1) Um teste tem m perguntas com duas possibilidades de resposta para cada uma

a) Quantas maneiras diferentes existem para responder ao teste

2^m maneiras

b) Qual a probabilidade de não acertar em nenhuma resposta?

A probabilidade de não acertar uma resposta é 0.5, por isso de não acertar no teste é $(0.5)^m$

2) A probabilidade de, num lançamento aleatório, sair cara ou coroa é de p_1 para uma determinada moeda e de p_2 para outra moeda. Considere a variável aleatória Y correspondente ao número de caras que saem se forem lançadas as 2 moedas

a) Determine a função de distribuição de probabilidade de Y.

- $Y=0 \rightarrow$ nenhuma cara nos 2 lançamentos

$P(Y=0) = (1-p_1)(1-p_2)$

$\downarrow$ negar prob de p_1 $\quad\downarrow$ negar prob de p_2

- $Y=1 \rightarrow$ 1 cara nos dois lançamentos

ou sai cara no 1º lançamento, ou sai cara no segundo

$P(Y=1) = p_1(1-p_2) + p_2(1-p_1)$

- $y=2 \rightarrow$ 2 caras nos dois lançamentos

$P(y=2) = p_1 p_2$

b) Qual a variância de Y?

$$E[Y] = \sum_i y_i\, p(y_i),\quad E[Y] = 0\times(1-p_1)(1-p_2) + 1\times[p_1(1-p_2)+p_2(1-p_1)] + 2(p_1p_2)$$

$$E[Y] = p_1(1-p_2)+p_2(1-p_1) + 2p_1p_2 \qquad \boxed{Var(Y) = E[Y^2]-E^2[Y]}$$

$$= p_1 - p_1p_2 + p_2 - p_1p_2 + 2p_1p_2$$

$$= p_1 + p_2$$

$$E[Y^2] = 0^2\,P(Y=0) + 1^2\,P(Y=1) + 2^2\,P(Y=2)$$

$$= p_1(1-p_2) + p_2(1-p_1) + 4p_1p_2$$

$$= p_1 - p_1p_2 + p_2 - p_2p_1 + 4p_1p_2$$

$$= p_1 + p_2 + 2p_1p_2$$

$$E^2[Y] = (p_1+p_2)^2$$

$$Var(Y) = E[Y^2] - E^2[Y]$$

$$= p_1+p_2+2p_1p_2 - (p_1^2 + 2p_1p_2 + p_2^2)$$

$$= p_1+p_2+2p_1p_2 - p_1^2 - 2p_1p_2 - p_2^2$$

$$Var(Y) = p_1+p_2-p_1^2-p_2^2$$

3. Diogo, Eugénio e Filipe são os três programadores usando as iniciais dos seus nomes para designar 3 variáveis aleatórias e como valores possíveis para essas variáveis x_i, as distribuições de probabilidade são as seguintes

x_i	$p_D(x_i)$	$p_E(x_i)$	$P_f(x_i)$
0	0,6	0,4	?
1	0,2	0,5	0,2
2	0,1	?	0,2
3	?	0,02	0,1
4 ou mais	0	0,03	0,5

x_i	$p_D(x_i)$	$p_E(x_i)$	$P_f(x_i)$
0	0,6	0,4	0
1	0,2	0,5	0,2
2	0,1	0,05	0,2
3	0,1	0,02	0,1
4 ou mais	0	0,03	0,5

$0,6+0,2+0,1+?+0=1 \Leftrightarrow ?=0,1$

$0,4+0,5+?+0,02+0,03=1 \Leftrightarrow ?=0,05$

$?+0,2+0,2+0,1+0,5=1 \Leftrightarrow ?=0$

a) Escolhe-se aleatoriamente um programa de entre um conjunto de programas em que os do filipe são tantos como o conjunto correspondente aos outros dois, que contribuíram com o mesmo numero. O programa escolhido tem 2 ou mais erros. Qual a probabilidade de ter sido o Diogo o autor do programa escolhido?

$P(F)=\frac{1}{2}$ $P(D)=\frac{1}{4}$ $P(E)=\frac{1}{4}$

A: "O Programa tem dois ou mais erros"

$\rightarrow$ Prob de ter 2 ou mais erros sabendo que é do diogo

$P(A|D)=0,1+0,1=0,2$

$P(D|A)=?$

$$=\frac{P(D\cap A)}{P(A)}$$

$$0,2=\frac{P(A\cap D)}{P(D)}$$

$$0,2=\frac{P(A\cap D)}{\frac{1}{4}} \Leftrightarrow P(A\cap D)=\frac{1}{20}$$

$$P(D|A)=\frac{\frac{1}{20}}{\frac{1}{4}\times 0,2+\frac{1}{4}\times 0,1+\frac{1}{2}\times 0,8}\approx 0,105$$

$P(A)=P(D)\times(0,1+0,1+0)+P(E)\times(0,05+0,02+0,03)+P(F)\times(0,2+0,1+0,5)$

$=\frac{1}{4}\times 0,2+\frac{1}{4}\times 0,1+\frac{1}{2}\times 0,8$

b) Qual dos programadores é mais provável ter sido o autor do programa escolhido?

$P(D|A)=0,1+0,1=0,2$ $P(F|A)=0,2+0,1+0,5=0,8$

$P(E|A)=0,05+0,02+0,03=0,1$

É mais provável ter sido o filipe

4) Assumindo que a probabilidade de um aluno terminar a sua dissertação de Mestrado num ano depende da sua média de curso até à altura da seguinte forma: Probabilidade igual a 0,2 para médias no intervalo 10 a 12, aberto no 12; 0,5 no intervalo [12,14[; 0,8 no intervalo [14,16[; 0,9 no intervalo [16,18[e 0,95 para [18,20[

$P[10,12[\to 0{,}2$ $P[16,18[\to 0{,}9$

$P[12,14[\to 0{,}5$ $P[18,20[\to 0{,}95$

$P[14,16[\to 0{,}8$

a) Considere os seguintes casos:

A) Dois alunos com média entre 14 e 16;

B) Dois alunos com médias de 11 e um com média de 10;

C) Um aluno com média superior a 18.

Qual deles maximiza a probabilidade de um orientador ter 1 e só um aluno, a terminar?

Qual a probabilidade em cada uma ? situações?

$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

$A \to \binom{2}{1} (0{,}8)^1 (0{,}2)^1 = 0{,}32$

$B \to \binom{3}{1} \times 0{,}2 \times 0{,}8^2 = 0{,}384$

$C \to \binom{1}{1} \times 0{,}95 \times (0{,}05)^0 = 0{,}95$

5) E se mantendo os casos se pretender 1 ou mais alunos?

$P(1 \text{ ou mais}) = 1 - P(\text{nenhum})$

A -> p terminar $= 0{,}8$

$\neg p$ terminar $= 1 - 0{,}8 = 0{,}2$

$P(1 \text{ ou mais}) = 1 - (0{,}2 \times 0{,}2) = 0{,}96$

B -> p terminar $= 0{,}2$

$\neg p$ terminar $= 0{,}8$

$P(1 \text{ ou mais}) = 1 - (0{,}8 \times 0{,}8 \times 0{,}8) = 0{,}488$

C -> p terminar $= 0{,}95$

$\neg p$ terminar $= 0{,}05$

$P(1 \text{ ou mais}) = 1 - 0{,}05 = 0{,}95$

c) Em média quantos terminam em cada uma das 3 situações?

A -> $E[X] = n \times p = 2 \times 0{,}8 = 1{,}6$

B -> $E[X] = n \times p = 3 \times 0{,}2 = 0{,}6$

C -> $E[X] = n \times p = 1 \times 0{,}95 = 0{,}95$

5. Considere que um programador W comete em média em cada 1000 linhas de código que escreve 20 erros. Considere também que o número de erros segue uma distribuição de Poisson.

Esse programador resolve 3 pequenos problemas e dai resultam 200, 400 e 500 linhas de código, respetivamente. Qual a probabilidade de pelo menos um dos programas ter erro?

1000 linhas — 20 erros

200 — λ_1

Prob 1 → 200 linhas

Prob 2 → 400 linhas

Prob 3 → 500 linhas

1000 — 20

400 — λ_2

$$\lambda_1 = \frac{200 \times 20}{1000} = \frac{4\cancel{000}}{1\cancel{000}} \approx 4$$

1000 — 20

500 — λ_3

$$\lambda_2 = \frac{400 \times 20}{1000} = \frac{8\cancel{000}}{1\cancel{000}} \approx 8$$

$$\lambda_3 = \frac{500 \times 20}{1000} = \frac{10\cancel{000}}{1\cancel{000}} \approx 10$$

Prob pelo menos um programa ter um erro = 1 - P(nenhum)

Prob 1

$$: P_1(x=0) = \frac{4^0 e^{-4}}{0!} = e^{-4}$$

Prob 2

$$: P_2(x=0) = \frac{8^0 e^{-8}}{0!} = e^{-8}$$

Prob 3

$$P_3(x=0) = \frac{10^0 e^{-8}}{0!} = e^{-10}$$

$$P = 1 - \left(e^{-4} \times e^{-8} \times e^{-10}\right)$$

$$= 1 - e^{-22}$$