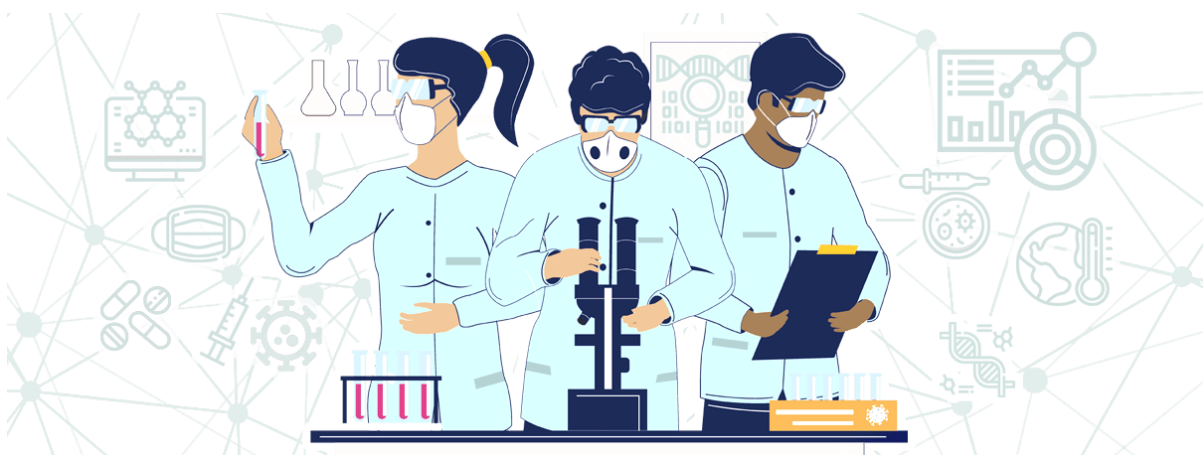




**Universidade do
Minho**



UC-Matemática das Coisas:

->Modelos Matemáticos em Ciências da Vida e da Saúde

Ano Letivo: 2023/2024

Grupo II / Proposta de trabalho 3_SIR

Autores: -João Azevedo a107367
-Gonçalo Fernandes a106812
-Duarte Parente a108570
-Afonso Soares a106929
-Guilherme Vidal a106848
-Luís Soares a106932
-Pedro Morais a107319

Orientador: José Joaquim Martins Oliveira.

Índice

1. Introdução.....	3
2. Desenvolvimento das Questões.....	4
3. Exemplos de utilização do modelo SIR.....	x
4. Conclusão.....	x
5. Bibliografia.....	x

Introdução

Este documento tem como principal objetivo apresentar a resolução de uma ficha de trabalho, onde iremos mostrar, de forma reflexiva, as experiências de aprendizagem desenvolvidas durante as aulas nas diferentes áreas do saber em que a ficha incidu. Este trabalho está integrado na disciplina de Matemática das Coisas e decorreu no Campus de Gualtar da Universidade do Minho, com o supervisionamento do professor orientador José Joaquim Martins Oliveira.

Os modelos matemáticos desempenham um papel fundamental na compreensão e análise de fenômenos complexos em diversas áreas científicas, sendo particularmente essenciais nas Ciências da Vida e da Saúde. Diante da grande complexidade na interação de variáveis biológicas, genéticas e ambientais, os modelos matemáticos oferecem uma ferramenta poderosa para explorar padrões, prever comportamentos e entender os mecanismos subjacentes a fenômenos da saúde e da vida. Ao empregar equações e algoritmos, esses modelos proporcionam uma melhor representação que auxilia na interpretação de dados experimentais, no desenvolvimento de hipóteses, na formulação de estratégias para intervenções eficazes e, no nosso caso, na resolução dos exercícios que irão ser apresentados.

Assim, nesta parte do trabalho, como já havíamos mencionado, iremos apresentar a realização e resolução de 5 questões de um estudo, seguindo um modelo previamente dado, onde iremos considerar como objeto de estudo três populações de referência na evolução de uma epidemia, ou seja, as populações de Suscetíveis, Infetados e Recuperados. Além disso, devido à natureza deste projeto, este relatório apenas conterá a resolução das questões, sendo enviado à parte o modelo matemático feito no MatLab.

Desenvolvimento das Questões

[1] Tendo em conta que as constantes r, μ, β, α são positivas iremos fazer a legenda do que elas representam:

r - taxa de nascimentos

μ - taxa de mortes

β – coeficiente da transmissão das infeções

α - taxa de recuperação dos indivíduos infetados

Agora procedemos à dedução da fórmula que representa a população de recuperados no modelo (1) representado a seguir:

$$\begin{cases} S'(t) = (r - \mu)S(t) - \beta S(t)I(t) \\ I'(t) = -(\mu + \alpha)I(t) + \beta S(t)I(t) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S'(t) = -\mu S(t) + rS(t) - \beta S(t)I(t) \\ I'(t) = -\mu I(t) - \alpha I(t) + \beta S(t)I(t) \end{cases}$$

$$R'(t) = \alpha I(t) - \mu R(t)$$

Nesta expressão dos recuperados $\alpha I(t)$ representa do grupo dos indivíduos que tinham sido infetados aqueles que acabarão por recuperar e $-\mu R(t)$ representa os indivíduos que já estavam recuperados mas morreram naturalmente.

[2] $S(t) = S^* \quad I(t) = I^* \quad S^*, I^* \in [0, +\infty[$

Para estudarmos os pontos de equilíbrio iremos estudar as funções quando $S'(t) = 0$ e $I'(t) = 0$.

A partir do modelo (1) enunciado no primeiro exercício iremos ter que:

$$\begin{cases} S'(t) = (r - \mu)S(t) - \beta S(t)I(t) \\ I'(t) = -(\mu + \alpha)I(t) + \beta S(t)I(t) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = (r - \mu)S^* - \beta S^* I^* \\ 0 = -(\mu + \alpha)I^* + \beta S^* I^* \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} S^*((r - \mu) - \beta I^*) = 0 \\ I^*((-\mu - \alpha) + \beta S^*) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S^* = 0 \vee ((r - \mu) - \beta I^*) = 0 \\ I^* = 0 \vee ((-\mu - \alpha) + \beta S^*) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} S^* = 0 \\ I^* = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} -\beta I^* = -r + \mu \\ \beta S^* = \mu + \alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S^* = 0 \\ I^* = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} I^* = \frac{-r + \mu}{-\beta} \\ S^* = \frac{\mu + \alpha}{\beta} \end{cases}$$

A partir deste sistema obtivemos dois pontos de equilíbrio da forma (S^*, I^*) sendo eles os pontos $(0,0)$ e $(\frac{\mu+\alpha}{\beta}, \frac{-r+\mu}{-\beta})$.

[3] Neste exercício iremos usar uma forma adaptada do modelo (1) e o próprio modelo (1):

$$\begin{cases} S'(t) = (r - \mu)S(t) - \beta S(t)I(t) \\ I'(t) = -(\mu + \alpha)I(t) + \beta S(t)I(t) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S'(t) = F(S(t), I(t)) \\ I'(t) = G(S(t), I(t)) \end{cases}$$

Modelo (1) Modelo (3)

A partir do modelo (1) e do modelo (3) iremos obter o seguinte sistema:

$$\begin{cases} F(S, I) = (r - \mu)S - \beta SI \\ G(S, I) = -(\mu + \alpha)I + \beta SI \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial F}{\partial S}(S, I) = (r - \mu) - \beta I \\ \frac{\partial G}{\partial S}(S, I) = 0 + \beta I \end{cases} \quad \vee$$

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial I}(S, I) = 0 - \beta S \\ \frac{\partial G}{\partial I}(S, I) = -(\mu + \alpha) + \beta S \end{cases}$$

Da qual acabamos por obter a matriz Jacobiana de $(F(S, I), G(S, I))$ é :

$$J(S, I) = \begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial S}(S, I) & \frac{\partial F}{\partial I}(S, I) \\ \frac{\partial G}{\partial S}(S, I) & \frac{\partial G}{\partial I}(S, I) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (r - \mu) - \beta I & -\beta S \\ 0 + \beta I & -(\mu + \alpha) + \beta S \end{bmatrix}$$

[4] Neste exercício iremos calcular o valor próprio da matriz Jacobiana nos zeros do modelo (1) para podermos conseguir estudar a estabilidade dos pontos de equilíbrio.

Relembrando os ponto de equilíbrio calculados em [2] são o $(S_1^*, I_1^*) = (0,0)$ e o $(S_2^*, I_2^*) = (\frac{\mu+\alpha}{\beta}, \frac{-r+\mu}{-\beta})$.

Seja J_1 a matriz jacobiana onde iremos trocar os valores pelos valores do primeiro ponto de equilíbrio $(S_1^*, I_1^*) = (0,0)$ iremos ter que :

$$J_1(S_1^*, I_1^*) = \begin{bmatrix} (r - \mu) - \beta \times 0 & -\beta \times 0 \\ 0 + \beta \times 0 & -(\mu + \alpha) + \beta \times 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} (r - \mu) & 0 \\ 0 & -(\mu + \alpha) \end{bmatrix}$$

Agora iremos calcular o valor próprio da matriz J_1 . Para isso teremos que afirmar que existe um $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ que será o valor próprio de J_1 se existe um vetor $\vec{v} \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\vec{0}\}$, tal que $J_1 \times \vec{v} = \lambda_1 \vec{v}$.

Isto é, λ_1 é o valor próprio de J_1 se existe $\vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$, tal que:

$$\begin{bmatrix} (r - \mu) & 0 \\ 0 & -(\mu + \alpha) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \lambda_1 \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} v_1(r - \mu) + v_2 \times 0 = \lambda_1 v_1 \\ 0 \times v_1 + v_2 \times -(\mu + \alpha) = \lambda_1 v_2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} v_1(r - \mu) - \lambda_1 v_1 = 0 \\ v_2 \times (-\mu - \alpha) - \lambda_1 v_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v_1(r - \mu - \lambda_1) = 0 \\ v_2(-\mu - \alpha - \lambda_1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} r - \mu - \lambda_1 & 0 \\ 0 & (-\mu - \alpha - \lambda_1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

λ_1 tem solução não nula se e só se:

$$\det \begin{bmatrix} r - \mu - \lambda_1 & 0 \\ 0 & (-\mu - \alpha - \lambda_1) \end{bmatrix} = (r - \mu - \lambda_1) \times (-\mu - \alpha - \lambda_1) \neq 0$$

Logo, o determinante da matriz será diferente de 0, e o valor próprio de J_1 vai ser nulo, isto é, $\lambda_1 = 0$.

Seja agora J_2 a matriz jacobiana onde iremos trocar os valores pelos valores do segundo ponto de equilíbrio $(S_2^*, I_2^*) = (0,0)$ iremos ter que :

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} (r - \mu) - \beta\left(\frac{r + \mu}{\beta}\right) & -\beta\left(\frac{\mu + \alpha}{\beta}\right) \\ \beta\left(\frac{r - \mu}{\beta}\right) & -(\mu + \alpha) + \beta\left(\frac{\mu + \alpha}{\beta}\right) \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} (r - \mu) - \beta\left(\frac{r + \mu}{\beta}\right) & -\beta\left(\frac{\mu + \alpha}{\beta}\right) \\ r - \mu & -(\mu + \alpha) + \beta\left(\frac{\mu + \alpha}{\beta}\right) \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

-- Comentário para vocês não percebi o seguinte: $\lambda_1(1) = \lambda_1(2) = 0$

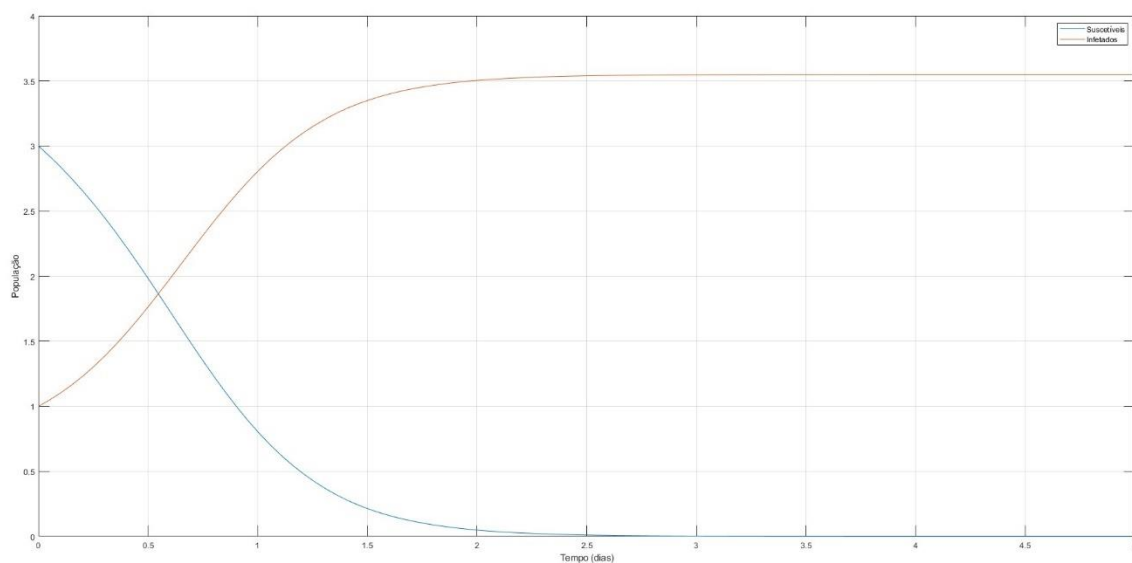
--R:tava nos slides isso, mas eu acho q deve ser q uma matriz tem sempre dois valores próprios e neste caso são ambos zero, e na segunda matriz é a raiz positiva e a negativa, ou talvez n tenha nada a ver com o que eu disse., mas essa parte n é muito relevante.

Em conclusão, para $J_1(S_1^*, I_1^*)$, como o valor próprio da matriz é igual a 0, $\lambda_1 = 0$, então temos que nada se poderá concluir acerca do ponto de equilíbrio (0,0).

[5] Considerando para todos os casos que $S(0) = 3$ e $I(0) = 1$.

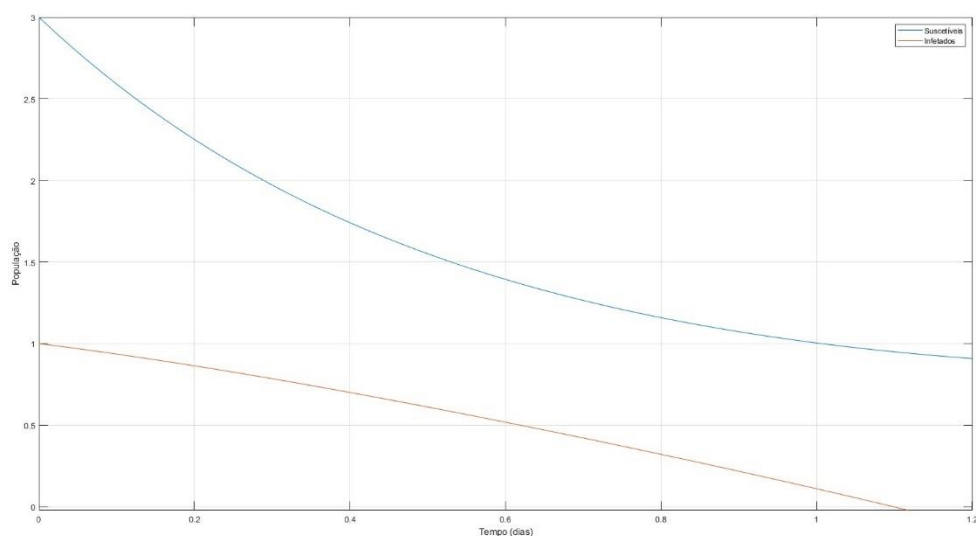
Caso 1: temos que $r = \beta = 1$, $\mu = 0.5$, $\alpha = 0.2$

Considerando por exemplo que $S(0) = 3$ e $I(0) = 1$ vamos ter o seguinte gráfico.



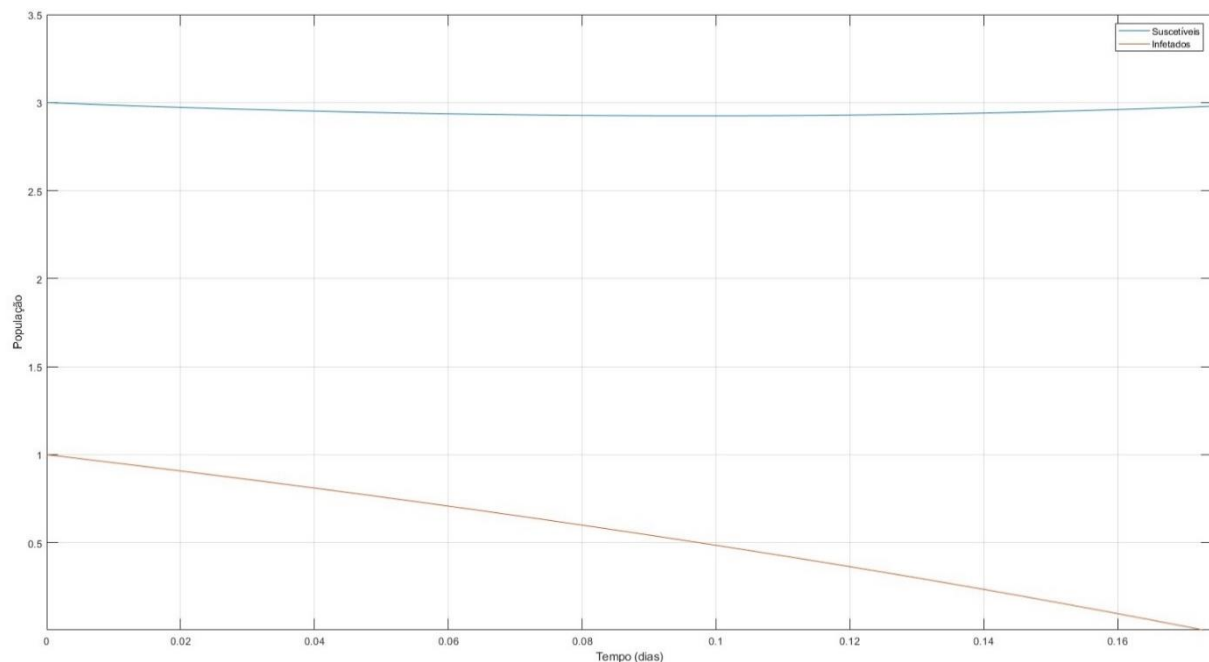
A partir do gráfico podemos observar que a população da população suscetível diminui mais acentuadamente do que a população de pessoas infectadas a aumentar. Isto deve-se a que $|S'(t)| > |I'(t)|$, visto que, definindo $S'(t) = (r - \mu)S(t) - \beta S(t)I(t)$ substituindo os parâmetros obtemos que $S'(t) = (1 - 0,5)S(t) - 1S(t)I(t) \Leftrightarrow S'(t) = 0,5 S(t) - 1S(t)I(t)$ e $I'(t) = -(\mu + \alpha)I(t) + \beta S(t)I(t) \Leftrightarrow I'(t) = -(0,5 + 0,2)I(t) + S(t)I(t) \Leftrightarrow I'(t) = -0,7I(t) + S(t)I(t)$. A partir dos 2,5 dias as populações $S(t)$ e $I(t)$ permanecem constantes, já que $S'(t) \approx 0$ e $I'(t) \approx 0$.

Caso 2: temos que $r = 0.5$, $\mu = \beta = 1$, $\alpha = 0.2$



Neste gráfico observamos um comportamento bastante peculiar de ambas as populações, observando que as ambas diminuem. A população de suscetíveis diminui naturalmente, uma vez que, $S'(t) < 0$ devido a que $(r - \mu)S(t) < 0$ para qualquer valor $S(t) > 0$, uma vez que, $(r - \mu) < 0$ e também devido a $-\beta S(t)I(t) < 0$ para todo o $I(t) > 0$, já que $-\beta = -1$. Já quanto à população de infectados esta também irá diminuir isto é $I'(t) < 0$, pois $-(\mu + \alpha)I(t) < 0 \Leftrightarrow -0,8I(t) < 0$, para qualquer $I(t) > 0$ que será superior ao aumento dos infectados representado pela expressão seguinte $\beta S(t)I(t) \Leftrightarrow S(t)I(t)$ mas como $S(t)$ vai diminuindo e $I(t)$ diminui devido à expressão anteriormente enunciada então a população de pessoas infectadas sofre uma diminuição até atingir 0 por volta dos 1,1 dias.

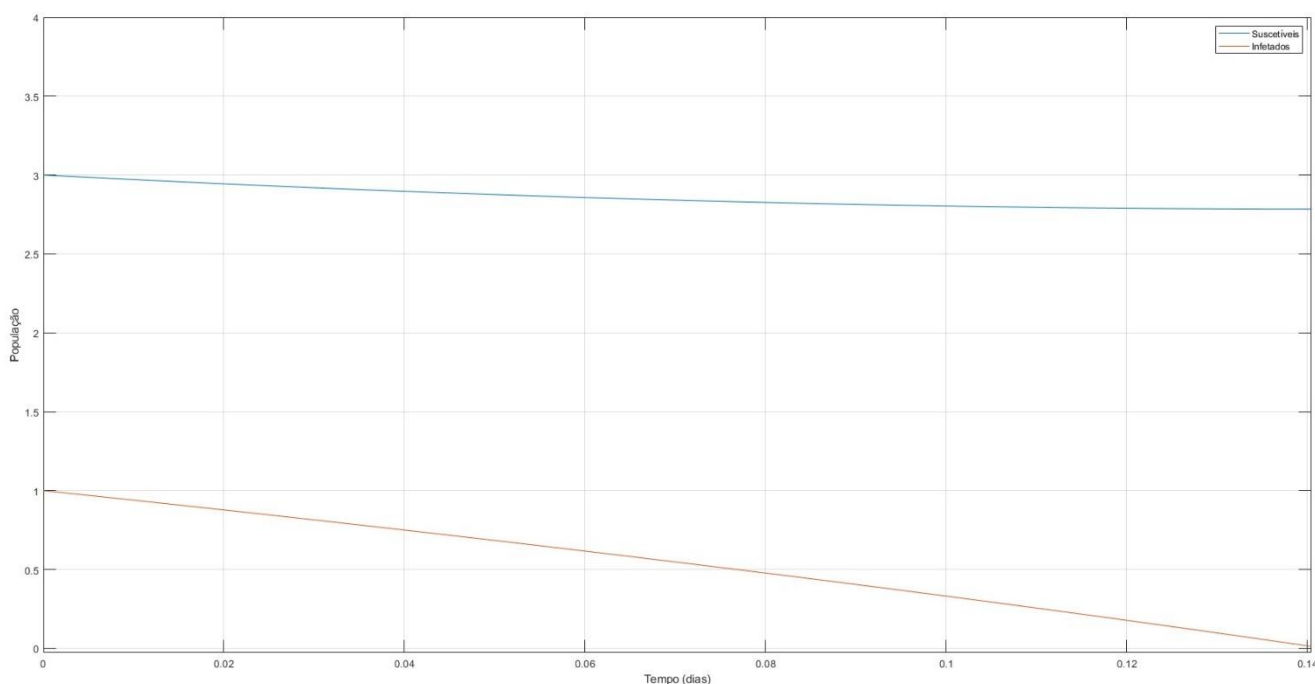
Caso 3: temos que $r = \beta = 1$, $\mu = 0.5$, $\alpha = 2$



Inicialmente, podemos observar que a população dos suscetíveis diminui até a um certo ponto pois $-\beta S(t)I(t) \leq 0 \Leftrightarrow -S(t)I(t) \leq 0$, para qualquer $S(t) > 0$, $I(t) \geq 0$ será superior à expressão $(r - \mu)S(t) > 0 \Leftrightarrow (1 - 0.5)S(t) > 0 \Leftrightarrow 0.5 S(t) > 0$, para qualquer $S(t)$ positivo, e daí $S'(t) < 0$ até cerca de metade do tempo de estudo. Eventualmente $-S(t)I(t) < 0.5 S(t)$ o que faz com que $S'(t) > 0$ e daí a população dos suscetíveis voltar a aumentar.

Neste gráfico podemos observar a diminuição monótona do gráfico da população das pessoas infetadas isto deve-se a que $-(\mu + \alpha)I(t) < 0 \Leftrightarrow -(0.5 + 2)I(t) < 0 \Leftrightarrow -2.5 I(t) < 0$, o que é verdadeiro para todo o $I(t) > 0$, mas a função tem uma componente positiva $\beta S(t)I(t) > 0 \Leftrightarrow S(t)I(t) > 0$ mas como $-2.5 I(t) > S(t)I(t)$; $I'(t) < 0$, logo a população de indivíduos infetados irá diminuir até 0

Caso 4: temos que $r = \beta = \mu = 1$, $\alpha = 2$



Através de uma primeira observação do gráfico do caso 4 podemos ver que agora ao contrário do caso 3 a população de pessoas suscetíveis não volta a aumentar, mas vai diminuindo de forma monótona essa diminuição dá-se devido a que $S'(t) < 0$

$(r - \mu)S(t) - \beta S(t)I(t) < 0$, uma vez que, $(r - \mu)S(t) = 0 \Leftrightarrow (1 - 1)S(t) = 0 \Leftrightarrow 0 = 0$ e $-\beta S(t)I(t) < 0 \Leftrightarrow -S(t)I(t) \leq 0$, o que será verdade para qualquer $S(t) \geq 0, I(t) \geq 0$ e daí a derivada ser negativa apenas mudando de valor quando a população de pessoas infetadas é 0 e aí $S'(t) = 0$

Também no gráfico observamos a diminuição da quantidade de pessoas infetadas de 1 até 0, o que se irá verificar pela expressão de $I'(t)$. Na primeira parte da equação, $I'(t) = -(\mu + \alpha)I(t) + \beta S(t)I(t)$ vamos obter que $-(\mu + \alpha)I(t)$ será menor ou igual a 0 basta substituir pelos respetivos parâmetros e obtemos a seguinte inequação $-(1 + 2)I(t) \leq 0 \Leftrightarrow -3I(t) \leq 0$, o que é verdade pois $I(t) \geq 0$ e pela segunda parte temos que $\beta S(t)I(t) \geq 0$, pois sendo $\beta = 1$ temos que $S(t)I(t) \geq 0$, para quaisquer $S(t) \geq 0, I(t) \geq 0$, em razão de $S(t)I(t)$ se aproximar de 0 por valores positivos de forma mais rápida do que $-3I(t)$ para valores negativos então a derivada acabará por apresentar um valor somente negativo

Exemplos de utilização do Modelo SIR

Apesar do modelo SIR (Suscetíveis, Infetados, Recuperados) não ter em conta alguns parâmetros como o período de incubação, doenças que podem contagiar uma pessoa várias vezes e até mesmo doenças onde o transmissor da infeção não é o ser humano, mas sim outro agente por exemplo os mosquitos que transmitem doenças tais como o zika e o ébola. O modelo SIR notabiliza-se pela sua eficácia e simplicidade no estudo de doenças como a gripe comum e até o covid-19 que apesar da terceira haver possibilidade de uma mesma pessoa contraí-la diversas vezes a probabilidade de contração é cada vez menor e dessa forma podemos considerar esse fator como praticamente irrelevante dessa forma conseguimos fazer um modelo gráfico que nos permita estudar a evolução das doenças e adotar as mais diversas medidas de prevenção.

Conclusão

Em suma, conseguimos alcançar e cumprir os objetivos deste trabalho, realizar as questões propostas no estudo. Com efeito, no decorrer deste projeto, fomos capazes de pôr em prática diversos dos conhecimentos adquiridos durante as aulas de Matemática das Coisas, além também de adquirir experiência prática no uso do MATLAB, o que nos permitiu desenvolver ainda mais tanto as nossas capacidades matemáticas com as tecnológicas. Assim, depois de termos terminado o trabalho e resolvido a tarefa que nos foi designada, podemos dizer que este trabalho assume uma grande relevância na expansão da nossa visão no que toca à matemática, além de nos permitir obter conhecimento que certamente será útil para as nossas futuras carreiras, especialmente devido ao envolvimento do tópico da modelação matemática, que é empregada em diversos campos de estudo, como a física, química, biologia, economia e engenharias de todo o tipo.

Bibliografia

-https://wikiciencias.casadasciencias.org/wiki/index.php/Modelo_SIR_em_epidemiologia

-<https://rce.casadasciencias.org/rceapp/art/2017/020/>

-Slides Matemática das Coisas (Equações Diferenciais Ordinárias)
