Control no lineal

Luis Alberto Ballado Aradias
Cinvestav Unidad Tamaulipas
luis.ballado@cinvestav.mx

30 de abril de 2023

Resumen

El presente trabajo describe la implementación de un control no lineal con uso de la odometría para un robot móvil de tipo diferencial y su implementación utilizando un robot LEGO NXT bajo el lenguaje NXC (Not eXactly C) para la navegación de entre un punto inicial y final.
El control no lineal se refiere a la técnica de controlar sistemas con comportamiento no lineal, es decir, sistemas cuyas relaciones de entrada-salida no pueden representarse mediante una relación lineal simple e implica el uso de técnicas avanzadas de modelado y control para lograr el control deseado del sistema. Este tipo de control se utiliza en una amplia variedad de aplicaciones, desde el control de procesos industriales hasta la robótica y la navegación autónoma.

I. Introducción

La teoría de sistemas de control se ocupa del análisis y el diseño de componentes interactuantes de un sistema en una configuración que brinde un comportamiento deseado. La configuración esencial usada en teoría de sistemas de control se basa en el concepto fundamental de realimentación, que consiste en el proceso de medir las variables de interés en el sistema y usar esa información para controlar su comportamiento. La teoría y la práctica del control tienen un amplio rango de aplicaciones en los campos de la ingeniería aeronáutica, química, mecánica, ambiental, civil y eléctrica, así como en muchas otras disciplinas no ingenieriles. Las ventajas del control eficiente en la industria son inmensas, e incluyen mejoras en la calidad de los productos, reducción en el consumo de energía, minimización de los material de desecho, mayores niveles de seguridad y reducción de la contaminación.

El punto de partida en el análisis de un sistema de control es su representación por un modelo matemático, generalmente como un operador entre entradas y salidas del sistema, o como un conjunto de ecuaciones diferencia y/o diferenciales. La mayoría de los modelos matemáticos usados tradicionalmente por teóricos y prácticos del control son lineales. De hecho, los modelos lineales son mucho más manejables que los no lineales, y pueden representar en forma precisa el comportamiento de sistemas reales en muchos casos útiles.

La principal dificultad radica en el hecho de que los sistemas no lineales no pueden ser analizados mediante las técnicas tradicionales de la teoría de control lineal, que se basan en la linealidad y la invariancia del sistema. En lugar de ello, se requieren herramientas matemáticas avanzadas como la teoría de sistemas dinámicos, la teoría de control óptimo, la teoría de la retroalimentación no lineal y la teoría de estabilidad no lineal para analizar y diseñar sistemas de control no lineal.

El control no lineal juega un papel importante en la robótica móvil, que se ocupa del diseño y la implementación de robots que pueden moverse de manera autónoma en entornos desconocidos.

En este contexto, los sistemas de control no lineal son fundamentales para garantizar que el robot pueda navegar de manera segura y eficiente en un entorno cambiante y a menudo impredecible.

En la robótica móvil, los sistemas de control no lineal se utilizan para controlar la velocidad, la posición y la orientación del robot, y para hacer que el robot siga una trayectoria deseada. Estos sistemas se basan en técnicas avanzadas de modelado y control, como el control por realimentación no lineal, el control adaptativo y el control por modos deslizantes.

I. Sistema de Control

Un sistema de control es una combinación de componentes que actúan conjuntamente por medio de una serie de variables para proporcionar una respuesta acerca del propio comportamiento del sistema.

El control del sistema consiste en la actuación a partir de unas variables o señales de entrada. Para la representación gráfica de un sistema se utilizan bloques en el que las variables que actúan sobre el sistema (entradas) se indican con flechas que entran hacia el bloque, mientras que las variables producidas por el sistema (salidas) se indican mediante flechas que salen del bloque. Los tipos de sistema de control pueden ser, según se realice la acción de control.

1. **Sistema de control en lazo abierto** en estos sistemas, la única variable que se tiene en cuenta en la acción de control, es la señal de entrada. La señal de salida, no actúa de ninguna manera sobre el sistema. En consecuencia, no existe ninguna relación entre la respuesta del sistema y las variables de entrada.

2. **Sistema de control en lazo cerrado** en estos sistemas, tanto la entrada de referencia como muestras de la señal de salida, actúan sobre la acción de control, es decir, se realiza una realimentación de la señal en la salida a la entrada del sistema. Esta retroalimentación tiene como finalidad, ir controlando la salida y minimizar el error que puede producirse frente a perturbaciones que afecten al sistema, obteniendo con más seguridad la señal deseada a la salida.

II. Ley de Control

La teoría de estabilidad juega un rol central en teoría de sistemas e ingeniería. En sistemas dinámicos existen distintos tipos de problemas de estabilidad. La estabilidad de puntos de equilibrio generalmente se caracteriza en el sentido de Lyapunov.

Un punto de equilibrio se dice estable si todas las soluciones que se inicien en las cercanías del punto de equilibrio permanecen en las cercanías del punto de equilibrio; de otro modo el punto de equilibrio es inestable. Un punto de equilibrio se dice asintóticamente estable si todas las soluciones que se inicien en las cercanías del punto de equilibrio no sólo permanecen en las cercanías del punto de equilibrio, sino que además tiendan hacia el equilibrio a medida que el tiempo se aproxima a infinito.

II. Ley de Control aplicado en el Robot LEGO

Sea la **planta** el ROBOT a controlar, donde xf, yf, Θ_f son la entrada de control y $x, y.\Theta$ las posiciones finales a las que queremos llegar.

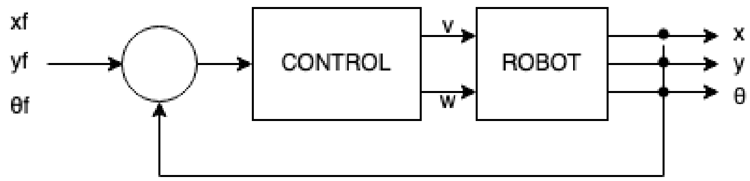

Figura 1: *Diagrama Control Lazo Cerrado*

$$\dot{x} = v cos\theta \qquad \dot{y} = v sin\theta \qquad \dot{\theta} = \omega$$

Un vector de error compuesto por una distancia **a** y un ángulo α

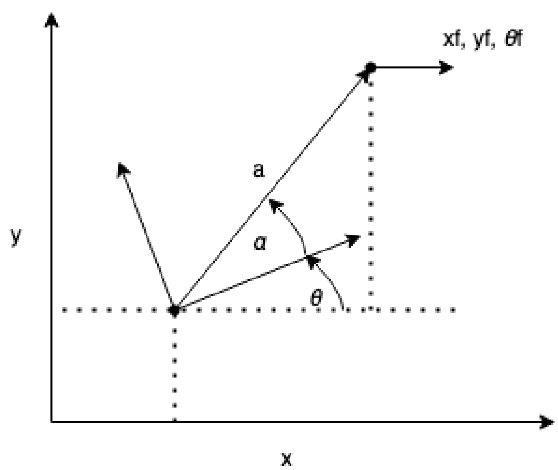

Figura 2: *Sistema*

podemos ver θ_{error} como:

$$\theta_{error} = \theta + \alpha = tg\frac{ye}{xe}$$

consideramos nuestro vector de error:

$$a = \sqrt{(xf - x)^2 + (yf - y)^2} = \sqrt{x_{error}^2 + y_{error}^2}$$

$$\alpha = tg^{-1}\frac{y_{error}}{x_{error}} - \theta$$

Dinámica del error $\dot{a}$, $\dot{\alpha}$ en función de v, w

$$a = (x_e^2 + y_e^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$\dot{a} = \frac{\partial a}{\partial x_{error}} * \dot{x_{error}} + \frac{\partial a}{\partial y_{error}} * \dot{y_{error}}$$

$$= \frac{1}{2}(x_{error}^2 + y_{error}^2)^{-\frac{1}{2}} * (2x_{error}) * \dot{x_{error}} + \frac{1}{2}(x_{error}^2 + y_{error}^2)^{-\frac{1}{2}}(2y_{error}) * \dot{y_{error}}$$

$$= \frac{x_{error}}{\sqrt{x_{error}^2 + y_{error}^2}} * \dot{x_{error}} + \frac{y_{error}}{\sqrt{x_{error}^2 + y_{error}^2}} * \dot{y_{error}}$$

Sustituyendo $a = \sqrt{x_{error}^2 + y_{error}^2}$ en la ecuación anterior tenemos,

$$\dot{a} = \frac{x_{error}}{a} * \dot{x_{error}} + \frac{y_{error}}{a} * \dot{y_{error}}$$

$$\dot{x_{error}} = \dot{x_f} - \dot{x} = -\dot{x} = -vcos\theta$$
$$\dot{y_{error}} = \dot{y_f} - \dot{y} = -\dot{y} = -vsin\theta$$

Sustituyendo

$$\dot{a} = -\frac{x_{error}}{a} * vcos\theta - \frac{y_{error}}{a} * vsin\theta$$

$$-cos\theta_{error}cos\theta v - sin\theta_{error}sin\theta v = -v(cos\theta_{error}cos\theta + sin\theta_{error}sin\theta)$$

Por identidad trigonometrica se tiene que $cos(\alpha - \beta) = cos\alpha cos\beta + sin\alpha sin\beta$ teniendo en nuestra ecuación anterior

$-vcos(\theta_{error} - \theta)$, donde $\theta_{error} = \theta + \alpha$, sustituyendo se tiene que $-vcos(\theta + \alpha - \theta) = -vcos(\alpha)$

Recordando que $\alpha = tg^{-1}\frac{y_{error}}{x_{error}} - \theta$, derivando

$$\dot{\alpha} = \frac{\partial \alpha}{\partial x_{error}} * \dot{x_{error}} + \frac{\partial \alpha}{\partial y_{error}} * \dot{y_{error}} + \frac{\partial \alpha}{\partial \theta}\dot{\theta}$$

$$= \frac{1}{1 + \frac{y_{error}^2}{x_{error}^2}} * \frac{-y_{error}}{x_{error}^2} * \dot{x_{error}} + \frac{1}{1 + \frac{y_{error}^2}{x_{error}^2}} * \frac{1}{x_{error}} * \dot{y_{error}} - \dot{\theta}$$

$$\frac{\cancel{x_{error}^2}}{x_{error}^2 + y_{error}^2} * \left(\frac{-y_{error}}{\cancel{x_{error}^2}}\right) * \dot{x_{error}} + \frac{\cancel{x_{error}^2}}{x_{error}^2 + y_{error}^2} * \left(\frac{1}{\cancel{x_{error}^2}}\right) * \dot{y_{error}} - \dot{\theta}$$

$$= \frac{-y_{error}}{a^2}(-vcos(\theta)) + \frac{x_{error}}{a^2}(-vsin(\theta)) - w$$

$$= \frac{1}{a} * \frac{y_{error}}{a} vcos(\theta) - \frac{1}{a} * \frac{x_{error}}{a} vsin(\theta) - w = \frac{1}{a} sin(\theta_{error})cos(\theta)v - \frac{1}{a} cos(\theta_{error})sin(\theta)v - w = \frac{v}{a}\,(sin(\theta error)cos(\theta) - cos($$

$$= \frac{v}{a} sin(\theta_{error} - \theta) - w = \frac{v}{a} sin(\alpha - w)$$

El módelo de error quedá representado como:

$$\dot{a} = -vcos(\alpha)$$
$$\dot{\alpha} = \frac{v}{a} sin(\alpha - w)$$

Nuestro objetivo es hacer que $a \implies 0$, $\alpha \implies 0$ independientemente de su valor inicial en un tiempo finito (suficientemente rápido). Pero, ¿cómo construir v,w para que $a \implies 0$, $\alpha \implies 0$?

I. Teorema de Lyapunov

El Teorema de Lyapunov es un importante resultado en la teoría de sistemas dinámicos que se utiliza para analizar la estabilidad de un punto de equilibrio en un sistema. Fue desarrollado por el matemático ruso Aleksandr Lyapunov en el siglo XIX.

El teorema establece que si existe una función llamada función de Lyapunov, que sea continua, definida positiva y que su derivada sea negativa o cero en el punto de equilibrio, entonces ese punto de equilibrio es estable. En otras palabras, si la función de Lyapunov puede demostrar que la perturbación del sistema cerca del punto de equilibrio siempre se aleja del mismo, entonces se puede decir que el punto de equilibrio es estable.

Es importante destacar que este teorema no garantiza la existencia de un punto de equilibrio estable en todos los sistemas dinámicos, pero puede ser útil en muchos casos para analizar la estabilidad de un sistema. Además, existen diversas variantes del teorema de Lyapunov que pueden ser aplicadas a diferentes tipos de sistemas.

punto de equilibrio $x = 0$, $\dot{x} = f(x,u)$, si $\exists$ una función v(x,u) tal que v(x,u) >0, $\dot{(v)}(x,u) < 0$ entonces $x = 0$ es exponencialmente estable.

$$v(a,\alpha) = \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}\alpha^2$$

derivando se tiene que, $\dot{v}(a,\alpha) = \frac{1}{\cancel{2}}(\cancel{2}a)\dot{a} + \frac{1}{\cancel{2}}(\cancel{2}\alpha)\dot{\alpha} = a\dot{a} + \alpha\dot{\alpha} < 0$

II. Backstepping

La estrategia de control Backstepping es un método utilizado en el diseño de controladores para sistemas no lineales. Fue desarrollado en la década de 1980 y es ampliamente utilizado en la ingeniería de control debido a su eficacia y simplicidad.

La estrategia de control Backstepping se basa en una técnica de control en cascada, donde el controlador se diseña para controlar cada estado del sistema en cascada. El proceso comienza con la selección de una variable de salida del sistema, que se utiliza como la variable de control primaria. A continuación, se establece un controlador para esta variable, utilizando técnicas de control lineal estándar.

$$\dot{v} = a\dot{a} + \alpha\dot{\alpha} = a(-vcos(\alpha)) + \alpha\left(\frac{v}{a}sin(\alpha - w)\right) < 0$$

$$-avcos(\alpha) + \frac{v}{a}\alpha sin(\alpha) - \alpha w < 0$$

$$\dot{a} = -k_1 a; \dot{\alpha} = -k_2\alpha; \dot{v} = -k_1 a^2 - k_2\alpha^2$$

$$\dot{a} = -vcos(\alpha) = -k_1 a \implies v = k_1\frac{a}{cos(\alpha)}$$

$$\dot{\alpha} = \frac{v}{a}sin(\alpha) - w = -k_2\alpha = \frac{1}{a}\left(\frac{k_1 a}{cos(\alpha)}sin(\alpha) - w\right)$$

$$w = \frac{k_1}{cos(\alpha)}sin(a) + k_2\alpha$$

III. Ley de control

$$v = \frac{k_1 a}{cos(\alpha)}, w = \frac{k_1}{cos(a)} sin(\alpha) + k_2\alpha$$

en $cos(\alpha) = 0$, la ley de control no tiene solución para eliminar la división por cero y para no cambiar el signo de v, multiplicamos por $cos^2(\alpha)$

$$v = \frac{k_1 a}{cos(\alpha)} * cos^2(\alpha) = k_1 a cos(\alpha)$$

sustituyendo v, en w

$$w = \frac{v}{a} sin(\alpha) + k_2\alpha = \frac{k_1 \cancel{a} cos(\alpha)}{\cancel{a}} sin(\alpha) + k_2\alpha = k_1 cos(\alpha) sin(\alpha) + k_2\alpha$$

teniendo, $v = k_1 a cos(\alpha)$, $w = k_1 cos(\alpha) sin(\alpha) + k_2\alpha$

$$\dot{a} = -v cos(\alpha) = -k_1 a cos^2(\alpha)$$

$$\dot{\alpha} = \frac{v}{a} sin(\alpha) - w = \frac{k_1 a cos(\alpha)}{a} sin a - k_1 cos(\alpha) sin(\alpha) - k_2 a = -k_2\alpha$$

$$v(a, \alpha) = \frac{1}{2} a^2 + \frac{1}{2} a^2 > 0$$

$$\dot{v} = a\dot{a} + \alpha\dot{\alpha} = a\left(-k_1 a cos^2(\alpha)\right) + \alpha(-k_2\alpha) = -k_1 a^2 cos^2\alpha - k_2\alpha^2 < 0$$

III. Resultados

El desplazamiento que sigue el robot y su corrección de error es de forma incremental, es decir que a medida que se desplaza corrigue su orientación para poder llegar al punto final x_f, y_f

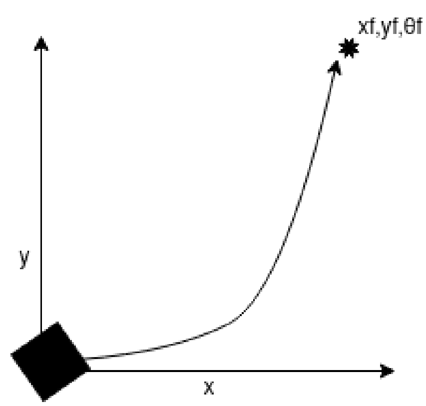

Figura 3: *Desplazamiento del robot móvil*

El código se puede ver en la siguiente loga de github

IV. Conclusiones

La continuidad es una propiedad importante de las funciones ya que nos permite hacer cálculos precisos y confiables. Por ejemplo, si una función es continua en un intervalo cerrado, entonces sabemos que tiene un máximo y un mínimo en ese intervalo, lo que es útil en la optimización y en la resolución de problemas de optimización.

La continuidad también es importante en el análisis de sistemas dinámicos, ya que las funciones que modelan estos sistemas deben ser continuas para que podamos predecir con precisión su comportamiento.

Referencias

[1] Intalación NXC en LINUX, `http://ubuntudaily.blogspot.com/2011/03/using-lego-mindstorms-nxt-with-ubuntu.html`

[2] Repositorio Compilador NBC utilizado, `https://github.com/pierre-24/nbc-compiler`

[3] Documento para evitar sudo en NXC, `https://bricxcc.sourceforge.net/nbc/doc/nxtlinux.txt`

[4] Comando para instalar libusb-dev, `https://howtoinstall.co/en/libusb-dev`

[5] Presentación Odometría, `http://www.kramirez.net/Robotica/Material/Presentaciones/Odometria.pdf`

[6] Modelo Cinemático de un robot móvil tipo diferencial y navegación a partir de la estimación odométrica,`https://www.redalyc.org/pdf/849/84916680034.pdf` VALENCIA V., JHONNY A.; MONTOYA O., ALEJANDRO; RIOS, LUIS HERNANDO

[7] Modelo cinemático de un robot móvil implementado con LEGO NXT para un sistema de localización indoor diseñado en Labview, `https://www.google.com/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=&cad=rja&uact=8&ved=2ahUKEwiu0_So28_9AhViDkQIHRlXDtcQFnoECBQQAQ&url=https%3A%2F%2Frevistas.udistrital.edu.co%2Findex.php%2FTecnura%2Farticle%2Fdownload%2F6810%2F8394%2F30717&usg=AOvVaw2PsCrkFGkk_nGN-G084B11`

[8] Notas de clase, Robótica Móvil Inteligente, Dr. José Gabriel Ramírez Torres, Enero-Abril 2023