



TALLER 1 OPTIMIZACIÓN 2024-1

Luisa María Zapata Saldarriaga
Estudiante de maestría en Ingeniería
Luisa.zapatas@udea.edu.co

EJERCICIO 1

Carga de contenedores

En el cual se busca decidir cuales contenedores usar y que ítems asignar a cada contenedor, cumpliendo con la carga máxima admisible de cada contenedor utilizado y que cada objeto se asigna exactamente a un contenedor para minimizar el número de contenedores utilizados. Los contenedores tienen como peso máximo 100 kg.

- A. Formule el caso base correspondiente a la verbalización arriba mencionada y agregue a la formulación la siguiente condición adicional: Cambie la función objetivo para que las repisas estén cargadas lo más balanceado posible (pista, ver los arquetipos sobre la función objetivo correspondientes)

VERBALIZACIÓN

CASO 1

Para:

Minimizar el número de contenedores

Decidir:

Cuáles contenedores usar y que ítems asignar a cada contenedor

Cumpliendo:

La carga máxima admisible de cada contenedor
A cada objeto se asigna exactamente a un contenedor

CASO 2

Para:

Minimizar la diferencia de la carga máxima entre los contenedores

Decidir:

Cuántos contenedores usar y que ítems asignar a cada contenedor

Cumpliendo:

La carga máxima admisible de cada contenedor
A cada objeto se asigna exactamente a un contenedor
La carga de los contenedores estén lo más balanceada posible

DESCRIPCIÓN DE LOS COMPONENTES

Conjuntos:

Ítems: $I = \{1, 2, 3, \dots, 20\}$

Contenedores: $C = \{c_1, c_2, c_3, \dots, c_n\}$

Parámetros:

w_i : Peso del ítem $i \in I$ para $j \in W$

cap: Capacidad máxima de los contenedores $c \in C$ [kg].

ε : el porcentaje máximo tolerable de diferencia entre la carga de un contenedor y la carga promedio de los contenedores

Variables de decisión:

$X_{i,c}$: Variable binaria indica si el ítem $i \in I$ se asigna al contenedor $c \in C$

$$X_{i,c} \begin{cases} 1 & \text{el ítem } i \in I \text{ se asigna al contenedor } c \in C \\ 0 & \text{el ítem } i \in I \text{ no se asigna al contenedor } c \in C \end{cases}$$

Y_c : Variable binaria que indica si el contenedor $c \in C$ se utiliza

$$Y_c \begin{cases} 1 & \text{el contenedor } c \in C \text{ se utiliza} \\ 0 & \text{el contenedor } c \in C \text{ no se utiliza} \end{cases}$$

Función Objetivo – Caso 1

Minimizar

$$\text{Min } Z = \sum_{c \in C} Y_c$$

Función Objetivo – Caso 2

Minimizar la carga máxima de un contenedor

$$\text{Min} \left(\max \left(\sum_{i \in I} w_i X_{i,c} \right) \forall c \in C \right)$$

Sujeto a:

Arquetipo de recurso:

La cantidad total utilizada de un recurso al realizar un conjunto de actividades debe ser mejor o igual a la disponibilidad del recurso.

Para este problema, la podemos expresar como:

$$\sum_{i \in I} w_i X_{i,c} \leq \text{cap} * Y_c \forall c \in C$$

Arquetipo de asignación:

A cada ítem se asigna un contenedor

$$\sum_{c \in C} X_{i,c} = 1 \quad \forall i \in I$$

Dominio de las variables de decisión

$$X_{i,c} \in \{0,1\} \quad \forall i \in I, \forall c \in C$$

$$Y_i \in \{0,1\} \quad \forall i \in I$$

Implementación computacional

De acuerdo con los datos proporcionados en la Tabla 1 se hace la implementación en PyOMO y se obtienen los siguientes resultados.

Tabla 1 Ítems a recibir con su respectivo peso

Ítem	Peso (Kg)	Ítem	Peso (Kg)	Ítem	Peso (Kg)	Ítem	Peso (Kg)
1	36	6	19	11	23	16	33
2	33	7	37	12	29	17	9
3	39	8	8	13	10	18	17
4	43	9	29	14	22	19	30
5	7	10	37	15	11	20	28

Para modelar el problema, se define una cota superior para la cantidad de contenedores, entonces por cada ítem en el peor de los casos se asigna a un contenedor, dando por resultado 20 contenedores. Luego se realizaron pruebas de una cota de 5 contenedores para ver si el modelo era solucionable con esta cantidad.

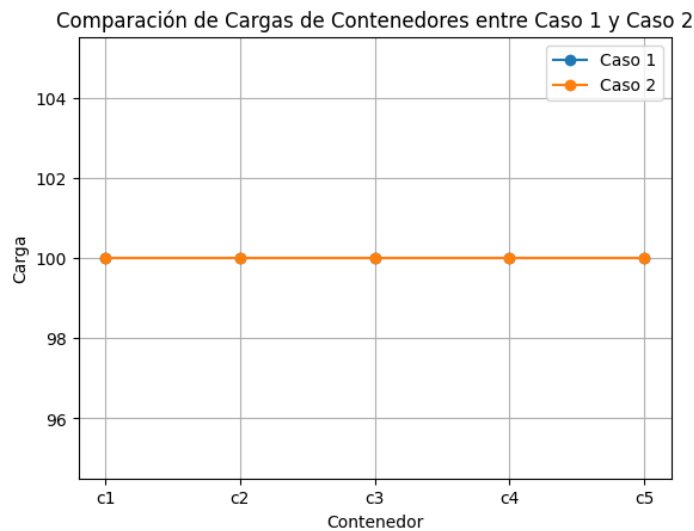


Fig 1. Comparación de cargas de 5 contenedores entre caso 1 y caso 2

Tanto para el caso 1 como para el caso 2, se pueden tener contenedores con los pesos obtenidos 5 contenedores con una carga de 100.

	<i>Contenedor 1</i>	<i>Contenedor 2</i>	<i>Contenedor 3</i>	<i>Contenedor 4</i>	<i>Contenedor 5</i>
Caso 1	Ítem 3: Peso 39 Ítem 9: Peso 29 Ítem 13: Peso 10 Ítem 14: Peso 22	Ítem 1: Peso 36 Ítem 6: Peso 19 Ítem 7: Peso 37 Ítem 8: Peso 8	Ítem 4: Peso 43 Ítem 12: Peso 29 Ítem 20: Peso 28	Ítem 10: Peso 37 Ítem 16: Peso 33 Ítem 19: Peso 30	Ítem 2: Peso 33 Ítem 5: Peso 7 Ítem 11: Peso 23 Ítem 15: Peso 11 Ítem 17: Peso 9 Ítem 18: Peso 17
Total	100	100	100	100	100
Caso 2	Ítem 1: Peso 36 Ítem 4: Peso 43 Ítem 13: Peso 10 Ítem 15: Peso 11	Ítem 2: Peso 33 Ítem 7: Peso 37 Ítem 8: Peso 8 Ítem 14: Peso 22	Ítem 6: Peso 19 Ítem 9: Peso 29 Ítem 11: Peso 23 Ítem 12: Peso 29	Ítem 16: Peso 33 Ítem 17: Peso 9 Ítem 19: Peso 30 Ítem 20: Peso 28	Ítem 3: Peso 39 Ítem 5: Peso 7 Ítem 10: Peso 37 Ítem 18: Peso 17
Total	100	100	100	100	100

Ahora vemos, si modificamos la cantidad de contenedores, en el caso 1, siempre utiliza 5 contenedores por que es el valor optimo, mientras que en el caso 2 como es balanceado los 7 contenedores los ajusta a un peso máximo de 72 kg.

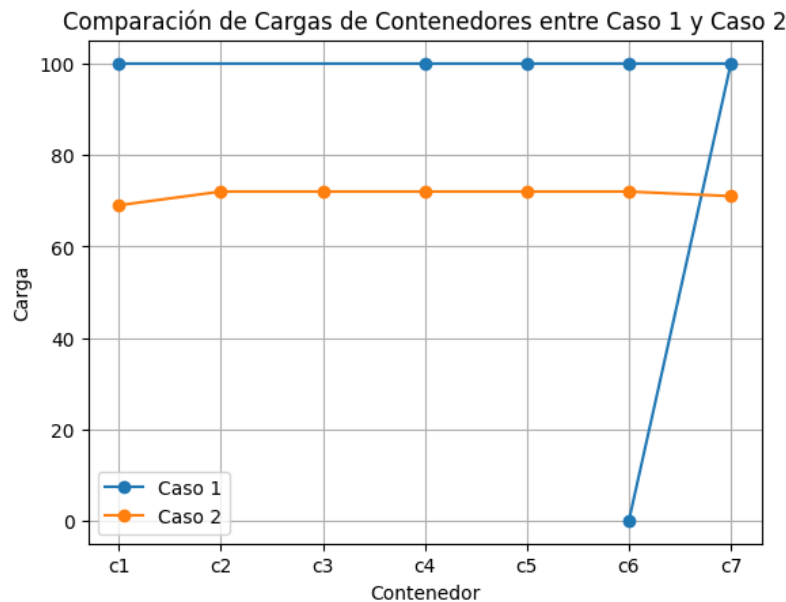


Fig 2. Comparación de cargas de 7 contenedores entre caso 1 y caso 2

Por lo tanto, se puede identificar que la función objetivo en ambos casos permite tanto minimizar la cantidad de contenedores, como balancearlos.

EJERCICIO 2

La compañía 3F produce electrodomésticos como: aires acondicionados, neveras, etc. La compañía opera 3 plantas de fabricación, dos plantas de ensamble y cuatro bodegas regionales. La demanda tiene una estacionalidad leve y además ha estado **aumentando a** una tasa del 5% al 10% anual durante los últimos cinco años, además se espera que esta tendencia continúe. Usted como director de operaciones quiere desarrollar un sistema **para determinar las metas de los próximos tres meses**.

El producto terminado está compuesto por tres sub-ensambles: SA, SB y SC, Cada unidad de producto terminado requiere un SA, un SB y dos SC. Con base en los equipos disponibles en cada planta, los sub-ensambles SA y SB se pueden fabricar en cualquiera de ellas, mientras que el sub-ensamble SC solo puede fabricarse en la planta 3. **Un sub-ensamble SA se toma tres horas máquina, un subensamble SB 4.5 y un subensamble SC 2.0**. Basándonos en los turnos actuales se cuenta con 15.000, 42.000 y 25.000 horas máquina por periodo en cada una de las plantas respectivamente.

Las plantas de ensamble tienen el mismo costo de producción (\$50) por unidad y **se necesitan 2 horas hombre para ensamblar el producto final**. La capacidad de las plantas es 5000 y 6000 horas hombre por periodo. Se puede recurrir a tiempo extra, pero con un 25% sobre el costo de producción. Los subensambles y el producto terminado pueden almacenarse en las plantas que los fabrican para absorber la variabilidad de la demanda en el tiempo. Los costos de mantener inventario son \$1.20, \$0.90 y \$1.50 para los subensambles respectivamente, y \$7.40 para el producto terminado.

Tabla 2. La demanda se muestra en las siguientes tablas:

Periodo	Demanda por región			
	Región 1	Región 2	Región 3	Región 4
1	1000	1500	800	2000
2	1200	1500	800	2500
3	1350	1750	1000	3000

Tabla 3. Los costos de transporte de las plantas de sub-ensambles a las plantas de ensamble

Desde la planta de sub-ensambles	Costos de transporte	
	Planta de ensamble 1	Planta de ensamble 2
1	\$1.80	\$2.20
2	\$2.90	\$0.60
3	\$1.50	\$2.25

Tabla 4

Planta de ensamble	Costo de transporte de producto terminado			
	Región 1	Región 2	Región 3	Región 4
1	\$1.10	\$2.15	\$5.40	\$6.10
2	\$7.15	\$6.70	\$4.50	\$2.15

Cree un modelo de optimización para realizar la planeación de producción-distribución de 3F (Pista: si necesita inspiración revise el ejemplo de Planeación de una cadena de suministro, pág. 104)

Tabla 5. Horas máquina disponible en las plantas de sub- ensambles

Planta de sub-ensambles	Horas máquina disponible en las plantas de sub-ensambles
F1	15000
F2	42000
F3	25000

Tabla 6. Horas hombre disponibles en las plantas de ensamblaje

Planta de ensamblaje 1	Planta de ensamblaje 2
5000	6000

Tabla 7. Costo de almacenamiento en inventario por unidad de subensamblable

Tipo de sub-ensambles	Costo de mantener inventario por unidad para el subensamblable
SA	1.20
SB	0.90
SC	1.50

Tabla 8. Horas de producción requeridas para fabricar un sub-ensamblable

Tipo de sub-ensambles	Horas de producción requeridas para fabricar un sub-ensamblable
SA	3
SB	4.5
SC	2

VERBALIZACIÓN

Para:

Minimizar el costo total asociado con la producción, ensamblaje y distribución de productos terminados.

Decidir:

La cantidad de sub-ensambles que se van a fabricar en las plantas de fabricación y que se van a ensamblar en las plantas de ensamble para distribuir a las bodegas regionales en cada periodo de tiempo. Adicionalmente, el inventario de cada una de las plantas tanto de sub-ensambles como de productos terminados.

Cumpliendo:

- La demanda de producto terminado debe ser completada en cada región y periodo de planificación
- La cantidad de sub-ensambles producidos en cada planta de fabricación no puede exceder la capacidad de horas máquina disponible por cada periodo
- La cantidad de producto terminado ensamblado en cada planta de ensamble no puede exceder la capacidad de horas hombre disponible a menos de si se requiere tiempo extra

- La cantidad de producto terminado enviado desde cada planta de ensamble a cada región no puede exceder la cantidad disponible para su envío
- Las cantidades de sub-ensambles y productos terminado deben ser no negativas

DESCRIPCIÓN DE LOS COMPONENTES

Conjuntos:

Conjunto de plantas de fabricación $F = \{f1, f2, f3\}$

Conjunto de plantas de ensamble $E = \{e1, e2\}$

Conjunto de bodegas regionales $R = \{r1, r2, r3, r4\}$

Conjunto de períodos de planificación $T = \{1, 2, 3\}$

Conjunto de subensambles $S = \{SA, SB, SC\}$

Parámetros

- $d_{t,r}$: Demanda por región $r \in R$ en cada periodo $t \in T$ (Ver tabla 2)
- cfe_{fe} : Costo de transporte desde la planta de sub-ensambles $f \in F$ a la planta de ensamble $e \in E$ (ver Tabla 3)
- cer_{er} : Costo de transporte desde la planta de ensamble $e \in E$ a la región $r \in R$ (ver Tabla 4)
- hft_f : Horas máquina disponible en la planta $f \in F$ de sub-ensambles (Tabla 5)
- $hmax_e$: Horas hombre disponibles en la planta de ensamblaje $e \in E$ (ver Tabla 6)
- cpt : Costo de producción por unidad de producto terminado.
- cex : Costo adicional por hora hombre en tiempo extra en cada planta de ensamble $e \in E$ $(50 \cdot (1.25))[\$h]$
- m_s : Costo de mantener inventario por unidad para el sub-ensambles $s \in S$ (Ver Tabla 7)
- mp : Costo de mantener inventario por unidad para el producto terminado
- req_s : Horas de producción requeridas para fabricar un sub-ensambles $s \in S$ (Ver Tabla 8)
- $inise$: Inventario inicial para los sub-ensambles
- $inipt$: Inventario inicial para los productos terminados

Variables de decisión

Cantidad Producida

- $X_{f,t,s}$: Cantidad de sub-ensambles $s \in S$ se fabricado en la planta $f \in F$ durante el periodo $t \in T$.
- $Y_{e,t}$: Cantidad de producto terminado ensamblado en la planta de ensamble $e \in E$ durante el periodo $t \in T$.
- $U_{e,t}$: La cantidad de horas extra en la planta de ensamble $e \in E$ durante el tiempo $t \in T$
- $J_{e,t}$: La cantidad de horas totales en la planta de ensamble $e \in E$ durante el tiempo $t \in T$

Cantidad Transportada

- $W_{s,f,e,t}$: Cantidad de sub-ensambles $s \in S$ enviado desde la planta de $f \in F$ a la planta de ensamble $e \in E$ durante el período $t \in T$.
- $Z_{e,r,t}$: Cantidad de producto terminado enviado desde la planta $e \in E$ a la región $r \in R$ durante el periodo $t \in T$.

Cantidad en Inventario

- $P_{s,f,t}$: Cantidad total de sub-ensambles $s \in S$ almacenado en la planta de sub-ensambles $f \in F$ en el periodo t .
- $Q_{e,t}$: Cantidad total de producto terminado almacenado en la planta de ensamble $e \in E$ en el periodo t .

FORMULACIÓN ABSTRACTA

Función Objetivo

Minimizar

$$\begin{aligned}
 & \sum_{e \in E} \sum_{t \in T} c_{pt} Y_{e,t} + \sum_{e \in E} \sum_{t \in T} c_{ex_e} U_{e,t} + \sum_{f \in F} \sum_{e \in E} \sum_{s \in S} \sum_{t \in T} c_{fe_{f,e}} W_{s,f,e,t} + \sum_{e \in E} \sum_{r \in R} \sum_{t \in T} c_{er_{e,r}} Z_{e,r,t} \\
 & + \sum_{s \in S} \sum_{f \in F} \sum_{t \in T} m_s P_{s,f,t} + \sum_{e \in E} \sum_{t \in T} m_p Q_{e,t}
 \end{aligned}$$

Tenga en cuenta que cada uno de estos términos hace referencia a:

Costos de producción

- Suma de los costos de producción del producto terminado ensamblado en las plantas de ensamble [\$]
- Suma de los costos de producción de los productos terminado en horas extra en la planta de ensamble [\$] se cancela las horas

Costos de transporte

- Suma de los costos de transporte de los sub-ensambles desde las plantas de fabricación hasta las plantas de ensambles
- Suma de los costos de transporte del producto terminado ensamblado enviado a las regiones

Costos de almacenamiento en inventario

- Suma de los costos de almacenamiento de inventario para los sub-ensambles $s \in S$ almacenado en la planta de sub-ensambles $f \in F$ en todos los periodos de planificación
- Suma de los costos de almacenamiento de inventario para el producto terminado en las plantas de ensambles.

Sujeto a:

1. Arquetipo de demanda:

Demanda satisfecha para los productos terminados para cada región y periodo de planificación tiene que ser igual a la demanda de cada región y periodo de tiempo.

$$\sum_{e \in E} Z_{e,r,t} = d_{t,r} \quad \forall r \in R, \forall t \in T$$

2. Capacidad de horas de producción de sub-ensambles en las plantas de fabricación - Arquetipo lógico

No todos los productos se pueden hacer todas las plantas, por tanto, se define el parámetro $A_{f,s}$ que diga si se puede hacer o no.

$$\sum_{s \in S} A_{f,s} * req_s * X_{f,t,s} \leq hft_f \quad \forall f \in F, \forall t \in T$$
$$A_{f,s} \begin{cases} 0 & \text{Si } f \text{ es } f1 \text{ o } f2 \text{ y } s = SC \\ 1 & \text{e.o.c} \end{cases}$$

3. Capacidad de horas hombre disponible en plantas de ensamblaje de productos terminados

$$2Y_{e,t} \leq hmax_e + U_{e,t} \quad \forall e \in E, \forall t \in T$$

4. Ecuación de balance de flujo terminado desde las plantas de ensamble a las regiones

$$X_{f,t,s} \leq \sum_{e \in E} W_{s,f,e,t} \quad \text{para } f = f1, \dots, f3; \text{ para } t = 1, \dots, 3; \text{ para } e = e1, e2$$

5. Ecuación de balance de inventario de los sub-ensambles en cada planta de fabricación en cada periodo

$$P_{s,f,t} = P_{s,f,t-1} + X_{f,s,t} - \sum_{e \in E} W_{s,f,e,t} \quad \forall f \in F, \text{ para } t = 1, \dots, 3, \forall s \in S$$
$$P_{s,f,0} = inise$$

6. Ecuación de balance de inventario de producto terminado en cada planta de ensamble en cada periodo

$$Q_{e,0} = inipt$$

$$Q_{e,t} = Q_{e,t-1} + Y_{e,t} - \sum_{r \in R} Z_{e,r,t} \quad \forall e \in E, \text{ para } t = 1, \dots, 3$$

7. Restricción para generar los suficientes subensambles para producir producto terminado, enviado desde la planta de subensambles $f \in F$ a la planta de ensamble $s \in S$.
Contemplando que puede existir la posibilidad de que sub-ensambles se produzcan y sean almacenados.

$$Y_{e,t} \leq \sum_{f \in F} W_{SA,f,e,t} + \sum_{f \in F} W_{SB,f,e,t} + 2W_{SC,3,e,t} \quad \forall e \in E, \text{ para } t = 1, \dots, 3$$

DOMINIO DE LAS VARIABLES DE DECISIÓN:

Producción	Transporte	Inventario
$X_{f,t,s} \geq 0$		
$Y_{e,t} \geq 0$	$W_{s,f,e,t} \geq 0$	$P_{s,f,t} \geq 0$
$U_{e,t} \geq 0$	$Z_{e,r,t} \geq 0$	$Q_{e,t} \geq 0$

IMPLEMENTACIÓN COMPUTACIONAL

De acuerdo con los datos proporcionados en la Tabla 2- Tabla 8 se hace la implementación en AMPL y se obtienen los siguientes resultados para cada una de las variables de decisión.

Para el modelo, se tuvieron que flexibilizar algunas restricciones para que el modelo pudiera calcular sobre todos los periodos. A continuación, se presenta los criterios empleados para modelar.

- La ecuación de demanda tiene que ser con el signo = porque si ponemos mayor o igual el modelo no almacena nada en inventario, sino que envía a todas las regiones para evitar los costos asociados a almacenamiento.
- La ecuación de capacidad de horas de producción en las plantas de fabricación también se modelo con el signo =, lo que implica que las horas asociadas a la producción de cantidad de productos de sub-ensambles va a corresponder a la capacidad que se tenga de las horas máquina disponible.
- La ecuación de balance de flujo se seleccionó que la cantidad de sub-ensambles transportados pueden ser menor o igual a la cantidad de sub-ensambles producidos, ya que en las plantas de fabricación puede que también se almacene producto, no necesariamente implica transportar toda la materia prima.
- La ecuación que implica las cantidades de cada subensamblé para generar un producto terminado se tomó como menores o iguales ya que no necesariamente todo producto que se envíe a la planta de ensamble va a ser para producto terminado sino, que puede representar sub-ensambles que se almacenen en este punto.

A continuación, se presentan las cantidades de producto producido, transportado y almacenado.

PRODUCCIÓN

1. $X_{f,t,s}$: Cantidad de sub-ensambles $s \in S$ se fabricado en la planta $f \in F$ durante el periodo $t \in T$.

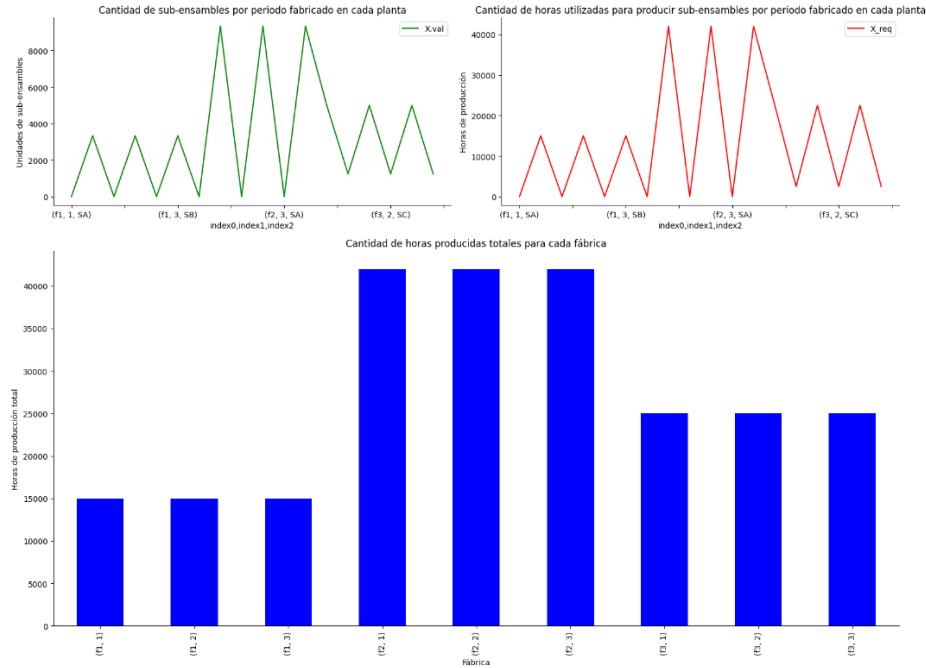


Fig 3. Producción de sub-ensambles en las plantas de fabricación

$X_{f,t,s}$: Cantidad de sub-ensambles $s \in S$ se fabricado en la planta $f \in F$ durante el periodo $t \in T$.

			X.val	X*req
index0	index1	index2		
f1	1	SA	2	6.0
		SB	3332	14994.0
	2	SA	2	6.0
		SB	3332	14994.0
	3	SA	2	6.0
		SB	3332	14994.0
f2	1	SA	2	6.0
		SB	9332	41994.0
	2	SA	2	6.0
		SB	9332	41994.0
	3	SA	2	6.0
		SB	9332	41994.0
f3	1	SB	5000	22500.0
		SC	1250	2500.0
	2	SB	5000	22500.0
		SC	1250	2500.0
	3	SB	5000	22500.0
		SC	1250	2500.0

2. $Y_{e,t}$: Cantidad de producto terminado ensamblado en la planta de ensamble $e \in E$ durante el periodo $t \in T$.

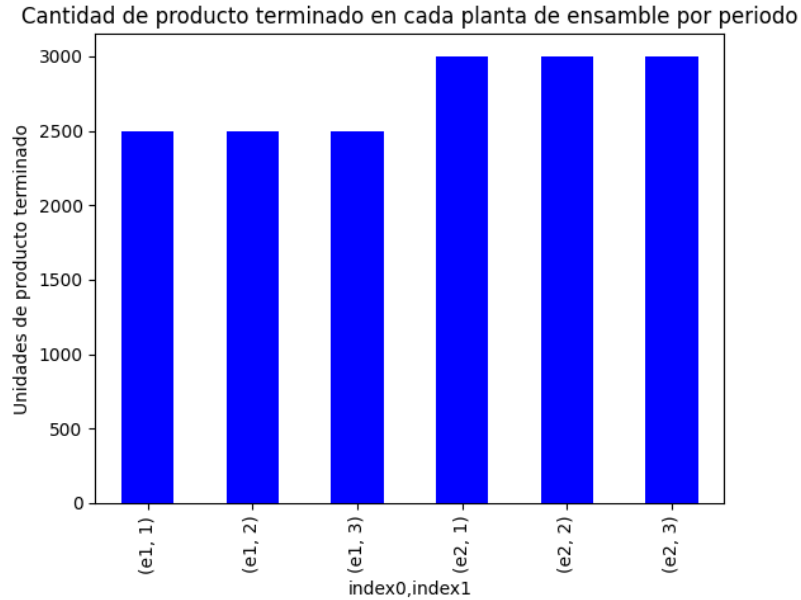


Fig 4. Producción de producto terminado en las plantas de ensambles

$Y_{e,t}$: Cantidad de producto terminado ensamblado en la planta de ensamble $e \in E$ durante el periodo $t \in T$.

		Y.val
index0	index1	
e1	1	2500
	2	2500
	3	2500
e2	1	3000
	2	3000
	3	3000

3. $U_{e,t}$:La cantidad de horas extra en la planta de ensamble $e \in E$ durante el tiempo $t \in T$
No se requieren horas extra para producir

No se utiliza horas extras, porque el modelo solo está produciendo la cantidad máxima de productos terminados según la capacidad. El selecciona mejor pagar por almacenamiento, que pagar por horas extras.

TRANSPORTE

1. $W_{s,f,e,t}$: Cantidad de sub-ensambles $s \in S$ enviado desde la planta de $f \in F$ a la planta de ensamble $e \in E$ durante el período $t \in T$.

$W_{s,f,e,t}$: Cantidad de sub-ensambles $s \in S$ enviado desde la planta de $f \in F$ a la planta de ensamble $e \in E$ durante el período $t \in T$.

				W.val
index0	index1	index2	index3	
SA	f2	e2	1	2
			2	2
			3	2
SB	f2	e2	1	9332
			2	2998
			3	9332
SC	f3	e1	1	1250
			2	1250
			3	1250

Cantidad de sub-ensambles transportados desde la fabrica a la planta de ensamble

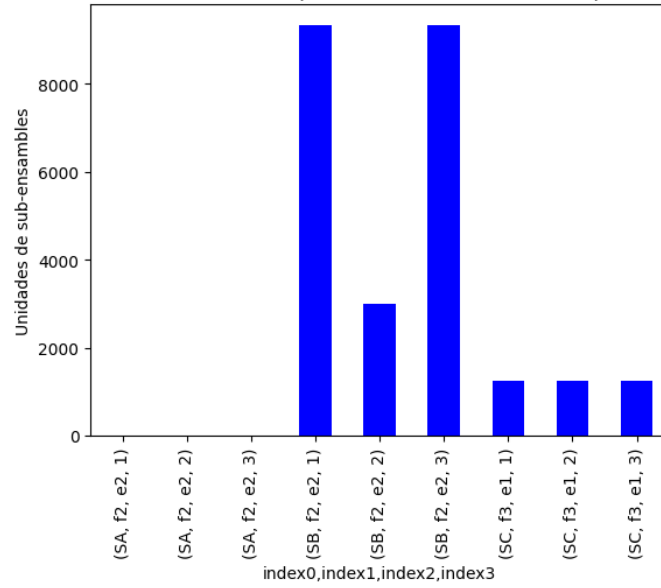


Fig 5. Cantidad de sub-ensambles transportado desde las fábricas a las plantas de ensambles

2. $Z_{e,r,t}$: Cantidad de producto terminado enviado desde la planta $e \in E$ a la región $r \in R$ durante el periodo $t \in T$.

Cantidad de producto terminado transportados desde la planta de ensamble a la región

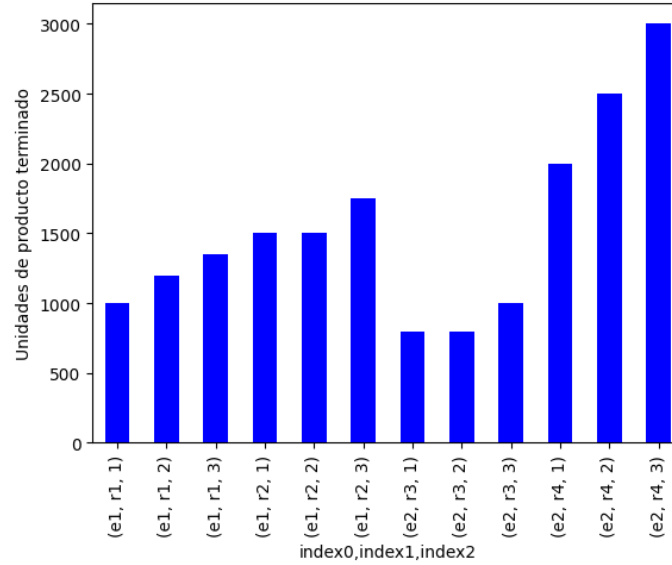


Fig 6. Cantidad de producto terminado transportado desde las plantas de ensambles a las regiones

$Z_{e,r,t}$: Cantidad de producto terminado enviado desde la planta $e \in E$ a la región $r \in R$ durante el periodo $t \in T$.

index0	index1	index2	Z.val
e1	r1	1	1000
		2	1200
		3	1350
	r2	1	1500
		2	1500
		3	1750
e2	r3	1	800
		2	800
		3	1000
	r4	1	2000
		2	2500
		3	3000

INVENTARIO

1. $P_{s,f,t}$: Cantidad total de sub-ensambles $s \in S$ almacenado en la planta de sub-ensambles $f \in F$ en el periodo t .

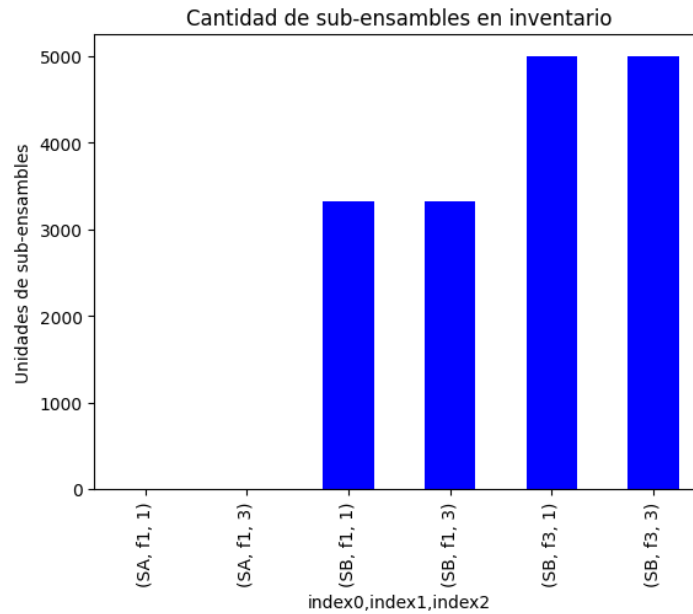


Fig 7. Cantidad de sub-ensambles en inventario en las fábricas $f \in F$

$P_{s,f,t}$: Cantidad total de sub-ensambles $s \in S$ almacenado en la planta de sub-ensambles $f \in F$ en el periodo t .

index0	index1	index2	P.val
SA	f1	1	2
		3	2
SB	f1	1	3332
		3	3332
	f3	1	5000
		3	5000

2. $Q_{e,t}$: Cantidad total de producto terminado almacenado en la planta de ensamble $e \in E$ en el periodo t .

$Q_{e,t}$: Cantidad total de producto terminado almacenado en la planta de ensamble $e \in E$ en el periodo t .

index0	index1	Q.val
e1	2	600
e2	1	200
	2	1000

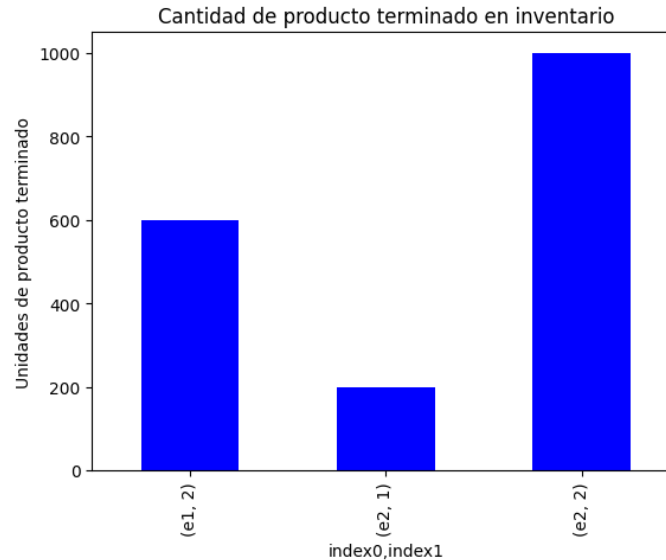


Fig 8. Cantidad de producto terminado en inventario en plantas de ensamble

EJERCICIO 3

El Instituto de Cancerología de una prestigiosa clínica colombiana le ha contratado como consultor para que desarrolle un sistema de apoyo a las decisiones con el cual los médicos puedan diseñar los tratamientos de radioterapia de sus pacientes. “La Radioterapia es un tipo de tratamiento oncológico que utiliza las radiaciones para eliminar las células tumorales, (generalmente cancerosas), en la parte del organismo donde se apliquen. La radiación utilizada puede ser de rayos gamma, rayos X o electrones. La radioterapia actúa sobre el tumor, destruyendo las células malignas, para impedir que crezcan y se reproduzcan. En este tipo de tratamiento, los pacientes acuden diariamente de forma ambulatoria por un período de tiempo variable, dependiendo de la enfermedad que se esté tratando.”¹

Para eliminar un tumor es necesario irradiar todas sus partes procurando no afectar tejido sano (en color blanco en la Figura 2), sin embargo, algunas veces es inevitable. El tratamiento con radioterapia es costoso, tiene una alta demanda y es incómodo para los pacientes, lo cual hace atractivos los tratamientos que toman poco tiempo.

En este caso, el equipo utilizado permite hacer dos tipos diferentes de irradiaciones, la primera (Figura 1-T1) tiene un rayo concentrado de cubrimiento pequeño mientras que la segunda (Figura 1-T2) es capaz de irradiar áreas mayores. La precisión de una irradiación T1 hace que su preparación y ejecución tome el doble del tiempo que para una irradiación T2. Asuma que las irradiaciones T2 toman una unidad de tiempo.

Cuando se planea el tratamiento es necesario que los médicos tengan varias alternativas para escoger, analizando la cantidad de tejido sano irradiado y la duración del tratamiento.

¹ Adaptado de: <http://es.wikipedia.org/wiki/Radioterapia>



Figura 1. Tipos de irradiación

Para probar sus prototipos del sistema los médicos le han entregado la imagen de un tumor bastante raro y difícil de tratar (Figura 2), para el cual usted debe diseñar tratamientos que minimicen el tejido sano irradiado. En particular se quieren tratamientos que duren como máximo 15 o 20 unidades de tiempo.

Usted ha decidido abordar esta situación utilizando sus conocimientos de optimización. Para lo cual usted deberá: formular un modelo de optimización general que describa la situación, e implementar dicho modelo en un software de optimización y probar su método utilizando el tumor de la Figura 2.

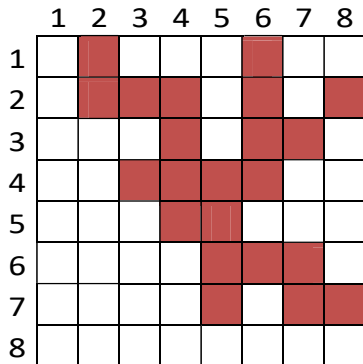


Figura 2. Imagen del tumor de prueba.

a_c	$tipo2_c$	a_c	$tipo2_c$	a_c	$tipo2_c$	a_c	$tipo2_c$	a_c	$tipo2_c$
2	1,2	14	5,6,13,14	27	18,19,26,27	37	28,29,36,37	55	46,47,54,55
6	5,6	16	7,15	28	19,20,27,28	45	36,37,44,45	56	47,55
10	1,2,9,10	20	11,12,19,20	29	20,21,28,29	46	37,38,45,46		
11	2,3,10,11	22	13,14,21,22	30	21,22,29,30	47	38,39,46,47		
12	3,4,11,12	23	14,15,22,23	36	27,28,35,36	53	44,45,52,53		

Conteo de celdas sanas irradiadas con t1

C	Sana	C	Sana	C	Sana	C	Sana	C	Sana	C	Sana	C	Sana	C	Sana
1	1	2	0	3	1	4	1	5	1	6	0	7	1	8	1
9	1	10	0	11	0	12	0	13	1	14	0	15	1	16	0
17	1	18	1	19	1	20	0	21	1	22	0	23	0	24	1
25	1	26	1	27	0	28	0	29	0	30	0	31	1	32	1
33	1	34	1	35	1	36	0	37	0	38	1	39	1	40	1
41	1	42	1	43	1	44	1	45	0	46	0	47	0	48	1
49	1	50	1	51	1	52	1	53	0	54	1	55	0	56	0
57	1	58	1	59	1	60	1	61	1	62	1	63	1	64	1

Conteo de celdas sanas irradiadas con t2

C	Sana	C	Sana	C	Sana	C	Sana	C	Sana	C	Sana	C	Sana	C	Sana
1	2	2	1	3	2	4	3	5	2	6	2	7	3	8	0
9	3	10	2	11	1	12	2	13	2	14	1	15	2	16	0
17	4	18	3	19	1	20	1	21	1	22	1	23	3	24	0
25	4	26	3	27	1	28	0	29	1	30	3	31	4	32	0
33	4	34	4	35	3	36	1	37	1	38	2	39	3	40	0
41	4	42	4	43	4	44	2	45	1	46	1	47	1	48	0
49	4	50	4	51	4	52	3	53	3	54	3	55	2	56	0
57	0	58	0	59	0	60	0	61	0	62	0	63	0	64	0

VERBALIZACIÓN

Para: Minimizar la cantidad de tejido sano irradiado

Decidir: Que irradiación se utiliza de acuerdo con la región afectada

Cumpliendo:

- Las unidades de tiempo máximo para irradiar

DESCRIPCIÓN DE LOS COMPONENTES

Conjuntos:

Tipos de irradiación: $T = \{t1, t2\}$

Celdas: $C = \{1,2,\dots,64\}$

Parámetros:

- u_t : Unidad de tiempo del tipo de irradiación $t \in T$.
 - t1:2
 - t2:1

- u_{max} : Unidades de tiempo máximo de irradiación.
 - $u_{max}=15$
 - $u_{max}=20$
- a_c : Presencia o ausencia de área afectada en la celda $c \in C$
 - Presencia =1
 - Ausencia =0.
- $tipo2_c$ Diccionario de celdas que irradiando con el disparo $t2 \in T$ cubren la celda $c \in C$ (Tabla 9)
- $sano_{t,c}$: Diccionario de conteo de tejido sano para $t \in T$ en la celda $c \in C$ (Tabla 10)

Variables de Decisión:

$X_{t,c}$: Variable binaria que indica si se selecciona el tipo de irradiación $t \in T$ en la celda $c \in C$

$$X_{t,c} \begin{cases} 1 & \text{si se irradia con el tipo de radiación } t \in T \text{ la celda } c \in C \\ 0 & \text{no se irradia el tejido} \end{cases}$$

Función Objetivo:

Minimizar

$$Z = \sum_{t \in T} \sum_{c \in C} X_{t,c} sano_{t,c}$$

Sujeto a:

1. Cada celda del tumor debe irradiarse al menos una vez por un tipo de irradiación.

$$X_{t1,c} + \sum_{cc \in tipo2_c} X_{t2,c} \geq 1 \quad \forall c \in C : a_c = 1 \text{ (Presencia)}$$

2. El número total de unidades de tiempo utilizadas por todas las irradiaciones seleccionadas no puede exceder el número máximo de unidades de tiempo permitidas.

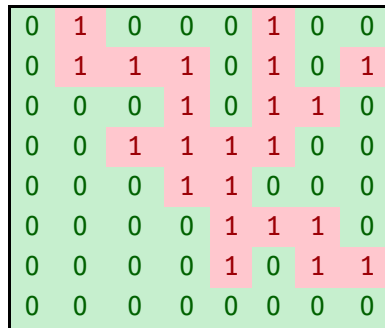
$$\sum_{t \in T} u_t * X_{t,c} \leq u_{max}$$

DOMINIO DE LAS VARIABLES DE DECISIÓN

$$X_{t,c} \in \{0,1\} \quad \forall t \in T, \forall c \in C$$

IMPLEMENTACIÓN COMPUTACIONAL

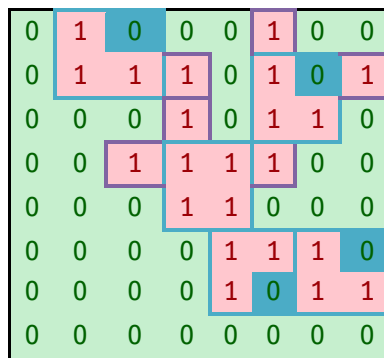
A continuación, se presenta la solución de la implementación computacional realizada a partir de NEOS. En la siguiente figura se encuentra el Área a irradiar, donde las celdas 1 es el área que afectada por tumor (rojo) y la celda 0 es el área sana (verde).



Para visualizar las celdas sanas irradiadas se utilizó el **color azul para rellenar la celda**, y para diferenciar el tipo de irradiación t1 o t2, utilizamos el borde **azul para t2** y el borde **morado para t1**.

En primera instancia vamos a considerar el caso en donde u_{max} sea igual a 20 unidades de tiempo se tiene la siguiente solución:

```
Solución óptima encontrada.  
Número de celdas sanas irradiadas 4.0  
Irradiación seleccionada:  
Irradiación t1 en la celda 6  
Irradiación t1 en la celda 12  
Irradiación t1 en la celda 16  
Irradiación t1 en la celda 20  
Irradiación t1 en la celda 27  
Irradiación t1 en la celda 30  
Irradiación t2 en la celda 2  
Irradiación t2 en la celda 14  
Irradiación t2 en la celda 28  
Irradiación t2 en la celda 45  
Irradiación t2 en la celda 47
```



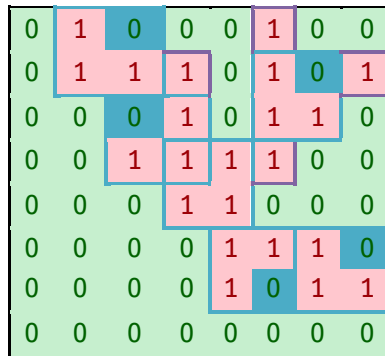
Por el contrario, cuando consideramos el caso en donde umax con 15 unidades de tiempo se tiene la siguiente solución:

Solución óptima encontrada.

Número de celdas sanas irradiadas 5.0

Irradiación seleccionada:

Irradiación t1 en la celda 6
 Irradiación t1 en la celda 12
 Irradiación t1 en la celda 16
 Irradiación t1 en la celda 30
 Irradiación t2 en la celda 2
 Irradiación t2 en la celda 14
 Irradiación t2 en la celda 19
 Irradiación t2 en la celda 28
 Irradiación t2 en la celda 45
 Irradiación t2 en la celda 47



Se observa que, al disminuir el tiempo de irradiación, esto también tiene limitaciones en cuanto al área de tejido sano afectado. Por tanto, el factor tiempo en este problema es circunstancial para poder irradiar menos área. Se identificó que con un tiempo de irradiación de 36 unidades no se afecta ningún tejido sano. A continuación, se presenta la solución para no irradiar tejido sano.

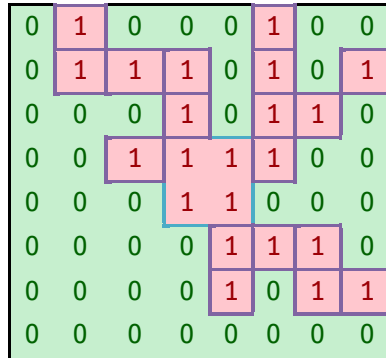
Solución óptima encontrada.

Número de celdas sanas irradiadas 0.0

Irradiación seleccionada:

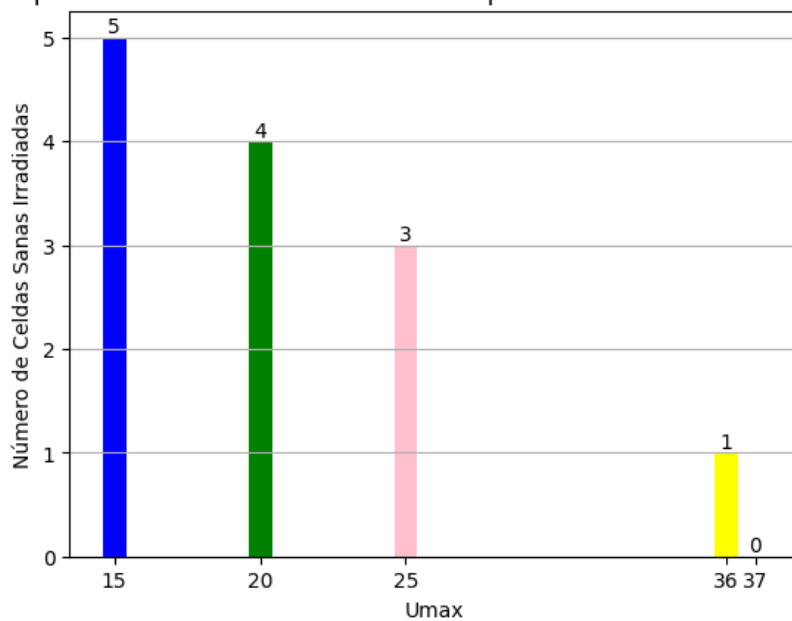
Irradiación t1 en la celda 2
 Irradiación t1 en la celda 6
 Irradiación t1 en la celda 10
 Irradiación t1 en la celda 11
 Irradiación t1 en la celda 12
 Irradiación t1 en la celda 14
 Irradiación t1 en la celda 16
 Irradiación t1 en la celda 20
 Irradiación t1 en la celda 22
 Irradiación t1 en la celda 23
 Irradiación t1 en la celda 27
 Irradiación t1 en la celda 30
 Irradiación t1 en la celda 45
 Irradiación t1 en la celda 46
 Irradiación t1 en la celda 47

Irradiación t1 en la celda 53
 Irradiación t1 en la celda 55
 Irradiación t1 en la celda 56
 Irradiación t2 en la celda 28



En el siguiente gráfico se presenta la relación que hay entre el valor de cantidad de unidades de tiempo máxima con respecto al número de celdas sanas irradiadas, en donde se comprueba que al tener menor cantidad de tiempo se tiene una mayor cantidad de celdas sanas afectadas.

Comparación de Celdas Sanas Irradiadas para Diferentes Valores de Umax



PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA – PROYECTO

El electroencefalograma (EEG) es una técnica que captura la actividad eléctrica generada por billones de neuronas en el cerebro de forma no invasiva, ofrece una alta resolución temporal y se considera una tecnología atractiva debido a su bajo costo y portabilidad (Fuller et al., 2019; Jadah, 2020; Lee et al., 2020). Además, permite el estudio de la función cerebral y los cambios neurofisiológicos asociados a los procesos neurodegenerativos (Perez-Valero et al., 2022).

Los electrodos dispuestos en el cuero cabelludo se ubican a cierta distancia de la fuente. Su función principal es detectar la actividad combinada de un gran conjunto de neuronas que están activas eléctricamente de manera sincronizada. Los potenciales de acción generados por estas neuronas pueden tener una amplitud significativa, oscilando entre 70 y 110 mV, pero su duración es breve, de aproximadamente 0,3 milisegundos (Rios-Arismendy et al., 2021).

En la actualidad existen diferentes configuraciones de montajes, desde alta a baja densidad. La implementación de menos canales de electrodos en los estudios de EEG ha demostrado la capacidad de detectar y caracterizar patrones de actividad cerebral, sin comprometer la calidad de la señal (Del Percio et al., 2022; Ketola et al., 2022). Sin embargo, en los procesos de adquisición la señal es necesario procesar la información para solo analizar las fuentes neurales y no las fuentes debidas a otros procesos que no son de interés.

El preprocesamiento de las señales de electroencefalografía (EEG) desempeña un papel fundamental en la preparación de los datos para análisis posteriores y la extracción de características relevantes. Una forma de abordar el procesamiento de estas señales es trabajarla por segmentos de tiempo, lo cual se conoce como época. Sin embargo, hay la posibilidad de que algunas épocas de la señal tengan mucho ruido y que a pesar de que se realizó un proceso de filtrado aún no mejore por lo cual se tenga que rechazar.

El problema que se busca abordar desde el área de optimización es poder minimizar el número de épocas malas en cada uno de los electrodos de acuerdo con estrategias y criterios de calidad como lo son las métricas de Correlación, coherencia, máxima desviación y la relación señal ruido (SNR) y la potencia de densidad espectral medida en las diferentes bandas de frecuencia.

En este proyecto, abordaremos el procesamiento de señales EEG a partir de datos ya procesados. Contamos con una base de datos compuesta por 10 señales, capturadas a una frecuencia de muestreo de 1000 Hz. Seleccionaremos ocho electrodos específicos para nuestro estudio: FP1, FP2, C3, C4, O1, O2, P7 y P8. Cada señal registrada por estos electrodos será segmentada en épocas de 5 segundos. Durante este proceso, evaluaremos cada época utilizando diversas métricas de calidad previamente mencionadas. Nuestro análisis permitirá una exploración detallada a nivel de hemisferios cerebrales, lóbulos o de manera individual por sensor. Esta metodología nos facilitará identificar cuáles electrodos presentan mayor frecuencia de épocas contaminadas por ruido, optimizando así el tratamiento y análisis de las señales EEG.

REFERENCIAS

Fuller, J. T., Cronin-Golomb, A., Gatchel, J. R., Norton, D. J., Guzmán-Vélez, E., Jacobs, H. I.

- L., Hanseeuw, B., Pardilla-Delgado, E., Artola, A., Baena, A., Bocanegra, Y., Kosik, K. S., Chen, K., Tariot, P. N., Johnson, K., Sperling, R. A., Reiman, E. M., Lopera, F., & Quiroz, Y. T. (2019). Biological and Cognitive Markers of Presenilin1 E280A Autosomal Dominant Alzheimer's Disease: A Comprehensive Review of the Colombian Kindred. *The Journal of Prevention of Alzheimer's Disease*, 6(2), 112–120. <https://doi.org/10.14283/JPAD.2019.6>
- Jadah, R. H. S. (2020). Basic Electroencephalogram and Its Common Clinical Applications in Children. *Electroencephalography - From Basic Research to Clinical Applications*. <https://doi.org/10.5772/INTECHOPEN.94247>
- Lee, S. S., Lee, K., & Kang, G. (2020). EEG Artifact Removal by Bayesian Deep Learning ICA. *Proceedings of the Annual International Conference of the IEEE Engineering in Medicine and Biology Society, EMBS, 2020-July*, 932–935. <https://doi.org/10.1109/EMBC44109.2020.9175785>
- Perez-Valero, E., Lopez-Gordo, M. Á., Gutiérrez, C. M., Carrera-Muñoz, I., & Vílchez-Carrillo, R. M. (2022). A self-driven approach for multi-class discrimination in Alzheimer's disease based on wearable EEG. *Computer Methods and Programs in Biomedicine*, 220, 106841. <https://doi.org/10.1016/j.cmpb.2022.106841>
- Rios-Arismendy, S., Ochoa-Gómez, J. F., & Serna-Rojas, C. (2021). Revisión de electroencefalografía portable y su aplicabilidad en neurociencias. *Revista Politécnica*, 17(34), 131–152. <https://doi.org/10.33571/RPOLITEC.V17N34A9>