

Dr. José Gabriel Ramírez Torres  
[grtorres@cinvestav.mx](mailto:grtorres@cinvestav.mx)

# Control automático

# Introducción

# Control automático en la Ingeniería

- La Teoría de Control, junto con el Procesamiento de Señales, es la bisagra entre las matemáticas y las tecnologías
- La Teoría de Control se apoya en sólidas bases matemáticas pero está totalmente ligada al avance tecnológico: electrónica, computacional, desarrollo...

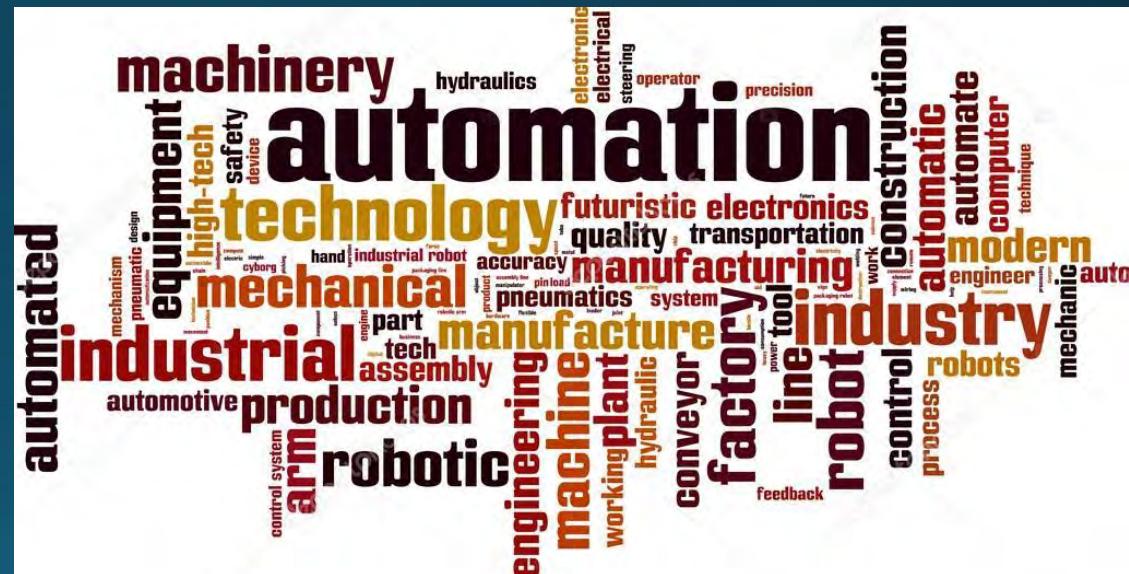


# Requisitos previos

- Funciones matemáticas
- Descomposiciones e identidades
- Transformada de Laplace
- Ecuaciones diferenciales
- Bibliografía recomendada
  - K.J. Aström, R. Murray, *Feedback Systems. An Introduction for Scientists and Engineers*, Princeton University Press, 2009
  - K. Ogata, *Modern Control Engineering*, 5th Ed., Prentice Hall, 2010

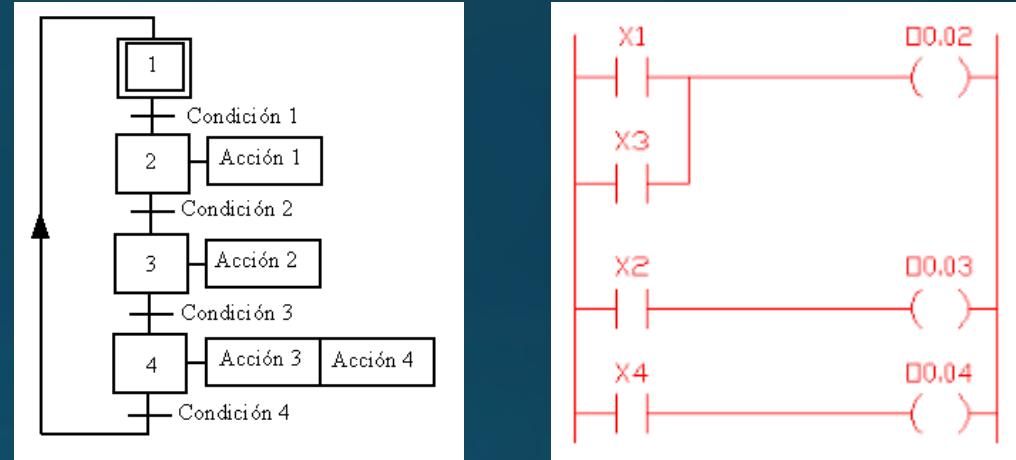
# Definición

- La Teoría de Control, o regulación automática, es el conjunto de ciencias y técnicas para el estudio de sistemas que funcionan sin intervención humana
- El propósito principal es concebir elementos de control que permitan mantener un sistema en un estado determinado



# Automatización y Control automático

- Existen dos dominios principales de la Teoría de Control:
- Control de sistemas de eventos discretos
  - Procesos con variables estrictamente binarias
  - Emplean automatismos: secuencias de acciones preestablecidas, basadas en condiciones lógicas y secuenciales
  - Estas secuencias de acciones se pueden representar con herramientas como Grafcets o Redes de Pétri
  - Se emplean lenguajes de alto nivel para **autématas programables**
- Control de sistemas continuos
  - Procesos con variables continuas y/o discretas
  - El propósito es regular o controlar variables físicas de **manera precisa sin intervención humana**
  - Respuestas en “**tiempo real**”



# Ejemplos

- Vida cotidiana
- Aeroespacial
- Aeronáutica
- Robótica
- Cada acrónimo de la industria oculta un sistema de control automático
- Sector energético
- Salud (redes corporales)
- Objetivo: Sustituir las decisiones humanas en el desempeño del sistema

Visitar los siguientes videos:

Climate-neutral container terminal: How does it work?

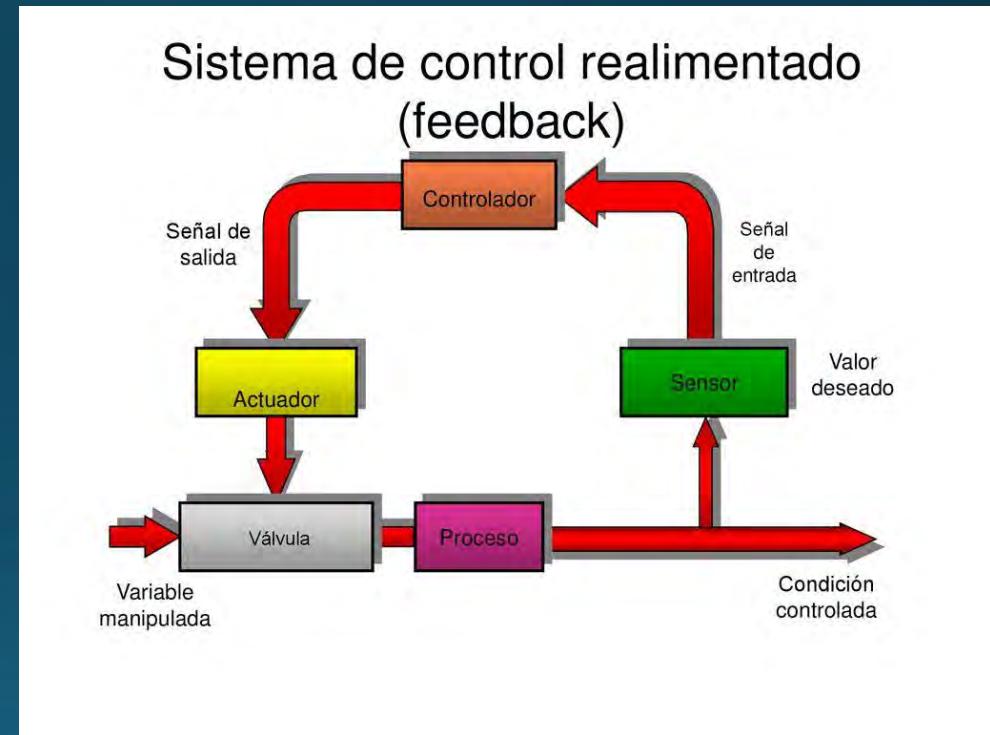
<https://www.youtube.com/watch?v=wiKS-RYf-cY&t=1s>

Why learn control theory

<https://www.youtube.com/watch?v=oBc-BHxw78s&t=10s>

# Retroalimentación

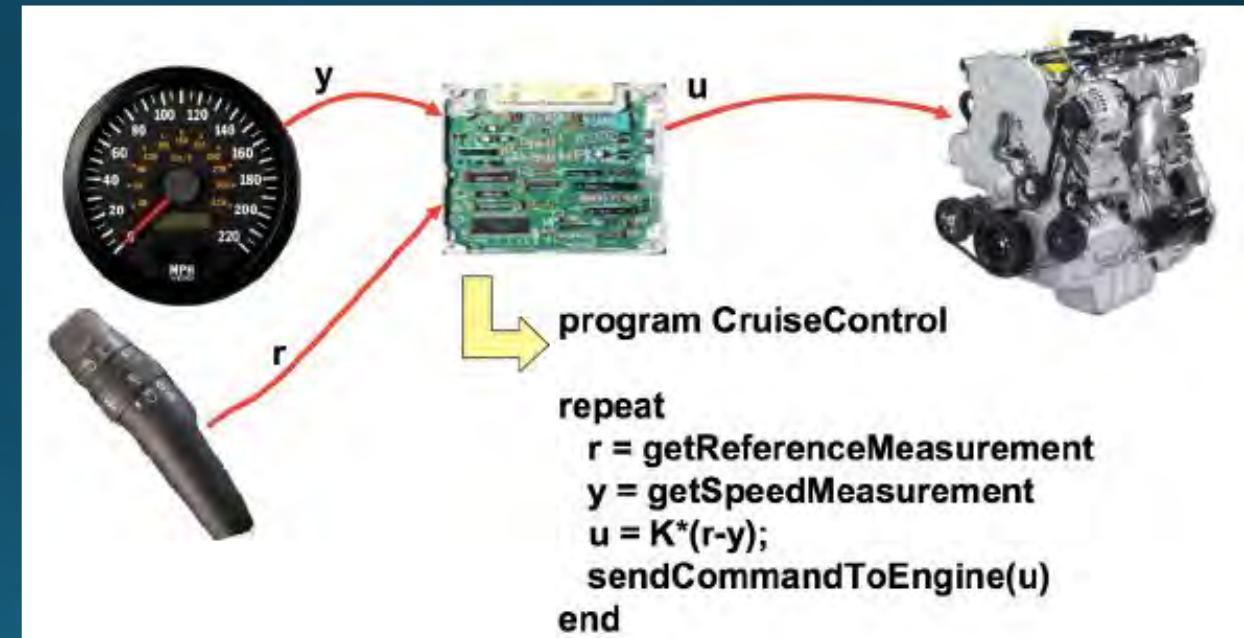
- La retroalimentación es el principio fundamental del Control automático
- Consiste en medir la señal de salida para ajustar la señal de control
- El sistema en lazo cerrado reproduce el comportamiento de un sistema inteligente:
  - Observar -> Decidir -> Actuar
- Los tres elementos principales del control en lazo cerrado son:
  - Sensor
  - Regulador
  - Actuador



Automation  
[www.youtube.com/watch?v=XJLMW6l3o3g](https://www.youtube.com/watch?v=XJLMW6l3o3g)

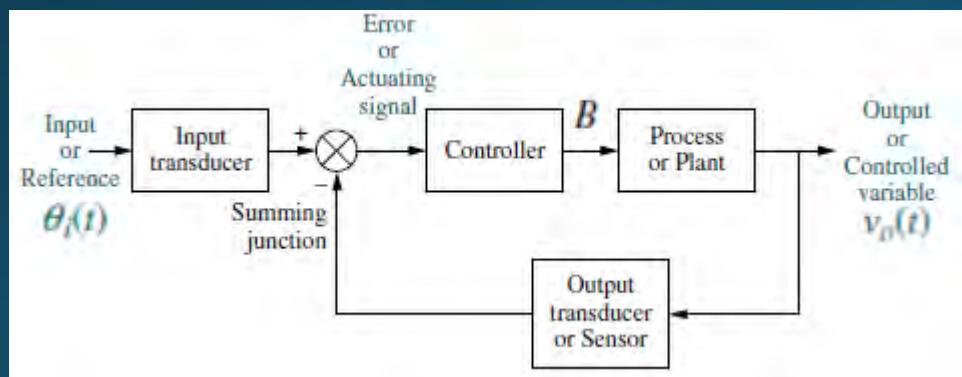
# Ejemplo: regulador de velocidad

- Elementos
- ¿Qué es el regulador? En la actualidad, es un programa ejecutado por un procesador embarcado



# Principales problemas

- Se distinguen dos problemas principales en Teoría de Control
  - Control seguidor: lograr que la señal de salida siga una trayectoria establecida
  - Regulador: mantener el sistema en un estado fijo preestablecido, eliminando el efecto de las perturbaciones y el ruido
- Ventajas
  - Eliminación de perturbaciones externas
  - Estabilización del sistema
  - Mejora del desempeño del sistema
  - Eliminación de la intervención humana
- Desventajas
  - Saturación de los controles
  - Introduce nuevas fuentes de ruido en el sistema
  - Posibilidad de inestabilidad en el sistema total
  - Costo (de desarrollo, económico)



# Consecuencias negativas

- Sin consecuencia mayor:
  - Caída/interrupción del sistema
  - Oscilaciones indeseables
  - Saturación de actuadores
- Consecuencias graves
  - Daño irreparable/destrucción del sistema
  - Respuestas correctas en momentos incorrectos



Tacoma bridge  
<https://www.youtube.com/watch?v=3mclp9QmCGs>

# Diseño de un sistema de control automático



# Objetivos del módulo

- Describir/modelizar un sistema a controlar
- Analizar el sistema a controlar
- Implementar un sistema de control PID
- Analizar el desempeño de un sistema en lazo cerrado

What Control Systems Engineers Do

<https://www.youtube.com/watch?v=ApMz1-MK9IQ>

# Numerosas ofertas de trabajo en Control Automático

[jobs.ieee.org/jobs/controls-design-engineer-cupertino-ca-95014-118955872-d](https://jobs.ieee.org/jobs/controls-design-engineer-cupertino-ca-95014-118955872-d)

Posted: Aug 12, 2020

**Apple's** Special Projects Group is seeking a full-time engineer to join our Controls Engineering group in Cupertino, CA.

Candidate will be responsible for development of control and estimation algorithms for complex electromechanical systems.

## Key Qualifications

- Deep knowledge of systems theory and control systems design.
- Deep understanding of classical and modern control methodologies: PID, optimal control (LQR, LQG), model-predictive control, etc.
- Deep understanding of state estimation techniques: state observers, Kalman filter, nonlinear state estimation.
- Experience with LPV systems, optimization, moving horizon estimation, system identification, and adaptive control preferred.
- Experience implementing control systems on embedded microcontroller platforms.
- Proficiency in MathWorks tools: MATLAB/Simulink is a must.
- Proficiency in C/C++ is a must. Python preferred.
- Proficiency in modern software development workflows and practices.
- Excellent collaborative skills.
- Capable of working in a loosely structured organization.
- Highly professional, with the ability to deliver solid work on tight schedule.

## Description

We are seeking a highly motivated controls design engineer to lead the development of control and estimation algorithms for complex dynamical systems. Collaborate in highly cross-functional environment and work closely with sensor and actuator design engineers, software engineers, and other control design engineers. Lead control projects from algorithm architecture to design, implementation, tuning, and validation. Define specifications and test suites to tune parameters and compare performance of different algorithms. Work with software team to ensure robust control system implementation on embedded microcontrollers. Work with modeling team to integrate models and algorithms into simulation environment for rapid development and validation.

## Education & Experience

MS or PhD degree in Electrical Engineering, Mechanical Engineering, Aerospace Engineering, or Mechatronics Engineering, with an emphasis in controls or robotics.

# Plan

1. Introducción a la Teoría de Control y modelos de sistemas
2. Análisis de sistemas
3. Estabilidad
4. Sistemas en lazo cerrado: control, estabilidad y desempeño
5. Regulador PID

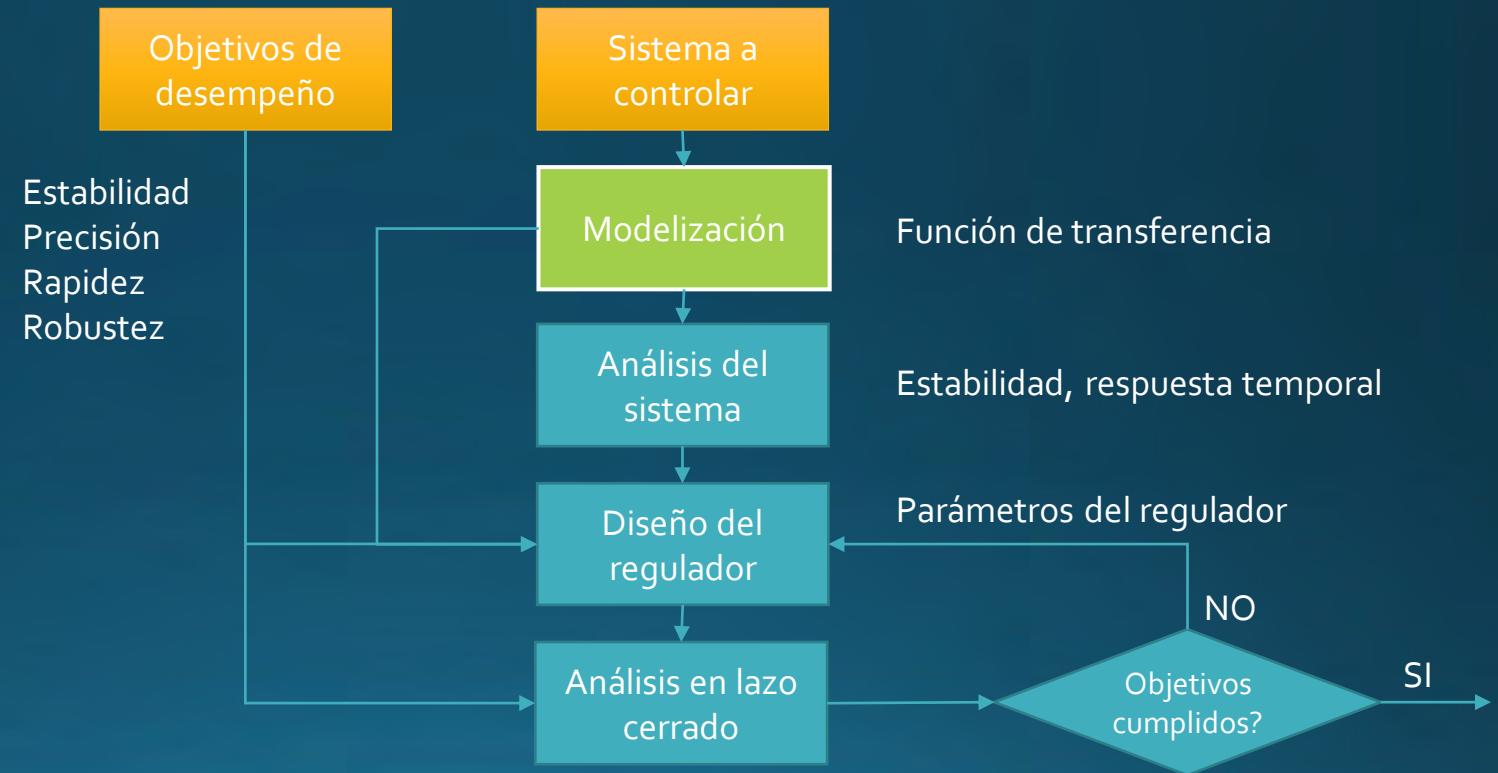
# Sistemas lineales

# Plan

- Modelos de sistemas lineales invariantes en el tiempo
- Respuestas de sistemas lineales
- Función de transferencia
- Álgebra de bloques
- Linealización

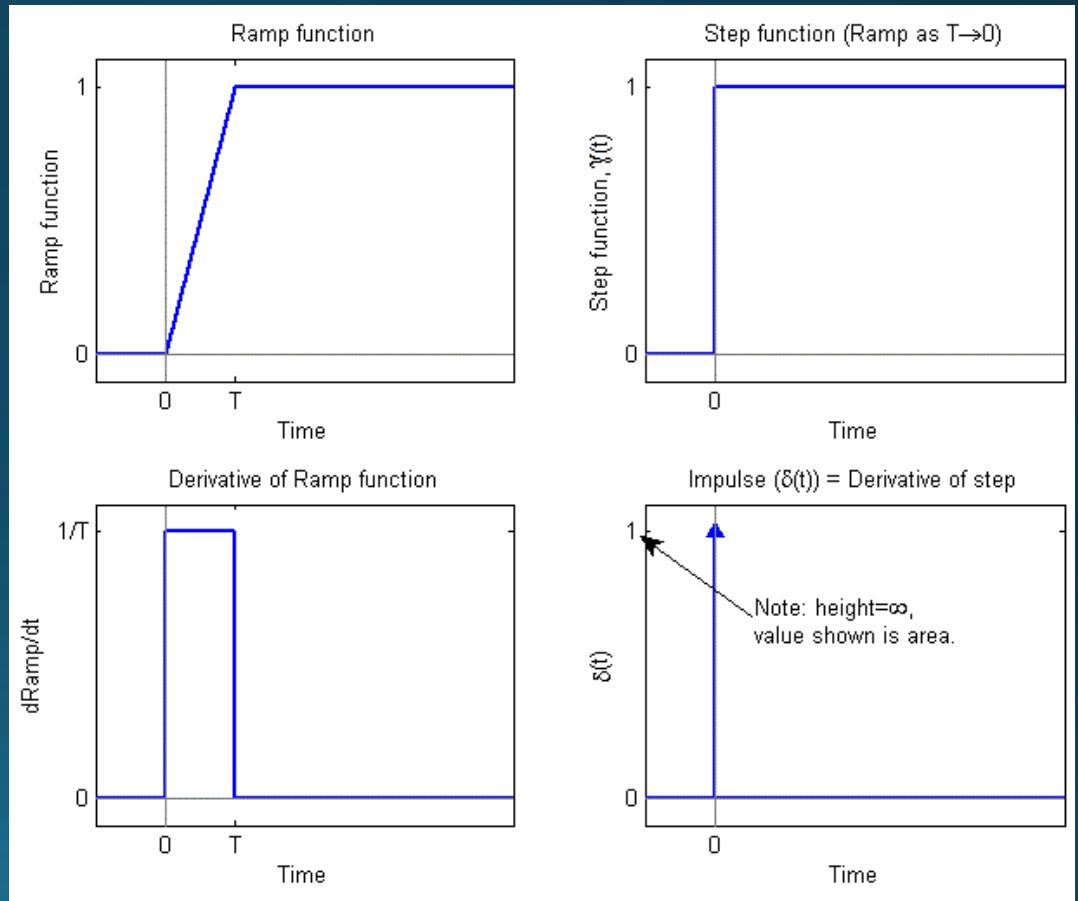
# Modelización

- Una buena comprensión del sistema a controlar es indispensable para lograr que se comporte de acuerdo a lo deseado



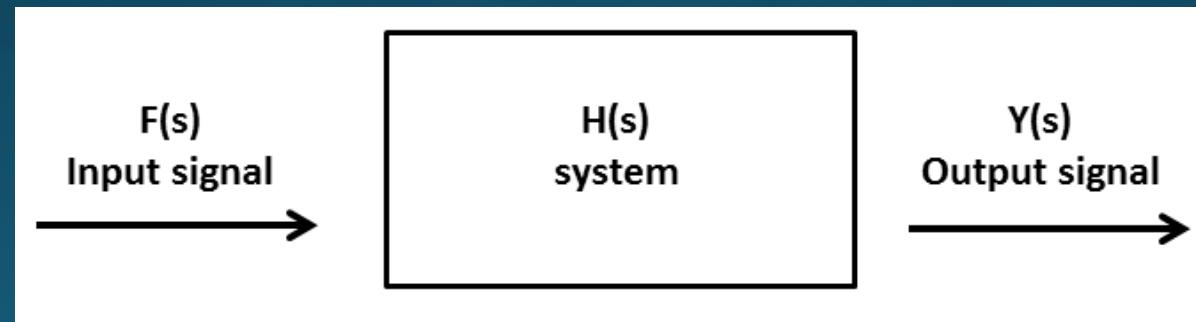
# Señales

- Señal: una variable física que porta alguna información (p.e. velocidad, posición, temperatura, intensidad,...)}
- Algunas señales importantes
  - Escalón unitario (función de Heaviside)
  - Rampa unitaria
  - Impulso (de Dirac)
    - No es propiamente una función
    - Se utiliza para representar señales que transportan información únicamente por un instante



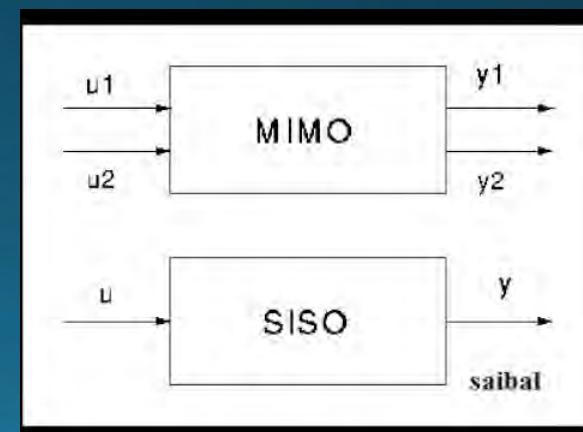
# Sistemas

- Es el objeto que deseamos estudiar para imponer algún comportamiento predeterminado
- Representa la relación entre señales de entrada y señales de salida
- En control, se representa a un sistema por un esquema funcional o bloque funcional



# Clasificación de sistemas

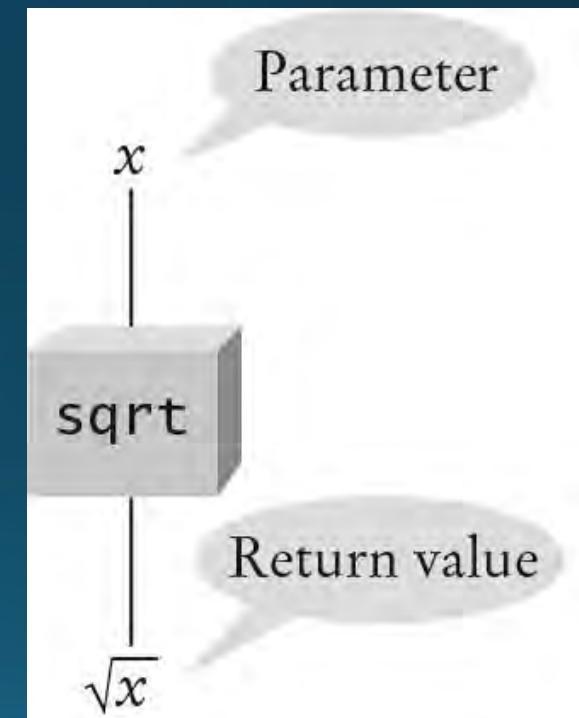
- Por su naturaleza
  - Artificiales: construidos por el hombre, con un comportamiento conocido, fácil de prever, modelos precisos
  - Naturales: ambientales, con un comportamiento impuesto, más o menos fácil de prever, modelos bastante precisos
  - Vivos: biológicos y/o sociales, comportamiento dinámico, difícil de prever, modelos poco precisos
- Por su número de señales
  - Una o múltiples señales entradas (SI/MI)
  - Una o múltiples señales de salida (SO/MO)



# Sistema estático

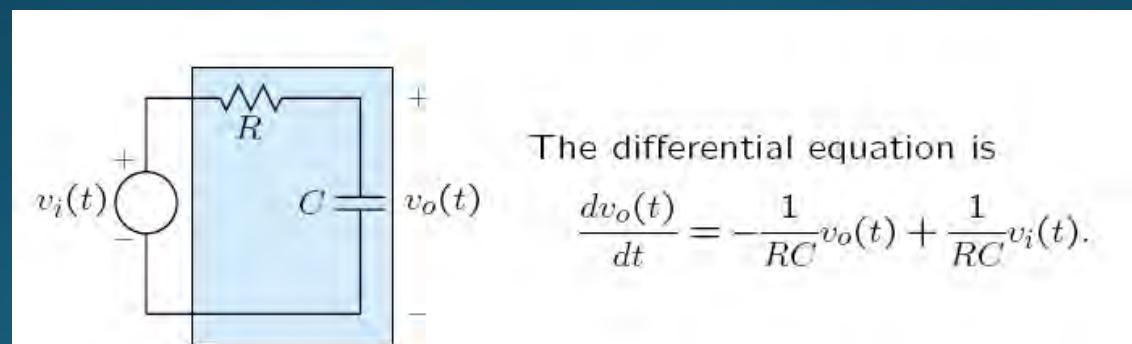
- Es un sistema cuyo estado (conjunto de variables que permiten describir totalmente el sistema) en un instante dado depende únicamente de las señales de entrada en ese preciso instante
- Se trata de sistemas sin memoria porque la salida  $y(t)$  es independiente de los valores anterior de la entrada  $x(\tau)$  con  $\tau < t$
- El sistema estático puede estudiarse por medio de su ley de evolución, que toma la forma de una **ecuación algebraica** del tipo:

$$y(t) = \sqrt{x(t)}$$



# Sistema dinámico

- Es un sistema cuyo estado depende tanto de las señales de entrada como de los estados previos del sistema
- Se trata de sistemas con memoria
- El sistema dinámico se estudia a través de su ley de evolución, que toma la forma de una **ecuación diferencial** y de un estado inicial conocido



# Sistemas lineales invariantes en el tiempo

- Un sistema es lineal si:
  - Es homogéneo: una variación en la señal de entrada produce una variación proporcional en la señal de salida
  - Es aditivo: la salida ante la suma de dos señales de entrada es igual a la suma de las salidas de cada señal tomadas independientemente
  - Conocer la respuesta del sistema ante señales simples permite prever la respuesta ante señales más complejas (composiciones lineales de esas entradas)
- Un sistema es invariante en el tiempo (estacionario) si al desplazar la señal de entrada en el tiempo produce el mismo desplazamiento temporal en la señal de salida
- Un sistema es causal si el efecto (variación de la salida) sigue a la causa (variación de la entrada)

# Sistemas físicos

- Los sistemas físicos son causales (sólo están definidos para  $t \geq 0$ )
- La mayoría de las leyes físicas y químicas que utilizamos para comprender el Universo son lineales e invariantes en el tiempo
- Los sistemas lineales invariantes en el tiempo (causales) se describen por ecuaciones diferenciales lineales de coeficientes constantes

*"Los sistemas lineales son importantes porque podemos resolverlos"*, Richard Feynman

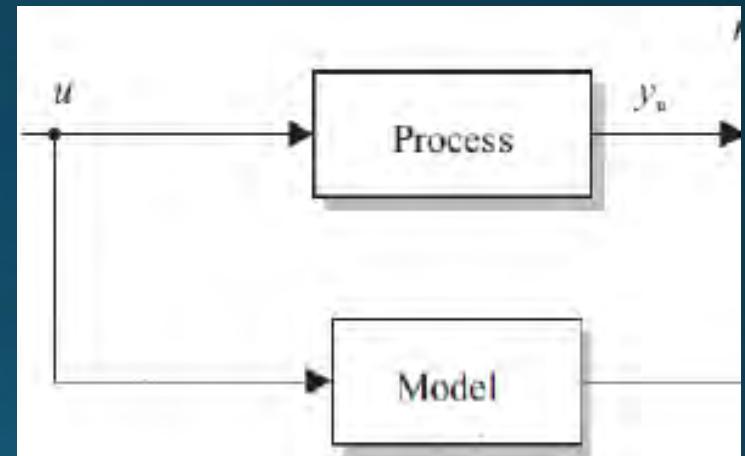
- Consideraremos únicamente sistemas dinámicos LTI, y los llamaremos simplemente “sistemas”

LTI Systems

[https://www.youtube.com/watch?v=3eDDTFcSC\\_Y](https://www.youtube.com/watch?v=3eDDTFcSC_Y)

# Modelos

- Son el conjunto de relaciones matemáticas entre las señales de entrada y de salida que explican el comportamiento del sistema
- Su complejidad y precisión dependen de la aplicación
- Modelos analíticos: construidos a partir del conocimiento analítico de las leyes físicas y químicas implicadas en el sistema. Son modelos de conocimiento.
- Modelos empíricos: construidos a partir de datos experimentales para obtener un modelo del comportamiento (dominante del sistema). Requiere poca modelización analítica.

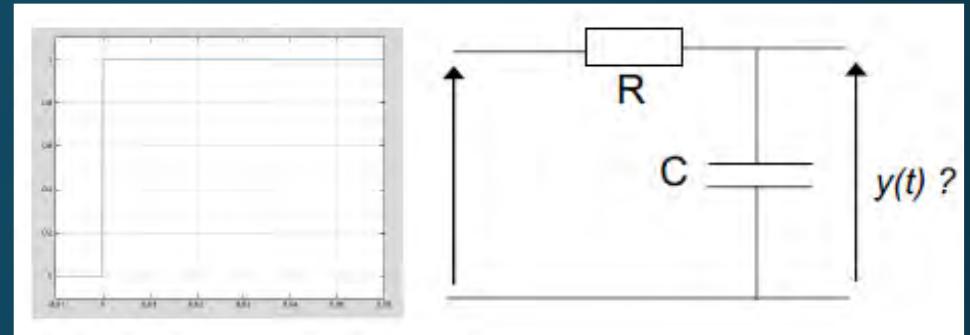


# Respuesta de un sistema

- **Solución 1.** Emplear las herramientas clásicas de ecuaciones diferenciales para resolver la ecuación diferencial del sistema.
- **Solución 2.** Emplear los teoremas de Procesamiento de señales para obtener la salida del sistema a partir de la convolución con la respuesta impulso.
- **Solución 3.** Convertir la ecuación diferencial en una ecuación algebraica, empleando transformada de Laplace
- **Solución 4.** Emplear métodos numéricos.

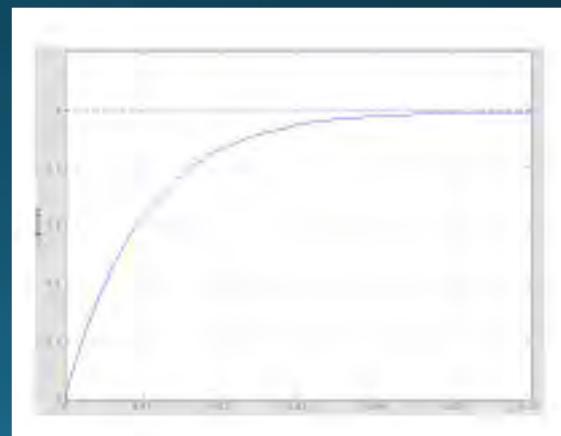
# Ejemplo: Circuito RC

- Un circuito RC es un sistema lineal de primer orden.
- Deseamos conocer la respuesta del sistema (voltaje en el condensador) ante una entrada de voltaje tipo escalón unitario
- Solución 1: *Sólo es necesario* resolver la ecuación diferencial empleando los métodos matemáticos clásicos.



$$RC \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = x(t)$$
$$y(0) = 0$$
$$x(t) = H(t)$$

$$y(t) = (1 - e^{-\frac{t}{RC}})H(t)$$



# Circuito RC. Solución 2

- La respuesta de un sistema LTI a una entrada  $x(t)$  puede calcularse empleando la convolución con la respuesta impulso  $g(t)$  por medio de la expresión:
- La respuesta impulso del filtro RC está dada por la expresión:

$$g(t) = \frac{1}{RC} e^{-\frac{t}{RC}} H(t)$$

- Solución 2: Sólo es necesario calcular la convolución (resolver la integral)

$$y(t) = g(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t - \tau)x(\tau)d\tau$$

# Circuito RC. Solución 3

- Transformar la ecuación diferencial en una ecuación algebraica, empleando la transformada de Laplace (TL)
  - Aplicar la transformada de Laplace a la ecuación diferencial, tomando en cuenta las condiciones iniciales de las señales
  - Despejar  $Y(s)$  de la ecuación algebraica obtenida
  - Descomponer  $Y(s)$  en elementos simples
  - Utilizar la tabla de transformadas inversas para obtener la respuesta del sistema

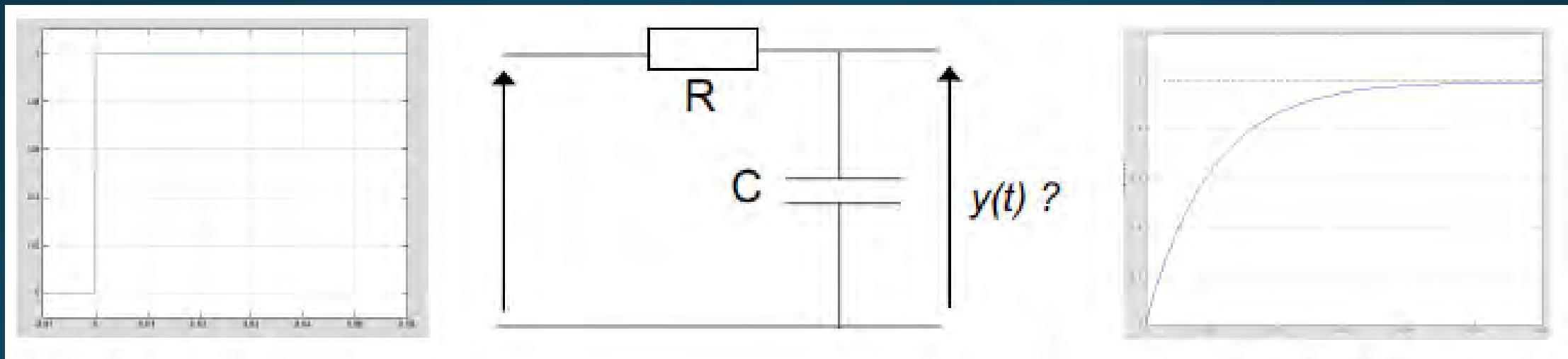
$$\begin{aligned} RC \frac{dy(t)}{dt} + y(t) &= x(t) & \xrightarrow{\quad} Y(s) &= \frac{1}{s(RCs + 1)} & \xrightarrow{\quad} y(t) &= (1 - e^{-\frac{t}{RC}})H(t) \\ y(0) &= 0 \\ x(t) &= H(t) & Y(s) &= \frac{1}{s} - \frac{1}{s + \frac{1}{RC}} \end{aligned}$$

The Laplace Transform

[https://www.youtube.com/watch?v=VJgphDRys\\_I](https://www.youtube.com/watch?v=VJgphDRys_I)

# Circuito RC. Solución 4

- Utilizar herramientas de software para resolver numéricamente la ecuación diferencial



# Respuesta de un sistema. Conclusión

- Solución 1. Emplear las herramientas clásicas de ecuaciones diferenciales para resolver la ecuación diferencial del sistema.
- Solución 2. Emplear los teoremas de Procesamiento de señales para obtener la salida del sistema a partir de la convolución con la respuesta impulso.
- Solución 3. Convertir la ecuación diferencial en una ecuación algebraica, empleando transformada de Laplace. **Cálculos más simples**
- Solución 4. Emplear métodos numéricos.

# Función de transferencia (FT)

- Es la razón entre la transformada de Laplace de la señal de salida de un sistema entre la transformada de Laplace de la señal de entrada, con condiciones iniciales nulas
- Depende únicamente del sistema, es independiente de las señales de entrada y salida, y lo caracteriza completamente.
- Se trata, de hecho, de la transformada de Laplace de la respuesta impulso del sistema con condiciones iniciales nulas
- Por lo tanto, en Teoría de Control, se utiliza la función de transferencia para representar al sistema

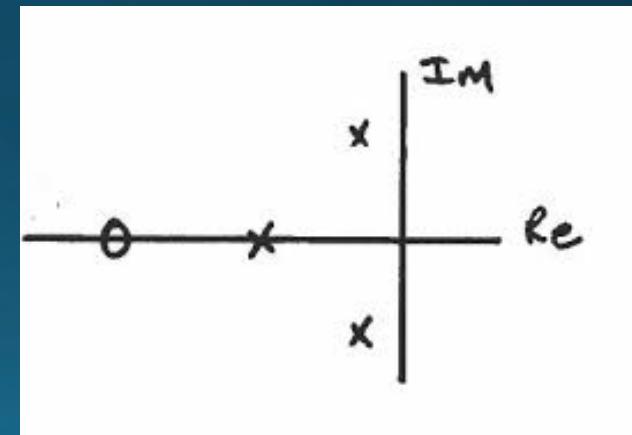
$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$$

Transfer function  
<https://www.youtube.com/watch?v=RJleGwXorUk>

# Características de la función de transferencia

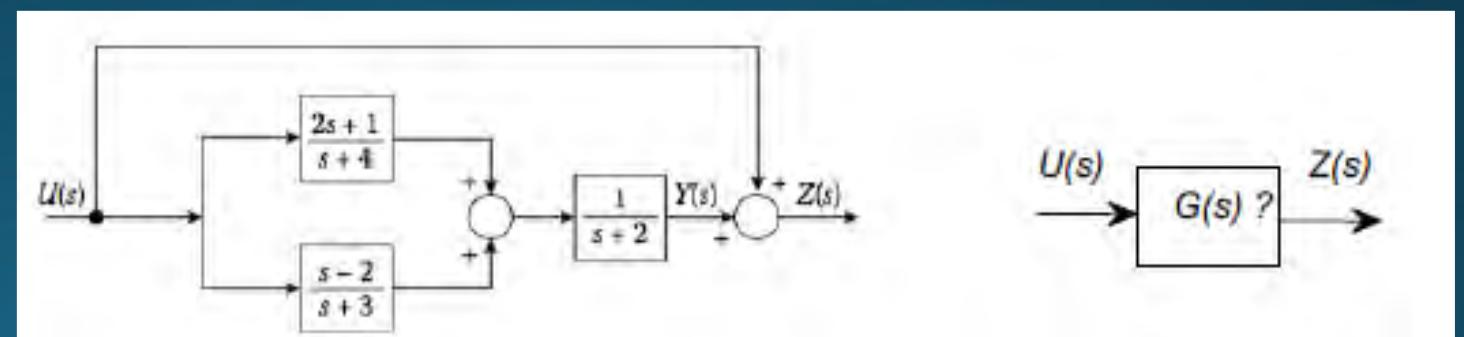
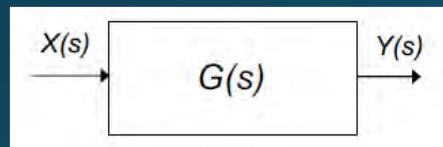
- Generalmente, es una función racional polinomial
- Por tratarse de sistemas causales, el orden del polinomio del numerador debe ser igual o superior al orden del denominador
- La ganancia estática del sistema es el valor de  $G(s)$  cuando  $s = 0$  (la ganancia del sistema cuando  $t \rightarrow \infty$ )
- Las raíces (complejas) del polinomio numerador: ceros de la FT
- Las raíces (complejas) del polinomio denominador: polos de la FT
- Al trazar los polos y ceros de la FT en el plano complejo, se obtiene el diagrama de polos y ceros

$$H(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_M z^{-M}}{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_N z^{-N}} = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}}$$

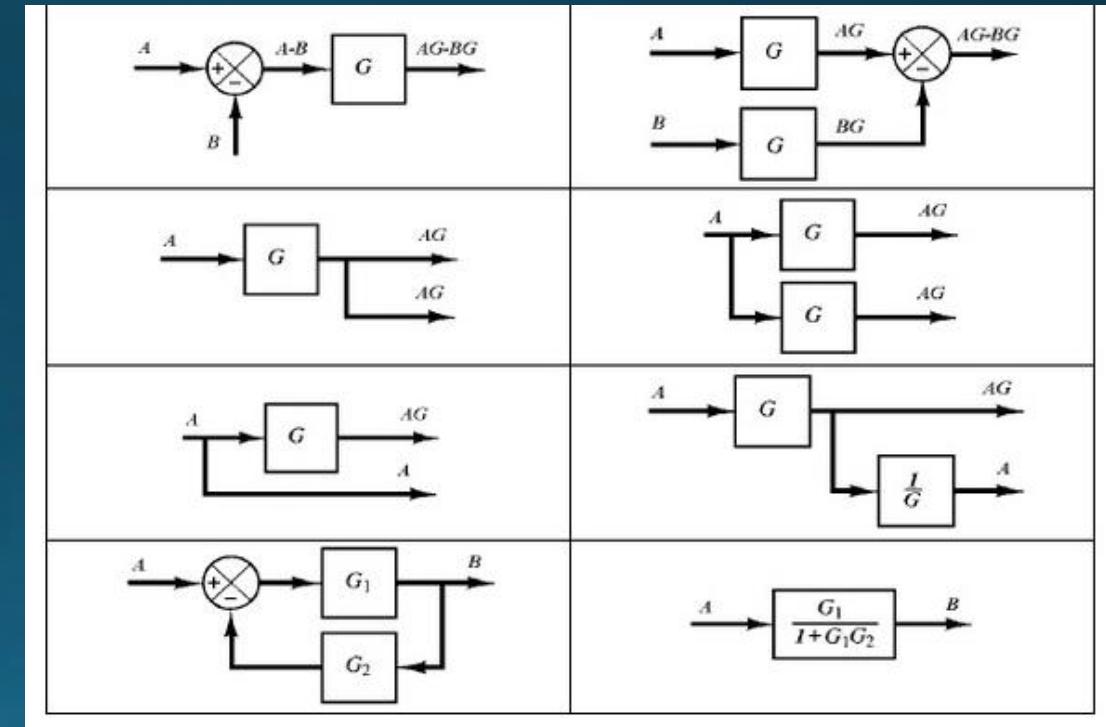
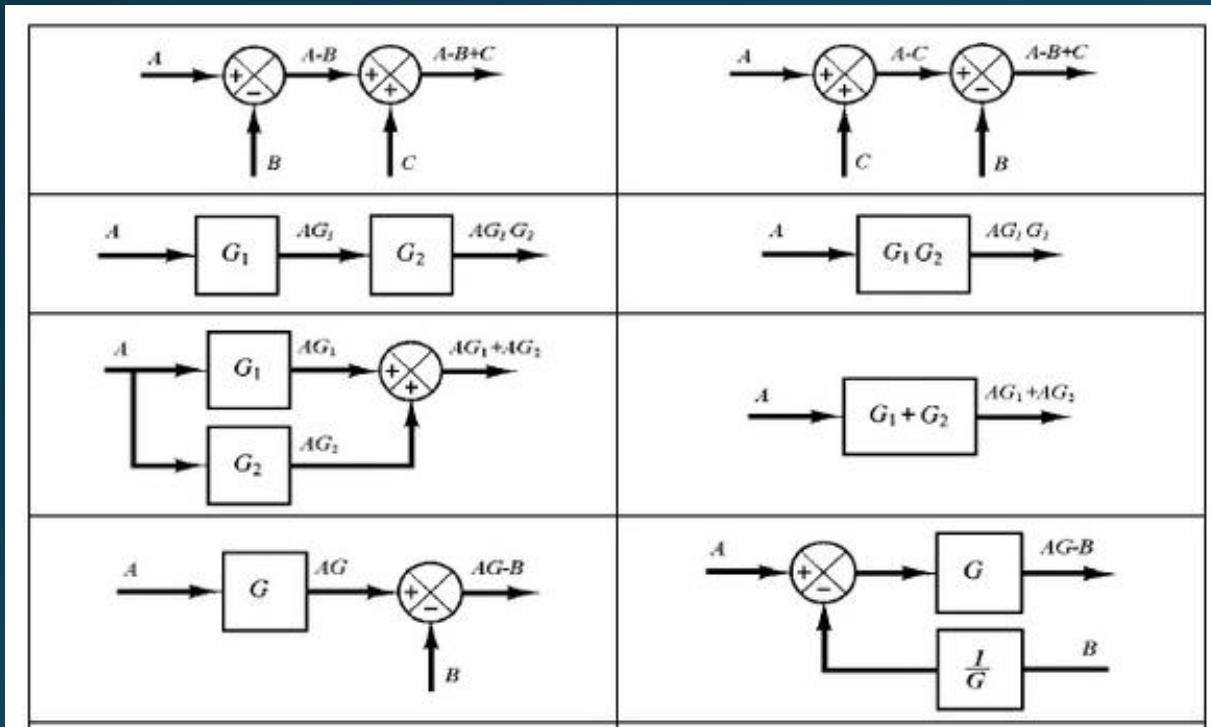


# Diagrama de bloques

- En Teoría de control, los sistemas se representan como bloques que asocian la TL de la señal de entrada con la TL de la señal de salida, vía su función de transferencia
- Un sistema automático está constituido por distintos componentes, cada uno de ellos caracterizado por una FT e interconectados entre sí
- Para determinar la FT total del sistema, es posible:
  - definir variables intermedias, escribir las ecuaciones y resolver el sistema de ecuaciones
  - Utilizar álgebra de bloques para simplificar el sistema

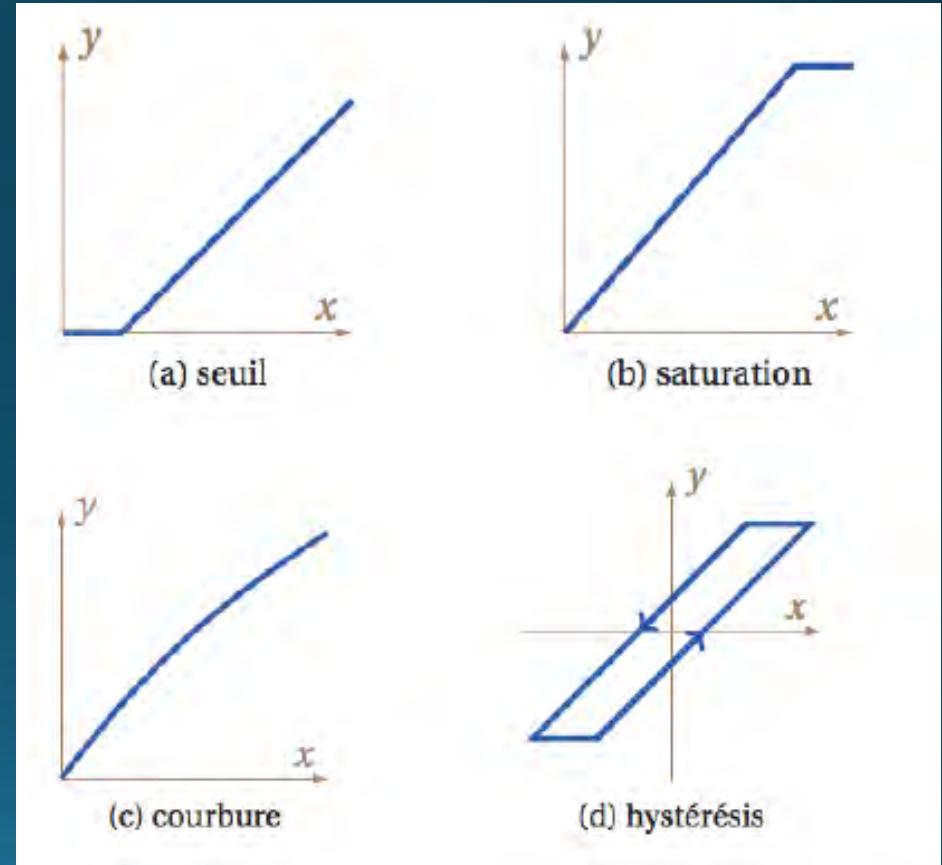


# Álgebra de bloques



# Sistemas reales

- Los sistemas reales:
  - No son lineales
  - No son invariantes en el tiempo
- Principales no linealidades
  - Umbral (zona muerta): La salida no varía mientras la entrada se mantenga debajo de un umbral (p.e. fricción seca, juego de piezas, elasticidades...)
  - Saturación: la salida no puede variar más allá de un cierto límite (p.e. límites físicos o energéticos)
  - Histéresis: la variable de salida se comporta de forma distinta según si se incrementa o se decrementa su valor
  - Curvatura: el sistema no es homogéneo y las variaciones de la salida no son directamente proporcionales



# Linealización de un sistema

- Cuando el sistema no es lineal, pero sólo se requiere estudiarlo en las cercanías de un punto único, es posible sustituirlo por un sistema lineal en ese punto

$$f(x) \approx f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

- Por ejemplo: linealizar la función  $\sin(\theta)$  en la vecindad de  $\theta = 0$

$$\begin{aligned}\sin \theta &\approx (\cos 0)(\theta - 0) + \sin 0 \\ \sin \theta &\approx \theta\end{aligned}$$

Esta aproximación sólo es válida alrededor de  $\theta = 0$

