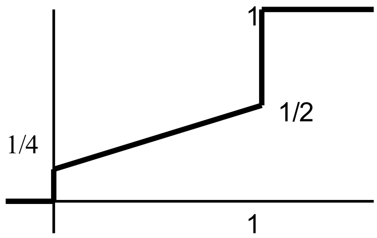
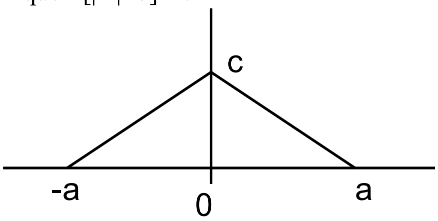
Alguns exercícios TP de MPEI (2022/10/28)

1- A função de distribuição da variável X está indicada na figura.
Determine as probabilidades dos acontecimentos
P[X <-1/2] , P[X < 0] , P[X ≤ 0] , P[1/4 ≤ X <1] , P[1/4 ≤ X ≤ 1], P[X > 1/2] e P[X > 5].



Sugestão: Note que esta variável aleatória é do tipo mista pelo que $F_X(x)$ e $f_X(x)$ são discretas em algumas partes do eixo real e contínuas noutras.

2. Uma variável aleatória tem uma densidade de probabilidade como se mostra na figura
   (a) Determine a constante c
   (b) Calcule a função de distribuição
   (c) Determine b de modo a que P[|X|<b]=1/2



Sugestões:
(a) Relembre as condições que $f_X(x)$ tem de verificar para que possa ser uma função densidade de probabilidade?
(b) A f.d.p. tira-se directamente do gráfico. É só relembrar como se calcula $F_X(x)$ a partir de $f_X(x)$, (X é uma variável aleatória contínua).

3. Numa turma 60% são génios, 70% gostam de chocolate e 40% estão em ambos os grupos.
Calcular a probabilidade de selecionar um aluno ao acaso e de não ser génio nem gostar de chocolate.

4. Um fabricante de material eletrónico utiliza chips de três fornecedores A, B e C. Sabe-se que a probabilidade de haver chips defeituosos é: 0.001 para o fornecedor A, 0.005 para o fornecedor B e 0.01 para o fornecedor C. Escolhendo aleatoriamente um chip e sendo este defeituoso calcule as probabilidades de ser fornecido pelo fabricante A, pelo fabricante B e pelo fabricante C:
   (a) Considerando que o fabricante tem igual número de chips de cada fornecedor.
   (b) Considerando que metade dos chips do fabricante são fornecidos por C.

5. Determine a probabilidade de uma variável aleatória normal diferir da média por um valor superior a 5 vezes o seu desvio padrão.

6. Considere-se uma fonte discreta sem memória que gera saídas pertencentes a um conjunto de 4 símbolos com as probabilidades assinalas na tabela seguinte, e considere-se que cada símbolo é codificado em palavras de comprimento variável de acordo com o mapeamento expresso na Tabela.

Símbolo	Prob.	Código
1	0.5	0
2	0.25	10
3	0.125	110
4	0.125	111

Determine o comprimento médio do código.

7. Uma doença rara é diagnosticada com um teste que em 95% dos casos dá um resposta correcta: se a pessoa tem a doença o teste é positivo com probabilidade 0.95, e se a pessoa não tem a doença o teste é negativo com probabilidade 0.95. Uma pessoa escolhida aleatoriamente tem probabilidade 0.001 de ter a doença.
Se uma pessoa escolhida de forma aleatória fizer o teste e o resultado for positivo, qual é a probabilidade de ter a doença?

8. O João entra num torneio de xadrez com jogadores de três níveis: 50% dos jogadores são do nível 1, 25% dos jogadores são do nível 2, e os restantes jogadores são do nível 3. As probabilidades de o João vencer os jogadores de cada nível são: 0.3, 0.4 e 0.5, respetivamente.

(a) Escolhendo um jogador ao acaso, qual é probabilidade de o João vencer o jogo?
(b) Sabendo que o João venceu o jogo, qual é a probabilidade de ter sido com um jogador do nível 1?

9. Considere uma experiência aleatória cujo espaço de amostragem é S = {0, 1, 2} × {0, 1, 2}.
Considerando todos os resultados equiprováveis:

(a) Determine dois acontecimentos independentes.
(b) Há três acontecimentos independentes? (Não considere o acontecimento certo, nem o acontecimento impossível).

10. Um símbolo binário é transmitido por um canal ruidoso, onde a probabilidade de um "0" ser recebido incorretamente é ε_0, e a probabilidade de um "1" ser recebido incorretamente é ε1.

(a) Supondo que são enviados "0"s e "1"s com probabilidades p e (1−p), respetivamente, calcule a probabilidade de receber os símbolos binários corretamente.
(b) Calcule a probabilidade de receber a sequência "1011" corretamente.
(c) Para aumentar a fiabilidade da informação recebida, cada símbolo é enviado 3 vezes e na receção a decisão é tomada por maioria. Supondo que se envia um "0" (i.e "000"), qual é a probabilidade de o recetor decidir pelo símbolo correto?
(d) Sabendo que o recetor recebeu "101", qual é a probabilidade de ter sido enviado um "0"?

11. Considere uma variável aleatória, *X*, relativa ao valor obtido no lançamento de um dado não honesto em que P(*X* = 6)= 0.4 e as probabilidades dos outros resultados possíveis são iguais.
Calcule a média e variância de *X*.

12. Para uma variável aleatória com distribuição uniforme entre -1 e 3, calcule:

(a) A média e a variância de *X*.
(b) P(-0.5 < X < 2)

13. Os resultados de um exame, *X*, têm distribuição normal com média 9 e desvio padrão 2.
Sendo $Y = aX + b$, calcule as constantes *a* e *b* de forma a que *Y* tenha média 10 e variância 6.

14. Dada uma variável aleatória normal com média 1 e desvio padrão 2, calcule as seguintes probabilidades:

(a) $P\left[X < 1\right]$;

(b) $P\left[X < 1\right]$;

(c) $P\left[-\ 2 < X < 1\right]$

Sugestão:
Utilize uma tabela de Q(*x*).

15. Dada as probabilidades conjuntas das variáveis X e Y:

X/Y	**-1**	**0**	**1**
-1	1/8	1/8	1/24
0	1/8	1/4	1/8
1	1/24	1/8	1/24

(a) Calcule a média e a variância de X.
(b) Calcule a cov(X,Y),
(b) Diga se as variáveis X e Y são independentes.
(b) Calcule as probabilidades conjuntas das variáveis $W = X^2$ e $Z = Y^2$.
(c) Diga se W e Z são independentes?

16. Sabendo que X e Y são duas variáveis aleatórias, calcule $E[(X + Y)^2]$.

1 – $P\left[X<-\frac{1}{2}\right]=0$

$P[X<0]=0$

$P[X\leq 0]=\frac{1}{4}$

$P\left[\frac{1}{4}\leq X<1\right]=\frac{1}{2}-\frac{\frac{1}{4}}{4}-\frac{1}{4}=\frac{1}{2}-\frac{1}{16}-\frac{1}{4}=\frac{8}{16}-\frac{1}{16}-\frac{4}{16}=\frac{3}{16}$

$P\left[\frac{1}{4}\leq X\leq 1\right]=\frac{3}{16}+\frac{1}{2}=\frac{3}{16}+\frac{8}{16}=\frac{11}{16}$

$P\left[X>\frac{1}{2}\right]=1-\left(\frac{1}{4}+\frac{\frac{1}{4}}{2}\right)=1-\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\right)=1-\frac{3}{8}=\frac{5}{8}$

$P[X>5]=0$

2 – **a)** $P(a\leq x\leq b)=\int_a^b f_x(x)\,dx$

Calculando o declive das retas:

$m_1=\frac{0-c}{-a-0}=\frac{c}{a}$ $\quad$ $m_2=\frac{c-0}{0-a}=\frac{-c}{a}$

$$\begin{cases} y=\frac{c}{a}x+b & , -a\leq x\leq 0 \\ y=\frac{-c}{a}x+b & , 0\leq x\leq a \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{-a} f_x(x)\,dx+\int_{-a}^{0} f_x(x)\,dx+\int_{0}^{a} f_x(x)\,dx+\int_{a}^{+\infty} f_x(x)\,dx=1 \Leftrightarrow \int_{-a}^{0}\frac{c}{a}x+b\,dx+\int_{0}^{a}\frac{-c}{a}x+b\,dx=1 \Leftrightarrow \left[\frac{cx^2}{2a}+cx\right]_{-a}^{0}+\left[\frac{-cx^2}{2a}+cx\right]_{0}^{a}=1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\frac{ca^2}{2a}+ca-\frac{ca^2}{2a}+ca=1 \Leftrightarrow -ca+2ca=1 \Leftrightarrow ca=1 \Leftrightarrow c=\frac{1}{a}$$

b) $$F_x(x)=\begin{cases} 0 & , x<-a \\ \frac{c}{2a}x^2+\frac{1}{a}x & , -a\leq x<0 \\ -\frac{c}{2a}x^2+\frac{1}{a}x & , 0\leq x<a \\ 1 & , x\geq a \end{cases}$$

c) $P[|x|<b]=\frac{1}{2} \Leftrightarrow P[-b<x<b]=\frac{1}{2} \Leftrightarrow F_x(b)-F_x(-b)=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{c}{2c}b^2+cb-\left(-\frac{c}{2a}(-b)^2+cb\right)=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{c}{a}b^2=\frac{1}{2} \Leftrightarrow b^2=\frac{a}{2c} \Leftrightarrow b=\sqrt{\frac{a}{2c}}$

3 – G – "ser génio"
C – "gostar de chocolate"

$P(G)=0{,}6$ $\quad$ $P(C)=0{,}7$ $\quad$ $P(G\cap C)=0{,}4$

$P(G)=P(G\cap C)+P(G\cap\bar{C}) \Leftrightarrow 0{,}6=0{,}4+P(G\cap\bar{C}) \Leftrightarrow P(G\cap\bar{C})=0{,}2$

$P(\bar{G})=1-P(G)=1-0{,}6=0{,}4$

$P(C)=P(C\cap G)+P(C\cap\bar{G}) \Leftrightarrow 0{,}7=0{,}4+P(C\cap\bar{G}) \Leftrightarrow P(C\cap\bar{G})=0{,}3$

$P(\bar{G}) = P(\bar{G}\cap C) + P(\bar{G}\cap\bar{C}) \Leftrightarrow 0,4 = 0,3 + P(\bar{G}\cap\bar{C}) \Leftrightarrow P(\bar{G}\cap\bar{C}) = 0,1$

A probabilidade é de 0,1.

4 — a) D - "ser defeituoso"
A - "fornecedor A"
B - "fornecedor B"
C - "fornecedor C"

$P(D|A) = 0,001 \quad P(D|B) = 0,005 \quad P(D|C) = 0,01 \quad P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{3}$

$$P(D) = P(A\cap D) + P(B\cap D) + P(C\cap D) = P(D|A)\times P(A) + P(D|B)\times P(B) + P(D|C)\times P(C) = 0,001\times\frac{1}{3} + 0,005\times\frac{1}{3} + 0,01\times\frac{1}{3} = \frac{0,016}{3}$$

$$P(A|D) = \frac{P(A\cap D)}{P(D)} = \frac{P(D|A)\times P(A)}{P(D)} = \frac{0,001\times\frac{1}{3}}{\frac{0,016}{3}} = 0,0625$$

$$P(B|D) = \frac{P(B\cap D)}{P(D)} = \frac{P(D|B)\times P(B)}{P(D)} = \frac{0,005\times\frac{1}{3}}{\frac{0,016}{3}} = 0,3125$$

$$P(C|D) = \frac{P(C\cap D)}{P(D)} = \frac{P(D|C)\times P(C)}{P(D)} = \frac{0,01\times\frac{1}{3}}{\frac{0,016}{3}} = 0,625$$

b) $P(A) = \frac{1}{4} \quad P(B) = \frac{1}{4} \quad P(C) = \frac{1}{2}$

$$P(D) = P(A\cap D) + P(B\cap D) + P(C\cap D) = P(D|A)\times P(A) + P(D|B)\times P(B) + P(D|C)\times P(C) = 0,001\times\frac{1}{4} + 0,005\times\frac{1}{4} + 0,01\times\frac{1}{2} = 0,0065$$

$$P(A|D) = \frac{P(D|A)\times P(A)}{P(D)} = \frac{0,001\times\frac{1}{4}}{0,0065} = 0,038462$$

$$P(B|D) = \frac{P(D|B)\times P(B)}{P(D)} = \frac{0,005\times\frac{1}{4}}{0,0065} = 0,192308$$

$$P(C|D) = \frac{P(D|C)\times P(C)}{P(D)} = \frac{0,01\times\frac{1}{2}}{0,0065} = 0,769231$$

5 — $P[x - m > 5\sigma] = P\left[\frac{x-m}{\sigma} > 5\right] = P[z > 5] = 1 - P[z \leq 5] = 1 - \Phi(5) = Q(5) = 0$

6 — $E[x] = 1\times 0,5 + 2\times 0,25 + 3\times(0,125 + 0,125) = 0,5 + 0,5 + 0,75 = 1,75$

O comprimento médio é 2.

7 — D - "ter doença"
P - "teste positivo"

$P(P|D) = P(\bar{P}|\bar{D}) = 0,95 \quad P(D) = 0,001$

$P(\bar{P}|D) = 1 - P(P|D) = 1 - 0,95 = 0,05$

$P(P|\bar{D}) = 1 - P(\bar{P}|\bar{D}) = 1 - 0,95 = 0,05$

$P(\bar{D}) = 1 - P(D) = 1 - 0{,}001 = 0{,}999$

$P(P) = P(P \cap D) + P(P \cap \bar{D}) = P(P|D) \times P(D) + P(P|\bar{D}) \times P(\bar{D}) = 0{,}95 \times 0{,}001 + 0{,}05 \times 0{,}999 = 0{,}00095 + 0{,}04995 = 0{,}0509$

$P(D|P) = \frac{P(D \cap P)}{P(P)} = \frac{P(P|D) \times P(D)}{P(P)} = \frac{0{,}95 \times 0{,}001}{0{,}0509} = 0{,}018664$

8 – a) 1 - "jogador nível 1"

2 - "jogador nível 2"

3 - "jogador nível 3"

V - "vencer"

$P(1) = 0{,}50$ $P(2) = 0{,}25$ $P(3) = 0{,}25$ $P(V|1) = 0{,}3$ $P(V|2) = 0{,}4$ $P(V|3) = 0{,}5$

$P(V \cap 1) = P(V|1) \times P(1) = 0{,}3 \times 0{,}50 = 0{,}15$

$P(V \cap 2) = P(V|2) \times P(2) = 0{,}4 \times 0{,}25 = 0{,}1$

$P(V \cap 3) = P(V|3) \times P(3) = 0{,}5 \times 0{,}25 = 0{,}125$

$P(V) = P(V \cap 1) + P(V \cap 2) + P(V \cap 3) = 0{,}15 + 0{,}1 + 0{,}125 = 0{,}375$

b) $P(1|V) = \frac{P(1 \cap V)}{P(V)} = \frac{0{,}15}{0{,}375} = 0{,}4$

9 – a)

Y \ X	0	1	2	$p_Y(y)$
0	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$
1	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$
2	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$
$p_X(x)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	1

Este acontecimento é independente, pois $\forall_{x,y}\ p_X(x) \times p_Y(y) = p(x,y) = \frac{1}{9}$

10 – a) C - "sinal correto"

O - "sinal 0"

$P(O \cap \bar{C}) = \varepsilon_0$ $P(\bar{O} \cap \bar{C}) = \varepsilon_1$ $P(O) = p$ $P(\bar{O}) = 1 - p$

$P(C) = 1 - P(\bar{C}) = 1 - (P(\bar{C} \cap O) + P(\bar{C} \cap \bar{O})) = 1 - \varepsilon_0 - \varepsilon_1$

b) $P(\bar{O} \cap C) = P(\bar{O}) - P(\bar{O} \cap \bar{C}) = 1 - p - \varepsilon_1$

$P(O \cap C) = P(O) - P(O \cap \bar{C}) = p - \varepsilon_0$

$P(\text{"1011"}) = (1 - p - \varepsilon_1)^3 (p - \varepsilon_0)$

(11) — $p_x(1) = p_x(2) = p_x(3) = p_x(4) = p_x(5) = \frac{1-0,4}{5} = 0,12 \qquad p_x(6) = 0,4$

$E[x] = 1\times 0,12 + 2\times 0,12 + 3\times 0,12 + 4\times 0,12 + 5\times 0,12 + 6\times 0,4 = 4,2$

$E[x^2] = 1^2\times 0,12 + 2^2\times 0,12 + 3^2\times 0,12 + 4^2\times 0,12 + 5^2\times 0,12 + 6^2\times 0,4 = 21$

$var(x) = E[x^2] - E[x]^2 = 21 - (4,2)^2 = 3,36$

(12) — a) $U(-1,3)$

$E[X] = \frac{-1+3}{2} = 1 \qquad var(x) = \frac{(3-(-1))^2}{12} = \frac{4}{3}$

b) $f_x(x) = \begin{cases} \frac{1}{3-(-1)} & , a \le x \le b \\ 0 & , \text{caso contrário} \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{4} & , a \le x \le b \\ 0 & , \text{caso contrário} \end{cases}$

$P[-0,5 < x < 2] = \int_{-0,5}^{2} \frac{1}{4}\, dx = \left[\frac{1}{4}x\right]_{-0,5}^{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{8} = \frac{5}{8}$

(13) — $E[x] = 9 \qquad var(x) = \sigma^2 = 2^2 = 4$

$E[Y] = E[aX+b] = E[aX] + b = aE[X] + b = 9a + b$

$var(Y) = var(aX+b) = var(aX) = a^2\, var(x) = 4a^2$

$\begin{cases} E[Y] = 10 \\ var(Y) = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9a + b = 10 \\ 4a^2 = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 10 - 9a \\ a^2 = \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 10 - 9\sqrt{\frac{3}{2}} \\ a = \sqrt{\frac{3}{2}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 10 - \frac{9}{2}\sqrt{6} \\ a = \frac{\sqrt{6}}{2} \end{cases}$

(14) — a) $X \frown N(1,4)$

$P[x<1] = P[z<0] = \phi(s) = 1 - \phi(s) = 1 - 0,5 = 0,5$

b) $P[x<1] = P[z<0] = \phi(s) = 1 - \phi(s) = 1 - 0,5 = 0,5$

c) $P[-2<x<1] = P[x<1] - P[x<-2] = P[z<0] - P\left[z<-\frac{3}{2}\right] = P[z<0] - P\left[z>\frac{3}{2}\right] = 0,5 - \left(1 - P\left[z \le \frac{3}{2}\right]\right) = 0,5 - 1 + \phi\left(\frac{3}{2}\right) =$

$= -0,5 + 1 - Q\left(\frac{3}{2}\right) = 0,5 - 0,066 = 0,434$

(15) — a) $p_x(-1) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{24} = \frac{7}{24} \qquad p_x(0) = \frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \qquad p_x(1) = \frac{1}{24} + \frac{1}{8} + \frac{1}{24} = \frac{5}{24}$

$E[x] = -1\times\frac{7}{24} + 0\times\frac{1}{2} + 1\times\frac{5}{24} = \frac{-7}{24} + \frac{5}{24} = \frac{-2}{24} = -\frac{1}{12}$

$E[x^2] = (-1)^2\times\frac{7}{24} + 0^2\times\frac{1}{2} + 1^2\times\frac{5}{24} = \frac{7}{24} + \frac{5}{24} = \frac{12}{24} = \frac{1}{2}$

$var(x) = E[x^2] - E[x]^2 = \frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{12}\right)^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{144} = \frac{72}{144} - \frac{1}{144} = \frac{71}{144}$

b) $E[XY] = -1 \times (-1) \times \frac{1}{8} + (-1) \times 1 \times \frac{1}{24} + 1 \times (-1) \times \frac{1}{24} + 1 \times 1 \times \frac{1}{24} = \frac{1}{8} - \frac{1}{24} - \frac{1}{24} + \frac{1}{24} = \frac{1}{12}$

$p_Y(-1) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{24} = \frac{7}{24}$ $\quad p_Y(0) = \frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{1}{2}$ $\quad p_Y(1) = \frac{1}{24} + \frac{1}{8} + \frac{1}{24} = \frac{5}{24}$

$E[Y] = -1 \times \frac{7}{24} + 0 \times \frac{1}{2} + 1 \times \frac{5}{24} = \frac{-7}{24} + \frac{5}{24} = \frac{-2}{24} = -\frac{1}{12}$

$cov(X,Y) = E[XY] - E[X]E[Y] = \frac{1}{12} - \left(-\frac{1}{12}\right) \times \left(-\frac{1}{12}\right) = \frac{1}{12} - \frac{1}{144} = \frac{12}{144} - \frac{1}{144} = \frac{11}{144}$

c) $p_X(-1) = p_Y(-1) = \frac{7}{24}$

$p_X(-1) \times p_Y(-1) = \frac{7}{24} \times \frac{7}{24} = \frac{49}{576}$

Como, por exemplo para $(-1,-1)$, temos que $p_X(-1) \times p_Y(y) \neq p_{XY}(x,y)$, então não são independentes.

d)

W \ Z	0	1	$p_Z(z)$
0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
$p_Y(y)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1

e) São independentes, pois $\forall_{w,z}\ p_W(w) \times p_Z(z) = p_{W,Z}(w,z) = \frac{1}{4}$

16 — $E[(X+Y)^2] = E[X^2 + 2XY + Y^2] = E[X^2] + E[2XY] + E[Y^2] = E[X^2] + 2E[XY] + E[Y^2]$