Usando Gnuplot

Luisa Fernanda Orci Fernandez.

28 de Febrero del 2015

1. Teorema de Taylor

El teorema de Taylor, o mejor conocido como el polinomio de Taylor, nos permite obtener aproximaciones polinómicas de una función, también permite calcular el error obtenido mediante esta estimación. Este teorema recibe su nombre del matematico Brook Taylor, ya que el lo enunció con mas generalidad en 1712, a pesar de que fue descubierto por James Gregory en 1671.

El polinomio de taylor:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f^{(2)}(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f^{(3)}(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + E_n$$

Calcular el error:

$$E_n = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{(n+1)}$$

La forma reducida:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + E_n$$

2. Aproximaciones

Esta actividad consiste en realizar algunas aproximaciones de grado n utilizando el teorema de Taylor, para ello utilizaremos el programa en línea wxMaxima.

2.1. Aproximación para $sin(x)$

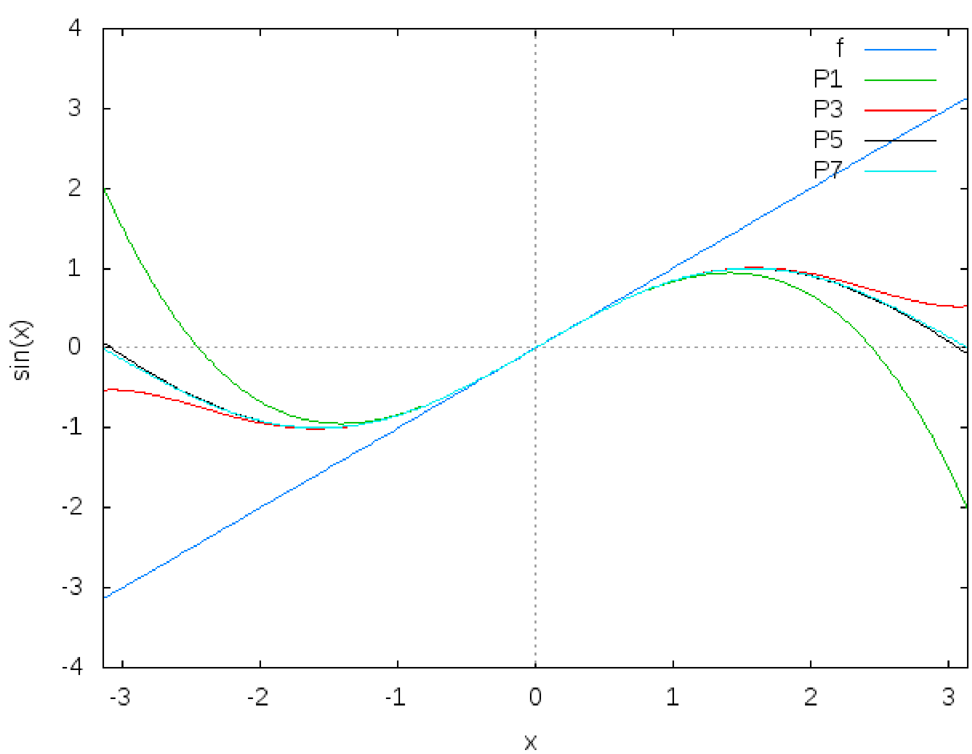
Código:

```
f(x):=sin(x);
P1(x):=taylor(f(x), x, 0, 1);
P3(x):=taylor(f(x), x, 0, 3);
P5(x):=taylor(f(x), x, 0, 5);
P7(x):=taylor(f(x), x, 0, 7);
tex(P1(x));
tex(P3(x));
tex(P5(x));
tex(P7(x));
plot2d ([P1(x), P3(x), P5(x), P7(x), f(x)], [x, -%pi, %pi],
[color, blue, green, red, black, cyan], [legend, "f", "P1", "P3", "P5", "P7"],[axes, true], [xlabel,
[ylabel, "sin(x)"]);
```

Resultados:

1. P1 $= +x + \cdots$
2. P3 $= x - \frac{x^3}{6} + \cdots$
3. P5 $= x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \cdots$
4. P7 $= x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040} + \cdots$

Gráfica:



2.2. Aproximación para $log(1+x)$

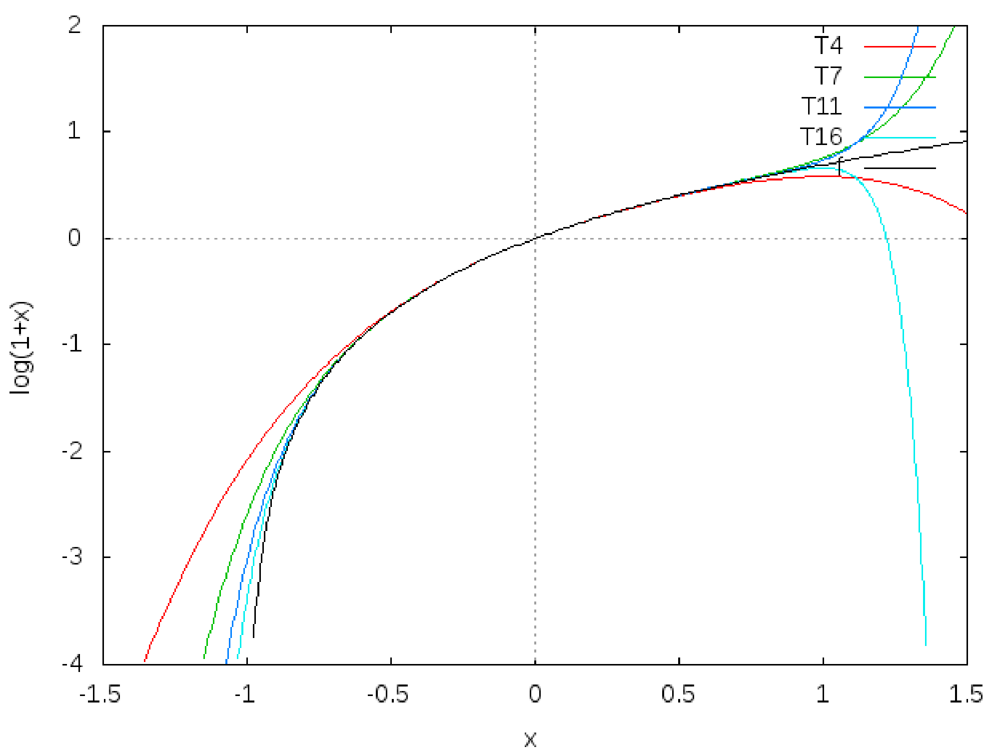
Código:

```
f(x):=log(1+x);
T4(x):=taylor(f(x), x, 0, 4);
T7(x):=taylor(f(x), x, 0, 7);
T11(x):=taylor(f(x), x, 0, 11);
T16(x):=taylor(f(x), x, 0, 16);
tex(T4(x));
tex(T7(x));
tex(T11(x));
tex(T16(x));
plot2d ([T4(x), T7(x), T11(x), T16(x), f(x)], [x, -1.5, 1.5], [y, -4,2],[color, red, green, blue, cya
[legend, "T4", "T7", "T11", "T16", "f"],[axes, true],
[xlabel,"x"], [ylabel, "log(1+x)"]);
```

Resultados:

1. $\mathrm{T4} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots$
2. $\mathrm{T7} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} + \frac{x^7}{7} + \cdots$
3. $\mathrm{T11} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} + \frac{x^7}{7} - \frac{x^8}{8} + \frac{x^9}{9} - \frac{x^{10}}{10} + \frac{x^{11}}{11} + \cdots$
4. $\mathrm{T16} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} + \frac{x^7}{7} - \frac{x^8}{8} + \frac{x^9}{9} - \frac{x^{10}}{10} + \frac{x^{11}}{11} - \frac{x^{12}}{12} + \frac{x^{13}}{13} - \frac{x^{14}}{14} + \frac{x^{15}}{15} - \frac{x^{16}}{16} + \cdots$

Gráfica:



2.3. Aproximación para $log(cos(x))$

Código:

```
f(x):=log(cos(x));
t3(x):=taylor(f(x), x, 0, 3);
t6(x):=taylor(f(x), x, 0, 6);
t9(x):=taylor(f(x), x, 0, 9);
t12(x):=taylor(f(x), x, 0, 12);
tex(t3(x));
tex(t6(x));
tex(t9(x));
tex(t12(x));
plot2d ([f(x), t3(x), t6(x), t9(x), t12(x)], [x, -0.5*%pi, 0.5*%pi], [y, -2,0.5],
[color, green, blue, red, cyan, orange],
[legend, "f", "t3", "t6", "t9", "t12"], [axes, true], [xlabel,"x"], [ylabel, "log(cos(x))"]);
```

Resultados:

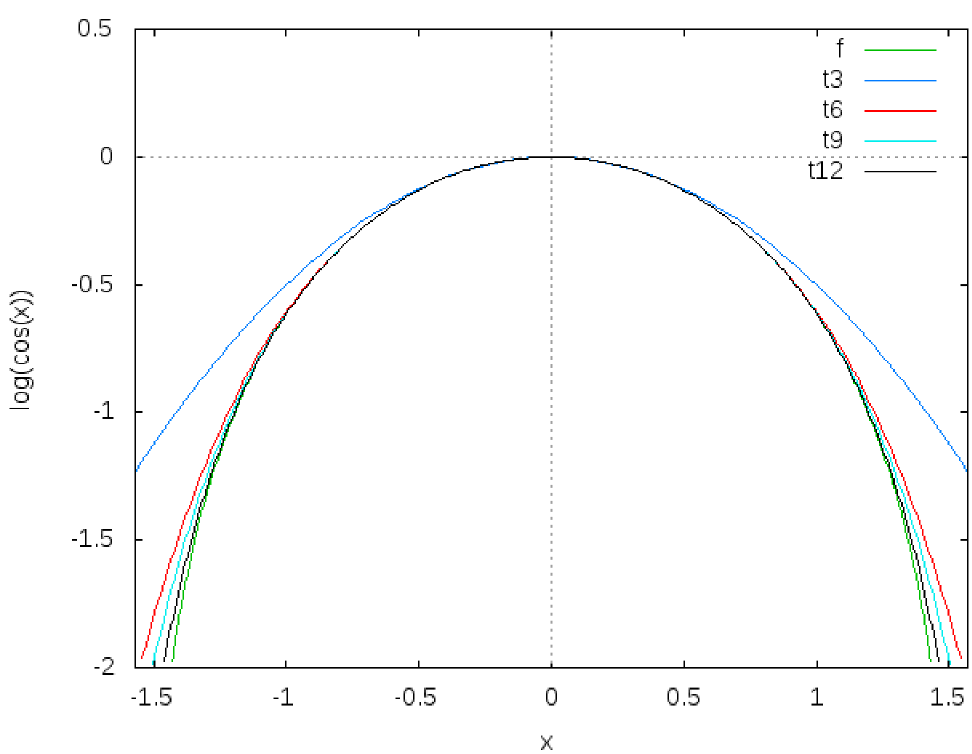
1. $\mathrm{t3} = +\left(-\frac{x^2}{2}\right) + \cdots$

2. $\mathrm{t6} = -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} - \frac{x^6}{45} + \cdots$

3. $\mathrm{t9} = -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} - \frac{x^6}{45} - \frac{17\,x^8}{2520} + \cdots$

4. $\mathrm{t12} = -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} - \frac{x^6}{45} - \frac{17\,x^8}{2520} - \frac{31\,x^{10}}{14175} - \frac{691\,x^{12}}{935550} + \cdots$

Gráfica:



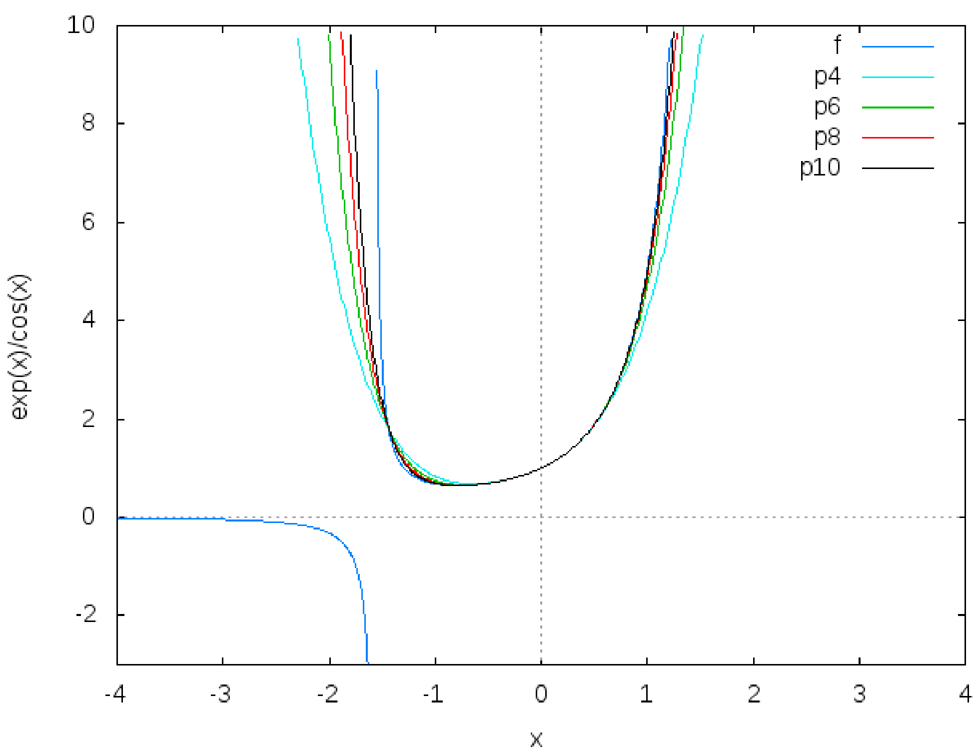
2.4. Aproximación para $\frac{e^x}{cos(x)}$

Código:

```
f(x):=exp(x)/cos(x);
p4(x):=taylor(f(x), x, 0, 4);
p6(x):=taylor(f(x), x, 0, 6);
p8(x):=taylor(f(x), x, 0, 8);
p10(x):=taylor(f(x), x, 0, 10);
tex(p4(x));
tex(p6(x));
tex(p8(x));
tex(p10(x));
plot2d ([f(x), p4(x), p6(x), p8(x), p10(x)], [x, -4, 4], [y, -3,10],
[color, blue, cyan, green, red, orange],
[legend, "f", "p4", "p6", "p8","p10"],
[axes, true], [xlabel,"x"], [ylabel, "exp(x)/cos(x)"]);
```

Resultados:

1. $\mathrm{p4} = 1 + x + x^2 + \frac{2\,x^3}{3} + \frac{x^4}{2} + \cdots$
2. $\mathrm{p6} = 1 + x + x^2 + \frac{2\,x^3}{3} + \frac{x^4}{2} + \frac{3\,x^5}{10} + \frac{19\,x^6}{90} + \cdots$
3. $\mathrm{p8} = 1 + x + x^2 + \frac{2\,x^3}{3} + \frac{x^4}{2} + \frac{3\,x^5}{10} + \frac{19\,x^6}{90} + \frac{13\,x^7}{105} + \frac{31\,x^8}{360} + \cdots$
4. $\mathrm{p10} = 1 + x + x^2 + \frac{2\,x^3}{3} + \frac{x^4}{2} + \frac{3\,x^5}{10} + \frac{19\,x^6}{90} + \frac{13\,x^7}{105} + \frac{31\,x^8}{360} + \frac{163\,x^9}{3240} + \frac{3961\,x^{10}}{113400} + \cdots$



2.5. Aproximación para $(1+x)(\mathrm{e}^x)$

Código:

```
f(x):=(1+x)*exp(x);
g5(x):=taylor(f(x), x, 0, 5);
g8(x):=taylor(f(x), x, 0, 8);
g11(x):=taylor(f(x), x, 0, 11);
g14(x):=taylor(f(x), x, 0, 14);
tex(g5(x));
tex(g8(x));
tex(g11(x));
tex(g14(x));
plot2d ([g5(x), g8(x), g11(x), g14(x), f(x)], [x, -6, 2], [y, -3,6],
[color, red, green, blue, cyan, orange], [legend, "f", "T4", "T7", "T11", "T16"],
[axes, true], [xlabel,"x"], [ylabel, "(1+x)*exp(x)"]);
```

Resultados:

1. $\mathrm{g5} = 1 + 2\,x + \frac{3\,x^2}{2} + \frac{2\,x^3}{3} + \frac{5\,x^4}{24} + \frac{x^5}{20} + \cdots$
2. $\mathrm{g8} = 1 + 2\,x + \frac{3\,x^2}{2} + \frac{2\,x^3}{3} + \frac{5\,x^4}{24} + \frac{x^5}{20} + \frac{7\,x^6}{720} + \frac{x^7}{630} + \frac{x^8}{4480} + \cdots$
3. $\mathrm{g11} = 1 + 2\,x + \frac{3\,x^2}{2} + \frac{2\,x^3}{3} + \frac{5\,x^4}{24} + \frac{x^5}{20} + \frac{7\,x^6}{720} + \frac{x^7}{630} + \frac{x^8}{4480} + \frac{x^9}{36288} + \frac{11\,x^{10}}{3628800} + \frac{x^{11}}{3326400} + \cdots$
4. $\mathrm{g14} = 1 + 2\,x + \frac{3\,x^2}{2} + \frac{2\,x^3}{3} + \frac{5\,x^4}{24} + \frac{x^5}{20} + \frac{7\,x^6}{720} + \frac{x^7}{630} + \frac{x^8}{4480} + \frac{x^9}{36288} + \frac{11\,x^{10}}{3628800} + \frac{x^{11}}{3326400} + \frac{13\,x^{12}}{479001600} + \frac{x^{13}}{444787200} + \frac{x^{14}}{5811886080} + \cdots$

Gráfica: