

TÓPICOS AVANZADOS EN TEORÍA DE GRAFOS

F.C.E.I.A. - Universidad Nacional de Rosario
Escuela de Posgrado y Ed. Continua

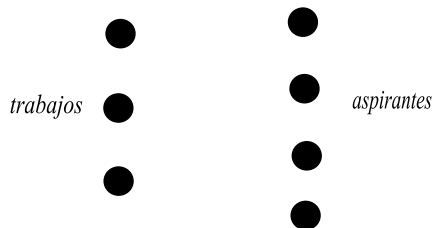
2016

UNA APLICACIÓN

Problema:

Cubrir (realizar) ciertos trabajos con personas (aspirantes).

- En general tenemos **más personas** disponibles que trabajos.

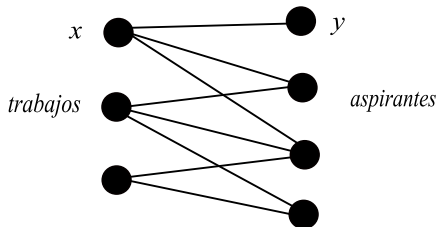


MODELIZACIÓN

Problema:

Cubrir (realizar) ciertos trabajos con personas (aspirantes).

- En general tenemos **más personas** disponibles que trabajos.



G un X,Y -bigrafo: X : trabajos, Y : personas

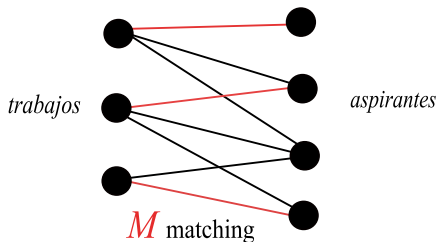
arista xy si la persona y está capacitada para hacer el trabajo x

MODELIZACIÓN

Problema:

Cubrir (realizar) ciertos trabajos con personas (aspirantes).

- En general tenemos **más personas** disponibles que trabajos.



G un X,Y -bigrafo: X : trabajos, Y : personas

arista xy si la persona y está capacitada para hacer el trabajo x

PRIMERAS DEFINICIONES BÁSICAS

Sea G un grafo

- *Matching* (ó *emparejamiento*) M en G : conjunto de aristas (no bucles) que **no comparten** vértices.
- Los vértices incidentes en las aristas de M están M -*saturados*; los otros M -*no saturados*.
- *Matching perfecto* en G : matching que **satura a todos** los vértices.

Ejemplos de matchings perfectos:

- 1 En un completo bipartito $G = K_{n,n}$
- 2 En un completo $G = K_n$
- 3 En el grafo de Petersen

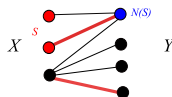
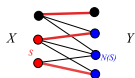
- 4 Algunos que no tienen matching perfectos:



CONDICIÓN DE HALL SOBRE MATCHINGS

G X, Y -bigrafo, M matching en G

Si M satura a X , entonces $\forall S \subseteq X$ hay al menos $|S|$ vértices con vecinos en S .



M no satura a X

Teorema (P. Hall - 1935): Un X, Y -bigrafo tiene un matching **que satura a X** si y sólo si $|N(S)| \geq |S|$, $\forall S \subseteq X$, donde $N(S)$: vértices con algún vecino en S .

Corolario: Todo grafo bipartito k -regular ($k > 0$) tiene un matching perfecto.

MATCHINGS MAXIMALES Y MATCHINGS MÁXIMOS

- *Matching maximal* ($M_{\max l}$) en G : matching cuyo tamaño **no puede crecer** por agregado de una arista.
- *Matching máximo* (M_{\max}) en G : matching de **tamaño máximo** entre todos los matchings en G .

Observemos que:

- 1 M es $M_{\max l}$ si toda arista no en M es incidente en una de M .
- 2 M es $M_{\max} \Rightarrow M$ es $M_{\max l}$. (\Leftarrow no es cierta)

Ejemplos:

- 1 P_4 es el grafo más pequeño con un $M_{\max l}$ que no es M_{\max} .



CONJUNTOS ALTERNANTES, CONJUNTOS AUMENTANTES Y MATCHINGS MÁXIMOS

Sea M matching en G

- Un camino M -alternante **alterna** entre aristas **de M** y aristas **no en M** .
- Un camino M -aumentante es un M -alternante cuyos **vértices finales** están **M -no saturados**.



Observemos que:

Si M es M_{\max} entonces no hay caminos M -aumentantes.

Teorema (Berge -1957): M es M_{\max} en G si y sólo si **no hay** caminos M -aumentantes en G .

Esquema de la prueba de \Leftarrow :

- 1 Suponer que G tiene un matching N t.q. $|N| > |M|$. Construiremos un camino M -aumentante.
- 2 Considerar $M \Delta N$.
- 3 Probar que las componentes conexas de $M \Delta N$ son **caminos** o **ciclos pares** (Ejercicio 2 de la Práctica).
- 4 Concluir que una de las componentes conexas **camino** debe ser M -aumentante.

CUBRIMIENTOS Y MATCHINGS

$G = (V(G), E(G))$ grafo

- $Q \subseteq V(G)$ es un *cubrimiento por vértices* de G , si contiene **al menos un vértice extremo** de cada arista. Decimos Q cubre $E(G)$ (ó G).
- Un cubrimiento de menor tamaño posible es *mínimo* u *óptimo*.

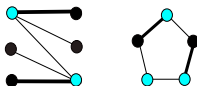


Observaciones:

- Si Q cubre G y M matching en G , ningún vértice de Q cubre más de una arista de M . Luego, $|Q| \geq |M|$.
- Si Q_0 cubre a G y M_0 matching en G , $|Q_0| = |M_0|$, entonces Q_0 y M_0 son **óptimos**.

UN TEOREMA MIN-MAX

CUBRIMIENTOS Y MATCHINGS



Teorema (König-Egerváry - 1931): Sea G es un grafo bipartito. El tamaño de un matching máximo en G , $\alpha'(G)$, es igual al tamaño de un cubrimiento por vértices de G mínimo, $\beta(G)$.

● Demo: usar Teorema de Hall.

RELACIONES MIN-MAX EN GENERAL. DUALIDAD

Relación min-max:

es un teorema que establece una **igualdad** entre las respuestas a un problema de **minimización** y uno de **maximización**, sobre una clase de instancias.

- El teorema de König-Egerváry es un ejemplo.

Problemas de optimización duales:

Hallar una solución factible de cada problema con **igual** “valor”
prueba la **optimalidad de ambos** problemas!

CUBRIMIENTOS Y CONJUNTOS INDEPENDIENTES

- $S \subseteq V(G)$ es un *conjunto independiente* en G si **ningún** par de vértices de S es

adyacente en G .



- El *número de independencia* de G , $\alpha(G)$, es el tamaño del conjunto independiente en G de **cardinalidad máxima**.
- $R \subseteq E(G)$ es un *cubrimiento por aristas* de G si **todo** vértice de G es **incidente** en alguna arista de R .



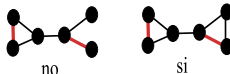
- El *número de cubrimiento por aristas* de G , $\beta'(G)$, es el tamaño del cubrimiento por aristas de G de **cardinalidad mínima**.
- 1 Ninguna arista de G contiene dos vértices de un conjunto independiente $\rightarrow \beta'(G) \geq \alpha(G)$.
 - 2 Si G contiene vértices aislados, G no tiene cubrimientos por aristas.
 - 3 Un matching perfecto es un cubrimiento por aristas con $\frac{|V(G)|}{2}$ aristas.
 - 4 En G general, podemos agregar aristas a un matching máximo y obtener un cubrimiento por aristas.

CUBRIMIENTOS Y CONJUNTOS INDEPENDIENTES

Lema: En un grafo G , $S \subseteq V(G)$ es un conjunto independiente si y solo si $V(G) \setminus S$ es un cubrimiento por vértices; luego

$$\alpha(G) + \beta(G) = |V(G)|.$$

Resultado análogo entre **matchings** y **cubrimientos** por aristas?



OTRO TEOREMA MIN-MAX

CUBRIMIENTOS Y CONJUNTOS INDEPENDIENTES

Teorema (Gallai - 1959): Si G es un grafo sin vértices aislados,

$$\alpha'(G) + \beta'(G) = |V(G)|.$$

Corolario (König - 1916) : Si G es un grafo bipartito sin vértices aislados,

$$\alpha(G) = \beta'(G).$$

MÁXIMO MATCHING EN BIPARTITOS

ALGORITMO DE LOS CAMINOS AUMENTANTES:

DESARROLLADO EN LA ASIGNATURA DE GRADO MATEMÁTICA DISCRETA

ENTRADA G un X, Y -bigrafo; M un matching en G ; $U \subseteq X$ vértices no M -saturados.

IDEA **Explorar** los caminos M -alternantes desde U . $S \subseteq X$ y $T \subseteq Y$, vértices alcanzados. **Marcar** los vértices de S explorados. Cuando un vértice es alcanzado, **guardar** el vértice desde el cual fue alcanzado.

INICIO $S = U$ y $T = \emptyset$.

ITERACION

- **Si** todos los elementos de S están marcados, **parar**: $T \cup (X - S)$ es un cubrimiento mínimo y M un matching máximo.
- **Si no**, **seleccionar** $x \in S$ no marcado y considerar cada $y \in N(x)$ tq $xy \notin M$.
 - **Si** y no es M -saturado, **terminar** y reportar un camino M -aumentante de U a y .
 - **Si no** — y está matcheado con $w \in X$ — **incluir** y en T (alcanzado desde x) y w en S (alcanzado desde y).

Después de **explorar todas** esas aristas incidentes en x , **marcar** x e **iterar**.

GENERALIDADES SOBRE EFICIENCIA DE ALGORITMOS

- El *tiempo de corrida* de un algoritmo es el número máximo de pasos computacionales necesarios para su implementación, expresados como una función del tamaño de la entrada.

Notación para el tiempo de corrida: $O(f)$

- Un *algoritmo bueno* es uno con tiempo $O(f)$, donde f es una función polinómica del tamaño de la entrada.

Teorema: El algoritmo de caminos aumentantes es bueno pues su aplicación iterativa sobre un grafo bipartito produce en $O(nm)$ un matching y un cubrimiento por vértices de igual tamaño.

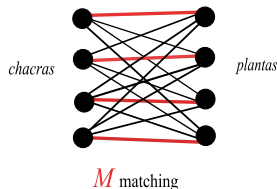
$n = |V(G)|$ y $m = |E(G)|$

GENERALIZACIÓN

MÁXIMO MATCHING CON PESO EN BIPARTITOS

G X, Y -bigrafo, w_{ij} peso de $(i, j) \in E(G)$

Hallar un matching de **peso máximo** en G .



M matching $\rightarrow w(M) = \sum_{(i,j) \in M} w_{ij}$: peso de M .

Asumimos: $G = K_{nn}$ y $w_{ij} \geq 0 \quad \forall (i, j) \in E(G)$. Luego,

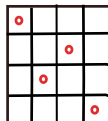
matching de máximo peso \rightarrow matching perfecto.

MÁXIMO MATCHING CON PESO EN BIPARTITOS

FORMULACIÓN MATRICIAL

- M matriz $n \times n$.

Un *transversal* de M es una elección de n posiciones, una en cada fila y cada columna.

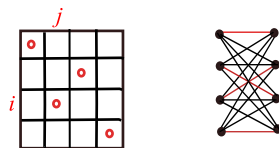


MÁXIMO MATCHING CON PESO EN BIPARTITOS

FORMULACIÓN MATRICIAL

- M matriz $n \times n$.

Un *transversal* de M es una elección de n posiciones, una en cada fila y cada columna.



Dados los pesos w_{ij} ,

Hallar un **transversal de máximo peso** (problema de asignación)



Hallar un **matching de máximo peso**, en un grafo bipartito $K_{n,n}$

MÁXIMO MATCHING CON PESO EN BIPARTITOS

PROBLEMA DUAL

- Dados pesos w_{ij} , $i, j = 1 \cdots, n$, un *cubrimiento* (u, v) es una elección de $2n$ números u_1, \cdots, u_n y v_1, \cdots, v_n :

$$u_i + v_j \geq w_{ij}, \quad \forall i, j.$$

$c(u, v) = \sum u_i + \sum v_j$: costo del cubrimiento

Hallar un cubrimiento de **mínimo costo**.

Teorema (de dualidad): $G = K_{n,n}$; w_{ij} peso de $(i, j) \in E(G)$.
Para todo matching perfecto M y todo cubrimiento (u, v) en G :

$$c(u, v) \geq w(M).$$

Además, $c(u, v) = w(M)$ si y solo si M consiste de aristas $(x_i, y_j) \in E(G)$:
 $u_i + v_j = w_{ij}$, $\forall i, j$. En este caso, M y (u, v) **son óptimos**.

MÁXIMO MATCHING CON PESO EN BIPARTITOS

HACIA UN ALGORITMO....

- El *subgrafo de igualdad* $G_{u,v}$, asociado a un cubrimiento (u, v) , es el subgrafo de $K_{n,n}$ cuyas aristas son los pares $x_i y_j$ tal que $u_i + v_j = w_{ij}$.

 $G_{u,v}$


	1	2	0	1	$\rightarrow v$
0	1	2	0	1	
0	0	2	0	1	
2	1	4	1	1	
2	3	2	1	3	
$\downarrow u$					

MÁXIMO MATCHING CON PESO EN BIPARTITOS

ALGORITMO HÚNGARO (KUHN 1955)

ENTRADA Matriz de pesos sobre las aristas de $K_{n,n}$ con bipartición X, Y .

IDEA **Ajustar** iterativamente el cubrimiento (u, v) (de $K_{n,n}$) **hasta que** $G_{u,v}$ tenga un matching perfecto.

INICIO Sea (u, v) un cubrimiento tal que $u_i = \max_j w_{ij}$ y $v_j = 0$.

ITERACION **Hallar** un matching máximo M en $G_{u,v}$.

- Si es un matching perfecto, **parar**: M es un matching de peso máximo.
- Si no, **sea** Q un cubrimiento por vértices en $G_{u,v}$ con $|Q| = |M|$;
 $R = X \cap Q$, $T = Y \cap Q$ y

$$\varepsilon = \min\{u_i + v_j - w_{ij} : x_i \in X - R, y_j \in Y - T\}.$$

Disminuir u_i en ε para $x_i \in X - R$ y **aumentar** v_j en ε para $y_j \in T$.

Formar el nuevo subgrafo de igualdad y **repetir**.

MÁXIMO MATCHING CON PESO EN BIPARTITOS

ALGORITMO HÚNGARO (KUHN 1955)

Teorema: El algoritmo Húngaro encuentra un matching de máximo peso y un cubrimiento de mínimo costo.

- 1 El tiempo de corrida es $O(n^2)$.
- 2 Cuando $w_{i,j}$ son no racionales sigue funcionando pero si se obtienen cubrimientos por vértices en $G_{u,v}$ con más cuidado.
- 3 Los problemas de máximo matching y de cubrimiento (mínimo) por vértices en grafos bipartitos son casos particulares de los problemas con pesos.

MATCHINGS ESTABLES

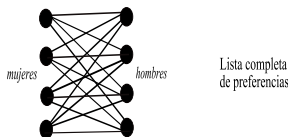
OTRA APLICACIÓN

Problema de los Matrimonios:

Dados n mujeres y n hombres y una lista completa de preferencias (c/u rankea a todos los del sexo opuesto), pretendemos formar n “matrimonios estables”.

- m mujer y h hombre; decimos (m, h) es un *par bloqueador* (o *no estable*) si m y h están en pareja con otros, pero los dos se prefieren mutuamente antes que a su actual pareja.

Modelización:



MATCHINGS ESTABLES

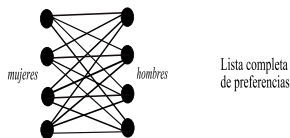
OTRA APLICACIÓN

Problema de los Matrimonios:

Dados n mujeres y n hombres y una lista completa de preferencias (c/u rankea a todos los del sexo opuesto), pretendemos formar n “matrimonios estables”.

- m mujer y h hombre; decimos (m, h) es un *par bloqueador* (o *no estable*) si m y h están en pareja con otros, pero los dos se prefieren mutuamente antes que a su actual pareja.

Modelización:



Hallar un **matching estable**.

- Un matching perfecto es un *matching estable* si ningún par de personas no matcheadas forma un par bloqueador.

MATCHINGS ESTABLES

ALGORITMO DE GALE-SHAPLEY (DE LAS PROPUESTAS)

ENTRADA Lista de preferencias completa.

IDEA **Producir** un matching estable a través de sucesivas propuestas, **guardando** la información de quién se le propuso a quién y quién rechazó a quién.

MATCHINGS ESTABLES

ALGORITMO DE GALE-SHAPLEY (DE LAS PROPUESTAS) (CONT.)

ITERACION

Asignarle a cada persona el estado “*libre*”.

Mientras haya algún hombre h *libre* hacer:

begin

$m :=$ 1er. mujer en lista de preferencia de h a la cual no se le ha propuesto;

si m está “*libre*” entonces

asignarle a h y m el estado “*comprometidos*” (uno con el otro)

si no

si m prefiere a h antes que a su comprometido h' entonces

asignarle a h y m “*comprometidos*” y a h' “*libre*”

si no

m rechaza a h y h permanece “*libre*”

end

SALIDA: un matching estable formado por n parejas “*comprometidas*”.

MATCHINGS ESTABLES

ALGORITMO DE GALE-SHAPLEY (DE LAS PROPUESTAS)

Teorema: El algoritmo nos da un matching estable.

Además, puede probarse que:

- 1 El algoritmo no es simétrico (hombres y mujeres no juegan el mismo rol).
- 2 Toda ejecución del algoritmo de las propuestas (proponiendo los hombres) **conduce al mismo matching estable**, independientemente del orden en que los hombres libres hacen su propuesta. Este matching es aquel en el que cada hombre resulta comprometido con el “mejor” compañero entre todos los matchings estables, y cada mujer resulta comprometida con la “peor” compañera entre todos los matchings estables.
- 3 Cambiando roles, la misma observación vale para la versión del algoritmo donde proponen las mujeres.
- 4 El algoritmo presentado es el “base”. **Extensiones** del mismo permiten que las listas de preferencias no estén completas; también que la cantidad de mujeres y de hombres no concida.

MATCHINGS ESTABLES

ALGORITMO DE GALE-SHAPLEY (DE LAS PROPUESTAS)

- 5 El Problema de los Compañeros de Cuarto (*Roommates Problem*) **generaliza** al Problema de los Matrimonios: consiste en matchear n (n par) personas, donde cada una da una lista de preferencias sobre las otras $n - 1$ personas. Ciertas instancias del problema **no tienen matchings estables**.
- 6 Pueden existir **otros matchings estables** además de los encontrados (proponiendo hombres y mujeres) por el algoritmo de las propuestas. Para hallar uno “justo”, cada persona podría rankear sus preferencias con cierto número de puntos. El *peso* del par (h, m) puede definirse como la suma de los puntos que h asigna a m y m asigna a h . Aplicando el algoritmo húngaro, por ejemplo, podríamos hallar un matching de máximo peso, pero este podría **no ser estable**.

Referencia: *College admissions and the stability of marriage*, Gale and Shapley, 1962.

FACTORES Y k -FACTORES

- 1 G' es un *factor* de G si es un subgrafo generador de G , i.e.
 $V(G) = V(G')$.
- 2 G' es un k -*factor* si es un factor k -regular ($d_{G'}(u) = k, \forall u$).

$$d_G(u) = |\{e \in E(G) : e = (u, v), v \in V(G)\}|$$

Observemos que:

- Un matching perfecto es el conjunto de aristas del 1-factor que induce.
- Un grafo 3-regular que tiene un matching perfecto se descompone en un 1-factor y en un 2-factor.

1-FACTORES

- Una componente C de G es *impar* si $|V(C)|$ es impar.
- Sea $o(G)$ el número de componentes impares de G .
- Para $S \subseteq V(G)$, $G - S$ es el subgrafo de G que se obtiene por *borrado* de S , i.e. $G - S = G[V(G) - S]$.

Teorema (Tutte - 1947) G tiene un 1-factor si y sólo si

$$o(G - S) \leq |S|, \text{ para todo } S \subseteq V(G).$$

1-FACTORES

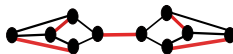
Corolario de Teorema de Tutte (Fórmula de Berge-Tutte - 1958)

El número máximo de vértices saturados por un matching en G es

$$\min_{S \subseteq V(G)} \{|V(G)| - [o(G - S) - |S|]\}.$$

Corolario de Teorema de Tutte (Petersen-1891)

Si G es 3-regular y no tiene arista de corte (su borrado aumenta el número de componentes), entonces G tiene un 1-factor.



no vale la afirmación recíproca

2-FACTORES

Sabíamos que:

- Si G es conexo con grados pares en todos los vértices, entonces G euleriano.
- Si G es euleriano, entonces G se descompone en ciclos disjuntos por aristas.

Ahora, si G es regular de grado par, entonces los ciclos en alguna descomposición pueden ser agrupados para formar 2-factores:

Teorema (Petersen-1891)

Si G es $2k$ -regular, entonces G tiene un 2-factor.

ALGO SOBRE f -FACTORES

- Dada una función $f : V(G) \rightarrow N \cup \{0\}$, un f -factor de G es un factor H tal que $d_H(v) = f(v)$, para todo $v \in v(G)$.

Existen varias caracterizaciones para grafos que tienen un f -factor. Una corresponde a Tutte (1952).

La más “interesante”, también de Tutte, **reduce** este problema al de buscar un 1-factor en un grafo construido convenientemente:

Teorema (Tutte - 1954) G tiene un f -factor si y sólo si cierto grafo H (construcción en el pizarrón) tiene un 1-factor.