Funciones Generadoras Exponenciales

Luis Cárcamo M.

September 25, 2020

1 Funciones Generadoras Exponenciales (EGFs)

1.1 Ejemplo 1

Dada la secuencia $\{1\}_{n\geq 0,\, n \bmod 2=0}$.
Esta secuencia es

$$\langle 1, 0, 1, 0, \ldots, 1, 0, \ldots \rangle$$

.
Definimos $F(z)$ como la EGF de esta secuencia.

$$F(z) = \sum_{\substack{n\geq 0\\ n \bmod 2=0}} 1 \cdot \frac{z^n}{n!}$$

Expandiendo esta serie se obtiene

$$F(z) = 1 \cdot \frac{z^0}{0!} + 1 \cdot \frac{z^2}{2!} + 1 \cdot \frac{z^4}{4!} + \cdots + 1 \cdot \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \cdots$$

Una posible solución

Podemos definir este f_n como

$$f_n = f_{n-2},\ n > 1,\ f_0 = 1,\ f_1 = 0.$$

n	f_n
0	1
1	0
2	1
3	0
4	1
$\vdots$	$\vdots$

Table 1: Primeros valores de f_n

El valor de f_n es

$$f_n = \frac{1+(-1)^n}{2}.$$

Para los valores pares, esto es

$$f_{2n} = \frac{1+(-1)^{2n}}{2} = \frac{1+1}{2} = 1.$$

Para los valores impares, esto es

$$f_{2n+1} = \frac{1+(-1)^{2n+1}}{2} = \frac{1-1}{2} = 0.$$

Por lo tanto, podemos escribir $F(z)$ de la siguiente forma

$$F(z) = \sum_{n\geq 0} \frac{1+(-1)^n}{2} \cdot \frac{z^n}{n!}$$

A partir de esto:

$$F(z) = \sum_{n\geq 0} \frac{1+(-1)^n}{2} \cdot \frac{z^n}{n!} = \frac{1}{2} \cdot \left(\underbrace{\sum_{n\geq 0} 1 \cdot \frac{z^n}{n!}}_{e^z} + \underbrace{\sum_{n\geq 0} (-1)^n \cdot \frac{z^n}{n!}}_{e^{-z}} \right)$$

$$F(z) = \frac{e^z + e^{-z}}{2}.$$

1.2 Otra posible solución

$$\begin{aligned}
e^z &\to \langle +1, +1, +1, +1, +1, +1, \ldots, +1, +1 \ldots \rangle \\
e^{-z} &\to \langle +1, -1, +1, -1, +1, -1, \ldots, +1, -1 \ldots \rangle \\
e^z + e^{-z} &\to \langle +2, \quad 0, +2, \quad 0, +2, \quad 0, \ldots, +2, \quad 0 \ldots \rangle \\
\frac{e^z + e^{-z}}{2} &\to \langle +1, \quad 0, +1, \quad 0, +1, \quad 0, \ldots, +1, \quad 0 \ldots \rangle
\end{aligned}$$

1.3 Ejemplo 2

Hallar la EGF de $\{n\}_{n \geq 0,\, n \bmod 2 = 0}$.

Esta secuencia la podemos reescribir. Y resulta lo siguiente:

$$\left\{ n \cdot \frac{1 + (-1)^n}{2} \right\}_{n \geq 0}$$

$$F(z) = \sum_{n \geq 0} n \cdot \frac{1 + (-1)^n}{2} \cdot \frac{z^n}{n!} \quad = \frac{1}{2} \cdot \left(\underbrace{\sum_{n \geq 0} n \cdot \frac{z^n}{n!}}_{z \cdot e^z} + \underbrace{\sum_{n \geq 0} n \cdot (-1)^n \cdot \frac{z^n}{n!}}_{A(z)} \right)$$

Es necesario mostar cómo se halló quién es $A(z)$.

$$A(z) = \sum_{n \geq 0} n \cdot (-1)^n \cdot \frac{z^n}{n!}$$

Sabemos que

$$
\begin{aligned}
e^{-z} &= \sum_{n\geq 0} (-1)^n \cdot \frac{z^n}{n!} \\
z \cdot e^{-z} &= \sum_{n\geq 0} n \cdot (-1)^{n-1} \cdot \frac{z^n}{n!} \\
-z \cdot e^{-z} &= \underbrace{\sum_{n\geq 0} n \cdot (-1)^n \cdot \frac{z^n}{n!}}_{A(z)}.
\end{aligned}
$$

Dado que ya tenemos $A(z)$, entonces

$$
F(z) = \frac{z \cdot e^z - z \cdot e^{-z}}{2}.
$$

1.4 Ejemplo 3

Dada la siguiente EGF

$$
F(z) = \frac{e^{3z} - e^{2z}}{z},
$$

hallar $n![z^n]F(z)$.

Solución

$$
\begin{aligned}
F(z) &= \frac{e^{3z} - e^{2z}}{z} = \frac{e^{2z} \cdot (e^z - 1)}{z} \\
F(z) &= e^{2z} \cdot \frac{e^z - 1}{z}.
\end{aligned}
$$

De las EGFs básicas sabemos lo siguiente

$$
\begin{aligned}
e^{2z} &= \sum_{n\geq 0} 2^n \cdot \frac{z^n}{n!} \\
\frac{e^z - 1}{z} &= \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n+1} \cdot \frac{z^n}{n!}
\end{aligned}
$$

Aplicando la operación de convolución binomial se obtiene:

$$e^{2z} \cdot \frac{e^z - 1}{z} = \sum_{n \geq 0} \sum_{0 \leq k \leq n} \binom{n}{k} \cdot 2^k \cdot \frac{1}{n-k+1} \cdot \frac{z^n}{n!}$$

En este caso, dejaremos esta expresión abierta como resultado. Por lo tanto

$$f_n = \sum_{0 \leq k \leq n} \binom{n}{k} \cdot 2^k \cdot \frac{1}{n-k+1}.$$