

Centro de Investigación y de Estudios Avanzados  
del Instituto Politécnico Nacional  
Unidad Guadalajara

# **Control de un vehículo aéreo no tripulado (UAV) para reconcimimiento en interiores**

Tesis que presenta:

**Omar Abraham Villanueva Grijalva**

para obtener el grado de:

**Maestro en Ciencias**

en la especialidad de:

**Ingeniería Eléctrica**

Directores de Tesis

**Dr. Bernardino Castillo Toledo**

**Dr. Eduardo José Bayro Corrochano**



# **Control de un vehículo aéreo no tripulado (UAV) para reconcimimiento en interiores**

**Tesis de Maestría en Ciencias  
Ingeniería Eléctrica**

Por:

**Omar Abraham Villanueva Grijalva**  
Ingeniero en Mecatrónica  
Universidad de Sonora 2008-2012

Becario de Conacyt, expediente no. 300573

Directores de Tesis  
**Dr. Bernardino Castillo Toledo**  
**Dr. Eduardo José Bayro Corrochano**

CINVESTAV del IPN Unidad Guadalajara, Septiembre de 2015.



# Resumen

Los vehículos aéreos no tripulados, en especial los multi-rotores, se han convertido en una de las corrientes principales para el desarrollo de un gran rango de aplicaciones que van desde actividades como búsqueda y rescate, vigilancia, hasta otras aplicaciones más simples como filmación aérea o control de inventarios en bodegas. De un sin fin de posibles aplicaciones para estos vehículos, este trabajo se enfoca sólo en los casos donde el vehículo es un dron de tipo *quadrotor*, o cuadricóptero, y la aplicación se desarrolla en un ambiente cerrado y estructurado, sin acceso a ningún sistema externo de medición para posición, como cámaras o sistemas de posicionamiento global, con la finalidad de reconocer el entorno y navegar de manera autónoma y segura.

Una posible solución para este problema consta básicamente de un prototipo instrumentado tipo quadrotor, el cual cuenta con un sensores para desempeñar algoritmos de mapeo y localización simultánea, permitiendo estimar tanto el estado de la planta como el mapa del entorno, cuya información es utilizada para la generación de trayectorias.

Una vez que se cuenta con una trayectoria a seguir y se tiene el estado completo de la planta, es posible realizar el seguimiento de trayectoria mediante un control robusto, basado en una técnica de modos deslizantes por bloques, usando un algoritmo de tipo *Super-Twisting* en los bloques relacionados con la dinámica de rotación, mientras que en la dinámica de traslación se utiliza un controlador diseñado por medio de una función de Lyapunov. El controlador diseñado para el subsistema de traslación es robusto y suave, de manera que puede generar las referencias para el subsistema de rotación, tanto de posición como de velocidad angular, ya que su derivada está definida para todo tiempo, cosa que no sucede con el algoritmo de *Super-Twisting*. Se demuestran condiciones de última cota para las soluciones del sistema completo en lazo cerrado utilizando el criterio de funciones de Lyapunov.

El trabajo se centra en mostrar las ventajas que ofrece este tipo de control con respecto a otros encontrados en la literatura, así como la posible implementación en el sistema operativo de robots (ROS *Robot Operating System*). En este trabajo se presentan los resultados en simulación de la aplicación de los esquemas utilizados.



# Abstract

The Unmanned Aerial Vehicles (UAVs), especially multi-rotors, are becoming the mainstream in civilian realm for performing a wide range of applications involving search and rescue, surveillance, and more simple applications like aerial filming or inventory control in warehouses. From endless potential applications for autonomous vehicles, this work focuses only in cases where the vehicle is a quadrotor drone type and the application is developed in a closed and structured environment without access to an external positioning system, such as cameras or a Global Positioning System (GPS), in order to recognize the environment and navigate autonomously and safely.

A possible solution for this problem basically consists in an instrumented prototype quadrotor type, which is equipped with sensors to perform the Simultaneous Localization and Mapping (SLAM) algorithm. This algorithm allows to estimate the state of the plant and the map of the environment. The information is used for the trajectory generation.

Once the path to be followed and the full states of the plant are known, it is possible to perform the tracking trajectory via a robust control technique based on a sliding mode block control, using the super-twisting algorithm for the blocks involved in the rotational dynamics. However for the blocks involved in the translational dynamics a controller based on the Lyapunov function is designed. The controller designed for the translational subsystem is smooth and robust such that it can generate the references to be followed by the rotational subsystem, due to the fact that the derivative of the control laws are defined for all time, this cannot be achieved by the super-twisting algorithm. A globally uniformly bounded stability property is proved for the complete closed loop system using the criteria of the Lyapunov functions.

The work focuses on showing the advantages that offers this control over others found in the literature, and the possible implementation in the Robot Operating System (ROS). This work presents simulation results for the application of the schemes used.





# Agradecimientos

Aprovecho este espacio para agradecer primeramente a Dios por haberme dado la oportunidad de estudiar la maestría y terminar con éxito, por haberme dado unos padres maravillosos, hermanos y amigos excepcionales.

Agradezco a mi padres Joel Francisco Villanueva Urquijo y Maria de la Paz Grijalva Ruiz, y a mis pastores, que han sido como padres para mi, por su apoyo incondicional, su sabio consejo, sus oraciones y su gran ejemplo. Mi esperanza es que algún día llegue a ser como ellos.

También quiero agradecer a los doctores del grupo de control automático, en especial a mis asesores, el Dr. Bernardino Castillo Toledo y el Dr. Eduardo José Bayro Corrochano, por la formación académica que me han brindado y su colaboración en este proyecto, y a mi maestro de ingeniería Jesús Pacheco, que aun después de haber terminado la universidad, sigue brindando sus consejos.

Agradezco a mis compañeros de generación “Cont13” por su hermandad y buen compañerismo, que fueron de gran ayuda para mi formación como maestro en ciencias, también a mis amigos Carlos, Max, Gilberto, Ingrid, Caro, Yara, y muchos otros mas, por su entrañable amistad y apoyo, quienes hacen de mi una mejor persona.

Por último pero no menos importante, quiero agradecer a Conacyt por brindarme el apoyo económico y al Cinvestav Guadalajara por darme la oportunidad de ser uno de sus estudiantes.



# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Planteamiento del problema . . . . .	2
1.2. Antecedentes . . . . .	3
1.3. Motivación y objetivos . . . . .	4
1.3.1. Motivación . . . . .	4
1.3.2. Objetivos . . . . .	6
1.4. Delimitaciones . . . . .	6
1.5. Estructura de la tesis . . . . .	6
<b>2. Estado del arte</b>	<b>9</b>
2.1. Introducción . . . . .	9
2.2. Funcionamiento básico de <i>quadrotors</i> . . . . .	10
2.3. Modelo dinámico del <i>quadrotor</i> . . . . .	12
2.4. Sistemas de control de <i>quadrotors</i> . . . . .	12
2.5. Algoritmos de reconocimiento del entorno para vehículos móviles . . . . .	14
<b>3. Marco teórico</b>	<b>15</b>
3.1. Cinemática aplicada . . . . .	15
3.1.1. Transformaciones generales . . . . .	15
3.1.2. Velocidad angular . . . . .	18
3.1.3. Velocidad de un cuerpo rígido . . . . .	20
3.1.4. Aceleración angular . . . . .	21

3.1.5. Aceleración de un cuerpo rígido . . . . .	21
3.2. Dinámica aplicada . . . . .	22
3.2.1. Fuerza y Momento . . . . .	22
3.2.2. Dinámica de traslación de cuerpos rígidos . . . . .	23
3.2.3. Dinámica de rotación de cuerpos rígidos . . . . .	23
3.2.4. Modelo dinámico de un cuerpo rígido de 6 grados de libertad . . . . .	24
3.3. Sistemas de control . . . . .	24
3.3.1. Estabilidad . . . . .	24
3.3.2. Control a bloques . . . . .	28
3.3.3. Modos deslizantes . . . . .	30
3.4. Algoritmo SLAM . . . . .	32
3.4.1. Proceso de SLAM . . . . .	33
3.4.2. Filtro de Kalman Extendido EKF . . . . .	38
<b>4. Desarrollo teórico</b>	<b>41</b>
4.1. Modelo dinámico . . . . .	41
4.2. Objetivo de control . . . . .	46
4.3. Diseño de control . . . . .	48
4.3.1. Seguimiento de trayectoria . . . . .	49
4.3.2. Problema de estabilización . . . . .	58
4.4. Estabilidad en lazo cerrado . . . . .	61
4.5. Implementación en ROS . . . . .	62
4.5.1. Descripción de modelo y simulación . . . . .	63
4.5.2. Simulación de sensores . . . . .	63
4.5.3. Evaluando el paquete de ROS Hector Quadrotor . . . . .	65
<b>5. Resultados obtenidos</b>	<b>67</b>
5.1. Seguimiento de referencia constante . . . . .	68
5.2. Seguimiento de función lemniscata . . . . .	73
5.3. Seguimiento de trayectoria cuadrada . . . . .	77

ÍNDICE GENERAL	IX
5.4. Seguimiento de trayectoria helicoidal . . . . .	82
<b>6. Conclusiones y trabajo futuro</b>	<b>87</b>
6.1. Conclusiones . . . . .	87
6.2. Trabajo futuro . . . . .	88
<b>A. Demostraciones</b>	<b>89</b>
<b>B. Códigos</b>	<b>91</b>



# Índice de tablas

5.1. Parámetros de simulación. . . . .	67
5.2. Ganancias de control. . . . .	68
5.3. Errores de seguimiento de función lemniscata. . . . .	73
5.4. Errores de seguimiento de función lemniscata con perturbaciones. . . . .	75
5.5. Errores de seguimiento de trayectoria cuadrada. . . . .	77
5.6. Errores de seguimiento de trayectoria cuadrada con perturbaciones. . . . .	79
5.7. Errores de seguimiento de trayectoria cuadrada con dinámica no modelada. .	80
5.8. Errores de seguimiento de trayectoria helicoidal. . . . .	82





# Índice de figuras

1.1. Ejemplo de robot usado comúnmente para la implementación del algoritmo SLAM. [ <i>Copyright (c) 2014 Graz University of Technology</i> ] . . . . .	3
1.2. Edificio parcialmente colapsado después de un terremoto. [Créditos: <i>C.E. Meyer, U.S. Geological Survey</i> ] . . . . .	5
2.1. Principales tipos de <i>quadrotors</i> (configuración + y configuración x). . . . .	10
2.2. Principales movimientos generados por las velocidades angulares de los motores de un <i>quadrotor</i> . . . . .	11
2.3. Estructura del controlador PID para un eje. . . . .	13
3.1. Marco de referencia local $B$ rotando alrededor del punto $O$ del marco de referencia global $G$ . . . . .	16
3.2. Cuerpo rígido $B(Oxyz)$ giratorio con un punto fijo $O$ en el marco de referencia $G(OXYZ)$ . . . . .	18
3.3. Cuerpo rígido con un marco de referencia local $B(oxyz)$ fijo al cuerpo, el cual se mueve de manera libre en un marco de referencia global $G(OXYZ)$ . . . .	20
3.4. Cuerpo rígido con un marco de referencia local $B(Oxyz)$ fijo al cuerpo, el cual se mueve de manera libre en un marco de referencia global $G(OXYZ)$ . . . .	21
3.5. Un punto del cuerpo rígido en movimiento con velocidad ${}^G\mathbf{V}_P$ actuado por la fuerza $d\mathbf{f}$ . . . . .	23
3.6. Función relé. . . . .	30
3.7. Gráfica de error. . . . .	31
3.8. Pasos generales en el proceso de SLAM. . . . .	34
3.9. El vehículo es representado por el triángulo. Las estrellas son las <i>landmarks</i> . El robot mide la ubicación de las <i>landmarks</i> de manera inicial. . . . .	34

3.10. El vehículo se desplaza, y usando odometría se cree que esa es su posición actual.	35
3.11. El vehículo mide de nuevo la ubicación de las <i>landmarks</i> , pero se da cuenta que no corresponden las medidas a la posición que calculó mediante la odometría, por lo tanto, el robot no está donde se creía. . . . .	35
3.12. Ya que las mediciones de las <i>landmarks</i> son más confiables que la odometría, se utilizan dichas mediciones para corregir la posición del vehículo (la primer estimación es el triángulo con línea discontinua). . . . .	35
3.13. Debido a que los sensores también tienen incertidumbre, la posición real del vehículo puede diferir (triángulo sólido), sin embargo la segunda estimación es mucho mejor que la primera. . . . .	36
4.1. Relación entre el marco de referencia global $G$ y el marco de referencia local $B$ .	42
4.2. Diagrama de cuerpo libre sujeto a fuerzas externas expresadas en el marco de referencia local $B$ . . . . .	43
4.3. Estrategia de control jerárquico. . . . .	46
4.4. Medición de distancia a un punto de un objeto. . . . .	64
4.5. Medición continua de puntos en un plano en el espacio 3D. . . . .	65
4.6. Medición continua de puntos en un plano en el espacio 3D. . . . .	65
4.7. Visualización del ambiente de física Gazebo y del entorno cinemático Rviz. .	66
5.1. Seguimiento de referencias constantes con condiciones iniciales diferentes de cero. . . . .	69
5.2. Errores generales para el seguimiento de referencias constantes. . . . .	69
5.3. Superficies deslizantes para ángulos de Euler en seguimiento de referencias constantes. . . . .	70
5.4. Fuerzas generadas por cada motor para el seguimiento de referencias constantes.	70
5.5. Seguimiento de referencias constantes con condiciones iniciales diferentes de cero bajo perturbaciones externas. . . . .	71
5.6. Errores generales para el seguimiento de referencias constantes bajo perturbaciones externas. . . . .	71
5.7. Superficies deslizantes para ángulos de Euler en seguimiento de referencias constantes bajo perturbaciones externas. . . . .	72
5.8. Fuerzas generadas por cada motor para el seguimiento de referencias constantes bajo perturbaciones externas. . . . .	72

5.9. Emulación de perturbaciones de viento. . . . .	73
5.10. Comparación de posición del quadrotor en el espacio 3D contra las referencias para el seguimiento de la función lemniscata. . . . .	74
5.11. Fuerzas generadas por cada motor para el seguimiento de la función lemniscata. . . . .	74
5.12. Comparación de posición del quadrotor en el espacio 3D contra las referencias para el seguimiento de la función lemniscata, tomando en cuenta perturbaciones externas de viento. . . . .	75
5.13. Fuerzas generadas por cada motor para el seguimiento de la función lemniscata, tomando en cuenta perturbaciones externas de viento. . . . .	76
5.14. Seguimiento de la función lemniscata, tomando en cuenta perturbaciones externas de viento. . . . .	76
5.15. Comparación de posición del quadrotor en el espacio 3D contra las referencias para el seguimiento de una trayectoria cuadrada. . . . .	78
5.16. Fuerzas generadas por cada motor para el seguimiento de una trayectoria cuadrada. . . . .	78
5.17. Comparación de posición del quadrotor en el espacio 3D contra las referencias para el seguimiento de una trayectoria cuadrada. . . . .	79
5.18. Fuerzas generadas para el seguimiento de una trayectoria cuadrada. . . . .	80
5.19. Pose del quadrotor en el espacio 3D para el seguimiento de trayectoria. . . . .	81
5.20. Fuerzas generadas por cada motor para el seguimiento de trayectoria cuadrada. . . . .	81
5.21. Seguimiento de trayectoria cuadrada. . . . .	82
5.22. Comparación de posición del quadrotor en el espacio 3D contra las referencias para el seguimiento de una trayectoria helicoidal. . . . .	83
5.23. Fuerzas de viento. . . . .	83
5.24. Fuerzas generadas por cada motor para el seguimiento de una trayectoria helicoidal. . . . .	84
5.25. Seguimiento de trayectoria helicoidal. . . . .	84



# Capítulo 1

## Introducción

Los vehículos aéreos no tripulados (UAVs, *Unmanned Aerial Vehicles*), en especial los multi-rotores, se han convertido en una de las corrientes principales para el desarrollo de un gran rango de aplicaciones que van desde actividades como búsqueda y rescate, vigilancia, hasta otras aplicaciones más simples como filmación aérea o control de inventarios en bodegas. Esto se debe a las ventajas que este tipo de aeronaves presenta en comparación a otros tipos. Algunas de estas ventajas son: despegue y aterrizaje vertical, sustentación inmóvil en el aire, la habilidad de seguir trayectorias abruptas, entre otras.

Uno de los multi-rotores más populares en la actualidad es el cuadricóptero o *quadrotor*, denominado así porque cuenta con cuatro motores de propulsión. El *quadrotor* es un sistema no lineal, subactuado, sujeto a perturbaciones externas y a incertidumbre de parámetros. La mayoría de los trabajos de investigación realizados para este tipo de plataformas se han enfocado en el problema de estabilización así como en el seguimiento de trayectoria en espacios abiertos.

A pesar de ser un tema muy popular en la investigación, la mayoría de las aplicaciones se desarrollan en entornos donde se tienen sistemas externos de medición para la posición, como cámaras externas o sistemas de posicionamiento global (GPS, *Global Positioning System*). Infortunadamente, la mayoría de los espacios cerrados no cuentan con sistemas externos de medición. Esto limita las habilidades de mini-UAVs para operar en dichas áreas. Varios trabajos recientes estudian este problema utilizando la odometría de la planta, usando observadores que dependen de la lectura de sensores inerciales como acelerómetros. El problema con esto es que las mediciones van acumulando el error de medición conforme pasa el tiempo.

Por otro lado, algoritmos de localización y mapeo simultáneo (SLAM, *Simultaneous Localization and Mapping*) han sido implementados utilizando sensores que detectan el entorno, como cámaras o láseres, para generar mapas del entorno a la vez que utilizan dicha información para estimar el estado de la planta. Existen grandes avances en la aplicación de algoritmos de SLAM para navegación de dispositivos móviles en interiores, así como para

mapeo de espacios cerrados; sin embargo, estos algoritmos han sido implementados principalmente en vehículos terrestres o submarinos. Intentos por reproducir resultados similares en UAVs no han sido tan exitosos debido a las limitaciones de carga permitida en estos vehículos, pues restringen la calidad de sensores y la capacidad de procesamiento que puede llevar la unidad a bordo, aunado a las dinámicas inestables y rápidas de las aeronaves.

Las grandes ventajas que prometen los UAVs a los investigadores para simplificar la ejecución de tareas complejas desplazándose sobre terrenos desafiantes, serán posibles al superar con éxito los retos que conllevan este tipo de aeronaves.

En esta sección se muestra el planteamiento del problema, algunos antecedentes en el campo, los objetivos y motivaciones, algunas delimitaciones del proyecto y la estructura de la tesis.

## 1.1. Planteamiento del problema

En el área de robots móviles terrestres, [Thrun et al., 2001] muestra la implementación exitosa del algoritmo SLAM combinando odometría con sensores como sonares, láseres o cámaras. La ejecución satisfactoria de estas técnicas se muestra en robots terrestres que se mueven con desplazamientos lentos y en ambientes controlados, como el que se muestra en la Figura 1.1.

El tratar de implementar estos algoritmos de SLAM en UAVs llevará a obtener malos resultados, pues los UAVs enfrentan diferentes retos y dificultades. Esto lleva a requerimientos y suposiciones que no se consideraron al desarrollar dichos algoritmos.

Una de estas dificultades es el límite de carga útil, que hace referencia a la fuerza máxima de sustentamiento vertical que pueden ejercer los motores de la aeronave. Esto limita el tipo de sensores y equipo de procesamiento computacional que puede cargar el multi-rotor en comparación a los usados en vehículos terrestres, lo que lleva a usar sensores de menor calidad, con medidas de mayor incertidumbre o ruido, y sistemas embebidos con menor capacidad de cómputo.

Otra limitación es la complejidad de la dinámica de la aeronave, la cual es no lineal, sujeta a perturbaciones y de respuesta rápida en comparación con la que presentan los robots terrestres. Esto trae complicaciones en las áreas de medición, estimación, control y planificación para el vehículo. Para solucionar el problema de mediciones ruidosas, la técnica del filtro de Kalman es usada comúnmente con el fin de reducir la incertidumbre de las mediciones, así como para obtener una mejor estimación del estado verdadero del UAV. Sin embargo, el uso de dicha técnica requiere de una velocidad de muestreo suficientemente rápida para poder observar las dinámicas de alta frecuencia de la aeronave. Además, como lo muestra [Bachrach, 2009], el *quadrotor* se puede modelar como un sistema de segundo orden subamortiguado,



Figura 1.1: Ejemplo de robot usado comúnmente para la implementación del algoritmo SLAM. [*Copyright (c) 2014 Graz University of Technology*]

por lo que el control debe agregar amortiguamiento al sistema para compensar la dinámica, esto hace énfasis en la importancia de la estimación de la posición así como de la velocidad de la nave. En la mayoría de los algoritmos de SLAM para robots terrestres se desprecia la velocidad.

Otra suposición que se debe considerar, y una de las más importantes, es el movimiento en un entorno 3D, pues el trabajo tradicional tan solo considera movimientos en una sección de dicho entorno, lo cual es representado en un plano 2D.

## 1.2. Antecedentes

En el Centro de Investigación y Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional Unidad Guadalajara se han realizado investigaciones en el área de control de UAVs, lo cual sirve como antecedente para este trabajo.

Entre los trabajos más relevantes se encuentra la tesis doctoral de [Luque-Vega, 2014], que tiene como objetivo general el diseño e implementación de UAVs capaces de ejecutar vuelos autónomos para la tarea de inspección de líneas de poder. Este trabajo desarrolla controladores robustos utilizando una combinación entre la técnica de control a bloques (BC, *Block Control*) y la técnica de modos deslizantes (SM, *Sliding Modes*), en especial el algoritmo

de *Super-Twisting* (STA, *Super-Twisting Algorithm*). Los resultados de este trabajo muestran un buen desempeño del sistema de control para el seguimiento de trayectoria en espacios abiertos, aunque también presenta el problema de puntos de singularidad en el control. La robustez se alcanza para las perturbaciones que están dentro del espacio de controlabilidad, o las que se conocen como perturbaciones tipo *match*. Para rechazar las perturbaciones tipo *no match* se implementa un diferenciador exacto y un observador de perturbaciones.

Otra investigación relevante se encuentra en la tesis de maestría [Arellano, 2014]. El objetivo principal de este trabajo es el de realizar seguimiento de puntos en el espacio, donde, con el objetivo de solucionar el problema de costo computacional que enfrentan los sistemas de control de posición para un *quadrotor* encontrados en la literatura, propone un modelo dinámico no lineal basado en el cuaternión unitario para aumentar la frecuencia de operación de un controlador robusto, también haciendo uso de las técnicas de BC, el STA, el diferenciador exacto y el observador de perturbaciones.

Los mayores retos que enfrentan los trabajos mencionados recaen en la implementación, ya que en ambos casos es necesario programar los algoritmos de control, diferenciadores exactos y observadores para las perturbaciones, tomando en cuenta que sólo pueden realizar tareas en espacios abiertos donde cuenten con información de sistemas externos de medición, así como estaciones remotas terrestres para comandar la aeronave.

Por lo tanto las aportaciones principales con respecto a estos trabajos son:

- Rechazo de perturbaciones tipo *no match* por medio de pseudo-contróles, sin necesidad de implementar observadores.
- Demostración de estabilidad del sistema completo en lazo cerrado.
- Independencia de sistemas externos de medición de posición.

## 1.3. Motivación y objetivos

### 1.3.1. Motivación

El potencial del uso de UAVs en tareas de búsqueda y rescate, inspección, mapeo, vigilancia, entre otras, es de gran interés a explorar, debido a las habilidades de vuelo que presentan en favor de la realización de estas tareas, y en especial situaciones que podrían poner en riesgo a personas.

Enviar personal de rescate dentro de un edificio parcialmente colapsado por un terremoto (Figura 1.2) en busca de sobrevivientes, es poner a más personas en un gran riesgo, pues no



se sabe qué es lo que les espera en el interior del edificio; esto limita la capacidad de tomar buenas decisiones acerca de si es seguro seguir cierto camino.



Figura 1.2: Edificio parcialmente colapsado después de un terremoto. [Créditos: *C.E. Meyer, U.S. Geological Survey*]

Operar en ambientes como éste u otros similares requieren de robots con capacidades de navegar sobre terrenos difíciles y evadir obstáculos de forma segura para obtener información del entorno que pueda ser útil al personal de rescate.

Una posible solución consiste en un robot móvil (UAV) capaz de desplazarse sobre terrenos difíciles y navegar en espacios cerrados de manera segura, que además recabe información del entorno. Esto implica realizar tareas de reconocimiento del ambiente, evasión de obstáculos y seguimiento de trayectorias.

Lo cual lleva a definir los siguientes puntos:

- Construcción de prototipo instrumentado.
- Diseño de control robusto para seguimiento de trayectorias.
- Desarrollo de técnicas de reconocimiento del entorno y medición del estado.
- Implementación de algoritmos de evasión de obstáculos y de generación de trayectorias.

### 1.3.2. Objetivos

Para definir los objetivos del trabajo de manera sensata, que aporten en parte a la solución del problema y además sean alcanzables, se debe tener en mente el panorama completo del problema. Esto implica conocer las restricciones del proyecto, así como el tiempo y recursos disponibles. Tomando esto en cuenta, se ha decidido que este trabajo sólo se enfocara en las áreas de control, reconocimiento del entorno y medición del estado.

Para lo cual se definen los siguientes objetivos:

- Diseñar un controlador robusto para seguimiento de trayectorias, cuidando la complejidad del mismo pensando en la posible implementación.
- Implementar la técnica de reconocimiento del entorno y medición del estado SLAM.

## 1.4. Delimitaciones

Aunque se desarrollo trabajo en la construcción de un prototipo instrumentado, en la implementación del control en el sistema embebido PIXHAWK y en la implementación del algoritmo de SLAM usando el sensor RP-Lidar, no se logro completar con éxito ninguna de estas tareas, debido a la complejidad de cada una, el poco tiempo y recursos disponibles.

Por lo cual se limito el trabajo al diseño en tiempo continuo del control de un *quadrotor* para el seguimiento de trayectorias y a mostrar los principios básicos del algoritmo SLAM.

Dejando en claro que las aportaciones de esta tesis se encuentran solo en el área del diseño de control, no en la implementación del mismo en un *quadrotor* real, ni en la validación de la estimación del estado proveniente de la técnica SLAM. Por lo cual, el contenido principal de la tesis es:

- Diseño de un controlador robusto para seguimiento de trayectorias, cuidando la complejidad del mismo pensando en la posible implementación.
- Exposición de la técnica de reconocimiento del entorno y medición del estado SLAM para su posible implementación.

## 1.5. Estructura de la tesis

A continuación se describe la estructura de la tesis. En el Capítulo 2 se muestra el estado del arte de proyectos similares. En el Capítulo 3 se muestran algunos preliminares matemáticos, teoría de control, así como técnicas y algoritmos utilizados en el área. El Capítulo 4

muestra las propuestas que se han desarrollado para el diseño del modelo dinámico y el sistema de control, así como el análisis de estabilidad del sistema completo en lazo cerrado utilizando el criterio de funciones de Lyapunov. En este mismo capítulo también se muestran las bases para la interacción e implementación del control en el ambiente de simulación Gazebo en ROS. Por último, en el Capítulo 5 se muestran los resultados obtenidos de las simulaciones en Simulink y el Capítulo 6 las conclusiones y el trabajo futuro.



## Capítulo 2

# Estado del arte

### 2.1. Introducción

Los vehículos aéreos no tripulados se han convertido en objeto de gran interés tanto para propósitos recreativos como de investigación. Cabe mencionar que existen varias categorías que clasifican a los UAVs por su funcionamiento y su construcción. En esta tesis sólo se discutirá una categoría en especial, los multi-rotors, los cuales tienen la capacidad de realizar despegues y aterrizajes verticales (VTOL, *Vertical Take-off and Landing*) y su control de movimiento es mediante la variación de velocidad de los rotores.

El multi-rotor utilizado en este trabajo es el *quadrotor* (o cuadricóptero), vehículo que es propulsado por cuatro rotores ubicados en un mismo plano espacial. La disposición de los rotores es en forma simétrica y equidistante del centro del vehículo, teniendo generalmente una forma de cruz, como se ve en la Figura 2.1.

La investigación de estos vehículos ha producido una gran cantidad de sistemas con una amplia capacidad para operar en espacios abiertos. Por ejemplo, vehículos que pueden desplazarse a grandes velocidades [Scherer et al., 2007], o realizar acrobacias [Coates et al., 2008]. Existen UAVs capaces de aterrizar de manera autónoma, realizar un mapeo del terreno, e incluso capaces de coordinarse con otros vehículos aéreos [Mercado et al., 2013] o terrestres [Bachrach et al., 2008]. Mientras que cada una de estas áreas representa un reto para la investigación, incluyendo el modelado y el diseño de controladores, todos estos sistemas dependen de mediciones externas. Existen propuestas que consisten en robots autónomos con sensores a bordo los cuales han logrado navegar en espacios cerrados utilizando cámaras [Altuğ et al., 2002], o láseres [Nguyen et al., 2005].

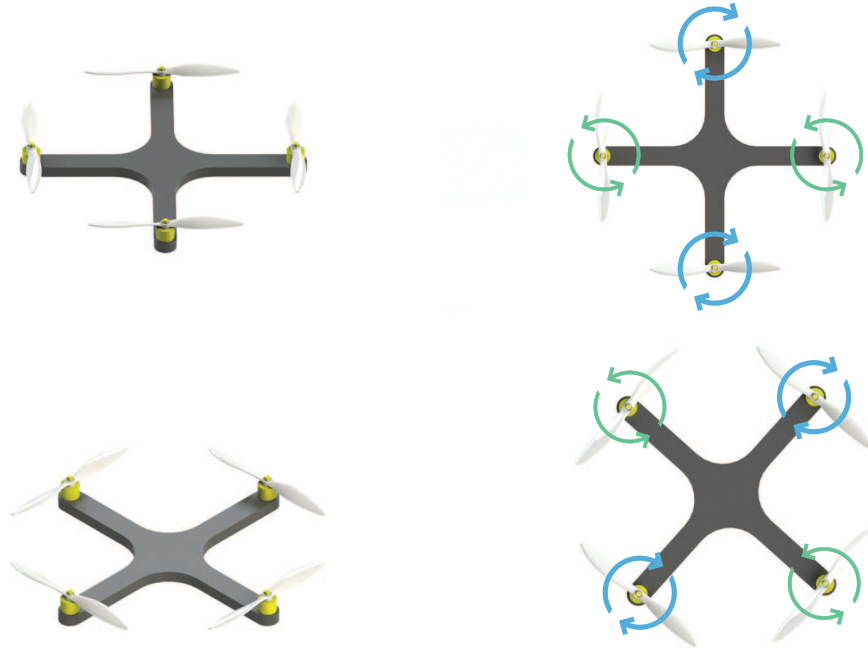


Figura 2.1: Principales tipos de *quadrotors* (configuración + y configuración x).

## 2.2. Funcionamiento básico de *quadrotors*

El *quadrotor* tiene seis grados de libertad (DoF, *Degrees of Freedom*), ya que es una aeronave sin restricciones en ninguno de sus ejes. Estos grados de libertad corresponden a los tres ejes de desplazamiento que conforman un espacio tridimensional y las respectivas rotaciones alrededor de los mismos. Como se demostrará más adelante, el *quadrotor* sólo puede ser accionado en cuatro de sus grados de libertad de manera independiente, lo cual establece una restricción en cuanto a la posibilidad de controlar todas sus variables de estado de manera independiente.

Los actuadores de la planta son los cuatro motores, los cuales generan fuerzas y momentos al girar con cierta velocidad las hélices sujetas a los rotores de cada motor. Es posible combinar dichas fuerzas y momentos de tal manera que se pueden generar hasta cuatro diferentes movimientos generales, como los que se muestran en la Figura 2.2.

Dichos movimientos se clasifican como una fuerza y tres torques. Si los cuatro actuadores ejercen la misma fuerza hacia arriba (suponiendo que el sistema es perfectamente simétrico), entonces la aeronave se trasladará hacia arriba. Este control será denominado en el resto del

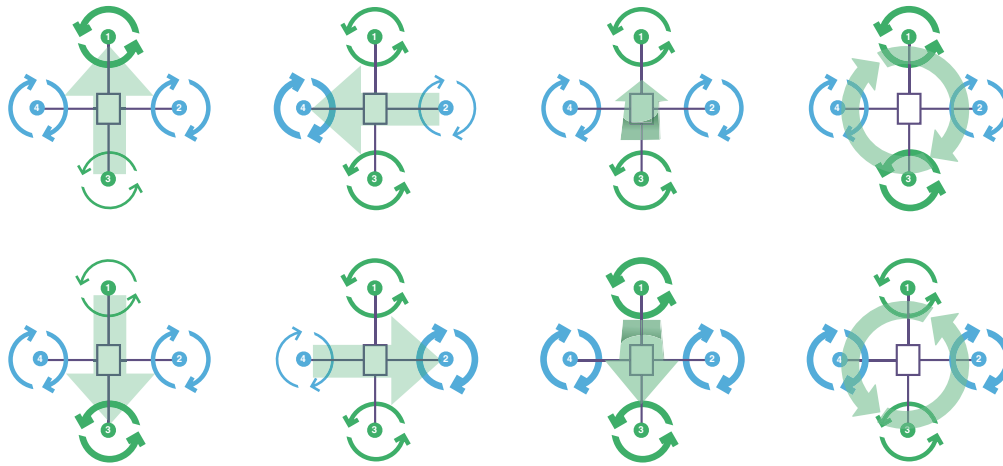


Figura 2.2: Principales movimientos generados por las velocidades angulares de los motores de un *quadrotor*.

trabajo como el control de sustentación. En cambio, si se aplica empuje diferencial, es decir que algunos actuadores generan más fuerza que otros, entonces, se generan momentos en diferentes ejes provocando así que el UAV cambie su orientación. Se puede inferir que, dada esta arquitectura, es imposible que la aeronave se desplace hacia adelante, atrás o a los lados sin tener que cambiar su orientación.

Usualmente los rotores del *quadrotor* tienen igual sentido de rotación sobre cada eje y contrario entre ejes, como se puede observar en la Figura 2.1. Esto hace que la fuerza de las hélices que ejercen por fricción del aire con respecto al plano  $x - y$  local sea compensada, evitando que el *quadrotor* gire con respecto al eje  $z$  local.

En el caso que la aeronave se encuentre perfectamente nivelada, este empuje será puramente vertical, por lo que no aportará fuerzas laterales que modifiquen la posición del *quadrotor* en el plano  $x - y$ . Encontrándose en esta orientación, la nave no podrá desplazarse horizontalmente. Para lograr un desplazamiento horizontal, la aeronave deberá inclinarse con respecto al plano de la tierra, con el fin de introducir una componente de propulsión horizontal, la cual será la proyección del vector ortogonal al plano del *quadrotor* en el plano de tierra. Considerando esto, es evidente la estrecha relación que existe entre la correcta orientación de la aeronave y el desplazamiento de la misma. Si existiese un error en la orientación, podrían ocurrir desplazamientos indeseados en direcciones erróneas, es decir, se deduce que siempre que la aeronave no tenga una orientación puramente vertical, ésta se estará acelerando en alguna dirección, por lo cual es de vital importancia poder minimizar el error en la orientación vertical.

Como punto adicional, si se considera la necesidad de un control de traslación para la aeronave, la efectividad de dicho controlador dependerá directamente de la bondad del con-

trolador de orientación. Es decir que el control de orientación será el más básico o de más bajo nivel en la aeronave.

### 2.3. Modelo dinámico del *quadrotor*

La mayoría de los trabajos en la literatura modelan la dinámica del *quadrotor* bajo los principios de las ecuaciones de movimiento de cuerpo rígido de Newton-Euler (como se ve en [Bachrach, 2009], [Benallegue et al., 2006], [Derafa et al., 2010], entre otros); el cual se aborda en esta tesis. Vale la pena mencionar que existen modelos basados en el formalismo de Euler-Lagrange [Carrillo et al., 2012] o en Cuaterniones [Arellano, 2014].

Las ecuaciones de Newton-Euler (3.31) y (3.32), las cuales se verán con más detalle en el Capítulo 3, describen por completo el comportamiento dinámico de un cuerpo rígido de 6 DoF. Estas ecuaciones son:

$$\begin{aligned} {}^B\mathbf{F} &= m_G^B \mathbf{a}_B + m_G^B \omega_B \times {}^B\mathbf{V}_B, \\ {}^B\mathbf{T} &= {}^B I_G^B \dot{\omega}_B + {}^B \omega_B \times ({}^B I_G^B \omega_B). \end{aligned} \quad (2.1)$$

En resumen, se puede ver que el modelo dinámico de un *quadrotor* puede ser representado por el modelo dinámico de un cuerpo rígido de 6 DoF con ecuaciones de segundo orden, donde  ${}^B\mathbf{F}$  y  ${}^B\mathbf{T}$  representan las fuerzas y momentos generados por los actuadores.

Dependiendo de la construcción del *quadrotor*, las fuerzas  ${}^B\mathbf{F}$  y los torques  ${}^B\mathbf{T}$  tienen diferentes formas. Por lo general éstas son combinaciones de las fuerzas que ejercen los motores de la aeronave en las componentes principales del marco de referencia local, pero esto se verá más adelante.

### 2.4. Sistemas de control de *quadrotors*

Existe en la literatura una amplia gama de controladores de *quadrotors*, que van desde lo más básico como controles proporcionales hasta controladores más complejos como lógica difusa [Rabhi et al., 2011], modos deslizantes [Derafa et al., 2010], *feedback linearization* [Benallegue et al., 2006], *backstepping* [Bouabdallah y Siegwart, 2005], LQR [Martin-Schermuk, 2012], entre otros [Tayebi y McGilvray, 2006]. Cabe mencionar que el controlador más común para este tipo de aeronaves es el control PID.

Este tipo de controlador está ampliamente difundido y estudiado en el área de control debido a su simplicidad ([Kharsansky, 2013] y otros). Además de la popularidad del controlador, el mismo es frecuentemente utilizado para hacer comparaciones entre diversas técnicas



de control, sirviendo como una referencia conocida y probada. Es por eso que se muestra de manera resumida una forma de control PID que se utiliza para controlar un *quadrotor*.

Le ecuación que determina la acción de control realizada por un controlador tipo PID continuo es en general:

$$u(t) = K_p e(t) + K_i \int_0^t e(\tau) d\tau + K_d \frac{de(t)}{dt}. \quad (2.2)$$

Donde:

- $u(t)$ : Salida del controlador,
- $e(t)$ : Error entre la variable de proceso y su referencia,
- $K_p, K_i, K_d$ : Constantes del controlador.

Como se verá más adelante, es posible controlar cada uno de los tres ejes de rotación por separado, por lo que el controlador final se compondrá de tres controladores PID independientes, uno para cada eje de la aeronave. Además, es posible estabilizar la aeronave controlando la velocidad angular del eje en cuestión en función del elemento de error correspondiente  $e_j$ . En la Figura 2.3 se muestra la estructura de un controlador PID para un eje cualquiera.

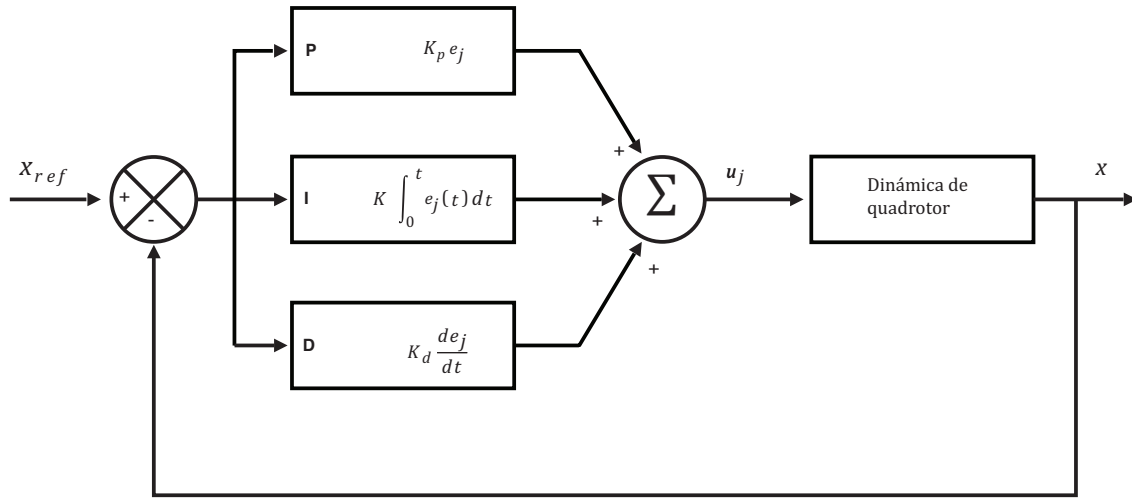


Figura 2.3: Estructura del controlador PID para un eje.

Utilizando esta técnica de control se logran resultados aceptables, donde sólo hace falta calcular las ganancias del controlador para dar la respuesta apropiada al sistema de control, utilizando cualquier método para sintonizar ganancias como el lugar de las raíces o el método de Ziegler-Nichols.

## 2.5. Algoritmos de reconocimiento del entorno para vehículos móviles

Un gran problema que presentan los vehículos no tripulados en ambientes sin acceso a GPS, es la medición del movimiento de ellos mismos con respecto a un marco de referencia global. Esto es principalmente porque no tienen una forma directa de cómo medir el movimiento, por lo tanto el vehículo debe confiar en algoritmos sofisticados que intentan dar una medida aproximada de los movimientos producidos, ya sea calculando la odometría del robot, utilizando información de *encoders* en las llantas de un robot terrestre o pasando por un doble integrador la señal medida de los sensores inerciales, con el fin de estimar la posición relativa con respecto a un valor inicial. El problema con integrar las aceleraciones está en que el error acumulado de las estimaciones debido a los errores de medición de la unidad de medición inercial (IMU, *Inertial Measurement Unit*) puede ser grande.

Por otro lado, se puede confiar en sensores exteroceptivos al comparar las mediciones del ambiente que se obtienen de manera sucesiva y de ese modo poder estimar el movimiento relativo del vehículo. Este proceso puede ser desempeñado utilizando sensores como cámaras o láseres, donde cada sensor tiene sus ventajas y desventajas en términos de costo computacional, exactitud y fallas ante diferentes condiciones de iluminación o transparencia de objetos.

El algoritmo de reconocimiento del entorno más usado en la actualidad es el algoritmo de SLAM. Este algoritmo básicamente consiste en la localización de ciertos puntos de interés en el ambiente y la re-localización de los mismos, a partir de estas mediciones se realiza una triangulación del vehículo con respecto a los puntos medidos y la generación de un mapa del entorno [Riisgaard y Blas, 2003].

## Capítulo 3

# Marco teórico

En este capítulo se presentan las herramientas necesarias y fundamentos básicos para el desarrollo de la tesis. Se comienzan por conocimientos básicos de cinemática de cuerpos libres, abordando también el tema de la dinámica de cuerpos rígidos; algunos preliminares de control, como estabilidad, control a bloques y modos deslizantes; y concluyendo con los principios básicos para poder comprender el algoritmo de localización y mapeo SLAM.

### 3.1. Cinemática aplicada

Posición, velocidad y aceleración, son los componentes de lo que se conoce como información cinemática. El análisis de posición angular es la clave para calcular la cinemática de cuerpos rígidos en movimiento relativo. En esta sección se muestra un breve resumen de la cinemática de cuerpos rígidos, ya que el quadrotor se puede tratar como un cuerpo rígido en movimiento en un marco referencia inercial. Para mayores detalles el lector puede referirse a [Jazar, 2011].

#### 3.1.1. Transformaciones generales

Considere un marco de referencia cartesiano  $Oxyz$  fijo a un cuerpo rígido  $B$  que está sujeto al suelo  $G$  en el origen  $O$ . La orientación del cuerpo rígido  $B$  con respecto al marco de referencia global  $OXYZ$  sujeto al suelo se conoce cuando la orientación de  $Oxyz$  con respecto a  $OXYZ$  es determinada en la Figura 3.1.

Si el cuerpo rígido  $B$  gira  $\alpha$  grados sobre el eje- $Z$  del marco de referencia global, entonces las coordenadas de cualquier punto  $P$  del cuerpo rígido en el marco de referencia local o

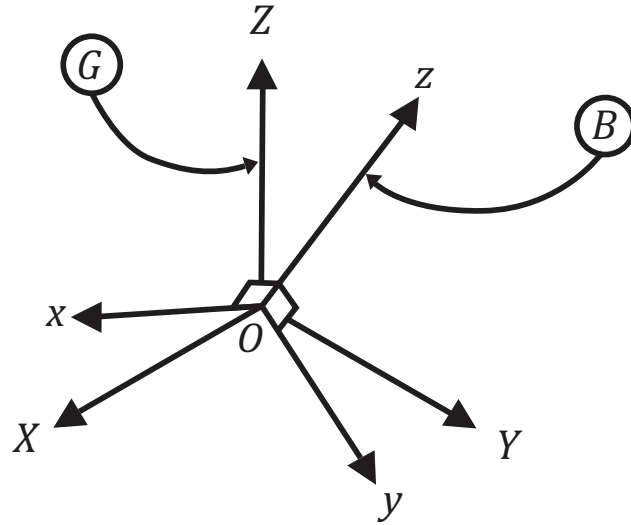


Figura 3.1: Marco de referencia local  $B$  rotando alrededor del punto  $O$  del marco de referencia global  $G$ .

global está relacionado por la ecuación

$${}^G\mathbf{r} = R_{Z,\alpha} {}^B\mathbf{r} \quad (3.1)$$

donde

$$R_{Z,\alpha} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (3.2)$$

$${}^G\mathbf{r} = \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}, \quad (3.3)$$

y

$${}^B\mathbf{r} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}. \quad (3.4)$$

De manera similar, los giros de  $\beta$  grados sobre el eje  $Y$ , y  $\gamma$  grados sobre el eje  $X$  del marco de referencia global relacionan la posición del punto  $P$  del marco de referencia local al global usando las siguientes ecuaciones:

$${}^G\mathbf{r} = R_{Y,\beta} {}^B\mathbf{r} \quad (3.5)$$

$${}^G\mathbf{r} = R_{X,\gamma} {}^B\mathbf{r} \quad (3.6)$$

donde

$$R_{Y,\beta} = \begin{bmatrix} \cos\beta & 0 & \sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta \end{bmatrix}, \quad (3.7)$$

$$R_{X,\gamma} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\gamma & -\sin\gamma \\ 0 & \sin\gamma & \cos\gamma \end{bmatrix}. \quad (3.8)$$

La posición global de un punto  $P$  en un cuerpo rígido  $B$  con el vector de posición  $\mathbf{r}$ , después de una secuencia de rotaciones  $R_1, R_2, R_3, \dots, R_n$  sobre los ejes principales, puede ser descrito por

$${}^G\mathbf{r} = {}^G R_B {}^B\mathbf{r}, \quad (3.9)$$

donde

$${}^G R_B = R_n \cdots R_3 R_2 R_1. \quad (3.10)$$

El término  ${}^G R_B$  se conoce como la matriz de rotación global, la cual hace el mapeo de un punto del espacio en el marco de referencia local a sus respectivas coordenadas en el marco de referencia global. Debido a que la multiplicación de matrices es no conmutativa, la secuencia de las rotaciones es importante.

Además, el mapeo inverso,  ${}^B\mathbf{r} = {}^G R_B^{-1} {}^G\mathbf{r}$ , se puede calcular usando  ${}^B R_G$

$${}^B\mathbf{r} = {}^B R_G {}^G\mathbf{r}, \quad (3.11)$$

donde

$$|{}^B R_G| = |{}^G R_B| = 1, \quad (3.12)$$

y

$${}^B R_G = {}^G R_B^{-1} = {}^G R_B^T. \quad (3.13)$$

Aunque existe una infinidad de rotaciones sucesivas, hay un estándar para representar la orientación de un objeto en el espacio. Una de las representaciones más comunes es conocida como ángulos de Euler, los cuales son tres rotaciones consecutivas con respecto a los ejes principales de alguno de los marcos de referencia. En esta tesis sólo se trabajará con un tipo de transformación de ángulos de Euler, la cual se conoce como la matriz de rotación *roll-pitch-yaw* global. Donde las rotaciones con respecto a los ejes  $X$ ,  $Y$  y  $Z$  son conocidas como los ángulos de *roll*( $\phi$ ), *pitch*( $\theta$ ) y *yaw*( $\psi$ ), respectivamente. Esta matriz es<sup>1</sup>

$${}^G R_B = R_{Z,\psi} R_{Y,\theta} R_{X,\phi} = \begin{bmatrix} C_\psi C_\theta & C_\psi S_\theta S_\phi - S_\psi C_\phi & C_\psi S_\theta C_\phi + S_\psi S_\phi \\ S_\psi C_\theta & S_\psi S_\theta S_\phi + C_\psi C_\phi & S_\psi S_\theta C_\phi - C_\psi S_\phi \\ -S_\theta & C_\theta S_\phi & C_\theta C_\phi \end{bmatrix}. \quad (3.14)$$

---

<sup>1</sup> Las abreviaciones  $S_{(\cdot)}$ ,  $C_{(\cdot)}$  y  $T_{(\cdot)}$  denotan  $\sin(\cdot)$ ,  $\cos(\cdot)$  y  $\tan(\cdot)$ , respectivamente.

### 3.1.2. Velocidad angular

Considere un cuerpo rígido  $B(Oxyz)$  giratorio con un punto fijo  $O$  en el marco de referencia  $G(OXYZ)$  como se muestra en la Figura 3.2.

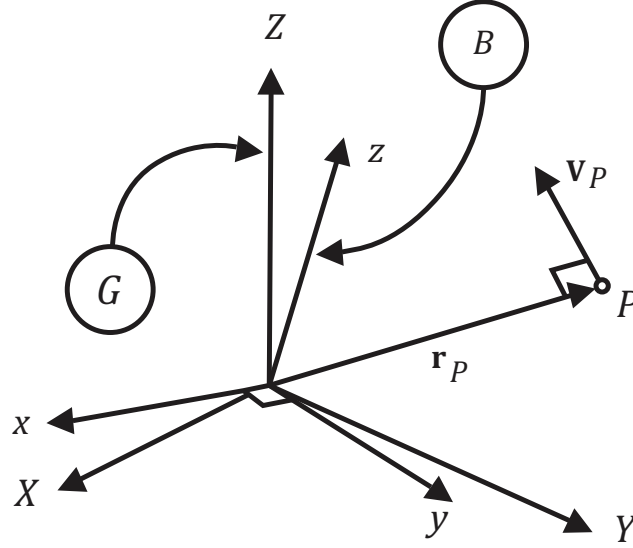


Figura 3.2: Cuerpo rígido  $B(Oxyz)$  giratorio con un punto fijo  $O$  en el marco de referencia  $G(OXYZ)$ .

El movimiento del cuerpo rígido puede ser descrito por una matriz de rotación variante en el tiempo, la cual mapea las posiciones del marco de referencia local  $B$  al marco de referencia global  $G$  a través de la ecuación

$${}^G\mathbf{r}(t) = {}^G R_B(t) {}^B\mathbf{r}. \quad (3.15)$$

La velocidad de un punto del cuerpo en el marco de referencia global es:

$$\begin{aligned} {}^G\dot{\mathbf{r}}(t) &= {}^G\mathbf{V}(t), \\ &= {}^G\dot{R}_B(t) {}^B\mathbf{r}, \\ &= {}^G\tilde{\omega}_B {}^G\mathbf{r}(t), \\ &= {}^G\boldsymbol{\omega}_B \times {}^G\mathbf{r}(t), \end{aligned} \quad (3.16)$$

donde  ${}^G\boldsymbol{\omega}_B$  es la velocidad angular vectorial de  $B$  con respecto a  $G$ .

$${}^G\boldsymbol{\omega}_B = \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix}. \quad (3.17)$$

El vector de velocidad angular está asociado con una matriz anti-simétrica  ${}_G\tilde{\omega}_B$  llamada matriz de velocidad angular, dada por

$${}_G\tilde{\omega}_B = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.18)$$

donde

$$\begin{aligned} {}_G\tilde{\omega}_B &= {}^G\dot{R}_B {}^G R_B^T, \\ &= \left( \dot{\phi} R_{Z,\psi} R_{Y,\theta} \frac{dR_{X,\phi}}{dt} + \dot{\theta} R_{Z,\psi} \frac{dR_{Y,\theta}}{dt} R_{X,\phi} + \dot{\psi} \frac{dR_{Z,\psi}}{dt} R_{Y,\theta} R_{X,\phi} \right) \times (R_{Z,\psi} R_{Y,\theta} R_{X,\phi})^T, \\ &= \dot{\phi} R_{Z,\psi} R_{Y,\theta} \frac{dR_{X,\phi}}{dt} R_{X,\phi}^T R_{Y,\theta}^T R_{Z,\psi}^T + \dot{\theta} R_{Z,\psi} \frac{dR_{Y,\theta}}{dt} R_{Y,\theta}^T R_{Z,\psi}^T + \dot{\psi} \frac{dR_{Z,\psi}}{dt} R_{Z,\psi}^T. \end{aligned} \quad (3.19)$$

y en forma matricial

$$\begin{aligned} {}_G\tilde{\omega}_B &= \dot{\phi} \begin{bmatrix} 0 & S_\theta & C_\theta S_\psi \\ -S_\theta & 0 & -C_\theta C_\psi \\ -C_\theta S_\psi & C_\theta C_\psi & 0 \end{bmatrix} + \dot{\theta} \begin{bmatrix} 0 & 0 & C_\psi \\ 0 & 0 & S_\psi \\ -C_\psi & -S_\psi & 0 \end{bmatrix} + \dot{\psi} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ &= \begin{bmatrix} 0 & S_\theta \dot{\phi} - \dot{\psi} & C_\theta S_\psi \dot{\phi} + C_\psi \dot{\theta} \\ -S_\theta \dot{\phi} + \dot{\psi} & 0 & -C_\theta C_\psi \dot{\phi} + S_\psi \dot{\theta} \\ -C_\theta S_\psi \dot{\phi} - C_\psi \dot{\theta} & C_\theta C_\psi \dot{\phi} - S_\psi \dot{\theta} & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (3.20)$$

El vector angular correspondiente es:

$$\begin{aligned} {}_G\omega_B &= \begin{bmatrix} C_\theta C_\psi \dot{\phi} - S_\psi \dot{\theta} \\ C_\theta S_\psi \dot{\phi} + C_\psi \dot{\theta} \\ -S_\theta \dot{\phi} + \dot{\psi} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} C_\theta C_\psi & -S_\psi & 0 \\ C_\theta S_\psi & C_\psi & 0 \\ -S_\theta & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Es bien conocido que  ${}_G\tilde{\omega}_B = -{}_B\tilde{\omega}_G$  [Jazar, 2011], además el cálculo de la matriz de velocidad angular  ${}_B\tilde{\omega}_G$  es similar al procedimiento anterior, y al final, el vector de velocidad angular del marco de referencia global  $G$  relativa al cuerpo  $B$  esta dado por medio de la relación

$$\begin{aligned} {}_B\omega_G &= {}^B M_G \omega_G, \\ \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & -S_\theta \\ 0 & C_\phi & C_\theta S_\phi \\ 0 & -S_\psi & C_\theta C_\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (3.22)$$

### 3.1.3. Velocidad de un cuerpo rígido

Considere un cuerpo rígido con un marco de referencia local  $B(oxyz)$  fijo al cuerpo, el cual se mueve de manera libre en un marco de referencia global  $G(OXYZ)$ , como se muestra en la Figura 3.3.

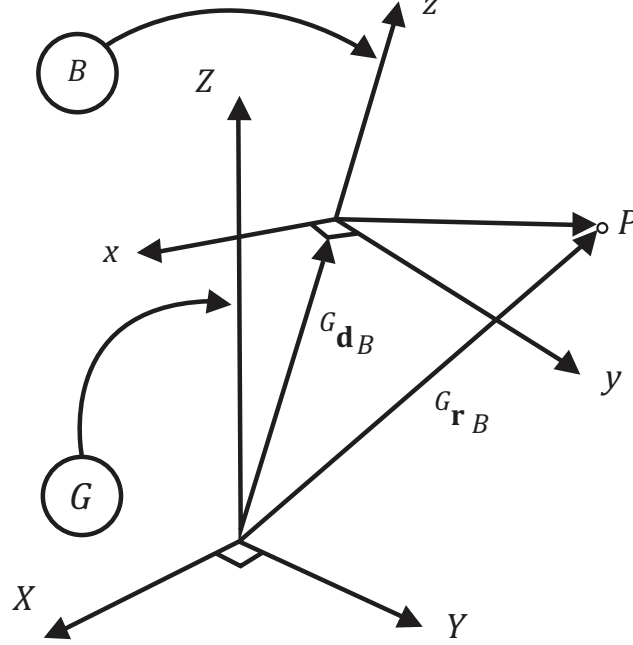


Figura 3.3: Cuerpo rígido con un marco de referencia local  $B(oxyz)$  fijo al cuerpo, el cual se mueve de manera libre en un marco de referencia global  $G(OXYZ)$ .

El cuerpo rígido puede rotar en el marco global, mientras que el origen del cuerpo  $B$  se puede trasladar de manera relativa al origen de  $G$ . Las coordenadas de un punto  $P$  en el cuerpo en los marcos local y global están relacionadas por la ecuación

$${}^G\mathbf{r}(t) = {}^G R_B(t) {}^B\mathbf{r} + {}^G\mathbf{d}_B(t), \quad (3.23)$$

donde  ${}^G\mathbf{d}_B$  representa el movimiento relativo del origen  $o$  con respecto al origen fijo  $O$ .

La velocidad del punto  $P$  en  $G$  es

$$\begin{aligned} {}^G\mathbf{V}_P &= {}^G\dot{\mathbf{r}}_P, \\ &= {}^G\dot{R}_B {}^B\mathbf{r} + {}^G\dot{\mathbf{d}}_B, \\ &= {}^G\tilde{\omega}_B {}^G\mathbf{r} + {}^G\dot{\mathbf{d}}_B, \\ &= {}^G\tilde{\omega}_B ({}^G\mathbf{r} - {}^G\mathbf{d}_B) + {}^G\dot{\mathbf{d}}_B, \\ &= {}^G\boldsymbol{\omega}_B \times ({}^G\mathbf{r} - {}^G\mathbf{d}_B) + {}^G\dot{\mathbf{d}}_B. \end{aligned} \quad (3.24)$$



### 3.1.4. Aceleración angular

Considere un cuerpo rígido  $B(Oxyz)$  giratorio con un punto fijo  $O$  en el marco de referencia  $G(OXYZ)$  como se muestra en la Figura 3.2. La ecuación (3.16), para el vector de velocidad de un punto fijo al origen del marco de referencia local, puede ser utilizada para encontrar el vector de aceleración del punto en el marco de referencia  $G$

$$\begin{aligned} {}^G\ddot{\mathbf{r}} &= \frac{{}^G d}{dt} {}^G\dot{\mathbf{r}}(t), \\ &= {}^G\boldsymbol{\alpha}_B \times {}^G\mathbf{r} + {}^G\boldsymbol{\omega}_B \times ({}^G\boldsymbol{\omega}_B \times {}^G\mathbf{r}), \end{aligned} \quad (3.25)$$

donde  ${}^G\boldsymbol{\alpha}_B$  es el vector de aceleración angular de  $B$  con respecto a  $G$ .

$${}^G\boldsymbol{\alpha}_B = \frac{{}^G d}{dt} {}^G\boldsymbol{\omega}_B. \quad (3.26)$$

### 3.1.5. Aceleración de un cuerpo rígido

Considere un cuerpo rígido con un marco de referencia local  $B(oxyz)$  fijo al cuerpo, el cual se mueve de manera libre en un marco de referencia global  $G(OXYZ)$ , como se muestra en la Figura 3.4. El cuerpo rígido puede rotar en el marco global, mientras que el origen

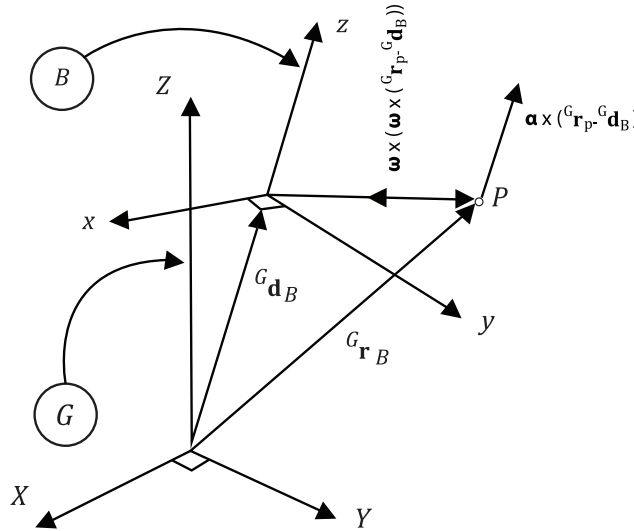


Figura 3.4: Cuerpo rígido con un marco de referencia local  $B(Oxyz)$  fijo al cuerpo, el cual se mueve de manera libre en un marco de referencia global  $G(OXYZ)$ .

del cuerpo  $B$  se puede trasladar de manera relativa al origen de  $G$ . Las coordenadas de un

punto  $P$  en el cuerpo en los marcos local y global están relacionadas por la siguiente ecuación (3.23). La aceleración del punto  $P$  en  $G$  está dada por la ecuación

$$\begin{aligned} {}^G\mathbf{a}_P &= {}^G\dot{\mathbf{v}}_P = {}^G\ddot{\mathbf{r}}_P, \\ &= {}^G\boldsymbol{\alpha}_B \times ({}^G\mathbf{r}_P - {}^G\mathbf{d}_B) + {}^G\boldsymbol{\omega}_B \times ({}^G\boldsymbol{\omega}_B \times ({}^G\mathbf{r}_P - {}^G\mathbf{d}_B)) + {}^G\ddot{\mathbf{d}}_B. \end{aligned} \quad (3.27)$$

## 3.2. Dinámica aplicada

La dinámica de un vehículo rígido, en este caso el quadrotor, se puede considerar como el movimiento de un cuerpo rígido con respecto a un marco de referencia global fijo. Los principios de las ecuaciones de movimiento de Newton y Euler que describen los movimientos de rotación y traslación de un cuerpo rígido se muestran en la siguiente sección.

### 3.2.1. Fuerza y Momento

En la dinámica Newtoniana, las fuerzas que actúan sobre un sistema de cuerpos rígidos conectados puede dividirse en fuerzas internas y externas. Las fuerzas internas actúan entre los cuerpos rígidos conectados, mientras que las fuerzas externas actúan desde fuera del sistema. Una fuerza externa puede ser una fuerza de contacto, como la fricción de contacto con el aire, o una fuerza de inercia, como la fuerza de gravedad que actúa sobre el quadrotor debido a su masa.

La fuerza total  $\mathbf{F}$ , o fuerza resultante, es la suma de todas las fuerzas externas que actúan sobre un cuerpo. El momento total  $\mathbf{T}$ , o momento resultante, es la suma de todos los momentos de fuerzas externas. El momento de una fuerza también se conoce como par o torque.

El efecto de un sistema de fuerzas es equivalente al efecto de la fuerza resultante y momento resultante del sistema de fuerzas. La aplicación de un sistema de fuerzas está enunciado por la segunda y tercera ley de Newton. La segunda ley establece que la aceleración de un cuerpo es proporcional a la fuerza global aplicada, lo cual se describe en la ecuación

$${}^G\mathbf{F} = m {}^G\ddot{\mathbf{r}}_P, \quad (3.28)$$

donde  $m$  es la masa del cuerpo. Extendiendo la segunda ley de Newton para movimientos giratorios se puede decir que la razón de cambio de el momento angular,  ${}^G I_G \boldsymbol{\omega}_B$ , de un cuerpo es proporcional al momento global aplicado. Esto es descrito por la ecuación

$${}^G\mathbf{T} = \frac{{}^G d}{dt} ({}^G I_G \boldsymbol{\omega}_B), \quad (3.29)$$

donde  ${}^G I$  es la inercia del cuerpo rígido, expresada en el marco de referencia global.

### 3.2.2. Dinámica de traslación de cuerpos rígidos

La Figura 3.5 muestra un cuerpo rígido  $B$  en movimiento en el marco global  $G$ . Se

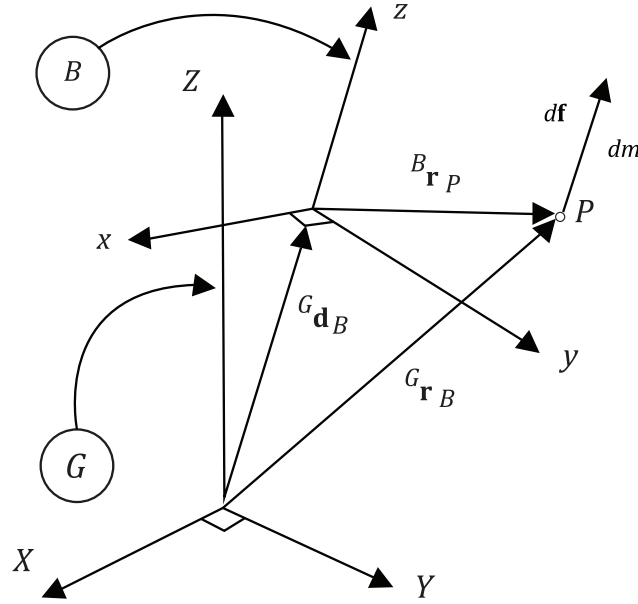


Figura 3.5: Un punto del cuerpo rígido en movimiento con velocidad  ${}^G\mathbf{V}_P$  actuado por la fuerza  $d\mathbf{f}$ .

supone que el origen del marco de referencia local está fijo en el centro de masa del cuerpo. La ecuación del cuerpo completo en movimiento en el marco global es

$${}^G\mathbf{F} = m^G\mathbf{a}_B, \quad (3.30)$$

la cual puede ser expresada en el marco de referencia local como

$$\begin{aligned} {}^B\mathbf{F} &= {}^B R_G {}^G\mathbf{F}, \\ &= m^B {}^B R_G {}^G\mathbf{a}_B, \\ &= m_G^B \mathbf{a}_B + m_G^B \boldsymbol{\omega}_B \times {}^B\mathbf{V}_B, \end{aligned} \quad (3.31)$$

$$\begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ma_x + m(\omega_y v_z - \omega_z v_y) \\ ma_y + m(\omega_x v_z - \omega_z v_x) \\ ma_z + m(\omega_x v_y - \omega_y v_x) \end{bmatrix}.$$

### 3.2.3. Dinámica de rotación de cuerpos rígidos

La ecuación de rotación de un cuerpo rígido en el marco global es la ecuación de Euler

$$\begin{aligned}
{}^B\mathbf{T} &= \frac{d}{dt}({}^B I_G^B \omega_B), \\
&= {}^B I_G^B \dot{\omega}_B + {}^B I_G^B \omega_B \times ({}^B I_G^B \omega_B), \\
\begin{bmatrix} T_x \\ T_y \\ T_z \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} I_x \dot{\omega}_x - (I_y - I_z) \omega_y \omega_z \\ I_y \dot{\omega}_y - (I_z - I_x) \omega_x \omega_z \\ I_z \dot{\omega}_z - (I_x - I_y) \omega_x \omega_y \end{bmatrix}, \tag{3.32}
\end{aligned}$$

bajo la suposición de que el marco de referencia  $B$  es tal que  ${}^B I = \text{diag}(I_x, I_y, I_z)$ .

### 3.2.4. Modelo dinámico de un cuerpo rígido de 6 grados de libertad

Como se menciona al principio de esta sección, la dinámica de un vehículo rígido, en este caso el quadrotor, se puede considerar como el movimiento relativo de un cuerpo rígido con 6 grados de libertad con respecto a un marco de referencia global fijo, cuya dinámica está descrita por las ecuaciones de Newton-Euler, que son las ecuaciones (3.31) y (3.32) respectivamente.

## 3.3. Sistemas de control

Con el fin de diseñar un controlador estable y robusto para el seguimiento de trayectoria de un quadrotor, el cual es el objetivo principal de esta tesis, se presentan algunos conceptos básicos acerca de las herramientas de control que se utilizarán más adelante para desarrollar el algoritmo de control que se propone en el Capítulo 4. Esta sección comienza con una revisión del análisis básico sobre la estabilidad de Lyapunov y concluye con las nociones del control por modos deslizantes, en especial el algoritmo de *Super-Twisting*.

### 3.3.1. Estabilidad

En las siguientes secciones, se revisan las nociones básicas acerca de la estabilidad de Lyapunov. Si se quieren más detalles, el lector puede referirse a [Khalil y Grizzle, 1996]. Para mejor comprensión del problema de estabilidad, se formulan los conceptos básicos para el modelo no lineal

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), t), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \tag{3.33}$$

donde  $\mathbf{x}$  es un vector de estados (de dimensión  $n$ ) y  $\mathbf{f}(\mathbf{x}(t), t)$  es un vector de dimensión  $n$  cuyos elementos son funciones de  $x_1, x_2, \dots, x_n$  y  $t$ . Se supone que  $\mathbf{x} = 0$  es un punto de

equilibrio del sistema (3.33),  $\mathbf{f}(0, t) = 0$ <sup>2</sup>.

Para dar definiciones precisas sobre los conceptos de estabilidad, sea la norma Euclidiana denotada por  $\|\mathbf{x}\|$  de un vector  $\mathbf{x}$ , por ejemplo  $\|\mathbf{x}\| = (\mathbf{x}^T \mathbf{x})^{1/2} = (\sum_{i=1}^n x_i^2)^{1/2}$ . Entonces se tienen las siguientes definiciones.

**Definición 3.1.** El punto de equilibrio  $x = 0$  de (3.33) es

- estable si, para cada  $\varepsilon > 0$ , existe un  $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$  tal que

$$\|\mathbf{x}(0)\| < \delta \Rightarrow \|\mathbf{x}(t)\| < \varepsilon, \forall t \geq 0. \quad (3.34)$$

- inestable si no es estable.
- asintóticamente estable si es estable y  $\delta$  se puede elegir de tal manera que

$$\|\mathbf{x}(0)\| < \delta \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}(t)\| = 0. \quad (3.35)$$

Las funciones de Lyapunov son importantes para la teoría de estabilidad. Informalmente, pueden ser definidas como una función escalar que toma valores positivos en cualquier lado excepto en el punto de equilibrio, y decrece (o es no-creciente) a lo largo de cualquier trayectoria del sistema.

Considere entonces el sistema no lineal (3.33), y la función escalar  $V(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . Se supone que  $\mathbf{V}(\mathbf{x})$  tiene la primera derivada parcial respecto al tiempo continua, se define  $\dot{V}(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  como

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} \cdot \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \nabla V \cdot \dot{\mathbf{x}} = \frac{d}{dt} V(\mathbf{x}(t)). \quad (3.36)$$

La ecuación (3.36) expresa la razón de cambio de  $V$  a lo largo de una trayectoria y ésta depende de la ecuación del sistema (3.33), por lo que  $\dot{V}$  será diferente para sistemas diferentes. Si  $\dot{V}$  es negativa,  $V$  va a decrecer a lo largo de la solución de (3.33). Ahora se presenta el teorema de estabilidad de Lyapunov.

**Teorema 3.1.** Sea  $x = 0$  un punto de equilibrio de un sistema descrito de la forma

$$\dot{x} = f(x), \quad (3.37)$$

---

<sup>2</sup> Generalmente, un punto  $\mathbf{x}_e \in \mathbb{R}^n$  es un punto de equilibrio del sistema si  $\mathbf{f}(\mathbf{x}_e, t) = 0$ . Se puede afirmar sin pérdida de generalidad ya que se puede hacer un cambio de coordenadas tal que  $\mathbf{x}_e = 0$  (por ejemplo,  $\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_e$ ).

donde  $f(x) : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  es localmente Lipschitz [Khalil y Grizzle, 1996] y  $D \subset \mathbb{R}^n$  un dominio que contiene el origen. Sea  $V(x) : D \rightarrow \mathbb{R}$  una función de Lyapunov candidata para el sistema (3.37) tal que

$$V(0) = 0 \text{ y } V(\mathbf{x}) > 0 \text{ en } D - \{0\}, \quad (3.38)$$

$$\dot{V}(\mathbf{x}) \leq 0 \text{ en } D, \quad (3.39)$$

entonces  $\mathbf{x} = 0$  es estable. Más si

$$\dot{V}(\mathbf{x}) < 0 \text{ en } D - \{0\}, \quad (3.40)$$

entonces  $\mathbf{x} = 0$  es asintóticamente estable.

En los dos casos, si las condiciones se mantienen para todo  $x \in \mathbb{R}^n$  y  $\|x\| \rightarrow \infty$  implica que  $V(x) \rightarrow \infty$ , entonces  $x = 0$  es globalmente estable para (3.39) y globalmente asintóticamente estable (G.A.S.) para (3.40).

*Demostración.* La prueba a este teorema puede ser encontrada en [Khalil y Grizzle, 1996].  $\square$

Este es el teorema principal que se enuncia para la estabilidad por medio de una función de Lyapunov, de éste se derivan otros, enunciando ciertas condiciones, ya sea del sistema o de la función de Lyapunov, que permiten asegurar diferentes tipos de estabilidad. Términos como estabilidad uniforme, globalmente uniformemente asintóticamente estable, exponencialmente estable, entre otros, aparecen en los siguientes teoremas en [Khalil y Grizzle, 1996]. Los teoremas conversos aseguran la existencia de funciones de Lyapunov que satisfacen desigualdades específicas para ciertos tipos de estabilidad, los cuales son muy útiles para la demostración de estabilidad aún sin conocer específicamente la función de Lyapunov.

El análisis de Lyapunov también puede ser usado para mostrar la cota de la solución de la ecuación de estado, aún cuando no existe un punto de equilibrio en el origen. Para esto se establecen las siguientes definiciones:

**Definición 3.2.** Sea el sistema

$$\dot{x} = f(t, x), \quad (3.41)$$

donde  $f : [0, \infty) \times D \rightarrow \mathbb{R}^n$  es una función continua por partes en  $t$  y localmente Lipschitz en  $x$  en  $[0, \infty) \times D$ , y  $D \subset \mathbb{R}^n$  es un dominio que contiene el origen.

La soluciones de (3.41) son:

- uniformemente acotada si existe una constante positiva  $c$ , independiente de  $t_0 \geq 0$ , y para cada  $a \in (0, c)$ , existe una  $\beta = \beta(a) > 0$ , independiente de  $t_0$ , tal que

$$\|x(t_0)\| \leq a \Rightarrow \|x(t)\| \leq \beta, \forall t > t_0. \quad (3.42)$$

- globalmente uniformemente acotada si (3.42) se mantiene para  $a$  arbitrariamente grande.
- uniformemente últimamente acotada con última cota  $b$  si existen las constantes positivas  $b$  y  $c$ , independientes de  $t_0 \geq 0$ , y para cada  $a \in (0, c)$ , existe una  $T = T(a, b) \geq 0$ , independiente de  $t_0$ , tal que

$$\|x(t_0)\| \leq a \Rightarrow \|x(t)\| \leq b, \forall t > t_0 + T. \quad (3.43)$$

- globalmente uniformemente últimamente acotada si (3.43) se mantiene para  $a$  arbitrariamente grande.

Para el caso de sistemas autónomos no se usa la palabra “uniforme”. Ahora se presenta el teorema de Lyapunov para mostrar propiedades de uniformemente acotado y últimamente acotado.

**Teorema 3.2.** *Sea  $D \subset \mathbb{R}^n$  un dominio que contiene al origen y  $V : [0, \infty) \times D \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua diferenciable tal que*

$$\alpha_1(\|x\|) \leq V(t, x) \leq \alpha_2(\|x\|), \quad (3.44)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(t, x) \leq -W_3(x), \forall \|x\| \geq \mu > 0, \quad (3.45)$$

$\forall t \geq 0$  y  $\forall x \in D$ , donde  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  son funciones  $\mathcal{K}$ -clase y  $W_3(x)$  es una función continua definida positiva. Se toma  $r > 0$  tal que  $B_r \subset D$  y se supone que

$$\mu < \alpha_2^{-1}(\alpha_1). \quad (3.46)$$

Entonces, existe una función  $\mathcal{KL}$ -clase  $\beta$  y para cada condición inicial  $x(t_0)$ , que satisface  $\|x(t_0)\| \leq \alpha_2^{-1}(\alpha_1)$ , existe un  $T \geq 0$  (dependiente de  $x(t_0)$  y  $\mu$ ) tal que las soluciones de (3.41) satisfacen

$$\begin{aligned} \|x(t)\| &\leq \beta(\|x(t_0)\|, t - t_0), & \forall t_0 \leq t \leq t_0 + T, \\ \|x(t)\| &\leq \alpha_2^{-1}(\alpha_1), & \forall t \geq t_0 + T. \end{aligned} \quad (3.47)$$

Por lo que se puede decir que la solución del sistema (3.41) es uniformemente últimamente acotada. Más aún, si  $D = \mathbb{R}^n$  y  $\alpha_1$  es de clase  $\mathcal{K}_\infty$ , entonces (3.47) se mantiene para cualquier condición inicial  $x(t_0)$ , sin restricción de que tan grande debe ser  $\mu$ , entonces la solución del sistema (3.41) es globalmente uniformemente últimamente acotada con última cota  $b = \alpha_2^{-1}(\alpha_1)$ .

*Demostración.* La prueba a este teorema puede ser encontrada en [Khalil y Grizzle, 1996].  $\square$

### 3.3.2. Control a bloques

#### Representación a Bloques de una Clase de Sistemas no Lineales

En el Control a Bloques es necesario que el sistema a controlar se encuentre en una estructura específica, la cual se denomina a bloques.

Se analizará la descomposición a bloques, considerando el siguiente sistema no lineal sujeto a incertidumbre:

$$\dot{x} = f(x, t) + B(x, t)u + g(x, t). \quad (3.48)$$

Donde  $x \in X \subset \mathbb{R}^n$  es el vector de estado,  $u \in U \subset \mathbb{R}^m$  es el vector de entradas, que está acotado por:

$$\|u_i\| \leq U_0. \quad (3.49)$$

Con  $U_0 > 0$ ,  $u = (u_1, \dots, u_m)$ .

El mapeo desconocido  $g(x, t)$  está formado por perturbaciones externas y variaciones paramétricas. Se supone que los campos vectores  $f(x, t)$ ,  $g(x, t)$  y las columnas de  $B(x, t)$  son mapeos suaves y acotados de clase  $C_{[0, \infty)}^\infty$ ,  $f(0, t) = 0$  y  $\text{rango}(B(x, t)) = m$  para todo  $x \in X$  y  $t \geq 0$ .

La característica esencial del método propuesto es la transformación del sistema (3.48) a la configuración a bloques que consiste de  $r$  bloques:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1, t) + B_1(x_1, t)x_2 + g_1(x_1, t), \\ \dot{x}_i &= f_i(\bar{x}_i, t) + B_i(\bar{x}_i, t)x_{i+1} + g_i(\bar{x}_i, t), \\ \dot{x}_r &= f_r(\bar{x}_r, t) + B_r(\bar{x}_r, t)u + g_r(\bar{x}_r, t), \quad i = 2, \dots, r-1. \end{aligned} \quad (3.50)$$

Donde el vector  $x$  es descompuesto como  $x = (x_1, x_2, \dots, x_r)^T$ ,  $\bar{x}_i = (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_i)^T$ ,  $i = 2, \dots, r$ ,  $x_i$  es un vector de  $n_i \times 1$  y los índices  $(n_1, \dots, n_r)$  definen la estructura del sistema y satisfacen la siguiente relación:

$$n_1 \leq \dots \leq n_r \leq m, \quad \sum_{i=1}^r n_i = n. \quad (3.51)$$

La matriz  $B_i$ , multiplicada por  $x_{i+1}$  en cada  $i$ -ésimo bloque de (3.50), tiene rango completo, que es:

$$\text{rango}(B_i) = n_i, \quad (3.52)$$

para todo  $x \in X \subset \mathbb{R}^n$  y  $t \in [0, \infty)$ ,  $i = 1, \dots, r$ .

El procedimiento de transformar el sistema (3.48) a la forma de bloques (3.50) basado en el método de transformación integral es presentado en [Loukianov, 2002] y [Lukyanov y Utkin, 1981].



La relación (3.51) indica  $n_i = n_{i+1}$  o bien  $n_i < n_{i+1}$ . Primero se considerará la planta con la estructura:

$$n_1 < \dots < n_r < m. \quad (3.53)$$

### Transformación Recursiva a Bloques

Para comenzar se expresan las siguiente suposiciones sobre los límites en los términos desconocidos en (3.48):

**Suposición 3.1.** Existen constantes positivas  $\bar{q}_{i,j}$  y  $\bar{d}_i$  tal que:

$$\begin{aligned} \|g_1(\bar{x}_1, t)\| &\leq \bar{q}_{1,1} \|x_1\| + \bar{d}_1, \\ \|g_2(\bar{x}_2, t)\| &\leq \bar{q}_{2,1} \|x_1\| + \bar{q}_{2,2} \|x_2\| + \bar{d}_2, \\ \|g_i(\bar{x}_i, t)\| &\leq \sum_{j=1}^i \bar{q}_{i,j} \|x_j\| + \bar{d}_i, \quad i = 3, \dots, r-1. \end{aligned}$$

Considerando la estructura (3.53), se presenta la siguiente transformación recursiva.

$$\begin{aligned} z_1 &= x_1 := \Phi_1(x_1, t), \\ z_2 &= \tilde{B}_2(\bar{x}_1, t)x_2 + \begin{bmatrix} f_1(x_1, t) + k_1\Phi_1(x_1, t) \\ 0 \end{bmatrix} := \Phi_2(\bar{x}_2, t), \\ z_{i+1} &= \tilde{B}_{i+1}(\bar{x}_i, t)x_{i+1} + \begin{bmatrix} f_i(x_i, t) + k_i\Phi_i(x_i, t) \\ 0 \end{bmatrix} := \Phi_{i+1}(\bar{x}_{i+1}, t). \end{aligned} \quad (3.54)$$

Con  $i = 3, \dots, r-1$ , donde  $z_i$  es un vector de  $n_i \times 1$  con nuevas variables  $k_i > 0$ ,  $\tilde{B}_{i+1} = \begin{bmatrix} \bar{B}_i \\ E_{i,2} \end{bmatrix}$ ,  $E_{i,2} = \begin{bmatrix} 0 & I_{n_{i+1}-n_i} \end{bmatrix}$ ,  $E_{i,2} \in \mathbb{R}^{n_{i+1}-n_i \times n_{i+1}}$ ,  $I_{n_{i+1}-n_i}$  es la matriz identidad.

La transformación (3.54) reduce el sistema (3.48) a la forma deseada siguiente:

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= -k_1 z_1 + E_{11} z_2 + \bar{g}_1(z_1, t), \\ \dot{z}_i &= -k_i z_i + E_{i1} z_{i+1} + \bar{g}_i(z_i, t), \\ \dot{z}_r &= \bar{f}_r(z, t) + \bar{B}_r(z, t)u + \bar{g}_r(z, t), \quad i = 2, \dots, r-1. \end{aligned} \quad (3.55)$$

Donde  $z = (z_1, \dots, z_r)^T$ ,  $\bar{f}_r(z, x_{r+1}, t)$  función acotada,  $\text{rango}(\bar{B}_r) = n_1$ ,  $\bar{B}_r = \tilde{B}_{r-1}B_r$ .

### 3.3.3. Modos deslizantes

En esta subsección se presentan conceptos básicos, matemáticos y aspectos de diseño sobre la teoría del control por modos deslizantes. Para mayores detalles se recomienda al lector referirse a [Utkin et al., 2009], [Shtessel et al., 2013] y [Edwards y Spurgeon, 1998], entre otros.

El enfoque de control por modos deslizantes es reconocido como una de las herramientas más eficientes para el diseño de controladores robustos para sistemas dinámicos complejos de orden superior, no lineales y que operan bajo condiciones de incertidumbre [Utkin et al., 2009]. El término modo deslizante apareció por primera vez en el contexto de los sistemas con relé. El movimiento denominado modo deslizante se define cuando la función de interrupción o relé cambia con alta frecuencia, idealmente frecuencia infinita. Esto puede ser aplicado en su forma más simple al sistema de relé de primer orden con la variable de estado  $x(t)$ :

$$\dot{x}(t) = f(x) + u, \quad |f(x)| < f_0 = \text{constante}. \quad (3.56)$$

Con el control  $u$  como la función relé de la Figura 3.6, el error de seguimiento  $e(t) = r(t) - x(t)$  y  $r(t)$  la referencia,  $u = u_0 \text{sign}(e)$  con  $u_0$  constante.

$$u = \begin{cases} u_0 & e > 0, \\ -u_0 & e < 0, \end{cases} \quad \text{ó } u = u_0 \text{sign}(e). \quad (3.57)$$

Los valores de  $e(t) = r(t) - x(t)$  y  $\dot{e}(t) = \dot{r}(t) - f(x, t) + u_0 \text{sign}(e)$ , tienen diferentes signos dependiendo de si  $u_0 > f_0 + |\dot{r}|$ . Esto significa que la magnitud del error de seguimiento decae a una tasa finita y el error es igual a cero de forma idéntica después de un intervalo de tiempo finito  $T$  (Figura 3.7). Al movimiento en  $t > T$  se le llama modo deslizante.

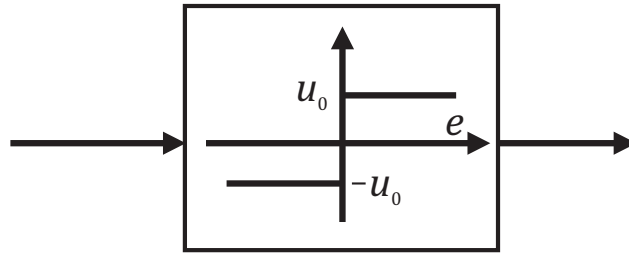


Figura 3.6: Función relé.

En general, la condición en (3.57) se clasifica como control discontinuo, el cambio (en teoría) es en frecuencia infinita. Para evitar *chattering*<sup>3</sup> se propusieron algunos enfoques. La

---

<sup>3</sup> En español se traduce como cascabeleo, es la oscilación o cambio continuo como vibración en la salida del sistema.

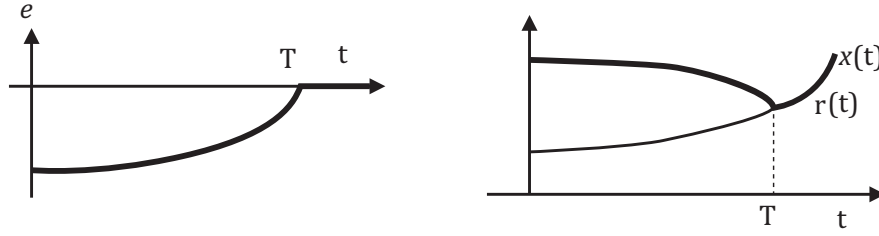


Figura 3.7: Gráfica de error.

idea principal era cambiar la dinámica en una pequeña vecindad de la superficie discontinua con el fin de evitar la discontinuidad en tiempo real y, a la par, preservar las propiedades principales de todo el sistema. En particular, los modos deslizantes de orden superior (HOSM, *High Order Sliding Modes*) generalizan la idea básica de modo deslizante actuando sobre las derivadas con respecto al tiempo del sistema y no sólo sobre la superficie. Mantiene las principales ventajas del enfoque original, al mismo tiempo que elimina totalmente el *chattering* y prevé incluso una mayor precisión en la realización.

La siguiente subsección presenta una técnica de modos deslizantes de segundo orden, el cual es denominado *Super-Twisting*, cuya función de control es de forma cuasi-continua, esto para suavizar el comportamiento que deben de realizar los actuadores del sistema.

### Algoritmo de *Super-Twisting*

El contenido en esta sección muestra la teoría concerniente al algoritmo de *Super-Twisting*, la cual se encuentra en [Moreno, 2008].

Sea un sistema no lineal con grado relativo  $r = 1$  de la forma:

$$\dot{x} = \alpha(x) + \beta(x)U + \Delta. \quad (3.58)$$

Donde la superficie se elige tal que  $x_1 = x$  y la ley de control se define como

$$U = -\beta(x)^{-1}(\alpha - \nu), \quad (3.59)$$

con

$$\begin{aligned} \nu &= -k_1|x_1|^{1/2}\text{Sign}(x_1) + x_2, \\ \dot{x}_2 &= -k_3\text{Sign}(x_1), \end{aligned} \quad (3.60)$$

y bajo la suposición de que el término  $\beta(x)^{-1}$  está definido para cualquier  $x \in \mathbb{R}$ .

Entonces, el sistema (3.58) en lazo cerrado aumenta de grado, de la forma

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -k_1|x_1|^{1/2}\text{sign}(x_1) + x_2 + \varrho_1(x, t), \\ \dot{x}_2 &= -k_3\text{sign}(x_1) + \varrho_2(x, t), \end{aligned} \quad (3.61)$$

donde los términos  $\varrho_1(x, t)$  y  $\varrho_2(x, t)$  agrupan las perturbaciones externas, como lo indicaba el término  $\Delta$ , y también las perturbaciones debido a cambios paramétricos en  $\alpha(x)$  y  $\beta(x)$ . Ahora se presenta el teorema de estabilidad para el algoritmo de *Super-Twisting*.

**Teorema 3.3.** *Suponga que las perturbaciones del sistema (3.61) están globalmente acotadas por:*

$$|\varrho_1| \leq \delta_1 |x_1|^{\frac{1}{2}}, |\varrho_2| \leq \delta_2, \quad (3.62)$$

para algunas constantes  $\delta_1, \delta_2 \geq 0$ . Entonces, el origen  $x = 0$  es un punto de equilibrio fuertemente globalmente asintóticamente estable si las ganancias satisfacen:

$$\begin{aligned} k_1 &> 2\delta_1, \\ k_3 &> k_1 \frac{5\delta_1 k_1 + 6\delta_2 + 4(\delta_1 + \delta_2/k_1)^2}{2(k_1 - 2\delta_1)}. \end{aligned} \quad (3.63)$$

Además, todas la trayectorias convergen en tiempo finito al origen con cota superior  $\tilde{T} = \frac{2V^{\frac{1}{2}}(x_0)}{\tilde{\gamma}}$ , donde  $x_0$  es el estado inicial y  $\tilde{\gamma}$  es una constante dependiente de las ganancias  $k_1, k_3$  así como de los coeficientes de la perturbación  $\delta_1, \delta_2$ .

*Demostración.* Ver apéndice A, donde se obtiene el análisis de estabilidad para el STA mediante la función de Lyapunov [Moreno, 2008].  $\square$

Para perturbaciones no desvanecientes como

$$|\varrho_1| \leq \delta_1 + \delta_3 |\zeta|, |\varrho_2| \leq \delta_2, \quad (3.64)$$

donde  $\delta_3 \geq 0$  se puede mostrar que las soluciones del sistema (3.61) son globalmente últimamente acotadas, como se muestra en [Moreno y Osorio, 2012].

### 3.4. Algoritmo SLAM

El término SLAM es el acrónimo en inglés para Localización y Mapeo Simultaneo (*Simultaneous Localization and Mapping*); fue desarrollado por Hugh Durrant-Whyte y John J. Leonard [Leonard y Durrant-Whyte, 1991]. El algoritmo de SLAM concierne al problema de construir un mapa de un ambiente desconocido usando un robot móvil mientras que éste se desplaza en el mismo ambiente usando dicho mapa. El algoritmo de SLAM se constituye de múltiples partes; extracción de *landmarks* (puntos de interés), asociación de datos, estimación del estado, actualización del estado y actualización de las *landmarks*.

Aunque existen muchas formas de resolver cada parte, en esta tesis sólo se abordará una manera de resolver cada problema, la cual se ha elegido por su simplicidad para la posible implementación [Riisgaard y Blas, 2003]. Cabe mencionar que el algoritmo se puede mejorar al cambiar la forma de cada una de las partes por algoritmos más complejos o eficaces. Por el enfoque del proyecto, el algoritmo de SLAM se enfoca en robots móviles en espacios cerrados, lo cual también define la forma en que se ejecuta cada una de las partes.

A pesar de que el algoritmo SLAM se aplica tanto para movimiento en 2D como en 3D, aquí sólo se considera movimiento en 2D. Para una mejor comprensión del algoritmo de SLAM el lector puede referirse a [Riisgaard y Blas, 2003].

### 3.4.1. Proceso de SLAM

El proceso de SLAM consiste en una serie de pasos (Figura 3.8). El objetivo del proceso es utilizar la información del entorno para estimar la posición del robot. Dado que la odometría del robot (integrando las mediciones del sensor inercial para obtener la posición) son erradas, no se puede confiar directamente en la odometría. Sin embargo, se pueden usar mediciones del entorno, por ejemplo mediciones láser, para corregir la posición del robot estimada. Esto se logra al extraer características del ambiente que sean fáciles de volver a observar una vez que el vehículo se haya desplazado.

El corazón del proceso es un filtro de Kalman extendido (EKF, *Extended Kalman Filter*). Éste es responsable de actualizar la posición en la que el vehículo cree estar en base a las características que está observando y re-observando. Estas características son comúnmente llamadas *landmarks*, las cuales se explicarán con mayor detalle más adelante.

Cuando la odometría cambia debido al movimiento del vehículo, la incertidumbre pertinente a la nueva posición del robot se actualiza en el EKF usando la actualización de la odometría. Después, se extraen las *landmarks* del ambiente usando la nueva posición del robot. Ahora el robot intenta asociar dichas *landmarks* con *landmarks* que había observado en pasos anteriores. Las *landmarks* que se han re-observado sirven para corregir la posición del vehículo en el EKF. Aquellas *landmarks* que no se habían visto antes, se agregan como nuevas para poder observarlas más tarde. Cabe mencionar que el filtro de Kalman y el EKF convergen para dimensión del estado constante, lo cual se ha omitido en otros trabajos al momento de aplicar la técnica SLAM.

Las siguientes imágenes explican el proceso con un poco más de detalle.

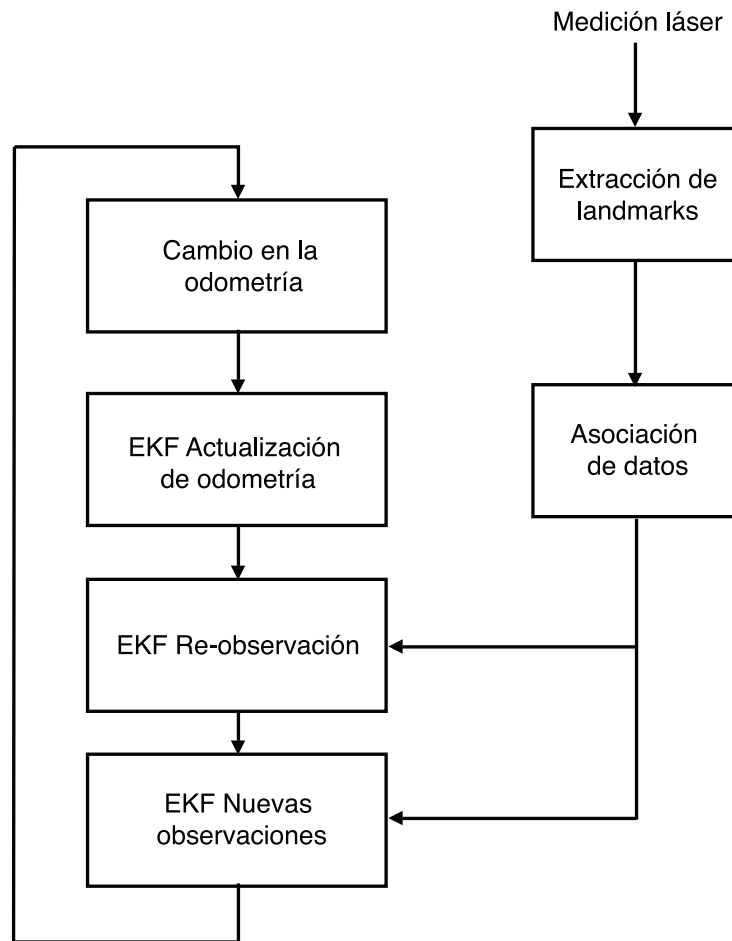


Figura 3.8: Pasos generales en el proceso de SLAM.

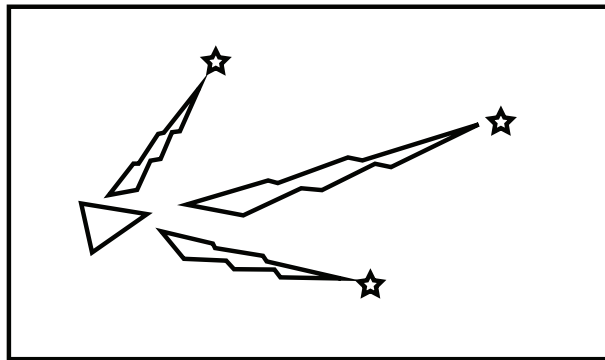


Figura 3.9: El vehículo es representado por el triángulo. Las estrellas son las *landmarks*. El robot mide la ubicación de las *landmarks* de manera inicial.

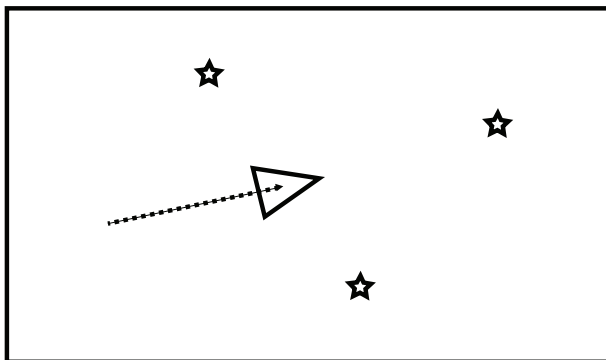


Figura 3.10: El vehículo se desplaza, y usando odometría se cree que esa es su posición actual.

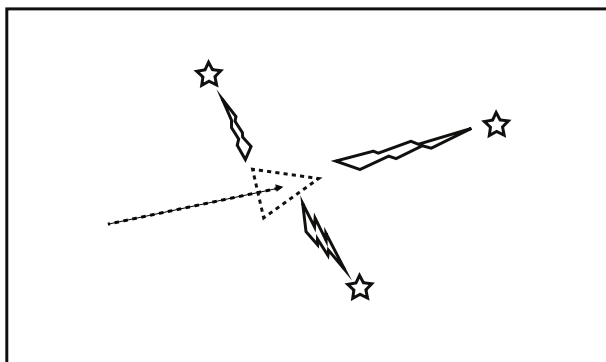


Figura 3.11: El vehículo mide de nuevo la ubicación de las *landmarks*, pero se da cuenta que no corresponden las medidas a la posición que calculó mediante la odometría, por lo tanto, el robot no está donde se creía.

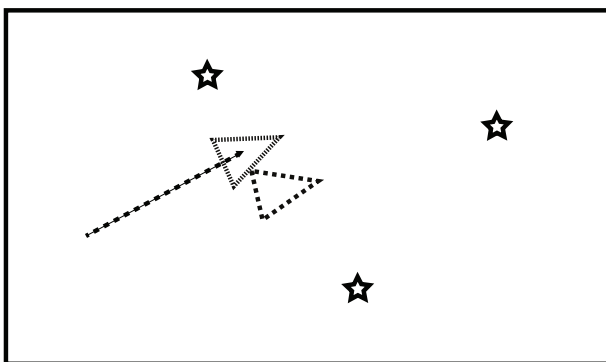


Figura 3.12: Ya que las mediciones de las *landmarks* son más confiables que la odometría, se utilizan dichas mediciones para corregir la posición del vehículo (la primer estimación es el triángulo con línea discontinua).

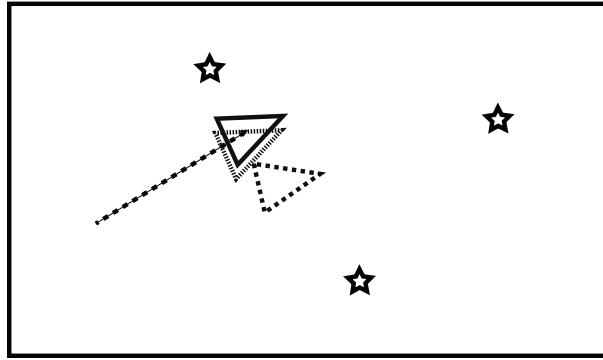


Figura 3.13: Debido a que los sensores también tienen incertidumbre, la posición real del vehículo puede diferir (triángulo sólido), sin embargo la segunda estimación es mucho mejor que la primera.

### Puntos de interés o *landmarks*

Los puntos de interés, o *landmarks*, son características que pueden ser fácilmente detectadas al hacer una medición del ambiente, y a su vez también pueden ser fácilmente re-observadas al hacer el mismo proceso de medición en un futuro, aún cuando el vehículo se desplace un poco. Estas características son las que utiliza el robot para saber dónde se encuentra (localizarse el mismo). Las *landmarks* dependen del ambiente en el que el vehículo se desplaza, además éstas deben ser re-observables sin importar el ángulo o perspectiva con el que se mire en diferentes momentos.

También es importante que estas características sean fijas, pues no se podría determinar si un cambio en la medición de las *landmarks* es por un movimiento del vehículo o de las mismas *landmarks*.

Resumiendo, las propiedades ideales de las *landmarks* son:

- fácilmente re-observables,
- distinguibles entre ellas,
- debe haber suficientes en el entorno, y
- ser estacionarias.

En ambientes cerrados, como lo son los interiores de un edificio, las características que cumplen con estas propiedades son, por lo general, líneas rectas que representan paredes y



cruces de líneas que representan esquinas. Estas son las características que se utilizarán como *landmarks* en esta tesis.

### Extracción de *landmarks*

Una vez que se conoce la forma tienen las *landmarks* a identificar, el robot debe utilizar la información de los sensores exteroceptivos para extraer dichas *landmarks* de toda la información recabada.

Existen muchos algoritmos para extraer *landmarks*, pero en este trabajo sólo se aborda la extracción de líneas e intersecciones de líneas. Para la extracción de líneas existen muchos métodos en la literatura [Nguyen et al., 2005]; entre éstos se encuentran los algoritmos de *Split-and-Merge*, regresión-lineal, RANSAC, transformada de Hough, entre otros.

El trabajo en [Nguyen et al., 2005] hace una comparación entre diferentes métodos de extracción de líneas al utilizar sensores tipo escáner láser 2D (LIDAR), los cuales se utilizan en esta tesis, con el fin de establecer ventajas y desventajas entre estos métodos. En dicho trabajo se llega a la conclusión de que el algoritmo con más bajo costo computacional y mejor exactitud es el algoritmo de *Split-and-Merge*, el cual se utilizará en esta tesis.

### Algoritmo *Split-and-Merge*

Este algoritmo es probablemente el más popular para la extracción de líneas, el cual es el siguiente.

---

<b><i>Algoritmo 1: Split-and-Merge</i></b>
1 Inicio: Sea $s_1$ un conjunto con $N$ elementos. Se pone a $S_1$ en la lista $\mathcal{L}$ .
2 Se ajusta una línea al conjunto $s_i$ en $\mathcal{L}$ .
3 Se detecta el punto $P$ más alejado de la línea, con la distancia $dP$ .
4 Si $dP$ es menor a un umbral, continúe (ve a paso 2).
5 De lo contrario, divide el conjunto $s_i$ en el punto $P$ en los conjuntos $s_{i1}$ y $s_{i2}$ , reemplace $s_i$ en $\mathcal{L}$ por $s_{i1}$ y $s_{i2}$ , continúe (ve a paso 2).
6 Cuando todos los conjuntos en $\mathcal{L}$ se hayan procesado, une segmentos co-lineales.

---

Se modifica el algoritmo para que los conjuntos tengan un mínimo de puntos, y así evitar que el ruido de la medición genere *landmarks* de mala calidad.

### Asociación de datos

El problema de asociación de datos es básicamente el de responder la pregunta de si un *landmark* visto es el mismo que se vió en alguna iteración anterior o es un *landmark* nuevo,

así como que tan confiable es.

En la práctica, los siguientes problemas pueden suceder en la asociación de datos:

- No re-observar las *landmarks* en cada iteración.
- Observar algo como *landmark* y no re-observarlo nunca.
- Asociar de manera incorrecta algún *landmark* con otro visto antes.

Las dos primeras características se atribuyen a *landmarks* de mala calidad, y para evitar que suceda el tercer caso se define una política de asociación de datos que permita minimizar este tipo de problemas. Se supone que existe una base de datos que almacena las *landmarks* que se han visto previamente. Dicha base de datos es usualmente vacía al inicio. La primer regla a establecer es que no se considera usar un *landmark* en el proceso de SLAM hasta que haya sido visto por lo menos cierto número de veces. Esto elimina el caso en que se extraigan *landmarks* de mala calidad. Para esto se utiliza la técnica del vecino más cercano (*nearest-neighbor approach* [Riisgaard y Blas, 2003]), donde se utiliza una ventana de validación, la cual puede ser aproximada por la información que se obtiene del EKF, ya que este da una cota de la incertidumbre de donde se puede encontrar el *landmark*. Por lo tanto, se puede determinar si un *landmark* visto es un *landmark* en la base de datos, si este está dentro del área de incertidumbre del mismo.

### 3.4.2. Filtro de Kalman Extendido EKF

El filtro de Kalman es un algoritmo recursivo que obtiene el mínimo error de estimación del estado, en el criterio de mínimos cuadrados, de mediciones con ruido. El algoritmo alterna entre los procesos de predicción, donde el siguiente estado  $\mathbf{x}(k+1)$  (hablando de sistemas discretos en el tiempo) se estima en base al estado actual  $\mathbf{x}(k)$  y las entradas de control  $\mathbf{u}(k)$ , y de corrección, donde se utilizan las mediciones de los sensores para corregir los estados estimados actuales. En el caso especial en que el modelo dinámico sea lineal y el ruido sea Gaussiano, el filtro de Kalman estima los estados del sistema de manera óptima usando el criterio de mínimos cuadrados [Kalman, 1960]. La estructura del filtro de Kalman es básicamente un observador de Luenberger.

Sin embargo, en la mayoría de las aplicaciones en el mundo real las suposiciones de que el sistema se comporta de manera lineal no aplica. El filtro de Kalman extendido, o EKF, se diseñó para sobreponerse a esta limitación. El EKF permite utilizar un algoritmo con los mismos principios del filtro de Kalman a sistemas no-lineales, al linealizar el sistema alrededor del último estado estimado.

De manera más formal, sea el modelo no-lineal de la forma

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= f(\mathbf{x}, \mathbf{u}, q), & q &\sim N(0, Q), \\ \mathbf{y} &= h(\mathbf{x}, r), & r &\sim N(0, R),\end{aligned}\tag{3.65}$$

donde  $\mathbf{x}$  es un vector de dimensión  $n$ ,  $\mathbf{y}$  de dimensión  $m$  y  $\mathbf{u}$  de dimensión  $r$ .

Se supone que el modelo (3.65) se puede expresar de manera discreta con el estado  $\mathbf{x}_k$  y la medición  $\mathbf{y}_k$  al instante de tiempo  $k$  de la siguiente manera

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}_k &= f(\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{u}_{k-1}, q_{k-1}), & q_k &\sim N(0, Q_k), \\ \mathbf{y}_k &= h(\mathbf{x}_k, r_k), & r_k &\sim N(0, R_k),\end{aligned}\tag{3.66}$$

donde  $\mathbf{u}_k$  es la entrada de control, y,  $q_k$  y  $r_k$  son variables aleatorias no observables con distribución Gaussiana con covarianza  $Q_k$  y  $R_k$  respectivamente. Las funciones  $f$  y  $h$  representan los modelos no-lineales del sistema y de medición respectivamente.

El filtro de Kalman para el sistema (3.66) puede ser descrito por las siguientes ecuaciones:

Para la etapa de predicción o estimación, se tiene la ecuación que estima el estado del sistema

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} = f(\hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}, \mathbf{u}_{k-1}),\tag{3.67}$$

donde  $\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}$  es la estimación del estado dado  $\mathbf{x}_{k-1}$  a priori.

La estimación de la matriz de covarianza  $P_{k|k-1}$  está dada por

$$P_{k|k-1} = F_{k-1}P_{k-1|k-1}F_{k-1}^T + Q_{k-1},\tag{3.68}$$

donde  $F_{k-1}$  es el Jacobiano de la función  $f$  con respecto al estado  $\mathbf{x}$  de la forma

$$F_{k-1} = \left. \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}, \mathbf{u}_{k-1}}.\tag{3.69}$$

Para la etapa de actualización o corrección, se tienen las siguientes ecuaciones:

$$\tilde{\mathbf{y}}_k = \mathbf{y}_k - h(\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}),\tag{3.70}$$

donde  $\mathbf{z}_k$  es la innovación de medición.

$$S_k = H_k P_{k|k-1} H_k^T + R_k,\tag{3.71}$$

donde  $S_k$  es la innovación de la covarianza y  $H_k$  es el Jacobiano de la función  $h$  con respecto al estado  $\mathbf{x}$  de la forma

$$H_k = \left. \frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}}.\tag{3.72}$$

$$K_k = P_{k|k-1}H_k^T + R_k, \quad (3.73)$$

donde  $K_k$  es la ganancia de Kalman.

$$P_{k|k} = (I - K_k H_k)P_{k|k-1}, \quad (3.74)$$

donde  $P_{k|k}$  es la actualización de la matriz de covarianza y por último

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k} = \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} + K_k \tilde{\mathbf{y}}_k. \quad (3.75)$$

donde  $\hat{\mathbf{x}}_{k|k}$  es la actualización de la estimación del estado.

## Capítulo 4

# Desarrollo teórico

### 4.1. Modelo dinámico

Como se vió en la sección 3.2, las ecuaciones que describen la posición y orientación de un UAV son básicamente las que describen el movimiento de un cuerpo rígido con 6 grados de libertad. Dichas ecuaciones se pueden separar en ecuaciones cinemáticas y ecuaciones dinámicas. El modelo se deduce a partir de las siguientes suposiciones:

**Suposición 4.1.** La estructura es rígida.

**Suposición 4.2.** La estructura es simétrica.

**Suposición 4.3.** El origen del marco de referencia local coincide con el centro de masa.

**Suposición 4.4.** Las hélices son rígidas.

Se consideran dos marcos de referencia principales: Un marco de referencia global  $G(OXYZ)$  el cual está fijo a la Tierra y un marco de referencia local  $B(oxyz)$  el cual está fijo al centro de masa del *quadrotor*, así como se muestra en la Figura 4.1.

Las ecuaciones cinemáticas se representan como sigue: La posición de la aeronave está descrita por las coordenadas  $\mathbf{X}_G = (x_G, y_G, z_G)$ , las cuales representan la posición absoluta con respecto al marco de referencia global  $G$ , y la orientación se describe utilizando los ángulos de Euler  $\Theta_G = (\phi, \theta, \psi)$ , los cuales se conocen como el ángulo de *roll* ( $-\frac{\pi}{2} < \phi < \frac{\pi}{2}$ ), ángulo de *pitch* ( $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ ) y ángulo de *yaw* ( $-\pi < \psi < \pi$ ) respectivamente.

La orientación en el espacio de la aeronave del marco de referencia  $B$  al marco de referencia  $G$  está dado por la matriz de transformación de ángulos de Euler  ${}^G R_B$ , de la cual se deriva la matriz de transformación de velocidad angular  ${}^B M_G$  tal y como se vió en la sección 3.1.2. Las matrices están dadas por (3.14)

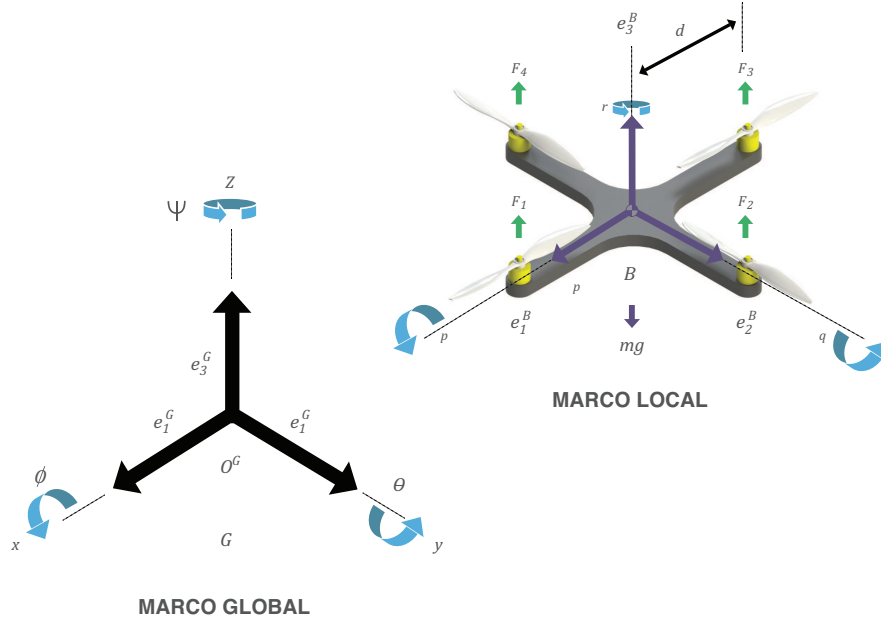


Figura 4.1: Relación entre el marco de referencia global  $G$  y el marco de referencia local  $B$ .

$${}^G R_B = R_{Z,\psi} R_{Y,\theta} R_{X,\phi} = \begin{bmatrix} C_\psi C_\theta & C_\psi S_\theta S_\phi - S_\psi C_\phi & C_\psi S_\theta C_\phi + S_\psi S_\phi \\ S_\psi C_\theta & S_\psi S_\theta S_\phi + C_\psi C_\phi & S_\psi S_\theta C_\phi - C_\psi S_\phi \\ -S_\theta & C_\theta S_\phi & C_\theta C_\phi \end{bmatrix}.$$

Y por (3.22)

$${}^B M_G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -S_\theta \\ 0 & C_\phi & C_\theta S_\phi \\ 0 & -S_\phi & C_\theta C_\phi \end{bmatrix}.$$

Utilizando las matrices (3.14) y (3.22), y las ecuaciones (3.24) y (3.22), bajo la suposición de que  ${}^B \mathbf{r} = [0, 0, 0]^T$  se pueden escribir las siguientes ecuaciones cinemáticas:

$$\dot{\mathbf{X}}_G = {}^G R_B \dot{\mathbf{X}}_B, \quad (4.1)$$

$$\dot{\mathbf{\Theta}}_B = {}^B M_G \dot{\mathbf{\Theta}}_G, \quad (4.2)$$

donde  ${}^G \dot{\mathbf{d}}_B = {}^G R_B \dot{\mathbf{X}}_B$ .

Utilizando el formalismo de Newton-Euler en el marco de referencia local  $B$ , se realiza un análisis al cuerpo rígido (Figura 4.2), como se vio en la sección 3.2, del *quadrotor* sujeto a las fuerzas externas  $\Sigma \mathbf{F}_{ext}$  y momentos  $\Sigma \mathbf{T}_{ext}$  aplicados al centro de masas del mismo. Por

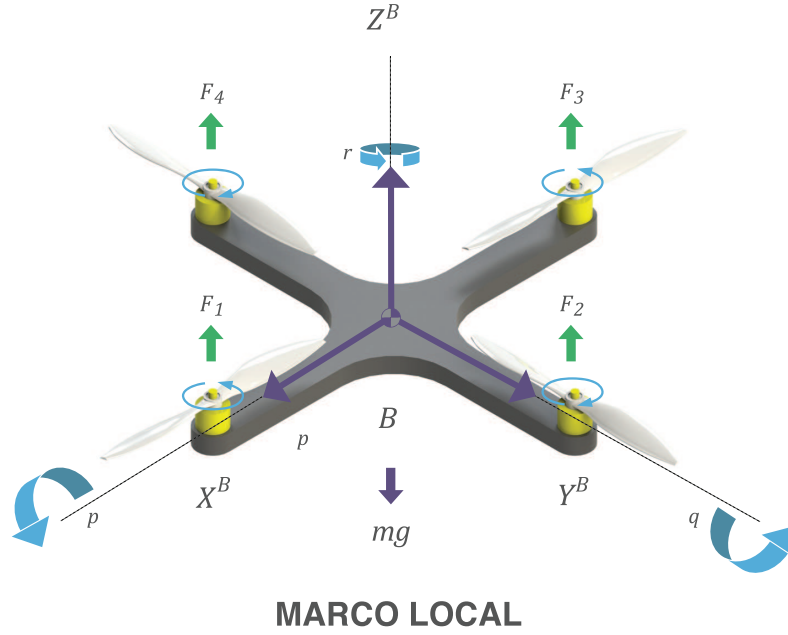


Figura 4.2: Diagrama de cuerpo libre sujeto a fuerzas externas expresadas en el marco de referencia local  $B$ .

lo que las ecuaciones dinámicas de movimiento son:

$$\begin{aligned}\Sigma \mathbf{F}_{ext} &= m\ddot{\mathbf{X}}_B + m\dot{\boldsymbol{\Theta}}_B \times \dot{\mathbf{X}}_B, \\ \Sigma \mathbf{T}_{ext} &= {}^B I \ddot{\boldsymbol{\Theta}}_B + \dot{\boldsymbol{\Theta}}_B \times {}^B I \dot{\boldsymbol{\Theta}}_B.\end{aligned}\quad (4.3)$$

Donde  $m$  y  ${}^B I = \text{diag}(I_x, I_y, I_z)$  son la masa y la matriz de inercia del multicoptero, respectivamente.  $\mathbf{X}_B$  y  $\boldsymbol{\Theta}_B$  son la posición y orientación expresadas en el marco de referencia local.

Las fuerzas externas y momentos son expresados en  $B$  de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\Sigma \mathbf{F}_{ext} &= \mathbf{F}_{prop} - \mathbf{F}_{aero} - \mathbf{F}_{grav}, \\ \Sigma \mathbf{T}_{ext} &= \mathbf{T}_{prop} - \mathbf{T}_{aero} - \mathbf{T}_{gyro}.\end{aligned}\quad (4.4)$$

Donde  $\mathbf{F}_{prop} = [0, 0, U_1]^T$  y  $\mathbf{T}_{prop} = [U_2, U_3, U_4]^T$  son la fuerza y los momentos producidos por las hélices de los motores.  $\mathbf{F}_{grav} = m {}^G R_B^T \mathbf{g}$  es la fuerza de gravedad con  $\mathbf{g} = [0, 0, 9.81 \text{ m/s}^2]^T$ ,  $\mathbf{F}_{aero} = [A_x, A_y, A_z]^T$  y  $\mathbf{T}_{aero} = [A_p, A_q, A_r]^T$  son las fuerzas y momentos aerodinámicos, respectivamente.  $\mathbf{T}_{gyro} = \sum_{i=1}^4 J(\dot{\boldsymbol{\Theta}}_B \times \mathbf{e}_3)(-1)^{i+1}\omega_i$  define los efectos giroscópicos debido al giro de las hélices. Las entradas  $U_i$  con  $i = 1, 2, 3, 4$  se definen como:

$$\begin{aligned}U_1 &= \sum_{i=1}^4 F_i, \\ U_2 &= d(F_4 - F_2), \\ U_3 &= d(F_3 - F_1), \\ U_4 &= c \sum_{i=1}^4 (-1)^i F_i.\end{aligned}\quad (4.5)$$

Donde  $d$  es la distancia del centro de masa al eje de los motores,  $c$  es el factor aerodinámico de arrastre de las hélices,  $J$  es la inercia de los motores y  $F_i = bw_i^2$ , ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) es la fuerza generada por la velocidad angular del motor  $w_i$  y la constante de sustentación de las hélices  $b$ . A partir de esto se puede obtener la matriz que relaciona las velocidades angulares de los motores con las entradas de control del sistema como se muestra en la ecuación

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b & b & b & b \\ 0 & -db & 0 & db \\ -db & 0 & db & 0 \\ -cb & cb & -cb & cb \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1^2 \\ w_2^2 \\ w_3^2 \\ w_4^2 \end{bmatrix}. \quad (4.6)$$

Las funciones aerodinámicas  $A_i$  se calculan como  $A_i = \frac{1}{2}\rho C_i W^2$  utilizando los coeficientes aerodinámicos debido a la forma geométrica  $C_i$ , la densidad del aire  $\rho$ , y  $W = \Omega - \Omega_{air}$  la cual representa la velocidad relativa de la aeronave con respecto a la velocidad del aire.

A partir de las ecuaciones (4.1) y (4.2) se deducen las ecuaciones dinámicas que relacionan los movimientos entre los marcos de referencia  $G$  y  $B$ .

$$\ddot{\mathbf{X}}_G = {}^G R_B \ddot{\mathbf{X}}_B. \quad (4.7)$$

$$\ddot{\mathbf{\Theta}}_B = {}^B \dot{M}_G \dot{\mathbf{\Theta}}_G + {}^B M_G \ddot{\mathbf{\Theta}}_G. \quad (4.8)$$

Usando (4.3), (4.4), (4.7) y (4.8) las ecuaciones que describen el comportamiento dinámico del *quadrotor* se pueden expresar en el marco de referencia global  $G$  como:

$$\ddot{\mathbf{X}}_G = \frac{1}{m} {}^G R_B [\mathbf{F}_{prop} - \mathbf{F}_{aero}] - \mathbf{g}. \quad (4.9)$$

$$\ddot{\mathbf{\Theta}}_G = [{}^B I^B M_G]^{-1} \begin{bmatrix} T_{prop} - T_{aero} - T_{gyro} - {}^B M_G \dot{\mathbf{\Theta}}_G \times {}^B I^B M_G \dot{\mathbf{\Theta}}_G \\ -{}^B I \left( \frac{\partial {}^B M_G}{\partial \phi} \dot{\phi} + \frac{\partial {}^B M_G}{\partial \theta} \dot{\theta} + \frac{\partial {}^B M_G}{\partial \psi} \dot{\psi} \right) \dot{\mathbf{\Theta}}_G \end{bmatrix}. \quad (4.10)$$

Para fines de control se toma en cuenta la siguiente suposición:

**Suposición 4.5.** Los ángulos de *roll* y *pitch* serán pequeños, por lo que  $C_\phi \approx 1$  y  $S_\phi \approx 0$ .

Tomando en consideración la suposición 4.5 se simplifica la matriz  ${}^B M_G$  de manera que se puede aproximar con la matriz identidad  $I$  de  $3 \times 3$ . Así las ecuaciones dinámicas se pueden



expresar de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
\ddot{x} &= \frac{U_1}{m} (S_\phi S_\psi + C_\phi S_\theta C_\psi) - A_x, \\
\ddot{y} &= \frac{U_1}{m} (-S_\phi C_\psi + C_\phi S_\theta S_\psi) - A_y, \\
\ddot{z} &= \frac{U_1}{m} (C_\phi C_\theta) - g - A_z, \\
\ddot{\phi} &= \frac{1}{I_x} (U_2 + (I_y - I_z) \dot{\theta} \dot{\psi} + J \dot{\theta} \omega) - A_p, \\
\ddot{\theta} &= \frac{1}{I_y} (U_3 + (I_z - I_x) \dot{\phi} \dot{\psi} + J \dot{\phi} \omega) - A_q, \\
\ddot{\psi} &= \frac{1}{I_z} (U_4 + (I_x - I_y) \dot{\phi} \dot{\theta} \omega) - A_r.
\end{aligned} \tag{4.11}$$

Entonces, escribiendo el sistema en la forma de espacio de estados, asignando  $\mathbf{X} = [x, \dot{x}, y, \dot{y}, z, \dot{z}, \phi, \dot{\phi}, \theta, \dot{\theta}, \psi, \dot{\psi}]^T$ , se obtiene la siguiente representación:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2, \\
\dot{x}_2 &= \frac{U_1}{m} (S_{x_7} S_{x_{11}} + C_{x_7} S_{x_9} C_{x_{11}}) - A_2, \\
\dot{x}_3 &= x_4, \\
\dot{x}_4 &= \frac{U_1}{m} (-S_{x_7} C_{x_{11}} + C_{x_7} S_{x_9} S_{x_{11}}) - A_4, \\
\dot{x}_5 &= x_6, \\
\dot{x}_6 &= \frac{U_1}{m} (C_{x_7} C_{x_9}) - g - A_6, \\
\dot{x}_7 &= x_8, \\
\dot{x}_8 &= \frac{1}{I_x} (U_2 + (I_y - I_z) x_{10} x_{12} + J x_{10} \omega) - A_8, \\
\dot{x}_9 &= x_{10}, \\
\dot{x}_{10} &= \frac{1}{I_y} (U_3 + (I_z - I_x) x_8 x_{12} + J x_8 \omega) - A_{10}, \\
\dot{x}_{11} &= x_{12}, \\
\dot{x}_{12} &= \frac{1}{I_z} (U_4 + (I_x - I_y) x_8 x_{10}) - A_{12}.
\end{aligned} \tag{4.12}$$

Con  $\mathbf{X} = [x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}, x_{11}, x_{12}]^T$ .

## 4.2. Objetivo de control

Se considera el problema de seguimiento de trayectoria para el UAV tipo *quadrotor* descrito en el modelo no lineal (4.12), por lo cual el objetivo del control es diseñar  $\mathbf{F}_{prop}$  y  $\mathbf{T}_{prop}$  de manera que permita al UAV seguir una trayectoria no suave y robusta a perturbaciones. En este trabajo se supone que la respuesta dinámica de los motores es lo suficientemente rápida, de manera que se considera que la fuerza de sustentación  $U_1$  y los torques  $U_2, U_3$  y  $U_4$  actúan inmediatamente sin ningún retraso.

La trayectoria a seguir se puede separar en dos partes, una trayectoria de la posición del centro de masa del *quadrotor* en el espacio tridimensional y una trayectoria para la orientación del UAV, dando a entender que la orientación sólo involucra el ángulo de *yaw* como una referencia independiente, los ángulos de *roll* y *pitch* se obtienen de la dinámica de traslación deseada. La Figura 4.3 muestra la estructura del control.

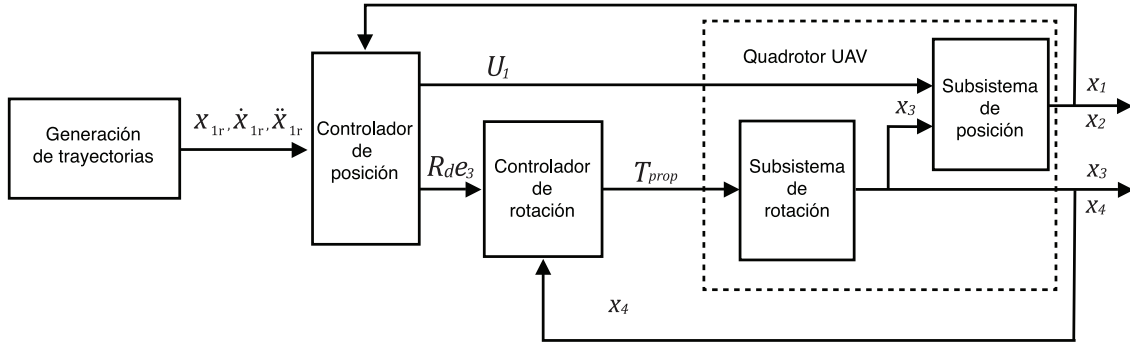


Figura 4.3: Estrategia de control jerárquico.

El vector  $[\mathbf{X}_{1r}^T, \dot{\mathbf{X}}_{1r}^T, \ddot{\mathbf{X}}_{1r}^T]^T$  contiene la posición, velocidad y aceleración de referencia que deberá seguir el vector de posición  $\mathbf{X}_1 = [x_1, x_3, x_5]^T$  y el vector de velocidad  $\mathbf{X}_2 = [x_2, x_4, x_6]^T$ . La aceleración de referencia  $\ddot{\mathbf{X}}_{1r}$  está acotada por  $\|\ddot{\mathbf{X}}_{1r}\| \leq \gamma$ , donde  $\|\cdot\|$  denota la norma Euclidiana de un vector y  $\gamma$  es una constante positiva. Lo mismo pasa con la referencia para el ángulo de *yaw* con el vector  $[x_{11r}, \dot{x}_{11r}, \ddot{x}_{11r}]^T$ .

Para esto se define el sistema en errores de la siguiente manera:  $\mathbf{Z}_1 = \mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_{1r}$ , donde  $\mathbf{Z}_1 = [z_1, z_3, z_5]^T$ , es el error de posición,  $\mathbf{Z}_2 = \mathbf{X}_2 - \dot{\mathbf{X}}_{1r}$ , con  $\mathbf{Z}_2 = [z_2, z_4, z_6]^T$ , es el error de velocidad,  $\mathbf{Z}_3 = \mathbf{X}_3 - \mathbf{X}_{3r}$ , donde  $\mathbf{X}_3 = [x_7, x_9, x_{11}]^T$ ,  $\mathbf{X}_{3r} = [x_{7r}, x_{9r}, x_{11r}]^T$  y  $\mathbf{Z}_3 = [z_7, z_9, z_{11}]^T$  es el error de posición angular, y  $\mathbf{Z}_4 = \mathbf{X}_4 - \dot{\mathbf{X}}_{3r}$ , con  $\mathbf{X}_4 = [x_8, x_{10}, x_{12}]^T$ ,  $\dot{\mathbf{X}}_{3r} = [\dot{x}_{7r}, \dot{x}_{9r}, \dot{x}_{11r}]^T$  y  $\mathbf{Z}_4 = [z_8, z_{10}, z_{12}]^T$  es el error de velocidad angular. Las referencias  $x_{7r}$ ,  $x_{9r}$  y sus derivadas se definirán más adelante, por lo que en principio se consideran conocidas.

Dicho esto se reescribe el sistema completo en errores de la forma:

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{Z}}_1 &= \mathbf{Z}_2, \\
\dot{\mathbf{Z}}_2 &= \frac{1}{m} {}^G R_B \mathbf{e}_3 U_1 - g - \ddot{\mathbf{X}}_r + \Delta_X, \\
\dot{\mathbf{Z}}_3 &= \mathbf{Z}_4, \\
\dot{\mathbf{Z}}_4 &= [{}^B I^B M_G]^{-1} \left[ \mathbf{T}_{prop} - {}^B M_G \left( \mathbf{Z}_4 + \dot{\mathbf{X}}_{3r} \right) \times {}^B I^B M_G \left( \mathbf{Z}_4 + \dot{\mathbf{X}}_{3r} \right) \right] - \ddot{\mathbf{X}}_{3r} + \Delta_\theta.
\end{aligned} \tag{4.13}$$

Donde  $\Delta_X = [A_2, A_4, A_6]^T$  y  $\Delta_\Theta = [A_8, A_{10}, A_{12}]^T$ .

Suponiendo que  $R_d$  representa la matriz de transformación derivada de la orientación deseada para controlar el sistema de traslación, en conjunto con el control  $U_1$ , de la definición de  $\mathbf{Z}_2$  se tiene que:

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{Z}}_2 &= \frac{1}{m} {}^G R_B \mathbf{e}_3 U_1 - g - \ddot{\mathbf{X}}_r + \Delta_X, \\
&= \frac{1}{m} R_d \mathbf{e}_3 U_1 - g - \ddot{\mathbf{X}}_r + \Delta_X + \frac{1}{m} ({}^G R_B - R_d) \mathbf{e}_3 U_1.
\end{aligned} \tag{4.14}$$

Con

$$\frac{1}{m} {}^G R_B \mathbf{e}_3 U_1 = \frac{1}{m} \begin{bmatrix} C_{x_{11}} S_{x_9} C_{x_7} + S_{x_{11}} S_{x_7} \\ S_{x_{11}} S_{x_9} C_{x_7} - C_{x_{11}} S_{x_7} \\ C_{x_9} C_{x_7} \end{bmatrix} U_1 = \begin{bmatrix} U_x \\ U_y \\ \frac{C_{x_9} C_{x_7}}{m} U_1 \end{bmatrix}, \tag{4.15}$$

donde se definen los controles  $U_x$  y  $U_y$  los cuales dependen de  $U_1$  y los ángulos de Euler. Sin embargo, el control  $U_1$  se diseña para controlar la altura del *quadrotor* para seguir una referencia, así como el ángulo de *yaw* ( $x_{11}$ ) el cual también debe seguir una referencia predefinida, lo cual sólo deja dos variables disponibles para manipular las salidas del sistema  $x$  y  $y$ , las cuales son los ángulos de *roll* ( $x_7$ ) y *pitch* ( $x_9$ ). Por lo cual se define  $R_d$  en base a los ángulos deseados  $x_{7d}$  y  $x_{9d}$

$$\frac{1}{m} R_d \mathbf{e}_3 U_1 = \frac{1}{m} \begin{bmatrix} C_{x_{11}} S_{x_{9d}} C_{x_{7d}} + S_{x_{11}} S_{x_{7d}} \\ S_{x_{11}} S_{x_{9d}} C_{x_{7d}} - C_{x_{11}} S_{x_{7d}} \\ C_{x_9} C_{x_7} \end{bmatrix} U_1 = \begin{bmatrix} U_{xd} \\ U_{yd} \\ \frac{C_{x_9} C_{x_7}}{m} U_1 \end{bmatrix}. \tag{4.16}$$

Entonces el término  $\frac{1}{m} ({}^G R_B - R_d) \mathbf{e}_3 U_1$  es de la forma:

$$\frac{1}{m} ({}^G R_B - R_d) \mathbf{e}_3 U_1 = \frac{1}{m} \begin{bmatrix} C_{x_{11}} (S_{x_9} C_{x_7} - S_{x_{9d}} C_{x_{7d}}) + S_{x_{11}} (S_{x_7} - S_{x_{7d}}) \\ S_{x_{11}} (S_{x_9} C_{x_7} - S_{x_{9d}} C_{x_{7d}}) - C_{x_{11}} (S_{x_7} - S_{x_{7d}}) \\ 0 \end{bmatrix} U_1 = \begin{bmatrix} U_x - U_{xd} \\ U_y - U_{yd} \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{4.17}$$

Reescribiendo el sistema completo en errores se tiene que:

$$\begin{aligned}
 \dot{\mathbf{Z}}_1 &= \mathbf{Z}_2, \\
 \dot{\mathbf{Z}}_2 &= \frac{1}{m} R_d \mathbf{e}_3 U_1 - g - \ddot{\mathbf{X}}_r + \Delta_X + \frac{1}{m} ({}^G R_B - R_d) \mathbf{e}_3 U_1, \\
 \dot{\mathbf{Z}}_3 &= \mathbf{Z}_4, \\
 \dot{\mathbf{Z}}_4 &= [{}^B I^B M_G]^{-1} \left[ \mathbf{T}_{prop} - {}^B M_G \left( \mathbf{Z}_4 + \dot{\mathbf{X}}_{3r} \right) \times {}^B I^B M_G \left( \mathbf{Z}_4 + \dot{\mathbf{X}}_{3r} \right) \right] - \ddot{\mathbf{X}}_{3r} + \Delta_\theta.
 \end{aligned} \tag{4.18}$$

Por lo que los subsistemas de orden reducido  $\Sigma_1$ ,  $\Sigma_2$  y el término de acoplamiento  $\mathbf{h}(\mathbf{Z}_1, \mathbf{Z}_2, \mathbf{Z}_3)$  están dados por:

$$\Sigma_1 : \begin{cases} \dot{\mathbf{Z}}_1 = \mathbf{Z}_2, \\ \dot{\mathbf{Z}}_2 = \frac{1}{m} R_d \mathbf{e}_3 U_1 - g - \ddot{\mathbf{X}}_r + \Delta_X \end{cases} \tag{4.19}$$

$$\Sigma_2 : \begin{cases} \dot{\mathbf{Z}}_3 = \mathbf{Z}_4, \\ \dot{\mathbf{Z}}_4 = [{}^B I^B M_G]^{-1} \left[ \mathbf{T}_{prop} - {}^B M_G \left( \mathbf{Z}_4 + \dot{\mathbf{X}}_{3r} \right) \times {}^B I^B M_G \left( \mathbf{Z}_4 + \dot{\mathbf{X}}_{3r} \right) \right] - \ddot{\mathbf{X}}_{3r} + \Delta_\theta. \end{cases} \tag{4.20}$$

$$\mathbf{h}(\mathbf{Z}_1, \mathbf{Z}_2, \mathbf{Z}_3) = \begin{bmatrix} U_x - U_{xd} \\ U_y - U_{yd} \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{4.21}$$

Con base en esto, se procede a diseñar la estructura general del control. En primer lugar se diseña el control  $U_1$  y el control virtual  $R_d$  para estabilizar la dinámica de traslación del subsistema  $\Sigma_1$ . Después, se usa el control virtual  $R_d$  y la referencia de *yaw* para completar los vectores de referencia  $\mathbf{X}_{3r}$  y  $\dot{\mathbf{X}}_{3r}$  para el subsistema  $\Sigma_2$  y se diseña el controlador  $\mathbf{T}_{prop} = [U_2, U_3, U_4]^T$  para estabilizar el subsistema  $\Sigma_2$ .

Finalmente, la estabilidad se considera para el sistema completo en lazo cerrado. En la sección 4.4 se muestran conclusiones de estabilidad basados en las condiciones de estabilidad para cada subsistema.

### 4.3. Diseño de control

Partiendo del modelo matemático mostrado en (4.18) se diseñan las leyes de control necesarias para atacar los problemas de estabilización de la aeronave o de seguimiento de trayectorias, los cuales se presentan a continuación.

### 4.3.1. Seguimiento de trayectoria

El problema de seguimiento de trayectoria de un *quadrotor* consiste en controlar la posición de la aeronave en el espacio y la orientación del mismo a través del control de los ángulos de Euler, lo cual se logrará usando la técnica de control a bloques generando comportamientos deseados para los ángulos de *roll* y *pitch*.

Se diseña el controlador de seguimiento de trayectorias para asegurar la convergencia de los errores de posición  $\mathbf{Z}_1 = [z_1, z_3, z_5]^T$  a cero. Por eso sea definido el control  $U_1$  y la dinámica derivada de los ángulos de Euler de modo que sea posible controlar la posición en el espacio.

En este caso, se considera que las trayectorias a seguir se conocen a priori, así como sus dos primeras derivadas. Con esto en consideración se procede a describir el controlador, en el cual se ha pensado en utilizar el algoritmo de *Super-Twisting* por sus propiedades de robustez ante perturbaciones y cambios paramétricos, por lo cual se comienza con la elección de las superficies deslizantes.

#### Selección de superficie para $z$

Sea definido el error de seguimiento, así como su dinámica, para la posición en  $z$  como:

$$\begin{aligned} z_5 &= x_{5r} - x_5, \\ \dot{z}_5 &= \dot{x}_{5r} - \dot{x}_5, \\ \ddot{z}_5 &= \ddot{x}_{5r} - \frac{U_1}{m} (C_{x_7} C_{x_9}) + g + A_6. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Donde se puede ver que se trata de un sistema con grado relativo  $r = 2$ , por lo que se elige la superficie deslizante de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \sigma_5 &= \dot{z}_5 + \gamma_5 z_5, \\ \dot{\sigma}_5 &= \alpha_5 + \beta_5 V_5 + \Delta_5. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Con  $\alpha_5 = \ddot{x}_{5r} + \gamma_5 \dot{z}_5 + g$ ,  $\beta_5 = -\frac{C_{x_7} C_{x_9}}{m}$ ,  $V_5 = U_1$  y  $\Delta_5 = A_6$ . Esto con el motivo de reducir el grado relativo del sistema para poder aplicar el algoritmo de *Super-Twisting*, pues como se vió en la sección 3.3.3, el STA sólo se puede aplicar a sistemas con grado relativo  $r = 1$ .

Bajo estas suposiciones se propone el control:

$$U_1 = -\beta_5^{-1} (\alpha_5 - \nu_5). \quad (4.24)$$

Donde  $\nu_5$  se definirá más adelante. Además, se sabe que  $(-\frac{\pi}{2} < \phi < \frac{\pi}{2})$  y  $(-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2})$ , por lo que  $\beta^{-1}$  está bien definida.

### Selección de superficie para $x$

Sea definido el error de seguimiento, así como su dinámica, para la posición en  $x$  como:

$$\begin{aligned} z_1 &= x_{1r} - x_1, \\ \dot{z}_1 &= \dot{x}_{1r} - \dot{x}_1, \\ \ddot{z}_1 &= \ddot{x}_{1r} - \frac{U_1}{m} (S_{x_7} S_{x_{11}} + C_{x_7} S_{x_9} C_{x_{11}}) + A_2. \end{aligned} \quad (4.25)$$

Aplicando la definición en (4.15), el pseudo-control  $U_x$  es:

$$U_x = \frac{U_1}{m} (S_{x_7} S_{x_{11}} + C_{x_7} S_{x_9} C_{x_{11}}). \quad (4.26)$$

Sustituyendo (4.24) en (4.26)

$$U_x = (\alpha_5 - \nu_5) \left( T_{x_7} \frac{S_{x_{11}}}{C_{x_9}} + T_{x_9} C_{x_{11}} \right). \quad (4.27)$$

Tomando estas consideraciones se elige la superficie deslizante como:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \dot{z}_1 + \gamma_1 z_1, \\ \dot{\sigma}_1 &= \alpha_1 + \beta_1 V_1 + \Delta_1. \end{aligned} \quad (4.28)$$

Con  $\alpha_1 = \ddot{x}_{1r} + \gamma_1 \dot{z}_1$ ,  $\beta_1 = -1$ ,  $V_1 = U_x$  y  $\Delta_1 = A_2$ . Con la intención de generar un pseudo-control virtual  $U_{xd}$ , definido en (4.16), el cual tendrá un comportamiento deseado capaz de estabilizar el error de seguimiento en  $x$  a cero. Aplicando la técnica BC se espera que  $U_x$  llegue a ser igual a  $U_{xd}$ .

De la misma manera se procede a elegir la superficie deslizante para la posición en  $y$ .

### Selección de superficie para $y$

Sea definido el error de seguimiento, así como su dinámica, para la posición en  $y$  como:

$$\begin{aligned} z_3 &= x_{3r} - x_3, \\ \dot{z}_3 &= \dot{x}_{3r} - \dot{x}_3, \\ \ddot{z}_3 &= \ddot{x}_{3r} - \frac{U_1}{m} (-S_{x_7} C_{x_{11}} + C_{x_7} S_{x_9} S_{x_{11}}) + A_4. \end{aligned} \quad (4.29)$$

Aplicando la definición en (4.15), el pseudo-control  $U_y$  es:

$$U_y = \frac{U_1}{m} (-S_{x_7} C_{x_{11}} + C_{x_7} S_{x_9} S_{x_{11}}). \quad (4.30)$$

Al sustituir en (4.30) en (4.29) se tiene que:

$$U_y = (\alpha_5 - \nu_5) \left( -T_{x_7} \frac{C_{x_{11}}}{C_{x_9}} + T_{x_9} S_{x_{11}} \right). \quad (4.31)$$

Tomando estas consideraciones se elige la superficie deslizante como:

$$\begin{aligned} \sigma_3 &= \dot{z}_3 + \gamma_3 z_3, \\ \dot{\sigma}_3 &= \alpha_3 + \beta_3 V_3 + \Delta_3. \end{aligned} \quad (4.32)$$

Con  $\alpha_3 = \ddot{x}_{3r} + \gamma_3 \dot{z}_3$ ,  $\beta_3 = -1$ ,  $V_3 = U_y$  y  $\Delta_3 = A_4$ . Con la intención de generar un pseudo-control virtual  $U_{yd}$ , definido en (4.16), el cual tendrá un comportamiento deseado capaz de estabilizar el error de seguimiento en  $y$  a cero. Aplicando la técnica BC se espera que  $U_y$  llegue a ser igual a  $U_{yd}$ .

### Diseño de control por modos deslizantes para el seguimiento de trayectoria

Con el fin de asegurar la convergencia de las superficies deslizantes a cero se aplica una ley de control basada en el algoritmo de *Super-Twisting* para cada variable a controlar. Se puede observar que (4.28), (4.32) y (4.23) describen el comportamiento dinámico de las superficies  $\sigma_1$ ,  $\sigma_3$  y  $\sigma_5$ , las cuales tienen la siguiente estructura:

$$\begin{aligned} \sigma_i &= \dot{z}_i + \gamma_i z_i, & i &= 1, 3, 5, \\ \dot{\sigma}_i &= \alpha_i + \beta_i V_i + \Delta_i, \end{aligned} \quad (4.33)$$

donde se supone que las perturbaciones cumplen con  $\Delta_i^+ |\sigma_i|^{1/2} \geq |\Delta_i|$  y  $\bar{\Delta}_i \geq |\dot{\Delta}_i|$ .

Ahora, se diseñan las leyes de control aplicando el STA visto en la sección 3.3.3

$$V_i = -\beta_i^{-1} (\alpha_i - \nu_i). \quad (4.34)$$

Dado que la selección de  $U_1$  permite el diseño de superficies deslizantes suaves para el movimiento en el plano  $x - y$  la ley de control en base al algoritmo de *Super-Twisting* se modifica, remplazando la función signo por una función tipo sigmoideal como se muestra a continuación.

$$\begin{aligned} \nu_i &= -k_i |\sigma_i|^{1/2} \text{Sigm}(\sigma_i) + \nu_{i+1}, \\ \dot{\nu}_{i+1} &= -l_i \text{Sign}(\sigma_i). \end{aligned} \quad (4.35)$$

Con las ganancias de control  $k_i > 2\Delta_i^+$  y  $l_i > k_i \frac{5\Delta_i^+ k_i + 4(\Delta_i^+)^2}{2(k_i - 2\Delta_i^+)}$ . La selección de estas ganancias, una extensión del teorema 3.3 para la función sigmoideal, la cual se puede encontrar en [Gonzalez-Jimenez et al., 2011], garantiza la convergencia en tiempo finito de las superficies

$\sigma_i$  a cero dentro de una región. Cuando esto suceda se tendrá una dinámica descrita por la siguiente ecuación:

$$\dot{z}_i = -\gamma_i z_i, \quad (4.36)$$

donde  $\gamma_i > 0$  asegura un comportamiento asintótico de los errores de seguimiento para la posición en el espacio 3D. La función sigmoïdal utilizada en este trabajo está definida como:

$$\text{sigm}(\varepsilon, \sigma) = \tanh(\varepsilon\sigma). \quad (4.37)$$

Las ecuaciones (4.27) y (4.31) muestran el comportamiento real de los pseudo-controles para la dinámica de  $x$  y  $y$ , pero para poder asignarles una dinámica es necesario manipular las variables involucradas que sean "libres", o lo que es igual, aquellas que no comprometan la estabilidad del sistema con respecto a las salidas.

Recuerde que para el problema de seguimiento de trayectoria, las variables a controlar son  $(x_1, x_3, x_5, x_{11})$ , por lo cual no se puede utilizar  $x_{11}$  para dar algún comportamiento deseado al pseudo-control  $U_x$ , lo mismo pasa para  $\alpha_5$  y  $\nu_5$ , ya que estas están involucradas en la dinámica de  $x_5$ . Esto deja como única opción las variables  $x_7$  y  $x_9$ , por lo que un comportamiento deseado de estas variables pueden producir un comportamiento deseado del pseudo-control, lo cual refleja el principio fundamental de la técnica de control a bloques, esto es:

$$U_{xd} = (\alpha_5 - \nu_5) \left( T_{x_{7d}} \frac{S_{x_{11}}}{C_{x_{9d}}} + T_{x_{9d}} C_{x_{11}} \right). \quad (4.38)$$

$$U_{yd} = (\alpha_5 - \nu_5) \left( -T_{x_{7d}} \frac{C_{x_{11}}}{C_{x_{9d}}} + T_{x_{9d}} S_{x_{11}} \right). \quad (4.39)$$

Una vez definidas las leyes de control  $U_1$ ,  $U_x$  y  $U_y$  se procede a definir  $x_{7d}$  y  $x_{9d}$ . Como se puede ver en (4.38) y (4.39) los pseudo-controles definidos anteriormente son una combinación no lineal de los ángulos de Euler de la forma:

$$\Lambda = R(\psi)\Phi. \quad (4.40)$$

Donde

$$\Lambda^T = \frac{1}{\alpha_5 - \nu_5} [U_{xd} \quad U_{yd}], R(\psi) = \begin{bmatrix} S_{x_{11}} & C_{x_{11}} \\ -C_{x_{11}} & S_{x_{11}} \end{bmatrix}, \Phi^T = \begin{bmatrix} \frac{T_{x_{7d}}}{C_{x_{9d}}} & T_{x_{9d}} \end{bmatrix}. \quad (4.41)$$

Afortunadamente, la matriz de transformación  $R(\psi)$  es ortogonal, por lo que es no singular para todo  $x_{11} \in \mathbb{R}$ , así, se reescribe (4.41) como:

$$\Phi = R(\psi)^T \Lambda. \quad (4.42)$$



Lo cual permite definir los ángulos de *roll* y *pitch* deseados de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} x_{9d} &= \tan^{-1} \left( \frac{U_{xd}C_{x_{11}} + U_{yd}S_{x_{11}}}{\alpha_5 - \nu_5} \right), \\ x_{7d} &= \tan^{-1} \left( \frac{U_{xd}S_{x_{11}} - U_{yd}C_{x_{11}}}{\alpha_5 - \nu_5} C_{x_{9d}} \right). \end{aligned} \quad (4.43)$$

Observe que  $x_{7d}$  y  $x_{9d} \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  pues la función  $\tan^{-1}(t) : \mathbb{R} \rightarrow (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ . Por lo tanto, para que siempre exista (4.43) se debe cumplir que  $\alpha_5 - \nu_5 \neq 0$ . Tomando en cuenta la definición de  $U_1$  en la ecuación (4.5) se sabe que  $U_1 \geq 0$ , incluso, en la práctica un *quadrotor* en pleno vuelo no puede darse el lujo de que los motores se apaguen ( $w_i = 0$ ), ya que el *quadrotor* perdería el control, por lo que la fuerza de sustentación cumple con una condición aún más estricta, así se cumple que  $U_1 > 0$  y en (4.24) el término  $-\beta_5 > 0$ , ya que  $C_{x_7}C_{x_9} > 0$ . Como tanto  $U_1$  y  $-\beta_5$  son positivas, entonces se cumple que  $\alpha_5 - \nu_5 > 0$ . Así, la ecuación (4.43) está bien definida.

En resumen, para controlar la posición en  $z(x_5)$  se utiliza la ley de control (4.24), y para controlar la posición  $x - y$  se utilizan los ángulos de *roll* y *pitch*, donde las referencias se asignan de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} x_{7r} &= x_{7d}, & \dot{x}_{7r} &= \dot{x}_{7d}, \\ x_{9r} &= x_{9d}, & \dot{x}_{9r} &= \dot{x}_{9d}. \end{aligned} \quad (4.44)$$

La ventaja de un control con este tipo de estrategia, donde el pseudo-control tiene forma de *Super-Twisting*, está en que puede rechazar perturbaciones que no se encuentran en el subespacio de control, pero sí dentro del subespacio del pseudo-control, sin la necesidad de implementar observadores no lineales por modos deslizantes, como lo hace [Arellano, 2014], [Benallegue et al., 2006] y [Luque-Vega, 2014], con el fin de estimar dichas perturbaciones. La implementación de este tipo de observadores por lo general requiere de una gran capacidad computacional, la cual se ve restringida al momento de diseñar *quadrotors* con capacidades de carga limitadas.

La desventaja de este tipo de control es que requiere de las derivadas de las señales de referencia, que en este caso se vuelve un inconveniente al momento de calcular  $\dot{x}_{7r}$  y  $\dot{x}_{9r}$ , pues esto implica conocer  $\dot{\nu}_i$  para  $i = 1, 3, 5$ , pero este tiene la forma:

$$\dot{\nu}_i = -\kappa_i \frac{\dot{\sigma}_i}{|\sigma_i|^{1/2}} + \dot{\nu}_i. \quad (4.45)$$

Por lo que  $\dot{\nu}_i$  es indefinida cuando  $\sigma_i = 0$ . El algoritmo de *Super-Twisting*, a pesar de ser una función continua, tiene el inconveniente de que no existe su derivada en cero.

A pesar de los inconvenientes presentados al utilizar el STA para el control de seguimiento de trayectoria, donde se dificulta establecer las condiciones de estabilidad en una prueba formal, los resultados en simulación muestran un gran desempeño, de donde surgen algunas dudas en cuanto al buen funcionamiento del controlador, siendo que analíticamente no se tienen las herramientas teóricas suficientes para demostrar estabilidad.

Esto llevó la investigación a diseñar una ley de control continua de al menos clase  $C^2$  robusta a perturbaciones, la cual se calcula por medio de una función de Lyapunov del tipo  $V(\mathbf{X}) = \mathbf{X}^T P \mathbf{X}$ , donde  $P$  es una matriz definida positiva  $P > 0$ . A continuación se explica dicha ley de control.

### Diseño de control por medio de función de Lyapunov

Sea un sistema no lineal de la forma:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= a(x) + b(x)U + \Delta.\end{aligned}\tag{4.46}$$

Donde se desea seguir la referencia  $(x_{1r}, \dot{x}_{1r})$ , entonces se define el error de seguimiento  $z_1 = x_1 - x_{1r}$  y  $z_2 = x_2 - \dot{x}_{1r}$ , por lo que su dinámica se puede expresar de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= z_2, \\ \dot{z}_2 &= a(x) + b(x)U + \Delta - \ddot{x}_{1r}.\end{aligned}\tag{4.47}$$

Observe que se tiene un sistema con grado relativo  $r = 2$ , pensando en la técnica de modos deslizantes se realiza el siguiente cambio de variable

$$\begin{aligned}\sigma &= z_2 + \gamma z_1, \\ \dot{\sigma} &= \alpha + b(x)U + \Delta.\end{aligned}\tag{4.48}$$

Con  $\alpha = a(x) - \ddot{x}_{1r} + \gamma z_2$ . Además, se supone que la perturbación cumple con  $\Delta^+ \geq |\Delta|$  y  $\bar{\Delta} \geq |\dot{\Delta}|$ , así como también se satisface la condición  $b(x) \neq 0$ .

Se diseña la ley de control como:

$$U = -b(x)^{-1}(\alpha - \nu_1).\tag{4.49}$$

Por lo que el sistema en lazo cerrado se puede expresar como:

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= \sigma - \gamma z_1, \\ \dot{\sigma} &= \nu_1 + \Delta.\end{aligned}\tag{4.50}$$

Donde  $\nu_1 = \nu_0 + \nu_2$  de manera que  $\nu_0$  se diseñará para traer estabilidad al sistema nominal y  $\nu_2$  para rechazar la perturbación.

Para diseñar  $\nu_1$  primero defínase la función de Lyapunov de forma cuadrática

$$V(\zeta) = \zeta^T P \zeta. \quad (4.51)$$

Donde  $\zeta^T = [z_1, \sigma, \nu_2 + \Delta]^T$ , y  $P$  es una matriz definida positiva ( $P > 0$ ) de la forma:

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{12} & p_{22} & p_{23} \\ p_{13} & p_{23} & p_{33} \end{bmatrix}. \quad (4.52)$$

Así la función de Lyapunov es definida positiva y acotada por las funciones  $\mathcal{K}_\infty$

$$\lambda_{\min}(P) \|\zeta\|^2 \leq V(\zeta) \leq \lambda_{\max}(P) \|\zeta\|^2. \quad (4.53)$$

Ahora se analizará la derivada de la función de Lyapunov bajo la suposición de que  $\nu_1 = -k_1 z_1 - k_2 \sigma + \nu_2$ , esto reduce la derivada a una forma cuadrática, como se muestra a continuación.

$$\dot{V}(\zeta) = -\zeta^T Q \zeta + (2p_{13}z_1 + 2p_{23}\sigma + 2p_{22}(\nu_2 + \Delta))(\dot{\nu}_2 + \dot{\Delta}). \quad (4.54)$$

Donde

$$Q = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ q_{12} & q_{22} & q_{23} \\ q_{13} & q_{23} & q_{33} \end{bmatrix}. \quad (4.55)$$

Y

$$\begin{aligned} q_{11} &= 2\gamma p_{11} + 2k_1 p_{12}, \\ q_{12} &= -p_{11} + (\gamma + k_2)p_{12} + k_1 p_{22}, \\ q_{13} &= -2p_{12} + 2k_2 p_{22}, \\ q_{23} &= -p_{12} + \gamma p_{13} + k_1 p_{23}, \\ q_{23} &= -p_{13} - p_{22} + k_2 p_{23}, \\ q_{33} &= -2p_{23}. \end{aligned} \quad (4.56)$$

$\dot{V}(\zeta)$  es definida negativa si  $Q > 0$  y  $(2p_{13}z_1 + 2p_{23}\sigma + 2p_{22}(\nu_2 + \Delta))(\dot{\nu}_2 + \dot{\Delta}) < 0$ , por lo cual se diseña  $\dot{\nu}_2$  como:

$$\dot{\nu}_2 = -l_1 \text{Sign}(2p_{13}z_1 + 2p_{23}\sigma). \quad (4.57)$$

Por lo que al sustituir  $\dot{\nu}_2$  en (4.54) se tiene:

$$\begin{aligned} \dot{V}(\zeta) &= -\zeta^T Q \zeta - l_1 |2p_{13}z_1 + 2p_{23}\sigma| + \dot{\Delta} (2p_{13}z_1 + 2p_{23}\sigma) + 2p_{22}(\nu_2 + \Delta)(\dot{\nu}_2 + \dot{\Delta}), \\ &\leq -\lambda_{\min}(Q) \|\zeta\|^2 - (l_1 - \bar{\Delta}) |2p_{13}z_1 + 2p_{23}\sigma| + |2p_{22}(l_1 + \bar{\Delta})| \|\zeta\|. \end{aligned} \quad (4.58)$$

Donde se elige  $l_1 > \bar{\Delta}$  y se escribió  $2p_{22}(l_1 + \bar{\Delta})(\nu_2 + \Delta)$  como  $y^T x$  para usar la desigualdad  $y^T x \leq \|x\| \|y\|$ . Para asegurar que  $\dot{V}(\zeta) \leq -W(\zeta), \forall \|\zeta\| \geq \mu > 0$ , donde  $W(\zeta)$  es una

función continua definida positiva. Se utiliza una parte de  $-\lambda_{\min}(Q) \|\zeta\|^2$  para dominar  $|2p_{22}(l_1 + \bar{\Delta})| \|\zeta\|$  para  $\|\zeta\|$  grande. Por lo cual se reescribe la siguiente desigualdad como:

$$\begin{aligned} \dot{V}(\zeta) \leq & -(1 - \rho)\lambda_{\min}(Q) \|\zeta\|^2 - (l_1 - \bar{\Delta}) |2p_{13}z_1 + 2p_{23}\sigma| \\ & - \rho\lambda_{\min}(Q) \|\zeta\|^2 + |2p_{22}(l_1 + \bar{\Delta})| \|\zeta\|. \end{aligned} \quad (4.59)$$

Donde  $0 < \rho < 1$ . Entonces,

$$\dot{V}(\zeta) \leq -(1 - \rho)\lambda_{\min}(Q) \|\zeta\|^2 - (l_1 - \bar{\Delta}) |2p_{13}z_1 + 2p_{23}\sigma|, \quad \forall \|\zeta\| \geq \frac{|2p_{22}(l_1 + \bar{\Delta})|}{\rho\lambda_{\min}(Q)}, \quad (4.60)$$

la cual satisface el teorema 3.2 de forma global, con  $\mu = |2p_{22}(l_1 + \bar{\Delta})| / \rho\lambda_{\min}(Q)$ , con lo cual se concluye que las soluciones del sistema son globalmente últimamente acotadas. Si bien estas conclusiones están con base en las suposiciones de que tanto  $P$  como  $Q$  son definidas positivas, por lo cual ahora la tarea es encontrar una matriz  $P > 0$ , unas ganancias  $\gamma$ ,  $k_1$  y  $k_2$  de manera que las ecuaciones (4.56) constituyan una matriz  $Q$  definida positiva.

Como podrá verse, este no es un problema trivial con una solución general fácil de encontrar, además para la demostración de estabilidad es suficiente encontrar un caso que cumpla con las condiciones dichas con antelación. La solución general de este problema, el cual es un conjunto de ecuaciones que representan desigualdades cuadráticas se deja para trabajos futuros. Dicho esto, se muestra el procedimiento que se utilizó para encontrar las matrices  $P$  y  $Q$  definidas positivas con ganancias de control  $\gamma$ ,  $k_1$  y  $k_2$  propuestas de manera arbitraria, dicho procedimiento consiste en probar con diferentes ganancias de control asignándole valores constantes, esto reduce la complejidad del sistema a un conjunto de desigualdades lineales las cuales se resuelven usando alguna herramienta de solución como lo son LMI y CVX en MATLAB.

Una vez explicado el caso general del diseño del control usando la función de Lyapunov (4.51), ahora se procede a diseñar los controladores para el seguimiento de trayectoria.

### Re-diseño de control para el seguimiento de trayectoria usando la función de Lyapunov

Se puede observar que (4.25), (4.29), (4.22), (4.28), (4.32) y (4.23) describen el comportamiento dinámico de  $z_1$ ,  $z_3$ ,  $z_5$ ,  $\sigma_1$ ,  $\sigma_3$  y  $\sigma_5$ , las cuales tienen la siguiente estructura:

$$\begin{aligned} \dot{z}_i &= \sigma_i - \gamma_i z_i, & i &= 1, 3, 5, \\ \dot{\sigma}_i &= \alpha_i + \beta_i V_i + \Delta_i. \end{aligned} \quad (4.61)$$

Donde se supone que las perturbaciones cumplen con  $\Delta_i^+ \geq |\Delta_i|$  y  $\bar{\Delta}_i \geq |\dot{\Delta}_i|$  y  $\beta_i \neq 0$ .

Se diseña la ley de control:

$$V_i = -\beta_i^{-1} (\alpha_i - \nu_i). \quad (4.62)$$

Por lo que el sistema en lazo cerrado se puede expresar como:

$$\begin{aligned} \dot{z}_i &= \sigma_i - \gamma z_i, \\ \dot{\sigma} &= \nu_i + \Delta_i. \end{aligned} \quad (4.63)$$

Este sistema tiene la forma de (4.50), por lo que se diseña  $\nu_i$  y  $\nu_{i+1}$  de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \nu_i &= -k_i z_i - k_{i+1} \sigma_i + \nu_{i+1}, \\ \dot{\nu}_{i+1} &= -l_i \text{Sign}(2p_{i,13} z_i + 2p_{i,23} \sigma_i). \end{aligned} \quad (4.64)$$

Donde  $l_i > \bar{\Delta}_i$ ,  $p_{i,13}$  y  $p_{i,23}$  son elementos de la matriz definida positiva  $P_i$  de la forma (4.52), y tanto  $P_i$  como las ganancias  $\gamma_i$ ,  $k_i$  y  $k_{i+1}$  construyen una matriz  $Q_i$  de la forma (4.55) que también es definida positiva, lo cual permite la construcción de funciones de Lyapunov de tipo cuadráticas como se mostró en la sección anterior.

### Estabilidad del subsistema de traslación

Para mostrar la estabilidad del subsistema de traslación  $\Sigma_1$  (4.19), se toman en consideración las funciones de Lyapunov definidas por los controles (4.62) las cuales son de la forma cuadrática  $V_i(\zeta_i) = \zeta_i^T P_i \zeta_i$  para  $i = 1, 3, 5$ , donde  $\zeta_i^T = [z_i, \sigma_i, \nu_{i+1} + \Delta_i]^T$ , y  $P_i$  es una matriz definida positiva ( $P_i > 0$ ).

Como se mostró en la sección 4.3.1, las derivadas de las funciones de Lyapunov son de la forma:

$$\begin{aligned} \dot{V}_i(\zeta_i) &= -\zeta_i^T Q_i \zeta_i - l_i |2p_{i,13} z_i + 2p_{i,23} \sigma_i| + \dot{\Delta}_i (2p_{i,13} z_i + 2p_{i,23} \sigma_i) + 2p_{i,22} (\dot{\nu}_{i+1} + \dot{\Delta}_i) (\nu_{i+1} + \Delta_i) \\ &\leq -\lambda_{\min}(Q_i) \|\zeta_i\|_2^2 - (l_i - \bar{\Delta}_i) |2p_{i,13} z_i + 2p_{i,23} \sigma_i| + 2p_{i,22} (\dot{\nu}_{i+1} + \dot{\Delta}_i) (\nu_{i+1} + \Delta_i), \end{aligned} \quad (4.65)$$

de donde se definen las funciones continuas definidas positivas  $W_i(\zeta_i)$ :

$$W_i(\zeta_i) = (l_i - \bar{\Delta}_i) |2p_{i,13} z_i + 2p_{i,23} \sigma_i|. \quad (4.66)$$

Por lo que las derivada de las funciones de Lyapunov son de la forma:

$$\dot{V}_i(\zeta_i) \leq -\lambda_{\min}(Q_i) \|\zeta_i\|^2 - W_i(\zeta_i) + 2p_{i,22} (\dot{\nu}_{i+1} + \dot{\Delta}_i) (\nu_{i+1} + \Delta_i), \quad (4.67)$$

Además, se sabe que existe al menos una matriz  $P_i$  y ganancias  $\gamma_i$ ,  $k_i$  y  $k_{i+1}$  que constituyen una matriz  $Q_i$  definida positiva para cada caso. Por eso se propone la siguiente función de Lyapunov  $V_{\Sigma_1}(\varepsilon_1) > 0$ ,  $\forall \varepsilon_1 \neq 0$  para el subsistema de traslación  $\Sigma_1$ , donde  $\varepsilon_1 = [\zeta_1^T, \zeta_3^T, \zeta_5^T]^T$ .

$$V_{\Sigma_1}(\varepsilon_1) = V_1(\zeta_1) + V_3(\zeta_3) + V_5(\zeta_5). \quad (4.68)$$

Su derivada

$$\dot{V}_{\Sigma_1}(\epsilon_1) = \dot{V}_1(\zeta_1) + \dot{V}_3(\zeta_3) + \dot{V}_5(\zeta_5). \quad (4.69)$$

La cual se puede reescribir, de acuerdo a (4.67), como

$$\dot{V}_{\Sigma_1}(\epsilon_1) \leq - \sum_{i=1,3,5} \lambda_{min}(Q_i) \|\zeta_i\|^2 - \sum_{i=1,3,5} W_i(\zeta_i) + 2 \sum_{i=1,3,5} p_{i,22}(\dot{\nu}_{i+1} + \dot{\Delta}_i)(\nu_{i+1} + \Delta_i), \quad (4.70)$$

y como  $\|\epsilon_1\|^2 = \|\zeta_1\|^2 + \|\zeta_3\|^2 + \|\zeta_5\|^2$ , entonces

$$\dot{V}_{\Sigma_1}(\epsilon_1) \leq -a_1 \|\epsilon_1\|^2 - W(\epsilon_1) + \delta_1 \|\epsilon_1\|, \quad (4.71)$$

donde la constante positiva  $a_1 = \min \{\lambda_{min}(Q_i)\}$ ,  $W(\epsilon_1)$  es una función continua definida positiva tal que  $W(\epsilon_1) = W_1(\zeta_1) + W_3(\zeta_3) + W_5(\zeta_5)$  y la constante  $\delta_1 = 2 \sqrt{\sum_{i=1,3,5} (p_{i,22}(l_i + \bar{\Delta}_i))^2}$  es positiva.

Entonces se puede asegurar que:

$$\dot{V}_{\Sigma_1}(\epsilon_1) \leq -W(\epsilon_1), \quad \|\epsilon_1\| \geq \frac{a_1}{\delta_1}, \quad (4.72)$$

por lo cual, se satisface el teorema 3.2 de forma global, con  $\mu = a_1/\delta_1$ , así se concluye que las soluciones del subsistema de traslación (4.19) son globalmente últimamente acotadas. Si bien estas conclusiones están con base en las suposiciones de que tanto  $P$  como  $Q$  son definidas positivas, por lo cual ahora se debe encontrar una matriz  $P > 0$  y ganancias  $\gamma$ ,  $k_1$  y  $k_2$  de manera que las ecuaciones (4.56) constituyan una matriz  $Q$  definida positiva.

Las leyes de control (4.64) permiten calcular el control  $U_1$  y los pseudo-contrroles  $U_{xd}$  y  $U_{yd}$ , por lo que al usar (4.43) y (4.44) se generan las referencias a seguir para el subsistema de rotación.

### 4.3.2. Problema de estabilización

El problema de estabilización de un multicoptero se reduce a controlar los ángulos de Euler y la fuerza de sustentación generada por la velocidad angular de las hélices. Este tipo de control es el que se utiliza comúnmente en el manejo manual de UAV's, donde el usuario controla los ángulos de Euler mediante referencias que se envían desde un control remoto.

El buen desempeño de la aeronave depende de la experiencia del usuario para controlar los desplazamientos de posiciones en el plano  $x-y$  a través de comandos de *roll* y *pitch* para contrarrestar efectos aerodinámicos de un sistema subamortiguado y perturbaciones producidas por el viento. Sin embargo, el usuario requiere de una cantidad considerable de horas de entrenamiento para poder sobreponerse a la dinámica cero en el plano  $x-y$ .

Se diseña el controlador de estabilización para asegurar la convergencia de los errores de seguimiento de los ángulos de Euler  $\mathbf{Z}_3 = [z_7, z_9, z_{11}]^T$  a cero. Por eso se define  $\mathbf{T}_{prop} = [U_2, U_3, U_4]^T$  de manera que sea posible controlar los ángulos de *roll*, *pitch* y *yaw*. Con esto en consideración se procede a describir el controlador, para el cual se ha pensado en utilizar el algoritmo de *Super-Twisting*, por lo cual se comienza con la elección de las superficies deslizantes.

### Selección de superficie para *Roll*

Sea definido el error de seguimiento, así como su dinámica, para el ángulo de *roll* como:

$$\begin{aligned} z_7 &= x_{7r} - x_7, \\ \dot{z}_7 &= \dot{x}_{7r} - x_8, \\ \ddot{z}_7 &= \ddot{x}_{7r} - \frac{U_2 + (I_y - I_z) x_{10} x_{12} + J x_{10} \omega}{I_x} + A_8. \end{aligned} \quad (4.73)$$

Se elige la superficie deslizante como:

$$\begin{aligned} \sigma_7 &= \dot{z}_7 + \gamma_7 z_7, \\ \dot{\sigma}_7 &= \alpha_7 + \beta_7 V_7 + \Delta_7. \end{aligned} \quad (4.74)$$

Con  $\alpha_7 = \ddot{x}_{7r} + \gamma_7 \dot{z}_7 - \frac{1}{I_x} ((I_y - I_z) x_{10} x_{12} + J x_{10} \omega)$ ,  $\beta_7 = -\frac{1}{I_x}$ ,  $V_7 = U_2$  y  $\Delta_7 = A_8$ .

### Selección de superficie para *Pitch*

De la misma manera, se define el error de seguimiento para el ángulo de *pitch*, así como sus derivadas:

$$\begin{aligned} z_9 &= x_{9r} - x_9, \\ \dot{z}_9 &= \dot{x}_{9r} - x_{10}, \\ \ddot{z}_9 &= \ddot{x}_{9r} - \frac{U_3 + (I_z - I_x) x_8 x_{12} + J x_8 \omega}{I_y} + A_{10}. \end{aligned} \quad (4.75)$$

Se elige la superficie deslizante como:

$$\begin{aligned} \sigma_9 &= \dot{z}_9 + \gamma_9 z_9, \\ \dot{\sigma}_9 &= \alpha_9 + \beta_9 V_9 + \Delta_9. \end{aligned} \quad (4.76)$$

Con  $\alpha_9 = \ddot{x}_{9r} + \gamma_9 \dot{z}_9 - \frac{1}{I_y} ((I_z - I_x) x_8 x_{12} + J x_8 \omega)$ ,  $\beta_9 = -\frac{1}{I_y}$ ,  $V_9 = U_3$  y  $\Delta_9 = A_{10}$ .

### Selección de superficie para $Yaw$

Se define el error de seguimiento para el ángulo de  $yaw$  como:

$$\begin{aligned} z_{11} &= x_{11r} - x_{11}, \\ \dot{z}_{11} &= \dot{x}_{11r} - \dot{x}_{11}, \\ \ddot{z}_{11} &= \ddot{x}_{11r} - \frac{U_4 + (I_x - I_y) x_8 x_{10}}{I_z} + A_{12}. \end{aligned} \quad (4.77)$$

Se elige la superficie deslizante como

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \dot{z}_{11} + \gamma_{11} z_{11}, \\ \dot{\sigma}_{11} &= \alpha_{11} + \beta_{11} V_{11} + \Delta_{11}. \end{aligned} \quad (4.78)$$

Con  $\alpha_{11} = \ddot{x}_{11r} + \gamma_{11} \dot{z}_{11} - \frac{1}{I_z} ((I_x - I_y) x_8 x_{10})$ ,  $\beta_{11} = -\frac{1}{I_z}$ ,  $V_{11} = U_4$  y  $\Delta_{11} = A_{12}$ .

### Diseño de control por modos deslizantes para el problema de estabilización

Con el fin de asegurar la convergencia de la superficie deslizante a cero se aplica una ley de control basada en el algoritmo de *Super-Twisting* para cada ángulo de Euler. Se puede observar que (4.74), (4.76) y (4.78) describen el comportamiento dinámico de las superficies  $\sigma_7$ ,  $\sigma_9$  y  $\sigma_{11}$ , las cuales tienen la siguiente estructura

$$\begin{aligned} \sigma_i &= \dot{z}_i + \gamma_i z_i, & i = 7, 9, 11, \\ \dot{\sigma}_i &= \alpha_i + \beta_i V_i + \Delta_i. \end{aligned} \quad (4.79)$$

Donde se supone que la perturbación cumple con  $\Delta_i^+ \geq |\Delta_i|$  y  $\bar{\Delta}_i \geq |\dot{\Delta}_i|$  y  $\beta_i \neq 0$ .

Ahora, se diseñan las leyes de control aplicando el STA visto en la sección 3.3.3:

$$V_i = -\beta_i^{-1} (\alpha_i - \nu_i). \quad (4.80)$$

Donde

$$\begin{aligned} \nu_i &= -k_i |\sigma_i|^{1/2} \text{Sign}(\sigma_i) + \nu_{i+1}, \\ \dot{\nu}_{i+1} &= -l_i \text{Sign}(\sigma_i). \end{aligned} \quad (4.81)$$

Con las ganancias de control  $k_i > 0$  y  $l_i > \bar{\Delta}_i$ . La selección de estas ganancias, de acuerdo al teorema 3.3, garantiza la convergencia en tiempo finito, menor a  $\tilde{T}_i(\sigma_0)$ , de las superficies  $\sigma_i$  a cero. Cuando esto suceda se tendrá una dinámica descrita por la ecuación (4.36)

$$\dot{z}_i = -\gamma_i z_i,$$

donde  $\gamma_i > 0$  asegura que el punto de equilibrio  $(z_i, z_{i+1}) = (0, 0)$  es globalmente exponencialmente estable.



### Estabilidad del subsistema de rotación

Para mostrar la estabilidad del subsistema de rotación  $\Sigma_2$  (4.20), se analizará primero la estabilidad del esquema de control por modos deslizantes propuesto en la sección 4.3.2 donde se mostró que las superficies convergen a cero en un tiempo menor a  $\tilde{T}(\sigma_0)$ . Cuando las superficies son igual a cero, el orden del sistema se reduce a 1, descrito por la ecuación (4.36). Por eso se elige la función de Lyapunov  $V_{\Sigma_2}(\epsilon_2)$  para el subsistema  $\Sigma_2$ , donde  $\epsilon_2 = [\mathbf{Z}_3^T, \mathbf{Z}_4^T]^T$ .

$$V_{\Sigma_2}(\epsilon_2) = \frac{1}{2}z_7^2 + \frac{1}{2}z_9^2 + \frac{1}{2}z_{11}^2. \quad (4.82)$$

La cual es definida positiva  $\forall \epsilon_1 \neq 0$  y su derivada es:

$$\dot{V}_{\Sigma_2}(\epsilon_2) = -\gamma_7 z_7^2 - \gamma_9 z_9^2 - \gamma_{11} z_{11}^2, \forall t \geq \max \left\{ \tilde{T}_i(\sigma_0) \right\}. \quad (4.83)$$

Por lo tanto, el punto de equilibrio  $\epsilon_2 = 0$  del subsistema de rotación  $\Sigma_2$  es globalmente exponencialmente estable para  $t \geq \max \left\{ \tilde{T}_i(\sigma_0) \right\}$ , con  $i = 7, 9, 11$ .

## 4.4. Estabilidad en lazo cerrado

De la definición de  $U_1$  en (4.5) se puede decir que  $U_1 \leq 4bw_{max}^2$ , donde  $w_{max}$  es la máxima velocidad angular de los motores. También, como se vió en la sección 4.3.1, el control  $U_1$  y el control virtual  $R_d$  aseguran que la solución del subsistema de traslación (4.19) sea uniformemente acotado con una función de Lyapunov  $V_{\Sigma_1}(\epsilon_1)$  tal que:

$$\dot{V}_{\Sigma_1}(\epsilon_1) \leq -a_1 \|\epsilon_1\|^2 - W(\epsilon_1) + \delta_1 \|\epsilon_1\|, \quad (4.84)$$

$$\left\| \frac{\partial V_{\Sigma_1}}{\partial \epsilon_1} \right\| \leq a_2 \|\epsilon_1\|, \quad (4.85)$$

donde  $a_2 = 2\sqrt{\max \{ \lambda_{max}(P_i^T P_i) \}}$ ,  $i = 1, 3, 5$ .

Para el subsistema de traslación original en (4.18) se sigue que

$$\dot{V}_{\Sigma_1} \leq -a_1 \|\epsilon_1\|^2 - W(\epsilon_1) + \delta_1 \|\epsilon_1\| + \left\| \frac{\partial V_{\Sigma_1}}{\partial \epsilon_1} \right\| \|h(\epsilon_1, \epsilon_2)\|, \quad (4.86)$$

La norma del término cruzado  $h(\epsilon_1, \epsilon_2) = [U_x - U_{xd}, U_y - U_{yd}]^T$ , en la ecuación (4.17), se calcula de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \|h(\epsilon_1, \epsilon_2)\| &= \left| \frac{U_1}{m} \right| \sqrt{(C_{x11}(S_{x9}C_{x7} - S_{x9d}C_{x7d}) + S_{x11}(S_{x7} - S_{x7d}))^2 +} \\ &\quad (S_{x11}(S_{x9}C_{x7} - S_{x9d}C_{x7d}) - C_{x11}(S_{x7} - S_{x7d}))^2} \\ &= \left| \frac{U_1}{m} \right| \sqrt{(S_{x9}C_{x7} - S_{x9d}C_{x7d})^2 + (S_{x7} - S_{x7d})^2}. \end{aligned} \quad (4.87)$$

Debido a la suposición 4.5 de que los ángulos de *roll* y *pitch* son pequeños, es fácil ver que  $\|h(\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2)\| \leq \left|\frac{U_1}{m}\right| \|\mathbf{Z}_3\| \leq b_1 \|\boldsymbol{\varepsilon}_2\|$ , donde  $b_1 = \left|\frac{4bw_{max}^2}{m}\right|$ . Con lo cual se puede mostrar que

$$\left\| \frac{\partial V_{\Sigma_1}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_1} \right\| \|h(\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2)\| \leq a_2 b_1 \|\boldsymbol{\varepsilon}_1\| \|\boldsymbol{\varepsilon}_2\|. \quad (4.88)$$

Y así reducir la ecuación (4.86) a:

$$\dot{V}_{\Sigma_1} \leq -a_1 \|\boldsymbol{\varepsilon}_1\|^2 - W(\boldsymbol{\varepsilon}_1) + \delta_1 \|\boldsymbol{\varepsilon}_1\| + a_2 b_1 \|\boldsymbol{\varepsilon}_1\| \|\boldsymbol{\varepsilon}_2\|, \quad (4.89)$$

El control  $\mathbf{T}_{prop}$  asegura que el origen  $\boldsymbol{\varepsilon}_2 = 0$  del subsistema de rotación (4.20) sea exponencialmente estable, con la función de Lyapunov propia definida positiva  $V_{\Sigma_2}(\boldsymbol{\varepsilon}_2)$  tal que:

$$\dot{V}_{\Sigma_2} \leq -a_3 \|\boldsymbol{\varepsilon}_2\|^2. \quad (4.90)$$

con  $a_3 > 0$ .

Ahora, para el sistema completo en lazo cerrado (4.18) se define la función de Lyapunov  $V(\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2) = V_{\Sigma_1} + \Gamma V_{\Sigma_2}$ , donde  $\Gamma = \frac{a_2^2 b_1^2}{4(1-\rho)a_1 a_3}$ , con  $0 < \rho < 1$ , entonces la derivada de  $V$ , usando las ecuaciones (4.89) y (4.90) es:

$$\begin{aligned} \dot{V}(\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2) &\leq -(1-\rho)a_1 \|\boldsymbol{\varepsilon}_1\|^2 + a_2 b_1 \|\boldsymbol{\varepsilon}_1\| \|\boldsymbol{\varepsilon}_2\| - \Gamma a_3 \|\boldsymbol{\varepsilon}_2\|^2 - W(\boldsymbol{\varepsilon}_1) - \rho a_1 \|\boldsymbol{\varepsilon}_1\|^2 + \delta_1 \|\boldsymbol{\varepsilon}_1\| \\ &\leq -(1-\rho)a_1 \|\boldsymbol{\varepsilon}_1\|^2 + a_2 b_1 \|\boldsymbol{\varepsilon}_1\| \|\boldsymbol{\varepsilon}_2\| - \frac{a_2^2 b_1^2}{4(1-\rho)a_1 a_3} a_3 \|\boldsymbol{\varepsilon}_2\|^2 - W(\boldsymbol{\varepsilon}_1) - \rho a_1 \|\boldsymbol{\varepsilon}_1\|^2 + \delta_1 \|\boldsymbol{\varepsilon}_1\| \\ &\leq -\left( \sqrt{(1-\rho)a_1} \|\boldsymbol{\varepsilon}_1\| - \frac{a_2 b_1}{2\sqrt{(1-\rho)a_1}} \|\boldsymbol{\varepsilon}_2\| \right)^2 - W(\boldsymbol{\varepsilon}_1) - \rho a_1 \|\boldsymbol{\varepsilon}_1\|^2 + \delta_1 \|\boldsymbol{\varepsilon}_1\|, \\ &\leq -(a_4 \|\boldsymbol{\varepsilon}_1\| - b_2 \|\boldsymbol{\varepsilon}_2\|)^2 - W(\boldsymbol{\varepsilon}_1), \forall \|\boldsymbol{\varepsilon}_1\| \geq \frac{\delta_1}{\rho a_1} \end{aligned} \quad (4.91)$$

En conclusión, la función de Lyapunov  $V(\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2)$  y su derivada satisfacen las condiciones del teorema 3.2 de Lyapunov de última cota, por lo tanto, la solución del sistema completo en lazo cerrado (4.18) es últimamente acotada, donde la última cota puede ser tomada como  $\mu = \delta_1 / \rho a_1$ .

## 4.5. Implementación en ROS

Para demostrar el funcionamiento del controlador diseñado, experimentos en simulación en la plataforma Simulink serán presentados en la Sección ??; sin embargo, este tipo de simulaciones sólo muestra la bondad del modelo dinámico y el sistema de control. Para hacer

pruebas de los sensores a bordo y del comportamiento de los protocolos de comunicación en la conexión de todo el sistema, como lo sería en la realidad, no es posible seguir utilizando el simulador Simulink. Trabajos recientes han demostrado la gran ventaja de utilizar el sistema operativo de robots ROS, ya que permite simular todos los componentes del sistema, incluyendo los sensores de bajo nivel, la dinámica de la planta, el sistema de control, comunicación entre componentes, etc.

Como el objetivo principal de esta tesis es la aplicación de un *quadrotor* para navegación en interiores, es de gran importancia probar tanto la dinámica y el sistema de control del *quadrotor* así como los algoritmos de reconocimiento del entorno, en este caso el algoritmo de SLAM, lo cual implica modelar los sensores de medición y protocolos de comunicación entre sistemas. Es por eso que se dedica esta sección de la tesis a mostrar cómo se podría llegar a la implementación del algoritmo de control y de SLAM en la plataforma ROS.

#### 4.5.1. Descripción de modelo y simulación

Gazebo es un ambiente de simulación multi-robótico que incluye la emulación de dinámica de los sistemas, ver [Meyer et al., 2012], la cual utiliza motores de física avanzados y herramientas de solución de ecuaciones diferenciales ODE. El simulador incluye cálculos de fuerzas de gravedad, de fricción y de contacto por sí solo, pero no de propulsión y de aerodinámica. Un sistema de *plugins* permite al usuario agregar módulos de controladores para robots y sensores o modificar el entorno de simulación.

La geometría del *quadrotor* ha sido diseñada para tener un polígono de baja resolución y aún así mantener los aspectos generales del UAV. El modelo de detección de colisiones está modelado como una malla (.stl). Debido al compromiso entre la emulación de la dinámica y aspectos visuales se han modelado las hélices como discos, sin afectar sus aerodinámicas.

La dinámica de vuelo del *quadrotor* en simulación es básicamente la descrita en las ecuaciones comprendidas en (4.11). A diferencia de estas ecuaciones, aquí sí se modela la dinámica de los motores de propulsión, dando un mayor acercamiento a la realidad. El modelo de los motores es básicamente una función de transferencia de segundo orden, como comúnmente se modela en la literatura.

#### 4.5.2. Simulación de sensores

La posición y orientación de la aeronave no se puede medir directamente, para eso se utilizan la simulación de sensores para la estimación del estado del UAV. Estos sensores se han implementado como *plugins* independientes en Gazebo. Todos los sensores comparten un modelo de error de Gauss Markov de primer orden, permitiendo la simulación de sensores con diferentes características de error. Los sensores que se simulan son los siguientes:

- Unidad de Medición Inercial (IMU).
- Sensor de altura, barómetro.
- Sensor de distancia ultrasonido.
- Sensor de campo magnético, brújula.
- GPS.
- Hokuyo Lidar.

Para la implementación del algoritmo de SLAM es de suma importancia el sensor láser giratorio, o bien conocido como LIDAR (*Light Detection And Ranging*). Este sensor mide una sección plana del espacio tridimensional al medir la distancia de un punto de un objeto mediante un haz de luz infrarroja (Figura 4.4), y al estar girando constantemente se miden varios puntos del espacio contenidos en el plano de giro del sensor, como se muestra en la Figura 4.5.

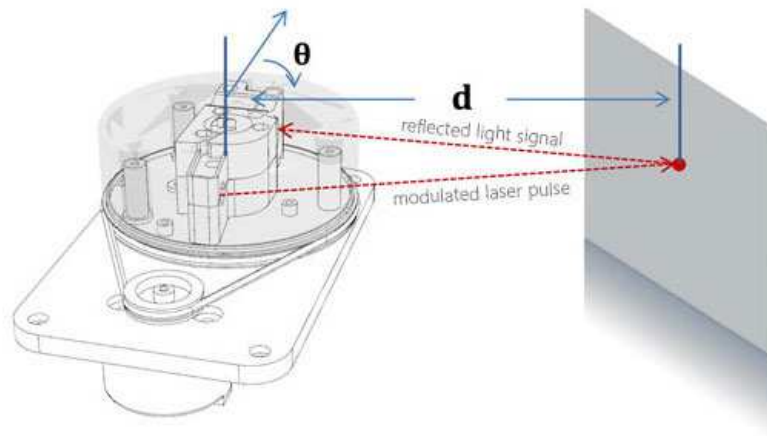


Figura 4.4: Medición de distancia a un punto de un objeto.

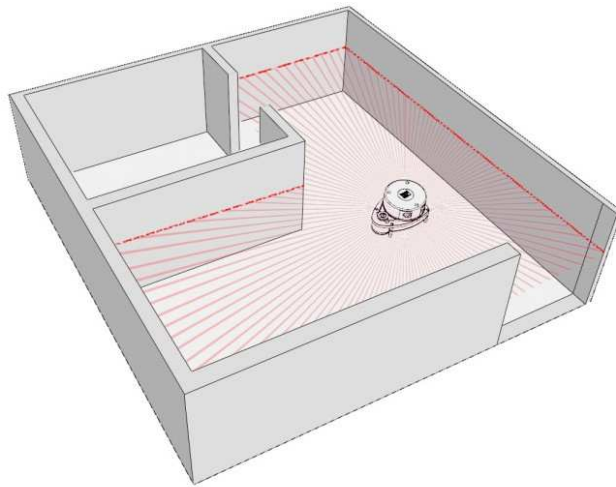


Figura 4.5: Medición continua de puntos en un plano en el espacio 3D.

### 4.5.3. Evaluando el paquete de ROS Hector Quadrotor

Hector [Graber et al., 2012] es una colección de *stacks* de ROS (un *stack* es una colección de paquetes que tienen cierta funcionalidad) originalmente desarrollado en la “*Technische Universität Darmstadt*” en Alemania. Estos *stacks* proveen ciertas herramientas para simular o interactuar con robots. El algoritmo de SLAM es uno de ellos.

En esta colección, el *stack* llamado *hector\_quadrotor* utiliza dichos paquetes para el modelo del *quadrotor* (Figura 4.6), así como los sensores anteriormente mencionados, incluyendo una simulación del interior de un edificio y un sistema de control que permite al UAV desplazarse dentro de este utilizando el algoritmo de SLAM, el cual hace una reconstrucción 3D del entorno.



Figura 4.6: Medición continua de puntos en un plano en el espacio 3D.

La Figura 4.7 muestra la representación dinámica del entorno Gazebo (a la izquierda) y la representación cinemática en Rviz (a la derecha). Rviz es una visualización 3D del ambiente que es parte del *stack* de ROS.

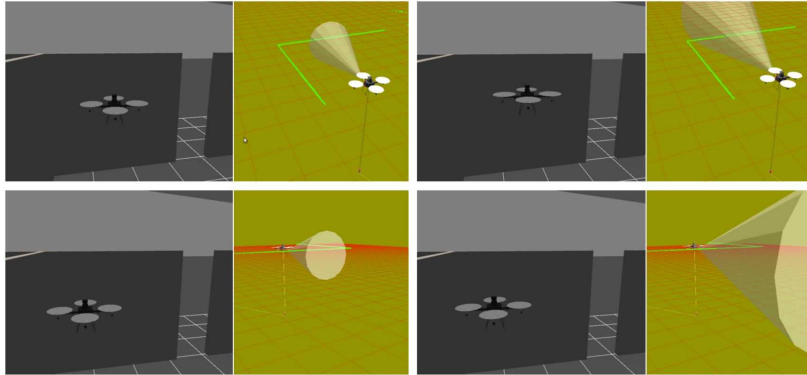


Figura 4.7: Visualización del ambiente de física Gazebo y del entorno cinemático Rviz.

Para utilizar la plataforma Hector, se puede utilizar la línea de comandos en Linux, ya que existe una lista de comandos disponibles para la inicialización del ambiente de simulación, la ejecución de controladores PID, comandos de velocidad, entre muchas otras órdenes. Para mayor información al lector favor de ir a [Graber et al., 2012].

La gran ventaja que aporta esta colección es que se puede acceder a cada módulo y modificarlo con el fin de cumplir con los requisitos del usuario, ya que la estructura de ROS permite la comunicación entre nodos multi-lenguajes, permitiendo al usuario hacer uso de código libre pre-compilado y enfocarse en la aplicación de alto nivel sin tener que preocuparse por detalles de programación de bajo nivel, que por lo general requiere conocimientos más específicos de programación.

Es por eso que en esta tesis se pensó hacer uso de los nodos que desarrollan los algoritmos de SLAM, que simulan los sensores y el entorno, para sólo enfocarse en modificar el nodo de control que usa el compendio Hector, remplazando el controlador PID que usa por defecto por el control diseñado en la sección 4.3. Sin embargo, no se logro dicha implementación, dejado este punto como trabajo futuro.

## Capítulo 5

# Resultados obtenidos

Con el fin de validar la eficiencia del control propuesto en la sección 4.3, se realizaron distintas simulaciones en Simulink, donde la planta se modeló de acuerdo a (4.12) utilizando los parámetros listados en la tabla 5.1. Las tareas a realizar por parte del UAV en las distintas simulaciones son de seguimiento de trayectoria, cambiando condiciones como perturbaciones externas, parámetros de la planta e incluso dinámicas no modeladas para el diseño de control, todo con el fin de mostrar la estabilidad de la planta en lazo cerrado sometido a diferentes situaciones, mostrando así la robustez del sistema.

Tabla 5.1: Parámetros de simulación.

<i>Parámetro</i>	<i>Valor</i>	<i>Unidades</i>
$m$	1.26	Kg
$d$	0.23	m
$I_x$	$5.5 \times 10^{-3}$	kg m <sup>2</sup>
$I_y$	$5.5 \times 10^{-3}$	kg m <sup>2</sup>
$I_z$	$11 \times 10^{-3}$	kg m <sup>2</sup>
$J$	$1.46 \times 10^{-3}$	kg m <sup>2</sup>
$b$	$9.4168 \times 10^{-6}$	N s <sup>2</sup> /rad <sup>2</sup>
$c$	$2.4483 \times 10^{-7}$	Nm s <sup>2</sup> /rad <sup>2</sup>
$g$	9.81	m/s <sup>2</sup>

El método numérico para la solución de ecuaciones diferenciales utilizado en las simulaciones fue ODE1(Euler) con un paso fijo de 0.0001 segundos. Las ganancias de control se enlistan en la tabla 5.2. Las ganancias de control fueron calculadas utilizando el programa LMIQuad, el cual se encuentra en el apéndice B. Se muestran las matrices  $P_i$  y  $Q_i$  respectivas a las ganancias en la tabla 5.1, las cuales fueron obtenidas con base en las restricciones vistas en el Capítulo 4.

$$\begin{aligned}
P_1 = P_2 &= \begin{bmatrix} 6.7683 & -3.6618 & 1.5897 \\ -3.6618 & 11.5417 & -2.9936 \\ 1.5897 & -2.9936 & 16.9802 \end{bmatrix}, & \begin{aligned} \lambda_1 &= 4.7841 \\ \lambda_2 &= 11.4490 \\ \lambda_3 &= 19.0572 \end{aligned} \\
Q_1 = Q_2 &= \begin{bmatrix} 31.0658 & 14.3226 & -3.3578 \\ 14.3226 & 168.9076 & -28.0996 \\ -3.3578 & -28.0996 & 5.9873 \end{bmatrix}, & \begin{aligned} \lambda_1 &= 1.2458 \\ \lambda_2 &= 29.6008 \\ \lambda_3 &= 175.1141 \end{aligned} \\
P_3 &= \begin{bmatrix} 10.5556 & -9.5687 & 2.7448 \\ -9.5687 & 30.1866 & -6.2259 \\ 2.7448 & -6.2259 & 16.5337 \end{bmatrix}, & \begin{aligned} \lambda_1 &= 6.6586 \\ \lambda_2 &= 14.2107 \\ \lambda_3 &= 36.4067 \end{aligned} \\
Q_3 &= \begin{bmatrix} 9.8693 & 44.6902 & -7.8369 \\ 44.6902 & 381.3761 & -64.0609 \\ -7.8369 & -64.0609 & 12.4518 \end{bmatrix}, & \begin{aligned} \lambda_1 &= 1.6158 \\ \lambda_2 &= 4.5876 \\ \lambda_3 &= 397.4939 \end{aligned}
\end{aligned} \tag{5.1}$$

$$\tag{5.2}$$

Tabla 5.2: Ganancias de control.

<i>Ganancia</i>	<i>Valor</i>	<i>Ganancia</i>	<i>Valor</i>	<i>Ganancia</i>	<i>Valor</i>
$\gamma_1$	5	$\gamma_3$	5	$\gamma_5$	5
$k_1$	5	$k_3$	5	$k_5$	5
$k_2$	7	$k_4$	7	$k_6$	6
$l_1$	5	$l_3$	5	$l_5$	4
$\gamma_7$	10	$\gamma_9$	10	$\gamma_{11}$	5
$k_7$	10	$k_9$	10	$k_{11}$	5
$l_7$	2	$l_9$	2	$l_{11}$	1

## 5.1. Seguimiento de referencia constante

**Caso 1:** Sin perturbaciones ni cambios paramétricos.

Se realizó el seguimiento de referencias constantes,  $x_{ref} = 0$ ,  $y_{ref} = 0$ ,  $z_{ref} = 1$  y  $\psi_{ref} = 0$ , donde se tienen condiciones iniciales diferentes de cero

$$\mathbf{X}_0 = [0.1, 0.2, 0.2, 0.1, 1.1, -0.1, 0.4, 0.1, -0.4, -0.1, 0.01, 0.02]^T.$$

Esta simulación se realizó sin perturbación ni cambios paramétricos. El tiempo de simulación es de 10 segundos. Los resultados obtenidos se muestran a continuación:



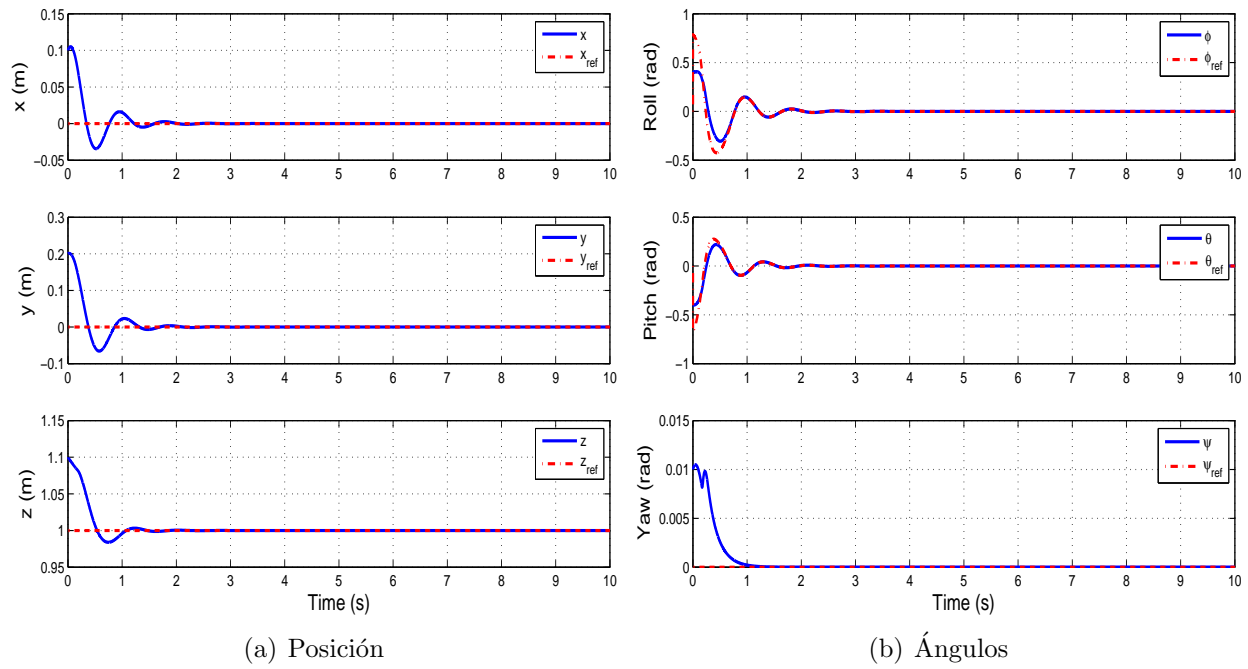


Figura 5.1: Seguimiento de referencias constantes con condiciones iniciales diferentes de cero.

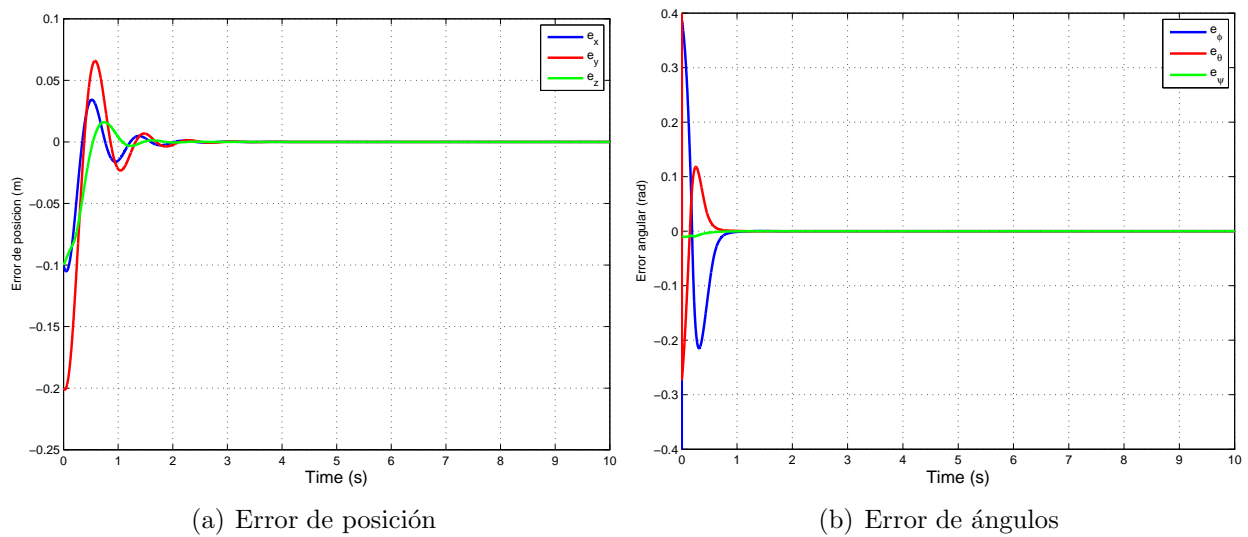


Figura 5.2: Errores generales para el seguimiento de referencias constantes.

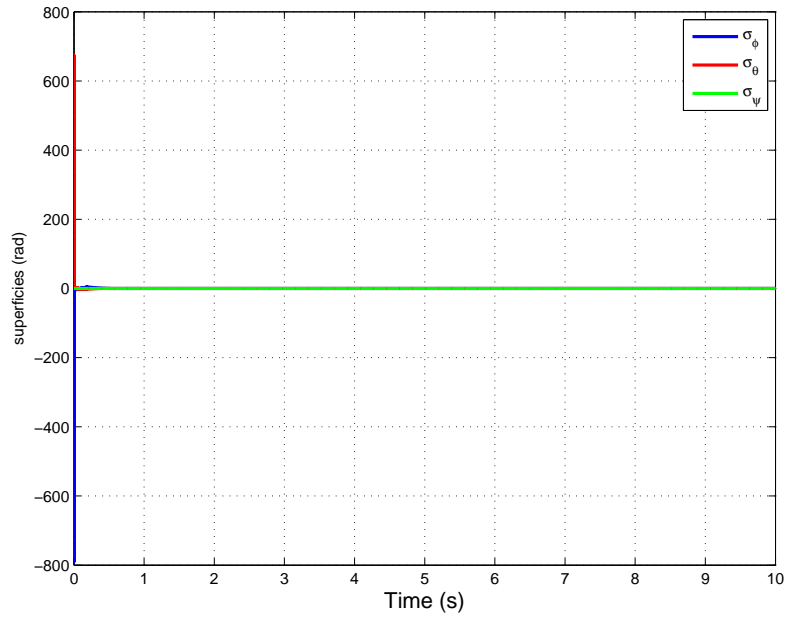


Figura 5.3: Superficies deslizantes para ángulos de Euler en seguimiento de referencias constantes.

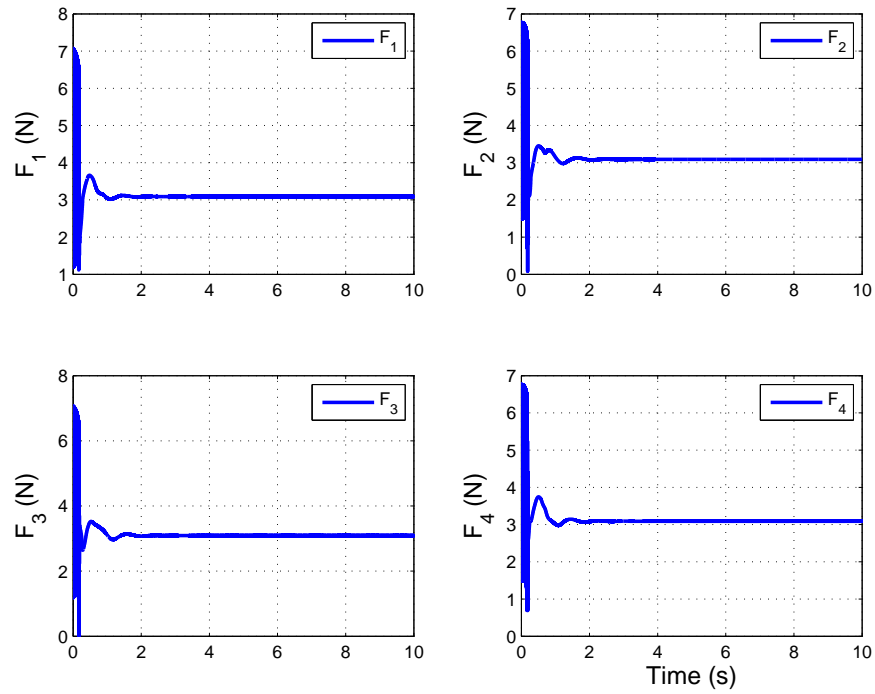


Figura 5.4: Fuerzas generadas por cada motor para el seguimiento de referencias constantes.

**Caso 2:** Sin cambios paramétricos y con perturbaciones externas.

Es la misma simulación que el caso pasado, con la diferencia que se introducen perturbaciones externas simulando la fuerza del viento, las cuales tienen la forma mostrada en la figura 5.9, donde  $\Delta_x = 3\sin(t - 3)$  y comienza a partir de  $t = 3$ ,  $\Delta_y = 3\sin(t - 5)$  para  $t \geq 5$  y  $\Delta_z = \sin(t - 7)$  para  $t \geq 7$ . El tiempo de simulación es de 10 segundos. Los resultados obtenidos se muestran a continuación:

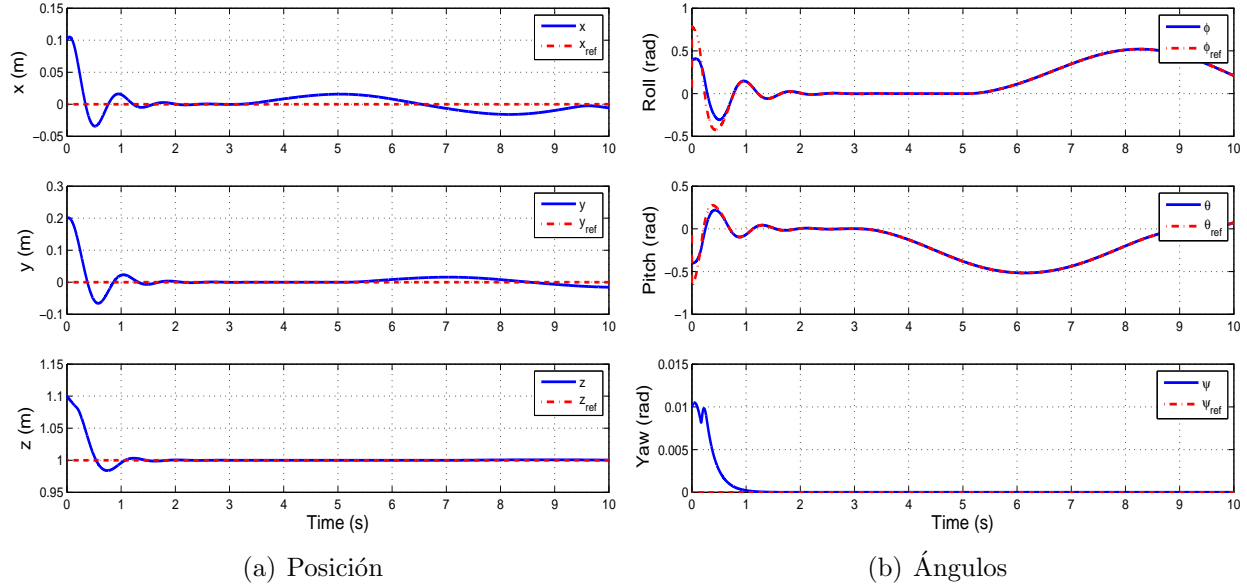


Figura 5.5: Seguimiento de referencias constantes con condiciones iniciales diferentes de cero bajo perturbaciones externas.

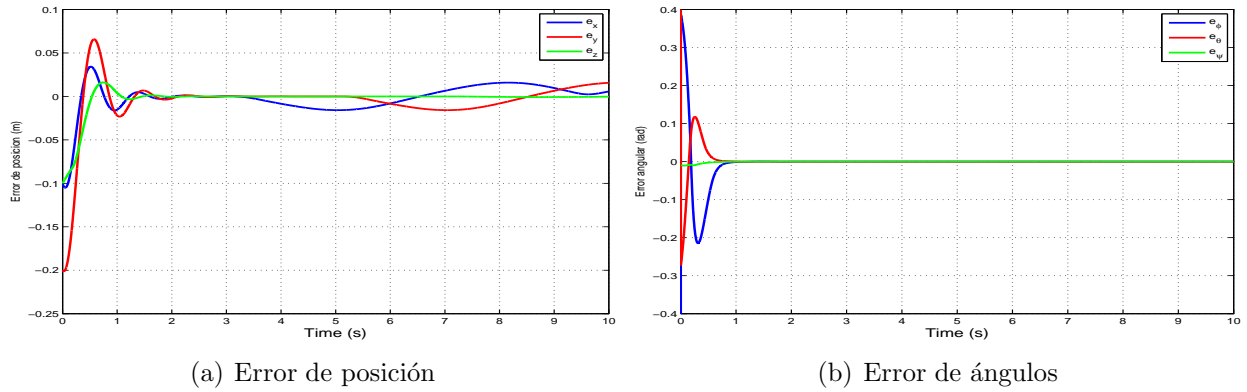


Figura 5.6: Errores generales para el seguimiento de referencias constantes bajo perturbaciones externas.

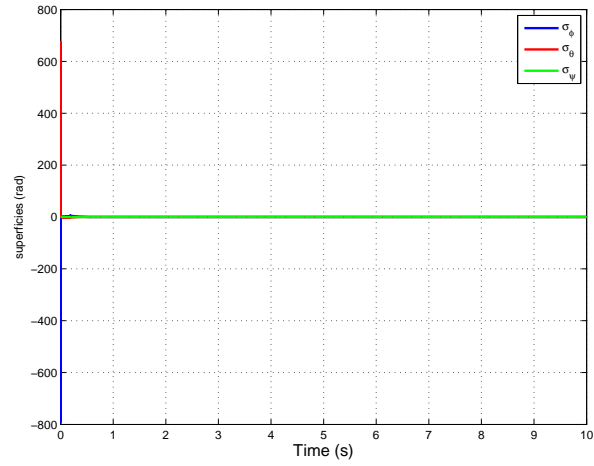


Figura 5.7: Superficies deslizantes para ángulos de Euler en seguimiento de referencias constantes bajo perturbaciones externas.

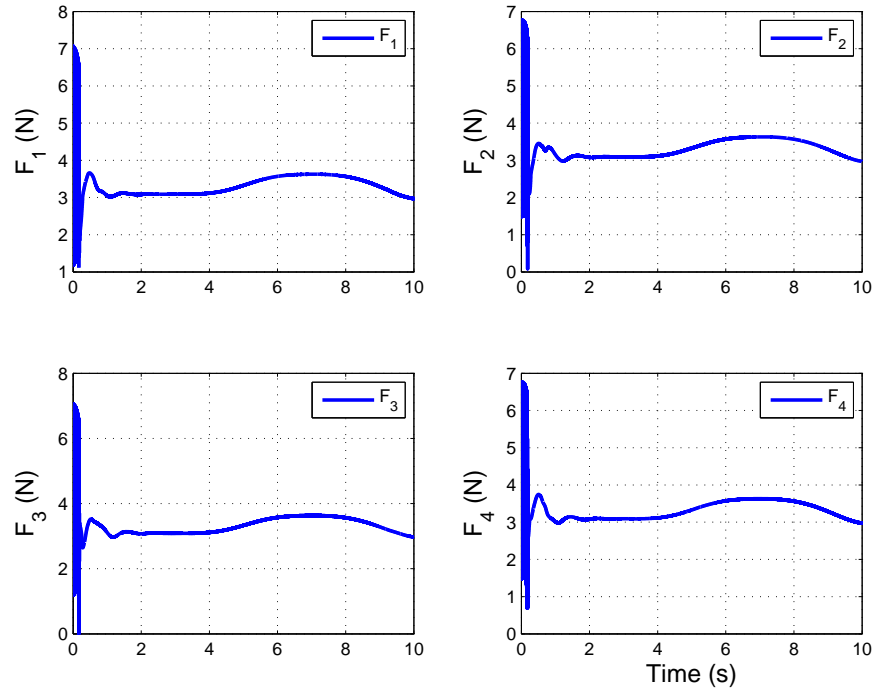


Figura 5.8: Fuerzas generadas por cada motor para el seguimiento de referencias constantes bajo perturbaciones externas.

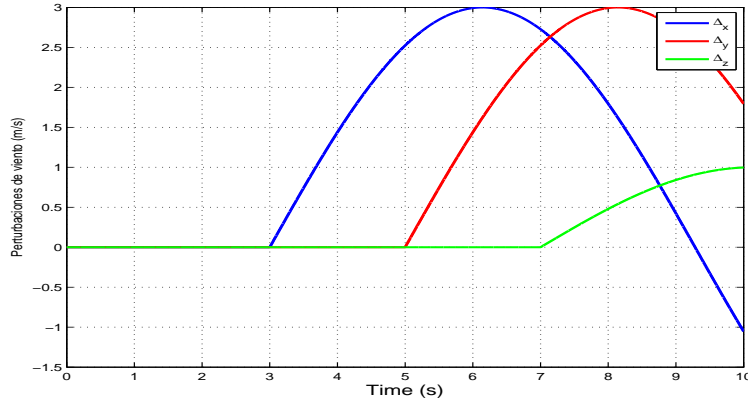


Figura 5.9: Emulación de perturbaciones de viento.

De las figuras 5.1 a 5.8 se observa un buen desempeño para el seguimiento de referencias constantes, aun a pesar de perturbaciones externas, como vientos. Este seguimiento se puede usar al iniciar el vuelo de un quadrotor que se lanza al aire y se arranca el controlador para estabilizar la aeronave. También se observa que el error de seguimiento está acotado de manera aceptable para aplicaciones de quadrotors, y las fuerzas ejercidas por los motores se encuentran dentro de las capacidades de los mismos.

## 5.2. Seguimiento de función lemniscata

**Caso 1:** Sin perturbaciones ni cambios paramétricos.

Se realizó el seguimiento de la función lemniscata,  $x_{ref} = \frac{1}{2}\cos(t)$ ,  $y_{ref} = (1 + \cos(\frac{t}{2}))$ ,  $z_{ref}$  sigue una rampa que va de 0 a 2 en el intervalo de tiempo  $t = (3, 4)$  y  $\psi_{ref}$  cambia de manera que el eje  $x_b$  es tangente a la trayectoria en ese instante. La simulación se realizó sin perturbación ni cambios paramétricos. Los resultados obtenidos se muestran a continuación:

Tabla 5.3: Errores de seguimiento de función lemniscata.

Error	Valor cuadrático medio	Desviación estándar
$e_x$	3.6627e-04 m	5.1799e-04 m
$e_y$	2.5931e-04 m	3.6672e-04 m
$e_z$	3.1477e-05 m	4.7407e-05 m
$e_\phi$	3.4797e-06 rad	4.8994e-06 rad
$e_\theta$	5.2137e-06 rad	7.5834e-06 rad
$e_\psi$	8.2122e-08 rad	4.3077e-08 rad

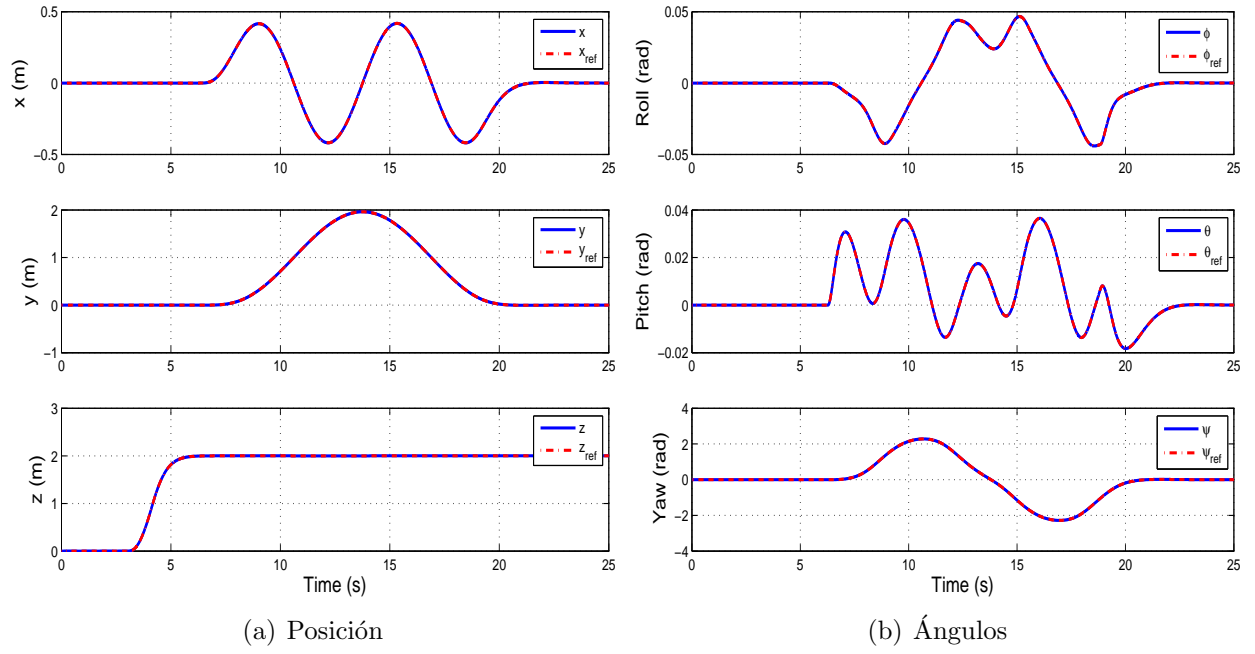


Figura 5.10: Comparación de posición del quadrotor en el espacio 3D contra las referencias para el seguimiento de la función lemniscata.

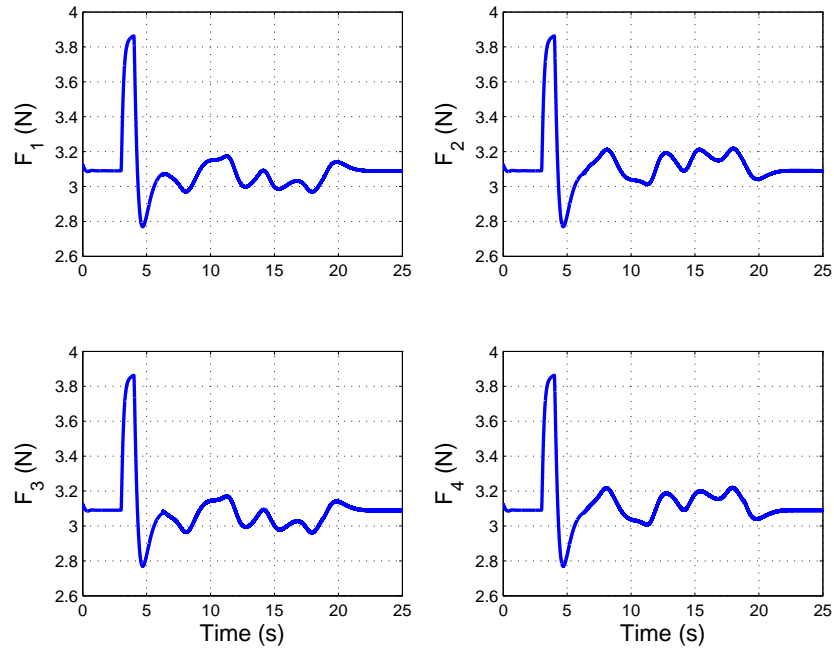


Figura 5.11: Fuerzas generadas por cada motor para el seguimiento de la función lemniscata.

Para probar la robustez del control, se realizaron las mismas simulaciones, con la diferencia que se agrega una perturbación externa.

**Caso 2:** *Seguimiento de función lemniscata con perturbaciones variantes en el tiempo.*

Se realizó nuevamente el seguimiento de la función lemniscata, emulando como perturbaciones de vientos en diferentes direcciones, donde  $\Delta_x = \sin(t - 5)$  y comienza a partir de  $t = 5$ ,  $\Delta_y = \sin(t - 10)$  para  $t \geq 10$  y  $\Delta_z = \sin(t - 15)$  para  $t \geq 15$ .

Tabla 5.4: Errores de seguimiento de función lemniscata con perturbaciones.

Error	Valor cuadrático medio	Desviación estándar
$e_x$	0.0105 m	0.0147 m
$e_y$	0.0079 m	0.0119 m
$e_z$	3.2926e-04 m	4.2546e-04 m
$e_\phi$	3.9877e-05 rad	5.5893e-05 rad
$e_\theta$	4.0910e-05 rad	5.7007e-05 rad
$e_\psi$	8.4934e-08 rad	3.9538e-08 rad

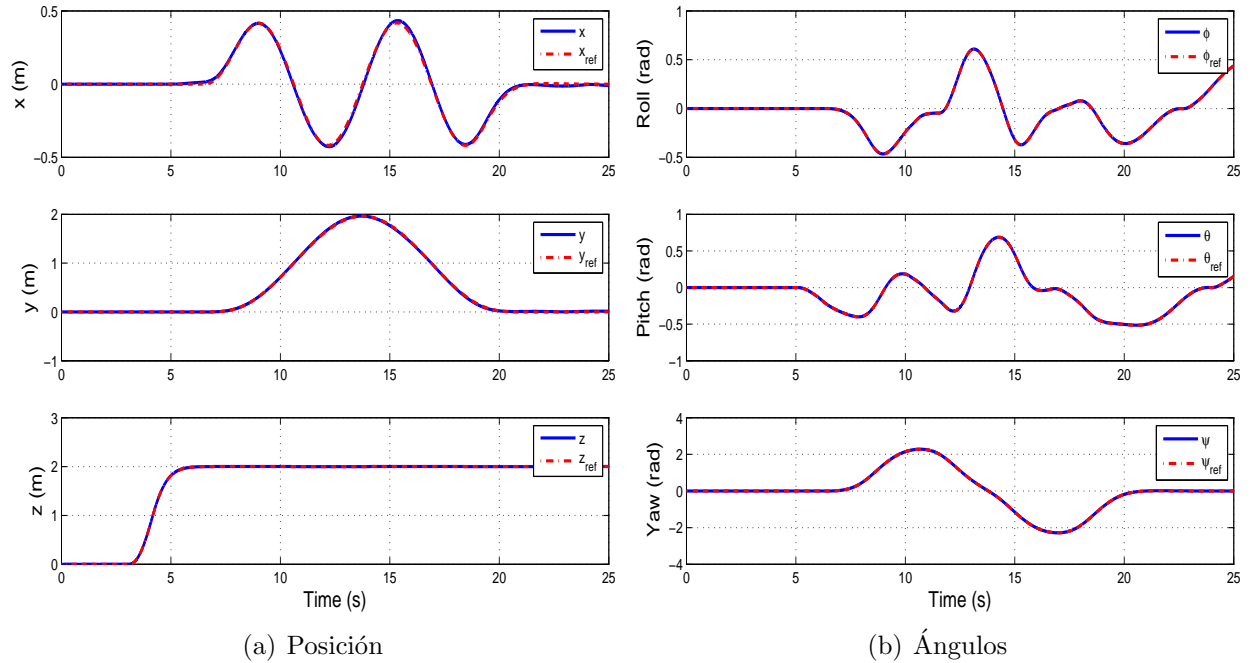


Figura 5.12: Comparación de posición del quadrotor en el espacio 3D contra las referencias para el seguimiento de la función lemniscata, tomando en cuenta perturbaciones externas de viento.

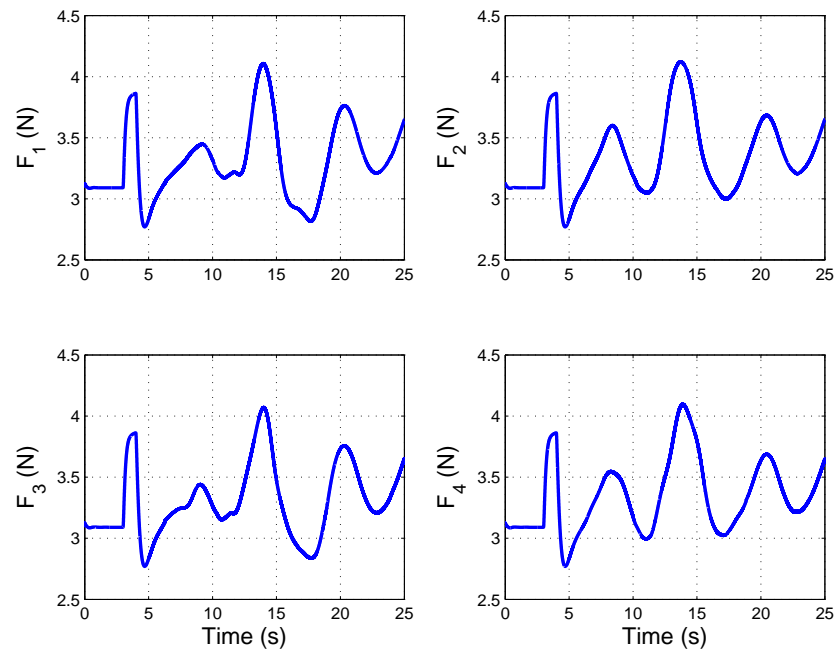


Figura 5.13: Fuerzas generadas por cada motor para el seguimiento de la función lemniscata, tomando en cuenta perturbaciones externas de viento.

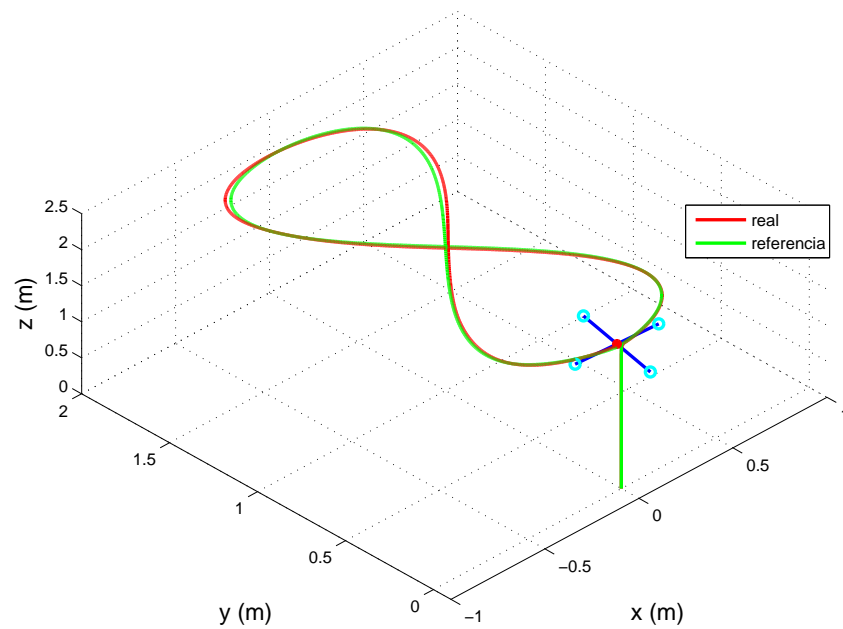


Figura 5.14: Seguimiento de la función lemniscata, tomando en cuenta perturbaciones externas de viento.



De las figuras 5.10 a 5.14 se observa un buen desempeño para el seguimiento de trayectorias, donde se muestra que el error de seguimiento está acotado de manera aceptable, aun a pesar de las perturbaciones no desvanecientes, además, las fuerzas ejercidas por los motores se encuentran dentro de las capacidades de los mismos. Aquí se hace la observación de que las condiciones iniciales son igual a cero, ya que el controlador arranca con el quadrotor en el suelo, donde se supone que las condiciones iniciales son igual al estado del quadrotor, por lo que desde ese momento se encuentra en el modo deslizante.

### 5.3. Seguimiento de trayectoria cuadrada

**Caso 1:** *Seguimiento de trayectoria cuadrada con cambios paramétricos.*

Se desarrolló otra simulación donde se siguen referencias más abruptas, la trayectoria a seguir es un cuadrado sin modificar la vista del quadrotor, seguido de un cuadrado haciendo un giro de  $\frac{\pi}{2}$  en cada esquina. Como en los casos anteriores se ha demostrado el buen funcionamiento del controlador para condiciones iniciales diferentes de cero y seguimiento de trayectorias bajo perturbaciones externas, en esta simulación se mostrará el desempeño de seguimiento de trayectoria bajo cambios paramétricos.

Los cambios paramétricos no sólo consisten en cambiar el valor numérico de alguno de los parámetros, sino que se re-calculó el modelo desarrollado en 4.9 y 4.10 sin hacer la suposición de ángulos pequeños. Esto hace que cambie el modelo en gran manera.

Tabla 5.5: Errores de seguimiento de trayectoria cuadrada.

<i>Error</i>	<i>Valor cuadrático medio</i>	<i>Desviación estándar</i>
$e_x$	6.8160e-04 m	9.6431e-04 m
$e_y$	6.8160e-04 m	9.6432e-04 m
$e_z$	7.7645e-04 m	0.0011
$e_\phi$	1.6419e-05 rad	2.3313e-05 rad
$e_\theta$	2.8393e-05 rad	3.9939e-05 rad
$e_\psi$	1.9158e-07 rad	1.9835e-07 rad

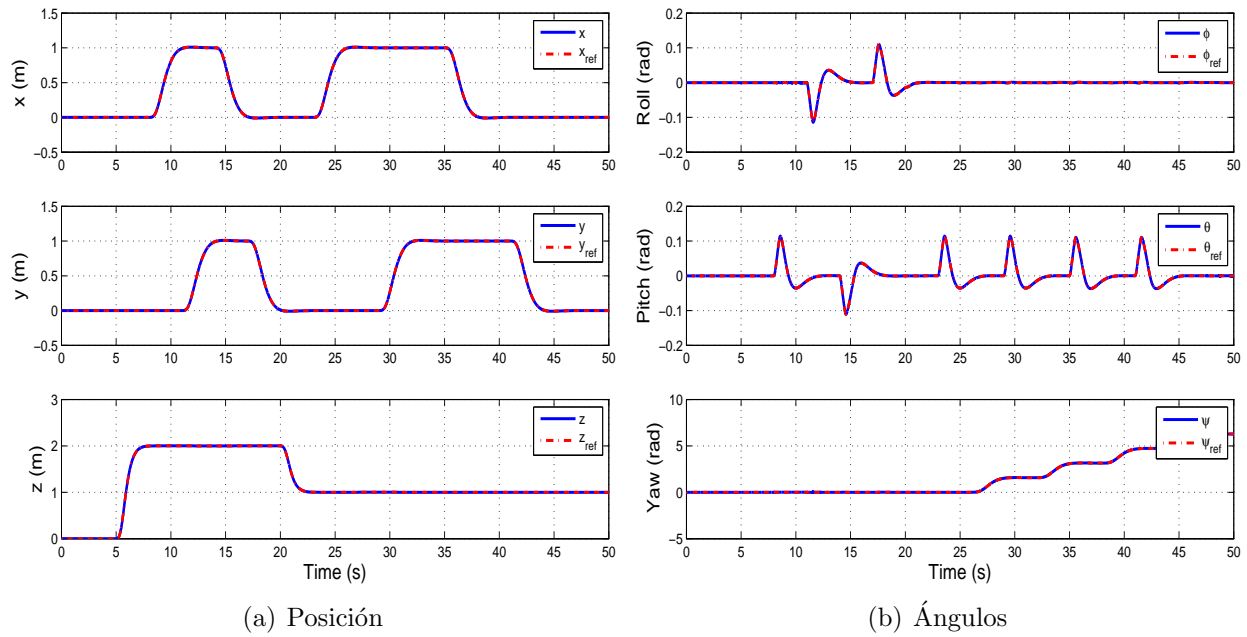


Figura 5.15: Comparación de posición del quadrotor en el espacio 3D contra las referencias para el seguimiento de una trayectoria cuadrada.

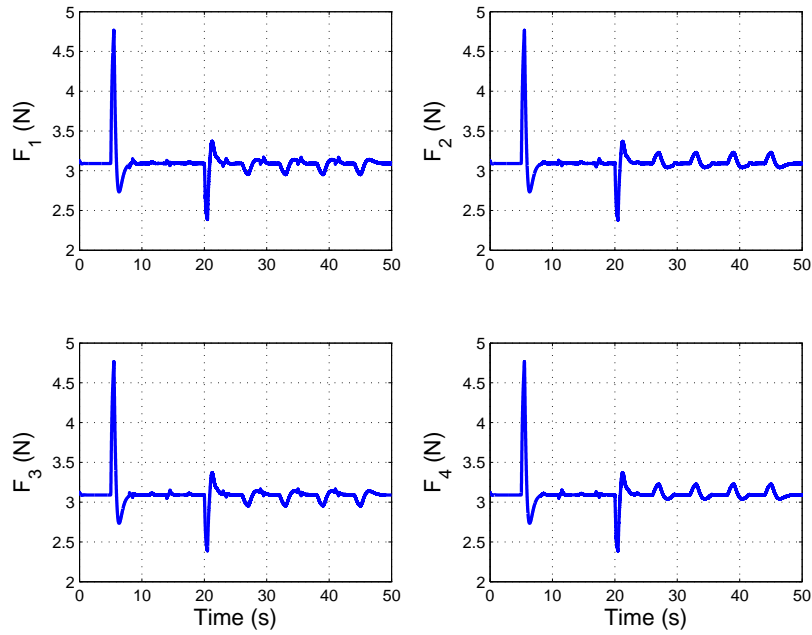


Figura 5.16: Fuerzas generadas por cada motor para el seguimiento de una trayectoria cuadrada.

**Caso 2:** Seguimiento de trayectoria cuadrada con perturbaciones externas y cambios paramétricos.

Nuevamente, se simuló el seguimiento de trayectoria cuadrada tomando en cuenta un modelo más aproximado al real, con la diferencia de que en esta simulación se emulan perturbaciones de vientos en diferentes direcciones, en este caso no son periódicas como antes, sino son perturbaciones que crecen y llegan a un valor máximo, donde  $\Delta_x$  comienza a crecer a partir de  $t = 10$  hasta llegar al valor de  $3m/s$ ,  $\Delta_y$  comienza a crecer a partir de  $t = 20$  hasta llegar al valor de  $-3m/s$  y  $\Delta_z$  comienza a crecer a partir de  $t = 30$  hasta llegar al valor de  $1m/s$ .

Tabla 5.6: Errores de seguimiento de trayectoria cuadrada con perturbaciones.

Error	Valor cuadrático medio	Desviación estándar
$e_x$	0.0062 m	0.0094 m
$e_y$	0.0039 m	0.0052 m
$e_z$	0.0018 m	0.0026 m
$e_\phi$	0.0068 rad	0.0095 rad
$e_\theta$	6.7701e-04 rad	9.5590e-04 rad
$e_\psi$	3.4455e-04 rad	4.9611e-04 rad

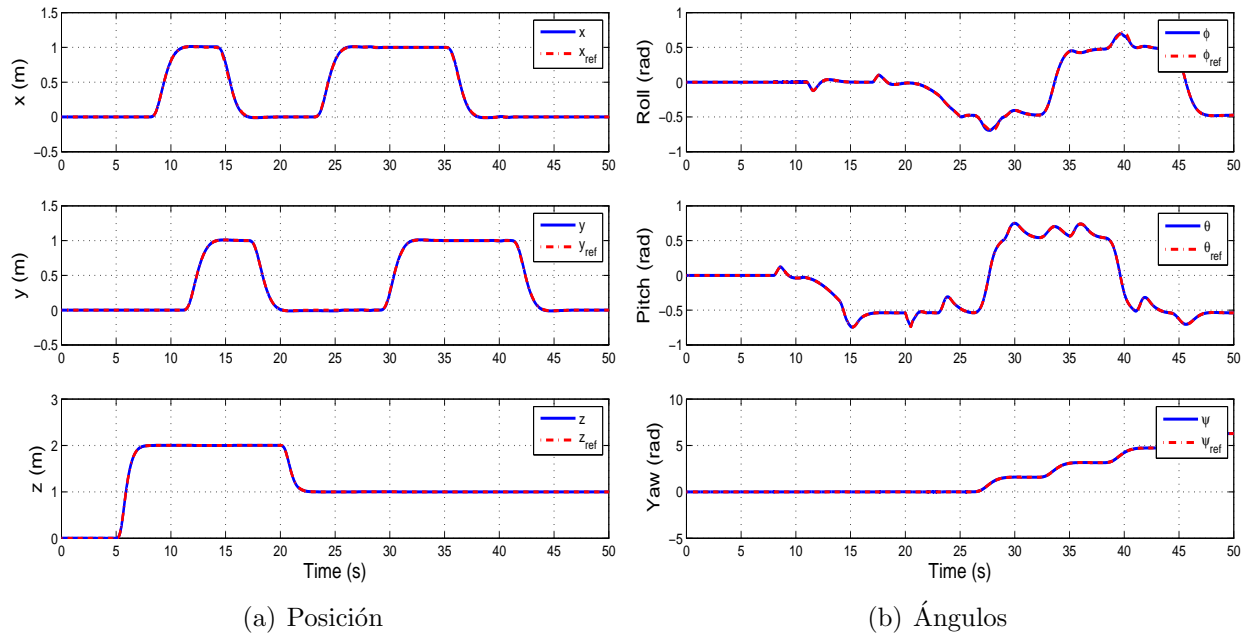


Figura 5.17: Comparación de posición del quadrotor en el espacio 3D contra las referencias para el seguimiento de una trayectoria cuadrada.

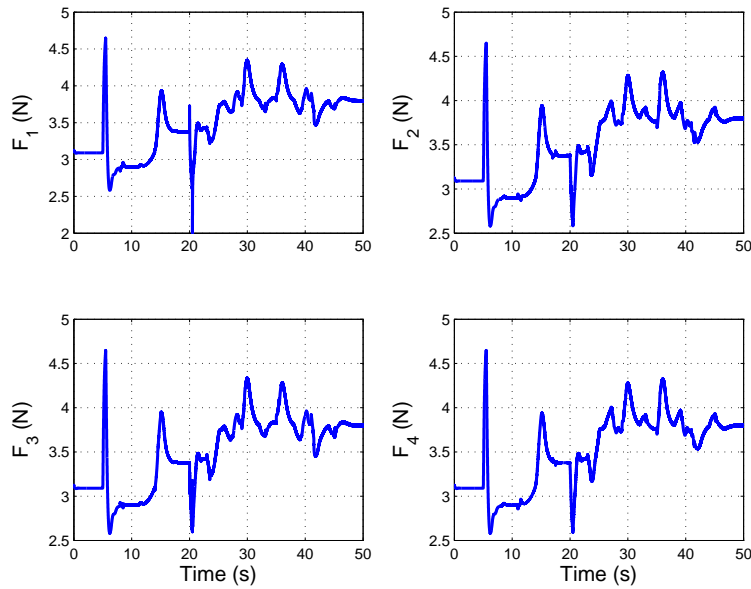


Figura 5.18: Fuerzas generadas para el seguimiento de una trayectoria cuadrada.

**Caso 3:** Seguimiento de trayectoria cuadrada con perturbaciones externas, cambios paramétricos, dinámica no modelada y controlador en tiempo discreto.

Se simuló el seguimiento de trayectoria cuadrada tomando en cuenta el modelo real, el cual está corriendo en simulación en tiempo continuo (tiempo de muestreo de 0.0001 seg), también se emulan perturbaciones iguales al caso anterior.

Tabla 5.7: Errores de seguimiento de trayectoria cuadrada con dinámica no modelada.

Error	Valor cuadrático medio	Desviación estándar
$e_x$	0.0067 m	0.0102 m
$e_y$	0.0047 m	0.0063 m
$e_z$	0.0031 m	0.0046 m
$e_\phi$	0.0195 rad	0.0275 rad
$e_\theta$	0.0154 rad	0.0218 rad
$e_\psi$	0.0113 rad	0.0160 rad

Al momento de diseñar el controlador no se tomó en cuenta la dinámica de los motores. Además, pensando en la futura implementación del algoritmo de control, se discretizaron las leyes de control por el método de Euler y se corrió el control a una frecuencia más baja que la planta (tiempo de muestreo de 0.003 seg). También se pasaron las leyes de control por funciones de transferencia de segundo orden, las cuales representan la respuesta dinámica de los motores. Dichas funciones de transferencia se ajustaron a los modelos de los motores que

se encuentran en la literatura y resultados experimentales que se realizaron en el laboratorio de control, los cuales se pueden encontrar en [Arellano, 2014].

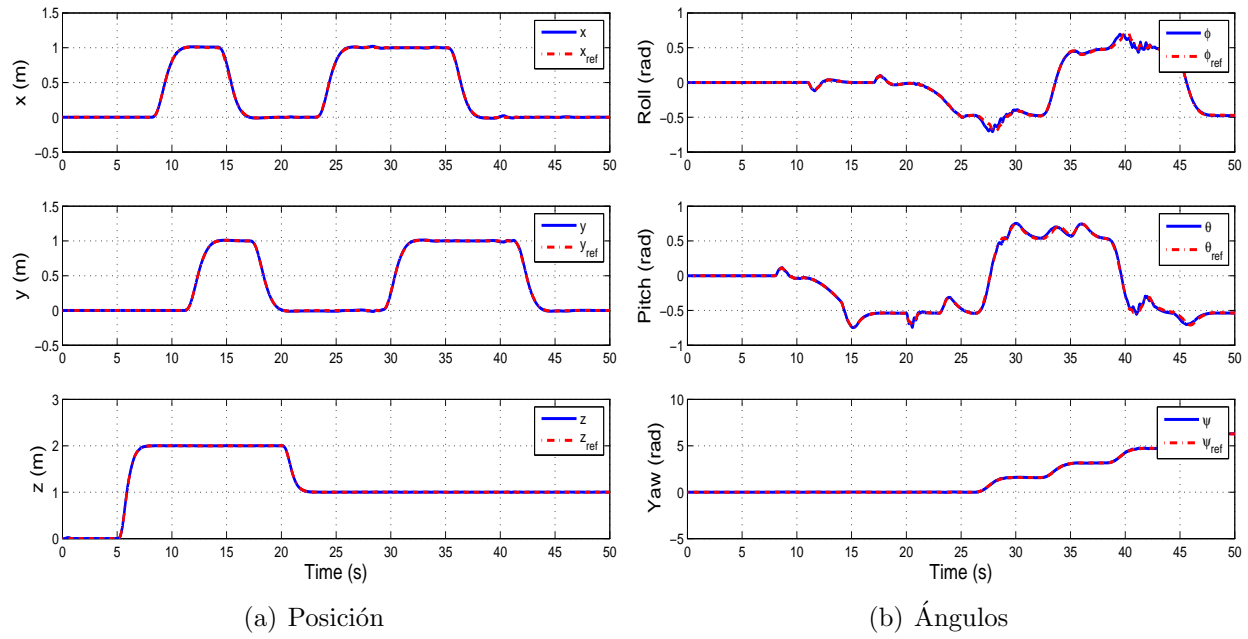


Figura 5.19: Pose del quadrotor en el espacio 3D para el seguimiento de trayectoria.

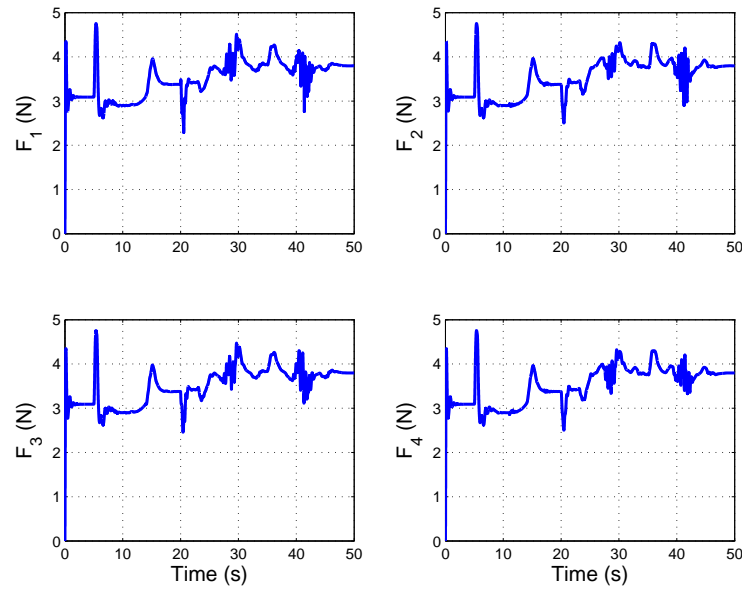


Figura 5.20: Fuerzas generadas por cada motor para el seguimiento de trayectoria cuadrada.

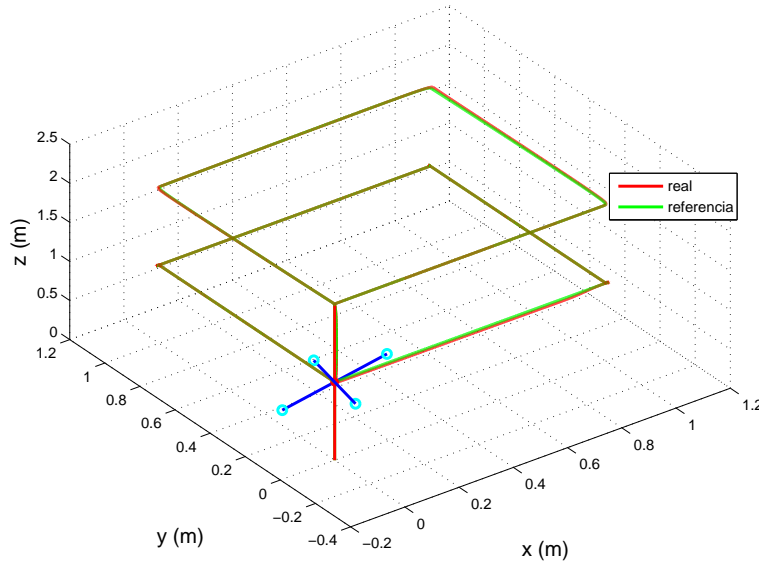


Figura 5.21: Seguimiento de trayectoria cuadrada.

De las figuras 5.15 a 5.21 se observa un buen desempeño para el seguimiento de trayectorias, a pesar de tener perturbaciones externas, cambios paramétricos, dinámica no modelada y un controlador discreto. Igual que en los casos anteriores, los errores de seguimiento son aceptables para la mayoría de las aplicaciones en las que se puede usar un quadrotor y las leyes de control están dentro de las capacidades de los motores.

## 5.4. Seguimiento de trayectoria helicoidal

Como último ejemplo, se muestra la simulación del seguimiento de una trayectoria helicoidal, en la que igual al último caso, se tienen cambios paramétricos, perturbaciones externas (figura 5.23), dinámica no modelada y un controlador de tipo discreto.

Tabla 5.8: Errores de seguimiento de trayectoria helicoidal.

<i>Error</i>	<i>Valor cuadrático medio</i>	<i>Desviación estándar</i>
$e_x$	0.0099 m	0.0141 m
$e_y$	0.0109 m	0.0159 m
$e_z$	0.0017 m	0.0026 m
$e_\phi$	0.0051 rad	0.0074 rad
$e_\theta$	0.0043 rad	0.0062 rad
$e_\psi$	0.0077 rad	0.0110 rad

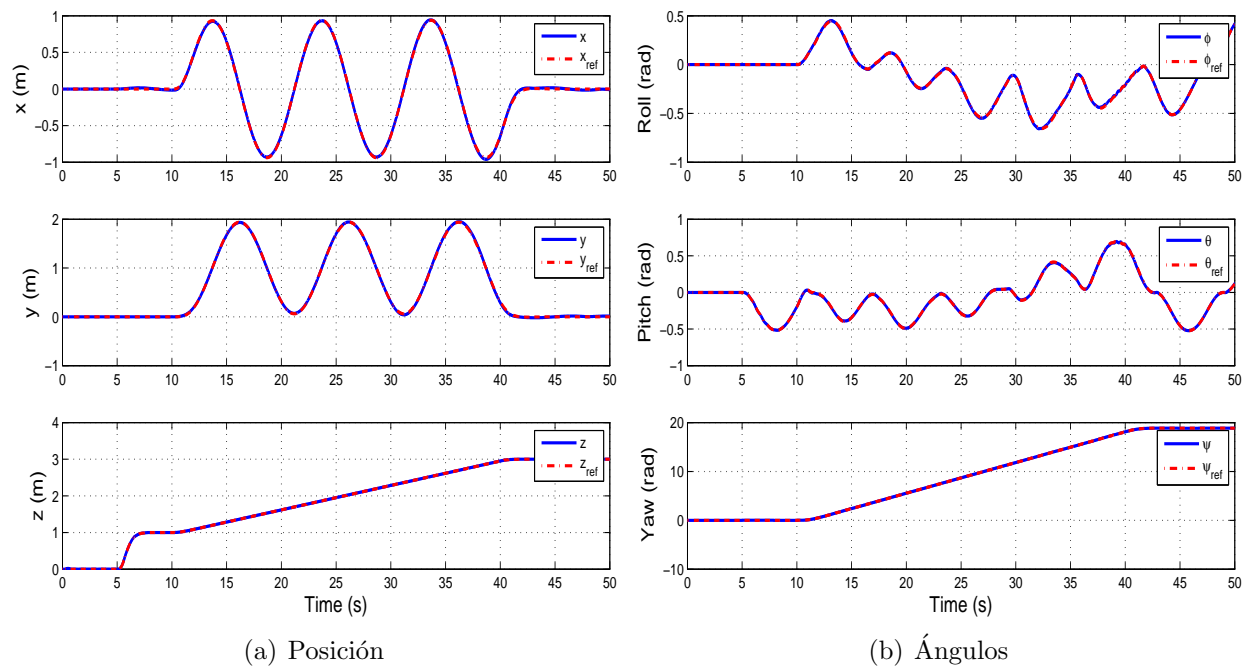


Figura 5.22: Comparación de posición del quadrotor en el espacio 3D contra las referencias para el seguimiento de una trayectoria helicoidal.

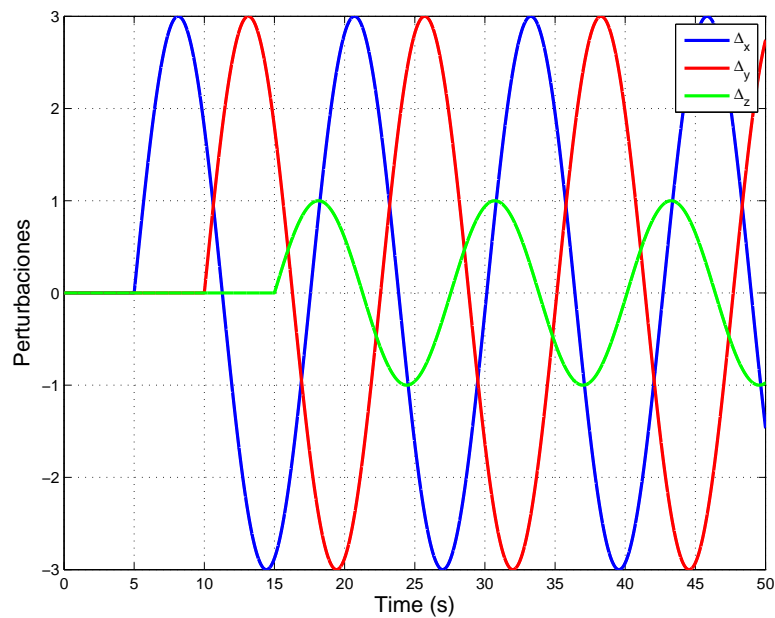


Figura 5.23: Fuerzas de viento.

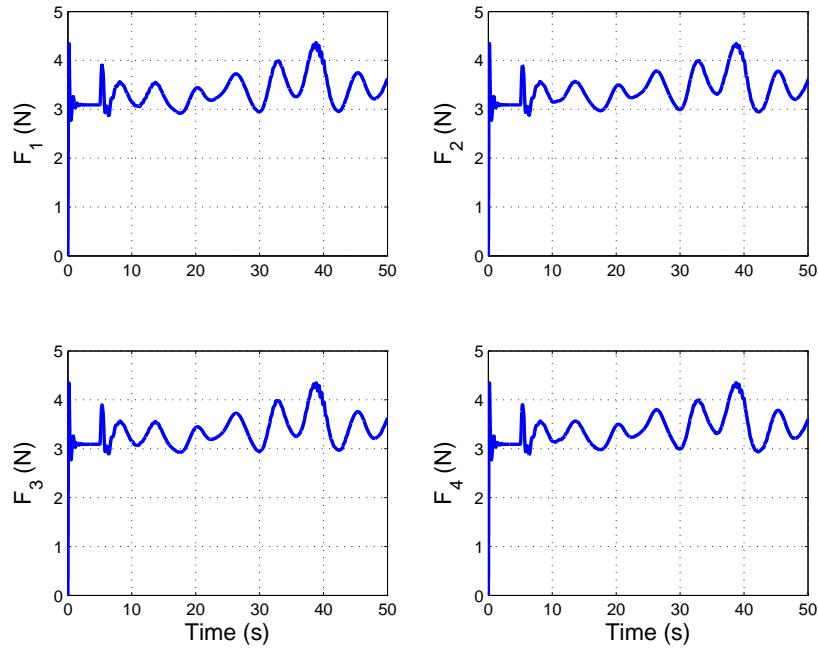


Figura 5.24: Fuerzas generadas por cada motor para el seguimiento de una trayectoria helicoidal.

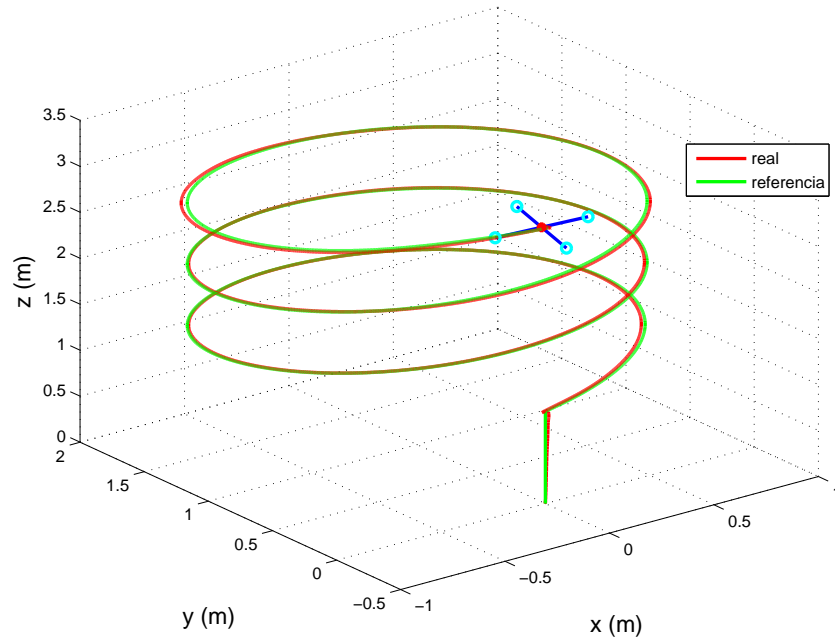


Figura 5.25: Seguimiento de trayectoria helicoidal.



De las figuras 5.22 a 5.25 se observa un buen desempeño para el seguimiento de trayectorias, a pesar de tener perturbaciones externas, cambios paramétricos, dinámica no modelada y un controlador discreto. Igual que en los casos anteriores, los errores de seguimiento son aceptables para la mayoría de las aplicaciones en las que se puede usar un quadrotor y las leyes de control están dentro de las capacidades de los motores.



## Capítulo 6

# Conclusiones y trabajo futuro

### 6.1. Conclusiones

Este trabajo presenta un esquema de control de un quadrotor para el seguimiento de trayectoria, donde se demostró estabilidad para el sistema completo en lazo cerrado, el cual es capaz de rechazar perturbaciones de tipo *match* y de tipo *no match* por medio de pseudo-controles utilizando la técnica de control a bloques. La clave de dicho control está en la jerarquía del control a bloques, donde en la primera etapa se diseñan los pseudo-controles para controlar las variables de posición  $x - y - z$  ayudándose de funciones de Lyapunov de tipo cuadráticas, de los cuales se obtienen ángulos de referencia para la siguiente etapa de control, en donde se utiliza el STA. Las simulaciones muestran las grandes cualidades del diseño de control al presentar resultados aceptables bajo diferentes condiciones adversas, ya sean perturbaciones externas o cambios paramétricos.

Aunque no se ha realizado ningún análisis de estabilidad para el sistema en lazo cerrado con las leyes de control discretizadas, se concluye que, con base en los resultados en simulación, se puede extender el trabajo en continuo para controladores discretos, como microcontroladores, cuidando el periodo de muestreo. Además se obtuvieron resultados aceptables aún introduciendo retrasos en la ley de control al emular la dinámica de los motores, la cual no fue modelada al momento de diseñar el control.

La aplicación de un quadrotor en interiores es posible si se cuenta con un buen sistema de control y un sistema de medición confiable, aquí se presentó un sistema de control altamente confiable y las bases para poder desarrollar un sistema de medición de precisión aceptable utilizando la técnica SLAM.

## 6.2. Trabajo futuro

Desde el principio, uno de los objetivos fue la implementación del control y del algoritmo SLAM, infortunadamente hubo situaciones que no permitieron llegar a la conclusión final del proyecto, por lo cual se deja la implementación del sistema de control y el algoritmo SLAM como trabajo futuro.

Además, este trabajo se puede extender a diferentes aplicaciones similares, incluyendo en el proyecto más sensores como sistemas de visión estéreo u odometría visual, lo cual puede mejorar la estimación del estado al usar el algoritmo SLAM. Una dificultad que presenta dicho algoritmo es que el quadrotor está constantemente cambiando su orientación, por lo cual no se tienen medidas en el mismo plano, esto lleva a pensar en un re-diseño mecánico que evite que el UAV deba inclinarse para poder desplazarse o en una extensión del SLAM 2D a 3D.

Por otra parte, también se puede mejorar el algoritmo de control al elegir las ganancias y matrices  $P$  y  $Q$  óptimas, al encontrar el mínimo del sistema de desigualdades cuadráticas definido en la sección 4.3.1, o al quitar las restricciones que se hicieron al suponer sólo ángulos pequeños.

## Apéndice A

# Demostraciones

***Demostración del Teorema 3.3*** [Moreno, 2008]. Para el sistema perturbado (3.61), se utiliza la función candidata de Lyapunov de tipo cuadrática  $V(x) = \zeta^T P \zeta$ , donde  $\zeta^T = [|x_1|^{1/2} \text{sign}(x_1), x_2]$ ,

$$P = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 4k_3 + k_1^2 & -k_1 \\ -k_1 & 2 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.1})$$

La cual puede expresarse como

$$V(x) = 2k_3 |x_1| + \frac{1}{2}x_2^2 + \frac{1}{2}(k_1 |x_1|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(x_1) - x_2)^2. \quad (\text{A.2})$$

Cuya derivada derecha superior respecto al tiempo a lo largo de las soluciones del sistema es:

$$\dot{V} = -\frac{1}{|x_1|^{\frac{1}{2}}} \zeta^T Q \zeta + \frac{\varrho_1}{|x|^{\frac{1}{2}}} \mathbf{q}_1^T \zeta + \varrho_2 \mathbf{q}_2^T \zeta, \quad (\text{A.3})$$

donde:

$$\mathbf{q}_1^T = \begin{bmatrix} (2k_3 + \frac{k_1^2}{2}) & -\frac{k_1}{2} \end{bmatrix}, \mathbf{q}_2^T = \begin{bmatrix} -k_1 & 2 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.4})$$

Utilizando las cotas de las perturbaciones (3.62), se puede mostrar que:

$$\dot{V} \leq -\frac{1}{|x_1|^{\frac{1}{2}}} \zeta^T \tilde{Q} \zeta, \quad (\text{A.5})$$

donde:

$$\tilde{Q} = \frac{k_1}{2} \begin{bmatrix} 2k_3 + k_1^2 - (\frac{4k_3}{k_1} + k_1)\delta_1 - 2\delta_2 & \star \\ -(k_1 + 2\delta_1 + \frac{2\delta_2}{k_1}) & 1 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.6})$$

$\dot{V}$  es definida negativa si  $\tilde{Q} > 0$ . Es fácil ver que este es el caso si las ganancias son como en (3.63). Con los mismos argumentos como en el caso sin perturbaciones, el estado converge a cero en tiempo finito sin exceder  $\tilde{T} = \frac{2V^{\frac{1}{2}}(x_0)}{\tilde{\gamma}}$  unidades de tiempo, donde  $\tilde{\gamma} = \frac{\lambda_{\min}^{\frac{1}{2}}\{P\}\lambda_{\min}\tilde{Q}}{\lambda_{\max}\{P\}}$ .  $\square$

## Apéndice B

# Códigos

Listing B.1: CodigoLMIQuad (Matlab)

```
1 for g = g0:1:10
2   for k1 = k10:1:10
3     for k2 = k20:1:10
4       cvx_begin SDP
5         variables a b c e i f
6
7         P = [a,b,c;b,e,f;c,f,i];
8         q11 = 2*g*a + 2*k1*b;
9         q12 = -a + (g+k1)*b + k1*e;
10        q22 = -2*b + 2*k2*e;
11        q13 = -b + g*c + k1*f;
12        q23 = -c -e + k1*f;
13        q33 = -2*f;
14
15        Q = [q11,q12,q13;q12,q22,q23;q13,q23,q33];
16
17        P > p*eye(3);
18        Q > q*eye(3);
19      cvx_end
20
21      if(strcmp(cvx_status,'Solved'))
22        break end
23    end
24    if(strcmp(cvx_status,'Solved'))
25      break end
26  end
27  if(strcmp(cvx_status,'Solved'))
28    break end
29 end
```





# Bibliografía

- Altuğ, E., Ostrowski, J. P., and Mahony, R. (2002). Control of a quadrotor helicopter using visual feedback. In *Robotics and Automation, 2002. Proceedings. ICRA'02.*, volume 1, pages 72–77. IEEE.
- Arellano-Muro, C. A. (2014). Navegación 3d de un sistema de vuelo autónomo de tipo quadrotor. Master's thesis, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional Unidad Guadalajara.
- Bachrach, A., Garamifard, A., Gurdan, D. H., Prentice, S., Stumpf, J., and Roy, N. (2008). Co-ordinated tracking and planning using air and ground vehicles. In *In Proc ISER*.
- Bachrach, A. G. (2009). Autonomous flight in unstructured and unknown indoor environments. Master's thesis, Massachusetts Institute of Technology.
- Benallegue, A., Mokhtari, A., and Fridman, L. (2006). Feedback linearization and high order sliding mode observer for a quadrotor UAV. In *Variable Structure Systems, 2006. VSS'06. International Workshop on*, pages 365–372.
- Bouabdallah, S. and Siegwart, R. (2005). Backstepping and sliding-mode techniques applied to an indoor micro quadrotor. In *Robotics and Automation, 2005. ICRA 2005. Proceedings of the 2005 IEEE International Conference on*, pages 2247–2252. IEEE.
- Carrillo, L., López, A., Lozano, R., and Pégard, C. (2012). *Quad Rotorcraft Control: Vision-Based Hovering and Navigation*. Advances in Industrial Control. Springer London.
- Coates, A., Abbeel, P., and Ng, A. Y. (2008). Learning for control from multiple demonstrations. In ACM, editor, *25th International Conference on Machine Learning*.
- Derafa, L., Fridman, L., Benallegue, A., and Ouldali, A. (2010). Super twisting control algorithm for the four rotors helicopter attitude tracking problem. In *Variable Structure Systems (VSS), 2010 11th International Workshop on*, pages 62–67.
- Edwards, C. and Spurgeon, S. (1998). *Sliding Mode Control: Theory and Applications*. Series in Systems and Control. Taylor & Francis.

- Gonzalez-Jimenez, L., Loukianov, A., and Bayro-Corrochano, E. (2011). Fully nested super-twisting algorithm for uncertain robotic manipulators. In *Robotics and Automation (ICRA), 2011 IEEE International Conference on*, pages 5807–5812.
- Jazar, R. (2011). *Advanced Dynamics: Rigid Body, Multibody, and Aerospace Applications*. Wiley, New Jersey, USA.
- Kalman, R. E. (1960). A new approach to linear filtering and prediction problems. (82 (Series D)):35–45.
- Khalil, H. K. and Grizzle, J. (1996). *Nonlinear systems*, volume 3. Prentice Hall New Jersey, USA.
- Kharsansky, A. (2013). Diseño e implementación de un sistema embebido de control de actitud para aeronaves no tripuladas. Master’s thesis, Universidad de Buenos Aires.
- Leonard, J. J. and Durrant-Whyte, H. F. (1991). Mobile robot localization by tracking geometric beacons. 7(3):376–382.
- Loukianov, A. G. (2002). Robust block decomposition sliding mode control design. *Mathematical Problems in Engineering*, 8(4-5):349–365.
- Lukyanov, A. and Utkin, V. (1981). Methods of reducing equations for dynamic-systems to a regular form. *Automation and Remote Control*, 42(4):413–420.
- Luque-Vega, L. F. (2014). *Control no lineal para multicopteros*. PhD thesis, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional Unidad Guadalajara.
- Martin-Schermuk, D. (2012). Diseño e implementación de un control para la orientación de un quadrotor. Master’s thesis, Universidad de Buenos Aires.
- Mercado, D., Castro, R., and Lozano, R. (2013). Quadrotors flight formation control using a leader-follower approach. In *Control Conference (ECC), 2013 European*, pages 3858–3863.
- Meyer, J., Sendobry, A., Kohlbrecher, S., Klingauf, U., and von Stryk, O. (2012). Comprehensive simulation of quadrotor uavs using ros and gazebo. In Noda, I., Ando, N., Brugali, D., and Kuffner, J., editors, *Simulation, Modeling, and Programming for Autonomous Robots*, volume 7628 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 400–411. Springer Berlin Heidelberg.
- Moreno, J. and Osorio, M. (2012). Strict lyapunov functions for the super-twisting algorithm. 57(4):1035–1040.

- Moreno, J.A.; Osorio, M. (9-11 Dec. 2008). A lyapunov approach to second-order sliding mode controllers and observers. In *Decision and Control, 2008. CDC 2008. 47th IEEE Conference on*. IEEE.
- Nguyen, V., Martinelli, A., Tomatis, N., and Siegwart, R. (2005). A comparison of line extraction algorithms using 2d laser rangefinder for indoor mobile robotics. In *Intelligent Robots and Systems, 2005. (IROS 2005). 2005 IEEE/RSJ International Conference on*, pages 1929–1934.
- Rabhi, A., Chadli, M., and Pegard, C. (2011). Robust fuzzy control for stabilization of a quadrotor. In *Advanced Robotics (ICAR), 2011 15th International Conference on*, pages 471–475.
- Riisgaard, S. and Blas, M. R. (2003). "SLAM for Dummies..<sup>A</sup> Tutorial Approach to Simultaneous Localization and Mapping.
- Scherer, S., Singh, Chamberlain, L., and Saripalli, S. (2007). Flying fast and low among obstacles. In *ICRA*.
- Shtessel, Y., Edwards, C., Fridman, L., and Levant, A. (2013). *Sliding Mode Control and Observation*. Control Engineering. Birkhäuser.
- Tayebi, A. and McGilvray, S. (2006). Attitude stabilization of a vtol quadrotor aircraft. In *IEEE Transactions on Control Systems Technology*.
- Graber, T., Kohlbrecher, S., Meyer, J., Petersen, K., von Stryk, O., and Klingauf, U. (2012). Robocuprescue 2012 - robot league team hector darmstadt (germany). Technical report, Technische Universität Darmstadt.
- Thrun, S., Fox, D., Burgard, W., and Dellaert, F. (2001). Robust monte carlo localization for mobile robots. *Artificial Intelligence*, 128:99–141.
- Utkin, V., Guldner, J., and Shi, J. (2009). *Sliding mode control in electro-mechanical systems*, volume 34. CRC press.