Actividad 9: Aproximación al cálculo del periodo del péndulo

Luisa Fernanda Orci Fernández

1 de Mayo de 2016

Descripción de la actividad

Para esta actividad se nos pidió demostrar utilizando Maxima que el periodo del péndulo se puede expresar de la siguiente manera:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}(1+\frac{1}{16}\theta_0^2+\frac{11}{3072}\theta_0^4+\frac{173}{737280}\theta_0^6+\frac{22931}{1321205760}\theta_0^8+\frac{1319183}{951268147200}\theta_0^10+...)$$

, utilizando como referencia la integral que resolvimos para la actividad anterior, así como también reproducir una gráfica en Python que se asemejara a la propuesta por el artículo de Wikipedia, la cual representa los errores relativos de los periodos.
A continuación se presentan los códigos utilizados para cada una de estas actividades, así como los resultados obtenidos.

Procedimiento

Demostración de la expresión del periodo

Utilizamos Maxima como herramienta para reducir la expresión y seguimos una serie de pasos que a continuación se presentan:

- Comenzamos por definir una función que depende de un parámetro k:

```
/* Funcion L que depende de un parametro k */

L1(k) := 1/sqrt(1-(k*sin(u))**2);
```

$$\mathrm{L1}\left(k\right) := \frac{1}{\sqrt{1-\left(k\,\sin\left(u\right)\right)^{2}}}$$

- Seguimos con una expansión de Taylor...

```
/* Desarrollo por Taylor*/

taylor(1/sqrt(1-k^2*sin(u)^2),u,0,8);
```

$$(\,\%o2)/T/1+\frac{k^{2}\,u^{2}}{2}+\frac{\left(9\,k^{4}-4\,k^{2}\right)\,u^{4}}{24}+\frac{\left(225\,k^{6}-180\,k^{4}+16\,k^{2}\right)\,u^{6}}{720}+\frac{\left(11025\,k^{8}-12600\,k^{6}+3024\,k^{4}-64\,k^{2}\right)\,u^{8}}{40320}+...$$

- Seguimos desarrollando la expresión a partir de los siguientes pasos que se incluyen:

- `/* Definimos otra funcion L2*/`

  `define(L2(k), %);`

$$(\,\%o3)/T/\mathrm{L2}\left(k\right) := 1+\frac{k^{2}\,u^{2}}{2}+\frac{\left(9\,k^{4}-4\,k^{2}\right)\,u^{4}}{24}+\frac{\left(225\,k^{6}-180\,k^{4}+16\,k^{2}\right)\,u^{6}}{720}+\frac{\left(11025\,k^{8}-12600\,k^{6}+3024\,k^{4}-64\,k^{2}\right)\,u^{8}}{40320}+...$$

- `/* Seno del angulo theta  */`

  `define(x(%theta), sin(%theta));`

$$(\,\%o13)\mathrm{x}\left(\theta\right) := \sin\left(\theta\right)$$

- /* Integral de L2(k) de cero a 90 grados */

  ```
  expand(integrate(K2(k),u,0,%pi/2));
  ```

  $$(\%o14)\frac{\pi\,\mathrm{K2}\left(k\right)}{2}$$

- /* Sustituimos en la integral anterior el seno de theta */

  ```
  subst(x(%theta/2), k, %);
  ```

  $$(\%o15)\frac{\pi\,\mathrm{K2}\left(\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)}{2}$$

- /* Factorizamos pi/2 */

  ```
  % *2/%pi;
  ```

  $$(\%o16)\mathrm{K2}\left(\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)$$

- /* Definimos ahora una funcion L que depende solo del angulo theta */

  ```
  define(L(%theta),expand(%));
  ```

  $$(\%o26)\mathrm{L}\left(\theta\right) := \mathrm{K2}\left(\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)$$

- /* Definimos la funcion*/

  ```
  define(T(%theta),(2*%pi)*sqrt(l/g)*(F(%theta)));
  ```

  $$(\%o27)\mathrm{T}\left(\theta\right) := 2\,\pi\,\mathrm{K2}\left(\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)\,\sqrt{\frac{l}{g}}$$

Así fue que obtuvimos el desarrollo para llegar a la expresión sugerida.

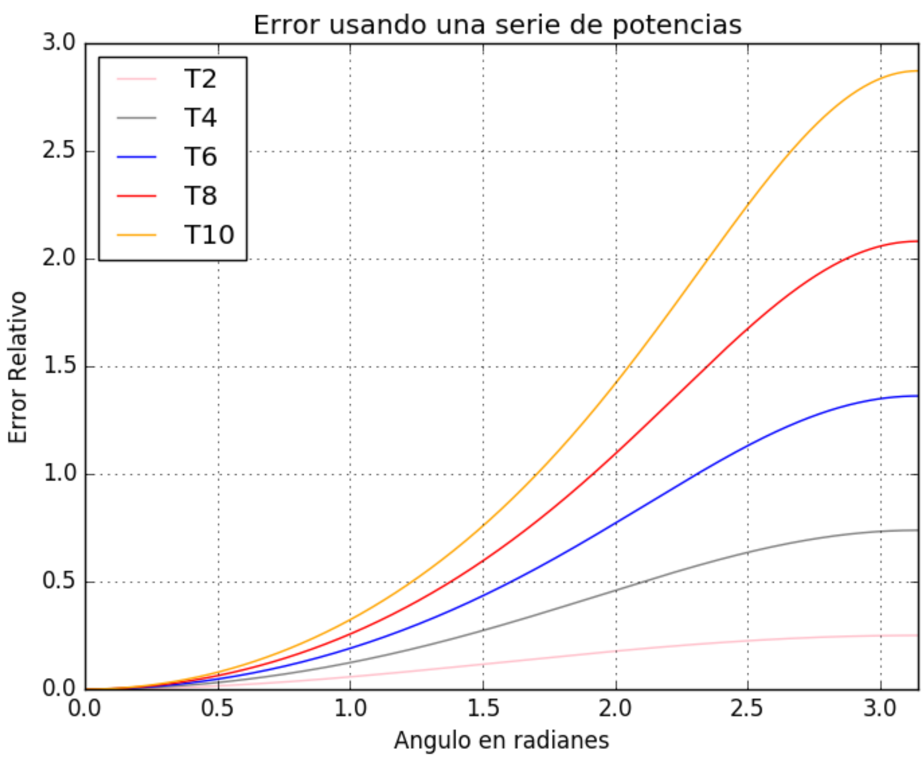
Gráfica de los errores relativos

Para obtener esta gráfica, se utilizó el siguiente código:

```
import numpy as gatito
import math

#PARAMETROS

g = 9.806
l = 1.00
n = 500
radianesagrad = 180.0/gatito.pi
epsilon = 0.001


#DEFINIMOS ALGUNOS VALORES PARA EL ANGULO INICIAL

theta0 = gatito.linspace(epsilon, gatito.pi-epsilon, n)

#ARREGLOS

Integral = [0 for i in range(n)]
Integral0 = [0 for i in range(n)]
periodonnum = [0 for i in range(n)]
sine = [0 for i in range(n)]
ere12 = [0 for i in range(n)]

#PERIODO APROXIMADO TEORICO PARA ANGULOS PEQUE;OS

periodot = 2.0*(gatito.pi)*(gatito.sqrt(l/g))

#CALCULAR UN ERROR CON RESPECTO AL TEORICO PARA UNA SERIE DE TERMINOS L

L = 2
for i in range(0, L):
    for j in range(0,n):
        fac1 = float(math.factorial(2*(i)))
        fac2 = float((2**(i)*math.factorial(i))**2)
```

```
sine[j] = gatito.sin(theta0[j]/2)**(2*(i))
Integral[j] = ((fac1/fac2)**2)*sine[j]
Integral0[j] = Integral0[j] + Integral[j]
periodonnum[j] = 2.0*(gatito.pi)*(gatito.sqrt(l/g)*Integral0[j])
ere12[j] = periodonnum[j]/periodot
```

Basándonos en una expresión propuesta por el profesor en la página del curso.
Al ejecutar dicho código obtuvimos la siguiente gráfica:



Conclusión

Esta actividad se me hizo dificil al principio por la demostración, pero al momento de poderla terminar, se me fue facilitando poco a poco.

Referencias

[1] Matplotlib *Animation example code: double pendulum*, (2016, 20 de Abril). Desde: http://matplotlib.org/examples/animation/double$_pendulum_animated.html$