CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS AVANZADOS DEL IPN
UNIDAD TAMAULIPAS

Ensayo #2

Estudiante: *Luis Alberto Ballado Aradias*
Curso: *CONTROL AUTOMÁTICO (Sep - Dec 2022)*
Profesor: *Dr. José Gabriel Ramírez Torres*
30 de diciembre de 2022

Routh-Hurwitz Criterion, An Introduction

https://www.youtube.com/watch?v=WBCZBOB3LCA

Para que un sistema sea considerado estable todas las raíces del polinomio característico necesitan situarse del lado izquierdo del plano complejo.
Considerando que la ecuación característica está en el denominador de la función de transferencia, las raíces son las mismas que los polos de la función de transferencia y esas raíces deben aparecer a la izquierda o ser todas componentes reales negativos para tener un sistema estable.
Un ejemplo podría ser, considerar una función con un solo polo $H(s) = \frac{1}{s+a}$ a puede tomar valores positivos o negativos; en nuestro ejemplo la raíz es negativa, podríamos aplicar la inversa de Laplace para obtener la representación en el dominio del tiempo $L^{-1}(H(s)) = e^{-at}$ al tener una raíz negativa, existirá en la parte izquierda del plano y si se grafica en el dominio del tiempo, se puede apreciar que la señal tiende a cero a medida que el tiempo tiende a infinito y es considerado estable ya que ninguna otra función de transferencia modificara su comportamiento. Si, de lo contrario; la función fuera $H(s) = \frac{1}{s-a}$ **s** seria positiva, la respuesta seria positiva y el sistema seria inestable. Considerando una función de transferencia más completa, es decir con más raíces, no importa que por partes sean estables, al detectar una parte que no tenga raíces del lado izquierdo del plano todo el sistema se considera inestable. Podemos determinar la estabilidad de un sistema para cualquier grado del polinomio sin resolverlo directamente y una forma de realizarlo es usando el criterio de Routh-Hurwitz.

Este método se basa en que todas las raíces del polinomio se encuentran del lado izquierdo del plano **si y sólo** si la combinación de sus coeficientes tiene el mismo signo.

Lo notable del criterio del Routh-Hurwitz es que **no se tiene que resolver la factorización** para encontrar las raíces del polinomio característico, y nos permite conocer la estabilidad solo en ver los signos de los coeficientes del polinomio.
Lo primero que debemos notar es el signo de los coeficientes, si todos los signos no son iguales podemos decir q con certeza que el sistema es inestable. Si contamos con una ecuación característica con al menos un coeficiente no negativo, podemos instantáneamente decir que el sistema es inestable sin tener que aplicar el criterio de Routh-Hurwitz.

1. Routh Array

Es una tabla que se pobla con los coeficientes del polinomio siguiendo unas reglas.

1. Hacer la estructura de la tabla, al completar la tabla de izquierda a derecha, el número de las filas depende del orden del polinomio.
2. Para comenzar necesitamos escribir el polinomio en potencias de s de forma descendente.
3. Las filas se acomodan de manera que la de mayor orden quedará arriba hasta decrecer el orden. El número de columnas depende del orden del polinomio.
4. Escribir el primer coeficiente, y así sucesivamente siguiendo el orden del polinomio.

El orden será de forma zigzag. Al final tendremos al inicio los coeficientes impares y por debajo los impares.
Nota: Si no se cuenta con un orden en el polinomio, es decir $s^4 + 2s^3 + 5s + 3$ deberemos completarlo con un 0 en el orden que haga falta, en este caso s^2 es cero, **no es que no exista, solo que es cero.**

Ejemplo

Tomando la ecuación caracteristica del sistema: $4s^4 + 8s^3 + 2s^2 + 10s + 3 = 0$
Apliicando el Criterio Routh Hurwitz, formando el Routh array:

$$\begin{array}{cccc}
s^4 & 4 & 2 & 3 \\
s^3 & 8 & 10 & 0 \\
s^2 & \frac{8x2-4x10}{8} = -3 & \frac{8x3-0x4}{8} = 3 & - \\
s^1 & \frac{-3x10-3x8}{-3} = 18 & - & - \\
s^0 & 3 & - & -
\end{array}$$

En la primera columna del array existe un elemento negativo, también existen dos cambios de signo. El primero de 8 a -3 y el segundo de -3 a 18. Dado eso, el sistema es inestable, de los 4 polos, 2 estan situados en la parte derecha del plano s

Una vez que tengamos completa la tabla, se puede visualizar las raíces y los cambios de signo con los que cuenta el sistema, **recordemos que basta con uno para que el sistema sea considerado inestable.**

Routh-Hurwitz Criterion, Special Cases

https://www.youtube.com/watch?v=oMmUPvn6lP8

1. Caso especial - Un cero en la fila con al menos un no cero apareciendo después en la misma fila.

   Suponiendo que, a partir del llenado de la tabla se tiene

   $$\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & - \end{array}$$

   $$\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 4 & - \\ 0 & 5 & - \end{array}$$

   Cuando esto ocurre, el sistema se considera inestable y bastara con terminar el análisis, si lo que necesitamos es solo saber si el sistema es estable o no. Pero si estamos interesados en la cantidad de raíces localizadas en la parte derecha del plano podremos completar la tabla reemplazando el coeficiente que es cero con el carácter Épsilon y efectuamos los mismos cálculos.

   Ejemplo: $s^5 + s^4 + 3s^3 + 3s^2 + 2s + 5 = 0$ Determinando si el sistema es estable o no aplicando el criterio de Routh Hurwitz.

   $$\begin{array}{cccc} s^5 & 1 & 3 & 2 \\ s^4 & 1 & 3 & 5 \\ s^3 & 0 \rightarrow \epsilon & \text{-3} & 0 \\ s^2 & \frac{3\epsilon+3}{\epsilon} & 5 & 0 \\ s^1 & \frac{\frac{-3(3\epsilon+3)}{\epsilon}-5\epsilon}{\frac{3\epsilon+3}{\epsilon}} & - & - \\ s^0 & 5 & - & - \end{array}$$

   Ahora si determinamos los elementos de la primera columna:
   $s^3 \rightarrow \epsilon > 0$
   $s^2 \rightarrow \frac{3\epsilon+3}{\epsilon} = 3 + \frac{3}{\epsilon} > 0$ $s^1 \rightarrow \frac{-9\epsilon-9-5\epsilon^2}{3\epsilon+3} < 0 (yaque \epsilon > 0)$

   Dado que existe un cambio de signo en s^1, el sistema es inestable teniendo dos polos en el lado derecho del plano s debido a los dos cambios de signo

2. Caso especial - Cuando todos los elementos en una fila son ceros

   En este caso existe una simetria en la posición de las raices en el plano s. Pueden existir pares de raices reales con signos contrarios o raices conjugadas en el plano imaginario o formar raices cuadraticas dentro del plano s. El polinomio con esas caracteristicas son los elementos de la fila por arriba de la fila de ceros en el RouthArray es llamado polinomio auxiliar.

Este polinomio da información del número y ubicación de los pares de raices de la ecuación caracteristica, la cual es simetrica al plano s. El orden del polinomio auxiliar siempre es par.

Ejemplo:

$s^6 + 2s^5 + 8s^4 + 12s^3 + 20s^2 + 16s + 16 = 0$

s^6	1	8	20	16
s^5	2	12	16	0
s^4	2	12	16	0
s^3	0	0	0	0
s^2	-	-	-	-
s^1	-	-	-	-
s^0	-	-	-	-

Ya que s^3 es completamete cero. El polinomio auxiliar es formado por s^4 por ejemplo: $2s^4 + 12s^2 + 16 = 0$ ó $s^4 + 6s^2 + 8 = 0$ derivando el polinomio tenemos:
$4s^3 + 12s = 0$

Los ceros en s^3 ahora son reemplazados por los coeficientes del polinomio auxiliar

s^6	1	8	20	16
s^5	2	12	16	-
s^4	1	6	8	-
s^3	4	12	0	-
s^2	3	8	-	-
s^1	$\frac{1}{3}$	-	-	-
s^0	8	-	-	-

Debido a que no existe un cambio de signo, el sistema es considerado marginalmente estable. Si resolvemos para encontrar las raices del polinomio auxiliar: $s^4 + 6s^2 + 8 = 0$, las raices son $s = \pm j\sqrt{2}$ y $s = \pm j2$ Estas raices son tambien raices del polinomio caracteristico

CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS AVANZADOS DEL IPN
UNIDAD TAMAULIPAS

Ensayo #3

Estudiante: *Luis Alberto Ballado Aradias*
Curso: *CONTROL AUTOMÁTICO (Sep - Dec 2022)*
Profesor: *Dr. José Gabriel Ramírez Torres*
30 de diciembre de 2022

The Step Response | Control Systems in Practice

`https://www.youtube.com/watch?v=USH75nuHV6w`

¿Qué es la respuesta al escalón?

Es el cómo responde un sistema a la entrada de un escalón así que podemos tener como entrada un escalón unitario que es cuando la entra cambia de cero a uno en un periodo corto de tiempo y podemos analizar el comportamiento del sistema. Podríamos no centrarnos en ese comportamiento, también podemos considerar un salto instantáneo a otro valor.

Un ejemplo es el control de la altitud de un DRON, suponiendo que se encuentra en una altitud de 10 metros y modificamos para que su nueva altitud sea el doble; el controlador debe modificar su altitud de 10 a 20 metros y la respuesta al escalón será como el DRON reacciona a esa modificación. ¿Qué tan rápido se eleva?, ¿Tiene un sobregiro?, ¿Cuánto tiempo toma estabilizarse a la altitud deseada?, ¿Existirá algún error en el sistema? Todos estos cuestionamientos los podemos usar como los requerimientos del sistema. Cada uno de esos elementos o comportamientos que tiene el sistema son características estudiadas en teoría de control. Tiempo de subida, que es el tiempo requerido para posicionarse a un 90 % del valor deseado.

Tiempo de respuesta, tiempo requerido para que la señal de salida permanezca al interior de un valor de tolerancia. Instante del sobre impulso, instante en que la respuesta de salida alcance el primer sobre impulso.

Valor relativo del sobre impulso, porcentaje máximo por arriba del valor deseado. Diferencia relativa entre el valor el primer sobre impulso y el valor final de la señal de salida.

Understanding Control Systems, Part 1: Open-Loop Control Systems

https://www.youtube.com/watch?v=FurC2unHeXI

Los sistemas de control de lazo abierto son controles simples que podemos encontrar hasta en aparatos electrodomésticos dentro de nuestros hogares. Un ejemplo de ello es una tostadora cuyo control es el tiempo que estará activa para calentar el pan. El color del pan cambiará en base al tiempo en que el pan está en la tostadora activa. Aquí la tostadora es un control de lazo cerrado ya que no existe una retroalimentación que tenga un sensado del progreso del tostado del pan.

Suponiendo que tenemos una nueva tostadora, no estamos familiarizados en cuánto tiempo le debemos aplicar y experimentamos en diferentes ocasiones, un tiempo diferente hasta encontrar el tostado ideal. Si graficamos los comportamientos del experimento podremos encontrar un gráfico que responde al modelo de nuestro experimento.

Podemos encontrar sistemas de lazo abierto hasta en la mezcladora de agua para regular el agua caliente; suponiendo, que controlamos la llave caliente tal vez mezclándola con el agua fría para obtener la temperatura perfecta para tomar un baño. Parece que el control de lazo abierto funciona bien y sólo con hacer unas calibraciones pudiera funcionar correcto en todo lo que lo apliquemos; pero no es así, no siempre una calibración resulte para cualquier variación.

Retomando el ejemplo de la tostadora, solo basta en cambiar el tamaño o el tipo de pan entonces el comportamiento resultante no será el mismo al que estamos esperando.

Puede que dentro de nuestro sistema de agua doméstica otro integrante de la familia toma también una ducha en otro baño esto basta para desestabilizar nuestra calibración haciendo que variemos la demanda de agua caliente hasta obtener la temperatura deseada (cambios en el sistema afectarán el comportamiento)

Sistemas de lazo abierto son simples, usan prueba y error para obtener un buen funcionamiento. No son eficientes cuando se tienen variaciones en el sistema o comportamientos no predecibles.

Understanding Control Systems, Part 2: Feedback Control Systems

`https://www.youtube.com/watch?v=5NVjIIi9fkY`

Tomando el ejemplo anterior de la tostadora en lugar de elegir el tiempo de encendido de la tostadora, elegiremos el color del tostado preferido esto implicará visualizar el progreso el tostado para saber el momento adecuado para pagar la tostadora. Esta es una idea básica del control de lazo cerrado.

Si graficamos el progreso y lo comparamos con el deseado, podremos obtener un error, a medida que el error va disminuyendo nos vamos acercando al tostado perfecto. Este sistema retroalimentado contará con un error que el sistema de control recalculará hasta llegar al set point indicado.

Otro ejemplo, retomando el control de flujo/temperatura de la regadera del baño para eventos no esperados. Similar al ejemplo de la tostadora cuando las condiciones cambian, cambian todo en el sistema.

A medida que la demanda de agua caliente aumenta en otra parte de la casa, esto hará que variemos el control de agua para regular la temperatura a medida que el error es grande, grande será la compensación que se debe hacer.

Sistemas retroalimentados nos pueden ayudar para las variaciones que puedan ocurrir dentro del sistema, compensaciones para eventos inesperados.

Understanding Control Systems, Part 3: Components of a Feedback Control System

https://www.youtube.com/watch?v=u1pgaJHiiew

Tomando un ejemplo, en que nos invitaran a una fiesta y no queremos perdernos nada, queremos llegar lo más rápido posible; esto es cumpliendo las reglas de tránsito de velocidad, así que lo más rápido que podemos trasladarnos es el límite de velocidad permitido, pero a lo largo de nuestra trayectoria podemos encontrarnos diferentes situaciones haciendo que nuestra velocidad no puede ser constante, como interrupciones en el camino, como colinas etc. a medida que pasemos por una colina la velocidad bajará teniendo que aumentar la velocidad del carro para contrarrestar y poder vencer la pendiente de la colina; todo esto lo podemos hacer con el uso de la retroalimentación de velocidad, donde en un carro el conductor es el control del sistema solo basta con tener en la vista el tacómetro para mantener la velocidad y nuestro prefijado es el acelerador, basado en el error podremos aumentar o disminuir la velocidad deseada. Entre menos error será menor la corrección a la velocidad a aplicar.

Podemos describir nuestro sistema como:

- El velocímetro - cantidad o velocidad deseada.
- El controlador - la persona quien maneja el carro.
- El actuador - nuestro pie regulando la velocidad.
- La planta - el carro (el sistema a controlar).
- El sensor - la retroalimentación para monitorear la velocidad.
- Perturbaciones - resistencia al aire, errores en el actuador u otras perturbaciones en el camino.

Controlling Self Driving Cars https://www.youtube.com/watch?v=4Y7zG48uHRo

La tecnología detrás del control de autos autónomos es increíble. En un futuro no lejano existirán autos autónomos viajando en una forma normal en las calles. Para llegar a esto se debe de contar con sensores capaces de localizar el vehículo en cualquier ambiente, así como reconstruir un mapa del punto A al punto B.

Parece que la conducción de un auto autónomo es tarea fácil, pero no lo es.
Si queremos seguir una trayectoria, pero estamos muy distantes de ella giramos a tope, pero ¿cuánto debemos girar para mantener la trayectoria?
Al tener un control oscilante el comportamiento es de un control bang bang y la sensación no es de lo mejor para los pasajeros. Una forma de girar las llantas es con el uso de un control proporcional en lugar de girar determinados grados.
Con control proporcional obtendremos una corrección mayor, en cuanto mas nos alejemos de la trayectoria deseada; tomando como medida el error para definir que tan alejado nos encontramos, por lo tanto, el ángulo de dirección que usamos es el error multiplicado por una ganancia proporcional llamada ganancia proporcional, este valor altera en gran medida el rendimiento del vehículo haciéndolo oscilante, el comportamiento mejora a medida que la ganancia aumenta.

Un control proporcional nos arroja mejores resultados que un control bang-bang. Pero con un control tipo proporcional aun no funcionada de manera óptima, puede que el controlador sobrepase repentinamente la trayectoria deseada, para corregir estos sobregiros debemos considerar otros factores como un termino derivativo y agregarlo al termino proporcional.

$Giro = P * e_p + D * e_D$

Ahora se cuentan con dos términos que pueden sincronizarse simultáneamente. Al contar con una ganancia derivativa baja el sistema estará subamortiguado y seguirá oscilando.
Al contar con una ganancia derivativa alta, el sistema de encontrara sobreamortiguado y tomara mucho tiempo en corregir las compensaciones.
Elegir la ganancia adecuada permitirá que el vehículo se acerque a la trayectoria deseada rápidamente con una tasa de error cercana a cero (amortiguación critica). Pero esto no basta para un buen control ya que factores externos pueden inestabilizar el sistema fácilmente y puede hacer que tenga un erro para ello se considera un tercer termino integral.

Este tercer termino resume el error transversal para dar una indicación si estamos pasando mas tiempo en un lado de la trayectoria. Este termino es la suma multiplicada por la ganancia.
Ahora será necesario ajustar las tres ganancias a la vez, lo que puede resultar difícil de hacer.
Si la ganancia es muy grande, el control puede ser inestable por fluctuaciones normales.

Si las ganancias son pequeñas tomara mucho tiempo responder a los cambios dinámicos.
Cuando la ganancia es la adecuada, el control podrá corregir de manera correcta los devariantes que se puedan presentar en el sistema. La combinación de estos términos se conoce como control PID.

PID Control - A brief introduction https://www.youtube.com/watch?v=UR0hOmjaHp0

Los sistemas de control pueden considerarse con o sin retroalimentación, dependiendo de la exactitud requerida. Un sistema de lazo abierto puede considerarse como una entrada aplicada a un sistema a ser controlado y alguna señal de salida será generada. Comúnmente en estos escenarios el comportamiento del sistema no es del todo bueno.

Considerando un ejemplo de la posición de un robot de un punto A a B, si existe alguna interferencia ajena al sistema este no se comportará conforme a los que esperamos de el ya sea que los movimientos de los motores no sea los indicados, que un motor gire más que otro bastará para no obtener la posición deseada. Controles de lazo abierto son perfectos para sistemas que no cambian mucho o que se esperen que sean precisos; para sistemas que requieren una mayor exactitud podemos hacer uso de sistemas con una retroalimentación donde podemos sensar la salida obteniendo un error e ir corrigiéndolo a medida que el sistema este en funcionamiento. Uno de los objetivos de la teoría de control es reducir estos errores a cero y errores en cero significan que el sistema se encuentra donde fue destinado.

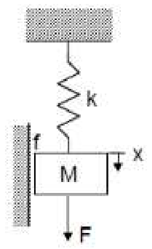
PID del acrónimo Proporcional Integral Derivativo, este tipo de control describe el como el error es manejado, en un esquema de bloques se pueden situar de forma paralela y sumados para producir la salida del control. Cada elemento del control cuenta con una ganancia y cada uno puede ser ajustado dependiendo de los requisitos del sistema. Proporcional - producirá una corrección grande cuando exista un gran error; no producirá error si este es cero, si el error es negativo efectuará una corrección negativa. Integral – a lo largo que el error se mueve en el tiempo, se sumara y multiplicara por una constante Ki, la parte integral es usada para remover errores constantes. Derivativo – a medida que el error cambia el elemento derivativo crecerá. La suma de estos elementos de control tendremos como salida un control tipo PID. No siempre se necesitan todos los elementos y podemos omitir alguno con una ganancia de cero. Un control sencillo siempre será fácil de ajustar y probar.

Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN
Unidad Tamaulipas

Tarea #1

Estudiante: *Luis Alberto Ballado Aradias*
Curso: *CONTROL AUTOMÁTICO (Sep - Dec 2022)*
Profesor: *Dr. José Gabriel Ramírez Torres*
29 de diciembre de 2022

Modelado 1



Recordando

- $\sum F = m * a$
- fricción= $F * v$ (fuerza*velocidad)
- $resistencia = F * x$ (fuerza*posición)

Al ser un sistema mecánico $\sum F = m * a$ donde:

- m es la masa
- f es la fricción $f * v(fuerza * velocidad)$
- F es la fuerza de entrada
- k es la fuerza de la resistencia $k * x$ (resistencia*posición)
- a es la segunda derivada de la posición

De esta forma, podemos representar el sistema como: $\sum F$ = Fuerza entrada - fricción - resistencia

$m * a = M\ddot{x}$

$F - kx - f * \dot{x} = M\ddot{x}$

$F_{entrada} - F_k * x - F_{friccin} * \frac{dx(t)}{dt} = M * \frac{d^2x(t)}{dt}$

teniendo asi: $F_{entrada} = M * \frac{d^2x(t)}{dt} + F_{friccion} * \frac{dx(t)}{dt} + k * x$

Aplicando la Transformada de Laplace:

$F = f * \frac{dx(t)}{dt} + M * \frac{d^2x(t)}{dt} + k * x$

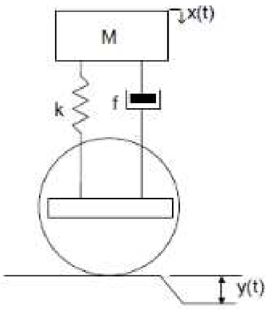
$F(s) = fsX(s) + Ms^2X(s) + kX(s)$

$F(s) = (fs + Ms^2 + k)X(s)$

$X(s) = \frac{F(s)}{Ms^2+fs+k}$

$\boxed{\frac{X(s)}{F(s)} = \frac{F(s)}{(Ms^2+fs+k)F(s)} = \frac{1}{Ms^2+fs+k}}$

Modelado 2



Sistema mecánico $\sum F = m * a$

datos del sistema:

- k - $resistencia = F * v$
- f - $amortiguador = F * posicin$
- m - $masa$
- entrada del sistema - bache $y(t)$
- salida del sistema - $x(t)$

$-F * \frac{dx(t)}{dt} - F_{posicin} = m * \frac{d^2x(t)}{dt}$

$-k * \frac{d(x-y)}{dt} - f(x-y) = m * \frac{d^2(x-y)}{dt}$

$-k(\dot{x} - \dot{y}) - f(x-y) = m * (\ddot{x} - \ddot{y})$

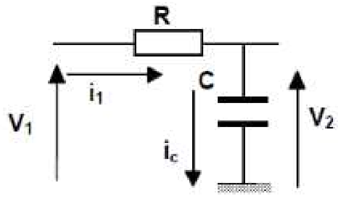
Aplicando la transformada de Laplace

$-ksX(s) + ksY(s) - fX(s) + fY(s) = s^2mX(s) - s^2mY(s)$

reacomodando terminos
$ksY(s) + fY(s) + s^2mY(s) = ksX(s) + fX(s) + s^2mX(s)$

$$\boxed{\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{ks+f+s^2m}{ks+f+s^2m} = 1}$$

Modelado 3



Filtro pasa bajas

La corriente de la malla $i_R = i_C$; El voltaje de salida V_2 coincide con el voltaje en el capacitor

$V_C = V_2 = \frac{1}{C} \int i(t)dt$ ó para la corriente:

$i(t) = C\frac{dV_2(t)}{dt}$

El voltaje en una malla cerrada es igual a la suma de sus caidas $V_1 = V_R + V_C$ considerando que el voltaje de salida es el mismo que el capacitor $V_1 = V_R + V_2$

Expresando V_R en función del voltaje de salida: $V_R = R * i$, pero la corriente es la derivada del voltaje por la capacitancia presente

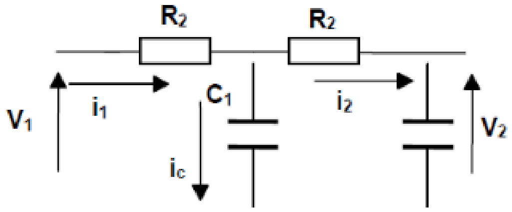
$V_R = R * C\frac{dV_2(t)}{dt}$ teniendo asi:

$V_1 = R * C\frac{dV_2(t)}{dt} + V_2$ Obteniendo la transformada de Laplace

$V_1(s) = sRCV_2(s) + V_2(s) = (sRC + 1)V_2(s)$

$$\boxed{\frac{V_2(s)}{V_1(s)} = H(s) = \frac{1}{sRC+1}}$$

Modelado 4



La variable de interes es el voltaje en el capacitor C_2 que es la salida del sistema V_2

$V_1 = V_{R1} + V_{C1}$ (1)

a su vez $V_{C1} = V_{R2} + V_{C2}$ (2)

Reemplazano V_{C1} en (1)

$V_1 = V_{R1} + V_{R2} + V_{C2}$ (3) encontrar V_{R1} y V_{R2} en función de su salida.

$V_{R1} = R_1 * i_1$ (4) y $V_{R2} = R_2 * i_2$ (5)

Para el capacitor 2, dado que la corriente i_2 pasa por el Capacitor 2 la corriente que pasa por un capacitor esta dada por:

$i_2 = C_2 * \frac{dV_{C2}(t)}{dt}$ (6) sustituyendo en (5)

$V_{R2} = R2 * C_2 \frac{dV_{C2}(t)}{dt}$ (7)

Para el Capacitor 1, la corriente que pasa en ese nodo es $i_1 - i_2 = C_1 \frac{dV_{C1}(t)}{dt}$ (8)

despejando i_1

$i_1 = i_2 + C_1 \frac{dV_{C1}(t)}{dt}$ (9)

sustituyendo i_2 (6) en (9)

$i_1 = C_2 * \frac{dV_{C2}(t)}{dt} + C_1 * \frac{dV_{C1}(t)}{dt}$ (10)

reemplazando V_{C1}

$i_1 = C_2 * \frac{dV_{C2}(t)}{dt} + C_1 * \left(\frac{dV_{R2}(t)}{dt} + \frac{dV_{C2}(t)}{dt}\right)$ (11)

$i_1 = C_2 * \frac{dV_{C2}(t)}{dt} + C_1 * \left(R_2 C_2 \frac{d^2 V_{C2}}{dt^2} + \frac{dV_{C2}(t)}{dt}\right)$ (12)

reemplazando en (4)

$V_{R1} = R_1 * \left(C_2 * \frac{dV_{C2}(t)}{dt} + C_1 * \left(R_2 C_2 \frac{d^2 V_{C2}(t)}{dt} + \frac{dV_{C2}}{dt} \right) \right)$ (13)

sustituyendo en la ecuación (3)

$V_1 = R_1 C_1 R_2 C_2 * \frac{d^2 V_{C2}(t)}{dt} + (R_1 C_1 + R_1 C_2 + R_2 C_2) \frac{dV_{C2}}{dt} + V_{C2}$

Agrupamos las constantes en terminos:

$x_1 = R_1 C_1 R_2 C_2$
$x_2 = R_1 C_2 + R_1 C_2 + R_2 C_2$

teniendo así:

$V_1 = x_1 \frac{d^2 V_{C2}}{dt^2} + x_2 * \frac{dV_{C1}}{dt} + V_2$

Aplicando la transformada de Laplace

$V_1(s) = x_1 s^2 V_2 + x_2 s V_2(s) + V_2(s)$

factorizando

$V_1(s) = (x_1 s^2 + x_2 s + 1) V_2(s)$

Función de transferencia

$\frac{V_2(s)}{V_1(s)} = \frac{1}{x_1 s^2 + x_2 s + 1}$ reemplazando las constantes tenemos:

$\boxed{\frac{V_2(s)}{V_1(s)} = H(s) = \frac{1}{(R_1 C_1 R_2 C_2) s^2 + (R_1 C_1 + R_1 C_2 + R_2 C_2) s + 1}}$