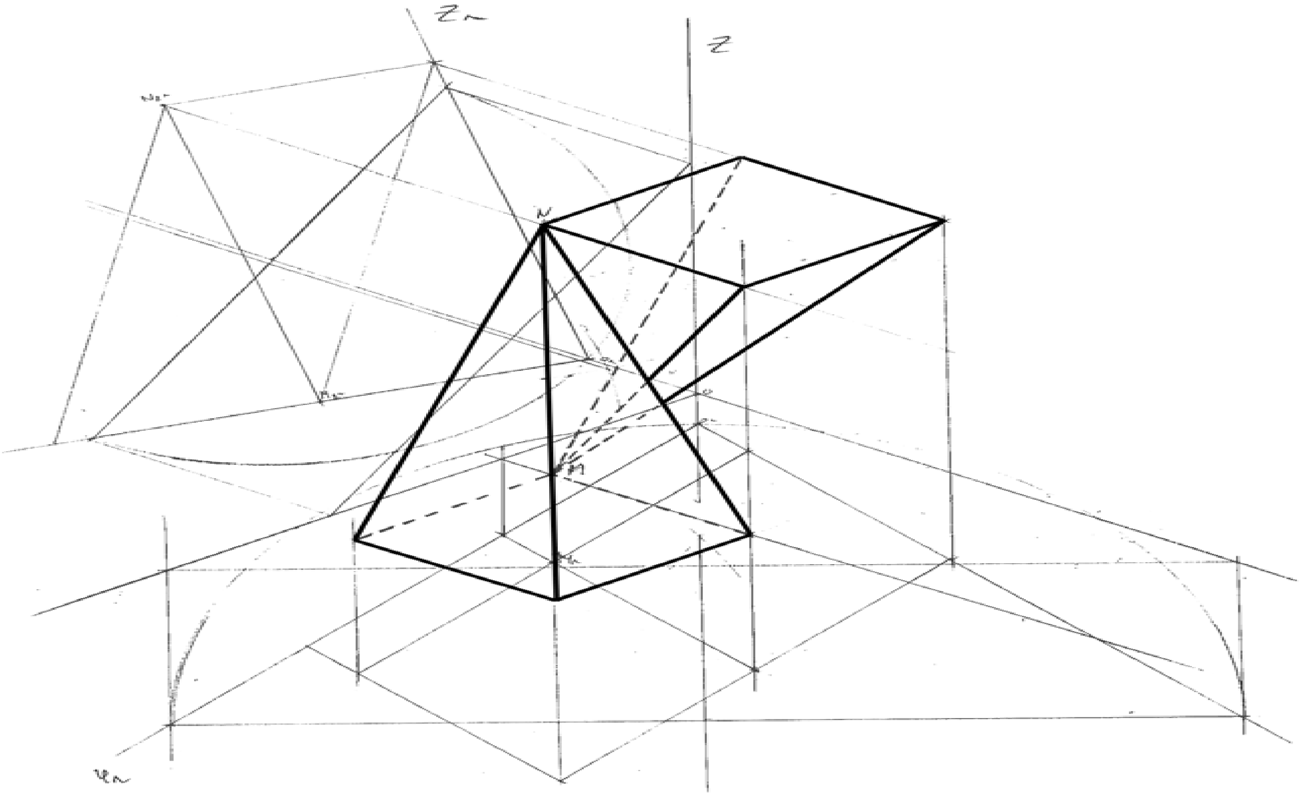
Universidade do
Minho



UC-Matemática das Coisas: Distâncias Inacessíveis

Ano Letivo: 2023/2024

Grupo II / Proposta de trabalho 2

Autores: -João Azevedo a107367
-Gonçalo Fernandes a106812
-Duarte Parente a108570
-Afonso Soares a106929
-Guilherme Vidal a106848
-Luís Soares a106932
-Pedro Morais a107319

Orientador: José Joaquim Martins Oliveira.

Índice

Introdução:

Este documento tem como principal objetivo apresentar o percurso efetuado durante o decorrer do projeto, dando a conhecer, de forma reflexiva, as experiências de aprendizagem desenvolvidas nas diferentes áreas do saber em que a mesma incidiu. Este trabalho está integrado na disciplina de Matemática das Coisas e decorreu no Campus de Gualtar da Universidade do Minho, com o supervisionamento do professor orientador José Joaquim Martins Oliveira.

A geometria é uma área que tem desempenhado um papel fundamental na compreensão e descrição das relações espaciais que rodeiam o nosso mundo. Desde os tempos antigos, os matemáticos e filósofos se dedicaram a explorar as propriedades geométricas do espaço que nos permeia. No entanto, a geometria não se limita apenas a descrever objetos e distâncias que podemos facilmente ter acesso e medir. Ela também rompe com a nossa compreensão quando nos deparamos com o principal tópico que abordaremos neste projeto ao qual chamamos de "distâncias inacessíveis".

Neste trabalho, iremos abordar situações em que a medição de distâncias e o cálculo de propriedades geométricas se tornam desafiadores, devido a todo o tipo de restrições.

Portanto, este relatório tem o intuito de explorar a fascinante área da geometria que lida com este conceito, especificamente com a realização de duas tarefas distintas, a primeira, que tem como objetivo a escolha de um qualquer lugar inacessível horizontalmente, e consequentemente o cálculo da sua largura num certo lugar fixado, fazendo uso das propriedades elementares de geometria, enquanto que na segunda, “partindo do princípio que o globo terrestre é esférico e que o seu raio é conhecido pretende-se, recorrendo a propriedades de geometria elementar, a descrição, deforma sequencial, de todos os procedimentos necessários com vista ao cálculo da distância entre o planeta Terra e a Lua”.

Desenvolvimento do Projeto:

Assim como havíamos referido anteriormente, este projeto é dividido em duas tarefas, sendo que iremos começar com a apresentação da segunda delas, uma vez que nela poderemos começar com uma explicação mais geral sobre o tópico abordado, e depois passar para a primeira tarefa com a apresentação de um exemplo real do cálculo da largura de uma certa distância inacessível.

Determinação de distâncias astronómicas

Quando pensamos a respeito de astronomia, seja em escolas, livros ou até mesmo notícias, deparamo-nos com dúvidas a respeito de como são obtidos os valores das distâncias dos objetos. Para corpos celestes relativamente próximos, acaba por não ser tão difícil de imaginar e explicar como medimos suas distâncias. Em termos astronómicos, corpos do sistema solar estão bem próximos, permitindo que as suas medidas apresentem uma alta precisão, mas com o aumento da distância, alguns métodos de medição acabam apresentando cada vez mais erros, levando à necessidade da utilização de outros métodos. No entanto, nesta tarefa, pretendemos determinar a distância da Terra à Lua, através do raio a Terra e da utilização de geometria, e, por isso, vamos abordar apenas métodos de medida simples.

Sendo um dos métodos mais comuns para determinar distâncias grandes a pontos inacessíveis, o Teorema de Tales que afirma que, num certo plano, a interseção de retas paralelas, por retas concorrentes, formam segmentos proporcionais.

Na imagem seguinte está exemplificado, a maneira de medir a distância de uma árvore localizada do outro lado de um ribeiro, sem atravessá-lo:

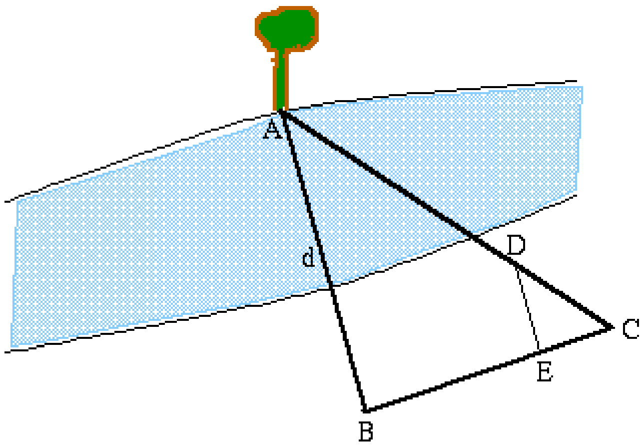


Fig.1

Tomando o ponto A, onde se encontra a árvore como um dos vértices, construímos os triângulos semelhantes ABC e CDE. [CB] e [CE] são as bases dos dois triângulos, [AC] e [AB] são duas direções distintas do ponto A, onde está a árvore, vistas do ponto B e C.

Sabendo as medidas de [CB], [CE] e [DE], como [CB] e [CE] são lados proporcionais, também somos capazes de saber e determinar a medida de [AB] que é proporcional a [DE]. Assim, somos capazes de ter $\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{CB}}{\overline{CE}} \Leftrightarrow \overline{AB} = \frac{\overline{CB} \times \overline{DE}}{\overline{CE}}$

Ainda no exemplo acima representado, vemos que a direção da árvore observada do ponto C, é diferente da direção da árvore que se observa do ponto B. Esse deslocamento aparente na direção do objeto observado devido à mudança de posição do observador é chamado de paralaxe. Este princípio pode até ser visto na visão estereoscópica do olho humano, onde quanto maior for a distância a que está o objeto, menor é a paralaxe.

Além disso, a paralaxe também é o ângulo formado pelas semirretas que partem dos dois pontos de observação e se cruzam no objeto ou ponto que está a ser observado ou registado, permitindo, por exemplo, a utilização desse mesmo ângulo para ajudar no cálculo da distância ao tal objeto.

No caso da **Fig.2**, a paralaxe é definida como o ângulo p entre as linhas de visão de um objeto visto de dois pontos de observação extremos (posições A e B na figura).

Simulação da paralaxe

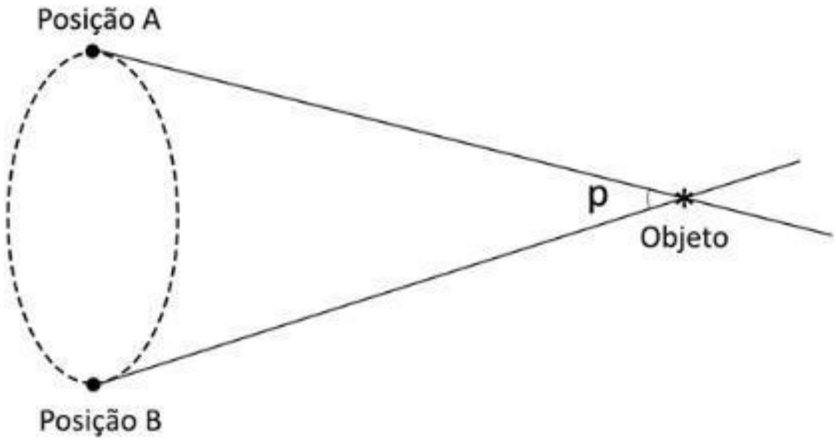


Fig.2

Supondo que o ponto O (Ponto assinalado como objeto) seja o corpo cuja distância eu quero medir (como a árvore da última ilustração). [AB] é a linha de base do triângulo, M é o ponto médio de [AB] e ‘d’ é a medida de [MO]. Já o $\angle p$ é o ângulo obtido através do cruzamento das linhas de visão do objeto vistos dos pontos A e B, que pode ser obtido se os dois observadores, um na posição A e outro na B, tirarem uma foto da Lua ao mesmo tempo e depois compararem o ângulo que ela faz com uma estrela distante, acabando por verificar que a lua está em uma posição diferente, e a partir disso conseguem calcular o ângulo comparando as fotos tiradas de cada posição.

Dividindo o triângulo ABO em dois triângulos retângulos (AMO e BMO) e sendo a medida do $\angle MOA$ metade da medida do $\angle p$, pelo uso das razões trigonométricas somos capazes de obter:

$$\tan \angle MOA = \frac{\overline{MA}}{d} \Leftrightarrow \tan \frac{p}{2} = \frac{\overline{MA}}{d}$$

Como ‘p’ é conhecido (através das medições), e $\overline{MA}$ também é conhecido, podemos determinar a distância ‘d’. Além disso, para ângulos pequenos, a tangente do ângulo é aproximadamente igual ao próprio ângulo medido em radianos. Se p ≤ 4°, tan ‘p’ ≈ ‘p’ (‘p’ em radianos)

Logo, tan $\frac{p}{2} = \frac{\overline{MA}}{d} \Leftrightarrow d = \frac{\overline{MA}}{\tan \frac{p}{2}} \cong d = \frac{\overline{MA}}{\frac{p}{2}}$

Paralaxe Geocêntrica

A paralaxe muitas vezes é usada para medir distâncias de objetos astronómicos. Mas como esses objetos estão muito distantes, é necessário escolher uma linha de base muito grande.

Para medir a distância à Lua pode-se usar o diâmetro da Terra como linha de base **(Paralaxe Geocêntrica)**. Já para se medir a distância de estrelas próximas, usa-se por vezes o diâmetro da órbita da Terra como linha de base.

Na tarefa 2 do nosso projeto, é nos dito para determinar a distância da Terra à Lua, sabendo o seu raio e fazendo uso de geometria, e, assim, usando o método da paralaxe e o diâmetro da Terra como linha de base, somos capazes de determinar essa mesma distância.

A **Fig.3** exemplifica o uso da paralaxe na determinação da distância à lua:

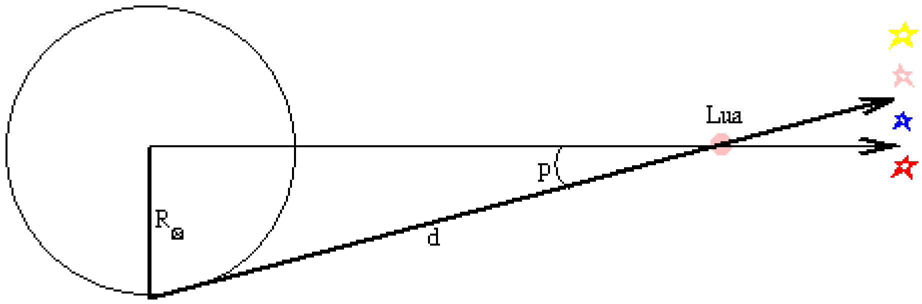


Fig.3

Seja R o raio da Terra, e DL a distância do centro da Terra à Lua e também a distância que pretendemos determinar.

Sendo o raio da Terra aproximadamente 6371 km, pelo uso das razões trigonométricas, $\tan p = \frac{R}{DL} \Leftrightarrow DL = \frac{6371}{\tan p} \Leftrightarrow DL = \frac{6371}{\frac{R}{DL}}$

Como DL é a distância do centro da Terra à Lua, basta subtrair-lhe R, ou seja, subtrair 6371 km, para obter uma distância aproximada da superfície da Terra à superfície da Lua.

Exemplificação da Tarefa 2 usando valores numéricos

Tomaremos como referência a **fig3.**

Seja, mais uma vez, R e DL, o raio da Terra e a distância do centro da Terra à Lua.

Seja o ângulo da paralaxe é $2p \approx 1{,}86°$, então $p \approx 0{,}93°$

Passando *p* para radianos fica que $p \times \frac{\pi}{180°} = 0{,}93° \times \frac{\pi}{180°} \approx 0{,}01623rad$

Assim, fica que:

$$\tan p = \frac{R}{DL} \Leftrightarrow \tan 0,01623 = \frac{R}{DL} \Leftrightarrow DL = \frac{6371}{\tan 0{,}01623} \Leftrightarrow DL = 392510{,}2km$$

Como havíamos dito anteriormente DL é a distância do centro da Terra à Lua, logo para obter a distância da superfície da Terra até á superfície da Lua, quando estão alinhados, temos de fazer $DL - 6371 = 392510{,}2 - 6731 = 386139{,}2km$, fazendo com que para os dados que utilizámos a distância seja de aproximadamente 386139,2km.

Resolução da Tarefa 1

Agora que concluímos a tarefa 2 e fomos capazes de explicar e exemplificar como fazer uso de métodos como a paralaxe para calcular a distância do nosso planeta à Lua, iremos então passar para a tarefa 1, onde iremos demonstrar um exemplo real do cálculo de uma certa distância inacessível num certo lugar fixado.

Como nesta tarefa temos como objetivo calcular uma distância inacessível horizontal, para este caso, escolhemos a estrada perto da ponte aérea próxima ao Braga Parque. Mais à frente está ilustrado na **Fig.4** a representação esquemática do local, onde, para uma melhor localização, [DE] é a estrada que pretendemos medir e C é o vértice em comum dos dois triângulos.

Para conseguirmos calcular o segmento de reta (representante da estrada) teremos de primeiramente provar que os triângulos $\triangle \mathrm{ABC}$ e $\triangle \mathrm{CDE}$ são semelhantes entre si. Para isso iremos utilizar o critério de semelhança de triângulos AA. Podemos dizer que os ângulos $\angle ACB = \angle DCE$, uma vez que estes ângulos são verticalmente opostos; também podemos dizer que $\angle BAC = \angle CED$, pois os segmentos de reta [AB] e [DE] são retas paralelas cortadas por um segmento de reta transversal [AE], onde estes ângulos são ângulos alternos internos o que faz com que sejam congruentes.

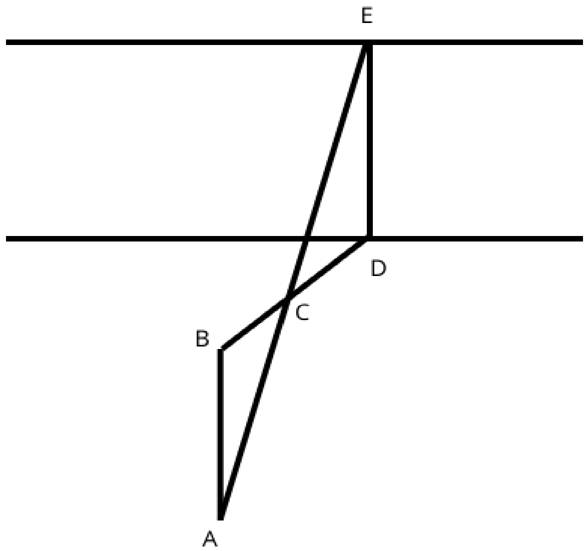


Fig.4

Representação do segmento de reta [DE]

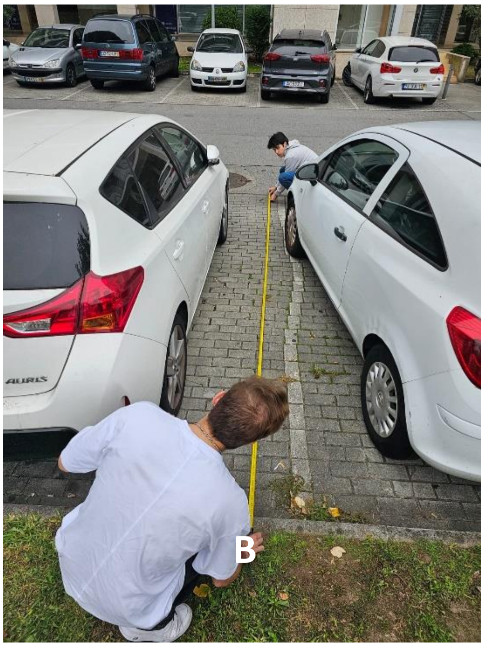
Nota: Ao tirar as fotos nós colocámo-nos a nós mesmos para representar os pontos e tornar mais fácil a identificação dos lados e triângulos.

Representação do triângulo △CDE

Representação do triângulo △ABC

Após provar que os dois triângulos são semelhantes, procedemos à medição dos segmentos de reta [AB], [BC] e [DC] representados na **Fig4**.

Representação do Segmento de reta [AB]



Medição em duas partes do segmento de reta [AB]

Representação e medição do segmento de reta [BC]

Representação e medição de [DC]

Das medições chegamos às seguintes medidas para os segmentos de reta:

$$\overline{DC} \cong 7{,}02\, m;\ \overline{BC} \cong 4{,}74\, m;\ \overline{AB} \cong 5{,}08 + 11{,}20 \cong 16{,}28\, m$$

Nota: No cálculo de $\overline{AB}$, 5,08 m corresponde à foto da primeira medição e o 11,20 m corresponde à da segunda medição.

Com as medidas feitas poderemos continuar para o cálculo do comprimento do segmento de reta.

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{DC}} \Leftrightarrow \overline{DE} = \frac{\overline{AB} \times \overline{DC}}{\overline{BC}} \Leftrightarrow \overline{DE} = \frac{16{,}28 \times 7{,}02}{4{,}74} \Leftrightarrow \overline{DE} \cong 24{,}11 m$$

Conclusão

Em suma, conseguimos alcançar e cumprir os objetivos deste trabalho, medir distâncias inacessíveis, fazendo uso de métodos como o Teorema de Tales e método da paralaxe, sendo este o método que usamos para explicar e resolver a tarefa 2. Com efeito, no decorrer deste projeto, fomos capazes de pôr em prática diversos dos conhecimentos adquiridos durante as aulas de Matemática das Coisas, o que nos permitiu desenvolver ainda mais as nossas capacidades matemáticas. Assim, depois de termos terminado o trabalho e resolvido todas as tarefas designadas, podemos dizer que este trabalho assume uma grande relevância na expansão dos nossos horizontes matemáticos e nos permitiu obter conhecimento que certamente será útil para as nossas futuras carreiras.

Bibliografia

- http://astro.if.ufrgs.br/dist/dist.htm
- http://msproblemas.blogspot.com/2017/02/como-calcular-distancia-da-terra-lua.html
- https://pt.wikipedia.org/wiki/Tales_de_Mileto
- https://www.zenite.nu/o-metodo-da-paralaxe
- https://pt.wikipedia.org/wiki/Paralaxe
- https://brazilastronomy.wordpress.com/determinacao-de-distancias-astronomicas/