3. VARIÁVEIS ALEATÓRIAS E DISTRIBUIÇÕES DE PROBABILIDADE – EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1. Tenha em consideração os dados que constam da Tabela 3.1:

Valores	0	1	2	3
Probabilidade	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$

Tabela 3.1

a) Mostre que representa a função de probabilidade de uma v.a.

b) Calcule o valor esperado e a variância da variável em causa. (R.: $E(X)\ 13/8$; $Var(X) = 47/64$)

2. Os valores expressos na Tabela 3.2 pretendem indicar a função de probabilidade da v.a. discreta *X*.

X	1	2	4	6	7
Probabilidade	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	p_3	$\frac{1}{8}$	$\frac{5}{24}$

Tabela 3.2

a) Calcule p_3. (R.: $1/4$)

b) Calcule o valor esperado, a variância e o desvio padrão da v.a. *X*. (R.: $E(X) = 31/8$; $Var(X) = 311/64$)

3. O número de máquinas *M* encomendadas mensalmente em determinada loja é descrito pela v.a. *X* com a função de probabilidade acumulada definida por

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 0.1, & 0 \leq x < 1 \\ 0.3, & 1 \leq x < 2 \\ 0.6, & 2 \leq x < 3 \\ 1, & x \geq 3 \end{cases}$$

a) Determine a função de probabilidade da v.a. *X*. (R.: $p(0) = 0.1$; $p(1) = 0.2$; $p(2) = 0.3$; $p(3) = 0.4$)

b) Quantas máquinas, deve a loja manter em *stock* em cada mês, para que a probabilidade de satisfazer todas as encomendas não seja inferior a 0.5? (R.: 2)

4. A Martinha e o Crispim foram apanhar morangos para a quinta do Sr. Joaquim.

Enquanto a Martinha começou a apanhar morangos o Crispim questionou o Sr. Joaquim sobre a probabilidade de a Martinha apanhar 30, 40, 50 ou 60 morangos ao fim de 15 minutos. Os anos de produção do Sr. Joaquim permitiram que desse ao Crispim a informação contida na Tabela 3.3.

x_i	30	40	50	60
$f(x_i)$	0.25	0.3	0.3	0.15

Tabela 3.3

a) Qual a v.a. em causa?

b) Justifique se os valores indicados na Tabela 3.3 constituem uma distribuição de probabilidade.

c) Calcule o valor médio e o desvio padrão da variável em estudo. (R.: $E(X) = 43.5;\ DP(X) = 10.1366$)

5. O número de computadores pessoais vendidos, por semana, numa loja de uma superfície comercial, é representado pela v.a. *X* e tem a função de probabilidade expressa na Tabela 3.4.

x_i	0	1	2	3
$P(x_i)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{9}{20}$	$\frac{3}{10}$

Tabela 3.4

Admitindo que as vendas efetuadas em quaisquer duas semanas consecutivas são independentes, defina a função de probabilidade para a v.a. associada ao número de computadores vendidos em duas semanas. (R.: $p(0) = \frac{1}{100};\ p(1) = \frac{3}{100};\ p(2) = \frac{9}{80};\ p(3) = \frac{39}{200};\ p(4) = \frac{117}{400};\ p(5) = \frac{27}{100};\ p(6) = \frac{9}{100}$)

6. Uma empresa de construção civil admite que o número de semanas necessárias para completar uma obra é representado pela v.a. *X* cuja função de probabilidade está indicada na Tabela 3.5.

a) Calcule, justificando, o valor da constante *k*. (R.: 0.2)

b) Qual a probabilidade do tempo de construção exceder 22 dias? (R.: 0.15)

c) Qual a probabilidade do tempo de construção exceder 23 dias, sabendo que já demorou 21 dias? (R.: 0.2)

d) Quantos dias a empresa espera demorar a construir o armazém? (R.: 21.85)

x_i	20	21	22	23	24
$P(x_i)$	$\frac{k}{2}$	0.15	$3k$	0.1	0.05

Tabela 3.5

7. Uma caixa contém 2 bolas azuis e 3 bolas verdes.

Admita uma experiência aleatória que consiste em retirar, ao acaso e sem reposição, 2 bolas. Considere, ainda, definida a v.a. *X* representativa do número de bolas azuis extraídas.

a) Determine a função de probabilidade da v.a. *X*. (R.: $p(0) = 0.3$; $p(1) = 0.6$; $p(2) = 0.1$)

b) Calcule o valor esperado e a variância da v.a. *X*. (R.: $E(X) = 0.8$; $Var(X) = 0.36$)

c) Determine a função de probabilidade acumulada da v.a. *X*.

d) Calcule $P[(X \leq 2)|(X \geq 1)]$. (R.: 1)

8. Uma caixa contém 5 bolas pretas, 2 bolas azuis e 7 verdes. Considere uma experiência aleatória que consiste em retirar ao acaso 2 bolas, simultaneamente.

Suponha que se associa uma pontuação a cada bola extraída em função da cor, tal como especificado:

- Bola preta – 1 ponto
- Bola azul – 2 pontos
- Bola verde – 3 pontos

Admita que a v.a. *X* representa a soma dos pontos obtidos após as 2 extrações.

Sob estas condições, responda às questões seguintes:

a) Qual o espaço amostral da experiência e os valores associados à v.a. *X*?

b) Determine a função de probabilidade da v.a. *X*. (R.: $p(2) = 10/91$; $p(3) = 10/91$; $p(4) = 36/91$; $p(5) = 2/13$; $p(6) = 3/13$)

c) Represente graficamente, utilizando um gráfico adequado, a função obtida na alínea anterior. Justifique a escolha do tipo de gráfico.

d) Calcule $P[(X \leq 5)|(X > 3)]$. (R.: $50/71$)

9. Utilizando a função de probabilidade adequada, calcule a probabilidade de em 3 lançamentos de uma moeda equilibrada (*Face* / *Coroa*) ocorram:

a) Três *Faces*. (R.: $1/8$)

b) Duas *Faces* e uma *Coroa*. (R.: $3/8$)

c) Uma *Face* e duas *Coroas*. (R.: $3/8$)

d) Três *Coroas*. (R.: $1/8$)

10. Sabe-se que 20% das peças produzidas por uma máquina são defeituosas. Utilizando a função de probabilidade adequada, calcule a probabilidade de, em 4 peças escolhidas ao acaso:

a) Nenhuma ser defeituosa. (R.: $256/625$)

b) No máximo 2 serem defeituosas. (R.: $608/625$)

11. Utilizando a função de probabilidade adequada, determine a probabilidade de, em 5 lançamentos de um dado equilibrado, a face 3 ocorrer 2 vezes. (R.: $625/3888$)

12. Uma experiência consiste em extrair, aleatoriamente, 3 bolas de uma caixa contendo 7 bolas brancas e 3 azuis. Qual a probabilidade de, no máximo, serem extraídas 2 bolas azuis, admitindo que a extração foi feita:

a) Com reposição. (R.: $973/1000$)

b) Sem reposição. (R.: $119/120$)

13. Um estudo aprofundado sobre o fluxo de tráfico numa ponte com 6 faixas de rodagem revelou que o número de veículos que passa, por minuto, em cada faixa de rodagem nos dias úteis entre:

- As 7h e as 10h e entre as 17h e as 20h é descrito por uma função de probabilidade de Poisson de média 5.
- As 10h e as 17h e entre 20h e as 7h é descrito por uma função de probabilidade de Poisson de parâmetro 2.

Aos sábados e domingos, o número de veículos que passa em cada faixa da ponte, em cada 5 minutos, é modelado por uma função de probabilidade de Poisson de variância igual a 10.

Com base na informação recolhida pelo estudo, determine a probabilidade de:

a) Num minuto selecionado, aleatoriamente, do período entre as 8h e as 9h de um dia útil, terem passado numa faixa de rodagem da ponte, pelo menos, 2 veículos. (R.: 0.9596)

b) Num minuto selecionado, aleatoriamente, do período entre as 21h e as 23h de um dia útil, terem passado, no máximo, 2 veículos:

i. Numa faixa de rodagem da ponte. (R.: 0.6767)

ii. Na ponte. (R.: 0.0005)

c) Em 5 minutos selecionados, aleatoriamente, de um sábado, terem passado, numa faixa de rodagem, não menos de 2 veículos, mas não mais de 4 veículos. (R.: 0.0288)

d) Em 1 minutos selecionados, aleatoriamente, de um domingo, ter passado, em 2 faixas da ponte, no máximo, um veículo. (R.: 0.0916)

e) Qual a distribuição de probabilidade da variável aleatória representativa do número de carros que passa na ponte por dia útil? (R.: $P(23760)$)

14. Admite-se que, em determinada economia, o número de trabalhadores qualificados das empresas do sector têxtil e do sector da construção civil descrito por, respetivamente, uma função de probabilidade de Poisson de parâmetro 8 e por uma função de probabilidade Binomial de parâmetros $n = 12$ e $p = 0.3$.

a) Qual a probabilidade de uma empresa selecionada, aleatoriamente, do grupo do sector têxtil, ter um trabalhador qualificado? (R.: 0.0027)

b) Qual a probabilidade de uma empresa selecionada, aleatoriamente, do conjunto daquelas do setor da construção civil, ter dois trabalhadores qualificados. (R.: 0.1678)

c) Comente a afirmação "o número esperado de trabalhadores qualificados no sector da construção civil é superior ao do sector têxtil".

15. A probabilidade de que um indivíduo reagir mal a uma vacina é igual a 0.001. Calcule a probabilidade de, numa amostra de 2000 indivíduos,:

a) Exatamente 3 tenham má reação. (R.: 0.1804)

b) No máximo, 2 tenham má reação. (R.: 0.6767)

c) Mais do que 2 tenham má reação. (R.: 0.3233)

16. Fazem-se lançamentos de uma moeda equilibrada, *Face* / *Coroa*, até ocorrer *Coroa*. Determine a probabilidade de serem necessários seis lançamentos. (R.: 0.0156)

17. Admita que o tempo, em minutos, necessário para que determinado técnico programe uma máquina, da linha de produção pela qual é responsável, é descrito por uma variável *X* com função densidade de probabilidade $U(5,10)$.

Qual a probabilidade de que uma máquina, selecionada aleatoriamente, tenha obrigado o técnico a despender na programação:

a) Mais de 7 minutos? (R.: $\frac{3}{5}$)

b) Mais de 8 minutos mas menos de 9 minutos? (R.: $\frac{1}{5}$)

c) Mais de 6 minutos sabendo que é menor do que 9 minutos? (R.: $\frac{3}{4}$)

18. Duas máquinas M_1 e M_2 produzem o mesmo tipo de peças. A máquina M_1 produz peças cujo comprimento, em centímetros, se distribui uniformemente no intervalo $[4;8]$; a máquina M_2 produz peças cujo comprimento segue uma distribuição $U(5,10)$. Foi selecionada, aleatoriamente, uma peça da produção conjunta de M_1 e M_2, tendo-se verificado que tinha comprimento superior a 6 cm. Sabendo que a máquina M_2 produz o dobro das peças da máquina M_1, qual a probabilidade de ter sido produzida pela máquina M_1. (R.: $\frac{5}{21}$)

19. Considere a variável aleatória *X* com função de densidade de probabilidade $Exp(0.25)$ de expressão Determine:

a) A mediana da v.a. *X*. (R.: 2.7726)

b) $P(X \leq 4)$. (R.: 0.3679

c) $P(X > 3)$. (R.: 0.2865)

d) $P(3 \leq X \leq 5)$. (R.: 0.1859)

20. A intensidade dos sismos registados em determinada área geográfica pode ser modelada por uma função de distribuição Exponencial com média 2. Este registo é feito na escala de Richter, definida numa escala logarítmica arbitrária de base 10. Determine a probabilidade da intensidade de um sismo:

a) Exceder o valor 4 na escala de Richter. (R.: 0.1353)

b) Pertença ao intervalo $[2.5; 3.5]$ na escala de Richter. (R.: 0.1127)

21. Considere uma função de distribuição normal reduzida e os valores (-1.8), (-1.4), (-1.0), (-0.6), (-0.2), 0.2, 0.6, 1.0, 1.4 e 1.8. Calcule a proporção de elementos contida nos intervalos limitados pelos 10 valores indicados e, também, a proporção de elementos encontrada até ao menor valor e a proporção de elementos encontrados depois do valor mais elevado. (R.: 0.0359; 0.0449; 0.0779; 0.1156; 0.1464; 0.1586; 0.1464; 0.1156; 0.0779; 0.0449; 0.0359)

22. Considere a v.a. X com função de densidade de probabilidade normal de média 10 e variância 16. Determine a probabilidade

a) $P(X \leq 9)$. (R.: 0.4013)

b) $P(8 \leq X \leq 13)$. (R.: 0.4649)

23. Considere a v.a. X com função de distribuição $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$. Determine:

a) μ e σ sabendo que $P(X < 3) = 0.6915$ e $P(X < 4) = 0.8413$. (R.: $\mu = 2$; $\sigma = 2$)

b) x_1 sabendo que $P(x_1 < X < 5) = 0.8664$. (R.: $x_1 = -1$)

c) x_1 e x_2 sabendo que $P(X < x_1) = 0.3$ e $P(X > x_2) = 0.1$. (R.: $x_1 = 0.96$; $x_2 = 4.56$)

24. Numa escola, a altura média de 500 estudantes é de 1.68 m com um desvio padrão igual a 15 cm. Admitindo que a altura é uma v.a. com função de densidade de probabilidade normal, calcule quantos estudantes têm altura:

a) Compreendida entre 1.62 m e 1.68 m? (R.: 78)

b) Que excede 1.80 m? (R.: 106)

25. Quarenta estudantes resolveram dois testes, classificados num intervalo desconhecido. As classificações de ambos os testes seguem uma distribuição aproximadamente normal de média e desvio padrão indicados na Tabela 3.6.

Os estudantes *A* e *B* obtiveram as classificações indicadas na Tabela 3.7

	μ	σ
Teste 1	54.10	14.28
Teste 2	21.25	3.52

Tabela 3.6

	A	*B*
Teste 1	45	60
Teste 2	30	21

Tabela 3.7

a) Calcule as classificações reduzidas dos estudantes *A* e de *B*. (R.: Estudante A: $-0.6373; 2.4858$; Estudante B: $0.4132; -0.0710$)

b) Admitindo que a classificação final a atribuir a cada estudante coincide com a média aritmética das classificações dos testes efetuados, determine com base no conjunto dos dois testes qual dos estudantes *A* e *B* obtém o melhor resultado? (R.: Estudante A)

26. Os 25 alunos de uma turma foram seriados consoante a classificação obtida.

a) Admitindo que as classificações obtidas se distribuem em conformidade com as proporções da função de densidade de probabilidade normal, calcule o valor reduzido da classificação obtida pelos alunos que ocuparam, respetivamente, o 2.º e 8.º lugar. Para o cálculo, admita que a classificação coincide com o ponto médio da classe. (R.: Aluno colocado em 2º lugar: 1.58; Aluno colocado em 8º lugar: 0.525)

b) Considerando dois exercícios, para os quais as classificações se distribuem tal como exposto na alínea a), o aluno *A* foi classificado, respetivamente, em 2.º e em 8.º lugar, respetivamente, ao passo que o aluno *B* ocupou o 5.º lugar nos dois. Qual o aluno que obteve melhor média considerando os dois testes? (R.: Estudante A)

27. Fazem-se 500 lançamentos de uma moeda equilibrada, *Face* / *Coroa*. Qual a probabilidade de que o número de *Faces* ocorridas esteja compreendido entre 240 e 260, extremos incluídos? (R.: 0.6266)

28. Num volume *V* dum composto orgânico estão disseminadas bactérias com a frequência média de duas bactérias por centímetro cúbico (c.c.) do composto. Admitindo que o fenómeno segue uma função de probabilidade de Poisson, qual é a probabilidade de uma amostra de 2 c.c. do composto:

a) Não conter bactérias? (R.: 0.0183)

b) Conter, pelo menos, duas bactérias? (R.: 0.0984)

29. O quociente de inteligência (QI) é uma medida que permite avaliar a inteligência das pessoas com base nos resultados de testes específicos, comparando os resultados obtidos, para cada individuo, com outros considerados padrão. Para determinada população, os resultados obtidos para o QI são modelizados por uma função de densidade de probabilidade $\mathcal{N}(\mu = 100, \sigma = 16)$. Calcule a probabilidade associada ao acontecimento indicado:

a) Um indivíduo escolhido ao acaso ter um QI pertencente ao intervalo $[80; 120]$. (R.: 0.7888)

b) Um indivíduo escolhido ao acaso ter um QI superior a 140. (R.: 0.0062)

c) Três indivíduos escolhidos ao acaso da população terem QI superior a 92. (R.: 0.3307)

30. A um anúncio de emprego apresentaram-se 3500 candidatos. O histograma das pontuações obtidas é aproximado por uma função de densidade de probabilidade normal de média 55 pontos e variância igual a 25.

a) Quantos candidatos obtiveram pontuação superior a 65? (R.: ≈ 80 candidatos)

b) Indique os limites do intervalo em que se localizam 50% dos candidatos com classificação centrada em redor do valor médio. (R.: 51.65 e 58.35)

c) Admitindo que só os 700 candidatos com a pontuação mais elevada ficam apurados para a segunda fase do processo, indique a pontuação reduzida do último candidato selecionado. (R.: 59.2)

31. Num grupo de candidatos a uma secção de afinação de instrumentos de orientação, admite-se que a pontuação obtida nos testes psicotécnicos é bem aproximada pela função de densidade de probabilidade $\mathcal{N}(\mu = 32.3, \sigma = 8.5)$. Em função da pontuação, o júri encaminhou para outro tipo de tarefa 10% dos candidatos com os melhores resultados, por admitir terem um nível demasiado elevado, e 30% dos candidatos com os piores resultados, por admitir não atingirem o nível mínimo desejado. Calcule entre que limites variam as pontuações dos indivíduos aceites na secção. (R.: 27.88 e 43.18)

32. Um elevador, para acesso a um grupo de galerias de uma mina, tem capacidade igual a 3800 kg. Há um conjunto de 650 mineiros que utilizam regularmente o elevador. O peso de cada mineiro pode ser aproximado por uma função de densidade de probabilidade de valor esperado igual a 75 kg e desvio padrão igual a 8 kg. Calcule a probabilidade de ser excedida a capacidade do elevador quando nele se encontram 50 mineiros. (R.: 0.1894)

33. O potássio é um mineral necessário ao organismo humano, que se encontra em diferentes tipos de alimentos. Por exemplo, há, aproximadamente, 630 mg numa banana, 300 mg numa cenoura, 440 mg numa laranja. Suponha que a quantidade de potássio existente numa banana é bem definida por uma função de distribuição normal, de média 630 mg e desvio padrão 40 mg.

Considere a v.a. associada à quantidade de potássio inserida quando são comidas 3 bananas.

Calcule a probabilidade de ingerir mais de 2000 mg de potássio quando são comidas 3 bananas. (R.: 0.0559)

34. Um estudo realizado sobre as formas utilizadas para lidar com o *stress*, revela que 46% dos inquiridos aumenta, substancialmente, o consumo diário de chocolate. Suponha que se selecionam aleatoriamente 100 alunos, de uma escola, pretendendo analisar a proporção dos alunos que aumentam o consumo de chocolate para combater o *stress* provocado pela realização de testes ou exames.

a) Justifique se proporção em causa poderá ser aproximada por uma distribuição normal? Em caso afirmativo indique o valor dos parâmetros. (R.: $\mu = 0.46, \sigma = \sqrt{0.002484}$)

b) Qual a probabilidade da proporção em causa tomar um valor pertencente ao intervalo $[0.45; 0.55]$? (R.: 0.5442)

35. Uma empresa de navegação tem de transportar 160 caixotes. O peso, avaliado em unidades de peso (u.p.), de cada caixote segue uma função distribuição de probabilidade $U(8,16)$. Sabendo que para o efeito a empresa dispõe de um navio cuja capacidade máxima disponível é de 1880 u.p., calcule a probabilidade da empresa não conseguir enviar a carga desejada na próxima viagem. (R.: 0.9147)

36. Para uma empresa de transformação de cortiça sabe que:

- Para realizar um circuito de distribuição entre a fábrica e os clientes, são consumidos, em média, 150 litros de gasóleo com um desvio padrão de 24 litros;
- Em cada dia útil da semana, são realizados 2 circuitos de distribuição entre a fábrica e os clientes;
- No último dia de cada mês, a empresa recebe uma encomenda de 6800 litros de gasóleo para ser abastecer a frota no mês seguinte;
- Quando a quantidade contratada de combustível não é suficiente, adquirem ao fornecedor uma quantidade que preveem suficiente para garantir os circuitos de distribuição até ao final do mês.

Perante os pressupostos elencados calcule a probabilidade de, durante o mês, existir a necessidade de uma encomenda extra de gasóleo, para que não exista rotura de *stock* de gasóleo. Assuma que o mês tem 22 dias úteis. (R.: 0.1038)

37. Um estudo permitiu concluir que, em Portugal, as empresas da área dos transportes e logística têm, em média, um volume anual de negócio de 11.5 mil unidades monetárias (u.m.) com um desvio padrão de 2.1 mil u.m. Outro estudo revelou que as empresas do sector do turismo têm um volume anual de negócio, médio, igual a 10 mil u.m. com desvio padrão 10 mil u.m.

Um grupo económico estrangeiro decidiu investir pela primeira vez em Portugal, tendo comprado 30 empresas do sector dos transportes e logística e 40 empresas do sector do turismo.

Qual a probabilidade do grupo ter, em Portugal, um volume anual de negócio superior a 800 mil u.m.? (R.: 0.1949)

38. Um fornecedor de fechaduras para portas blindadas fornece lotes de 100 fechaduras a cada um dos seus clientes.

Devido a falhas na produção, algumas fechaduras têm defeitos. Para evitar prejuízos, imediatos, o fornecedor decidiu incluir em cada um dos lotes 10 fechaduras defeituosas na esperança de não serem detetadas pelo controlo de qualidade dos seus clientes.

A loja "Porta Preciosa" tem implementado um controlo de qualidade que consiste em recolher, aleatoriamente, 6 fechaduras de cada lote recebido, devolvendo-o de imediato se, pelo menos, 1 tiver defeito.

a) A recolha aleatória das 6 fechaduras pode ser feita de duas formas: (1) repondo no lote cada fechadura após ser observada e antes de retirar a seguinte, processo a ser repetido 6 vezes, ou (2) retirando 6 fechaduras do lote e só depois observar cada uma. Justifique se a probabilidade calculada considerando cada um dos processos será significativamente diferente.

b) Qual a probabilidade de um lote não ser devolvido pela loja "Porta Preciosa"? (R.: 0.5223)

39. O número de clientes que chega, por hora, a uma loja segue uma função de probabilidade de Poisson de parâmetro igual a 20.

Determine a probabilidade de:

a) Numa hora, chegarem 15 clientes à loja. (R.: 0.0516)

b) Em duas horas, chegarem 35 clientes loja. (R.: 0.0485)

40. O número de depósitos efetuados, diariamente, em certa agência bancária pode ser representado por uma v.a. *D* com função densidade de probabilidade normal de média 120 depósitos e desvio padrão 8 depósitos.

a) Determine a percentagem de dias em que o número de depósitos é, no máximo, igual a 135 depósitos. (R.: 96.99%)

b) Determine *d* tal que $P(D \leq d) = 0.9082$. (R.: ≈ 131 depósitos)

41. Um estudo de mercado realizado sobre o consumo de material de desporto, permitiu concluir que o número de vendas, por hora, na loja de desporto "Beta" tem função de probabilidade de Poisson com média 3. A loja está aberta, sem interrupções, das 10h às 23h. Qual a probabilidade de:

a) Numa hora, se realizarem, no mínimo, três vendas.

b) Registarem-se 35 vendas, num dia.

42. O peso de determinado produto é representado por uma v.a. com função densidade de probabilidade normal de média 10 g e desvio padrão 2 g. Calcule:

a) A probabilidade do produto pesar mais de 8.5 g.

b) O peso mínimo de 30% dos produtos com maior peso.

c) O peso máximo de 30 % dos produtos com menor peso.

43. O Gestor de Compras de um supermercado sabe que a procura diária de arroz, em quilogramas, é aproximada por uma v.a. com valor médio 40 kg e desvio padrão 5 kg.
Para fazer face à procura estimada para o próximo ano, o Gestor encomendou 14500kg de arroz. Sabendo que o supermercado está aberto 360 dias por ano, determine a probabilidade do stock ser suficiente para satisfazer a procura.

44. De um conjunto de 48 carros enviados para a área de Lisboa, 12 têm problema no *software* utilizado no computador de bordo.
Determine a probabilidade de um ponto de venda que recebeu 8 carros:

a) Não receber carros com o problema detetado.

b) Receba, pelo menos, um carro com o problema detetado.

45. Cada pessoa que entra na loja de chocolates *X*, gasta, em média, 10 unidades monetárias (u.m.) com desvio padrão 3.75 u.m.
Qual a probabilidade de um conjunto de 100 clientes gastar mais de 1100 u.m., admitindo que os gastos são independentes de pessoa para pessoa?

46. Num conjunto de computadores ligados em rede, o número de utilizadores ligados ao sistema pode ser modelizado através de uma função de probabilidade de Poisson. Sabe-se que, em média, estão ligados 25 utilizadores por hora. Considerando um intervalo de 6 minutos, qual é a probabilidade de não haver utilizadores ligados ao sistema?

47. O lucro diário de um restaurante pode ser representado por um v.a. com função densidade de probabilidade normal de média 1500 u.m. e desvio padrão 900 u.m.

a) Calcule a probabilidade de, num dia, o restaurante ter lucro compreendido entre 1100 u.m. e 2200 u.m..

b) Calcule a probabilidade de, num dia, o restaurante ter prejuízo.

c) Qual o lucro mínimo que ocorreu em 80% dos dias com maior lucro?

48. Duas provas de logística foram realizadas, respetivamente, por 30 equipas presentes no *Lisbon Statistics Challenge*. A média e o desvio padrão obtidos em cada prova estão indicados na Tabela 3.8.
As duas equipas da ENIDH, uma do Curso de Gestão Portuária (CGP) e outra do Curso de Gestão de Transportes e Logística (CGTL) obtiveram as pontuações indicadas na Tabela 3.9.
Tendo em conta a informação disponível indique qual a equipa que ficou melhor pontuada.

	μ	σ

	CGP	CGTL

Prova *A*	74	14
Prova *B*	41	3

Tabela 3.8

Prova *A*	65	80
Prova *B*	50	41

Tabela 3.9

49. Um estudo sobre os hábitos alimentares ao pequeno-almoço revelou que 56% dos inquiridos come, pelo menos, 60 gramas de cereais. Suponha que se selecionam aleatoriamente 50 alunos da ENIDH pretendendo analisar a proporção daqueles que comem cereais na primeira refeição.

a) Como pode caracterizar a distribuição da proporção, $\hat{p}$, dos alunos que comem cereais ao pequeno almoço?

b) Qual a probabilidade de $\hat{p}$ ter um valor compreendidos entre 0.45 e 0.70?

50. A v.a. *M* foi utilizada para representar os valores das classificações finais dos alunos numa unidade curricular. Sabe-se que *M* segue uma função de densidade de probabilidade normal de média 12 e desvio padrão 2.

Determine $P(m_1 \leq M \leq 15) = 0.7005$.

51. Uma grua de um armazém tem capacidade para elevar até 420 unidades de peso (u.p.). O peso, em u.p., das paletes que devem ser arrumadas é representado por uma v.a. com distribuição de probabilidade $\mathcal{N}(\mu = 100, \sigma = 8)$. Calcule a probabilidade de ser excedida a capacidade da grua quando são transportadas quatro paletes.

52. Considere uma v.a. *X* com função de densidade de probabilidade normal de média μ e variância 49. Representando por $\bar{x}_n$ a média da amostra, determine a dimensão da amostra a utilizar para obter uma estatística para μ de modo que

$$P(\bar{x}_n - 2 \leq \mu \leq \bar{x}_n + 2) = 0.95.$$

53. O número de unidades vendidas, diariamente, de determinado produto por uma empresa, é uma v.a. *X* com função de probabilidade expressa na Tabela 3.10.

x_i	2	3	4	5
$P(x_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

Tabela 3.10

a) Calcule a probabilidade de serem vendidas mais de uma unidade, sabendo que esse número é menor do que três.

b) Quantas unidades, espera a empresa vender em cada dia?

c) Determine o lucro diário esperado sabendo que:

- Diariamente, existem três unidades em *stock*.

- Se o produto for vendido no próprio dia, proporciona um ganho de 5 unidades monetárias por unidade vendida.
- Se o produto não é vendido no dia, tem de ser inutilizado, situação que acarreta um prejuízo de 2 unidades monetárias por unidade que fica em armazém.

54. Sabe-se que 20% das peças produzidas por uma máquina são defeituosas. Qual a probabilidade de, em quatro peças escolhidas ao acaso, no máximo, uma seja defeituosa.

55. A uma agência bancária chegam, em média, 20 clientes por hora. Supondo que o número de clientes que chega por hora segue uma distribuição de probabilidade de Poisson, calcule:

a) A probabilidade de chegar um cliente em 10 minutos. (R.: 0.1189)

b) A probabilidade de que o intervalo entre duas chegadas consecutivas de clientes seja superior a 3 minutos. (R.: 0.3679)

c) Qual o tempo médio (em minutos) entre duas chegadas consecutivas de clientes à loja? (R.: 3 minutos)

56. Depois de fabricado e embalado, pode-se considerar que a duração de certo produto é representada por uma v.a. com distribuição normal de média 120 dias e desvio padrão 20 dias. Pretende-se enviar um lote de embalagens desse produto. Qual a dimensão do lote a enviar de modo que exista 95% de probabilidade para a vida média ser superior a 118 dias.

57. O número de navios petroleiros que chegam, por dia (24 horas), a determinada refinaria pode ser representado por uma distribuição de Poisson. Sabe-se que, por dia, a chegada de um navio é igualmente provável do que a chegada de dois navios.

As instalações atuais podem atender, por dia, no máximo, 3 navios pelo que os eventuais navios excedentes têm de ser encaminhados para outra refinaria.

a) Qual o número esperado de navios que chegam em cada dia? (R.: 2 navios)

b) Qual a probabilidade de chegarem à refinaria, no máximo, três navios em 12 horas? (R.: 0.981)

c) Qual a probabilidade de, num dia, ser necessário enviar navios para outra refinaria? (R.: 0.1429)

d) Qual o número esperado de navios que são atendidos diariamente? (R.: 1.782 navios)

e) Para garantir atender todos os navios em, aproximadamente, 94% dos dias, prove em quanto devem ser aumentadas as instalações atuais? (R.: Para mais 1 navio)

58. A um armazém chegou uma encomenda com 500 embalagens de um bem, 50 das quais danificadas. Se forem inspecionadas 10 embalagens, recolhidas aleatoriamente do lote, calcule:

a) Qual a probabilidade da encomenda ser rejeitada após a inspeção, sabendo que o contrato estabelecido com o fornecedor admite no máximo duas embalagens danificadas por lote? (R.: 0.0702)

b) Se uma empresa possuir 100 armazéns nas condições citadas na alínea a), em quantos armazéns pode esperar que existam encomendas rejeitadas? (R.: ≈7 armazéns)

59. O número de imperfeições, por metro quadrado, de uma tela de revestimento, pode ser representado por uma v.a. com função de probabilidade $P(0.7)$.

A tela é embalada em rolos de 6 metros de comprimento por 1 metro de largura.

Para o transporte, os rolos são colocados em grupos de 4 e apertados com fita de plástico.

a) Qual a probabilidade de 1 rolo ter 10 imperfeições? (R.: 0.0071)

b) Para o comerciante, o lucro, por metro quadrado de tela, é função do número de imperfeições por metro quadrado e encontra-se indicado na Tabela 3.11. Qual o lucro esperado, por rolo, para o comerciante? (R.: 26.94)

Lucro u.m./ m^2	N.º Imperfeições / m^2
5	Nenhuma
4	De 1 a 3 imperfeições
3	Mais de 3 imperfeições

Tabela 3.11

60. Um estudo em laboratório, indica que a temperatura de determinado tipo de barra metálica tem função densidade de probabilidade normal com temperatura média igual a 20ºC e desvio padrão igual a 3.33ºC.

As barras só podem ser utilizadas se a temperatura estiver compreendida entre 18.11ºC e 26.66ºC. Determine a probabilidade de uma barra, escolhida ao acaso, ser utilizada. (R.: 0.6929)

61. Um estudo sobre a pluviosidade em determinada região, avaliada em cm^3/m^2, revelou ter uma função densidade de probabilidade normal de média 65 cm^3/m^2. O estudo apontou, igualmente, que em 14.92% dos anos estudados choveu mais do que 85 cm^3/m^2.

Qual o desvio padrão da variável aleatória que mede a pluviosidade anual nessa região? (R.: 19.23)

62. Pretende-se calcular o custo de um suporte metálico composto por três peças identificadas por "*A*", "*B*" e "*C*".

Sabe-se que o custo, em milhares de unidades monetárias (u.m.), da peça:

- "*A*" pode ser igual a 1.4 ou 1.5.
- "*B*" pode ser igual a 2.8, 2.9 ou 3.
- "*C*" pode ser igual a 0.7 ou 0.8.

Admita que *T* é o acontecimento associado ao custo do suporte em milhares de u.m.

a) Determine a probabilidade associada a *T*.

b) Tendo em conta os valores que T pode tomar, será viável admitir que podem ocorrer com igual probabilidade? Escreva a função de massa de probabilidade para T.

63. Para três unidades curriculares, não relacionadas, um estudante pretende fazer exame na época de recurso. Da forma como estudou, a probabilidade de obter aproveitamento em cada um dos exames é igual a 40%.

Calcule a probabilidade do estudante obter aproveitamento:

a) Em, exatamente, um exame.

b) Em, pelo menos, um exame.

64. Numa fábrica o número de acidentes por semana segue uma distribuição de Poisson de parâmetro $\lambda = 2$.

Calcule a probabilidade de:

a) Numa semana, ocorrer mais do que um acidente sabendo que na semana anterior não se registou nenhum.

b) Numa semana exista um acidente e na semana seguinte, novamente, um acidente?

c) Em duas semanas ocorram 3 acidentes?

65. O tempo, em minutos, que um operador de armazém demora a executar determinada tarefa é representado por uma v.a. com função densidade de probabilidade normal.

Sabe-se que a probabilidade do operador demorar mais de 13 minutos a realizar a tarefa em causa é igual a 0.0668 e a de demorar menos de 8 minutos é igual a 0.1587. Calcule:

a) O tempo médio requerido para o operador executar a tarefa e o respetivo desvio padrão.

b) A probabilidade do operador demorar entre 9 e 12 minutos a terminar a tarefa.

66. Uma máquina tem doze componentes idênticos que funcionam de forma independente. A probabilidade de um componente falhar é igual a 0.15. A máquina deixa de funcionar se três ou mais componentes falharem.

Calcule a probabilidade da máquina continuar a funcionar?

67. Num lote de vinte pneus enviados a um fornecedor sabe-se que há cinco defeituosos. Um cliente vai ao fornecedor em causa comprar quatro pneus. Determine a probabilidade de comprar um pneu defeituoso?

68. O tempo de fabrico de cada unidade de determinado produto é bem representado por uma v.a. com distribuição normal de média igual a 3 horas. Sabe-se que 21.19% dos produtos demoram menos de 2.2 horas a serem produzidos.

a) Determine o desvio padrão da distribuição.

b) Qual a percentagem de produtos fabricados num tempo inferior a 210 minutos?

69. Um psicólogo acredita que os resultados de testes psicotécnicos efetuados numa escola de Lisboa seguem uma distribuição normal de média 100 e desvio padrão 25.

O psicólogo pretende determinar, para uma amostra de 100 alunos da escola, qual a probabilidade da média dos resultados dos testes pertencer ao intervalo $[97; 105]$.

70. A probabilidade dos alunos de uma determinada escola de condução passarem no exame na primeira tentativa é igual a 63%. Das pessoas que se inscreveram para realizar o exame de condução pela primeira vez, foram selecionadas, aleatoriamente, onze.

a) Calcule a probabilidade de todas as pessoas selecionadas passarem no exame.

b) Determine o número esperado de pessoas que não passaram no exame na primeira tentativa.

71. Um canal de televisão privado é dedicado, exclusivamente, à divulgação contínua de publicidade. A duração, em minutos, de um bloco publicitário é uma v.a. com função densidade de probabilidade exponencial de média igual a 10 minutos. Admitindo a independência da duração entre os blocos.

a) Calcule a probabilidade de um bloco publicitário durar entre 8 e 15 minutos.

b) Determine a probabilidade de numa hora passarem menos de dois blocos.

72. No início do ano, uma empresa tem em armazém 100 unidades do produto *XPCT*, cujo *stock* é impossível repor ao longo do ano. A procura anual do produto segue uma distribuição normal com valor médio igual a 90 unidades e desvio padrão igual a 4 unidades. Calcule:

a) A probabilidade do *stock* ser insuficiente para satisfazer a procura anual.

b) A probabilidade de, no final do ano, existirem 15 ou mais unidades em armazém.

c) O lucro esperado pela empresa, sabendo que a venda de todos os produtos em armazém proporciona um ganho de 1000 unidades monetárias (u.m.), a venda de 85 a 99 produtos permite um ganho de 500 u.m. e que a venda de menos de 85 unidades traduz-se num prejuízo de 300 unidades monetárias.

73. Para investigar o efeito de um medicamento em pacientes com determinada deficiência cardíaca uma equipa de médicos resolveu diagnosticar um conjunto de pessoas.

Sabendo que, na população, a percentagem de pessoas com o problema em estudo é igual a 1%, calcule a probabilidade de a primeira pessoa a ser encontrada, nas condições pretendidas, ser a quarta entrevistada.

74. Qual a probabilidade de, no sorteio do totoloto com uma aposta simples, se acertar em quatro dos cinco números da chave sorteada?

75. Nas placas de vidro produzidas por uma fábrica aparecem, em média, 4 bolhas de ar por 10 m^2. O número de bolhas de ar por 10 m^2 pode ser considerado uma v.a. com função de probabilidade de Poisson.

a) Pretende-se aplicar uma placa de vidro de 2 metros de altura por 2.5 metros de comprimento mas a aplicação só deverá ser feita se a placa não contiver mais do que 2 bolhas de ar. Qual a probabilidade de que a placa não possa ser aplicada por não respeitar a condição?

b) Analisando um lote de 10 placas de vidro com 1 m de altura por 2.5 metros de comprimento, calcule a probabilidade de existirem 6 sem nenhuma bolha de ar.

76. Ao longo da marginal de uma baía estão plantados vários tipos de palmeiras.

Admita que o comprimento da folha de uma palmeira, da espécie PBC, segue uma distribuição normal e, ainda, que 68% das folhas têm comprimento pertencente ao intervalo, centrado no valor do comprimento médio, limitado pelos valores 2 e 2.5 metros.

a) Suponha que X é uma v.a. associada ao comprimento da folha da palmeira da espécie PBC. Determine o valor médio e o desvio padrão de X.

b) Dois amigos que passeavam ao longo da marginal encontraram uma folha de palmeira que apresenta parecenças com as das palmeiras PBC mas com, apenas, 1.75 metros. Qual a probabilidade da folha ser da espécie indicada?

77. A Cristina encontra-se no local A e necessita de se deslocar para o local B, utilizando dois meios de transporte: primeiro, T_1 e, depois, T_2.

O tempo de deslocação, em minutos, no transporte T_1 ou no transporte T_2 é representado por uma v.a. com distribuição normal. A duração da viagem no transporte T_1 é igual, em média, a 27 minutos com desvio padrão igual a 5 minutos, ao passo que, em T_2 a média é igual a 30 minutos com desvio padrão igual a 2 minutos. Supõe-se que a duração da viagem num dos meios de transporte é independente ao tempo passado no outro meio de transporte.

Determine a probabilidade da viagem completa, sem contar com os tempos de espera, durar mais do que uma hora.

78. O número de latas de cerveja vendidas, por dia, numa mercearia de bairro é uma v.a. com distribuição de Poisson, de valor médio 5. Sabendo que a quantidade de cervejas em armazém é renovada no final de cada mês, qual deverá ser a dimensão do *stock* para que a probabilidade de não haver rotura no final de um mês de 30 dias ser igual a 0.98.

79. Considere a função definida como indicado

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{14} & \text{para } x = 1,2,3 \\ 0 & \text{para outros valores de } x \end{cases}$$

a) Indique as propriedades a satisfazer por qualquer função de probabilidade. Mostre que $f(x)$ as satisfaz e represente a função graficamente.

b) Deduza a função de distribuição e represente-a graficamente.

c) Calcule $P[(X = 1)|(X < 2)]$. (R.: $1/5$)

80. A probabilidade de uma editora produzir um disco defeituoso é 1%. A empresa vende os discos em caixas de 10 unidades e garante a devolução do valor despendido com a compra se mais do que 1 disco estiver defeituoso.

a) Qual a proporção de pacotes devolvidos. (R.: 0.0043)

b) Se alguém comprar 3 caixas qual a probabilidade de uma delas ser devolvida? (R.: 0.0128)

81. A probabilidade de um aluno passar no exame de condução é 0.6. Determine a probabilidade:

a) Do 2º candidato aprovado ser o 5º? (R.: 0.09216)

b) De, pelo menos, 3 dos próximos 4 candidatos ficarem aprovados no exame? (R.: 0.4752)

82. Num livro com 800 páginas há 800 erros de impressão

a) Qual a probabilidade de que 1 página contenha, pelo menos, 3 erros de impressão? (R.: 0.0803)

b) Estime o número provável de páginas, por livro, que não contém erros de impressão. (R.: 294)

83. Seja *X* uma v.a. associada ao tempo, em centenas de horas, que um produto está em armazém. Sabe-se que *X* tem função de probabilidade acumulada definida por

$$F(x) = 1 - e^{-2x}, \text{ para } x \geq 0.$$

Calcule a probabilidade de um produto ficar em armazém até uma centena e meia de horas. (R.: 0.9502)

84. Um componente é considerado defeituoso se o seu peso diferir do peso padrão em mais de 20 g. Estima-se que o peso dos componentes segue distribuição normal de média 300 g e desvio padrão 10 g. Qual a percentagem de componentes defeituosos? (R.: 4.56%)

85. Um pacote de açúcar pesa, em média, 10 g com desvio padrão 2 g e é embalado às 50 unidades em caixas vazias com peso médio 500 g e desvio padrão 25 g.

Admitindo a independência dos pesos e que estes seguem uma distribuição normal, calcule a probabilidade de uma caixa cheia pesar mais de 1050 g. (R.: 0.0409)

86. Num baralho com 52 cartas existem 4 símbolos: ♠ (espadas), ♣ (paus), ♥ (copas) e ♦ (ouros). Cada um dos símbolos representa um naipe. Em cada naipe existem 13 cartas distintas: rei, dama, valete, 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2 e 1. Como exemplo, na Figura 1 encontram-se representadas as 13 cartas do naipe paus.

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 Valete Dama Rei

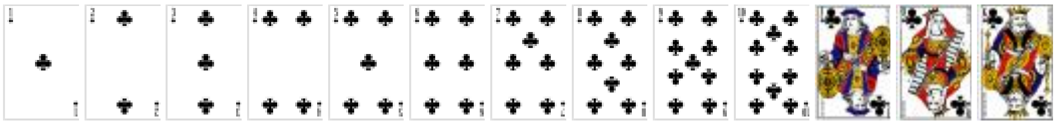

Figura 1

Um jogador escolheu, aleatoriamente, 13 cartas de um baralho com 52 cartas.

Sabendo que uma das cartas selecionadas é uma dama, determinar a probabilidade de terem sido retiradas mais damas. (R.: 0.3697)

87. O número de erros tipográficos por página é uma variável aleatória *X* com distribuição de probabilidade $P(0.5)$, ou seja, Poisson de parâmetro $\lambda = 0.5$.

Suponha um livro de 100 páginas, no qual os erros tipográficos são estatisticamente independentes.

a) Determine a média e o coeficiente de variação da variável aleatória *X*? (R.: 1.4142)

b) Determine a distribuição de probabilidade da variável aleatória *Y*, número de erros tipográficos no livro? (R.: $P(50)$)

c) Qual a probabilidade de existirem 60 erros no livro? (R.: 0.0201)

88. Em determinado serviço o tempo de espera, em minutos, de um cliente para ser atendido é uma variável aleatória com distribuição normal de média 45 minutos e desvio padrão 15 minutos. O responsável resolveu promover uma campanha de marketing, garantindo um tempo máximo de espera e, caso o cliente não seja atendido dentro desse período, terá um desconto de 50% no valor a pagar.

a) Determine o tempo de espera máximo, garantido pelo responsável, de modo que apenas 10% dos clientes usufruam do desconto? (R.: 64.2 minutos)

b) Calcule a percentagem de clientes que esperam menos de 20 minutos? (R.: 4.75%)

c) Considere 5 clientes escolhidos ao acaso. Determine a probabilidade de, no máximo, 4 esperarem mais de 20 minutos? (R.: 0.216)

89. O lucro gerado por cada investimento realizado, no último ano, numa empresa financeira tem um valor médio de 8200 u.m. e um desvio padrão de 3600 u.m..

Considere uma amostra aleatória de 100 investimentos.

a) Indique e justifique qual é a distribuição da média amostral? (R.: 0.216)

b) A probabilidade da média amostral estar compreendida entre 8000 u.m. e 8500 u.m.? (R.: 0.509)

c) Indique e justifique qual é a distribuição do lucro total da amostra?

d) Qual o 80º percentil do lucro total da amostra? (R.: 850240 u.m.)

90. Um teste é constituído por quatro perguntas de escolha múltipla. Para cada pergunta são dadas 4 respostas possíveis, das quais só 1 está correta.

Um aluno responde às questões de forma aleatória.

Qual a probabilidade de ter mais respostas certas do que erradas? (R.: $13/256$)

91. Seis homens e quatro mulheres candidataram-se à eleição para escolher uma comissão formada de dois elementos, aqueles que receberem o maior número de votos. Sabe-se que todos têm a mesma hipótese de ser escolhidos.

Determine a função de probabilidade do número de mulheres eleitas para a comissão. (R.: $p(0) = 1/3$; $p(1) = 8/15$; $p(2) = 2/15$)

92. A uma central de encomendas chega, em média, uma chamada por minuto. Em cada hora, a telefonista costuma fazer um intervalo de 5 minutos. Considere um desses intervalos. Determine:

a) O número médio de chamadas não atendidas. (R.: 5 chamadas)

b) A probabilidade da telefonista não falhar nenhuma chamada. (R.: 0.0067)

c) A probabilidade da telefonista falhar, no máximo, três chamadas. (R.: 0.2583)

93. Uma empresa produz televisores de dois tipos: *smart TV* e *smart TV 3D*. Se o aparelho avariar nos primeiros 6 meses após a venda, a empresa garante a sua substituição.

O tempo para ocorrência de avaria tem distribuição normal com média 10 meses e desvio padrão de 2 meses, para os televisores do tipo *smart TV*, e de média 11 meses e desvio padrão 4 meses, para os outros.

Os televisores *smart TV* são produzidos com lucro de 1200 unidades monetárias (u.m.), ao passo que, os *smart TV 3D* proporcionam lucro de 2100 u.m. e, caso haja substituição do aparelho, acarretam prejuízo de 2500 u.m. e 7500 u.m., respetivamente.

Se a empresa basear a decisão no lucro médio esperado para cada televisor, justifique em qual dos tipos de *smart TV* a empresa deve incentivar as vendas.

94. Um jovem decidiu juntar dinheiro para comprar um carro. Para isso, fez trabalhos em regime de avença. A probabilidade de, num dia conseguir serviços que lhe rendam 50 €, 100 € e 250 € é, respetivamente, 0.3, 0.6 e 0.1.

Qual a probabilidade de conseguir, no máximo, 35000 € em 365 dias? (R.: 0.0764)