

Projecto 2C – EDFs & Aplicações em Finanças e Economia

Introdução

Consideremos um produto alimentar de natureza agrícola que é comercializado no mercado. Trata-se de um produto para o qual o mercado não prevê armazenamento ao longo do tempo, pelo que interessa esgotar o produto e responder à procura do consumidor.

As decisões tomadas pelos produtores quanto às quantidades a cultivar são efectuadas no ano anterior ao da venda do produto, pelo que a quantidade que é oferecida no mercado em cada ano depende do preço praticado no ano anterior. De facto, um produtor é tentado a produzir mais se o preço praticado no ano de produção e, portanto no ano anterior ao da comercialização, for elevado.

Por outro lado, o consumidor reage ao preço que é praticado no momento em que o produto é comercializado e a procura num certo ano é função do preço nesse ano. Se o preço do produto for elevado, o consumidor perde o interesse e procura um produto alternativo.

O mercado de produtos alimentares agrícolas é muito competitivo e, em geral, o preço que prevalece em cada ano é aquele para o qual a procura do consumidor é igual à oferta do produtor, isto é, a procura esgota exactamente a oferta e, portanto, nenhum produtor fica com produto por vender nem nenhum consumidor com a procura por satisfazer.

Modelo

Para um determinado produto vendido no mercado, com uma sazonalidade anual, considere que:

- $S(n)$ a oferta no ano n , dada pelo número de unidades desse produto colocadas à venda no ano n ;
- $D(n)$ a procura no ano n , dada pelo número de unidades desse produto compradas no ano n ;
- $p(n)$ o preço de cada unidade desse produto praticado no ano n .

Por simplicidade, vamos admitir que $S(n)$ e $D(n)$ variam linearmente em função do preço do produto, de acordo com as seguintes equações às diferenças

$$\begin{cases} S(n+1) = s_v p(n) + b_v \\ D(n) = -s_c p(n) + b_c \end{cases} \quad (1)$$

onde s_v, s_c e b_v, b_c são constantes positivas. Em particular, s_v mede a sensibilidade do vendedor ao preço de mercado e s_c mede a sensibilidade do consumidor ao preço de mercado.

O preço praticado no mercado é aquele que corresponde a ter a oferta igual à procura, pelo que $S(n+1) = D(n+1)$, resultando

$$p(n+1) = Ap(n) + B \quad (2)$$

com $A = -s_v/s_c$ e $B = (b_c - b_v)/s_c$, que constitui uma equação às diferenças, linear, de ordem 1, autónoma. A equação (2) descreve a evolução do preço de mercado do produto em causa ao longo dos vários anos.

Estudo

Considere a EDF obtida em (2), cuja incógnita é a sucessão de preços, $p(n)$ ao longo dos vários anos $n \in \mathbb{N}$. O preço inicial denota-se por p_0 , correspondendo ao preço praticado no ano zero, 0.

1. Escrevendo a EDF (2) na forma

$$x_{n+1} = f(x_n),$$

com $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, identifique x_n , para cada $n \in \mathbb{N}_0$, e a função f .

2. Determine os pontos de equilíbrio da EDF (2).
3. Em contexto económico, o preço de equilíbrio é aquele para o qual a oferta $S(n+1)$ é igual à procura $D(n)$. Obtenha o preço de equilíbrio à luz desta definição, mostrando que reencontra o valor obtido no item 2.
4. Suponha que $p(0) = p_0$ e calcule $p(1)$, $p(2)$, $p(3)$ e $p(4)$ em função de p_0 .
5. Tendo em consideração os resultados obtidos no item 4, deduza a formula para $p(n)$, para qualquer $n \in \mathbb{N}$, dependente de p_0 .
6. Recorrendo à soma de n termos consecutivos de uma progressão geométrica, mostre que

$$p(n) = A^n p_0 + B \frac{1 - A^n}{1 - A}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (3)$$

Sugestão: Consulte os cálculos, apresentados na aula, relativos ao exemplo do empréstimo bancário.

7. Considere a EDF (2) nos casos seguintes **Caso 1)** $-1 < A < 0$ **Caso 2)** $A < -1$

Em cada caso, estude a estabilidade do(s) ponto(s) de equilíbrio da EDF (2) determinados na pergunta 2, através dos critérios apresentados (ver slides). Classifique a estabilidade dos pontos de equilíbrio à luz das definições apresentadas na aula.

O que se poderá dizer sobre a estabilidade no **Caso 3)** $A = -1$?

8. A partir da expressão obtida para $p(n)$ em (3), explique o que se espera que aconteça ao preço $p(n)$ no futuro (i.e. quando $n \rightarrow +\infty$) nos **Caso 1), 2) e 3)**

Compare as conclusões com as obtidas em 7 relativamente à estabilidade do(s) ponto(s) de equilíbrio.

9. Considere a seguinte concretização das constantes:

$$s_v = 1, b_v = 1, s_c = 3, b_c = 13.$$

na EDF (2).

- (a) Para a concretização das variáveis apresentada, a EDF (2) corresponde a qual das situações (**Caso 1**, **Caso 2**, ou **Caso 3**)?
- (b) Qual o preço de equilíbrio? (ilustre o ponto de equilíbrio através de um gráfico)
- (c) Estude a estabilidade do preço de equilíbrio usando o diagrama de teia de aranha, assumindo $p(0) = 1$ e $p(0) = 5$.