Análisis Combinatorio

Luis Cárcamo M.

15 de octubre de 2020

1. Cadenas

Para los siguientes ejercicios, considere las letras *ABCDEF*, para cadenas sin repetición.

1.1. Ejemplo 1

Cadenas de longitud 6 que contengan la subcadena AB.
Solución directa
Palomar

$$\_\_ \; AB \; \_\_$$

Fórmula

1. Primero escogemos A y B y las ubicamos en un palomar.

$$\left[\binom{2}{2} \cdot \binom{1}{1}\right]$$

2. Escogemos las letras restantes (C, D, E y F) y las distribuimos en los palomares. Adicionalmente, debemos permutarlas.

$$\left[\underbrace{\binom{6-2}{6-2}}_{\text{Seleccionar}} \cdot \underbrace{\binom{2+(6-2)-1}{6-2}}_{\text{Distribuir}} \cdot \underbrace{\binom{6-2}{1,1,1,1}}_{\text{Permutar}}\right]$$

3. Finalmente, juntamos el resultado de cada paso.

$$n(\mathbb{A}) = \left[\binom{2}{2} \cdot \binom{1}{1}\right] \cdot \left[\binom{6-2}{6-2} \cdot \binom{2+(6-2)-1}{6-2} \cdot \binom{6-2}{1,1,1,1}\right]$$

1.2. Ejemplo 2

Cadenas de longitud 6 que contengan la subcadena AB.
Solución por complemento.
Palomar

$$\{\ \_\_\ \} - [\text{cadenas que NO contengan la subcadena AB}]$$

Esto es:

$$\{\ \_\_\ \} - (\{\ \_\_\ B\ \_\_\ A\ \_\_\ \} + \{\ \_\_\ A\ \underline{*}\ B\ \_\_\ \})$$

Fórmula

1. Primero generamos **todas** las posibles cadenas. Esto corresponde a $\{\ \_\_\ \}$.

$$\left[\binom{6}{6} \cdot \binom{1+6-1}{6} \cdot \binom{6}{1,1,1,1,1,1}\right]$$

2. Lo siguiente es generar todas las cadenas que tienen a la B antes de la A. Esto corresponde a $\{\ \_\_\ B\ \_\_\ A\ \_\_\ \}$.

$$\left[\binom{2}{2} \cdot \binom{2}{2}\right] \cdot \left[\binom{6-2}{6-2} \cdot \binom{3+(6-2)-1}{6-2} \cdot \binom{6-2}{1,1,1,1}\right]$$

3. Por último, generamos las cadenas que tienen a la A antes de la B, pero sin que estén juntas. Esto corresponde a $\{\ \_\_\ A\ \underline{*}\ B\ \_\_\ \}$.

$$\left[\binom{2}{2} \cdot \binom{2}{2}\right] \cdot \left[\binom{6-2}{1}\binom{1}{1}\right] \cdot \left[\binom{6-3}{6-3} \cdot \binom{3+(6-3)-1}{3} \cdot \binom{6-3}{1,1,1}\right]$$

$$\begin{aligned} n(\mathbb{A}) = &\left[\binom{6}{6} \cdot \binom{1+6-1}{6} \cdot \binom{6}{1,1,1,1,1,1}\right] \\ &- \left[\binom{2}{2} \cdot \binom{2}{2}\right] \cdot \left[\binom{6-2}{6-2} \cdot \binom{3+(6-2)-1}{6-2} \cdot \binom{6-2}{1,1,1,1}\right] \\ &- \left[\binom{2}{2} \cdot \binom{2}{2}\right] \cdot \left[\binom{6-2}{1}\binom{1}{1}\right] \cdot \left[\binom{6-3}{6-3} \cdot \binom{3+(6-3)-1}{3} \cdot \binom{6-3}{1,1,1}\right] \end{aligned}$$

1.3. Ejemplo 3

Cadenas de longitud 6 que contengan las letras A y B juntas.

Palomar *Solución directa.* A diferencia del primer ejemplo, en este caso no importa el orden en que vayan A y B, sino que solo importa que estén juntas. Es decir, tanto la subcadena AB como BA son válidas.

$$\_\_\ AB\ \_\_$$

Nota: *El color magenta indica que estas se permutan.*

Fórmula

1. Primero escogemos A y B, las ubicamos en un palomar y las permutamos.

$$\left[\binom{2}{2}\cdot\binom{1}{1}\cdot\binom{2}{1,1}\right]$$

2. Escogemos las letras restantes (C, D, E y F) y las distribuimos en los palomares. Adicionalmente, debemos permutarlas.

$$\left[\underbrace{\binom{6-2}{6-2}}_{\text{Seleccionar}}\cdot\underbrace{\binom{2+(6-2)-1}{6-2}}_{\text{Distribuir}}\cdot\underbrace{\binom{6-2}{1,1,1,1}}_{\text{Permutar}}\right]$$

3. Finalmente, juntamos el resultado de cada paso.

$$n(\mathbb{A})=\left[\binom{2}{2}\cdot\binom{1}{1}\cdot\binom{2}{1,1}\right]\cdot\left[\binom{6-2}{6-2}\cdot\binom{2+(6-2)-1}{6-2}\cdot\binom{6-2}{1,1,1,1}\right]$$

1.4. Ejemplo 4

Cadenas de longitud 6 que contengan las letras A y B juntas.

Palomar *Solución por complemento.*
Al conjunto de todas las posibles cadenas, le quitaremos las cadenas que tengan la A y la B separadas.

$$\{\ \_\ \}-\{\text{Cadenas que tengan } A \text{ y } B \text{ separadas}\}$$

Esto es

$$\{\ \_\ \}-\{\ \_\ A\ \underset{-}{*}\ B\ \_\ \}$$

Fórmula

1. Primero generamos **todas** las posibles cadenas. Esto corresponde a $\{\ \_\ \}$.

$$\left[\binom{6}{6}\cdot\binom{1+6-1}{6}\cdot\binom{6}{1,1,1,1,1,1}\right]$$

2. Lo siguiente es contar las cadenas que no tengan A y B juntas.

$$\left[\binom{2}{2}\cdot\binom{2}{2}\cdot\binom{2}{1,1}\right]\cdot\left[\binom{6-2}{1}\cdot\binom{1}{1}\right]\cdot\left[\binom{6-3}{6-3}\cdot\binom{3+(6-3)-1}{6-3}\cdot\binom{6-3}{1,1,1}\right]$$

Finalmente:

$$\begin{aligned}n(\mathbb{A})=&\left[\binom{6}{6}\cdot\binom{1+6-1}{6}\cdot\binom{6}{1,1,1,1,1,1}\right]\\&-\left[\binom{2}{2}\cdot\binom{2}{2}\cdot\binom{2}{1,1}\right]\cdot\left[\binom{6-2}{1}\cdot\binom{1}{1}\right]\cdot\left[\binom{6-3}{6-3}\cdot\binom{3+(6-3)-1}{6-3}\cdot\binom{6-3}{1,1,1}\right]\end{aligned}$$

1.5. Ejemplo 5

Cadenas de longitud 6 tal que la D y la E no estén juntas.

Palomar *Solución Directa*
Ubicamos un palomar **no vacío** entre D y E. Además, es importante tener en cuenta que no importa en qué orden estén las dos letras, es decir, puede ir tanto la D antes de la E o la D antes de la E, por lo que debemos permutarlas.

$$\_\_ \; D \; \underline{\ast} \; E \; \_\_$$

Fórmula

1. Primero seleccionamos D y E y las permutamos.

$$\left[\binom{2}{2} \cdot \binom{2}{2} \cdot \binom{2}{1,1}\right]$$

2. Ahora debemos asegurarnos de que en el comodín vaya al menos una letra. Por lo que escogemos una cualquiera de las letras restantes.

$$\left[\binom{6-2}{1} \cdot \binom{1}{1}\right]$$

3. Por último, seleccionamos las ahora restantes y las distribuimos en los tres palomares y las permutamos.

$$\left[\binom{6-3}{6-3} \cdot \binom{3+(6-3)-1}{6-3} \cdot \binom{6-3}{1,1,1}\right]$$

Por lo tanto, la respuesta final es

$$n(\mathbb{A}) = \left[\binom{2}{2} \cdot \binom{2}{2} \cdot \binom{2}{1,1}\right] \cdot \left[\binom{6-2}{1} \cdot \binom{1}{1}\right] \cdot \left[\binom{6-3}{6-3} \cdot \binom{3+(6-3)-1}{6-3} \cdot \binom{6-3}{1,1,1}\right]$$

1.6. Ejemplo 6

Cadenas de longitud 6 tal que la D y la E no estén juntas.

Palomar *Solución por Complemento*
Esta cantidad se puede definir como el total de palabras posibles menos las palabras que tienen a D y E juntas.

$$\{\ \_\_\ \} - \{\text{Cadenas que tienen a } D \text{ y } E \text{ juntas}\}$$

Esto es

$$\{\ \_\_\ \} - \{\ \_\_ \; DE \; \_\_\ \}$$

Fórmula

1. Lo primero es definir el gran total:

$$\left[\binom{6}{6}\cdot\binom{1+6-1}{6}\cdot\binom{6}{1,1,1,1,1,1}\right]$$

2. Recordemos que la cantidad de palabras a partir las letras definidas que se pueden formar de tal modo que D y E estén juntas es (equivalente a cuando A y B están juntas).

$$\left[\binom{2}{2}\cdot\binom{1}{1}\cdot\binom{2}{1,1}\right]\cdot\left[\binom{6-2}{6-2}\cdot\binom{2+(6-2)-1}{6-2}\cdot\binom{6-2}{1,1,1,1}\right]$$

$$\begin{aligned} n(\mathbb{A}) = &\left[\binom{6}{6}\cdot\binom{1+6-1}{6}\cdot\binom{6}{1,1,1,1,1,1}\right] \\ &-\left[\binom{2}{2}\cdot\binom{1}{1}\cdot\binom{2}{1,1}\right]\cdot\left[\binom{6-2}{6-2}\cdot\binom{2+(6-2)-1}{6-2}\cdot\binom{6-2}{1,1,1,1}\right]\end{aligned}$$

2. Soluciones Enteras

2.1. Ejemplo 1

Problema

$$x1 + x2 + x3 = n, \quad x1 \geq 1,\ x2 \geq 1,\ x3 \geq 1$$

Este problema, se puede plantear, en principio, de la siguiente manera

$$f_n = \sum_{\substack{x1+x2+x3=n \\ x1,x2,x3\geq 1}} 1$$

Solución

$$f_n = \left[\binom{3}{3}\binom{3}{3}\right]\cdot\left[\binom{n-3}{n-3}\cdot\binom{3+(n-3)-1}{n-3}\right]$$