1}}{n \cdot (n-1)!} + 3 \cdot \frac{n \cdot (n-1) \cdot f_{n-2}}{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)!}$$
$$\frac{f_n}{n!} = -2 \cdot \frac{f_{n-1}}{(n-1)!} + 3 \cdot \frac{f_{n-2}}{(n-2)!}$$

Entonces definimos:

$$g_n = \frac{f_n}{n!}$$

Por lo que nos queda la siguiente recurrencia:

$$g_n = -2 \cdot g_{n-1} + 3 \cdot g_{n-2},\ g_0 = 1,\ g_1 = 2,\ n > 1.$$

1.6 Ejercicios

- $f_n = 2^n \cdot f_{n-1} + 1,\ f_1 = 2,\ n > 1$
- $n \cdot f_n = (n + t - 1) \cdot f_{n-1},\ f_0 = 1,\ n > 0$
- $n \cdot f_n = 3 \cdot f_{n-1} + 2^n,\ f_0 = 1,\ n > 0$