

Projecto 3A – Uma variante do modelo SIR para o desenvolvimento de epidemias

Introdução. Neste projecto, vamos considerar um novo modelo para o desenvolvimento de epidemias. O novo modelo resulta de estender o modelo SIR apresentado na aula de 31 de Outubro 2023, por se levar em consideração a taxa de natalidade e de mortalidade da população em estudo.

Consideremos as três populações de referência na evolução de uma epidemia, ou seja, as populações de Suscetíveis (S), Infectados (I) e Recuperados (R).

Modelo. Vamos considerar o modelo SIR (na sua forma reduzida) que se segue,

$$\begin{cases} S'(t) = (r - \mu)S(t) - \beta S(t)I(t) \\ I'(t) = -(\mu + \alpha)I(t) + \beta S(t)I(t). \end{cases} \quad (1)$$

sendo este uma extensão do modelo SIR estudado na aula de 31 de Outubro de 2023:

$$\begin{cases} S'(t) = -\beta S(t)I(t) \\ I'(t) = \beta S(t)I(t) - \alpha I(t), \end{cases} \quad (2)$$

As constantes reais r, μ, β, α são positivas.

Estudo. Pretende-se fazer um estudo do modelo mais geral (1), em função dos parâmetros r, μ, β, α .

[1] Os alunos deverão interpretar o significado das constantes r, μ, β, α ;

Qual será a equação do modelo (1) para a população de Recuperados? (Neste ponto, suponha-se que a infeção não causa mortes)

[2] Pretende-se que os alunos determinem os pontos de equilíbrio de (1), em função dos parâmetros reais positivos r, μ, β, α .

[3] Considerando o modelo (1) na forma

$$\begin{cases} S'(t) = F(S(t), I(t)) \\ I'(t) = G(S(t), I(t)) \end{cases}, \quad (3)$$

pretende-se que os alunos obtenham a correspondente matriz Jacobiana

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial S} & \frac{\partial F}{\partial I} \\ \frac{\partial G}{\partial S} & \frac{\partial G}{\partial I} \end{bmatrix}.$$

[4] Pretende-se que, sempre que possível, os alunos classifiquem a estabilidade dos pontos de equilíbrio, obtidos no ponto [2], em função dos parâmetros reais positivos r, μ, β, α .

[5] Para cada um dos casos que se segue, pretende-se que os alunos descrevam o comportamento das populações $S(t)$ e $I(t)$ do modelo (1) com base em simulação numéricas, considerando condições iniciais convenientes, por exemplo $S(0) = 3$ e $I(0) = 1$.

Caso 1 $r = \beta = 1, \mu = 0.5, \alpha = 0.2$

Caso 2 $r = 0.5, \mu = \beta = 1, \alpha = 0.2$

Caso 3 $r = \beta = 1, \mu = 0.5, \alpha = 2$

Caso 4 $r = \mu = \beta = 1, \alpha = 2$

Os alunos são incentivados a procurar bibliografia e outro tipo de informação que permitam algum contributo inovador e /ou exemplo de aplicação de modelos do tipo SIR.