



UNIVERSIDAD DE
GUANAJUATO

Departamento de Matemáticas

**Proyecto Final
Optimización**

**ROBUST CONJUGATE GRADIENT
METHOD FOR NON-SMOOTH
CONVEX
OPTIMIZATION AND IMAGE
PROCESSING PROBLEMS**

**Juan Carlos Guevara Pérez
Luis Ángel Arredondo Uribe**

Resumen

En este documento se propone un método con el objetivo de mejorar la efectividad y eficiencia para resolver problemas de optimización no suaves relevantes en la práctica. Esta modificación se basa en la técnica de regularización de Moreau-Yosida y produce direcciones de búsqueda que cumplen con la propiedad de descenso suficiente.

Se lleva a cabo un análisis de la convergencia del método propuesto, seguido de pruebas en problemas de ingeniería, como el procesamiento de imágenes, para evaluar su desempeño y utilidad en aplicaciones prácticas.

Contents

1	Gradiente conjugado	2
2	Optimización no suave convexa	3
3	Regularización de Moreau-Yosida	3
4	Gradiente conjugado robusto (Propuesta)	5
5	Aplicación en procesamiento de imágenes	10
6	Pruebas	10

1 Gradiente conjugado

Comencemos recordando el panorama que caracteriza al algoritmo del gradiente conjugado. El método del gradiente conjugado (CG) es una técnica iterativa ampliamente empleada para resolver sistemas lineales y no lineales, así como para minimizar funciones convexas. Es especialmente destacado en el campo de la optimización numérica, donde ha encontrado aplicación en una amplia variedad de contextos, incluyendo el procesamiento de imágenes. El algoritmo CG es reconocido por su eficacia, ya que puede converger hacia una solución en un número relativamente bajo de iteraciones, en comparación con otros métodos iterativos. Además, es capaz de manejar problemas de gran escala con un consumo de memoria relativamente bajo, lo que lo hace especialmente valioso en problemas de optimización de alta dimensión.

El gradiente conjugado ha ganado una popularidad significativa en las últimas décadas debido a la información de primer orden de la función objetivo que solo requiere, lo que lo hace muy adecuado para abordar problemas de optimización a gran escala. El principio básico implica generar una secuencia de iteraciones conjugadas de acuerdo con lo siguiente:

$$x_{k+1} = x_k + \alpha_k d_k,$$

donde α_k y d_k son el tamaño de paso y la dirección de búsqueda respectivamente, donde a su vez $\{d_1, d_2, \dots, d_n\}$ con n igual a la dimensión de x , son un conjunto de vectores conjugados respecto a alguna matriz A definida positiva, es decir que satisfacen que

$$p_i^t A p_j = 0 \quad i \neq j,$$

y $d_0 = -g_0$, donde para el caso de interés, A está asociada a la función que se pretende minimizar y es posible calcular dichos vectores de la siguiente manera:

$$d_{k+1} = -g_{k+1} + \beta_k d_k,$$

con $g_k := \nabla f(x_k)$ siendo f la función objetivo y β_k es el parámetro escalar del gradiente conjugado. Por otro lado, para β_k se han desarrollado un sin fin de propuestas clásicas, cada una con sus respectivas ventajas y desventajas, a continuación se enuncian algunas de ellas.

$$\beta_k^{HS} = \frac{g_{k+1}^T y_k}{d_k^T y_k}, \beta_k^{FR} = \frac{\|g_{k+1}\|^2}{\|g_k\|^2}, \beta_k^{PRP} = \frac{g_{k+1}^T y_k}{\|g_k\|^2},$$

$$\beta_k^{CD} = \frac{\|g_{k+1}\|^2}{-d_k^T g_k}, \beta_k^{LS} = \frac{g_{k+1}^T y_k}{-d_k^T g_k}, \beta_k^{DY} = \frac{\|g_{k+1}\|^2}{d_k^T y_k},$$

donde $y_k =: g_{k+1} - g_k$.

2 Optimización no suave convexa

El problema que se pretende resolver el siguiente

$$\min_{x \in \Phi} f(x), \quad (1)$$

donde existen diversas dependencias, en particular de dos factores: la naturaleza de la función objetivo f , que puede ser suave o no suave, y el conjunto Φ , que puede ser discreto o continuo. Como resultado, existe una amplia gama de problemas de optimización que pueden formularse a partir de este modelo. En el caso de funciones no suaves, es decir, funciones que pueden no ser diferenciables en algunos puntos, se encuentran presentes en muchos problemas del mundo real, donde las funciones objetivo tienen discontinuidades, esquinas o cambios bruscos que dificultan el uso de métodos tradicionales de optimización que asumen suavidad (diferenciabilidad). Entonces para estas funciones, los métodos conocidos basados en gradiente pueden no ser la mejor opción. Para estos casos existen diversas propuestas que consigo permiten tratar problemas realistas y complejos que no pueden ser manejados por técnicas suaves. Pueden ser más robustos en presencia de ruidos y outliers.

3 Regularización de Moreau-Yosida

El primer paso antes de introducir el método de propuesto, es necesario echar un vistazo a la Regularización de Moreau-Yosida, la cual es fundamental para convertir problemas no suaves convexos en problemas equivalentes suaves, se define entonces

$$F(x) := \min_{z \in \mathbb{R}^n} \left\{ f(z) + \frac{1}{2\lambda} \|z - x\|^2 \right\}, \quad \lambda > 0 \quad (2)$$

es importante destacar que la diferenciabilidad de la función F se conserva, incluso si la función objetivo f no es diferenciable, a continuación se muestran 2 ejemplos de funciones no diferenciables tras aplicar la transformación de Moreau-Yosida.

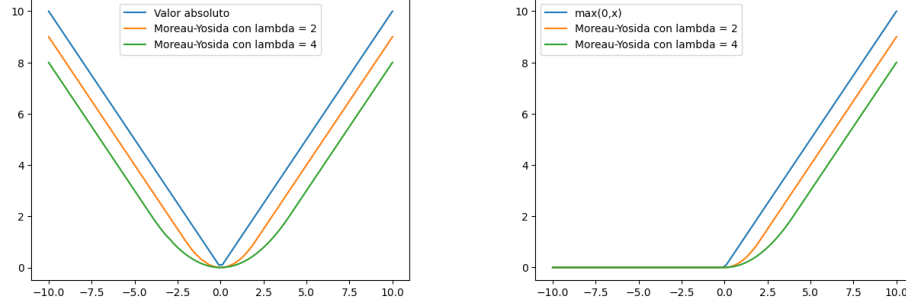


Figure 1: Función valor absoluto y $\max(0, x)$ antes y después de la transformación de Moreau-Yosida para distintos valores de λ

La primer pregunta en dirección de lo que al presente reporte respecta, es si el problema

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} F(x), \quad F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad (3)$$

es equivalente a (1), lo cual se abordará a continuación, pero antes veamos los siguientes detalles.

Es importante mencionar que (2) es diferenciable casi en todos lados y está bien definida cuando f es convexa y más aún, si f es fuertemente convexa, tiene un minimizador único, el cual definiremos por

$$p(x) := \arg \min_{z \in \mathbb{R}^n} \left\{ f(z) + \frac{1}{2\lambda} \|z - x\|^2 \right\},$$

con lo cual, F y su derivada g son del siguiente modo

$$F(x) = f(p(x)) + \frac{1}{2\lambda} \|p(x) - x\|^2, \quad g(x) = \frac{x - p(x)}{\lambda},$$

se presentan a continuación algunas propiedades de F .

Teorema 1: Las siguientes afirmaciones son equivalentes.

1. x denota el mínimo global de f .
2. x denota el mínimo global de F .
3. $g(x) = 0$.
4. $x = p(x)$.

Lo anterior nos dice que en efecto es posible resolver el problema original (1) resolviendo (3).

4 Gradiente conjugado robusto (Propuesta)

En esta sección, se propone un método para mejorar el desempeño de CG en la resolución de problemas no suaves. Este método utiliza el enfoque de regularización de Moreau-Yosida para convertir problemas no suaves en problemas suaves.

El nuevo procedimiento de gradiente conjugado para resolver problemas de optimización no suaves (inspirado en un método robusto para resolver problemas suaves) se presenta de la siguiente manera (basado en $g_k = \nabla F(x_k)$):

$$d_{k+1} = -g_{k+1} + \beta_k^{N1} d_k \quad (d_0 = -g_0), \quad (4)$$

donde

$$\beta_k^{N1} = \left(y_k - \frac{1}{2M(1+t^2)} \frac{d_k}{T_k} - \frac{t}{1+t^2} s_k \right)^T \frac{g_{k+1}}{T_k}, \quad (5)$$

donde t es una aproximación de α_{k+1} , M es un parámetro de penalización, $s_k := x_{k+1} - x_k$ y a su vez

$$T_k = \max \left\{ \gamma \|d_k\| \cdot \|y_k\|, \|d_k\| \cdot \|s_k\|, |d_k^T y_k|, \frac{d_k^T g_{k+1}}{2M((1+t^2)y_k - ts_k)^T g_{k+1}} \right\} \geq 0, \quad (6)$$

con $\gamma > 0$.

Lema 1: Examinemos el uso de iteraciones de gradiente conjugado para cualquier longitud de paso $\alpha_k > 0$ y β_k como se define en (5). Con el escalar positivo c fijado en un valor entre 0 y 1, y una cierta elección de

$$M = \frac{2c}{(1+t^2)\|y_k\|^2}, \quad (7)$$

con lo cual se obtendrá que

$$d_{k+1}^T g_{k+1} \leq -(1-c)\|g_{k+1}\|^2. \quad (8)$$

Demostración: Haciendo uso de las ecuaciones (4) y (5) obtenemos que

$$\begin{aligned} d_{k+1}^T g_{k+1} &= -\|g_{k+1}\|^2 + \beta_{k+1}^{N1} d_k^T g_{k+1} \\ &= -\|g_{k+1}\|^2 + \frac{(y_k^T g_{k+1})(d_k^T g_{k+1})}{T_k} - \frac{1}{2M(1+t^2)} \times \frac{(d_k^T g_{k+1})^2}{T_k^2} \\ &\quad - \frac{1}{1+t^2} \frac{(s_k^T g_{k+1})(d_k^T g_{k+1})}{T_k}. \end{aligned}$$

Se puede inferir que como α_k y t son ambos positivos, entonces

$$d_{k+1}^T g_{k+1} \leq -\|g_{k+1}\|^2 + (y_k^T g_{k+1}) \times \frac{d_k^T g_{k+1}}{T_k} - \frac{1}{2M(1+t^2)} \times \frac{(d_k^T g_{k+1})^2}{T_k^2}.$$

Utilizando la propiedad de que $ab \leq \frac{l}{4}a^2 + \frac{1}{l}b^2$, donde a, b y l son escalares positivos, podemos obtener

$$d_{k+1}^T g_{k+1} \leq -\|g_{k+1}\|^2 + \frac{l}{4}(y_k^T g_{k+1})^2 + \frac{1}{l} \frac{(d_k^T g_{k+1})^2}{T_k^2} - \frac{1}{2M(1+t^2)} \times \frac{(d_k^T g_{k+1})^2}{T_k^2}.$$

Sea $l = 2M(1+t^2)$, entonces

$$d_{k+1}^T g_{k+1} \leq -\|g_{k+1}\|^2 + \frac{M(1+t^2)}{2} \times (y_k^T g_{k+1})^2.$$

Haciendo uso de la desigualdad de Cauchy-Schwarz tenemos que

$$d_{k+1}^T g_{k+1} \leq -\|g_{k+1}\|^2 + \frac{M(1+t^2)}{2} \times \|y_k\|^2 \|g_{k+1}\|^2.$$

Por la desigualdad anterior y la ecuación (7) tenemos finalmente que

$$d_{k+1}^T g_{k+1} \leq -(1-c)\|g_{k+1}\|^2.$$

■

Observe que sustituyendo (7) en (5) y (6) obtenemos

$$\beta_k^{N1} = \left(y_k - \frac{\|y_k\|^2}{4c} \frac{d_k}{T_k} - \frac{t}{1+t^2} s_k \right)^T \frac{g_{k+1}}{T_k}, \quad (9)$$

$$T_k = \max \left\{ \gamma \|d_k\| \cdot \|y_k\|, \|d_k\| \cdot \|s_k\|, |d_k^T y_k|, \frac{(1+t^2)\|y_k\|^2 d_k^T g_{k+1}}{4c((1+t^2)y_k - ts_k)^T g_{k+1}} \right\} \geq 0, \quad (10)$$

donde esta será la nueva propuesta de método, la cual garantizamos que satisface (7).

Lema 2: De (4) y (9) es posible obtener que

$$\|d_k\| \leq \left(2 + \frac{1}{\gamma} + \frac{1}{4c\gamma^2} \right) \|g_k\|. \quad (11)$$

Demostración: La desigualdad de Cauchy-Schwartz se utiliza junto con las ecuaciones (4) y (9) para obtener

$$\begin{aligned} \|d_{k+1}\| &= \| -g_{k+1} + \beta_k^{N1} d_k \| \leq \|g_{k+1}\| + |\beta_k^{N1}| \|d_k\| \\ &= \|g_{k+1}\| + \left\| y_k - \frac{\|y_k\|^2}{4c} \frac{d_k}{T_k} - \frac{t}{1+t^2} s_k \right\| \frac{\|g_{k+1}\|}{T_k} \|d_k\| \\ &\leq \|g_{k+1}\| + \frac{\|y_k\| \|d_k\| \|g_{k+1}\|}{T_k} + \frac{\|y_k\|^2 \|d_k\|^2 \|g_{k+1}\|}{4cT_k^2} \\ &\quad + \frac{t}{1+t^2} \frac{\|s_k\| \|d_k\| \|g_{k+1}\|}{T_k}. \end{aligned} \quad (12)$$

Además, utilizando la ecuación (10), tenemos que

$$T_k \geq \gamma \|y_k\| \|d_k\| \implies \frac{1}{T_k} \leq \frac{1}{\gamma \|y_k\| \|d_k\|}, \quad (13)$$

y

$$T_k \geq \|s_k\| \|d_k\| \implies \frac{1}{T_k} \leq \frac{1}{\|s_k\| \|d_k\|}. \quad (14)$$

Después de sustituir las ecuaciones (13) y (14) en la ecuación (12), obtenemos

$$\begin{aligned} \|d_{k+1}\| &\leq \|g_{k+1}\| + \frac{1}{\gamma} \|g_{k+1}\| + \frac{1}{4c\gamma^2} \|g_{k+1}\| + \|g_{k+1}\| \\ &\implies \|d_{k+1}\| \leq \left(2 + \frac{1}{\gamma} + \frac{1}{4c\gamma^2}\right) \|g_{k+1}\|. \end{aligned}$$

■

Algorithm 1 Gradiente Conjugado robusto para funciones no suaves

- 1: Seleccionar el punto inicial x_0 , y los valores de los parámetros λ , γ , $0 < \sigma < 1$, $0 < c < 1$ y una tolerancia ϵ .
- 2: Calcular $g_k = \nabla F(x_0)$ y $d_0 = -g_k$
- 3: **for** $k = 0, 1, 2, \dots$ **do**
- 4: **if** $\|g_k\| \leq \epsilon$ **then**
- 5: Terminar
- 6: **end if**
- 7: Encontrar α_k que minimice $F(x_k + \alpha_k d_k)$ de forma inexacta con la condición de Armijo.

$$F(x_k + \alpha_k d_k) - F(x_k) \leq \sigma \alpha_k g_k^T d_k \quad (15)$$

- 8: Actualizar $x_{k+1} = x_k + \alpha_k d_k$.
 - 9: Calcular $g_{k+1} = \nabla F(x_{k+1})$.
 - 10: Calcular $s_k = x_{k+1} - x_k$.
 - 11: Calcular $y_k = g_{k+1} - g_k$.
 - 12: Calcular β_k de acuerdo con la fórmula (8) y (9).
 - 13: Actualizar $d_{k+1} = -g_{k+1} + \beta_k d_k$.
 - 14: **end for**
-

Para establecer las propiedades de convergencia global del Algoritmo 1, es necesario hacer ciertas suposiciones para demostrar su convergencia. Estos supuestos son los siguientes:

1. El conjunto de niveles $\Gamma = \{x \in \mathbb{R}^n | F(x) \leq F(x_0)\}$ es limitado.
2. La F tiene una cota inferior.
3. La secuencia $\{V_i\}$ es limitada, lo que significa que para cada i , existe una constante L tal que

$$\|V_i\| \leq L, \quad V_i \in \partial_B g(x_i). \quad (16)$$

4. La secuencia $\{\varepsilon_k\}$ converge a cero.

Lema 3: Si se cumplen los supuestos 1, 2 y 3, entonces para la secuencia $\{x_i, \alpha_i\}$ generada por el algoritmo 1, existe una constante $\alpha_0 > 0$ tal que, para k suficientemente grande, se cumple la siguiente desigualdad:

$$\alpha_k > \alpha_0. \quad (17)$$

Demostración: Si la ecuación (15) es válida para k , la demostración se considerará completa si $\alpha_k = 1$. De lo contrario, supongamos que $\alpha'_k = \frac{\alpha_k}{2}$. Por tanto, obtenemos

$$F(x_k + \alpha'_k d_k) - F(x_k) > \sigma \alpha'_k g_k^T d_k.$$

Se puede llegar a la conclusión utilizando la expansión de Taylor de F y la ecuación (16), que nos da

$$\begin{aligned}\sigma\alpha'_k g_k^T d_k &< F(x_k + \alpha'_k d_k) - F(x_k) \\ &= \alpha'_k g_k^T d_k + \frac{1}{2}(\alpha'_k)^2 d_k^T V(u_k) d_k \\ &\leq \alpha'_k d_k^T g_k + \frac{1}{2}(\alpha'_k)^2 \|d_k\|^2.\end{aligned}$$

donde $u_k = x_k + \theta\alpha_k d_k$ y $\theta \in (0, 1)$. El supuesto 2 proporciona un límite superior en $V(u_k)$, y la convexidad de la forma cuadrática $d^T V(x) d$ para cada d implica que es generalmente convexo. Sustituyendo las ecuaciones (8) y (11) en la desigualdad anterior, tenemos que

$$\alpha'_k > \left[\frac{-(1-\sigma)d_k^T g_k}{\|d_k\|^2} \right] \frac{2}{L} > \left[\frac{-(1-\sigma)(1-c)}{\left(2 + \frac{1}{\gamma} + \frac{1}{4c\gamma^2}\right)^2} \right] \frac{2}{L}.$$

Considere $W = \left[\frac{-(1-\sigma)(1-c)}{\left(2 + \frac{1}{\gamma} + \frac{1}{4c\gamma^2}\right)^2} \right] \frac{2}{L}$. Entonces tenemos

$$\alpha_k \geq 2W.$$

Ahora seleccionando un valor de α_0 dentro del intervalo $(0, 2W)$ obtenemos que

$$\alpha_k > \alpha_0.$$

■

Teorema 2: Supongamos que las condiciones del lema 3 se satisfacen, entonces

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|g_k\| = 0, \quad (18)$$

Demostración: Supongamos que la ecuación (18) es falsa, implicando la existencia de $k_0 > 0$ y $\epsilon_0 > 0$ tal que

$$\forall k > k_0 : \|g_k\| \geq \epsilon_0. \quad (19)$$

Para todo $k > k_0$, las desigualdades de las ecuaciones (8), (15), (17) y (19) se pueden utilizar para obtener

$$\begin{aligned}F(x_{k+1}) - F(x_k) &\leq \sigma\alpha_k d_k^T g_k \\ &\leq -1(1-c)\sigma\alpha_k \|g_k\|^2 \\ &\leq -(1-c)\sigma\alpha_0 \epsilon_0^2.\end{aligned} \quad (20)$$

Ahora, la ecuación (20) y el supuesto 1 se pueden utilizar para obtener

$$\sum (1-c)\sigma\alpha_0 \epsilon_0^2 < \infty. \quad (21)$$

Surge una contradicción por el hecho de que la expresión $\sum (1-c)\sigma\alpha_0 \epsilon_0^2 = \infty$ por lo tanto

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|g_k\| = 0.$$

■

5 Aplicación en procesamiento de imágenes

El área del procesamiento de imágenes es un campo de investigación vibrante con numerosas aplicaciones en áreas como la fotografía, la medicina, la astronomía y la industria. Su objetivo principal es reconstruir imágenes claras a partir de versiones borrosas o distorsionadas de ellas. El enfoque más adoptado para modelar imágenes dañadas como resultado de la borrosidad y el ruido implica un modelo lineal representado por la siguiente ecuación:

$$y = Ax + \eta, \quad x \in \mathbb{X},$$

donde el vector y representa la imagen de la que disponemos, η es un vector de ruido, x es la imagen original que deseamos obtener tras la reconstrucción y A representa el daño o ajuste aplicado a la imagen original, entonces si se conoce la naturaleza del ajuste, es posible proponer A y resolver el problema de optimización que restaura la fotografía y se expresa de la siguiente manera:

$$\min_{x \in \mathbb{X}} \frac{1}{2} \|Ax - y\|_2^2 + v\phi(x),$$

donde v y ϕ representan parámetro y término de regularización respectivamente. El término de regularización también determina la naturaleza del problema, por ejemplo, seleccionar $\phi(x) = \|x\|_1$ o $\phi(x) = \|x\|_2$ conduce a un problema suave o no suave, respectivamente.

6 Pruebas