

## Informe 2. Equacions diferencials

Luís Farfán (1388330), Lucas Fuentealba (1388326) i Adrià Medeiros (1388403)

# 1. Introducció

En aquesta practica volem trobar solucions d'un sistema d'equacions diferencials de primer ordre, en concret les anomenades equacions de Lorenz-Haken (1), (2) i (3).

$$\dot{x} = \sigma(y - x) \quad (1)$$

$$\dot{y} = x(r - z) - y \quad (2)$$

$$\dot{z} = xy - bz \quad (3)$$

Que van ser deduïdes pel matemàtic i meteoròleg Edward Lorenz l'any 1963 per a estudiar la convecció atmosfèrica. Uns anys més tard, el físic Hermann Haken va descobrir que aquestes equacions també poden representar un làser i, per tant, l'estat caòtic cap al qual deriven sota unes determinades condicions es pot entendre en termes de les pèrdues de la cavitat del làser o el bombeig de l'energia.

En el nostre cas les variables  $x$ ,  $y$ , i  $z$  representen respectivament el camp elèctric, la polarització i la inversió de població mentre que els paràmetres  $\sigma$ ,  $r$  i  $b$  son 3 constants positives relacionades amb les pèrdues de la cavitat làser, al bombeig i a la relaxació de l'energia en el medi actiu.

Degut a les característiques pròpies d'aquest sistema no lineal, les solucions poden arribar a ser caòtiques i dependre sensiblement dels paràmetres inicials i del sistema. Per tant caldrà fer un estudi a fons de totes les solucions possibles que pot presentar per a observar totes les variants que poden tenir lloc, en concret estudiarem aquest problema a partir dels diferents valors que pot prendre la constant que determina el bombeig de l'energia en el medi actiu ( $r$ ) en funció dels altres paràmetres ( $\sigma$  i  $b$ ).

Per tal de resoldre aquestes equacions aplicarem dos mètodes numèrics que permeten resoldre equacions diferencials: el d'Euler i el de Runge-Kutta d'ordre 4. Els dos mètodes parteixen de la base de que la funció solució és analítica i admet un desenvolupament en sèrie de Taylor (on intervenen les seves derivades).

El mètode d'Euler es queda amb el primer terme del desenvolupament de la funció per a oferir una primera aproximació de la solució. Des d'un punt de vista geomètric, considera que a partir d'un punt inicial i de l'equació diferencial podem trobar el pendent de la recta tangent a aquest punt. Si hem dividit l'interval de temps en  $n$  subintervalls de mida  $h$  i hem avaluat la funció en  $t_k$ , el valor de la nostra solució en el següent instant es pot aproximar com el valor de la recta tangent en  $t_{k+1} = t_k + h$ .

$$\dot{y} = f(y, t) \implies \begin{aligned} y_{k+1} &= y_k + f(y_k, t_k) \\ t_{k+1} &= t_k + h \end{aligned}$$

El mètode s'adapta fàcilment al cas de varies variables.

Com més petita sigui  $h$  (equivalent a considerar cada cop més intervals) millor serà l'aproximació ja que millor s'ajustarà a la funció real, però tenint en compte en tot moment que fem un error de segon ordre. És un mètode útil per a conèixer de forma general quina forma tindrà la funció que volem calcular.

El mètode de Runge-Kutta generalitza a ordres superiors el mètode d'Euler i, en concret, farem servir el que es queda amb la quarta derivada anomenat RK4 de forma abreviada. El desenvolupament d'aquesta aproximació ens porta als següents resultats per a un sistema d'equacions diferencials:

$$\begin{aligned}x_{k+1} &= x_k + \frac{h}{6}[L_1 + 2L_2 + 2L_3 + L_4] \\y_{k+1} &= y_k + \frac{h}{6}[K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4] \\Z_{k+1} &= Z_k + \frac{h}{6}[M_1 + 2M_2 + 2M_3 + M_4]\end{aligned}$$

Amb les constants definides com:

$$\begin{aligned}K_1 &= f(t_k, x_k, y_k, z_k) \\K_2 &= f\left(t_k + \frac{h}{2}, x_k + \frac{h}{2}L_1, y_k + \frac{h}{2}K_1, z_k + \frac{h}{2}M_1\right) \\K_3 &= f\left(t_k + \frac{h}{2}, x_k + \frac{h}{2}L_1, y_k + \frac{h}{2}K_2, z_k + \frac{h}{2}M_2\right) \\K_4 &= f(t_k + h, x_k + hL_3, y_k + hK_3, z_k + hM_3)\end{aligned}$$

On  $\dot{y} = f(t_k, x_k, y_k, z_k)$ . El desenvolupament és equivalent per als conjunt  $L$  i  $M$ .

Com es pot veure les diferents constants venen determinades per l'anterior i el valor de la primera derivada (donat per l'equació diferencial). Veiem que el valor de la funció és una combinació lineal d'aquestes constants.

## 2. Procediments

El nostre programa, estructurat com un projecte, té cada mètode descrit independentment com una funció dins de l'arxiu “*EDO\_funciones.c*”. El main (“*EDO\_main.c*”) és l'estructura que et permet navegar entre els dos mètodes, demanant les condicions i els paràmetres inicials, en ambdós casos els resultats s'obtenen en un fitxer de text que a més imprimeix les dades de partida. A més, permet fer tants càlculs com vulgui l'usuari abans de que demani explícitament sortir del programa.

Com a aspectes generals dels dos mètodes, el sistema d'equacions diferencials s'ha definit com tres funcions (anomenades ***double dx***, ***double dy*** y ***double dz***) i s'han anat cridant a conveniència. També cada mètode demana el temps màxim a considerar i la mida dels intervals, el programa calcula el número màxim d'intervals  $n$  i al resultat s'hi afegeix el valor de la intensitat, definit com el mòdul al quadrat del camp elèctric ( $x^2$ ).

Un cop determinat el nombre d'intervals  $n$ , un bucle en  $i$  que va des de  $i=0$  fins a  $n$  aplica les equacions per a cada mètode i troba el valor de la funció en el següent instant. Per a representar el pas del temps s'explicita al codi  $t=i \cdot h$ . Finalment s'assigna a les variables  $x_0$ ,  $y_0$  i  $z_0$  el valor de la funció que hem calculat just abans, per a que el bucle funcioni correctament.

En el cas de RK4 hem tingut que definir els tres conjunts de constants ( $K$ ,  $M$  i  $L$ ) com a variables ***double***.

### 3. Anàlisi del problema

**Nota:** Si no es menciona explícitament una altra cosa, l'espaiat utilitzat és de  $h=0.001$ .

L'anàlisi s'ha efectuat distribuïnt els diversos casos d'interès en tres, determinats pel valor que pot prendre  $r$ :

**CAS 1:**  $0 \leq r \leq 1$

**CAS 2:**  $1 < r \leq \sigma(\sigma + b + 3)/(\sigma - b - 1)$

**CAS 3:**  $r > \sigma(\sigma + b + 3)/(\sigma - b - 1)$

On els valors inicials  $\sigma$  i  $b$  s'han fixat en 10 i  $8/3$  respectivament per a tota la pràctica.

#### CAS 1

El primer cas és a la vegada el més senzill ja que si agafem  $r$  tal que  $0 \leq r \leq 1$  notem que el sistema evoluciona sempre cap a l'origen, això vol dir que en aquest cas no hi ha emissió làser.

Per a mostrar aquesta trajectòria, s'ha escollit el punt inicial  $(50, 50, 50)$ , que es troba suficientment lluny com per a poder observar la evolució del sistema. Per a punts propers a  $(0, 0, 0)$  no hi ha res destacable, ja que el sistema cau ràpidament.

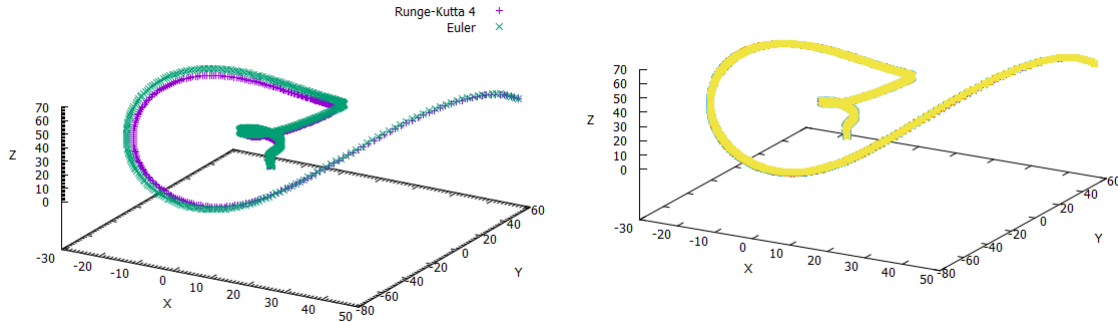


Figura 1: Estudi pel cas  $(x_0, y_0, z_0) = (20, 20, 20)$  (esquerra) i per a diverses  $r \leq 1$  (dreta).

A la part esquerra d'aquesta primera gràfica observem com el programa tendeix a la solució per als dos mètodes: Runge-Kutta 4 i Euler. Es pot observar a simple vista que la corba que forma la solució de RK4 és més tancada que la de Euler, degut a que és més precís i s'apropa més ràpid a la solució.

A la part dreta hem superposat les trajectòries de RK4 per a  $r = 0, 0.2, 0.5, 0.7, 0.9$  i  $1$ . Observem que no es produeixen diferències notables quan variem  $r$  i sempre tendeix cap a la mateixa solució.

Intuitivament podem deduir que en un temps suficientment gran, com no hi ha emissió làser (tendeix cap a l'origen), la intensitat serà igual a 0. Aquesta idea es confirma a la següent figura on el pic inicial correspon a les condicions inicials introduïdes però ràpidament comença a decreïxer fins a fer-se 0.

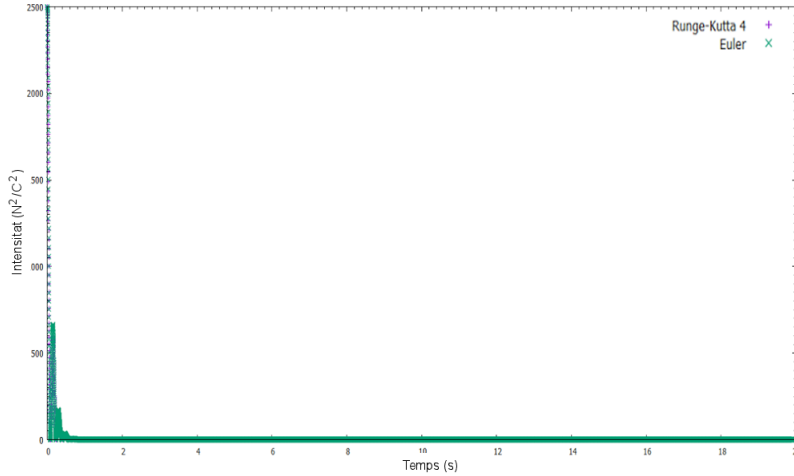


Figura 2: Patró d'intensitats per al CAS 1.

## CAS 2

En aquesta situació (i també en el CAS 3) apareixen dues noves solucions estables, que es troben en aquests dos punts:

$$C_{\pm} = (\pm\sqrt{b(r-1)}, \pm\sqrt{b(r-1)}, r-1) \quad (4)$$

Com a representació d'aquest segon cas agafarem una  $r$  tal que  $1 \leq r \leq 24.736842$  i el que farem es variar  $r$  per veure com es comporten les solucions en funció d'aquest paràmetre i del punt inicial escollit.

Fixant  $r=2$ , els punt estables són  $C_{\pm} = (\pm 1.6329931620, \pm 1.6329931620, 1)$ .

Ara observem com es comporta la solució si el punt inicial escollit és a prop o lluny dels punts  $C_{\pm}$ .

### -Estudi per a punts llunyans

Com a representant d'aquest cas (condicions inicials allunyades de  $C_{\pm}$ ) hem agafat  $P_0 = (20, 20, 20)$ . La seva solució es presenta a la gràfica següent:

Tal i com s'observa el punt inicial a  $t=0$  és  $P_0 = (20, 20, 20)$  però a mesura que passa el temps els punts solució van canviant i comencen a tendir cap al punt  $C_+$ . Per tant al final convergeixen a aquest punt.

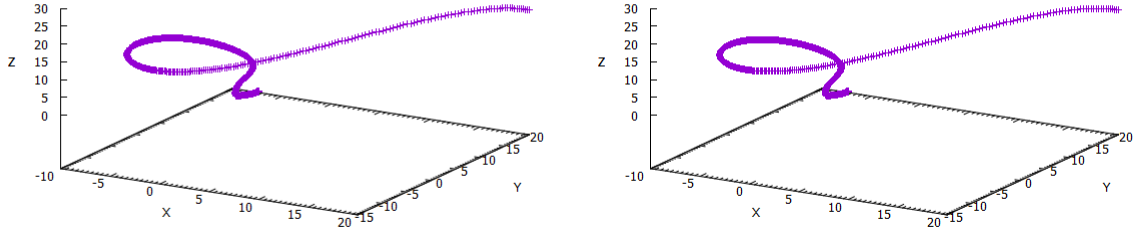


Figura 3: Estudi pel mètode d'Euler (Esquerra) i de RK4 (Dreta) pel cas  $(x_0, y_0, z_0) = (20, 20, 20)$ .

Ara bé, si ens allunyem encara més, agafant ara  $P_0 = (150, 150, 150)$  podem observar com ara la convergència es produeix cap al punt  $C_-$ .

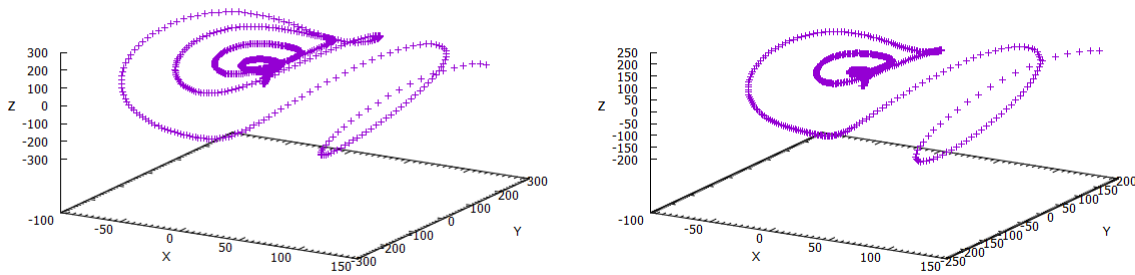


Figura 4: Estudi pel mètode d'Euler (Esquerra) i de RK4 (Dreta) pel cas  $(x_0, y_0, z_0) = (150, 150, 150)$ .

En vista de les gràfiques podem dir que en general per punts llunyans les solucions convergiran a un dels dos punts  $C_{\pm}$ . En general per a punts encara més llunyans la forma de la solució pot canviar notablement però considerant un temps suficientment elevat sempre es produeix la convergència d'aquests punts cap a les solucions estables.

A més hem observat que si s'escullen valors cada cop més grans per al punt inicial (per exemple  $P_0 = (300, 300, 300)$ ), el mètode d'Euler comença a fallar i només es pot fer ús del mètode RK4. Tot això ens indica com ja sabem del fonament teòric que el mètode de RK4 és més precís. Tot i això si les condicions inicials es fan molt elevades ( $P_0 = (3200, 3200, 3200)$ ) fins i tot el mètode RK4 no funciona ja que els punts solució és fan massa grans.

### -Estudi per a punts propers

Si ara en canvi ens centrem en les solucions produïdes quan el punt inicial és proper a algun dels punts estacionaris, obtenim gràfiques com la següent:

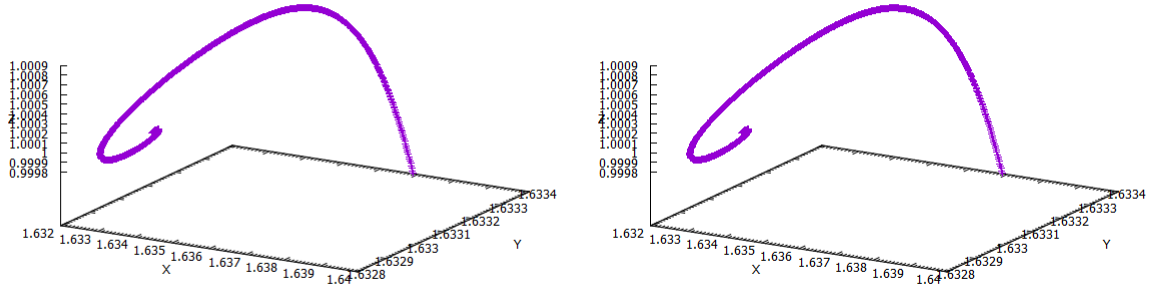


Figura 5: Estudi pel mètode d'Euler (Esquerra) i de RK4 (Dreta) per punts propers a  $C_+$ .

En aquest cas veiem que per a punts inicials propers a  $C_{\pm}$  la solució fa petites oscil·lacions al voltant d'aquesta solució estacionària abans de convergir finalment cap a ella. En el cas limit de considerar com a punt inicial qualsevol dels dos  $C_{\pm}$  veuríem que no hi ha cap evolució temporal de les solucions i la gràfica només seria el punt estacionari.

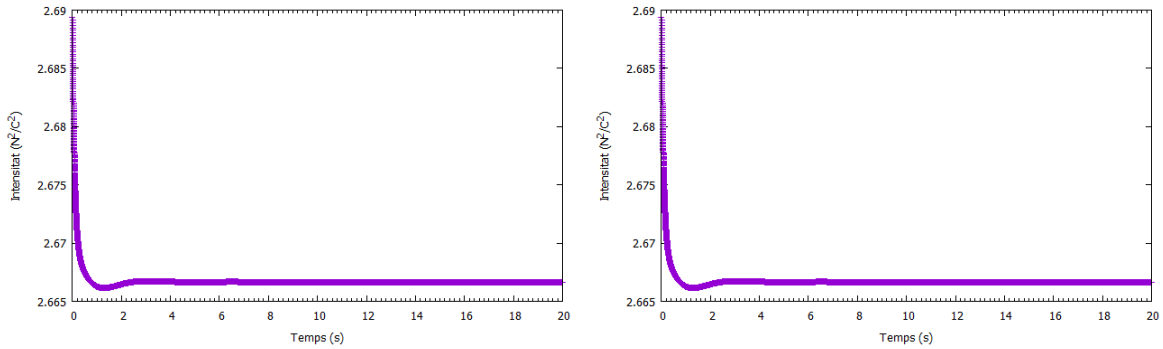


Figura 6: Intensitat per a punts propers a  $C_+$ .

Si ara ens fixem en la intensitat, veiem com al principi decreix molt ràpidament fins arribar a un punt on es manté constant. Això és degut a les petites oscil·lacions de les que parlàvem abans, quan ja el punt decau a l'estacionari tots els valors es mantenen constants, entre ells la intensitat (al ser  $x^2$ ). S'ha de dir que aquest comportament característic de la intensitat es produeix en tots els casos tant si el punt és proper o llunyà i l'única diferència possible és que la convergència al valor constant sigui més o menys lenta.



### -Estudi de les solucions en funció de $r$ .

Si fem gràfiques successives de les solucions per a diferents valors de  $r$ , veiem com en general a mesura que augmentem  $r$ , les solucions triguen més en convergir als punts estacionaris.

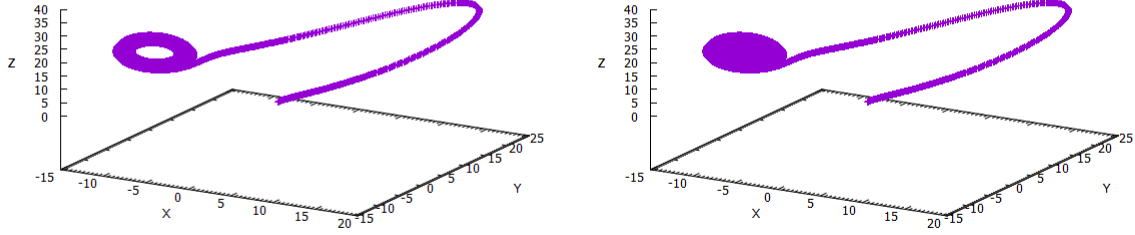


Figura 7: Convergència de la solució per a  $t=20s$  (esquerra) i  $t=40s$  (dreta) amb  $r = 23$ .

Aquest fet es pot veure reflectit si ens fixem en les dues gràfiques anteriors que mostren les solucions per a les mateixes condicions inicials però considerant un temps màxim diferent. En aquest cas, s'ha considerat com a  $P_0 = (2, 2, 1)$  i  $r = 23$ , amb aquests paràmetres s'arranca el programa amb uns temps màxim de 20s (esquerra) i de 40s (dreta). En els dos casos la solució convergeix cap a  $C_- = (-7.659, -7.6594, 22)$ .

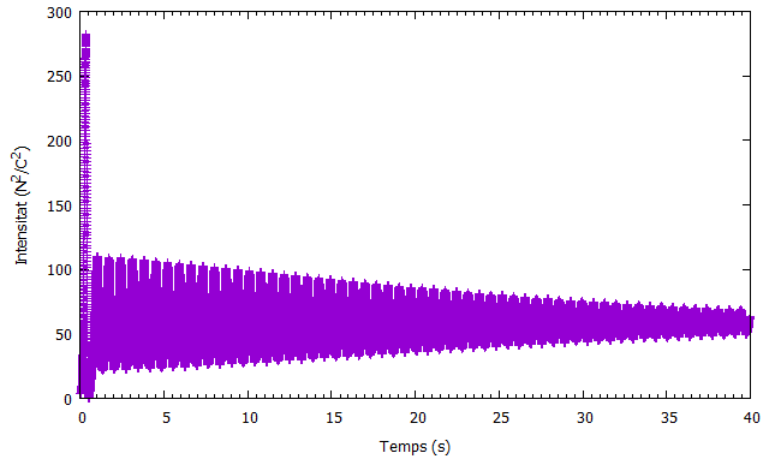


Figura 8: Intensitat per a  $t=40s$  amb  $r = 23$ .

A la part esquerra de la Figura 7 la gràfica amb  $t = 20s$  es veu clarament com hi ha un forat centrat a  $C_-$  mentre que per a  $t = 40s$  aquest forat ja no es veu. Això s'explica si tenim en compte que a

l'augmentar  $r$  cada cop ens apropem més al tercer cas (on els punts estacionaris ja no són estables) però tot i així encara ens trobem en el segon, per tant les solucions han de seguir convergint a un dels punts estacionaris (en aquest cas  $C_-$ ).

Per aquest motiu com més gran sigui  $r$  més temps necessitaran les solucions per a convergir i per tant només els punts solució corresponents a un temps suficientment gran estaran propers als punts estacionaris. En el cas límit on  $r = 24.736842$  s'observa que es necessita massa temps per a que les solucions convergeixin als punts estacionaris i es pot considerar que ja no convergeixen. En altres paraules, en el cas límit es produeix la transició del segon cas al tercer i per tant els punts estacionaris ja no són estables.

Si fem l'estudi per a la intensitat podem extreure les mateixes conclusions que a l'estudi de la trajectòria. Tal i com mostra la Figura 8, si considerem un temps petit ( $t < 20$ ), la intensitat oscil·la molt però es va reduint a mesura que augmenta el temps (per a un temps suficientment gran la intensitat seria en essència constant). Per tant observem com no s'arriba a la solució estacionària fins que no considerem un temps suficientment elevat.

Aquest cas també ens permet posar en evidència que no tots dos mètodes funcionen igual de bé i que la manca de precisió d'Euler pot portar a resultats molt diferents.

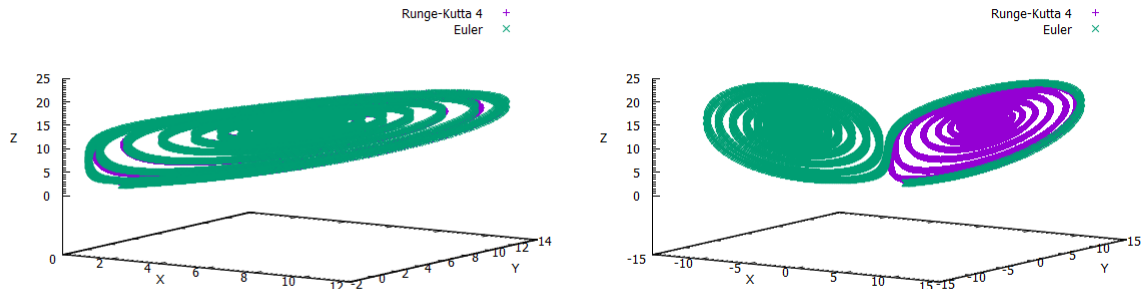


Figura 9: Estudi per a  $r=14.2$  (Esquerra) i  $r=14.5$  (Dreta) per  $(x_0, y_0, z_0) = (1, 1, 1)$ .

Mentre que a la gràfica de l'esquerra veiem com els dos mètodes tendeixen a la mateixa solució  $C_+$  a la de la dreta, on s'ha augmentat  $r$  fins a 14.5 però s'ha mantingut el punt inicial, notem que el mètode de RK4 segueix tendint cap a  $C_+$  però Euler ho fa cap a  $C_-$ . Com Euler és menys precís, la corba que va descrivint és més oberta que la de RK4 (trigaria més que RK4 en convergir a  $C_+$ ) i això permet que s'allunyi de  $C_+$  i tendeixi cap a  $C_-$ .

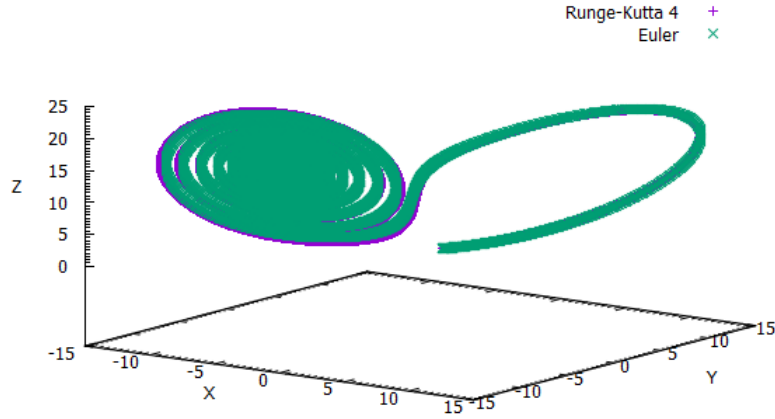


Figura 10: Estudi per a  $r=15$  i  $(x_0, y_0, z_0) = (1, 1, 1)$ .

En el cas de la intensitat, aquesta sempre tendeix a un valor estable que varia en funció de  $r$ .

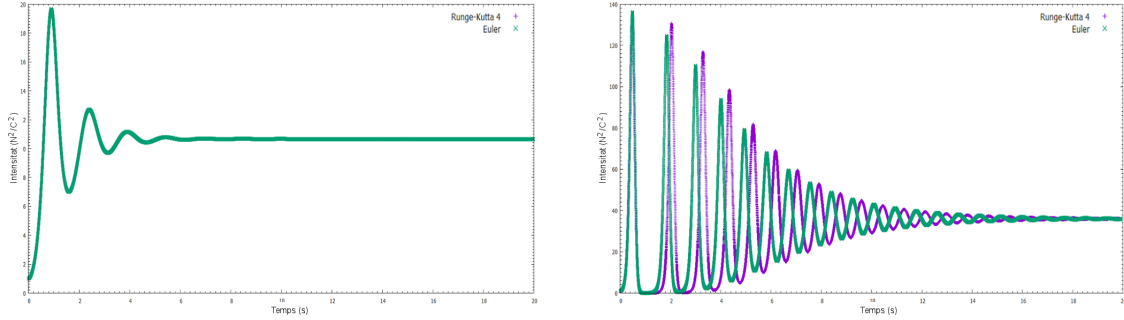


Figura 11: Estudi de la intensitat per a  $r = 5$  (Esquerra) i  $r = 14.5$  (Dreta) per  $(x_0, y_0, z_0) = (1, 1, 1)$ .

En la figura anterior, a la part esquerra hem fixat  $r = 5$  i observem que cap dels dos mètodes presenten una diferencia apreciable. La intensitat oscil·la per a temps petits i es manté pràcticament constant a partir de cert valor  $t$ . En canvi, en la part dreta  $r = 14.5$  i podem notar que els dos mètodes estan lleugerament desfasats. Això és degut a que en aquest valor de  $r$  concret cada mètode evoluciona cap a una solució diferent però tant vagi cap a  $C_+$  (RK4) com per a  $C_-$  (Euler) la solució és simètrica i, per tant, el patró d'intensitats ha de ser el mateix. El desfàs ve del *camí extra* que recorre Euler quan s'en va cap a l'altre solució.

Es pot comprovar la dependència en  $r$  de la intensitat a continuació, on a partir de les mateixes condicions inicials hem variat  $r$  i hem obtingut la funció intensitat utilitzant el mètode RK4.

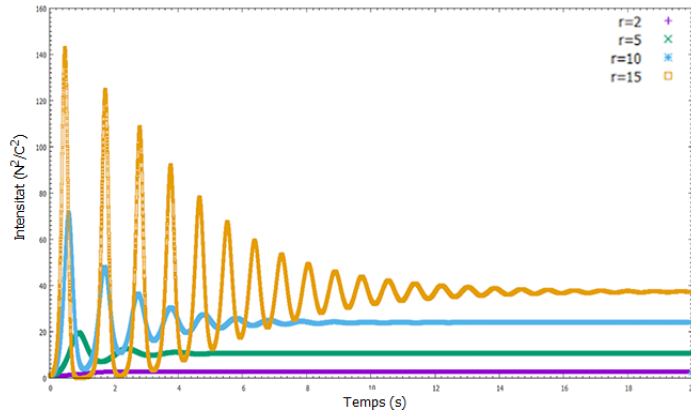


Figura 12: Estudi per a  $r=15$  i  $(x_0, y_0, z_0) = (1, 1, 1)$ .

Es pot apreciar l'augment de les oscil·lacions amb  $r$  abans d'arribar al valor constant. Aquest resultat recolza l'afirmació de que el temps necessari per a arribar a la solució estable augmenta amb  $r$ .

### CAS 3

#### $r = 28$

Per a qualsevol conjunt de punts inicials la trajectòria acaba tendint a una forma de llaç amb dos focus, amb origen a  $C_{\pm} = (\pm 8.485281374, \pm 8.485281374, 27)$  (determinats per (4)) però no fa el mateix nombre de voltes al voltant d'un que de l'altre. És el que s'anomena *atractor de Lorentz*.

Si resollem les equacions considerant com a condicions inicials els punts estacionaris com poden ser l'origen o els  $C_{\pm}$  determinats per aquests paràmetres veurem que tal i com esperàvem no hi ha cap moviment. En canvi, modificar una mica les condicions inicials permet aconseguir resultats radicalment diferents.

$$(x_0, y_0, z_0) = (0, 0, 0)$$

Augmentar  $x_0$  o  $y_0$  en una petita quantitat (ja sigui 0.1 o 0.01) dona el mateix resultat, per tant es presenta un dels dos casos (el de modificar  $x_0$ ) amb els dos mètodes:

Com es pot apreciar en la Figura 13, una petita aportació en la polarització o el camp elèctric provoca que el sistema evolucioni apreciablement fins a crear un *atractor de Lorentz* que orbita principalment el punt  $C_-$ , ja que hi ha més densitat de punts al voltant d'aquest que de  $C_+$ . El temps considerat ha sigut de 20 segons.

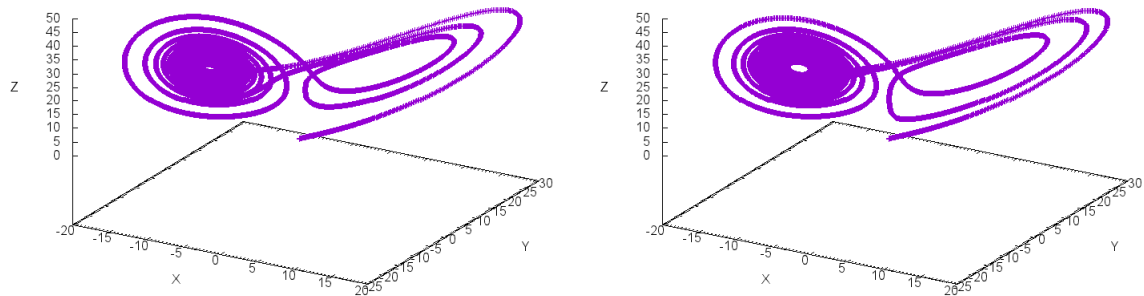


Figura 13: Estudi pel mètode d'Euler (Esquerra) i de RK4 (Dreta) pel cas  $x_0, y_0, z_0 = (0, 0, 0)$ .

Donar una petita variació a Z no aporta res d'interès (decau a l'origen de nou lògicament).

Pel que fa a la intensitat podem comprovar com varia de forma caòtica en les següents figures. El pic inicial i l'increment gradual de magnitud abans d'arribar a l'estat caòtic són resultat de la condició inicial, en el temps que el sistema triga en arribar a la situació de l'*atractor de Lorenz*:

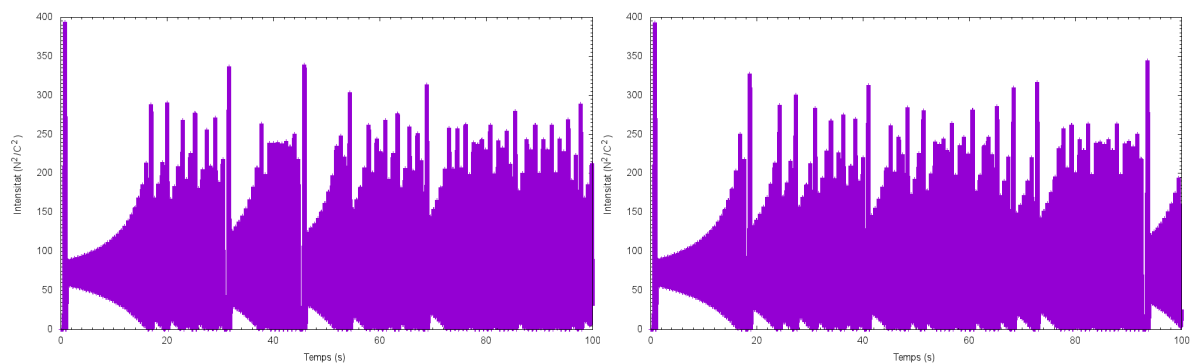


Figura 14: Intensitats pel mètode d'Euler (Esquerra) i de RK4 (Dreta).

$$(x_0, y_0, z_0) = C_{\pm}$$

Igual que passa en l'anterior cas, calcular la trajectòria en els punts  $C_{\pm}$  no dona cap resultat, ja que és un punt estable. Si augmentem  $y_0$  de manera que sigui  $y_0 = 8.5$  la trajectòria resultat acaba derivant en l'*atractor de Lorenz* pels dos casos, tot i que la zona amb més densitat variarà en funció del punt inicial. A la Figura 15 es presenta el corresponent a  $C_+$  (S'obtenen resultats similars variant les altres components).

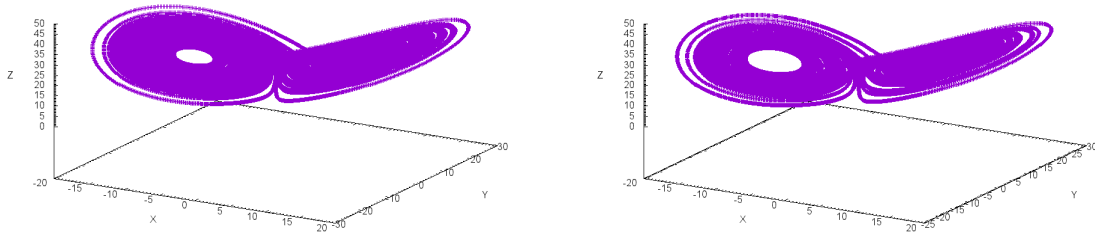


Figura 15: Estudi pel mètode d'Euler (Esquerra) i de RK4 (Dreta) pel cas  $(x_0, y_0, z_0) = C_+$ .

La variació de la intensitat en funció del temps es pot interpretar com que per  $t < 60$  s (aproximadament) el sistema el que fa s'allunya de  $C_+$  fins que arriba al punt on pot començar a produir l'atractor. El cas de  $C_-$  és equivalent i per tant només es presentarà aquest resultat:

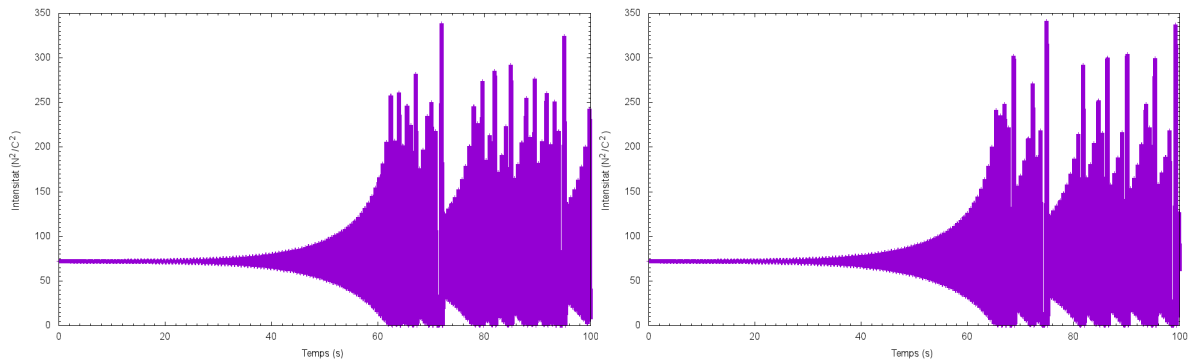


Figura 16: Intensitats pel mètode d'Euler (Esquerra) i de RK4 (Dreta) pel cas  $(x_0, y_0, z_0) = C_+$ .

$(x_0, y_0, z_0) = (10, 10, 10)$

Per a observar la trajectòria que es forma al voltant d'un punt qualsevol i com es modifica quan es produeix una petita variació s'ha considerat el punt  $(10, 10, 10)$ . Com es pot veure a la Figura 17, el sistema evoluciona fins a arribar a la situació de l'*atractor de Lorenz*.

A més a més aquest Cas 3 és l'exemple que posa en més evidència el que implica fer servir un mètode o un altre ja que el resultat es modifica bastant (tot i que la conclusió general es manté).

Trobar punts més llunyans, igual que passa en el CAS 2, únicament genera una trajectòria extra abans d'arribar a la situació estable, que en aquest cas és l'atractor de Lorenz i posa encara més de manifest la precisió d'un mètode respecte l'altre.

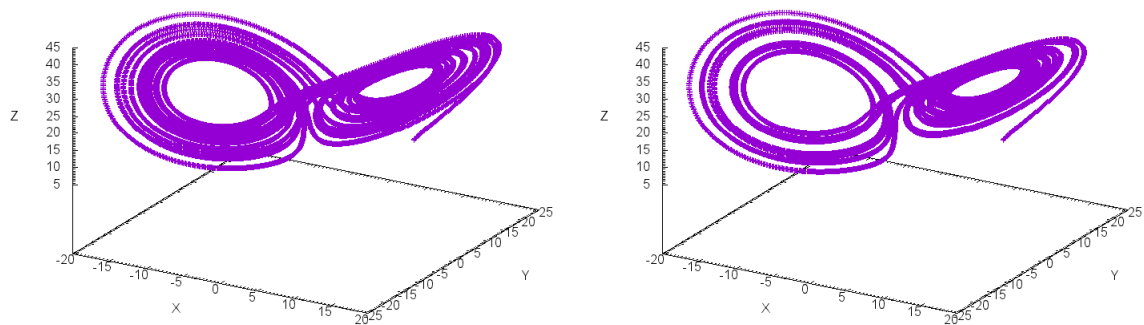


Figura 17: Estudi pel mètode d'Euler (Esquerra) i de RK4 (Dreta) pel cas  $(x_0, y_0, z_0) = (10, 10, 10)$ .

Finalment, en un punt a l'atzar l'evolució de la intensitat és la més caòtica de totes (Figura 18).

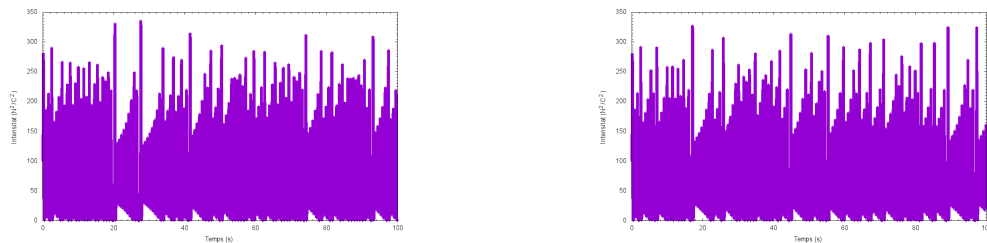


Figura 18: Intensitats pel mètode d'Euler (Esquerra) i de RK4 (Dreta) pel cas  $(x_0, y_0, z_0) = (10, 10, 10)$ .

**$r = 100.5$  ( $h=0.01$ )**

Si ara fem  $r = 100.5$  els punts estables canvien i venen donats per  $C_{\pm} = (\pm 31.54362059, \pm 31.54362059, 99.5)$ .

Com seguim en el tercer cas observem una situació equivalent a l'anterior ja que s'obté un *atractor de Lorenz* per a qualsevol punt inicial (no estable). Per a comprovar-ho es farà un anàlisi basat primerament en variar una mica la posició respecte una de les posicions d'equilibri, hem escollit fer-ho respecte l'origen (com hem vist abans, passaria el mateix fent una petita variació respecte  $C_{\pm}$ ), a la Figura 19 es pot veure el resultat d'imposar ( $y_0 = 0.1$ ).

Un cop analitzat el resultat al voltant d'un punt estable l'altre solució d'interés és un punt qualsevol. Aquí s'ha considerat  $(x_0, y_0, z_0) = (200, 200, 200)$  per a també observar què passa quan ens allunyem dels punts estables. A la Figura 20 es pot veure com el sistema tendeix cap a la situació de l'atractor tot i començar en un punt molt lluny dels  $C_{\pm}$  determinats per aquesta  $r$ .

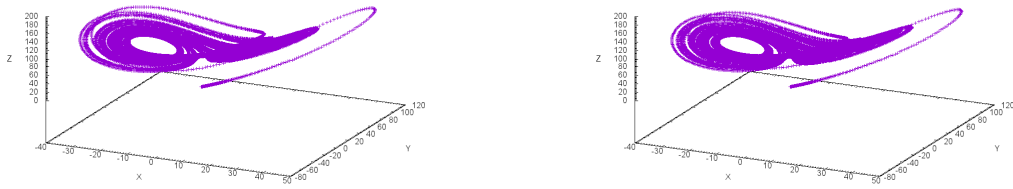


Figura 19: Estudi pel mètode d'Euler (Esquerra) i de RK4 (Dreta) amb  $r = 100.5$  al voltant de l'origen.

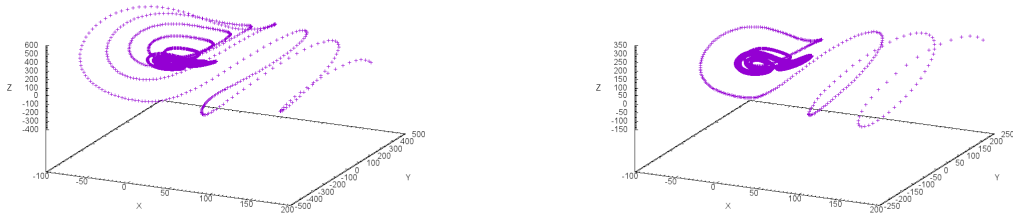


Figura 20: Euler (Esquerra) i RK4 (Dreta) al voltant de  $(x_0, y_0, z_0) = (200, 200, 200)$ .

Pel que fa a la intensitat es comencen a observar finestres de periodicitat que es diferencien molt de l'estat més caòtic de la Figura 18. Per claredat només es presentaran les del punt llunyà considerat:

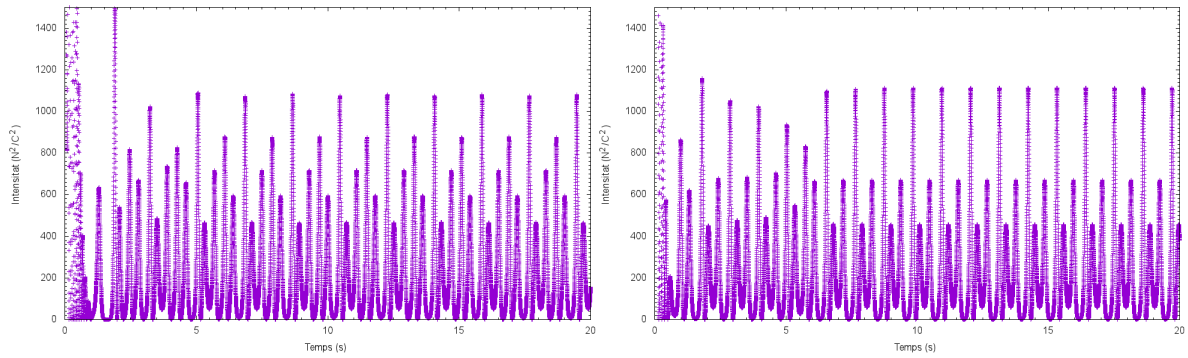


Figura 21: Intensitats pel mètode d'Euler (Esquerra) i de RK4 (Dreta).



## 4. Conclusions

A partir del programa realitzat s'ha pogut comprovar numèricament les diferents solucions que poden presentar les equacions de Lorenz-Haken ((1), (2) i (3)) en funció dels diversos paràmetres del sistema i relacionar-les de manera molt qualitativa amb l'emissió d'un làser per a així considerar una aplicació física. En aquest cas  $x$ ,  $y$  i  $z$  fan referència al camp elèctric, la polarització i la inversió de població mentre que  $\sigma$ ,  $b$  i  $r$  concreten les pèrdues de la cavitat làser, el bombeig de l'energia i la relaxació d'aquesta en el medi actiu.

Per a  $r \leq 1$  no hi ha emissió làser ja que sigui quines siguin les condicions inicials el sistema sempre cau cap a l'origen.

Per al segon cas, on  $r$  es troba acotada per una combinació de  $\sigma$  i  $b$ , el sistema genera dues solucions estables a les qual tendeix i, per tant, com aquestes solucions són no nul·les, sí que hi ha emissió làser. El sistema triga més a convergir a una d'aquestes solucions com més elevat es el valor de  $r$  i com més allunyat estigui el punt inicial de les solucions. La intensitat en aquest cas evoluciona fins a arribar a un valor constant determinat per la component  $x$  de les solucions estables  $C_{\pm}$  (com la intensitat es defineix com  $x^2$  és independent que el resultat sigui  $C_+$  o  $C_-$ ) que al seu torn depen també de  $r$ , de manera que si aquesta augmenta la intensitat de la emissió làser també ho farà.

Finalment, el tercer cas és el que presenta la solució caòtica que s'anomena atractor de Lorenz, que consisteix en una solució estacionària però no estable que dona voltes al voltant dels dos punts d'equilibri definits al punt dos a l'atzar, de manera que no orbita el mateix nombre de vegades un que l'altre. En aquest cas les solucions com l'origen o els punts  $C_{+-}$  no són estables ja que una petita variació no fa que el sistema decaigui sino en canvi evoluciona cap a l'atractor de Lorenz. La intensitat llavors presenta pics aleatoris en funció del temps, en oposició amb la situació constant que assolía en el cas anterior.

A nivell més tècnic, aquest sistema d'equacions no lineals s'ha resolt a través de dos mètodes diferents, Euler y Runge-Kutta 4, que es basa en el desenvolupament en serie de potències de la funció solució. Com el primer és una aproximació d'ordre 1 i el segon d'ordre 4 s'observa que RK4 és més precís que Euler, fet que s'ha pogut comprovar en el segon cas considerant diverses  $r$  i veient que per a certs valors cada mètode convergia cap a una solució diferent.