Universidade do
Minho

UC-Matemática das Coisas:

->Modelos Matemáticos com Aplicação em Finanças

Ano Letivo: 2023/2024

Grupo II / Proposta de trabalho 2C

Autores: -João Azevedo a107367
-Gonçalo Fernandes a106812
-Duarte Parente a108570
-Afonso Soares a106929
-Guilherme Vidal a106848
-Luís Soares a106932
-Pedro Morais a107319

Orientador: José Joaquim Martins Oliveira.

Índice

Introdução

Este documento tem como principal objetivo apresentar a resolução de uma ficha de trabalho, onde iremos mostrar, de forma reflexiva, as experiências de aprendizagem desenvolvidas durante as aulas nas diferentes áreas do saber em que a ficha incidiu. Este trabalho está integrado na disciplina de Matemática das Coisas e decorreu no Campus de Gualtar da Universidade do Minho, com o supervisionamento do professor orientador José Joaquim Martins Oliveira.

No mundo dinâmico das finanças, onde decisões cruciais são tomadas a cada instante, a aplicação de modelos matemáticos desempenha um papel fundamental. A interseção entre a matemática e as finanças é um campo multifacetado e essencial que permite aos profissionais e especialistas entender, prever e otimizar o comportamento dos mercados financeiros, avaliar riscos, gerenciar investimentos e muito mais.

Assim, neste trabalho, como já havíamos mencionado, iremos apresentar a realização e resolução de 9 questões de um estudo, seguindo um modelo previamente dado, onde iremos considerar como objeto do estudo um produto alimentar de natureza agrícola que é comercializado no mercado.

Desenvolvimento do Projeto

Em seguida, iremos apresentar a resolução com a respetiva explicação de todas as questões do estudo realizado, apresentadas no projeto proposto pelo professor orientador da disciplina.

Exercício 1:

R.: $f(x_n) = Ax_n + B$

Exercício 2:

Seja x^* o ponto de equilíbrio.

$$x^* = f(x^*) \Leftrightarrow x^* = Ax^* + B \Leftrightarrow (1 - A)x^* = B \Leftrightarrow x^* = \frac{B}{(1 - A)}$$

Exercício 3:

Obs.: $A = -\frac{s_v}{s_c}, B = \frac{(b_c - b_v)}{s_c}$

$$S(n + 1) = D(n) \Leftrightarrow s_v \times p(n) + b_v = -s_c \times p(n) + b_c \Leftrightarrow s_v \times p(n) = -s_c \times p(n) + b_c - b_v \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\frac{s_v}{s_c} \times p(n) = p(n) - \frac{b_c - b_v}{s_c} \Leftrightarrow A \times p(n) = p(n) - B \Leftrightarrow B = (1 - A)p(n) \Leftrightarrow p(n) = \frac{B}{1 - A}$$

Exercício 4:

Obs.: $p(0) = p_0$**,** $p(n + 1) = A \times p(n) + B$

$$p(1) = p(0 + 1) = A \times p(0) + B = A \times p_0 + B$$

$$p(2) = p(1 + 2) = A \times p(1) + B = A \times (A \times p_0 + B) + B = A^2 \times p_0 + AB + B$$

$$p(3) = p(2+1) = A \times p(2) + B = A \times (A^2 \times p_0 + AB + B) + B = A^3 \times p_0 + A^2B + AB + B$$

$$p(4) = p(3+1) = A \times p(3) + B = A \times (A^3 \times p_0 + A^2B + AB + B) + B$$
$$= A^4 \times P_0 + A^3B + A^2B + AB + B$$

Exercício 5:

$$p(n) = A^n \times p_0 + A^{n-1} \times B + A^{n-2} \times B + A^{n-3} \times B + \cdots + A^{n-n} \times B$$

Exercício 6:

Obs.: $S(n) = u_1 \times \frac{1-r^n}{1-r}, u_1 = 1, r = \frac{u_2}{u_1} = A$

$p(n) = A^n \times p_0 + B(A^{n-1} + A^{n-2} + A^{n-3} + \cdots + A^{n-n}) = A^n \times p_0 + B \times \left(1 \times \frac{1-A^n}{1-A}\right) =$
$A^n \times p_0 + B \times \left(\frac{1-A^n}{1-A}\right)$

Exercício 7:

Obs.: $f'(x) = (Ax + B)' = A$

Caso 1 (Teorema 1):

$-1 < A < 0$, logo $-1 < f'(x^\cdot) < 0$ e $0 < |f'(x^\cdot)| < 1$

Assim, os pontos de estabilidade da EDF são assimptoticamente estáveis.

Caso 2 (Teorema 1):

$A < -1$, logo $f'(x^*) < -1$ e $|f'(x^*)| > 1$

Assim, os pontos de estabilidade da EDF são assimptoticamente estáveis.

Caso 3

Teorema 1

Uma vez que |A|=1, é um caso duvidoso

Teorema 2

Uma vez que $f'(x^*) = -1, f''(x^*) = 0$ e $f'''(x^*) = 0$, não podemos concluir nada.

Teorema 3

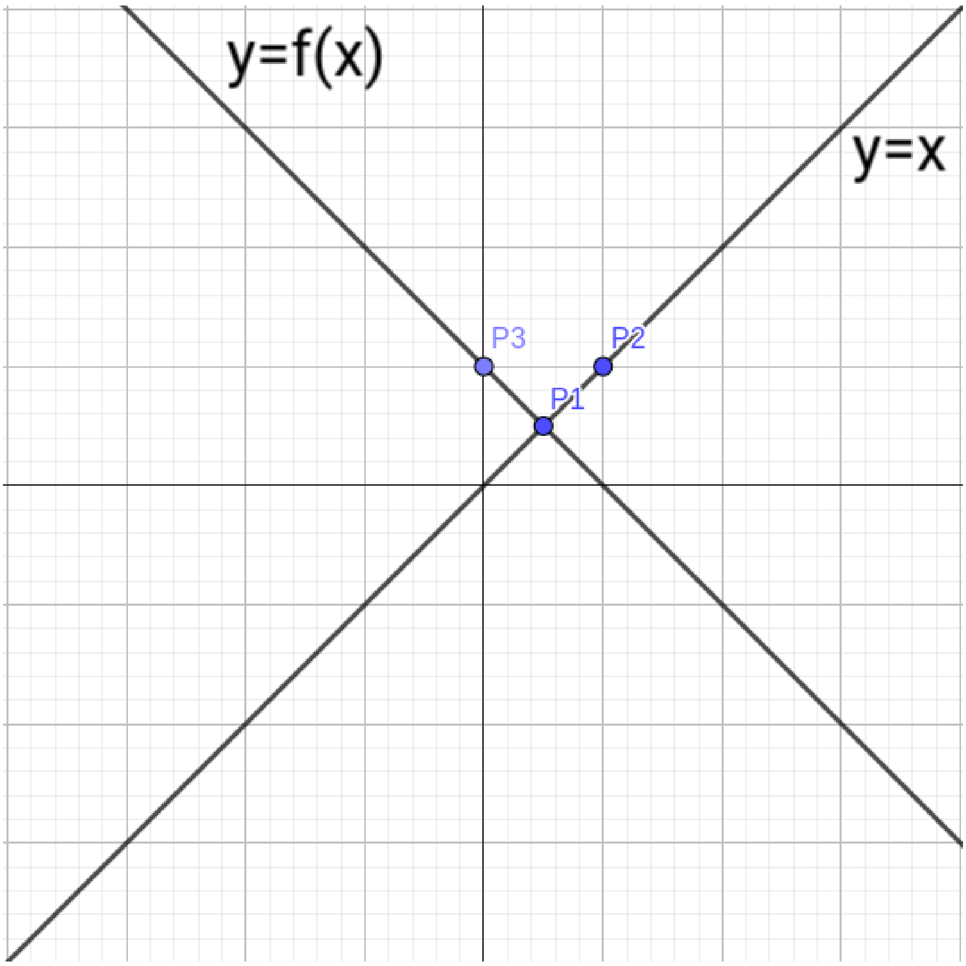
Uma vez que $f'(x^*) = -1$, $2f'''(x^*) + 3[f''(x^*)]^2$ = 0, não podemos concluir nada.

(Análise Gráfica):

$A = -1$, logo $f'(x^*) = -1$ e $x^* = \frac{B}{1-A} = \frac{B}{2}$

Neste caso, como $A = -1$, $f(x) = -x + B$

Como não sabemos o valor de B, vamos assumir a imagem seguinte, como uma possível representação gráfica das retas $y = f(x)$ e $y = x$ sendo B um valor variável pois não temos dados suficientes para discernir o seu valor.



Sendo $P1(x^*, f(x^*))$; $P2(B, B)$ $P3(0, B)$; . Assim, para $A = -1$, $x^* = \frac{B}{2}$, os pontos de equilíbrio da EDF são assimptoticamente estáveis segundo o diagrama de teia de aranha.

Exercício 8:

A equação foi estabelecida anteriormente, $p(n) = A^n \times p_0 + B \times \left(\frac{1-A^n}{1-A}\right)$

Caso 1: $-1 < A < 0$

Quando $n \to +\infty$, como $-1 < A < 0$, a parte $A^n \times p_0$ vai tender para 0, à medida que n aumenta, uma vez que $|A| < 1$.

Além disso, a parte $B \times \left(\frac{1-A^n}{1-A}\right)$ vai convergir para um valor finito, o que, consequentemente, fará o preço $p(n)$ tender a um valor fixo e estável à medida que n aumenta.

Caso 2: $A < -1$

Quando $n \to +\infty$, como $A < -1$, $p(n)$ vai ter um comportamento divergente, pois como $|A| > 1$, a parte $A^n \times p_0$ pode crescer ou decrescer infinitamente dependendo se o valor de n for par ou ímpar. No caso de n ser par $A > 0$ e como está multiplicado por um preço de um produto que à partida deduz-se que é superior a 0 então p(n) irá crescer para valores infinitamente grandes positivos e no caso de n ser ímpar temos que $A < 0$ e multiplicando pelo preço do produto que será normalmente maior que 0 temos que p(n) irá crescer para valores infinitamente grandes negativos.

Assim, o preço $p(n)$ não converge para um valor estável, mas continua crescendo ou decaindo indefinidamente com o aumento de n.

Caso 3: $A = -1$

Quando $n \to +\infty$, com $A = -1$ temos que a expressão $A^n \times p_0 + B \times \left(\frac{1-A^n}{1-A}\right)$ poderá ser simplificada se n for par e se n for ímpar do seguinte modo:

- Se n é par: $A^n \times p_0 + B \times \left(\frac{1-A^n}{1-A}\right) \Leftrightarrow 1 \times p_0 + B \times \frac{1-1}{1-(-1)} \Leftrightarrow p_0 + B \times \frac{0}{2} \Leftrightarrow p_0$

$$\lim_{n\to+\infty} p(n) = p_0$$

- Se n é ímpar: $A^n \times p_0 + B \times \left(\frac{1-A^n}{1-A}\right) \Leftrightarrow -1 \times p_0 + B \times \frac{1-(-1)}{1-(-1)} \Leftrightarrow -p_0 + B$

$$\lim_{n\to+\infty} p(n) = -p_0 + B$$

O preço de p(n) irá se manter estável, pois ou apresenta valores do tipo p_0 ou -$p_0 + B$, logo não existe $\lim_{n \to +\infty} p(n)$, e dessa forma p(n) será estável no ponto de equilíbrio, pois não se afasta dele para valores infinitamente grandes positivos ou negativos mantêm-se sempre à mesma "distância" do mesmo.

Exercício 9:

$$s_v = 1,\ b_v = 1,\ s_c = 3,\ b_c = 13$$

Usando as relações previamente enunciadas no exercício 3 podemos calcular o A e o B e substituí-los na EDF (2).

a) $A = -\frac{s_v}{s_c} \Leftrightarrow A = -\frac{1}{3}$

$$B = \frac{(b_c - b_v)}{s_c} \Leftrightarrow B = \frac{13-1}{3} \Leftrightarrow B = \frac{12}{3} \Leftrightarrow B = 4$$

A EDF (2) aqui tomará a seguinte expressão: p(n+1) = $\frac{1}{3}p_n + 4$

Obs.: p_1 representa o preço da unidade praticado durante o período n = 1.

Como o valor de A está entre 0 < A < 1 este caso trata-se do caso 1.

b) Para descobrirmos o preço de equilíbrio teremos de calcular o ponto de interseção entre a reta S(n+1) que representa a oferta com a reta D(n) que representa a procura.

Então temos que:

$$s_v p(n) + b_v = -s_c p(n) + b_c \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1p(n) + 1 = -3p(n) + 13 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4p(n) = 13 - 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow p(n) = \frac{12}{4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow p(n) = 3$$

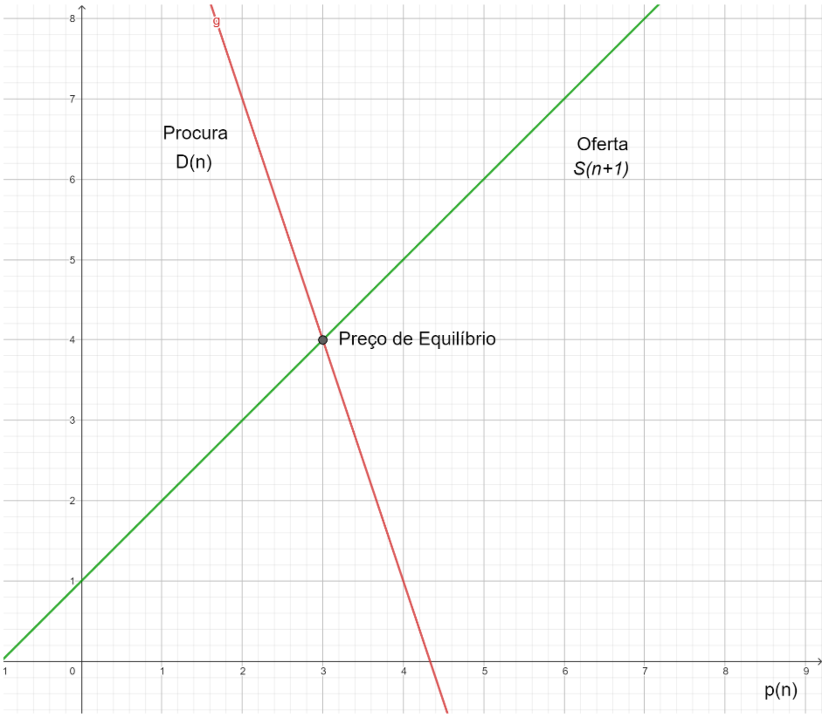
Legenda:

-s_v representa a subjetividade do vendedor ao preço do mercado

- s_c representa a subjetividade do comprador ao preço do mercado

Como resolvemos a função em relação a p(n) o valor de p(n) que obtivemos p(n)=4 irá corresponder neste caso ao preço de equilíbrio do produto.

Agora iremos tirar a mesma conclusão só que com auxílio dos gráficos:



c) Para $p(0) = 1$ iremos construir o diagrama de teia do seguinte modo.

Passo 1: Num sistema de eixos OXY com OX representando p(n) e OY para p(n+1), iremos representar dois gráficos.

$$y=x \text{ isto é } p(n+1) = p(n); \; y = g(x) \text{ isto é } p(n+1) = -\frac{1}{3}p(n) + 4$$

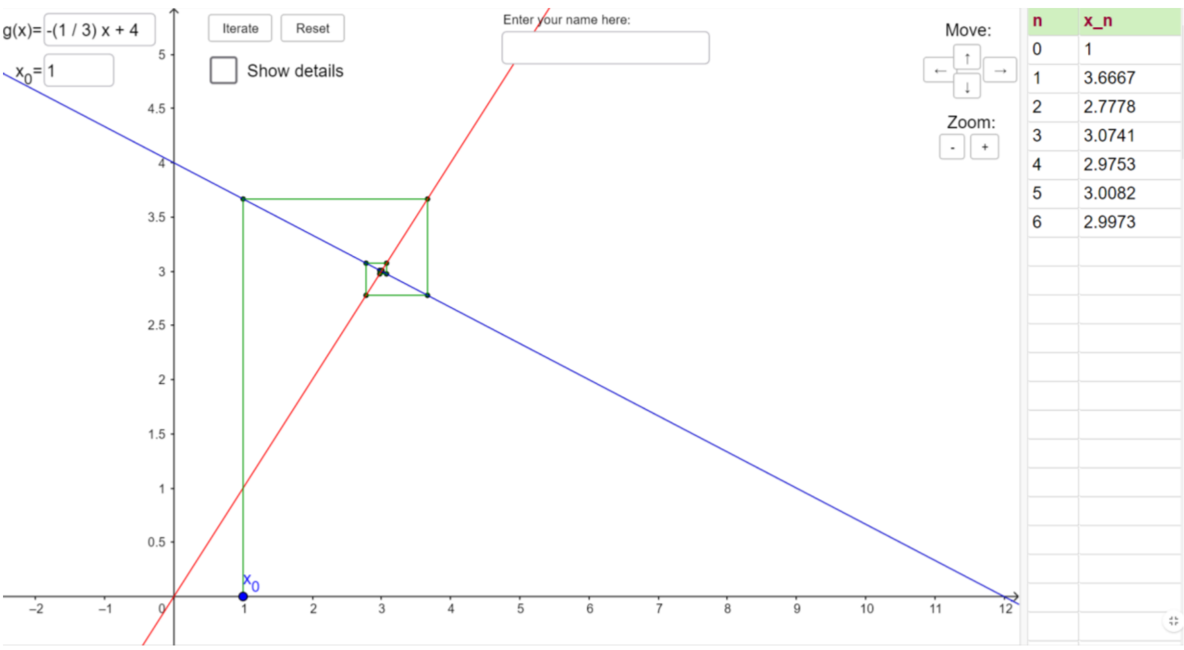
Passo 2: Colocámos $p(0) = 1$ no eixo horizontal.

Passo 3: De seguida subimos na vertical p(1) = $-\frac{1}{3}p(0) + 4$ até ao gráfico de g

Passo 4: Agora iremos procurar p(2) = - $\frac{1}{3}p(1) + 4$ marcando como tínhamos feito inicialmente x1 no eixo das abcissas OX para isso iremos refletir horizontalmente p1 sobre o gráfico de g até atingir o gráfico da reta y=x.

O processo repete-se da mesma maneira pela combinação dos Passo 3 e 4 o número de vezes necessária para tirar uma solução bastante aproximada.

De seguida está representado o diagrama de teia para p (0) = 1 de modo a estudar se a função é assimptoticamente estável para valores inferiores à do preço de equilíbrio x*=3.



Após efetuarmos o diagrama de teia de aranha, verificamos que este tende para o preço de equilíbrio x*= 3, logo $p(n+1)$ é assimptoticamente estável para valores à esquerda do ponto de equilíbrio.

Para $p(0) = 5$ iremos construir o diagrama de teia segundo os seguintes passos:

Passo 1: Num sistema de eixos OXY com OX representando p(n) e OY para p(n+1), iremos representar dois gráficos.

y=x isto é p(n+1) =p(n); y = $g(x)$ isto é p(n+1) =-$\frac{1}{3}p(n) + 4$

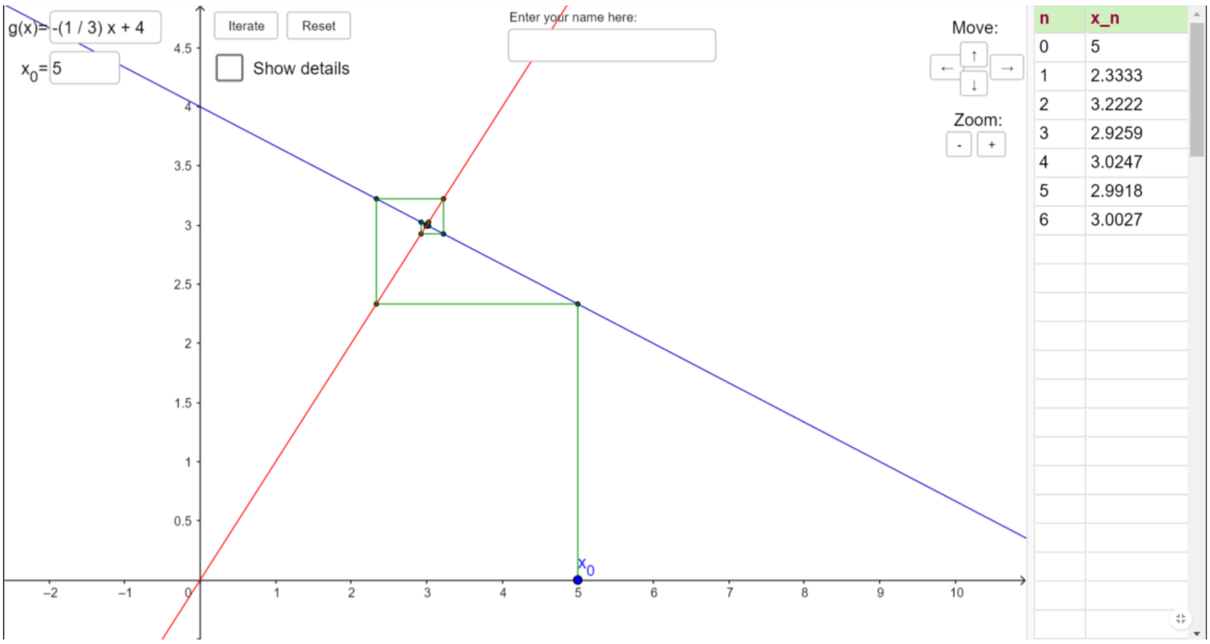
Passo 2: Colocámos $p(0) = 5$ no eixo horizontal.

Passo 3: De seguida subimos na vertical p(1) = $-\frac{1}{3}p(0) + 4$ até ao gráfico de g

Passo 4: Agora iremos procurar p(2) = $-\frac{1}{3}p(1) + 4$ marcando como tínhamos feito inicialmente x1 no eixo das abcissas OX para isso iremos refletir horizontalmente p1 sobre o gráfico de g até atingir o gráfico da reta y=x.

O processo repete-se da mesma maneira pela combinação dos Passo 3 e 4 o número de vezes necessária para tirar uma solução bastante aproximada.

De seguida está representado o diagrama de teia para p (0) = 5 de modo a estudar se a função é assimptoticamente estável para valores superiores ao do preço de equilíbrio x*=3:



Após efetuarmos o diagrama de teia de aranha, verificamos que este tende para o preço de equilíbrio de x*= 3, logo $p(n+1)$ é assimptoticamente estável para valores à direita do ponto de equilíbrio.

Conclusão

Em suma, conseguimos alcançar e cumprir os objetivos deste trabalho, realizar as questões propostas no estudo. Com efeito, no decorrer deste projeto, fomos capazes de pôr em prática diversos dos conhecimentos adquiridos durante as aulas de Matemática das Coisas, o que nos permitiu desenvolver ainda mais as nossas capacidades matemáticas. Assim, depois de termos terminado o trabalho e resolvido a tarefa designada, podemos dizer que este trabalho assume uma grande relevância na expansão dos nossos horizontes matemáticos e que nos permitiu obter conhecimento que certamente será útil para as nossas futuras carreiras, especialmente devido ao envolvimento na área das finanças, que é uma área indispensável para o nosso futuro.

Bibliografia

- Slides Matemática das Coisas (Equações às diferenças)

- Url: https://www.youtube.com/watch?v=gojeMEkQqTM