Funciones Generadoras Exponenciales

Luis Cárcamo M.

September 18, 2020

1 Funciones Generadoras Exponenciales (EGFs)

1.1 Multiplicación por el índice

1.1.1 Ejemplo 1

Dada la EGF $F(z) = e^z$,

$$e^z = \sum_{n \geq 0} \underbrace{1}_{f_n} \cdot \frac{z^n}{n!}$$

el resultado aplicar la multiplicación por el índice a esta EGF es el siguiente:

$$z \cdot e^z = \sum_{n \geq 0} n \cdot \underbrace{1}_{f_{n-1}} \cdot \frac{z^n}{n!}$$

1.1.2 Ejemplo 2

Dada la EGF $F(z)$ definida como

$$F(z) = \frac{e^z - 1}{z} = \sum_{n \geq 0} \underbrace{\frac{1}{n+1}}_{f_n} \cdot \frac{z^n}{n!}$$

Al aplicar la operación de multiplicación por el índice, se obtiene:

$$\begin{aligned} zF(z) &= z \cdot \frac{e^z - 1}{z} = \sum_{n \geq 0} n \cdot \underbrace{\frac{1}{n}}_{f_{n-1}} \cdot \frac{z^n}{n!} \\ &= e^z - 1 = \sum_{n \geq 1} n \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{z^n}{n!} = \sum_{n \geq 1} 1 \cdot \frac{z^n}{n!} \qquad \langle 0, 1, 1, \ldots, 1, \ldots \rangle. \end{aligned}$$

Si $f_n = \frac{1}{n+1}$, entonces $f_{n-1} = \frac{1}{n}$.

1.2 Composición de funciones

Dada la EGF $F(z) = e^z$,

$$F(z) = e^z = \sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n!}$$
$$F(2z) = e^{2z} = \sum_{n\geq 0} \frac{(2\cdot z)^n}{n!} = \sum_{n\geq 0} 2^n \cdot \frac{z^n}{n!}$$

Es decir:

$$n![z^n]e^{2z} = 2^n.$$

ó

$$f_n = 2^n,\ n \geq 0.$$

1.3 Desplazamiento

Hallar la EGF de $\left\{\binom{n}{3}\right\}_{n\geq 2}$.

Primero definimos $F(z)$ como la EGF de la secuencia.

$$F(z) = \sum_{n\geq 2} (n-2) \cdot \frac{z^n}{n!}$$

Partiremos de la siguiente EGF.

$$ze^z = \sum_{n\geq 0} n \cdot \frac{z^n}{n!}$$

Vamos a hacer una sustitución en la sumatoria. Esta es la de sustituir n por $n-2$.

$$ze^z = \sum_{n-2\geq 0} (n-2) \cdot \frac{z^{n-2}}{(n-2)!}$$
$$ze^z = \sum_{n\geq 2} (n-2) \cdot \frac{z^{n-2}}{(n-2)!}$$

Multiplicamos por z^2 de ambos lados

$$z^3e^z = \sum_{n\geq 2} (n-2) \cdot \frac{z^n}{(n-2)!} = \sum_{n\geq 2} (n-2) \cdot \frac{z^n}{(n-2)!} \cdot \frac{(n-1)\cdot n}{(n-1)\cdot n}$$
$$= \sum_{n\geq 2} (n-2) \cdot (n-1) \cdot n \cdot \frac{z^n}{n!}$$
$$z^3e^z = \sum_{n\geq 2} \binom{n}{3} \cdot 3! \cdot \frac{z^n}{n!}$$

Nota:

$$\binom{n}{3} = \frac{n!}{3! \cdot (n-3)!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3)!}{3! \cdot (n-3)!}$$
$$= \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)}{3!}.$$