



Cinvestav

UNIDAD TAMAULIPAS

FUNDAMENTOS DE INGENIERÍA COMPUTACIONAL

Introducción al Análisis de Fourier

Dr. Wilfrido Gómez Flores

Tercera edición

Índice

1. Conceptos básicos	3
1.1. Operaciones básicas	3
1.2. Funciones periódicas	4
1.3. Frecuencia	7
1.4. Paridad de una función	7
1.4.1. Descomposición par–ímpar	10
1.4.2. Propiedades	10
1.5. Funciones ortogonales	13
1.5.1. Funciones seno y coseno	14
1.6. Sumario	18
2. Series de Fourier	19
2.1. Serie trigonométrica de Fourier	19
2.1.1. Coeficientes a_0 , a_n y b_n	20
2.1.2. Formas simplificadas	21
2.1.3. Forma de amplitud-fase	22
2.1.4. Ejemplos	22
2.2. Serie compleja de Fourier	27
2.2.1. Ejemplos	30
2.3. Sumario	36
2.4. Ejercicios	38
3. Transformada de Fourier	40
3.1. Definición	40
3.1.1. Ejemplos	42
3.2. Propiedades	45
3.3. Teorema de convolución	47
3.4. Transformadas de Fourier de funciones especiales	50
3.4.1. Función impulso	50
3.4.2. Valores constantes	52
3.4.3. Escalón unitario	52
3.4.4. Funciones periódicas	55
3.5. Transformada de Fourier versus de Laplace	57

3.6. Sumario	58
3.7. Ejercicios	60
4. Transformada de Fourier discreta	61
4.1. Definición	61
4.1.1. Ejemplo	64
4.2. Propiedades	66
4.3. Funciones de ventana	67
4.4. DFT de corta duración	69
4.5. DFT en dos dimensiones	72
4.5.1. Propiedades	72
4.5.2. Magnitud y ángulo de fase	75
4.5.3. Contribución de la magnitud y el ángulo de fase	76
4.5.4. Separabilidad y simetría	77
4.6. Transformada rápida de Fourier	79
4.7. Sumario	82
4.8. Ejercicios	84
5. Aplicaciones en imágenes digitales	85
5.1. Filtrado de imágenes	85
5.2. Segmentación de imágenes	89
5.3. Reconocimiento de objetos	97
5.4. Sumario	104
5.5. Ejercicios	105
Bibliografía	106

1. Conceptos básicos

1.1. Operaciones básicas

Las operaciones básicas necesarias para la representación y procesamiento de funciones en el dominio del tiempo son (Figura 1.1):

- Suma de funciones: dos funciones $f_1(t)$ y $f_2(t)$ son sumadas para obtener una tercera función $g(t) = f_1(t) + f_2(t)$.
- Multiplicación por una constante: una función $f(t)$ se multiplica por un factor de escalamiento α para obtener la función $g(t) = \alpha f(t)$.
- Desplazamiento en el tiempo: una función $f(t)$ se atrasa por un factor de desplazamiento τ para obtener $f(t - \tau)$ y se adelanta por τ para obtener $f(t + \tau)$.
- Reflexión en el tiempo: la variable de tiempo de una función $f(t)$ se niega para obtener la función reflejada $f(-t)$.

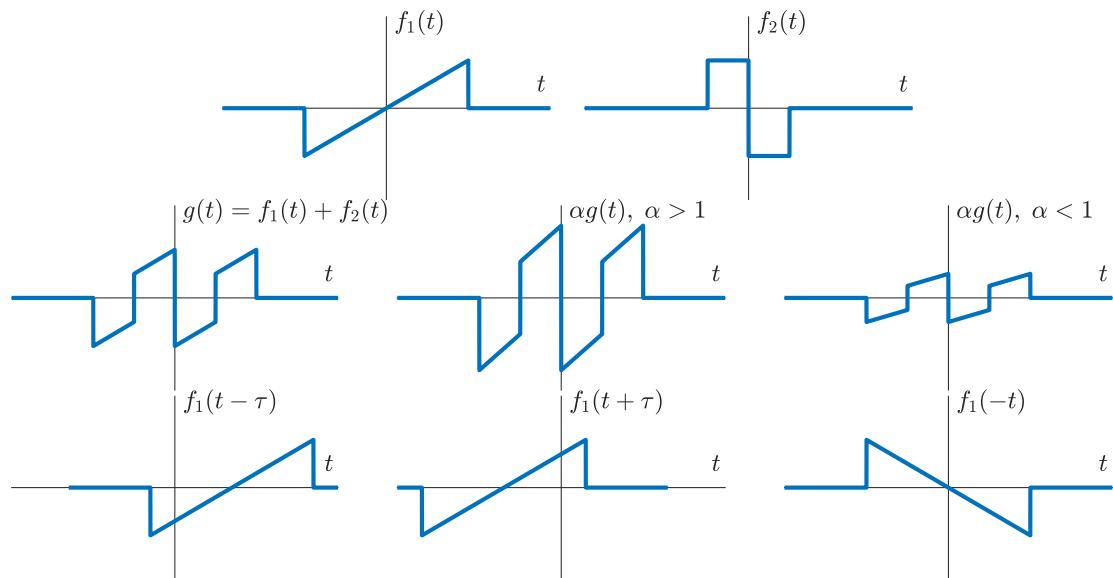


Figura 1.1: Operaciones básicas de señales en el dominio del tiempo.

1.2. Funciones periódicas

Una *función periódica* es una función para la cual

$$f(t) = f(t + T) \quad (1.1)$$

para todo valor de t , donde la constante T se denomina *periodo* de la función. El periodo también se puede definir como el tiempo transcurrido entre dos puntos equivalentes de una función.

Las funciones periódicas más representativas son las funciones trigonométricas $\sin(t)$ y $\cos(t)$, ambas con periodo $T = 2\pi$ (Figura 1.2). Por lo tanto, de acuerdo con (1.1), se tiene que $\sin(t + 2\pi) = \sin(t)$ y $\cos(t + 2\pi) = \cos(t)$.

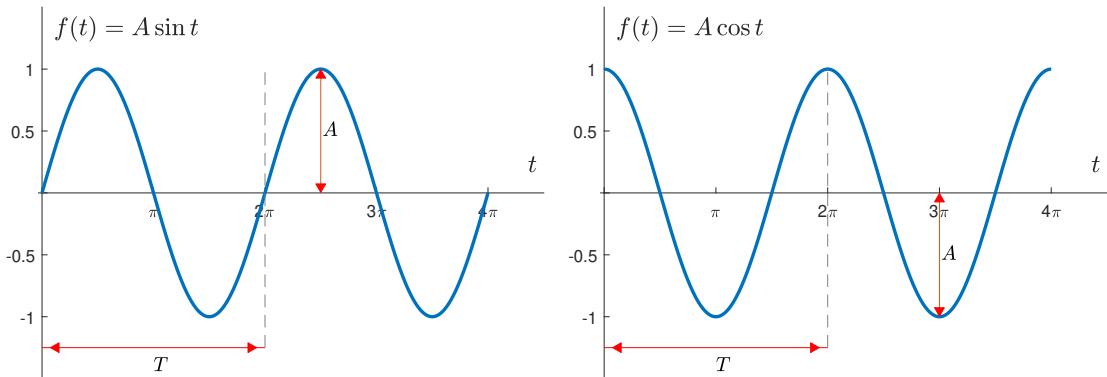


Figura 1.2: Funciones trigonométricas seno y coseno. La *amplitud* A es el valor máximo absoluto a partir de $f(t) = 0$.

Si se tiene una función periódica $f(t)$ con periodo T , entonces la función $f(kt)$ tiene periodo $\frac{T}{k}$. Por ejemplo, el periodo de $\sin(2t)$ es $\frac{2\pi}{2} = \pi$.

El *periodo fundamental* T_0 de $f(t)$ es el valor positivo más pequeño de T para el cual se satisface (1.1). Entonces, mediante la repetición de (1.1) se obtiene:

$$f(t) = f(t + nT_0), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (1.2)$$

En la Figura 1.3 se muestra un ejemplo de una función periódica compuesta por la suma $\sin^3(t) + \cos(t)$.

- **Ejemplo 1:** encontrar el periodo de la función $f(t) = (10 \cos t)^2$ (Figure 1.4(a)).

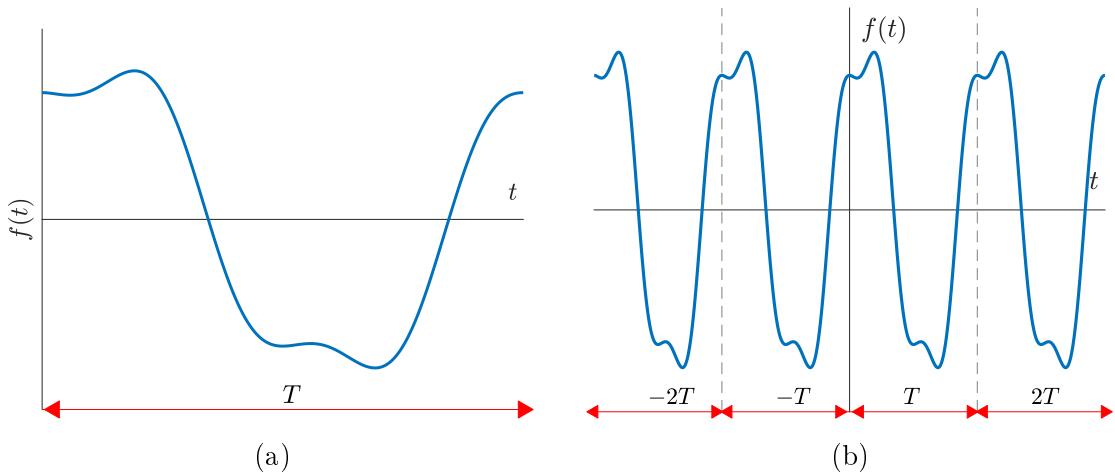


Figura 1.3: (a) Una función periódica definida por $\sin^3(t) + \cos(t)$. (b) Repetición de la función mediante $\sin^3(t + nT_0) + \cos(t + nT_0)$.

Si se aplica la identidad trigonométrica $\cos^2 \theta = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\theta)$ se tiene:

$$\begin{aligned} f(t) &= (10 \cos t)^2, \\ &= 100 \cos^2 t, \\ &= 100 \frac{1}{2}(1 + \cos 2t), \\ &= 50 + 50 \cos 2t. \end{aligned}$$

Debido a que una constante es una función periódica para cualquier valor de T , y el periodo de $\cos 2t$ es π , entonces el periodo de $f(t)$ es π .

- **Ejemplo 2:** encontrar el periodo de la función $f(t) = \cos \frac{t}{3} + \cos \frac{t}{4}$ (Figura 1.4(b)). Si la función $f(t)$ tiene periodo T , entonces a partir de (1.1) se tiene:

$$\cos \frac{t}{3} + \cos \frac{t}{4} = \cos \frac{1}{3}(t+T) + \cos \frac{1}{4}(t+T).$$

Debido a que $\cos(t+2\pi m) = \cos t$ para cualquier entero m se tiene que

$$\frac{T}{3} = 2\pi m \quad \text{y} \quad \frac{T}{4} = 2\pi n,$$

donde m y n son enteros. Entonces, $T = 6\pi m = 8\pi n$, lo cual se puede expresar en términos de la ecuación lineal diofántica homogénea $6m - 8n = 0$. Por lo

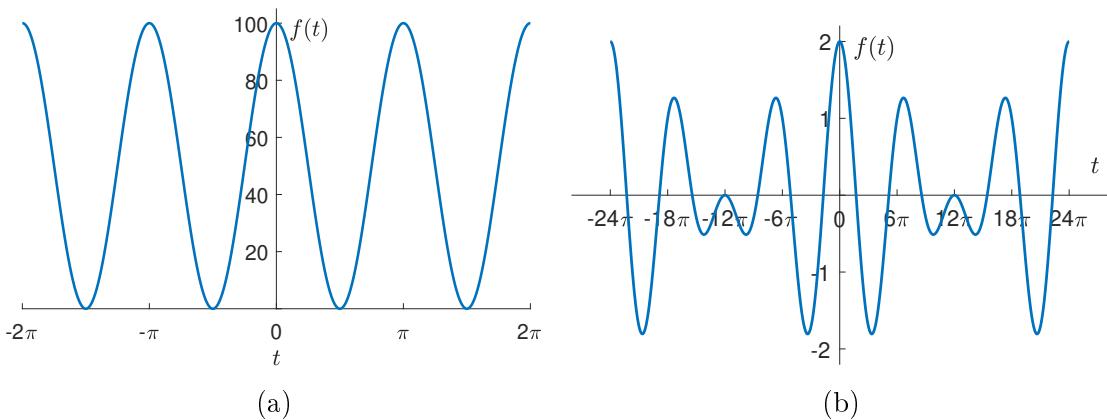


Figura 1.4: Funciones periódicas: (a) $f(t) = (10 \cos t)^2$ y (b) $f(t) = \cos \frac{t}{3} + \cos \frac{t}{4}$.

tanto, cuando $m = 4$ y $n = 3$ se tiene el mínimo valor de T , de modo que el periodo fundamental es $T_0 = 24\pi$.

Solución general para la ecuación lineal diofántica homogénea $ax + by = 0$:

$$x = -\frac{b}{d}k \quad y = \frac{a}{d}k, \quad k \in \mathbb{Z},$$

donde $d = \text{mcd}(a, b)$ es el máximo común divisor de a y b .

En general, si la función

$$f(t) = \cos k_1 t + \cos k_2 t$$

es periódica con periodo T , es posible encontrar dos enteros m y n tales que

$$\frac{T}{k_1} = 2\pi m, \tag{1.3}$$

$$\frac{T}{k_2} = 2\pi n. \tag{1.4}$$

El cociente de (1.3) y (1.4) es

$$\frac{k_1}{k_2} = \frac{n}{m}, \tag{1.5}$$

es decir, la relación k_1/k_2 debe ser un número racional. Por lo tanto, para $f(t)$ en el Ejemplo 2, el cociente k_1/k_2 es $3/4$, lo cual indica que $f(t)$ es una función

periódica.

- **Ejemplo 3:** Decidir si la función $f(t) = \cos 10t + \cos(10 + \pi)t$ es una función periódica. Se tiene $k_1 = 10$ y $k_2 = 10 + \pi$. Debido a que

$$\frac{k_1}{k_2} = \frac{10 + \pi}{10}$$

es número irracional, es imposible encontrar un valor T que satisfaga (1.1); por lo tanto, $f(t)$ no es una función periódica.

1.3. Frecuencia

La relación entre la *frecuencia* f y el periodo T de una función oscilatoria está dada por

$$f = \frac{1}{T}, \quad (1.6)$$

lo cual indica el número de oscilaciones de la función por unidad de tiempo. La unidad de medida de la frecuencia es el hertz (Hz). Un hertz quiere decir que una función oscila una vez por segundo. La Figura 1.5 muestra una función senoidal con tres frecuencias diferentes.

La *frecuencia angular*, usualmente denotada por ω , se define como la razón de cambio del desplazamiento angular θ durante la oscilación (o rotación):

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}. \quad (1.7)$$

La frecuencia angular se mide comúnmente en radianes por segundo (rad/s). La Figura 1.6 ejemplifica la relación de una onda senoidal en el intervalo $[0, 2\pi]$ con una frecuencia angular ω .

1.4. Paridad de una función

Una función $f(t)$ es *par* si es simétrica con respecto al origen y se expresa como

$$f(t) = f(-t), \quad (1.8)$$

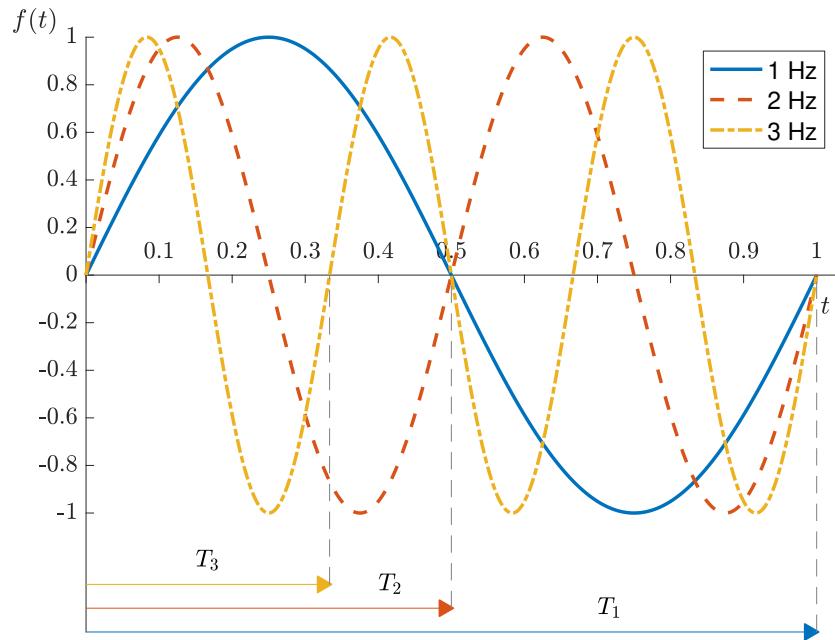


Figura 1.5: Función senoidal con diferentes frecuencias en un intervalo de 1 s.

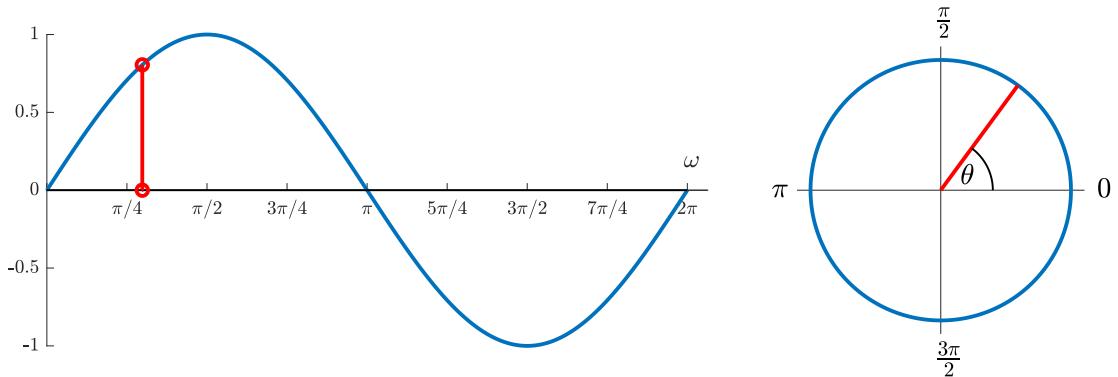


Figura 1.6: Onda senoidal en función de la frecuencia angular ω .

lo cual indica que la señal tiene los mismos valores para el lado positivo y negativo de $|t|$. Por ejemplo, la función $f(t) = t^2 + 1$ es par, ya que para cualquier valor t :

$$\begin{aligned}
 f(-t) &= (-t)^2 + 1, \\
 &= (-1 \cdot t)^2 + 1, \\
 &= (-1)^2 \cdot t^2 + 1, \\
 &= 1 \cdot t^2 + 1, \\
 &= t^2 + 1, \\
 &= f(t).
 \end{aligned}$$

Ejemplos de funciones pares son $|t|$, t^2 , t^4 , $\cos(t)$, y $\cosh(t)$.

Por otro lado, una función es *ímpar* si satisface la relación:

$$f(-t) = -f(t). \quad (1.9)$$

lo cual indica que su gráfica no se altera luego de una rotación de 180° alrededor del origen. Por ejemplo, la función $f(t) = t^3$ es ímpar, ya que

$$\begin{aligned} f(-t) &= (-t)^3, \\ &= (-1 \cdot t)^3, \\ &= (-1)^3 \cdot t^3, \\ &= -1 \cdot t^3, \\ &= -1 \cdot f(t), \\ &= -f(t). \end{aligned}$$

Ejemplos de funciones impares son t , t^3 , $\sin(t)$ y $\sinh(t)$. En la Figura 1.7 se muestra un ejemplo de funciones par e ímpar. Existen funciones que no cumplen con ningún tipo de paridad, por ejemplo, $\exp(t)$ y $\ln(t)$.

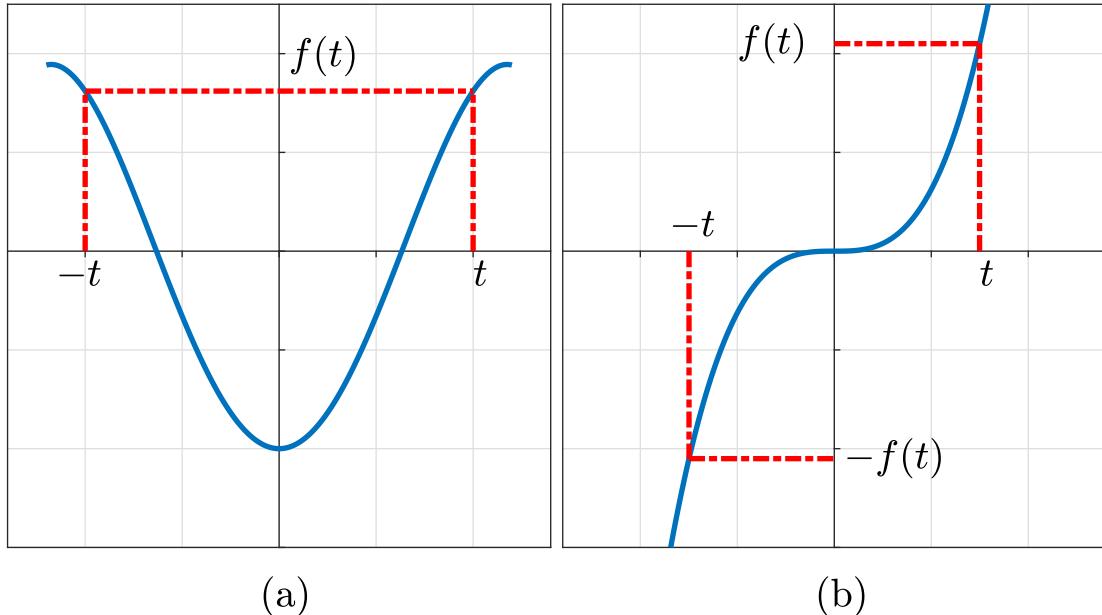


Figura 1.7: Paridad de una función: (a) par y (b) ímpar.

1.4.1. Descomposición par–ímpar

Cualquier función $f(t)$ es representable como la suma de una componente par y una componente ímpar, lo cual se expresa con la siguiente identidad:

$$f(t) = \underbrace{\frac{1}{2} [f(t) + f(-t)]}_{\text{par}} + \underbrace{\frac{1}{2} [f(t) - f(-t)]}_{\text{ímpar}}. \quad (1.10)$$

Por ejemplo, considere la siguiente función:

$$f(t) = \begin{cases} 2 \cos(4t) & t > 0, \\ 0 & \text{otro caso.} \end{cases} \quad (1.11)$$

Nótese que esta función no es par ni ímpar, ya que sus valores para $t \leq 0$ son cero. Para la descomposición par–ímpar, la componente par está dada por:

$$f_e(t) = \frac{1}{2} [f(t) + f(-t)] = \begin{cases} \cos(4t) & t > 0, \\ \cos(4t) & t < 0, \\ 0 & t = 0, \end{cases} \quad (1.12)$$

y la componente ímpar está dada por:

$$f_o(t) = \frac{1}{2} [f(t) - f(-t)] = \begin{cases} \cos(4t) & t > 0, \\ -\cos(4t) & t < 0, \\ 0 & t = 0, \end{cases} \quad (1.13)$$

los cuales cuando se suman reconstruyen la función en (1.11), como se muestra en la Figura 1.8.

1.4.2. Propiedades

- La única función que es tanto par e ímpar es la función constante $f(t) = 0$.
- La función constante $f(t) = c$, con $c \neq 0$ es par.
- La suma de dos funciones pares es una función par.

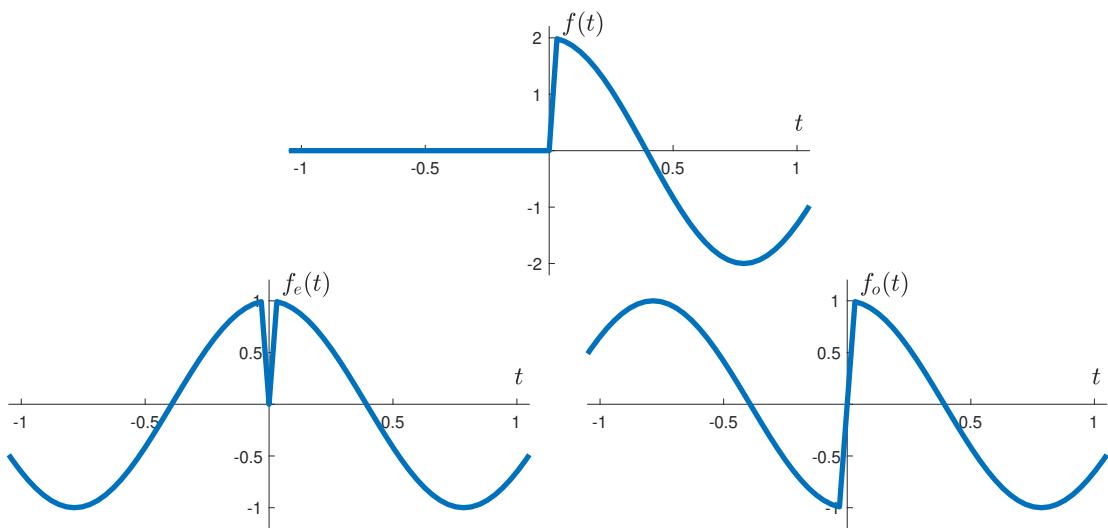


Figura 1.8: Componentes par e impar de la función en (1.11).

- La suma de dos funciones impares es una función impar.
- La suma de una función par y una impar no necesariamente es par o impar.
- El producto de dos funciones pares es una función par.
- El producto de dos funciones impares es una función par.
- El producto de una función par y una función impar es una función impar.
- El cociente de dos funciones pares es una función par.
- El cociente de dos funciones impares es una función par.
- El cociente de una función par y una función impar es una función impar.
- La derivada de una función par es una función impar.
- La derivada de una función impar es una función par.
- La composición de dos funciones[†] pares es una función par.
- La composición de dos funciones impares es una función impar.

[†] $(g \circ f)(t) = f[g(t)]$.

- La composición de una función par y una función impar es una función par.
- Toda función definida sobre los reales, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, puede escribirse como la suma de una función par y una función impar.
- La integral de una función impar entre $-A$ y $+A$ es cero.
- La integral de una función par entre $-A$ y $+A$ es el doble de la integral entre 0 y $+A$.

En la Figura 1.9 se muestran algunos ejemplos de las propiedades entre funciones par e impar, representadas por las funciones conseno y seno, respectivamente.

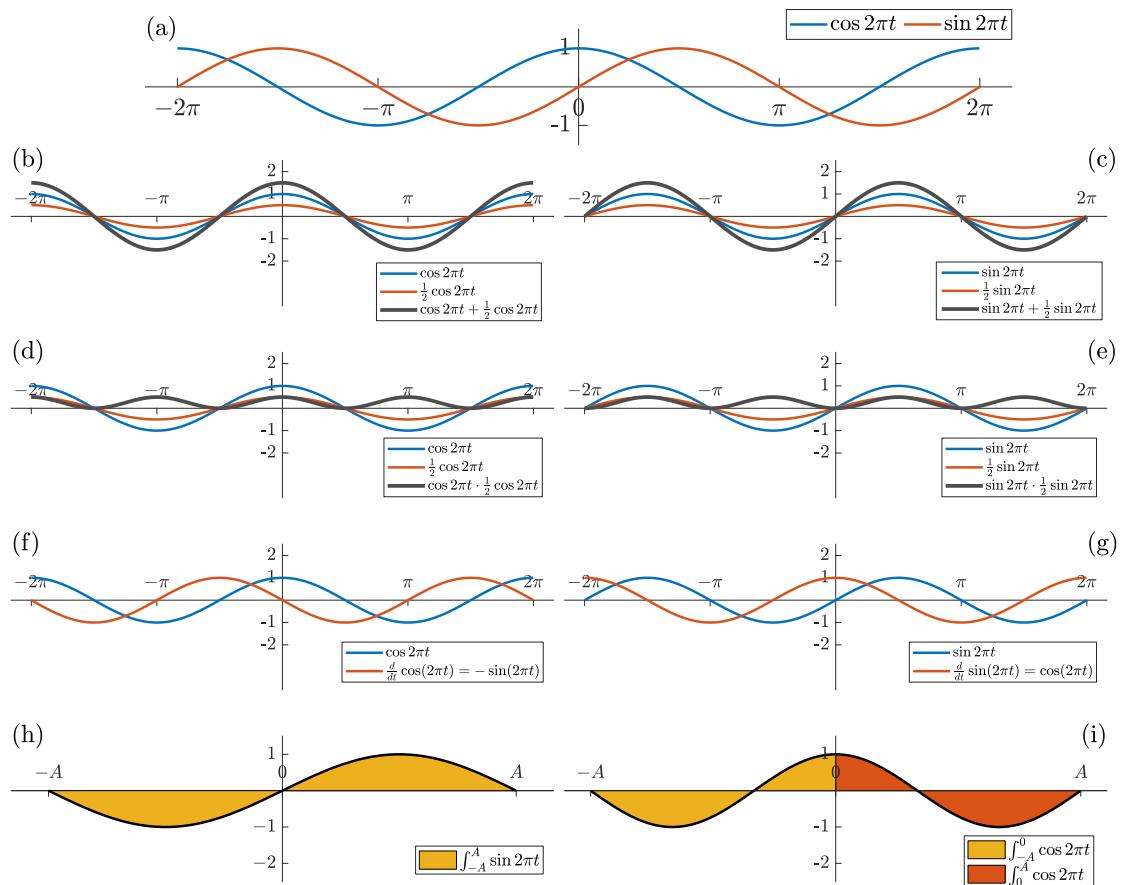


Figura 1.9: (a) Funciones par e impar. (b)–(c) Sumas de funciones. (d)–(e) Productos de funciones. (f)–(g) Derivadas de funciones. (h)–(i) Integrales de funciones.

1.5. Funciones ortogonales

En álgebra lineal, el producto escalar (también llamado interno o punto) entre dos vectores \mathbf{a} y \mathbf{b} se basa en la proyección de un vector sobre otro, de modo que es posible medir “cuánto del vector \mathbf{a} apunta en la misma dirección que el vector \mathbf{b} ”. Si ambos vectores apuntan en direcciones similares, el producto escalar será positivo, y si apuntan en direcciones opuestas, el producto escalar será negativo. Si ambos vectores son ortogonales, entonces su producto escalar es cero, lo cual indica que vectores perpendiculares no pueden representarse en términos del otro.

El concepto de *ortogonalidad* de funciones es similar al concepto de perpendicularidad de vectores, es decir, funciones ortogonales proveen información mutuamente excluyente. Por lo tanto, se puede decir que dos funciones distintas $f_1(t)$ y $f_2(t)$ son ortogonales en el intervalo $a < t < b$ cuando su producto interno es cero:

$$\langle f_1, f_2 \rangle = \int_a^b f_1(t) f_2(t) dt = 0. \quad (1.14)$$

Por ejemplo, las funciones $f_1(t) = t^2$ y $f_2(t) = t^3$ son ortogonales en el intervalo $[-1, 1]$ porque

$$\begin{aligned} \langle f_1, f_2 \rangle &= \int_{-1}^1 f_1(t) f_2(t) dt, \\ &= \int_{-1}^1 t^2 \cdot t^3 dt, \\ &= \frac{t^6}{6} \Big|_{-1}^1, \\ &= \frac{1}{6} [1^6 - (-1)^6], \\ &= \frac{1}{6} (1 - 1), \\ &= 0, \end{aligned}$$

lo cual se muestra gráficamente en la Figura 1.10.

En general, un *conjunto de funciones* de valor real $\{\phi_0(t), \phi_1(t), \phi_2(t), \dots\}$ es

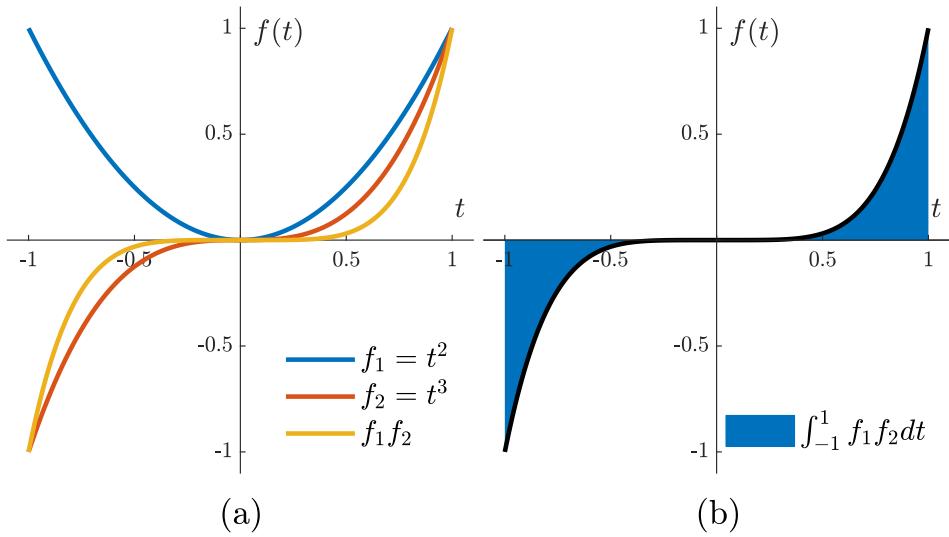


Figura 1.10: Funciones ortogonales: (a) producto de $f_1(t)$ y $f_2(t)$ y (b) área resultante. Nótese que el producto de $f_1(t)$ y $f_2(t)$ es una función impar; por lo tanto, su integral es cero en el intervalo $[-1, 1]$.

ortogonal en el intervalo $[a, b]$ si

$$\langle \phi_m, \phi_n \rangle = \int_a^b \phi_m(t) \phi_n(t) dt = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ r_n & m = n \end{cases} \quad (1.15)$$

1.5.1. Funciones coseno y seno

Considérese un conjunto de funciones sinusoidales; mediante cálculo integral se puede demostrar que:

$$\int_{-T/2}^{T/2} \cos(m\omega_0 t) dt = 0, \quad \text{para } m \neq 0 \quad (1.16)$$

$$\int_{-T/2}^{T/2} \sin(m\omega_0 t) dt = 0, \quad \text{para todo valor de } m \quad (1.17)$$

$$\int_{-T/2}^{T/2} \cos(m\omega_0 t) \cos(n\omega_0 t) dt = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ T/2 & m = n \neq 0 \end{cases} \quad (1.18)$$

$$\int_{-T/2}^{T/2} \sin(m\omega_0 t) \sin(n\omega_0 t) dt = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ T/2 & m = n \neq 0 \end{cases} \quad (1.19)$$

$$\int_{-T/2}^{T/2} \sin(m\omega_0 t) \cos(n\omega_0 t) dt = 0, \text{ para todo valor de } m \text{ y } n \quad (1.20)$$

donde $\omega_0 = 2\pi/T$, de acuerdo con (1.7).

Estas relaciones demuestran que el conjunto de funciones $\{1, \cos \omega_0 t, \cos 2\omega_0 t, \dots, \cos n\omega_0 t, \dots, \sin \omega_0 t, \sin 2\omega_0 t, \dots, \sin n\omega_0 t, \dots\}$ son ortogonales en el intervalo $-T/2 < t < T/2$.

Verificar que el conjunto $\{1, \cos \omega_0 t, \cos 2\omega_0 t, \dots, \cos n\omega_0 t, \dots\}$ es ortogonal en el intervalo $[-T/2, T/2]$. Primero, considérese que

$$\omega_0 t|_{t=\pm T/2} = \frac{2\pi}{T} \left(\pm \frac{T}{2} \right) = \pm \pi. \quad (1.21)$$

Para (1.16) con $m \neq 0$ se tiene:

$$\begin{aligned} \langle \phi_0, \phi_m \rangle &= \int_{-T/2}^{T/2} \phi_0(t) \phi_m(t) dt, \\ &= \int_{-T/2}^{T/2} \cos(0) \cos(m\omega_0 t) dt, \\ &= \int_{-T/2}^{T/2} \cos(m\omega_0 t) dt,^* \\ &= \frac{1}{m\omega_0} \sin(m\omega_0 t)|_{-T/2}^{T/2}, \\ &= \frac{1}{m\omega_0} [\sin(\pi m) - \sin(-\pi m)], \\ &= 0. \end{aligned}$$

^{*} $\int \cos(ax) dx = \frac{\sin(ax)}{a}$.

Para (1.18) con $m \neq n$ se tiene:

$$\begin{aligned}
\langle \phi_m, \phi_n \rangle &= \int_{-T/2}^{T/2} \phi_m(t) \phi_n(t) dt, \\
&= \int_{-T/2}^{T/2} \cos(m\omega_0 t) \cos(n\omega_0 t) dt, ^\dagger \\
&= \frac{1}{2} \int_{-T/2}^{T/2} \{\cos[(m+n)\omega_0 t] + \cos[(m-n)\omega_0 t]\} dt, \\
&= \frac{1}{2} \frac{\sin[(m+n)\omega_0 t]}{(m+n)\omega_0} \Big|_{-T/2}^{T/2} + \frac{1}{2} \frac{\sin[(m-n)\omega_0 t]}{(m-n)\omega_0} \Big|_{-T/2}^{T/2}, \\
&= \frac{1}{2} \frac{1}{(m+n)\omega_0} \{\sin[\pi(m+n)] - \sin[-\pi(m+n)]\} + \\
&\quad + \frac{1}{2} \frac{1}{(m-n)\omega_0} \{\sin[\pi(m-n)] - \sin[-\pi(m-n)]\}, \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Finalmente, para (1.18) con $m = n \neq 0$ se tiene:

$$\begin{aligned}
\langle \phi_m, \phi_m \rangle &= \int_{-T/2}^{T/2} \phi_m^2(t) dt, \\
&= \int_{-T/2}^{T/2} \cos^2(m\omega_0 t) dt, ^\ddagger \\
&= \frac{1}{2} \int_{-T/2}^{T/2} [1 + \cos(2m\omega_0 t)] dt, \\
&= \frac{1}{2} t \Big|_{-T/2}^{T/2} + \frac{1}{4m\omega_0} \sin(2m\omega_0 t) \Big|_{-T/2}^{T/2}, \\
&= \frac{T}{2} + \frac{1}{4m\omega_0} [\sin(2\pi m) - \sin(-2\pi m)], \\
&= \frac{T}{2}.
\end{aligned}$$

Verificar que el conjunto $\{1, \cos \omega_0 t, \cos 2\omega_0 t, \dots, \cos n\omega_0 t, \dots, \sin \omega_0 t, \sin 2\omega_0 t, \dots, \sin n\omega_0 t, \dots\}$ es ortogonal en el intervalo $[-T/2, T/2]$ (Figura 1.11).

[†] $\cos A \cos B = \frac{1}{2}[\cos(A+B) + \cos(A-B)].$

[‡] $\cos^2 A = \frac{1}{2}(1 + \cos 2A).$

En el primer caso, para (1.20) con $m \neq n$ se tiene:

$$\begin{aligned}
\langle \phi_m, \phi_n \rangle &= \int_{-T/2}^{T/2} \phi_m(t) \phi_n(t) dt, \\
&= \int_{-T/2}^{T/2} \sin(m\omega_0 t) \cos(n\omega_0 t) dt, ^{\$} \\
&= \frac{1}{2} \int_{-T/2}^{T/2} \{\sin[(m+n)\omega_0 t] + \sin[(m-n)\omega_0 t]\} dt, ^{\P} \\
&= -\frac{1}{2} \frac{\cos[(m+n)\omega_0 t]}{(m+n)\omega_0} \Big|_{-T/2}^{T/2} - \frac{1}{2} \frac{\cos[(m-n)\omega_0 t]}{(m-n)\omega_0} \Big|_{-T/2}^{T/2}, \\
&= -\frac{1}{2} \frac{1}{(m+n)\omega_0} \{\cos[\pi(m+n)] - \cos[-\pi(m+n)]\} + \\
&\quad -\frac{1}{2} \frac{1}{(m-n)\omega_0} \{\cos[\pi(m-n)] - \cos(-\pi(m-n))\}, \\
&= 0.
\end{aligned}$$

En el segundo caso, para (1.20) con $m = n \neq 0$ se tiene:

$$\begin{aligned}
\langle \phi_m, \phi_m \rangle &= \int_{-T/2}^{T/2} \phi_m(t) \phi_m(t) dt, \\
&= \int_{-T/2}^{T/2} \sin(m\omega_0 t) \cos(m\omega_0 t) dt, \\
&= \frac{1}{2} \int_{-T/2}^{T/2} \sin(2m\omega_0 t) dt, \\
&= -\frac{1}{4m\omega_0} \cos(2m\omega_0 t) \Big|_{-T/2}^{T/2}, \\
&= -\frac{1}{4m\omega_0} [\cos(2\pi m) - \cos(-2\pi m)], \\
&= 0.
\end{aligned}$$

^{\$} $\sin A \cos B = \frac{1}{2} [\sin(A+B) + \sin(A-B)].$

^P $\int \sin(ax) dx = -\frac{\cos(ax)}{a}.$

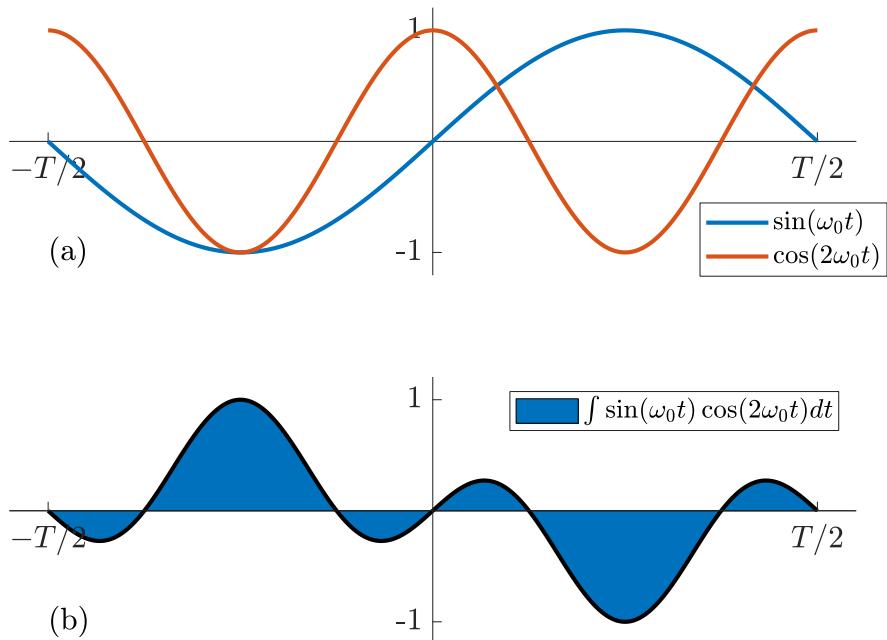


Figura 1.11: (a) Funciones ortogonales seno y coseno y (b) área resultante del producto de ambas funciones. Nótese que el producto de $\cos(m\omega_0 t)$ y $\sin(n\omega_0 t)$ es una función impar; por lo tanto, su integral es cero en el intervalo $[-T/2, T/2]$.

1.6. Sumario

- El periodo es el tiempo que tarda una función periódica en dar un ciclo completo y se mide en segundos.
- La frecuencia es el número de veces que una función periódica se repite por unidad de tiempo. Es el inverso del periodo y se mide en hertz.
- Una función par satisface la relación $f(x) = f(-x)$, esto es, la función es simétrica con respecto al eje vertical.
- Una función impar satisface la relación $f(-x) = -f(x)$, esto es, la función posee una simetría rotacional con respecto al origen de coordenadas.
- Dos funciones son ortogonales si su producto escalar es cero, lo cual indica que ambas funciones proveen información mutuamente excluyente.

2. Series de Fourier

2.1. Serie trigonométrica de Fourier

Jean Baptiste Joseph Fourier (1768-1830), matemático francés, publicó en 1822 su *Teoría analítica del calor*, en donde estableció la ecuación diferencial parcial que gobierna la difusión del calor solucionándola mediante el uso de series infinitas de funciones trigonométricas, lo que ahora se conoce como las series de Fourier.



Las series trigonométricas de Fourier, o simplemente series de Fourier, fueron desarrolladas por el matemático francés Jean Baptiste Joseph Fourier para aproximar funciones periódicas mediante el conjunto de funciones ortogonales $\{1, \cos \omega_0 t, \cos 2\omega_0 t, \dots, \cos n\omega_0 t, \sin \omega_0 t, \sin 2\omega_0 t, \dots, \sin n\omega_0 t, \dots\}$.

La idea que subyace en las series de Fourier es la descomposición de una función periódica en términos de una suma infinita de funciones periódicas básicas, senos y cosenos, cuyas frecuencias son múltiplos de la función original. La descomposición de una función o señal permite el análisis de sus propiedades y la síntesis de los objetos o fenómenos.

Sea $f(t)$ una función periódica con periodo T , la cual se puede representar por la serie trigonométrica:

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{a_0}{2} + a_1 \cos(\omega_0 t) + a_2 \cos(2\omega_0 t) + \dots + b_1 \sin(\omega_0 t) + b_2 \sin(2\omega_0 t) + \dots, \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t)], \end{aligned} \tag{2.1}$$

donde $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ es la frecuencia angular fundamental, y a_0, a_n y b_n son los coeficientes de Fourier. La expresión en (2.1) representa a una función periódica arbitraria como la suma infinita de componentes sinusoidales que tienen diferentes frecuencias. La componente sinusoidal de frecuencia $\omega_n = n\omega_0$ se denomina el *enésimo armónico* de la función periódica. Utilizando las relaciones de ortogonalidad en las

expresiones (1.16)–(1.20), se pueden determinar los coeficientes a_0 , a_n y b_n de la serie de Fourier.

2.1.1. Coeficientes a_0 , a_n y b_n

Comenzando por encontrar a_0 , se integran ambos lados de (2.1) en el intervalo $[-T/2, T/2]$ y se obtiene

$$\begin{aligned} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt &= \int_{-T/2}^{T/2} \left[\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t)) \right] dt, \\ &= \frac{1}{2} \int_{-T/2}^{T/2} a_0 dt + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_{-T/2}^{T/2} a_n \cos(n\omega_0 t) dt \right. \\ &\quad \left. + \int_{-T/2}^{T/2} b_n \sin(n\omega_0 t) dt \right]. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Entonces, a partir de (1.16) y (1.17), las integrales que contienen a a_n y b_n son cero; por lo tanto,

$$\int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt = \frac{a_0}{2} \int_{-T/2}^{T/2} dt = \frac{1}{2} a_0 T \quad (2.3)$$

ó

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt. \quad (2.4)$$

Para encontrar a_n , se multiplican ambos lados de (2.1) por $\cos(m\omega_0 t)$ y se integra en el intervalo $[-T/2, T/2]$:

$$\begin{aligned} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos(n\omega_0 t) dt &= \int_{-T/2}^{T/2} \left[\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t)) \right] \cos(n\omega_0 t) dt, \\ &= \frac{1}{2} \int_{-T/2}^{T/2} a_0 \cos(n\omega_0 t) dt \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_{-T/2}^{T/2} a_n \cos(n\omega_0 t) \cos(m\omega_0 t) dt \right. \\ &\quad \left. + \int_{-T/2}^{T/2} b_n \sin(n\omega_0 t) \cos(m\omega_0 t) dt \right]. \end{aligned} \quad (2.5)$$

La integral que contiene a a_0 es cero de acuerdo con (1.16), mientras que la integral que contiene b_n desaparece de acuerdo con (1.20). La integral que contiene a a_n será cero excepto cuando $m = n$, en este caso, de acuerdo con (1.18), es $T/2$; por lo tanto,

$$\int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos(n\omega_0 t) dt = a_n \frac{T}{2}, \quad \text{para } m = n, \quad (2.6)$$

ó

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos(n\omega_0 t) dt. \quad (2.7)$$

De manera similar, para encontrar b_n se multiplican ambos lados de (2.1) por $\sin(n\omega_0 t)$ y se integra en el intervalo $[-T/2, T/2]$. El resultado es:

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin(n\omega_0 t) dt. \quad (2.8)$$

2.1.2. Formas simplificadas

La representación de series de Fourier se simplifica en el caso de funciones pares o impares de acuerdo con la siguientes propiedades:

- El producto de dos funciones pares es una función par.
- El producto de dos funciones impares es una función par.
- La integral de una función par es $\int_{-A}^A f(t) dt = 2 \int_0^A f(t) dt$.

Entonces, la serie de Fourier de una función par está dada por:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega_0 t), \quad \text{con } a_n = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \cos(n\omega_0 t) dt, \quad (2.9)$$

y $b_n = 0$. Por otro lado, para una función impar la serie de Fourier está dada por:

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\omega_0 t), \quad \text{con } b_n = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \sin(n\omega_0 t) dt, \quad (2.10)$$

y $a_0 = a_n = 0$.

2.1.3. Forma de amplitud-fase

Una forma alternativa de (2.1) es la forma de *amplitud-fase*:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega_0 t + \phi_n), \quad (2.11)$$

donde A_n y ϕ_n son los espectros de amplitud y fase de $f(t)$, respectivamente, y se definen como:

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \quad \text{y} \quad \phi_n = -\tan^{-1} \left(\frac{b_n}{a_n} \right). \quad (2.12)$$

Ambos términos se pueden relacionar en forma compleja como

$$A_n/\underline{\phi_n} = a_n - jb_n. \quad (2.13)$$

La amplitud y la fase forman el *espectro de frecuencia* de $f(t)$, el cual consiste en un gráfico de las amplitudes y las fases de armónicos versus frecuencia. Por lo tanto, la serie de Fourier es una herramienta matemática para encontrar el espectro de una función periódica.

2.1.4. Ejemplos

Ejemplo 1. Encontrar la serie de Fourier para la función $f(t)$ mostrada en la Figura 2.1 y definida por:

$$f(t) = \begin{cases} -1 & -\frac{T}{2} < t < 0, \\ +1 & 0 < t < \frac{T}{2}. \end{cases} \quad (2.14)$$

Nótese que la onda cuadrada en (2.14) es impar; por lo tanto, de acuerdo

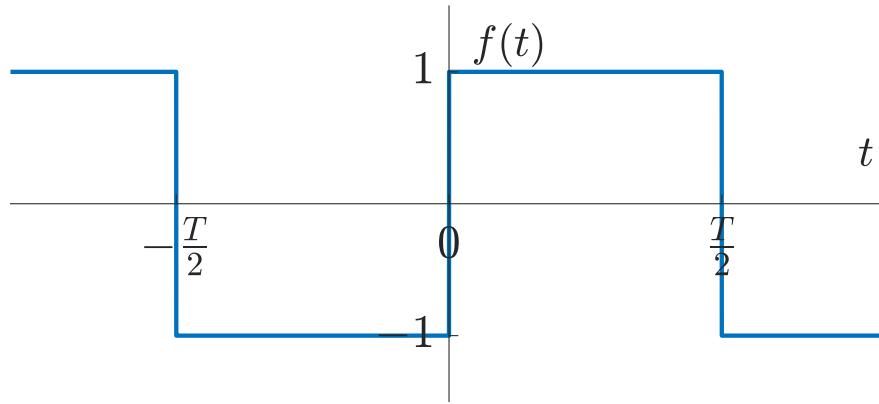


Figura 2.1: Onda cuadrada.

con (2.10), los coeficientes $a_0 = a_n = 0$ y

$$\begin{aligned}
 b_n &= \frac{4}{T} \int_0^{T/2} \sin(n\omega_0 t) dt, \\
 &= \frac{4}{T} \left[-\frac{\cos(n\omega_0 t)}{n\omega_0} \right]_0^{T/2}, \\
 &= \frac{4}{n\omega_0 T} [-\cos(n\pi) + \cos(0)],^{\dagger} \\
 &= \frac{2}{n\pi} [1 - \cos(n\pi)],
 \end{aligned}$$

donde $\omega_0 t = \pi$ está dada por (1.21). Debido a que $\cos(n\pi) = (-1)^n$,

$$b_n = \begin{cases} \frac{4}{n\pi} & n \text{ impar}, \\ 0 & n \text{ par}. \end{cases}$$

Por lo tanto, la serie de Fourier queda como (Figura 2.2):

$$f(t) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=\text{impar}}^{\infty} \frac{1}{n} \sin(n\omega_0 t).$$

[†] $\omega_0 T = (2\pi/T)T = 2\pi$.

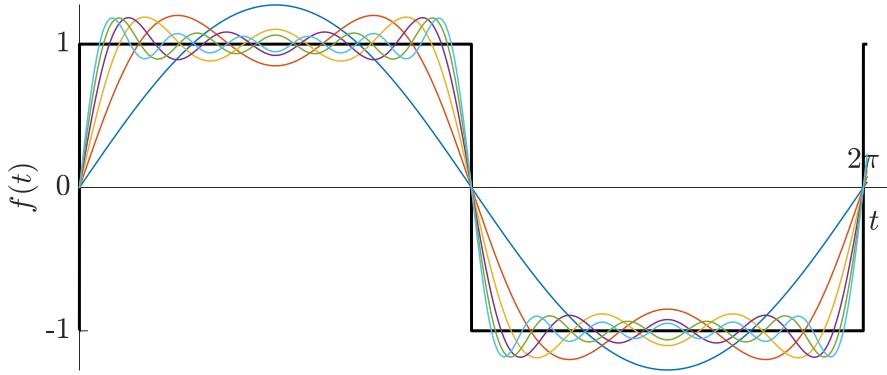


Figura 2.2: Onda cuadrada aproximada con los primeros 11 términos.

Finalmente, debido a que $a_n = 0$, la amplitud y la fase son

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = |b_n| = \begin{cases} \frac{4}{n\pi} & n \text{ impar}, \\ 0 & n \text{ par}, \end{cases}$$

y

$$\phi_n = -\tan^{-1}\left(\frac{b_n}{a_n}\right) = \begin{cases} -\frac{\pi}{2} & n \text{ impar}, \\ 0 & n \text{ par}. \end{cases}$$

En la Figura 2.3, se muestran los gráficos de A_n y ϕ_n de la función cuadrada en (2.14) para diferentes valores de $n\omega_0 = n\pi$. Nótese que las amplitudes de los armónicos disminuyen conforme la frecuencia aumenta.

Ejemplo 2. Encontrar la serie de Fourier para la función $f(t)$ mostrada en la Figura 2.4 y definida por:

$$f(t) = \begin{cases} 1 + \frac{4t}{T} & -\frac{T}{2} < t < 0, \\ 1 - \frac{4t}{T} & 0 < t < \frac{T}{2}. \end{cases} \quad (2.15)$$

La función triangular en (2.15) es par; por lo tanto, de acuerdo con (2.9), el coeficiente $b_n = 0$. Además, el valor promedio de $f(t)$ durante un periodo es cero,

[‡] $\lim_{x \rightarrow \infty} \tan^{-1}(x) = \frac{\pi}{2} = 90^\circ$.

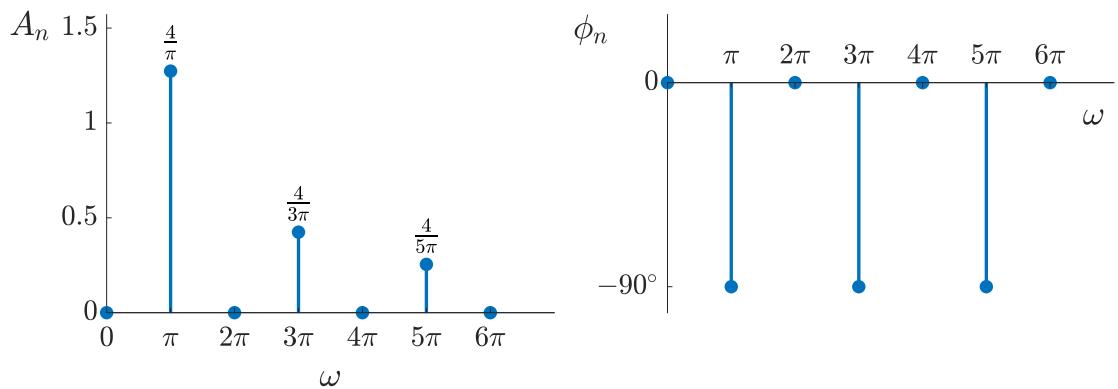


Figura 2.3: Amplitud y fase de la función cuadrada en la Figura 2.1.

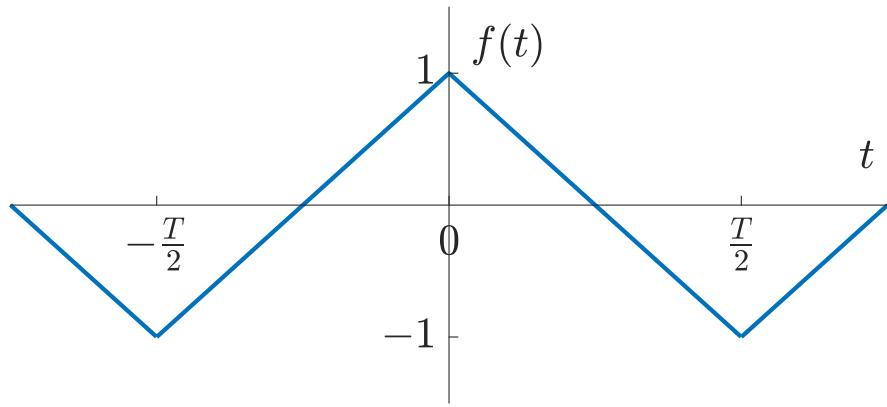


Figura 2.4: Función triangular.

es decir,

$$\begin{aligned}
 a_0 &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt, \\
 &= \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) dt, \\
 &= \frac{4}{T} \int_0^{T/2} \left(1 - \frac{4t}{T}\right) dt, \\
 &= \frac{4}{T} \left(\int_0^{T/2} dt - \frac{4}{T} \int_0^{T/2} t dt \right),^{\dagger} \\
 &= \frac{4}{T} \left(t \Big|_0^{T/2} - \frac{2}{T} t^2 \Big|_0^{T/2} \right), \\
 &= \frac{4}{T} \left(\frac{T}{2} - \frac{2}{T} \frac{T^2}{4} \right), \\
 &= \frac{4}{T} \left(\frac{T}{2} - \frac{T}{2} \right), \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

Entonces, para el coeficiente a_n se obtiene:

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{4}{T} \int_0^{T/2} \left(1 - \frac{4t}{T}\right) \cos(n\omega_0 t) dt, \\
&= \frac{4}{T} \left[\int_0^{T/2} \cos(n\omega_0 t) dt - \frac{4}{T} \int_0^{T/2} t \cos(n\omega_0 t) dt \right], ^{\ddagger} \\
&= \frac{4}{T} \left[\frac{1}{n\omega_0} \sin(n\omega_0 t) \Big|_0^{T/2} - \frac{4}{T(n\omega_0)^2} (n\omega_0 t \sin(n\omega_0 t) + \cos(n\omega_0 t)) \Big|_0^{T/2} \right], \\
&= \frac{4}{n\omega_0 T} \sin(n\omega_0 t) \Big|_0^{T/2} - \frac{16}{(n\omega_0 T)^2} (n\omega_0 t \sin(n\omega_0 t) + \cos(n\omega_0 t)) \Big|_0^{T/2}, \\
&= \frac{4}{2\pi n} \sin(n\omega_0 t) \Big|_0^{T/2} - \frac{16}{(2\pi n)^2} (n\omega_0 t \sin(n\omega_0 t) + \cos(n\omega_0 t)) \Big|_0^{T/2}, \\
&= \frac{2}{\pi n} \sin(n\omega_0 t) \Big|_0^{T/2} - \frac{4}{\pi^2 n^2} (n\omega_0 t \sin(n\omega_0 t) + \cos(n\omega_0 t)) \Big|_0^{T/2}, \\
&= \frac{2}{\pi n} [\sin(n\pi) - \sin(0)] - \frac{4}{\pi^2 n^2} [(n\pi \sin(n\pi) + \cos(n\pi)) - (0 + \cos(0))], \\
&= -\frac{4}{\pi^2 n^2} [\cos(n\pi) - 1], \\
&= \frac{4}{\pi^2 n^2} [1 - \cos(n\pi)].
\end{aligned}$$

Debido a que $\cos(n\pi) = (-1)^n$,

$$a_n = \begin{cases} \frac{8}{n^2 \pi^2} & n \text{ impar}, \\ 0 & n \text{ par}. \end{cases}$$

Por lo tanto, la serie de Fourier queda como (Figura 2.5):

$$f(t) = \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=\text{impar}}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cos(n\omega_0 t).$$

[†] $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}.$
[‡] $\int x \cos(ax) dx = \frac{ax \sin(ax) + \cos(ax)}{a^2}.$

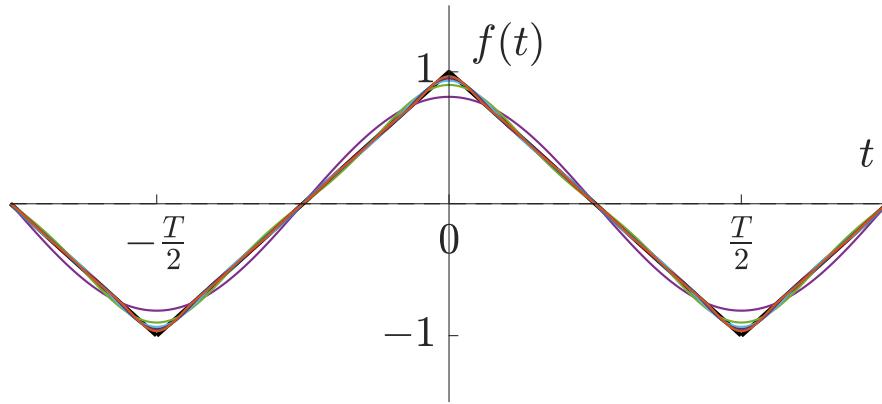


Figura 2.5: Función triangular aproximada con los primeros 11 términos.

2.2. Serie compleja de Fourier

Una forma compacta de expresar las series de Fourier en (2.1) es definirla en términos de la función exponencial. Esto requiere que se representen las funciones seno y coseno usando las fórmulas de Euler:

$$\cos(n\omega_0 t) = \frac{1}{2} (e^{jn\omega_0 t} + e^{-jn\omega_0 t}) \quad (2.16)$$

y

$$\sin(n\omega_0 t) = \frac{1}{2j} (e^{jn\omega_0 t} - e^{-jn\omega_0 t}) \quad (2.17)$$

donde $j = \sqrt{-1}$. Sustituyendo (2.16) y (2.17) en (2.1) se obtiene:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \frac{1}{2} (e^{jn\omega_0 t} + e^{-jn\omega_0 t}) + b_n \frac{1}{2j} (e^{jn\omega_0 t} - e^{-jn\omega_0 t}) \right]. \quad (2.18)$$

Teniendo que $1/j = -j$,[†] entonces (2.18) se puede expresar como

[†] $\frac{1}{j} = \frac{1}{j} \frac{j}{j} = \frac{j}{j^2} = \frac{j}{-1} = -j$.

$$\begin{aligned}
f(t) &= \frac{a_0}{2} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} [a_n (e^{jn\omega_0 t} + e^{-jn\omega_0 t}) - jb_n (e^{jn\omega_0 t} - e^{-jn\omega_0 t})], \\
&= \frac{a_0}{2} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} [a_n e^{jn\omega_0 t} + a_n e^{-jn\omega_0 t} - jb_n e^{jn\omega_0 t} + jb_n e^{-jn\omega_0 t}], \\
&= \frac{a_0}{2} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} [(a_n - jb_n) e^{jn\omega_0 t} + (a_n + jb_n) e^{-jn\omega_0 t}].
\end{aligned} \tag{2.19}$$

Si se define un nuevo coeficiente c_n tal que

$$c_0 = \frac{a_0}{2}, \quad c_n = \frac{a_n - jb_n}{2}, \quad c_{-n} = \frac{a_n + jb_n}{2}, \tag{2.20}$$

entonces $f(t)$ se expresa como

$$\begin{aligned}
f(t) &= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n e^{jn\omega_0 t} + c_{-n} e^{-jn\omega_0 t}), \\
&= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t} + \sum_{n=-1}^{-\infty} c_n e^{jn\omega_0 t}, \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t}.
\end{aligned} \tag{2.21}$$

Esta ecuación se denomina forma compleja de la serie de Fourier de $f(t)$, o *serie compleja de Fourier* de $f(t)$.

Los coeficientes c_n se pueden evaluar fácilmente en términos de a_n y b_n vistos anteriormente. Por lo tanto, de acuerdo con (2.4), el coeficiente c_0 es

$$c_0 = \frac{1}{2} a_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt, \tag{2.22}$$

y de acuerdo con (2.7) y (2.8), el coeficiente c_n es

$$\begin{aligned}
c_n &= \frac{1}{2} (a_n - jb_n), \\
&= \frac{1}{T} \left[\int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos(n\omega_0 t) dt - j \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin(n\omega_0 t) dt \right],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{T} \left[\int_{-T/2}^{T/2} f(t) (\cos(n\omega_0 t) - j \sin(n\omega_0 t)) dt \right],^{\dagger} \\
&= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt.
\end{aligned} \tag{2.23}$$

De manera análoga, el coeficiente c_{-n} es

$$c_{-n} = \frac{1}{2} (a_n + jb_n) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{jn\omega_0 t} dt. \tag{2.24}$$

Si $f(t)$ es real, entonces

$$c_{-n} = c_n^*, \tag{2.25}$$

donde $*$ indica el conjugado complejo.

Debido a que $f(t)e^{-jn\omega_0 t}$ es periódica con periodo T , se tiene que c_n puede obtenerse combinando (2.22), (2.23) y (2.24) en una sola expresión, es decir,

$$c_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \tag{2.26}$$

donde $\omega_0 = 2\pi/T$, como usualmente se ha definido.

Los coeficientes de las tres formas de las series de Fourier (i.e., seno-coseno, amplitud-fase, y forma exponencial) están relacionados por

$$A_n/\underline{\phi}_n = a_n - jb_n = 2c_n \tag{2.27}$$

ó

$$c_n = |c_n| e^{j\phi_n}, \tag{2.28}$$

donde

$$|c_n| = \frac{1}{2} \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \quad \text{y} \quad \phi_n = -\tan^{-1}(b_n/a_n) \tag{2.29}$$

para todos los valores de n , excepto $n = 0$. En este caso c_0 es real y está definido por (2.22). Por otro lado, de acuerdo con (2.20), los coeficientes de la forma

[†]Fórmula de Euler: $e^{jx} = \cos(x) + j \sin(x)$.

trigonométrica (i.e., seno-coseno) de la serie de Fourier se calculan como

$$a_0 = 2c_0, \quad (2.30)$$

$$a_n = c_n + c_{-n} = c_n + c_n^* = 2\operatorname{Re}[c_n], \quad (2.31)$$

$$b_n = j(c_n - c_{-n}) = j(c_n - c_n^*) = -2\operatorname{Im}[c_n], \quad (2.32)$$

donde Re y Im denotan ‘la parte real de’ y ‘la parte imaginaria de’, respectivamente.

Los gráficos de magnitud y fase de c_n versus $n\omega_0$ son llamados el *espectro de amplitud complejo* y el *espectro de fase complejo* de $f(t)$, respectivamente. Debido a que el índice n toma solamente valores enteros, los espectros de amplitud y fase no son curvas continuas sino que aparecen en la variable discreta $n\omega_n$; por consiguiente, se les denomina *espectros de frecuencia discreta* o *espectros de líneas*.

En conclusión, la serie compleja de Fourier de una función periódica $f(t)$ describe el espectro de $f(t)$ en términos de amplitud y ángulo de fase para armónicos de frecuencia positivos y negativos.

2.2.1. Ejemplos

Ejemplo 1. Encontrar la serie compleja de Fourier para la función diente de sierra mostrada en la Figura 2.6, definida por

$$f(t) = \frac{A}{T}t, \quad 0 < t < T, \quad f(t+T) = f(t).$$

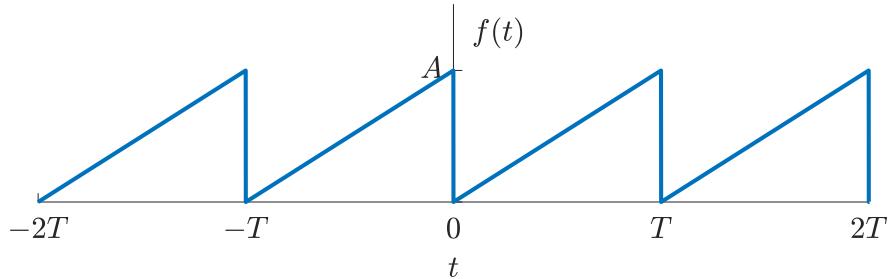


Figura 2.6: Función diente de sierra.

Los coeficientes c_n pueden encontrarse a partir de (2.26):

$$\begin{aligned}
c_n &= \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt, \\
&= \frac{A}{T^2} \int_0^T t e^{-jn\omega_0 t} dt, \\
&= \frac{A}{T^2} \left(-\frac{e^{-jn\omega_0 t}}{(jn\omega_0)^2} - \frac{te^{-jn\omega_0 t}}{jn\omega_0} \right) \Big|_0^T, \\
&= -\frac{A}{T^2} \left(\frac{e^{-jn\omega_0 t}}{(jn\omega_0)^2} + \frac{te^{-jn\omega_0 t}}{jn\omega_0} \right) \Big|_0^T, \\
&= -\frac{A}{T^2} \left[\left(\frac{e^{-jn\omega_0 T}}{(jn\omega_0)^2} + \frac{Te^{-jn\omega_0 T}}{jn\omega_0} \right) - \left(\frac{e^{-jn\omega_0 0}}{(jn\omega_0)^2} + \frac{0e^{-jn\omega_0 0}}{jn\omega_0} \right) \right], \\
&= -\frac{A}{T^2} \left[\frac{e^{-jn\omega_0 T}}{(jn\omega_0)^2} + \frac{Te^{-jn\omega_0 T}}{jn\omega_0} - \frac{1}{(jn\omega_0)^2} \right], \\
&= -\frac{A}{T^2} \left[\frac{e^{-jn\omega_0 T} - 1}{(jn\omega_0)^2} + \frac{Te^{-jn\omega_0 T}}{jn\omega_0} \right], \\
&= -\frac{A}{T^2} \left[\frac{e^{-j2\pi n} - 1}{(jn\omega_0)^2} + \frac{Te^{-j2\pi n}}{jn\omega_0} \right].
\end{aligned}$$

Debido a que $e^{-j2\pi n} = 1$ y $\omega_0 = 2\pi/T$, entonces

$$c_n = -\frac{A}{T^2} \frac{T}{j\frac{2\pi}{T}n} = j \frac{A}{2\pi n} = \frac{A}{2\pi n} e^{j\frac{\pi}{2}}.$$

Para $n = 0$, c_0 se calcula a partir de (2.22):

$$c_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt = \frac{A}{T^2} \int_0^T t dt = \frac{A}{2}.$$

Finalmente, la serie compleja de Fourier de $f(t)$ es

$$\begin{aligned}
f(t) &= \frac{A}{2} + \frac{A}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n} e^{j\frac{\pi}{2}} \cdot e^{jn\omega_0 t}, \\
&= \frac{A}{2} + \frac{A}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n} e^{j(n\omega_0 t + \frac{\pi}{2})},
\end{aligned}$$

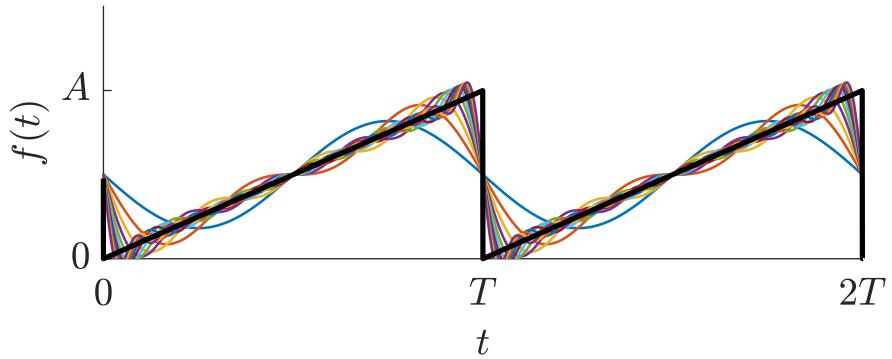


Figura 2.7: Función diente de sierra aproximada con los primeros 11 términos.

donde la sumatoria solo incluye enteros diferentes de cero.

Ejemplo 2. Reducir el resultado del problema anterior a la forma trigonométrica de la serie de Fourier.

De acuerdo con las expresiones (2.30)–(2.32) se tiene que

$$a_0 = A, \quad a_n = 0, \quad \text{y} \quad b_n = -\frac{A}{\pi n}.$$

Entonces, la serie trigonométrica de Fourier queda como (Figura 2.7)

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t)), \\ &= \frac{A}{2} - \frac{A}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin(n\omega_0 t). \end{aligned}$$

Ejemplo 3. Encontrar los espectros de frecuencia para la función periódica $f(t)$ mostrada en la Figura 2.8, la cual consta de un tren de pulsos rectangulares idénticos de magnitud A y duración d .

La función $f(t)$ se puede expresar en un periodo como:

$$f(t) = \begin{cases} A & \text{para } -\frac{1}{2}d < t < \frac{1}{2}d, \\ 0 & \text{para } -\frac{1}{2}T < t < -\frac{1}{2}d, \quad \frac{1}{2}d < t < \frac{1}{2}T. \end{cases}$$

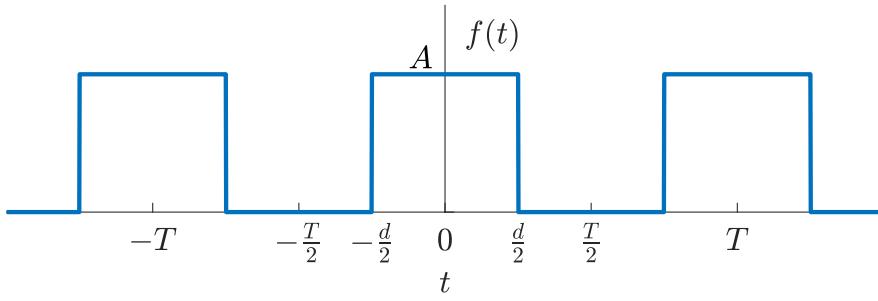


Figura 2.8: Tren de pulsos periódico.

De acuerdo con (2.23) se tiene

$$\begin{aligned}
 c_n &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \\
 &= \frac{A}{T} \int_{-d/2}^{d/2} e^{-jn\omega_0 t} dt, \\
 &= \frac{A}{T} \frac{1}{-jn\omega_0} e^{-jn\omega_0 t} \Big|_{-d/2}^{d/2}, \\
 &= \frac{A}{T} \frac{1}{jn\omega_0} (e^{jn\omega_0 d/2} - e^{-jn\omega_0 d/2}), \\
 &= \frac{A}{T} \frac{1}{jn\omega_0} \frac{1}{2} d (e^{jn\omega_0 d/2} - e^{-jn\omega_0 d/2}), \\
 &= \frac{Ad}{T} \frac{1}{\frac{n\omega_0 d}{2}} \frac{1}{2j} (e^{jn\omega_0 d/2} - e^{-jn\omega_0 d/2}), \\
 &= \frac{Ad}{T} \frac{\sin(\frac{n\omega_0 d}{2})}{\frac{n\omega_0 d}{2}}.
 \end{aligned}$$

Considerando que \$\omega_0 = 2\pi/T\$, entonces \$n\omega_0 d/2 = n\pi d/T\$; por lo tanto,

$$\begin{aligned}
 c_n &= \frac{Ad}{T} \frac{\sin(\frac{n\pi d}{T})}{\frac{n\pi d}{T}}, \\
 &= \frac{Ad}{T} \text{sinc}\left(\frac{n\pi d}{T}\right).
 \end{aligned}$$

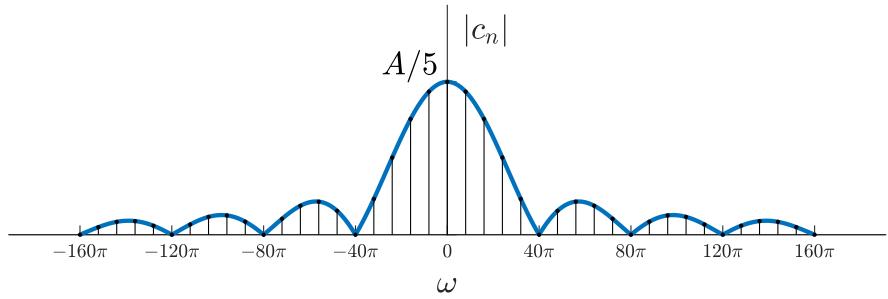


Figura 2.9: Espectro de amplitud del tren de pulsos rectangulares en la Figura 2.8. El espaciado entre líneas es ω_0 .

La función $\frac{\sin(x)}{x}$ es conocida como la *función sinc*: $\text{sinc}(x)$. Para un argumento de cero, la función sinc es la unidad: $\text{sinc}(0) = 1$. Para un múltiplo integral de π , el valor de la función sinc es cero: $\text{sinc}(n\pi) = 0$, $n = 1, 2, 3, \dots$

Debido a que c_n es real, entonces el espectro de fase es cero. El espectro de amplitud se obtiene graficando $|c_n|$ versus la variable discreta $n\omega_0$, tal que el espectro de frecuencia existe solamente cuando

$$\omega = 0, \frac{\pm 2\pi}{T}, \frac{\pm 4\pi}{T}, \dots, \text{etc.}$$

Se debe considerar el espectro para algunos valores específicos de d y T ; por ejemplo, $A = 10$, $d = 1/20$ y $T = 1/4$ de segundo, de modo que $\omega_0 = 2\pi/T = 8\pi$. Por consiguiente, el espectro de amplitud existe cuando

$$\omega = 0, \pm 8\pi, \pm 16\pi, \dots, \text{etc.,}$$

y se muestra en la Figura 2.9. Nótese que la función sinc forma la envolvente del espectro de amplitud.

Hay que señalar que el espectro de fase es cero debido a la simetría de los pulsos rectangulares alrededor del eje vertical. El siguiente ejemplo ilustrará el caso en que no hay dicha simetría, lo cual se consigue desplazando el origen en $\frac{1}{2}d$.

Ejemplo 4. Encontrar los espectros de frecuencia de la función periódica mostrada en la Figura 2.10.

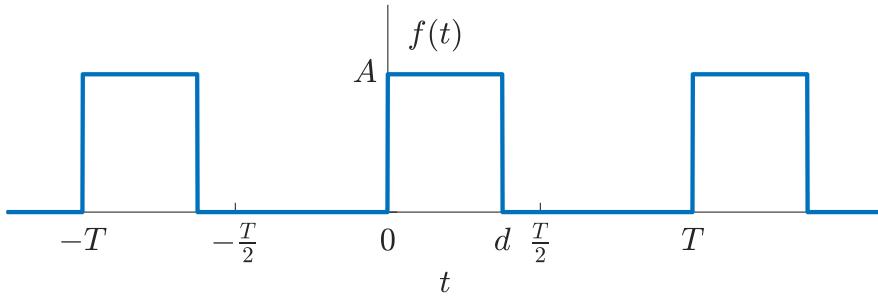


Figura 2.10: Tren de pulsos periódico desplazado del origen en $\frac{1}{2}d$.

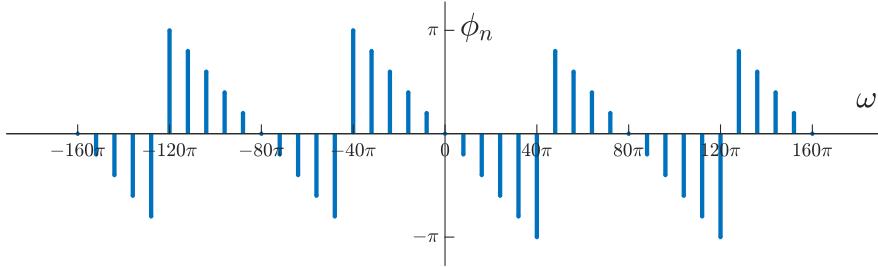


Figura 2.11: Espectro de fase del tren de pulsos periódico en la Figura 2.10.

De acuerdo con (2.26) se tiene:

$$\begin{aligned}
 c_n &= \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt = \frac{A}{T} \int_0^d e^{-jn\omega_0 t} dt, \\
 &= \frac{A}{T} \frac{1}{-jn\omega_0} e^{-jn\omega_0 t} \Big|_0^d = \frac{A}{T} \frac{1}{jn\omega_0} (1 - e^{-jn\omega_0 d}), \\
 &= \frac{A}{T} \frac{1}{jn\omega_0} e^{-jn\omega_0 d/2} (e^{jn\omega_0 d/2} - e^{-jn\omega_0 d/2})^\dagger, \\
 &= \frac{A}{T} \frac{1}{jn\omega_0} \frac{1}{2} d (e^{jn\omega_0 d/2} - e^{-jn\omega_0 d/2}) e^{-jn\omega_0 d/2}, \\
 &= \frac{Ad}{T} \frac{1}{\frac{n\omega_0 d}{2}} \frac{1}{2j} (e^{jn\omega_0 d/2} - e^{-jn\omega_0 d/2}) e^{-jn\omega_0 d/2}, \\
 &= \frac{Ad \sin\left(\frac{n\omega_0 d}{2}\right)}{T} e^{-jn\omega_0 d/2}, \\
 &= |c_n| e^{j\phi_n}.
 \end{aligned}$$

[†]Regla del producto: $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$.

Nótese que el espectro de amplitud es exactamente igual que el mostrado en la Figura 2.9 y no se ve afectado por el desplazamiento, es decir,

$$|c_n| = \left| \frac{Ad}{T} \frac{\sin\left(\frac{n\omega_0 d}{2}\right)}{\frac{n\omega_0 d}{2}} \right|.$$

Sin embargo, considerando $\omega_0 = 2\pi/T$, el espectro de fase ahora es

$$\phi_n = -\frac{n\omega_0 d}{2} = -\frac{n\pi d}{T} \text{ radianes,}$$

y se muestra en la Figura 2.11.

2.3. Sumario

- Una función periódica es aquella que se repite así misma cada T segundos, es decir, $f(t \pm nT) = f(t)$, $n = 1, 2, 3, \dots$
- Cualquier función periódica $f(t)$ puede expresarse en términos de funciones sinusoidales usando series de Fourier:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t).$$

- Los coeficientes a_0 , a_n y b_n de las series de Fourier se calculan como

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt, \\ a_n &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos(n\omega_0 t) dt, \\ b_n &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin(n\omega_0 t) dt. \end{aligned}$$

- Determinar el tipo de paridad de la función simplifica el cálculo de los coeficientes de Fourier. Para una función par: $a_0 \neq 0$, $a_n \neq 0$ y $b_n = 0$. Para una función impar: $a_0 = 0$, $a_n = 0$ y $b_n \neq 0$.

- Las series de Fourier se pueden definir de tres formas: seno-coseno, amplitud-fase, y forma exponencial.
- La serie compleja de Fourier de cualquier función periódica $f(t)$ se expresa en términos de exponentiales complejas:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t}.$$

- Los coeficientes de la serie compleja de Fourier de una señal periódica $f(t)$ con periodo T se calculan como:

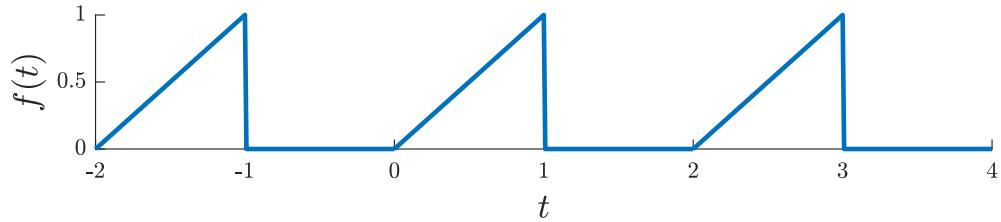
$$c_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

- La serie de Fourier es una herramienta matemática para encontrar los espectros de amplitud y fase de una función periódica.
- Las series de Fourier tienen distintas aplicaciones en diferentes campos, por ejemplo:
 - Procesamiento de señales: descomponer de una señal en sus armónicos.
 - Teoría de la aproximación: representar funciones como un polinomio trigonométrico.
 - Teoría de control: predecir el comportamiento de la solución de una ecuación diferencial.
 - Ecuaciones diferenciales parciales: resolver ecuaciones diferenciales parciales de alto orden por el método de separación de variables.

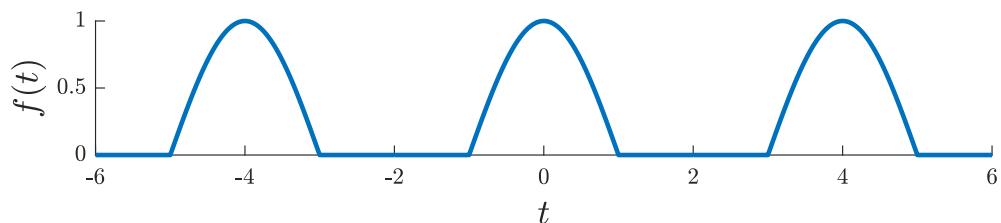
2.4. Ejercicios

Ejercicio 1. Encontrar las series trigonométricas de Fourier y graficar los primeros 10 términos de las siguientes funciones periódicas:

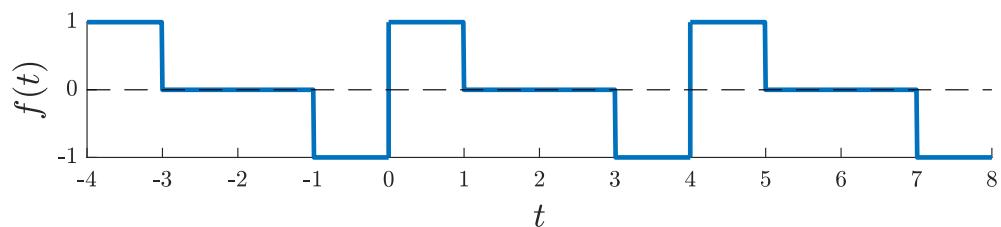
- $f(t) = \begin{cases} t, & 0 < t < 1 \\ 0, & 1 < t < 2 \end{cases}$



- $f(t) = \begin{cases} 0, & -2 < t < -1 \\ \cos \frac{\pi}{2}t, & -1 < t < 1 \\ 0, & 1 < t < 2 \end{cases}$

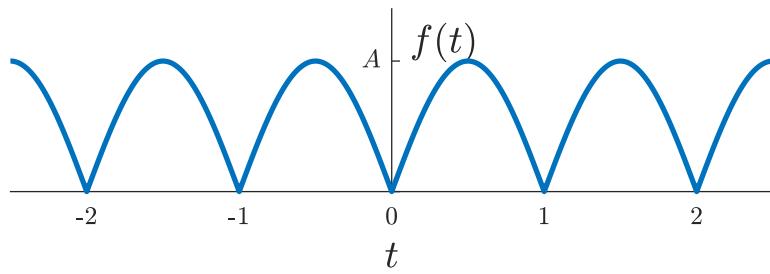


- $f(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < 1 \\ 0, & 1 < t < 3 \\ -1, & 3 < t < 4 \end{cases}$



Ejercicio 2. Encontrar la serie compleja de Fourier de la función periódica sinusoidal rectificada definida por:

$$f(t) = A \sin(\pi t), \quad 0 < t < 1, \quad f(t + T) = f(t), \quad T = 1.$$



Ejercicio 3. Reducir el resultado del ejercicio anterior a la forma trigonométrica de la serie de Fourier y graficar los primeros 10 términos.

Ejercicio 4. Encontrar la serie compleja de Fourier de la función

$$f(t) = e^t, \quad 0 < t < 2\pi, \quad f(t + 2\pi) = f(t).$$

3. Transformada de Fourier

3.1. Definición

Las series de Fourier son una herramienta útil para el tratamiento de señales periódicas. Sin embargo, existen muchos problemas del mundo real que involucran señales no periódicas. Para analizar este tipo de señales se puede utilizar la *transformada de Fourier*, la cual asume que una función no periódica es una función periódica con periodo $T \rightarrow \infty$.

Para entender la conexión entre una función no periódica y su contraparte periódica, considérese la forma exponencial de la serie de Fourier, es decir,

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t}, \quad (3.1)$$

donde

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt. \quad (3.2)$$

La frecuencia fundamental es

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} \quad (3.3)$$

y el espacio entre armónicos adyacentes es

$$\Delta\omega = (n+1)\omega_0 - n\omega_0 = \omega_0 = \frac{2\pi}{T}. \quad (3.4)$$

Sustituyendo (3.2) en (3.1) se tiene

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \right] e^{jn\omega_0 t}, \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{\Delta\omega}{2\pi} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \right] e^{jn\omega_0 t}, \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \right] \Delta\omega e^{jn\omega_0 t}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Si se hace $T \rightarrow \infty$, la sumatoria se convierte en integración, el incremental de separación $\Delta\omega$ se convierte en el diferencial de separación $d\omega$, y el armónico

de frecuencia discreta $n\omega_0$ se convierte en la frecuencia continua ω . Por lo tanto, cuando $T \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned}\sum_{n=-\infty}^{\infty} &\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \\ \Delta\omega &\Rightarrow d\omega \\ n\omega_0 &\Rightarrow \omega\end{aligned}$$

tal que (3.5) se convierte en

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \right] e^{j\omega t} d\omega, \quad (3.6)$$

donde $e^{\pm j\omega t} = \cos \omega t \pm j \sin \omega t$ es la fórmula de Euler. Si se define

$$F(\omega) = \mathcal{F}[f(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt, \quad (3.7)$$

entonces (3.6) se convierte en

$$f(t) = \mathcal{F}^{-1}[F(\omega)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega, \quad (3.8)$$

donde \mathcal{F} es el operador de la transformada de Fourier, y \mathcal{F}^{-1} representa el operador de la inversa de la transformada de Fourier.

Por lo tanto, las funciones en (3.7) y (3.8) forman el par de transformadas de Fourier:

$$f(t) \Leftrightarrow F(\omega) \quad (3.9)$$

ya que a partir de una se deriva la otra. Nótese que la transformada de Fourier es una integral de transformación de $f(t)$ del dominio del tiempo al dominio de la frecuencia, mientras que la inversa de la transformada de Fourier es una integral de transformación de $F(\omega)$ del dominio de la frecuencia al dominio del tiempo.

En general, $F(\omega)$ es una función compleja y se puede expresar de forma polar como:

$$F(\omega) = |F(\omega)| e^{j\phi(\omega)}, \quad (3.10)$$

Tabla 3.1: Significado de componentes en (3.10).

Componente	Significado
$\text{Re}[F(\omega)]$	Contribución de la función coseno con frecuencia ω .
$\text{Im}[F(\omega)]$	Contribución de la función seno con frecuencia ω .
$ F(\omega) $	Amplitud del espectro en la frecuencia ω .
$\phi(\omega)$	Proporción relativa de seno y coseno con frecuencia ω .

donde $|F(\omega)|$ y $\phi(\omega)$ son la magnitud y la fase del espectro expresadas como:

$$|F(\omega)| = \sqrt{\text{Re}^2[F(\omega)] + \text{Im}^2[F(\omega)]}, \quad (3.11)$$

y

$$\phi(\omega) = \tan^{-1} \left(\frac{\text{Im}[F(\omega)]}{\text{Re}[F(\omega)]} \right), \quad (3.12)$$

donde Re y Im son la parte real e imaginaria del espectro, respectivamente. En la Tabla 3.1 se resume el significado de cada componente en (3.10).

Por otro lado, se tiene que $|F(\omega)|$ es una función par y $\phi(\omega)$ es una función impar, es decir

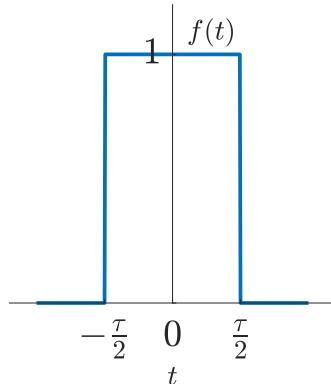
$$|F(-\omega)| = |F(\omega)| \quad \text{y} \quad \phi(-\omega) = -\phi(\omega).$$

En conclusión, la transformada de Fourier es una herramienta matemática que permite descomponer una señal no periódica en sus armónicos constituyentes, como se muestra en la Figura 3.1.[†]

3.1.1. Ejemplos

Ejemplo 1. Encontrar la transformada de Fourier de un pulso rectangular definido por

$$f(t) = \begin{cases} 1 & |t| < \frac{\tau}{2} \\ 0 & |t| > \frac{\tau}{2} \end{cases}$$



[†]<http://www.tomasboril.cz/fourierseries3d/en/>.

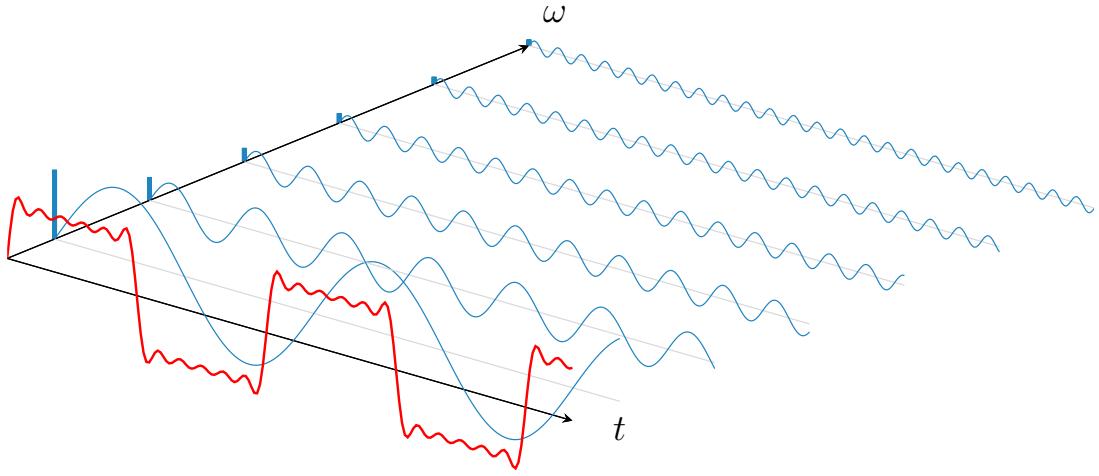


Figura 3.1: Descomposición de una señal cuadrada en sus armónicos.

A partir de (3.7) se tiene (Figura 3.2):

$$\begin{aligned}
 F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt, \\
 &= \int_{-\tau/2}^{\tau/2} e^{-j\omega t} dt, \\
 &= -\frac{1}{j\omega} e^{-j\omega t} \Big|_{-\tau/2}^{\tau/2}, \\
 &= \frac{1}{j\omega} \left(e^{j\omega \frac{\tau}{2}} - e^{-j\omega \frac{\tau}{2}} \right), ^\dagger \\
 &= \frac{2}{\omega} \sin \left(\omega \frac{\tau}{2} \right), \\
 &= \frac{2}{\omega} \frac{1}{2} \tau \sin \left(\omega \frac{\tau}{2} \right), \\
 &= \tau \frac{\sin \left(\omega \frac{\tau}{2} \right)}{\omega \frac{\tau}{2}}, \\
 &= \tau \text{sinc} \left(\omega \frac{\tau}{2} \right).
 \end{aligned}$$

[†] $\sin x = \text{Im}(e^{jx}) = \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j}$.

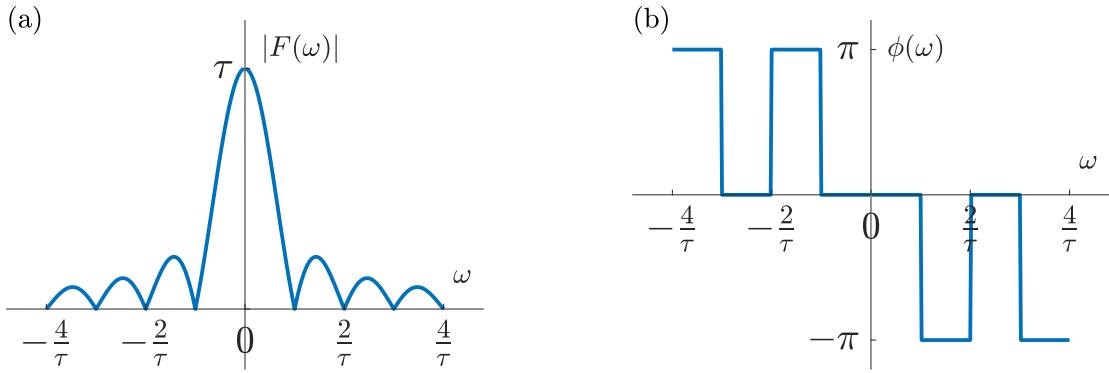
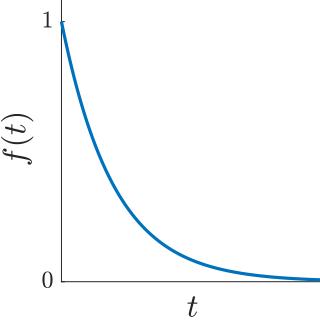


Figura 3.2: Espectros de Fourier del pulso rectangular: (a) magnitud y (b) fase.

Ejemplo 2. Encontrar la transformada de Fourier de la función exponencial:

$$f(t) = \begin{cases} e^{-\alpha t} & t > 0, \\ 0 & t < 0. \end{cases}$$



A partir de (3.7) se tiene (Figura 3.3):

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt, \\ &= \int_0^{\infty} e^{-\alpha t}e^{-j\omega t} dt, \\ &= \int_0^{\infty} e^{-(\alpha+j\omega)t} dt, \\ &= -\frac{1}{\alpha+j\omega} e^{-(\alpha+j\omega)t} \Big|_0^{\infty},^{\dagger} \\ &= \frac{1}{\alpha+j\omega}. \end{aligned}$$

[†]\$e^{-\infty} = \frac{1}{e^{\infty}} = \frac{1}{\infty} \approx 0\$.

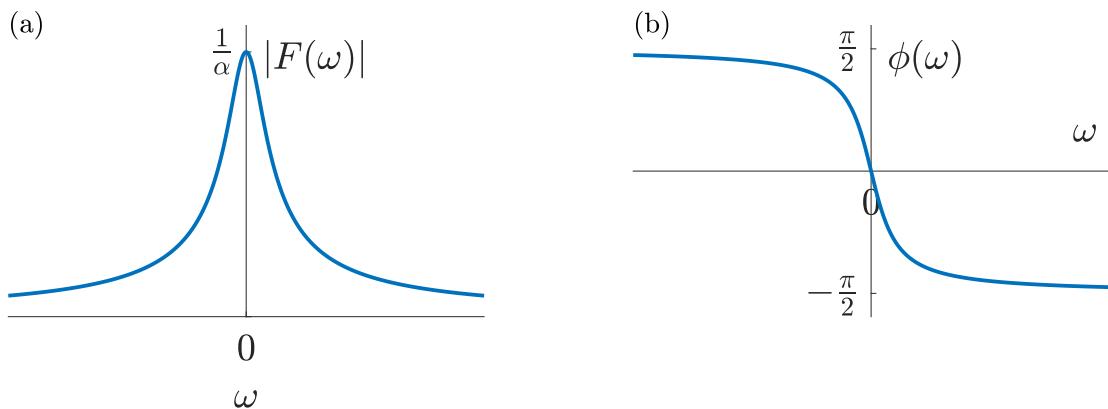


Figura 3.3: Espectros de Fourier de la función exponencial: (a) magnitud y (b) fase.

3.2. Propiedades

- **Linealidad:** Si $F_1(\omega)$ y $F_2(\omega)$ son transformadas de Fourier de $f_1(t)$ y $f_2(t)$, respectivamente, entonces

$$\mathcal{F}[a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)] = a_1 F_1(\omega) + a_2 F_2(\omega), \quad (3.13)$$

donde a_1 y a_2 son constantes. Esta propiedad indica que la transformada de Fourier de una combinación lineal de funciones es la misma que la combinación lineal de las transformadas de las funciones individuales.

- **Escalamiento en el tiempo:** Si $F(\omega) = \mathcal{F}[f(t)]$, entonces

$$\mathcal{F}[f(at)] = \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\omega}{a}\right), \quad (3.14)$$

donde a es una constante. Esta propiedad indica que la expansión en el tiempo ($|a| > 1$) corresponde a una compresión en la frecuencia, o inversamente, una compresión en el tiempo ($|a| < 1$) implica una expansión en la frecuencia.

- **Desplazamiento en el tiempo:** Si $F(\omega) = \mathcal{F}[f(t)]$, entonces

$$\mathcal{F}[f(t - t_0)] = e^{-j\omega t_0} F(\omega), \quad (3.15)$$

esto es, un atraso en el dominio del tiempo corresponde con un desplazamiento de fase en el dominio de la frecuencia.

- **Desplazamiento en la frecuencia:** Si $F(\omega) = \mathcal{F}[f(t)]$, entonces

$$\mathcal{F}[f(t)e^{j\omega_0 t}] = F(\omega - \omega_0), \quad (3.16)$$

lo cual significa que un desplazamiento en el dominio de la frecuencia implica un desplazamiento de fase en el dominio del tiempo.

- **Diferenciación en el tiempo:** Dado que $F(\omega) = \mathcal{F}[f(t)]$, entonces

$$\mathcal{F}[f'(t)] = j\omega F(\omega), \quad (3.17)$$

esto es, la transformada de la derivada de $f(t)$ es obtenida por la multiplicación de $f(t)$ por $j\omega$. De manera general, para la n -ésima derivada de $f(t)$ se tiene:

$$\mathcal{F}[f^{(n)}(t)] = (j\omega)^n F(\omega). \quad (3.18)$$

- **Integración en el tiempo:** Dado que $F(\omega) = \mathcal{F}[f(t)]$, entonces

$$\mathcal{F}\left[\int_{-\infty}^t f(t)dt\right] = \frac{F(\omega)}{j\omega} + \pi F(0)\delta(\omega), \quad (3.19)$$

esto es, la transformada de la integral de $f(t)$ es obtenida dividiendo la transformada de $f(t)$ por $j\omega$ y sumando al resultado la función impulso que refleja la componente de corriente continua (DC, *direct current*).

- **Inversión:** Si $F(\omega) = \mathcal{F}[f(t)]$, entonces

$$\mathcal{F}[f(-t)] = F(-\omega) = F^*(\omega), \quad (3.20)$$

donde el asterisco denota el conjugado complejo[†]. Esta propiedad establece que la inversión de $f(t)$ sobre el eje del tiempo invierte $F(\omega)$ sobre el eje de la frecuencia. Esto puede ser visto como un caso especial del escalamiento en el tiempo para el cual $a = -1$.

- **Dualidad:** Esta propiedad establece que si $F(\omega)$ es la transformada de Fourier de $f(t)$, entonces la transformada de Fourier de $F(t)$ es $2\pi f(-\omega)$, y se

[†]El conjugado de un número complejo se obtiene cambiando el signo de la componente imaginaria.

escribe como

$$\mathcal{F}[f(t)] = F(\omega) \Rightarrow \mathcal{F}[F(t)] = 2\pi f(-\omega). \quad (3.21)$$

- **Modulación:** si $\mathcal{F}[f(t)] = F(\omega)$, entonces

$$\mathcal{F}[f(t) \cos(\omega_0 t)] = \frac{1}{2} [F(\omega + \omega_0) + F(\omega - \omega_0)]. \quad (3.22)$$

Esta propiedad establece que la transformada de Fourier de la señal modulada $f(t) \cos(\omega_0 t)$ es la transformada de Fourier de la señal de entrada $f(t)$, desplazada por $\pm\omega_0$.

- **Teorema de Parseval:** si $\mathcal{F}[f(t)] = F(\omega)$, entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega, \quad (3.23)$$

lo cual indica que el contenido de energía de $f(t)$ está dado por $\frac{1}{2\pi}$ multiplicado por el área bajo la curva de $|F(\omega)|^2$. Entonces, la cantidad $|F(\omega)|^2$ se denomina *espectro de energía* o *función de densidad de energía espectral* de $f(t)$.

3.3. Teorema de convolución

La convolución es un operador matemático que transforma dos funciones en una tercera función que expresa la cantidad de traslape de una función que se desplaza sobre la otra. Este operador es útil para describir el comportamiento de un sistema lineal[†] invariante en el tiempo[‡] mediante la siguiente integral:

$$g(t) = f(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)h(t - \tau)d\tau, \quad (3.24)$$

donde $f(t)$ es la señal de entrada, $h(t)$ es la respuesta al impulso del sistema, y $g(t)$ es la señal de salida. Esta operación representa una suma ponderada entre la señal de entrada $f(t)$ y los términos de $h(t - \tau)$ desplazado un tiempo t , como se ilustra en la Figura 3.4.

[†]Cumple con el principio de superposición: aditividad y homogeneidad.

[‡]Un desplazamiento en el tiempo de la señal de entrada causa un desplazamiento idéntico en la señal de salida.

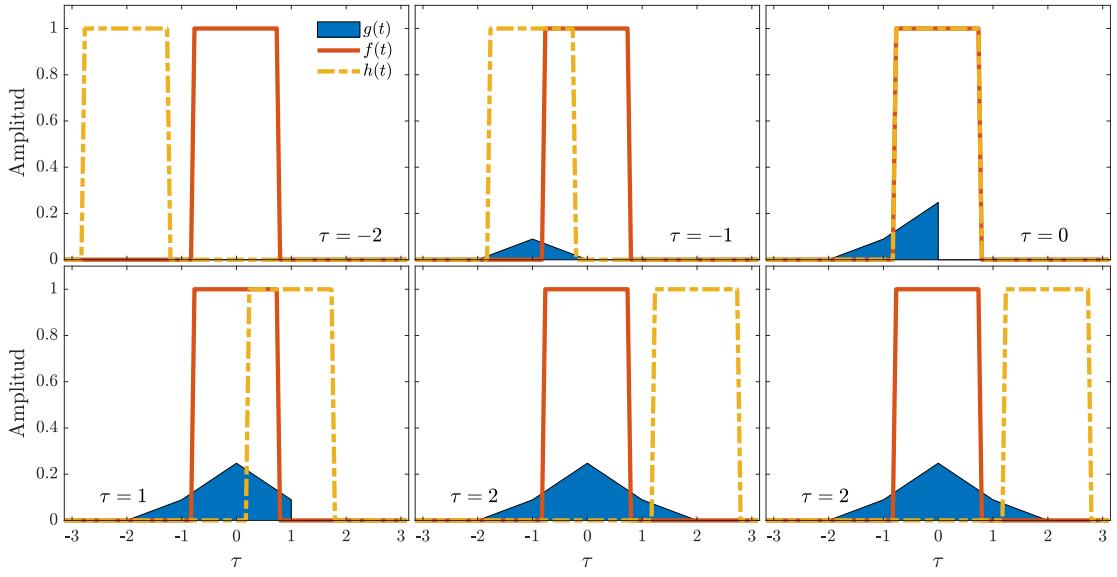


Figura 3.4: Convolución entre pulsos rectangulares para seis desplazamientos en el tiempo τ de la función $h(t)$.

Debido a que $f * h$ es una función integrable, entonces la transformada de Fourier de la convolución es:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[f(t) * h(t)] &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)h(t-\tau)d\tau \right] e^{-j\omega t} dt, \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \left[\int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)e^{-j\omega t} dt \right] d\tau. \end{aligned} \quad (3.25)$$

De acuerdo con la propiedad de *desplazamiento en el tiempo* en (3.15) se tiene que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)e^{-j\omega t} dt = e^{-j\omega\tau} H(\omega). \quad (3.26)$$

Entonces, sustituyendo (3.26) en (3.25) se tiene:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[f(t) * h(t)] &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)e^{-j\omega\tau} H(\omega) d\tau, \\ &= H(\omega) \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)e^{-j\omega\tau} d\tau, \\ &= H(\omega)F(\omega). \end{aligned} \quad (3.27)$$

Por lo tanto, el *teorema de convolución* establece que una convolución en el dominio del tiempo equivale al producto de dos transformadas de Fourier en el dominio de la frecuencia (Figura 3.5):

$$f(t) * h(t) \Leftrightarrow H(\omega)F(\omega), \quad (3.28)$$

donde el símbolo ‘ \Leftrightarrow ’ indica que la expresión de la derecha se obtiene con la transformada de Fourier de la expresión de la izquierda, mientras que la expresión de la izquierda se obtiene con la transformada inversa de Fourier de la derecha.

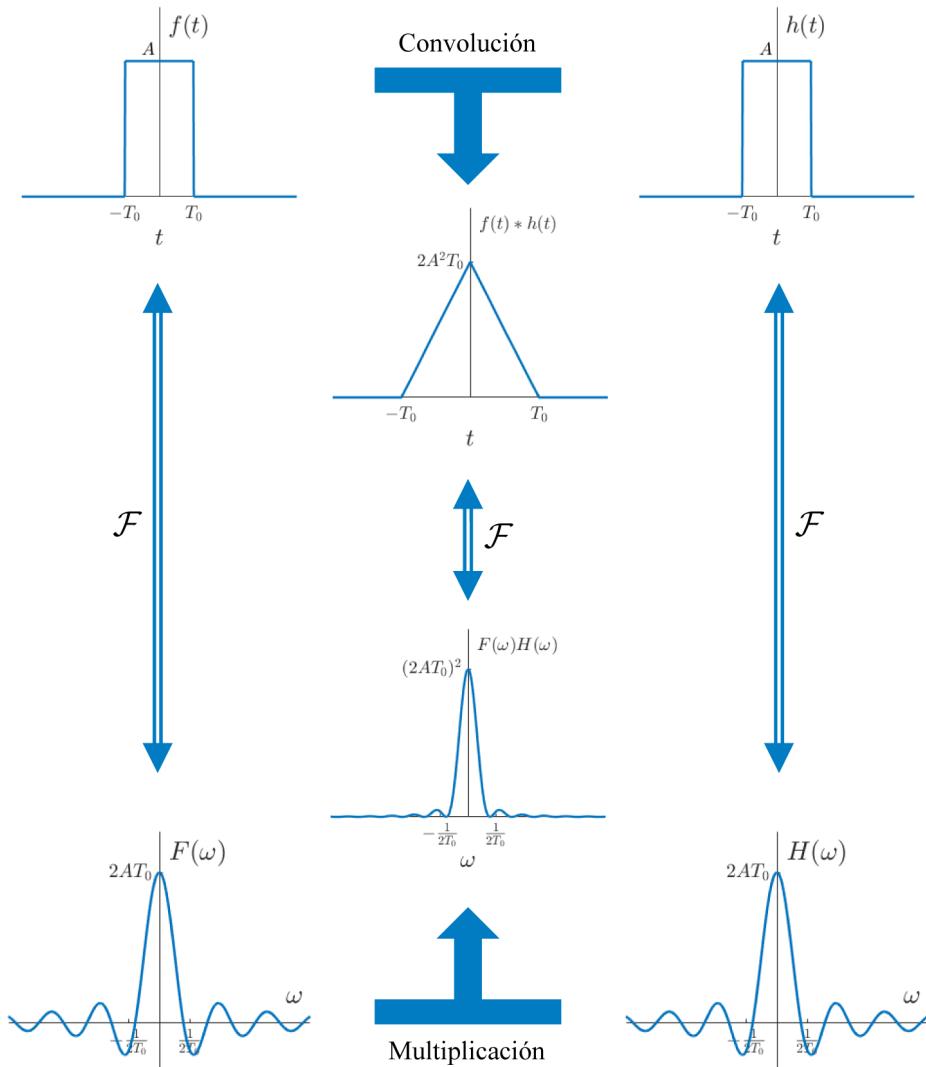


Figura 3.5: Ilustración gráfica del teorema de convolución.

3.4. Transformadas de Fourier de funciones especiales

3.4.1. Función impulso

La función impulso unitario $\delta(t)$, conocida como función delta de Dirac, se define como

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty & t = 0, \\ 0 & t \neq 0, \end{cases} \quad (3.29)$$

lo cual indica que $\delta(t)$ es cero excepto en $t = 0$, donde se hace infinita, tal que satisface la siguiente identidad

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1. \quad (3.30)$$

La función $\delta(t)$ representa un pulso idealizado que en la práctica solo puede ser aproximado. Su anchura se aproxima a cero conforme su amplitud se aproxima a infinito mientras que su área bajo la curva permanece constante en un valor unitario. Por lo tanto, un pulso de área unitaria de ancho ϵ se define como

$$\delta_{\epsilon}(t) = \begin{cases} \frac{1}{\epsilon} & -\frac{1}{2}\epsilon < t < \frac{1}{2}\epsilon, \\ 0 & \text{otro caso,} \end{cases} \quad (3.31)$$

lo cual indica que si $\epsilon \rightarrow 0$ la amplitud del pulso aumenta para preservar su área unitaria, como se muestra en la Figura 3.6(a). Por practicidad, la amplitud de la función impulso se representa por su área en vez de su verdadera altura, como se muestra en la Figura 3.6(b).

La transformada de Fourier de un impulso unitario está dada por

$$\mathcal{F}[\delta(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j\omega t} dt = e^{-j\omega t} \Big|_{t=0} = 1, \quad (3.32)$$

lo cual indica que la transformada de Fourier de la función impulso unitario es la unidad, es decir, su densidad espectral es uniforme en todo el intervalo de frecuencia, como se muestra en la Figura 3.6(c).

Considérese el caso de una función impulso desplazada t_0 . Entonces, de acuerdo

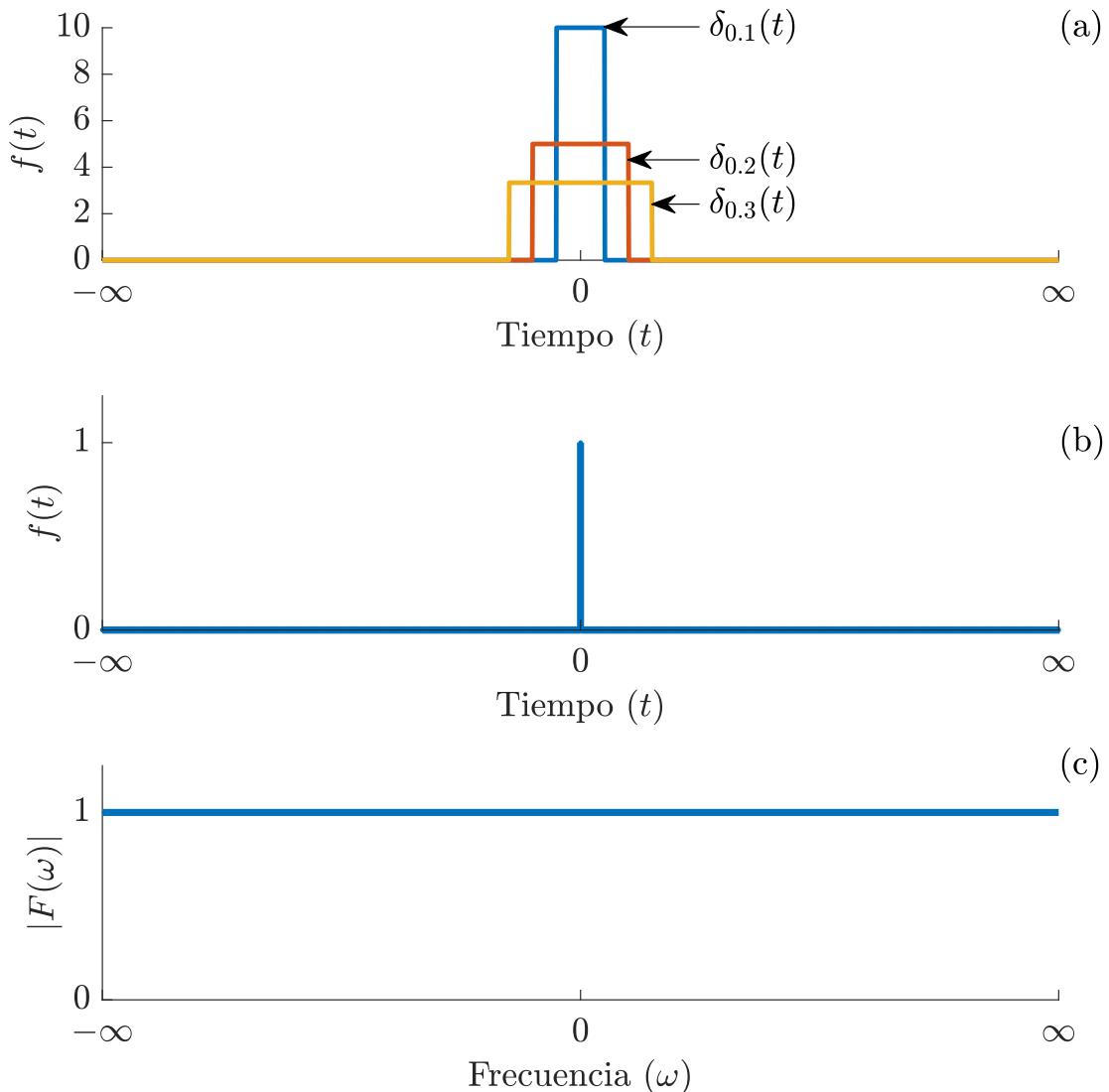


Figura 3.6: (a) Aproximación de la función impulso. (b) Función impulso unitario. (c) Transformada de Fourier de la función impulso.

con la propiedad de *desplazamiento en el tiempo* en (3.15) se tiene que

$$\mathcal{F}[\delta(t - t_0)] = 1 \cdot e^{-j\omega t_0} = e^{-j\omega t_0}, \quad (3.33)$$

esto indica que la transformada de Fourier de un impulso desplazado es una expo-

nencial compleja; por lo tanto, su magnitud es unitaria[†].

3.4.2. Valores constantes

La transformada de Fourier de una constante A se puede derivar a partir de (3.32) y de la propiedad de *dualidad* en (3.21), como se muestra en la Figura 3.7, esto es

$$\mathcal{F}[1] = 2\pi\delta(-\omega) = 2\pi\delta(\omega). \quad (3.34)$$

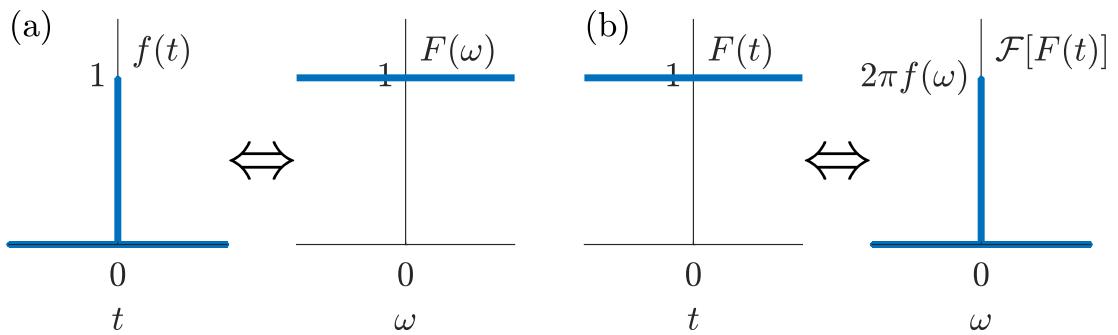


Figura 3.7: Ilustración de la propiedad de dualidad de la transformada de Fourier: (a) transformada de un impulso, y (b) transformada de un nivel de DC unitario.

Por consiguiente, $\mathcal{F}[A] = A2\pi\delta(\omega)^{\ddagger}$. Esto indica que la única frecuencia que se puede relacionar con un valor constante es la frecuencia cero (corriente directa, DC), como se muestra en la Figura 3.8. Se puede observar que para una función $f(t) = A$ que es infinitamente ancha, su transformada de Fourier es infinitesimalmente angosta.

3.4.3. Escalón unitario

La función escalón unitario (Figura 3.9(a)) se define como

$$u(t) = \begin{cases} 1 & t > 0, \\ 0 & t < 0. \end{cases} \quad (3.35)$$

[†] $|e^{j\theta}| = \sqrt{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta} = 1.$

[‡] $\delta(-\omega) = \delta(\omega).$

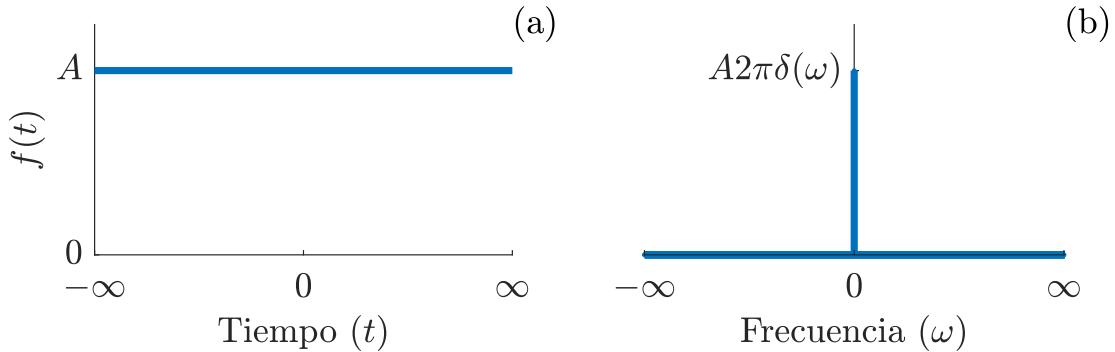


Figura 3.8: (a) Valor constante A . (b) Transformada de Fourier de un valor constante.

Por otro lado se tiene que

$$\frac{du(t)}{dt} = \delta(t), \quad (3.36)$$

lo cual indica que la derivada de la función escalón es la función impulso. Entonces, de acuerdo con la propiedad de *diferenciación en el tiempo* en (3.17) se tiene que

$$\mathcal{F}[\delta(t)] = j\omega F(\omega), \quad (3.37)$$

donde $F(\omega)$ es la transformada de Fourier de $u(t)$. Por lo tanto, de acuerdo con la definición en (3.32), se tiene

$$1 = j\omega F(\omega), \quad (3.38)$$

y por consiguiente

$$F(\omega) = \frac{1}{j\omega}. \quad (3.39)$$

Desafortunadamente la expresión en (3.39) está indefinida para $\omega = 0$. Para resolver este inconveniente, se puede calcular la transformada de Fourier de la función escalón unitario a partir de la función signo (Figura 3.9(b)), definida como

$$\text{sgn}(t) = \begin{cases} +1 & t > 0, \\ -1 & t < 0, \end{cases} \quad (3.40)$$

la cual se puede aproximar como

$$f_\alpha(t) = \begin{cases} e^{-\alpha t} & t > 0, \\ -e^{\alpha t} & t < 0, \end{cases} \quad \text{con } \alpha > 0. \quad (3.41)$$

Adaptando la transformada de Fourier de una función exponencial se tiene que

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[f_\alpha(t)] &= -\mathcal{F}[e^{\alpha t}] + \mathcal{F}[e^{-\alpha t}], \\ &= -\frac{1}{\alpha - j\omega} + \frac{1}{\alpha + j\omega}, \\ &= \frac{-(\alpha + j\omega) + (\alpha - j\omega)}{\alpha^2 + \omega^2}, \\ &= -\frac{2j\omega}{\alpha^2 + \omega^2}, \end{aligned}$$

donde el parámetro α controla qué tan rápido la función exponencial varía. Conforme $\alpha \rightarrow 0$, la función función exponencial se acerca cada vez más a una función signo (Figura 3.9(c)). Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[\operatorname{sgn}(t)] &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \mathcal{F}[f_\alpha(t)], \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \left(-\frac{2j\omega}{\alpha^2 + \omega^2} \right), \\ &= -\frac{2j}{\omega}, {}^\dagger \\ &= \frac{2}{j\omega}. \end{aligned}$$

La función escalón unitario puede ser obtenida sumando 1 a la función signo para todo t y después dividiendo el resultado entre 2, es decir,

$$u(t) = \frac{1}{2}(1 + \operatorname{sgn}(t)). \quad (3.42)$$

Finalmente usando la propiedad de *linealidad* en (3.13), la transformada de Fourier

[†] $1/j = -j$

de un escalón unitario (Figura 3.9(d)) es

$$\mathcal{F}[u(t)] = \frac{1}{2}\mathcal{F}[1] + \frac{1}{2}\mathcal{F}[\text{sgn}(t)] = \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}. \quad (3.43)$$

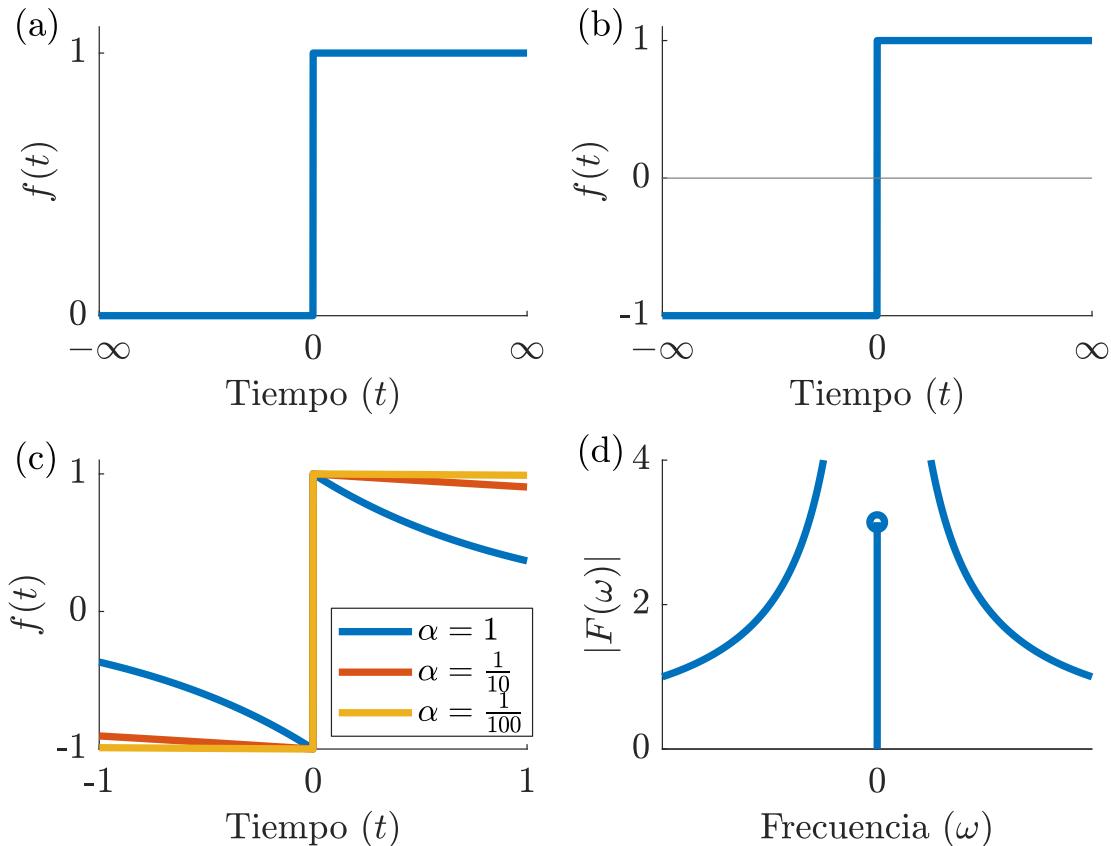


Figura 3.9: (a) Función escalón unitario. (b) Función signo. (c) Función signo aproximada con función exponencial. (d) Magnitud del espectro de Fourier de la función escalón unitario.

3.4.4. Funciones periódicas

A partir de impulsos desplazados en el dominio de la frecuencia, se puede definir la transformada de Fourier de funciones periódicas.

Considere la transformada de Fourier de un valor constante descrita en (3.34). Si $f(t) = 1$ y $\mathcal{F}[1] = 2\pi\delta(\omega)$, entonces de acuerdo con la propiedad de *desplaza-*

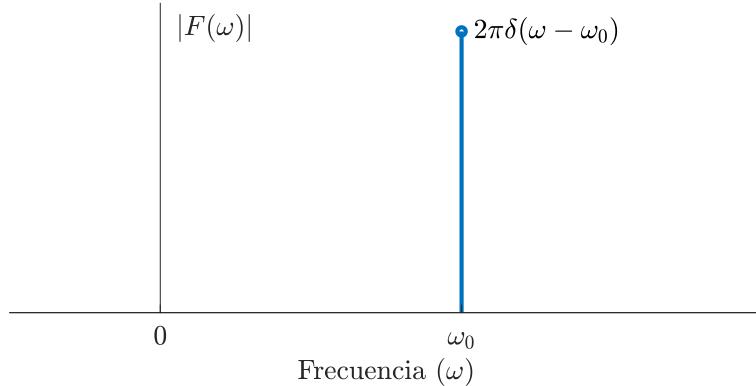


Figura 3.10: Impulso desplazado en la frecuencia.

miento en la frecuencia en (3.16) se tiene

$$\mathcal{F}[1 \cdot e^{j\omega_0 t}] = 2\pi\delta(\omega - \omega_0). \quad (3.44)$$

Esto indica que un impulso desplazado en la frecuencia ω_0 , representa la contribución de una función sinusoidal con frecuencia ω_0 (Figura 3.10).

A partir de un impulso desplazado en la frecuencia, la transformada de Fourier de la función $f(t) = \cos(\omega_0 t)$ es (Figura 3.11(a)):

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[f(t)] &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} (e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}) e^{-j\omega t} dt, \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j(\omega-\omega_0)t} dt + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j(\omega+\omega_0)t} dt, \\ &= \pi [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]. \end{aligned} \quad (3.45)$$

De manera similar, la transformada de Fourier de la función $f(t) = \sin(\omega_0 t)$ es (Figura 3.11(b)):

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[f(t)] &= \frac{1}{2j} \int_{-\infty}^{\infty} (e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}) e^{-j\omega t} dt, \\ &= \frac{1}{2j} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j(\omega-\omega_0)t} dt - \frac{1}{2j} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j(\omega+\omega_0)t} dt, \\ &= j\pi [\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0)].^\dagger \end{aligned} \quad (3.46)$$

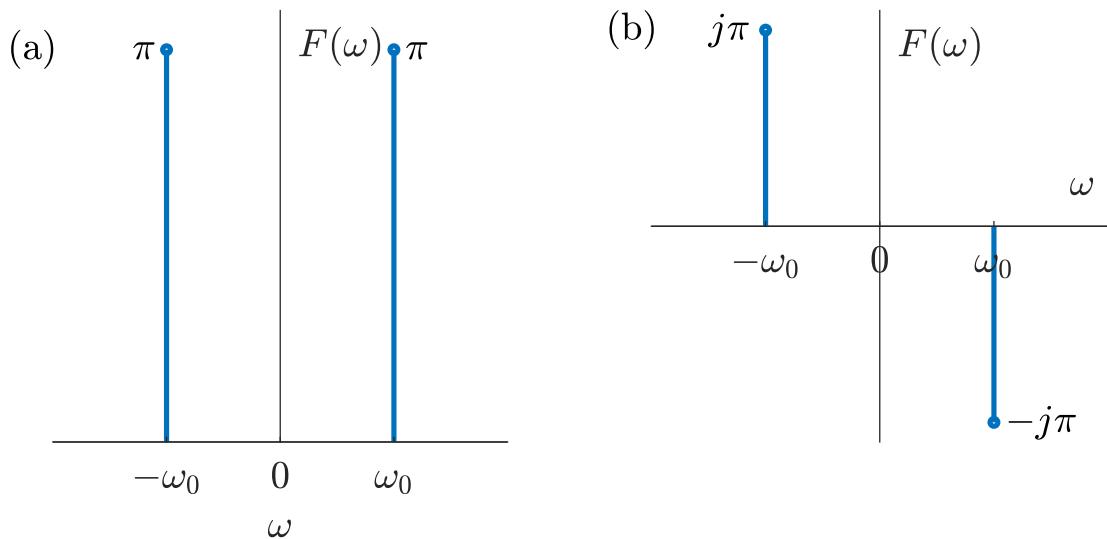


Figura 3.11: (a) Transformada de Fourier de una función coseno. (b) Transformada de Fourier de una función seno.

3.5. Transformada de Fourier versus de Laplace

Algunas similitudes y diferencias entre las transformadas de Laplace y Fourier son:

- La integral de la transformada de Laplace está definida sobre el intervalo $0 < t < \infty$, es decir, para funciones con tiempo positivo, mientras que la transformada de Fourier es aplicable para funciones definidas para todo el tiempo.
- Para una función $f(t) = 0$ para $t < 0$ y $\int_0^\infty |f(t)| dt < \infty$, las dos transformadas están relacionadas como

$$F(\omega) = F(s)|_{s=j\omega},$$

esto indica que la transformada de Fourier puede considerarse un caso especial de la transformada de Laplace con $s = j\omega$. Recuerde que $s = \sigma + j\omega^{\ddagger}$. Por

[†] $j^{-1} = -j$.

[‡]Las frecuencias son la parte real y la parte disipativa es la parte imaginaria.

lo tanto, la transformada de Laplace está relacionada para todo el plano s , mientras que la transformada de Fourier está restringida para el plano $j\omega$.

- La transformada de Laplace es aplicable a un rango más amplio de funciones que la transformada de Fourier, mientras que existen transformadas de Fourier para señales que no son físicamente realizables y no tienen transformada de Laplace.
- La transformada de Laplace es más útil para problemas transientes que involucran condiciones iniciales, mientras que la transformada de Fourier es útil en problemas estáticos.
- La transformada de Fourier provee una mejor visión de las características de frecuencia de la señales que la transformada de Laplace.

3.6. Sumario

- La transformada de Fourier descompone una función no periódica $f(t)$ en sus armónicos que la constituyen $F(\omega)$:

$$F(\omega) = \mathcal{F}[f(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt.$$

- La transformada inversa de Fourier de $F(\omega)$ es

$$f(t) = \mathcal{F}^{-1}[F(\omega)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{j\omega t} d\omega.$$

- Sumario de propiedades de la transformada de Fourier:

Propiedad	$f(t)$	$F(\omega)$
Linealidad	$a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)$	$a_1 F_1(\omega) + a_2 F_2(\omega)$
Escalamiento	$f(at)$	$\frac{1}{ a } F\left(\frac{\omega}{a}\right)$
Desplazamiento en tiempo	$f(t - t_0)$	$e^{-j\omega t_0} F(\omega)$
Desplazamiento en frecuencia	$f(t)e^{j\omega_0 t}$	$F(\omega - \omega_0)$
Diferenciación en tiempo	$f^{(n)}(t)$	$(j\omega)^n F(\omega)$
Integración en tiempo	$\int_{-\infty}^t f(t)dt$	$\frac{F(\omega)}{-j\omega} + \pi F(0)\delta(\omega)$
Inversión	$f(-t)$	$F(-\omega)$ ó $F^*(\omega)$
Dualidad	$f(t)$	$2\pi f(-\omega)$

- El teorema de convolución establece que una convolución en el dominio del tiempo equivale al producto de dos transformadas de Fourier en el dominio de la frecuencia:

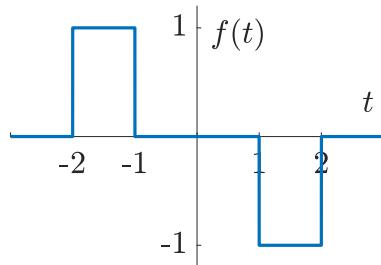
$$f(t) * h(t) \Leftrightarrow H(\omega)F(\omega).$$

- Sumario de pares de transformadas de funciones especiales:

$f(t)$	$F(\omega)$
$\delta(t)$	1
$\delta(t - t_0)$	$e^{-j\omega t_0}$
A	$A2\delta(\omega)$
$u(t)$	$\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$
$u(t + \tau) - u(t - \tau)$	$2\frac{\sin(\omega\tau)}{\omega}$
$\text{sgn}(t)$	$\frac{2}{j\omega}$
$\cos(\omega_0 t)$	$\pi[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]$
$\sin(\omega_0 t)$	$j\pi[\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0)]$
$e^{-\alpha t}u(t)$	$\frac{1}{\alpha + j\omega}$

3.7. Ejercicios

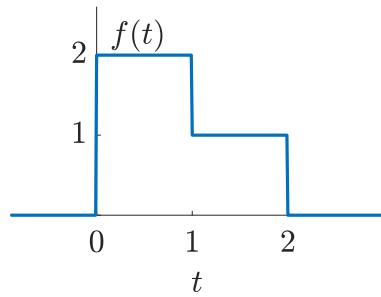
- Encontrar la transformada de Fourier de la siguiente función y graficar su magnitud de espectro de frecuencias:



- Encontrar la transformada de Fourier del siguiente pulso triangular y graficar su magnitud de espectro de frecuencias:



- Encontrar la transformada de Fourier de la siguiente función y graficar su magnitud de espectro de frecuencias:



4. Transformada de Fourier discreta

4.1. Definición

En la práctica, usualmente se desea obtener el espectro de Fourier de señales que han sido muestreadas, es decir, señales discretas o digitales.

La transformada de Fourier discreta (DFT, por sus siglas en inglés) es el equivalente de la transformada de Fourier continua para señales discretas que contienen N puntos separados por un intervalo T , esto es, una secuencia finita de datos, como se muestra en la Figura 4.1(a). Por lo tanto, la DFT trata con una señal discreta en el tiempo y un número finito de frecuencias definidas como:

$$\omega_u = \frac{2\pi}{NT}u, \quad u = 0, 1, \dots, N - 1, \quad (4.1)$$

donde u es la variable de frecuencia.

Recuerde que la transformada de Fourier puede ser evaluada sobre un intervalo finito de tiempo en vez de $-\infty$ a ∞ , es decir, para funciones periódicas. De manera similar, debido a que solo existe un número finito de puntos, la DFT trata los datos como si éstos fueran periódicos, es decir, $f(0)$ a $f(N - 1)$ es lo mismo que $f(N)$ a $f(2N - 1)$, como se muestra en la Figura 4.1(b).

En la literatura de procesamiento de señales, es común definir la DFT en su forma más elemental cuando $T = 1$. De este modo, el par de transformadas de Fourier discretas se definen como:

$$\mathcal{F}[f(k)] = F(u) = \sum_{k=0}^{N-1} f(k) e^{-\frac{j2\pi uk}{N}}, \quad \text{para } u = 0, 1, \dots, N - 1, \quad (4.2)$$

y

$$\mathcal{F}^{-1}[F(u)] = f(k) = \frac{1}{N} \sum_{u=0}^{N-1} F(u) e^{\frac{j2\pi uk}{N}}, \quad \text{para } k = 0, 1, \dots, N - 1. \quad (4.3)$$

La DFT y su inversa son periódicas con periodo N , de modo que:

$$f(k + N) = f(k) \quad \text{y} \quad F(u + N) = F(u). \quad (4.4)$$

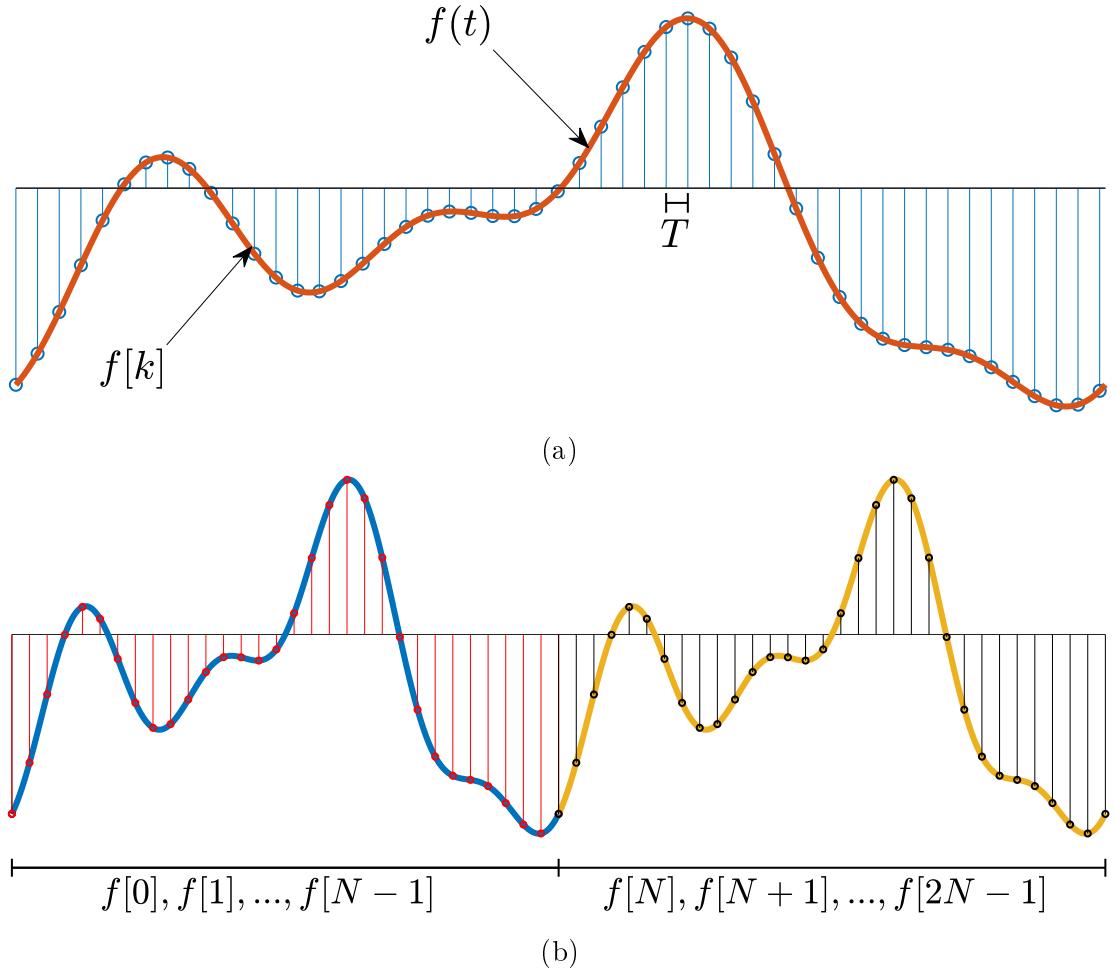


Figura 4.1: (a) Una señal continua muestreada uniformemente con intervalo T .
(b) Periodicidad asumida de una señal muestreada.

Asimismo, la DFT se puede expresar de forma polar como:

$$F(u) = |F(u)| e^{j\phi(u)}, \quad (4.5)$$

donde

$$|F(u)| = \sqrt{\operatorname{Re}^2[F(u)] + \operatorname{Im}^2[F(u)]} \quad (4.6)$$

y

$$\phi(u) = \tan^{-1} \left\{ \frac{\operatorname{Im}[F(u)]}{\operatorname{Re}[F(u)]} \right\} \quad (4.7)$$

son la magnitud y el ángulo de fase, respectivamente. En la Figura 4.2 se muestra

la magnitud del espectro DFT de un pulso rectangular.

Además, la DFT es simétrica conjugada, de modo que el espectro posee una simetría par con respecto al origen, es decir, $|F(u)| = |F(-u)|$, mientras que el ángulo de fase posee una simetría impar con respecto al origen, es decir, $-\phi(u) = \phi(-u)$, como se muestra en la Figura 4.3.

Por otro lado, debido a que (4.2) representa una combinación lineal, esta puede escribirse en forma matricial como:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & W_N & W_N^2 & W_N^3 & \cdots & W_N^{N-1} \\ 1 & W_N^2 & W_N^4 & W_N^6 & \cdots & W_N^{N-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & W_N^{N-1} & W_N^{N-2} & W_N^{N-3} & \cdots & W_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(0) \\ f(1) \\ f(2) \\ \vdots \\ f(N-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F(0) \\ F(1) \\ F(2) \\ \vdots \\ F(N-1) \end{pmatrix} \quad (4.8)$$

donde $W_N = \exp(-j2\pi/N)$ y $W_N = W_N^{2N}$. Observe que calcular la DFT es equivalente a resolver un conjunto de ecuaciones lineales. También, los coeficientes DFT se pueden interpretar como *coeficientes de proyección* de un vector-señal sobre N señales bases sinusoidales. Entonces, el par de transformadas se pueden reescribir como:

$$\mathcal{F}[f(k)] = F(u) = \sum_{k=0}^{N-1} f(k) W_N^{uk}, \quad \text{para } u = 0, 1, \dots, N-1, \quad (4.9)$$

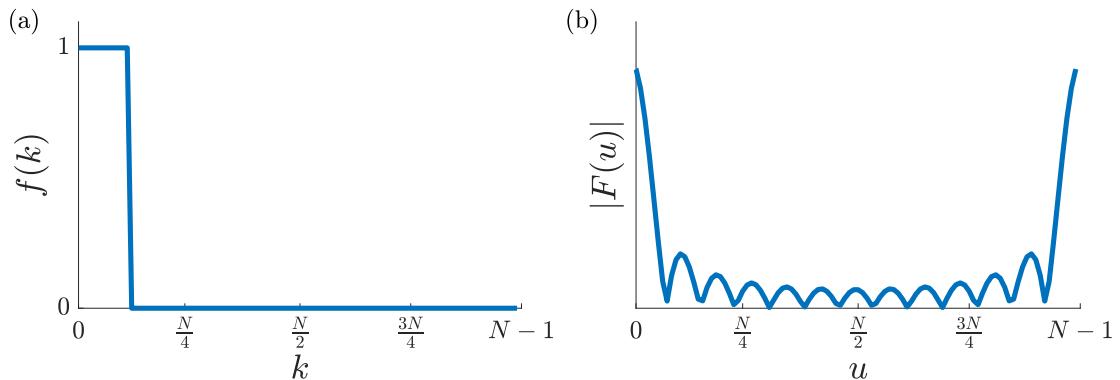


Figura 4.2: (a) Pulso rectangular. (b) Magnitud del espectro.

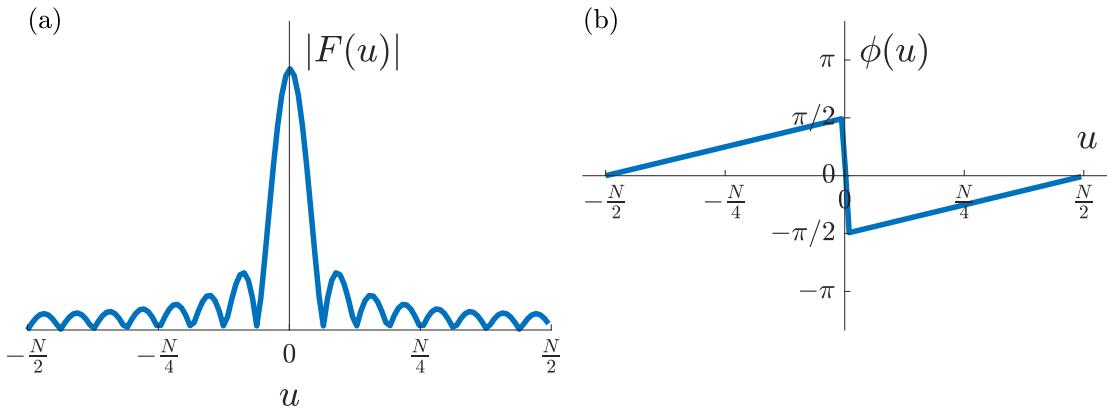


Figura 4.3: DFT de un pulso rectangular: (a) Magnitud del espectro con simetría par y (b) espectro de fase con simetría impar.

y

$$\mathcal{F}^{-1}[F(u)] = f(k) = \frac{1}{N} \sum_{u=0}^{N-1} F(u) W_N^{-uk}, \quad \text{para } k = 0, 1, \dots, N-1. \quad (4.10)$$

4.1.1. Ejemplo

Considere la señal continua $f(t) = 5 + 2 \cos(2\pi t - \frac{\pi}{2}) + 3 \cos(4\pi t)$, como se muestra en la Figura 4.4(a). Si la señal es muestrada a $f_s = 4$ Hz en el rango $[0, 1]$, la señal discreta queda como

$$f(k) = \underbrace{5}_{\text{DC}} + \underbrace{2 \cos\left(2\pi k - \frac{\pi}{2}\right)}_{1\text{Hz}} + \underbrace{3 \cos(4\pi k)}_{2\text{Hz}}, \quad \text{donde } t = kT_s = k \frac{1}{f_s}.$$

Al evaluar los puntos muestrados se tiene que la señal discreta está compuesta de $N = 5$ muestras: $f(k) = [8, 4, 8, 0, 8]$, como se muestra en la Figura 4.4(a).

A partir de (4.8) se obtienen los siguientes coeficientes de Fourier:

$$F(u) = [28, 5.23 + j0.89, 0.76 + j9.95, 0.76 - j9.95, 5.23 - j0.89]$$

como se muestra en la Figura 4.4(b). Nótese que los coeficientes son complejos y que, a excepción de $F(0)$, cada coeficiente posee su complejo conjugado, lo cual indica la simetría del espectro para un periodo; por lo tanto, es usual graficar solo

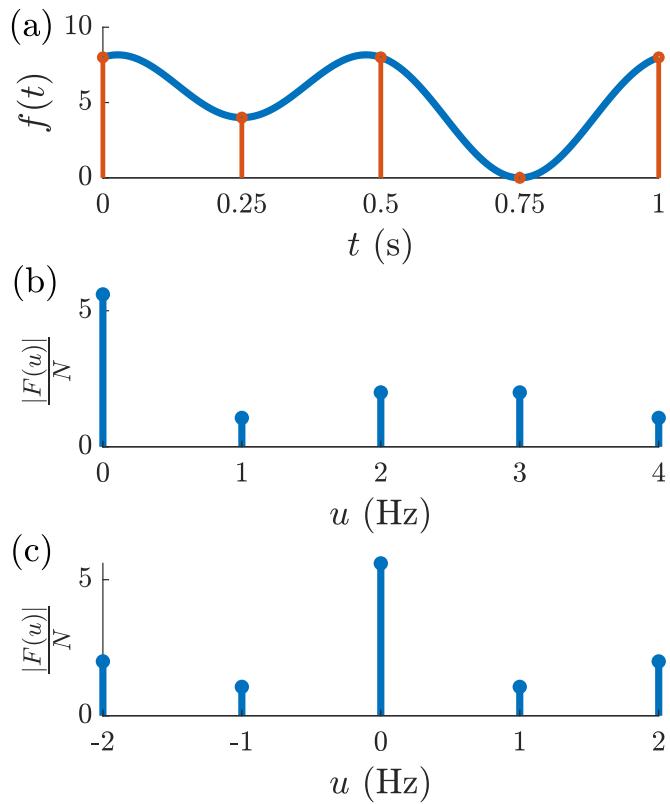


Figura 4.4: (a) Señal continua y su versión discreta. (b) Coeficientes de Fourier normalizados $|F(u)|/N$. (c) Coeficientes de Fourier centrados en el origen.

la mitad del periodo del espectro de magnitud, es decir, en el intervalo $[0, N/2]$. Asimismo, es común graficar un periodo del espectro en el intervalo $[-N/2, N/2]$, de modo que la componente DC queda centrada en el origen evidenciando así la simetría del espectro, como se muestra en la Figura 4.4(c).

Por otro lado, la información que proporciona el espectro es la contribución de energía de una señal sinusoidal con una frecuencia en particular. En el ejemplo de la Figura 4.4(c) es notable que las componentes sinusoidales con frecuencias 0, 1 y 2 Hz son las que contribuyen a la formación de la señal en el tiempo.

Evidentemente si la frecuencia de muestreo f_s aumenta, también incrementará el número de puntos, de modo que la señal discreta se aproximará cada vez más a la señal original y, por lo tanto, el cálculo de los coeficientes de Fourier será cada vez más exacto, como se muestra en la Figura 4.5.

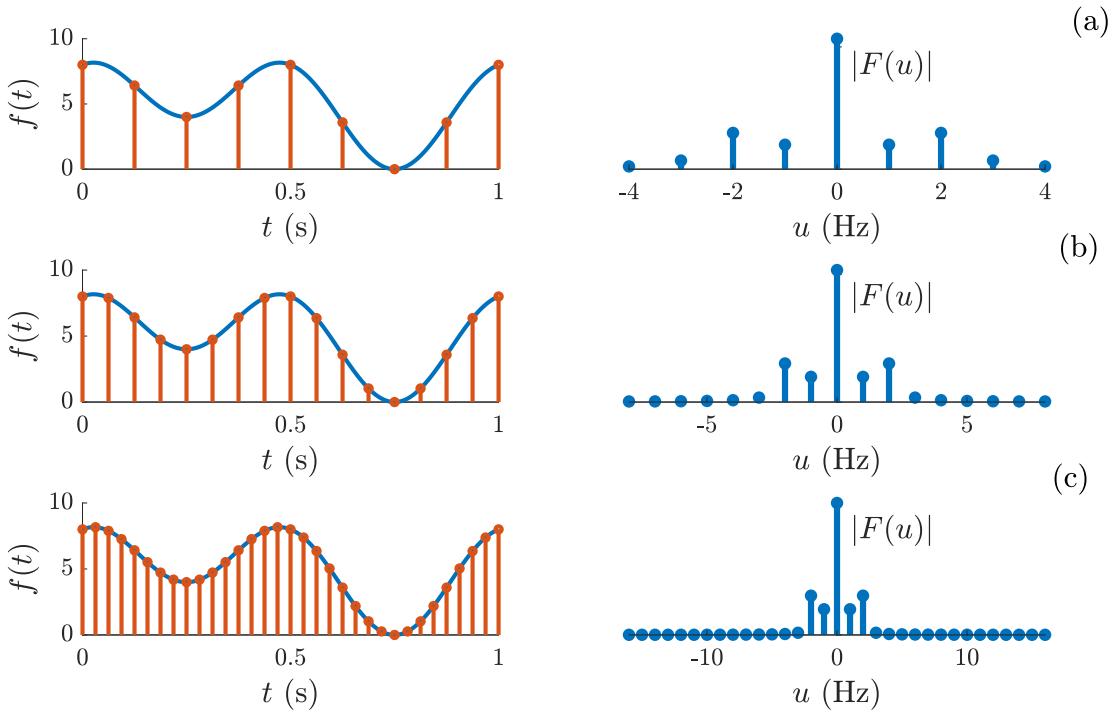


Figura 4.5: Espectro de Fourier de la señal la Figura 4.4 para las frecuencias de muestreo (a) $f_s = 8$ Hz, (b) $f_s = 16$ Hz y (c) $f_s = 32$ Hz.

4.2. Propiedades

Las propiedades de la DFT son equivalentes a las propiedades de la transformada de Fourier continua, las cuales se listan en la Tabla 4.1.

Tabla 4.1: Algunas propiedades de la DFT donde $\mathcal{F}[f(k)] = F(u)$.

Propiedad	$f(k)$	$F(u)$
Linealidad	$a_1 f_1(k) + a_2 f_2(k)$	$a_1 F_1(u) + a_2 F_2(u)$
Periodicidad	$f(k) = f(k + N)$	$F(u) = F(u + N)$
Escalamiento	$f(ak)$	$\frac{1}{ a } F\left(\frac{u}{a}\right)$
Desplazamiento en tiempo	$f(k - k_0)$	$F(u)e^{-\frac{j2\pi u k_0}{N}}$
Desplazamiento en frecuencia	$f(k)e^{\frac{j2\pi u_0 k}{N}}$	$F(u - u_0)$
Desplazamiento al origen	$f(k)(-1)^k$	$F(u - \frac{N}{2})$
Inversión	$f(-k)$	$F(-u)$
Diferenciación	$\frac{d^n[f(k)]}{dk^n}$	$(ju)^n F(u)$
Relación de Parseval	$\sum_{k=0}^{N-1} f(k) ^2$	$\frac{1}{N} \sum_{u=0}^{N-1} F(u) ^2$

4.3. Funciones de ventana

La DFT asume que la señal de entrada es finita y representa un periodo de una señal periódica. De esta manera, tanto el dominio del tiempo como el dominio de la frecuencia son de topología circular, de modo que el punto inicial y el punto final de una señal están conectados. Por lo tanto, cuando la señal es periódica y se registra durante un número entero de periodos, la DFT representa adecuadamente las componentes de frecuencia de la señal, como se muestra en la Figura 4.6.

Sin embargo, cuando la señal no es periódica, o aún siendo periódica ésta se registra durante un número no entero de periodos, los puntos finales son discontinuos. Esta discontinuidad es interpretada por la DFT como una componente de alta frecuencia que no está presente en la señal original, como se muestra en la Figura 4.7.

Para reducir los efectos de las discontinuidades en el desempeño de la DFT, se usan *funciones de ventana* para reducir la amplitud de las discontinuidades en los límites de una señal discreta. La amplitud de una función de ventana varía

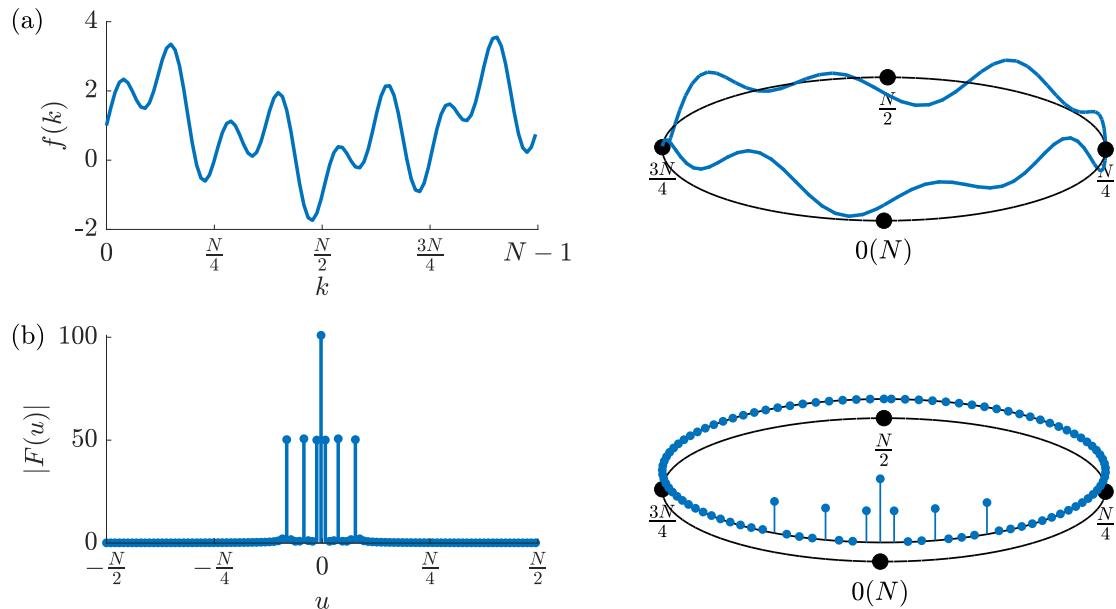


Figura 4.6: Topología circular de la DFT y su inversa: (a) Señal periódica $f(k) = 2 + \sin(2k - \frac{\pi}{2}) + \cos(\frac{k}{2}) - 2 \cos^2(2k + \frac{\pi}{4})$ registrada durante un periodo completo en el rango $[0, 4\pi]$, y su representación circular. (b) Magnitud del espectro de Fourier y su representación circular.

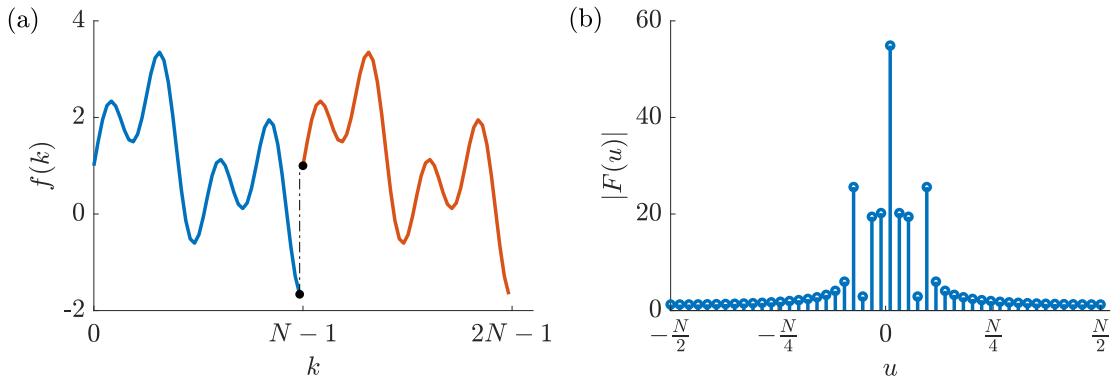


Figura 4.7: (a) Señal periódica $f(k)$ registrada durante una fracción de un periodo, donde se observa una discontinuidad en los puntos finales. (b) Magnitud del espectro de Fourier donde se observan componentes de alta frecuencia producto de la discontinuidad de $f(k)$.

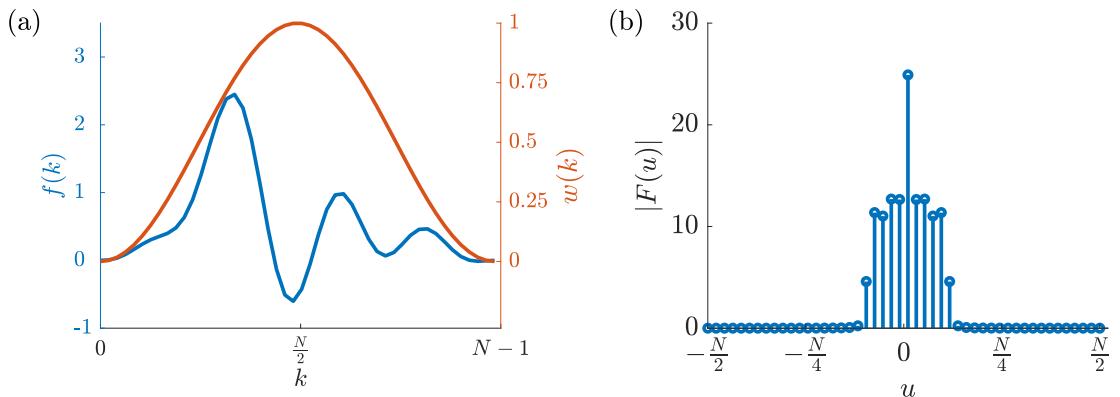


Figura 4.8: (a) Señal original multiplicada por una función de ventana $w(k)$. (b) Magnitud del espectro de Fourier donde se observa que la amplitud de componentes de alta frecuencia es cero.

gradualmente desde cero hasta un valor máximo a partir de sus límites, la cual es multiplicada por la señal discreta discontinua. Esto hace que los puntos finales de la señal coincidan y, por lo tanto, provee continuidad a la señal sin transiciones abruptas, como se muestra en la Figura 4.8.

Existen diferentes tipos de funciones de ventana, aunque la selección de alguna de ellas depende del contenido de frecuencias de la señal. En la Tabla 4.2 se resumen algunas funciones de ventana comúnmente utilizadas y sus respuestas en frecuencia.

Tabla 4.2: Funciones de ventana $w(k)$ y sus respuestas en frecuencia $W(u)$ para $0 \leq n \leq N - 1$, donde a_0, \dots, a_4 son coeficientes, e I_0 es la función Bessel de orden cero.

Función	Expresión	$w(k)$	$ W(u) $
Blackman	$a_0 - a_1 \cos\left(\frac{2\pi n}{N}\right) + a_2 \cos\left(\frac{4\pi n}{N}\right)$		
Flat Top	$a_0 - a_1 \cos\left(\frac{2\pi n}{N}\right) + a_2 \cos\left(\frac{4\pi n}{N}\right) - a_3 \cos\left(\frac{6\pi n}{N}\right) + a_4 \cos\left(\frac{8\pi n}{N}\right)$		
Gaussian	$\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{n-N/2}{\sigma N/2}\right)^2\right\}$		
Hamming	$a_0 - (1 - a_0) \cos\left(\frac{2\pi n}{N}\right)$		
Hann	$0.5 \left[1 - \cos\left(\frac{2\pi n}{N}\right)\right]$		
Kaiser	$I_0\left(a_0\pi\sqrt{1 - \left(\frac{2n}{N} - 1\right)^2}\right) \cdot (I_0(a_0\pi))^{-1}$		

4.4. DFT de corta duración

La transformada de Fourier discreta de corta duración (STFT, por sus siglas en inglés) es una secuencia de DFTs de una señal en ventana. La STFT proporciona la información de frecuencia localizada en el tiempo para situaciones en las que los componentes de frecuencia de una señal varían con el tiempo, mientras que la transformada de Fourier estándar proporciona la información de frecuencia promediada durante todo el intervalo de tiempo de la señal.

La STFT está dada por:

$$F_m(u) = \sum_{k=0}^{M-1} f(k) w(k - mR) e^{-j\frac{2\pi u k}{M}}, \quad \text{para } u = 0, 1, \dots, M, \quad (4.11)$$

donde $f(k)$ es una señal y $w(k)$ denota una función de ventana con M puntos, R es el tamaño de salto entre DFT sucesivos tal que el espectro $F_m(u)$ es la DFT de una señal en ventana centrada en el tiempo mR . Nótese que (4.11) indica que la STFT de $f(k)$ es la transformada de Fourier del producto $f(k)w(k - mR)$. La Figura 4.9 ilustra el cómputo de la SFTF de una señal.

Existe un compromiso entre la resolución de tiempo y frecuencia en STFT, es decir, aunque una ventana estrecha da como resultado una mejor resolución en el dominio del tiempo, genera una resolución deficiente en el dominio de la frecuencia y viceversa, como se muestra en la Figura 4.10.

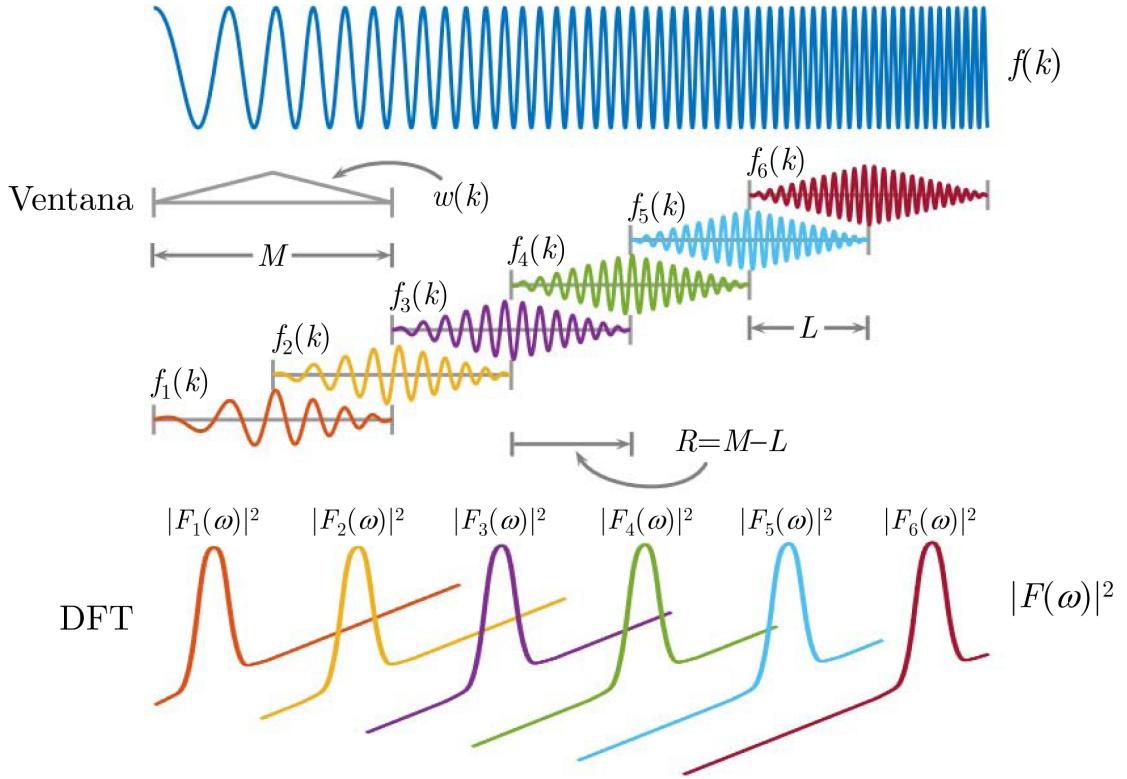


Figura 4.9: Ilustración gráfica de la DFT de corta duración.

La magnitud al cuadrado de la STFT produce la representación del *espectrograma* de la densidad espectral de potencia de la función $f(k)$:

$$\text{espectrograma } \{f(k)\} \equiv |F_m(u)|^2. \quad (4.12)$$

Un espectrograma es una representación visual del espectro de frecuencias de una señal que varía con el tiempo (Figura 4.10).

Los espectrogramas se utilizan ampliamente en los campos de la música, lingüística, sonar, radar, procesamiento del habla, sismología, entre otros. Por ejemplo, en la Figura 4.11 se muestran los espectrogramas para los audios de las cinco vocales, en donde se observan notables variaciones en frecuencia con respecto al tiempo entre cada tipo de vocal.

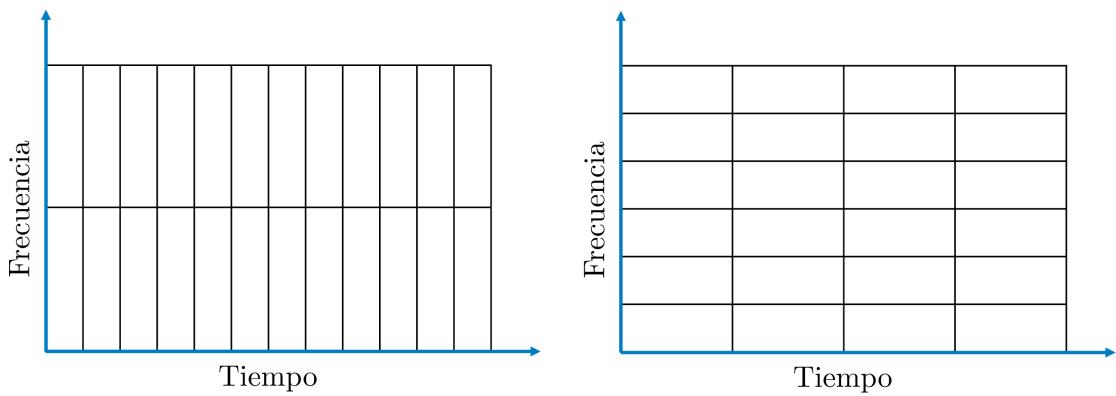


Figura 4.10: Comparación de resolución STFT. La izquierda tiene una mejor resolución de tiempo y la derecha tiene una mejor resolución de frecuencia.

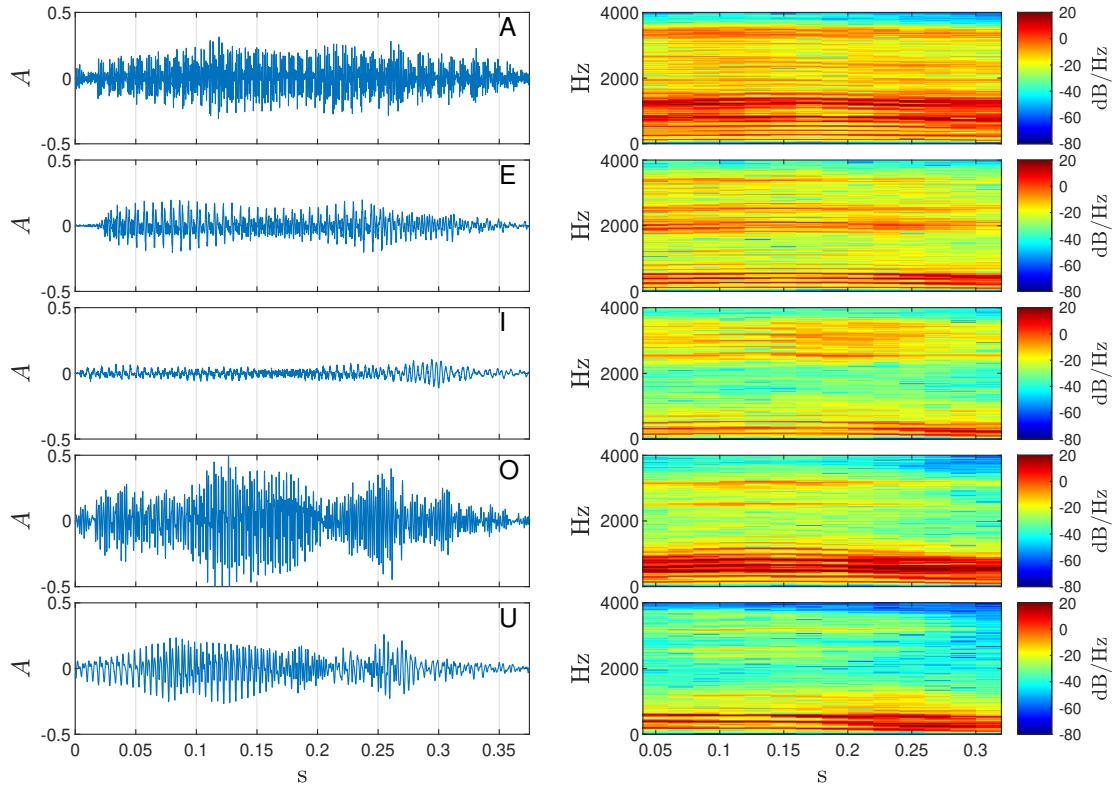


Figura 4.11: Espectrogramas para los audios de las cinco vocales.

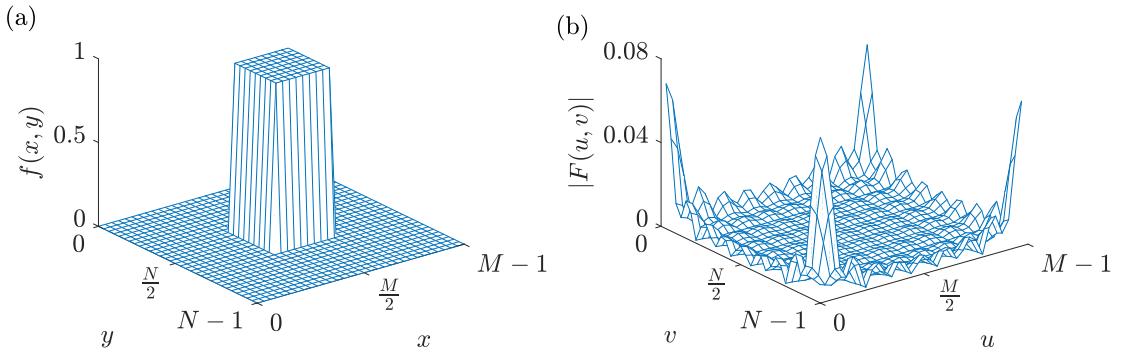


Figura 4.12: (a) Pulso rectangular en dos dimensiones. (b) Magnitud del espectro de Fourier en dos dimensiones.

4.5. DFT en dos dimensiones

La transformada de Fourier discreta en dos dimensiones (2D-DFT) es ampliamente utilizada en el procesamiento de imágenes digitales y se define como:

$$\mathcal{F}[f(x,y)] = F(u,v) = \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x,y) e^{-j2\pi(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N})}, \quad (4.13)$$

donde $f(x,y)$ es una imagen digital de tamaño $M \times N$. Como en el caso de la DFT unidimensional, definida en (4.2), la expresión en (4.13) debe ser evaluada para valores de las variables discretas u y v , en los rangos $u = 0, 1, 2, \dots, M - 1$ y $v = 0, 1, 2, \dots, N - 1$.

Dada la transformada $F(u,v)$, se puede obtener $f(x,y)$ usando la transformada inversa de Fourier discreta (2D-IDFT):

$$\mathcal{F}^{-1}[F(u,v)] = f(x,y) = \frac{1}{MN} \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} F(u,v) e^{j2\pi(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N})}, \quad (4.14)$$

para $x = 0, 1, 2, \dots, M - 1$ y $y = 0, 1, 2, \dots, N - 1$. En la Figura 4.12 se muestra la 2D-DFT de un pulso rectangular en dos dimensiones.

4.5.1. Propiedades

Las propiedades de la DFT unidimensional se pueden extender al caso 2D-DFT:

- **Periodicidad:** La 2D-DFT y su inversa son infinitamente periódicas en las direcciones u y v , esto es:

$$F(u, v) = F(u + k_1 M, v) = F(u, v + k_2 N) = F(u + k_1 M, v + k_2 N) \quad (4.15)$$

y

$$f(x, y) = f(x + k_1 M, y) = f(x, y + k_2 N) = f(x + k_1 M, y + k_2 N) \quad (4.16)$$

donde k_1 y k_2 son enteros.

- **Traslación:** Los desplazamientos en los dominios espacial y de la frecuencia están dados por:

$$f(x, y) e^{j2\pi(\frac{u_0 x}{M} + \frac{v_0 y}{N})} \Leftrightarrow F(u - u_0, v - v_0) \quad (4.17)$$

y

$$f(x - x_0, y - y_0) \Leftrightarrow F(u, v) e^{-j2\pi(\frac{ux_0}{M} + \frac{vy_0}{N})}. \quad (4.18)$$

Esto es, multiplicar $f(x, y)$ por una exponencial compleja, desplaza el origen del espectro al punto (u_0, v_0) y, inversamente, multiplicar $F(u, v)$ por el negativo de esa exponencial desplaza el origen de $f(x, y)$ al punto (x_0, y_0) . Asimismo, el desplazamiento de el origen del espectro $F(0, 0)$ al centro del plano coordenado $(u_0, v_0) = (M/2, N/2)$ se realiza como:

$$f(x, y) (-1)^{(x+y)} \Leftrightarrow F\left(u - \frac{M}{2}, v - \frac{N}{2}\right). \quad (4.19)$$

- **Rotación:** Usando las coordenadas polares

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad u = \omega \cos \varphi, \quad y \quad v = \omega \sin \varphi,$$

resulta en el siguiente par de transformadas:

$$f(r, \theta + \theta_0) \Leftrightarrow F(\omega, \varphi + \theta_0), \quad (4.20)$$

lo cual indica que rotar $f(x, y)$ por un ángulo θ_0 , también se rota $F(u, v)$ por el mismo ángulo. Inversamente, rotar $F(u, v)$ implica rotar $f(x, y)$ por el mismo ángulo.

En la Figura 4.13 se muestran las propiedades de translación y rotación aplicadas a la DFT de un pulso rectangular.

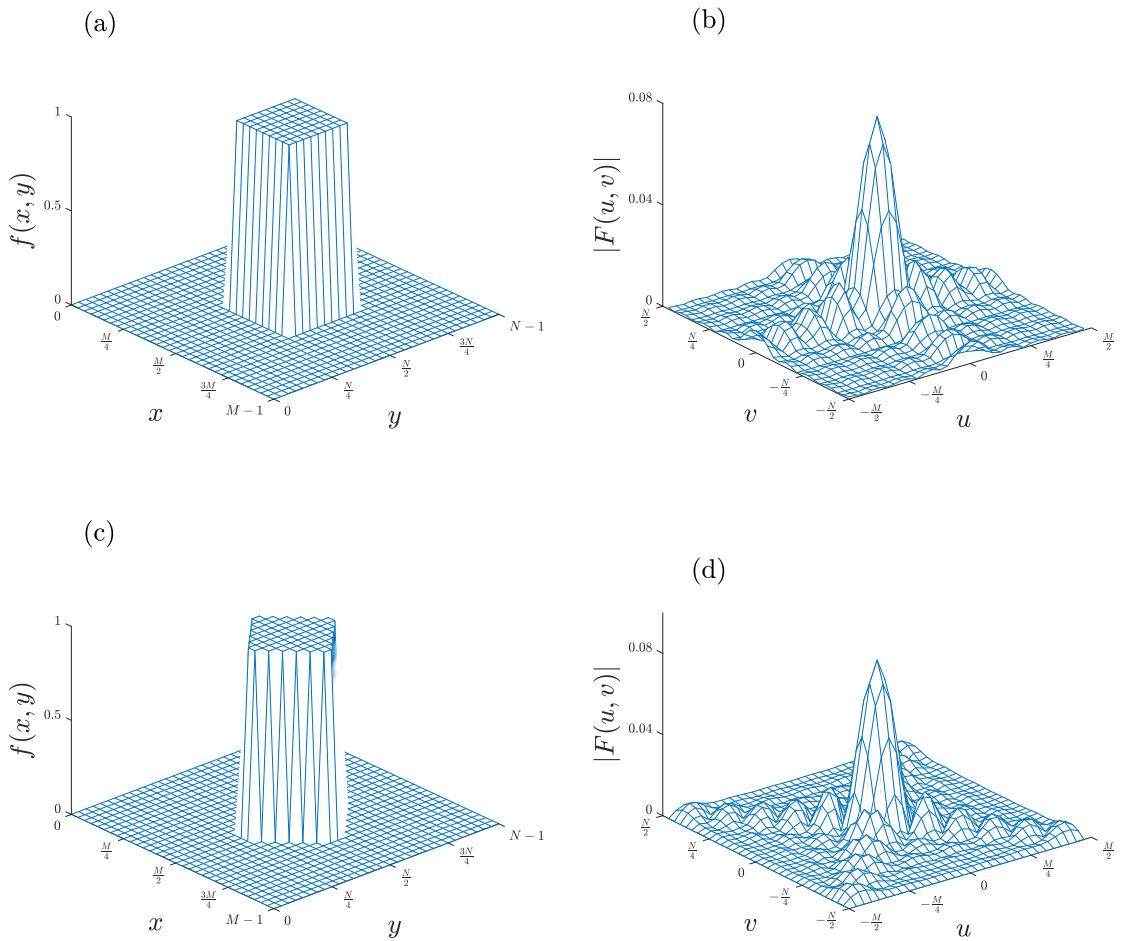


Figura 4.13: (a) Pulso rectangular sin rotación ($\theta_0 = 0$). (b) Espectro de Fourier cuyo origen fue trasladado a $(u_0, v_0) = (M/2, N/2)$. (c) Pulso rectangular con rotación de $\theta_0 = \pi/4$. (d) Espectro de Fourier rotado con $\theta_0 = \pi/4$.

4.5.2. Magnitud y ángulo de fase

Debido a que la 2D-DFT es compleja en general, se puede expresar en forma polar como:

$$\begin{aligned} F(u, v) &= \operatorname{Re}[F(u, v)] + \operatorname{Im}[F(u, v)], \\ &= |F(u, v)| e^{j\phi(u, v)} \end{aligned} \quad (4.21)$$

donde la magnitud es

$$|F(u, v)| = \sqrt{\operatorname{Re}^2[F(u, v)] + \operatorname{Im}^2[F(u, v)]} \quad (4.22)$$

y el ángulo de fase es

$$\phi(u, v) = \tan^{-1} \left\{ \frac{\operatorname{Im}[F(u, v)]}{\operatorname{Re}[F(u, v)]} \right\}. \quad (4.23)$$

La 2D-DFT de una función real es conjugada simétrica, es decir

$$F(u, v)^* = F(-u, -v), \quad (4.24)$$

lo cual implica que el espectro de magnitud posea simetría par con respecto al origen:

$$|F(u, v)| = |F(-u, -v)|, \quad (4.25)$$

mientras que el espectro de fase posee simetría impar con respecto al origen:

$$-\phi(u, v) = \phi(-u, -v). \quad (4.26)$$

En la Figura 4.14 se muestra el efecto de la translación y rotación de un pulso rectangular sobre la magnitud y el ángulo de fase de su espectro de Fourier. Nótese que el espectro es insensible a la translación, aunque la rotación afecta su orientación. Por otro lado, la fase se ve afectada por la translación y rotación del pulso rectangular.

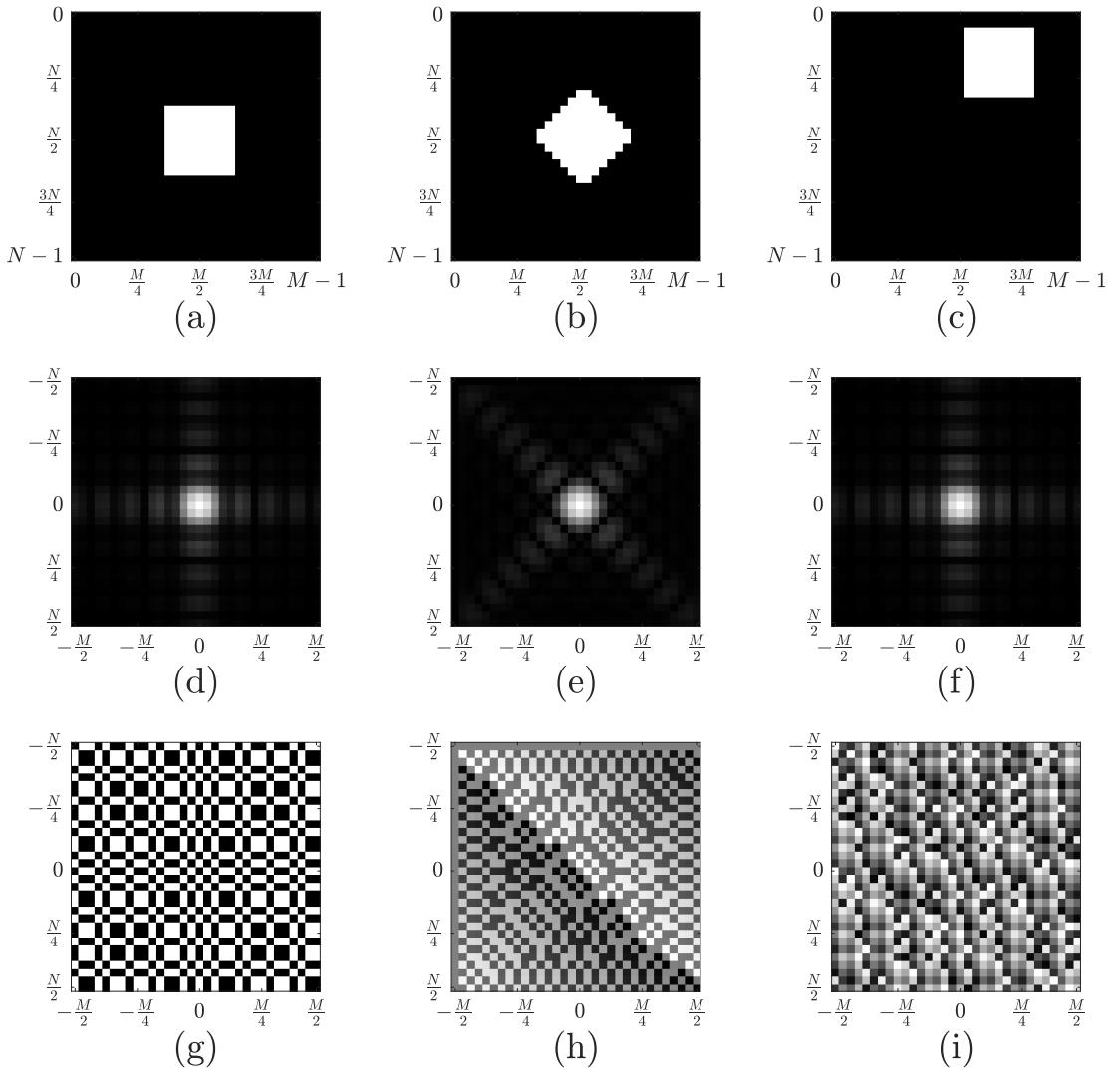


Figura 4.14: Pulso rectangular: (a) original, (b) rotado y (c) trasladado. Magnitud: (d) original, (e) rotado y (f) trasladado. Fase: (g) original, (h) rotado y (i) trasladado.

4.5.3. Contribución de la magnitud y el ángulo de fase

En la Figura 4.15(b) se muestra la imagen del ángulo de fase, $\phi(u, v)$, de la 2D-DFT de la imagen en la Figura 4.15(a) usando la expresión en (4.23). Aunque no existe ningún detalle visual que pueda asociarse con las estructuras de su correspondiente imagen, la información en $\phi(u, v)$ es crucial para determinar las características de forma de la imagen. Para ilustrar esto, se reconstruye la imagen

usando solamente su ángulo de fase. La reconstrucción consiste en calcular la 2D-IDFT de la expresión en (4.21) usando $\phi(u, v)$ y $|F(u, v)| = 1$. La Figura 4.15(c) muestra el resultado, donde las características de forma están presentes, aunque la información de intensidad se ha perdido debido a que no se usó el espectro de magnitud en la reconstrucción. La Figura 4.15(d) fue reconstruida usando únicamente el espectro de la imagen en la Figura 4.15(a), donde $\phi(u, v)$ es cero. La imagen resultante solo contiene información de intensidad, siendo el término DC el más dominante, y no existe información de forma. Finalmente, las Figuras 4.15(e) y (f) muestran la importancia de la fase en determinar la información espacial del contenido de la imagen. En la Figura 4.15(e) se reconstruyó usando el ángulo de fase de la imagen en la Figura 4.15(a) y el espectro de magnitud del pulso rectangular en la Figura 4.14(a). Se observa que las características de forma de la Figura 4.15(a) son dominantes. Inversamente, el pulso rectangular domina las características de forma en la Figura 4.15(f), el cual se reconstruyó usando la fase de la DFT del pulso rectangular y el espectro de magnitud la Figura 4.15(a).

4.5.4. Separabilidad y simetría

Sea $r(x, y, u, v) = e^{-j2\pi(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N})}$ el núcleo (o *kernel*) de transformación de la 2D-DFT. Entonces se dice que la transformada es *separable* si:

$$r(x, y, u, v) = r_1(x, u)r_2(y, v). \quad (4.27)$$

Además, el núcleo es *simétrico* si $r_1(x, u)$ es funcionalmente idéntico a $r_2(x, u)$, tal que

$$r(x, y, u, v) = r_1(x, u)r_1(y, v). \quad (4.28)$$

A partir de la propiedad de separabilidad, el par de transformadas 2D-DFT se puede reescribir como:

$$F(u, v) = \sum_{x=0}^{M-1} e^{-j2\pi \frac{ux}{M}} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-j2\pi \frac{vy}{N}} \quad (4.29)$$

y

$$f(x, y) = \frac{1}{MN} \sum_{u=0}^{M-1} e^{j2\pi \frac{ux}{M}} \sum_{v=0}^{N-1} F(u, v) e^{j2\pi \frac{vy}{N}}. \quad (4.30)$$

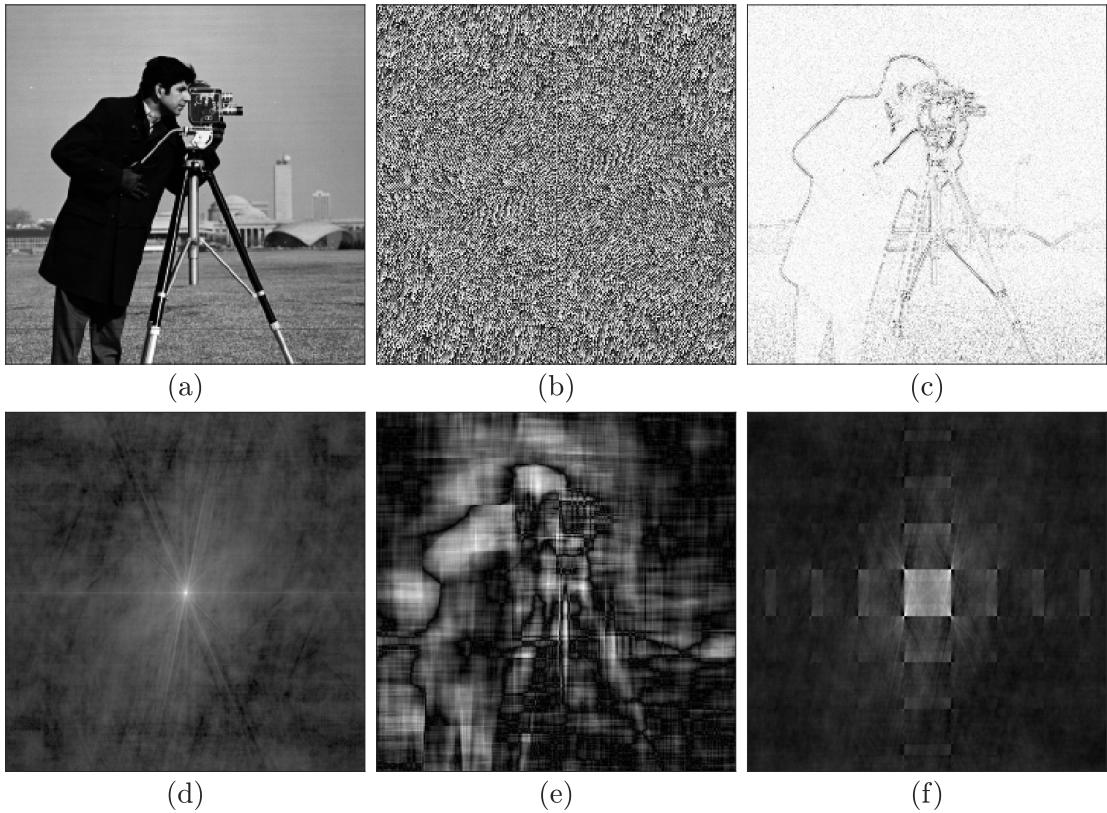


Figura 4.15: (a) Imagen original **cameraman**. (b) Ángulo de fase. (c) Imagen **cameraman** reconstruida usando solamente su ángulo de fase. (d) Imagen **cameraman** reconstruida usando solo su espectro de magnitud. (e) Imagen **cameraman** reconstruida usando su ángulo de fase y el espectro de magnitud del pulso rectangular en la Figura 4.14(a). (f) Imagen de pulso rectangular reconstruida usando su ángulo de fase y el espectro de magnitud de la imagen **cameraman**.

Además, debido a que el núcleo de transformación es simétrico, el par de transformadas puede obtenerse en dos pasos aplicando sucesivamente la DFT unidimensional como:

$$F(u, v) = \sum_{y=0}^{N-1} F(u, y) e^{-j2\pi \frac{vy}{N}} \quad \text{donde} \quad F(u, y) = \sum_{x=0}^{N-1} f(x, y) e^{-j2\pi \frac{ux}{N}}, \quad (4.31)$$

$$f(x, y) = \frac{1}{N} \sum_{u=0}^{N-1} f(u, y) e^{j2\pi \frac{ux}{N}} \quad \text{donde} \quad f(u, y) = \frac{1}{N} \sum_{v=0}^{N-1} F(u, v) e^{j2\pi \frac{vy}{N}}. \quad (4.32)$$

De este modo, la función $F(u, y)$ se obtiene aplicando la DFT unidimensional a cada columna de $f(x, y)$ y después $F(u, v)$ se obtiene aplicando la DFT unidimensional a cada fila de $F(u, y)$. Inversamente, para obtener $f(x, y)$, primero se transforman las filas de $F(u, v)$ para obtener $f(u, y)$ y después se transforman las columnas para obtener la reconstrucción final, como se muestra en la Figura 4.16. La obtención de la 2D-DFT (y su inversa) a partir de una serie de transformadas unidimensionales mejora notablemente el tiempo de cómputo.

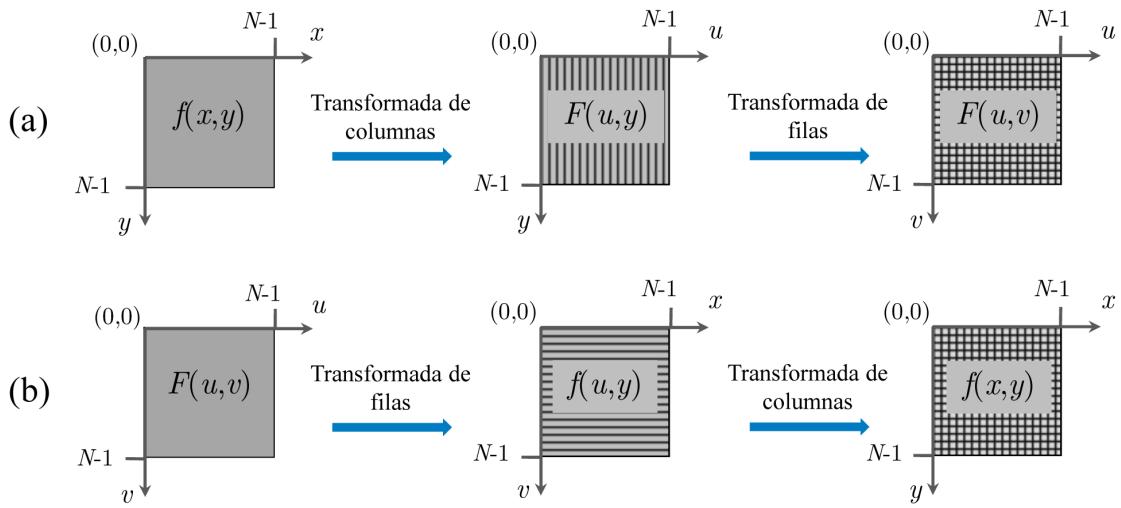


Figura 4.16: (a) Transformada 2D-DFT a partir de DFT unidimensionales. (b) Transformada 2D-IDFT a partir de IDFT unidimensionales.

4.6. Transformada rápida de Fourier

Trabajar en el dominio de la frecuencia puede ser impráctico si se tienen que implementar las expresiones (4.2) y (4.3) directamente, lo cual requiere N^2 multiplicaciones y adiciones. La *transformada rápida de Fourier* (FFT, por sus siglas en inglés) es un algoritmo creado por Cooley y Tukey en 1965 que reduce los cálculos de la DFT al orden de $N \log_2 N$ operaciones. Por ejemplo, si se calcula la DFT de una señal con 2048 puntos, se requieren 4,194,304 multiplicaciones y adiciones. Usando el algoritmo FFT, el número de operaciones se reduce a 22,528, lo cual representa una reducción significativa.

La DFT es ineficiente debido a que no explota las propiedades de simetría y periodicidad del factor W_N , mientras que la velocidad de la FFT radica en

aprovechar estas propiedades para reducir el número de operaciones:

$$\begin{aligned} W_N^{a+N} &= W_N^a & W_N^N &= 1 \\ W_N^{a+N/2} &= -W_N^a & W_N^2 &= W_{N/2} \end{aligned}$$

La FFT *radix-2 decimation-in-time* (DIT) es el algoritmo de Cooley-Tukey más simple basado en la estrategia algorítmica de *divide y vencerás*. Este algoritmo asume que el número de muestras N en la señal es un entero potencia de dos. El algoritmo DIT divide la secuencia de entrada en dos grupos, uno de índices pares y otro de índices impares para realizar dos DFTs de tamaño $N/2$, y entonces combina sus resultados para formar la DFT de N puntos. Esto se puede realizar de manera recursiva para reducir el número de operaciones a $N \log_2 N$.

Partiendo de la definición de la DFT definida en (4.9) se tiene:

$$\begin{aligned} F(u) &= \sum_{k=0}^{N/2-1} f(2k)W_{N/2}^{uk} + W_N^u \sum_{k=0}^{N/2-1} f(2k+1)W_{N/2}^{uk}, \\ &= E(k) + W_N^u O(k), \end{aligned} \quad (4.33)$$

donde $E(k)$ es la DFT para índices pares (*even*) y $O(k)$ es la DFT para índices impares (*odd*). Finalmente, de acuerdo con la propiedad de simetría $W_N^{a+N/2} = -W_N^a$ se tiene:

$$F(u + N/2) = E(k) - W_N^u O(k). \quad (4.34)$$

Las ecuaciones (4.33) y (4.34) expresan recursivamente la DFT de tamaño N en términos de dos DFTs de tamaño $N/2$. Nótese que las salidas finales son obtenidas mediante combinaciones $+/-$ de $E(k)$ y $W_N^u O(k)$, lo cual es una DFT simple de tamaño dos, como se muestra en la Figura 4.17.

En el Algoritmo 4.1 se muestra una versión iterativa del algoritmo DIT para una señal con $N = 2^n$ puntos. Para calcular la inversa FFT (IFFT), se usa el mismo procedimiento mostrado en el Algoritmo 4.1, solamente la línea 5 cambia a $W \leftarrow \exp(j2\pi/2\Delta)$ y al final, después de la línea 15, cada elemento del arreglo g resultante se divide por N .

Por otro lado, el algoritmo requiere aplicar un “reversamiento de bits” (línea 1) para distribuir los puntos de la señal en índices pares e impares, lo cual se logra mediante el algoritmo de Gold-Rader mostrado en el Algoritmo 4.2.

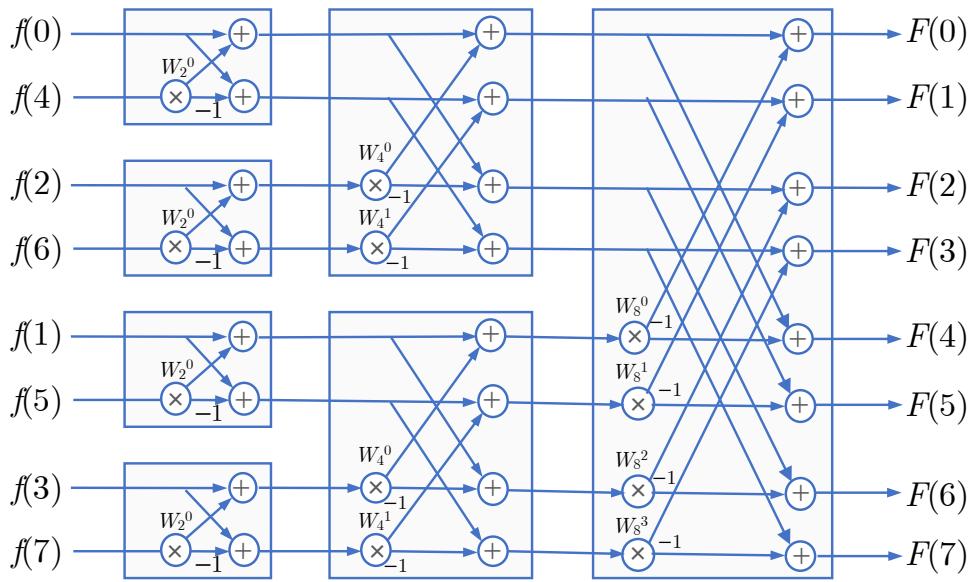


Figura 4.17: Diagrama del flujo de datos del algoritmo DIT para $N = 8$. La secuencia de entrada de tamaño N se divide en dos DFTs de tamaño $N/2$, seguido por una etapa de combinación de varias DFTs de tamaño dos llamada operaciones ‘mariposa’ (*butterfly*).

Algoritmo 4.1: Pseudocódigo del algoritmo FFT *radix-2* DIT.

Input: Array g of size $N = 2^n$

Output: Fourier coefficients array g of size $N = 2^n$

```

1 Apply bit-reversal permutation to  $g$ 
2  $\Delta \leftarrow 1$ 
3  $n \leftarrow \log_2 N$ 
4 for pass = 1 . . .  $n$  do
5    $W \leftarrow \exp(-j2\pi/2\Delta)$ 
6   for ( $a = 0; a < \Delta; a++$ ) do
7     for ( $b = 0; b < N; b += 2\Delta$ ) do
8        $t_0 \leftarrow g(b+a) + W^a g(b+\Delta+a)$ 
9        $t_1 \leftarrow g(b+a) - W^a g(b+\Delta+a)$ 
10       $g(b+a) \leftarrow t_0$ 
11       $g(b+\Delta+a) \leftarrow t_1$ 
12    end
13  end
14   $\Delta \leftarrow 2\Delta$ 
15 end

```

Algoritmo 4.2: Pseudocódigo del algoritmo Gold-Rader.

Input: Array g of size $N = 2^n$
Output: Reordered array g

```
1  $j \leftarrow 0$ 
2 for ( $i = 0; i < N; i++$ ) do
3    $k = N/2$ 
4   if ( $i < j$ ) then
5     swap  $g(i)$  and  $g(j)$ 
6   end
7   while ( $k \leq j$ ) do
8      $j \leftarrow j - k$ 
9      $k \leftarrow k/2$ 
10  end
11   $j \leftarrow j + k$ 
12 end
```

Es importante resaltar que para aplicar el algoritmo DIT, la longitud de la señal de entrada debe ser una potencia entera de dos. Cuando esto no se cumple, entonces se debe aplicar un procedimiento denominado “rellenado de ceros” (*zero-padding*) para agregar ceros al final de la señal, de tal manera que se ajusta su longitud a la siguiente potencia entera de dos. Por ejemplo, si una señal tiene $N = 1000$ puntos, entonces se deben agregar 24 ceros después del último punto para ajustar su longitud a $2^{10} = 1024$. El relleno de ceros no afecta el espectro de Fourier y además incrementa la resolución de la frecuencia de la FFT, como se muestra en la Figura 4.18.

4.7. Sumario

- El par de transformadas Fourier discretas (DFT) son:

$$\mathcal{F}[f(k)] = F(u) = \sum_{k=0}^{N-1} f(k) e^{-\frac{j2\pi uk}{N}}, \quad \text{para } u = 0, 1, \dots, N-1,$$

y

$$\mathcal{F}^{-1}[F(u)] = f(k) = \frac{1}{N} \sum_{u=0}^{N-1} F(u) e^{\frac{j2\pi uk}{N}}, \quad \text{para } k = 0, 1, \dots, N-1.$$

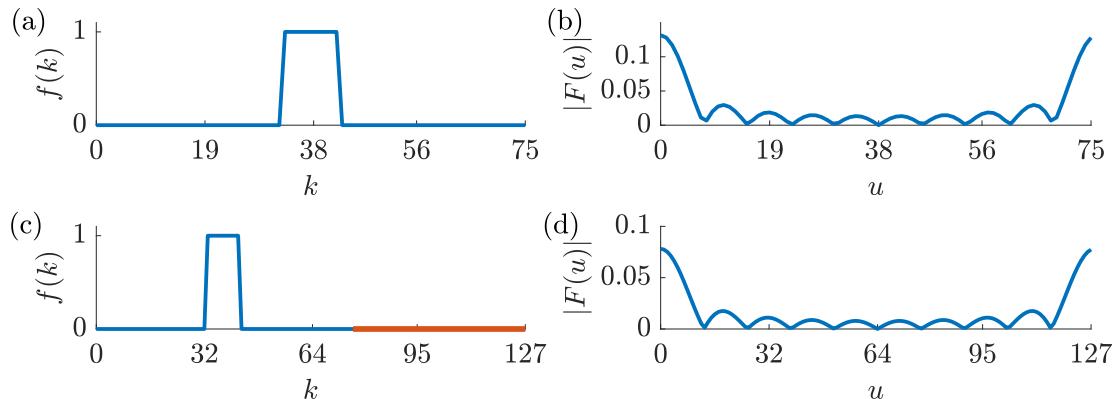


Figura 4.18: (a) Pulso rectangular original. (b) DFT calculada mediante (4.8). (c) Pulso rectangular con relleno de ceros al final de la secuencia original (línea naranja). (d) DFT calculada mediante el algoritmo FFT DIT.

- Las funciones de ventana reducen los efectos indeseados en la DFT debido a discontinuidades en la señales discretas.
- La transformada de Fourier discreta de corta duración (STFT) es una secuencia de DFTs de una señal en ventana. La magnitud al cuadrado de la STFT produce la representación del espectrograma de la densidad espectral de potencia de la función de entrada.
- La transformada de Fourier discreta en dos dimensiones se puede obtener a partir de la DFT unidimensional, aplicada primero a cada fila y después a cada columna de la matriz de entrada. Inversamente, para obtener la DFT inversa, primero se transforman las filas y después las columnas para la obtener reconstrucción final.
- Para computar la DFT de una señal con N puntos, se requieren realizar N^2 operaciones. El algoritmo de la transformada rápida de Fourier (FFT) reduce el número de operaciones a $N \log_2 N$.
- El algoritmo FFT *radix-2 decimation-in-time*, propuesto por Cooley y Tukey, asume que la longitud de la señal es potencia de dos. En caso de no satisfacer este criterio, se deben agregar ceros al final de la señal hasta que su longitud sea potencia de dos.

4.8. Ejercicios

Los siguientes ejercicios de programación se deberán implementar en MATLAB u OCTAVE:

- Implementar el algoritmo FFT *radix-2 decimation-in-time* (DIT), así como la inversa FFT. Se debe verificar que la longitud de la señal de entrada sea potencia de dos, en caso de no serlo se mandará un mensaje de error. Considere que también debe implementarse el algoritmo de Gold-Rader para el reversamiento de bits.
- Implementar la 2D-DFT y su inversa a partir de la FFT DIT, aplicando los conceptos de simetría y separabilidad del núcleo de transformación.
- Implementar el filtrado en frecuencia de imágenes digitales dado una frecuencia de corte D_0 y un tipo de filtro Gaussiano: paso bajo o paso alto. Se deberá verificar que el tamaño de la imagen de entrada sea potencia de dos, en caso de no serlo en alguna de sus dimensiones, se rellenará con ceros antes de aplicar la 2D-DFT. Después del filtrado de la imagen, se deberá remover el relleno de ceros en caso de haberlo realizado, de modo que la imagen de entrada y salida tengan el mismo tamaño. Mostrar en pantalla la comparación entre la imagen original y su versión filtrada.

5. Aplicaciones en imágenes digitales

5.1. Filtrado de imágenes

En la Sección 3.3 se introdujo la convolución como un operador que involucra la interacción de dos funciones para generar una tercera función que representa una versión modificada de alguna de ellas.

En el dominio discreto, la convolución unidimensional se define como:

$$g(n) = (h * f)(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)f(n-k), \quad (5.1)$$

donde $f(n)$ es la señal de entrada discreta, $h(k)$ es la respuesta al impulso, y $g(n)$ es la señal de salida.

Una de las aplicaciones de la convolución discreta es el *filtrado de imágenes* digitales en el dominio espacial; por lo tanto, la convolución se puede extender al caso de dos dimensiones como:

$$\begin{aligned} g(x, y) &= (h * f)(x, y), \\ &= \sum_{i=-a}^a \sum_{j=-b}^b h(i, j) f(x-i, y-j), \end{aligned} \quad (5.2)$$

para $x = 0, 1, \dots, M-1$ y $y = 0, 1, \dots, N-1$, donde f y g son imágenes de tamaño $M \times N$, h es un filtro o máscara de tamaño $m \times n$, y $a = (m-1)/2$ y $b = (n-1)/2$, asumiendo que m y n son enteros impares. El tamaño del filtro suele ser mucho menor que el tamaño de la imagen de entrada y su elemento central es el origen, como se muestra en la Figura 5.1.

El proceso de filtrado en el dominio espacial usando el operador de convolución involucra los siguientes pasos básicos:

1. Dada una máscara de convolución $h(x, y)$, rotarla 180° a partir de su origen.
2. Desplazar el elemento central de $h(x, y)$ sobre un píxel de interés en la imagen de entrada $f(x, y)$ y aplicar la expresión en (5.2).
3. Colocar el resultado de la suma de productos en el píxel correspondiente en la imagen de salida $g(x, y)$.

4. Repetir los pasos 2 y 3 hasta haber recorrido todos los píxeles de la imagen.

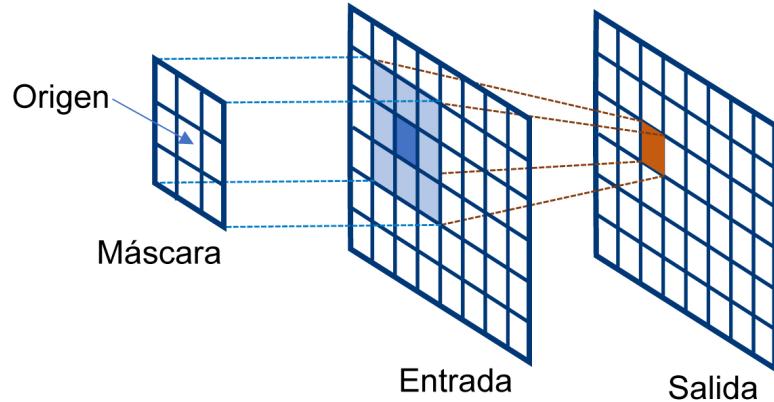


Figura 5.1: Convolución en dos dimensiones.

Considerando que la imagen de entrada es de tamaño $M \times N$ y la máscara de convolución es de tamaño $m \times n$, se deberán realizar $MNmn$ adiciones y multiplicaciones para filtrar todos los píxeles de la imagen. Por lo tanto, el costo computacional de la convolución bidimensional incrementa a medida que aumenta el tamaño de la imagen.

Para acelerar el proceso de filtrado de una imagen, se puede realizar la convolución en el dominio de la frecuencia usando la FFT, ya que el *teorema de convolución* establece que una convolución en el dominio del espacial equivale al producto de dos transformadas de Fourier en el dominio de la frecuencia, esto es

$$g(x, y) = f(x, y) * h(x, y) = \mathcal{F}^{-1}[H(u, v)F(u, v)], \quad (5.3)$$

donde \mathcal{F}^{-1} es la 2D-IDFT, $F(u, v)$ es la 2D-DFT de $f(x, y)$ y $H(u, v)$ es una función de filtrado. Los arreglos $F(u, v)$, $H(u, v)$ y $g(x, y)$ son de tamaño $M \times N$, el mismo que la imagen de entrada $f(x, y)$.

El proceso de filtrado en el dominio de la frecuencia involucra los siguientes pasos básicos:

1. Multiplicar la imagen de entrada $f(x, y)$ por $(-1)^{(x+y)}$ para desplazar el origen del espectro de Fourier al centro del plano coordenado de acuerdo con (4.19).

2. Calcular la 2D-DFT de la imagen resultante del paso 1 para obtener $F(u, v)$.
3. Multiplicar $F(u, v)$ por una función de filtro $H(u, v)$ para obtener $G(u, v)$.
4. Calcular la 2D-IDFT de $G(u, v)$ para obtener $g(x, y)$.
5. Obtener la magnitud $|g(x, y)|$ para obtener la imagen filtrada.

Para la construcción de la función de filtro $H(u, v)$, se debe considerar el tipo de filtrado que se desea realizar. Para reducción de ruido, se requiere un *filtro paso bajo*, es decir, la función $H(u, v)$ debe atenuar las frecuencias altas que están estrechamente relacionadas a cambios rápidos de intensidad y ruido. Si se desea detectar los bordes de los objetos, se requiere un *filtro paso alto*, es decir, la función $H(u, v)$ debe atenuar las frecuencias bajas que están relacionadas con los cambios lentos de intensidad. En ambos casos, se debe definir una frecuencia de corte a partir de la cual la amplitud de la señal decae significativamente. La Figura 5.2 ilustra un ejemplo de la respuesta en frecuencia de los filtros paso bajo y paso alto.

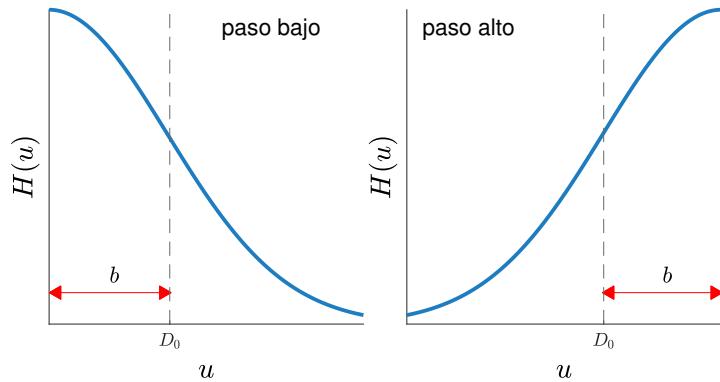


Figura 5.2: Respuesta en frecuencia de los filtros paso bajo y paso alto, donde D_0 es la frecuencia de corte y b es el ancho de banda del filtro.

La función de transferencia del filtro paso bajo Gaussiano con frecuencia de corte $D_0 > 0$ está dada por

$$H_{\text{lp}}(u, v) = \exp \left\{ -\frac{1}{2D_0^2} \left[\left(u - \frac{M}{2} \right)^2 + \left(v - \frac{N}{2} \right)^2 \right] \right\}, \quad (5.4)$$

donde M y N son el ancho y alto de la imagen de entrada. A partir del filtro paso

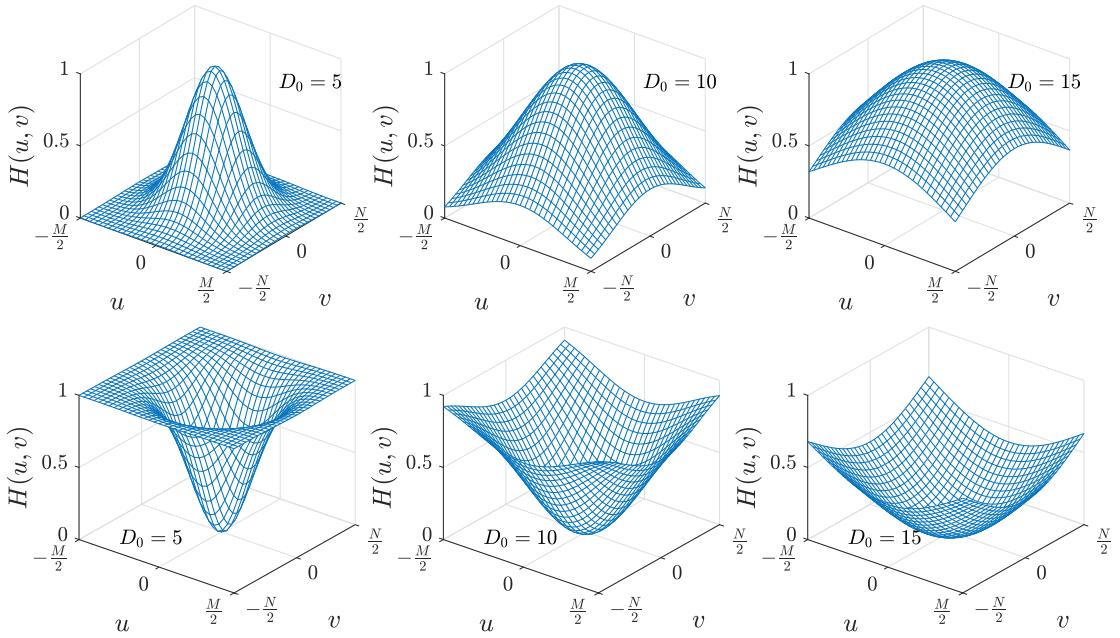


Figura 5.3: Filtros Gaussianos con diferentes frecuencias de corte D_0 . Renglón superior: filtros paso bajo. Renglón inferior: filtros paso alto.

bajo, el filtro paso alto se obtiene como:

$$H_{\text{hp}}(u, v) = 1 - H_{\text{lp}}(u, v). \quad (5.5)$$

La Figura 5.3 muestra la forma que tienen los filtros Gaussianos paso bajo y paso alto para diferentes puntos de corte. Nótese que a medida que el valor del punto de corte disminuye, el ancho de banda del filtro también se reduce, haciendo el filtro más selectivo.

En la Figura 5.4 se muestran dos ejemplos de filtrado de imágenes en el dominio de la frecuencias usando un filtro paso bajo, para la reducción de ruido, y un filtro paso alto, para la detección de bordes. En el caso del filtro paso bajo, la imagen filtrada es una versión suavizada de la imagen original, ya que las componentes de alta frecuencia fueron atenuadas. Por otro lado, en el caso del filtro paso alto, la imagen filtrada perdió la información de intensidad, ya que las frecuencias bajas, relacionadas a cambios lentos de intensidad, fueron atenuadas. En ambos casos, para efectos de visualización en las Figuras 5.4(b) y (e), el rango dinámico del espectro fue comprimido mediante la función $\log(1 + |F(u, v)|)$.

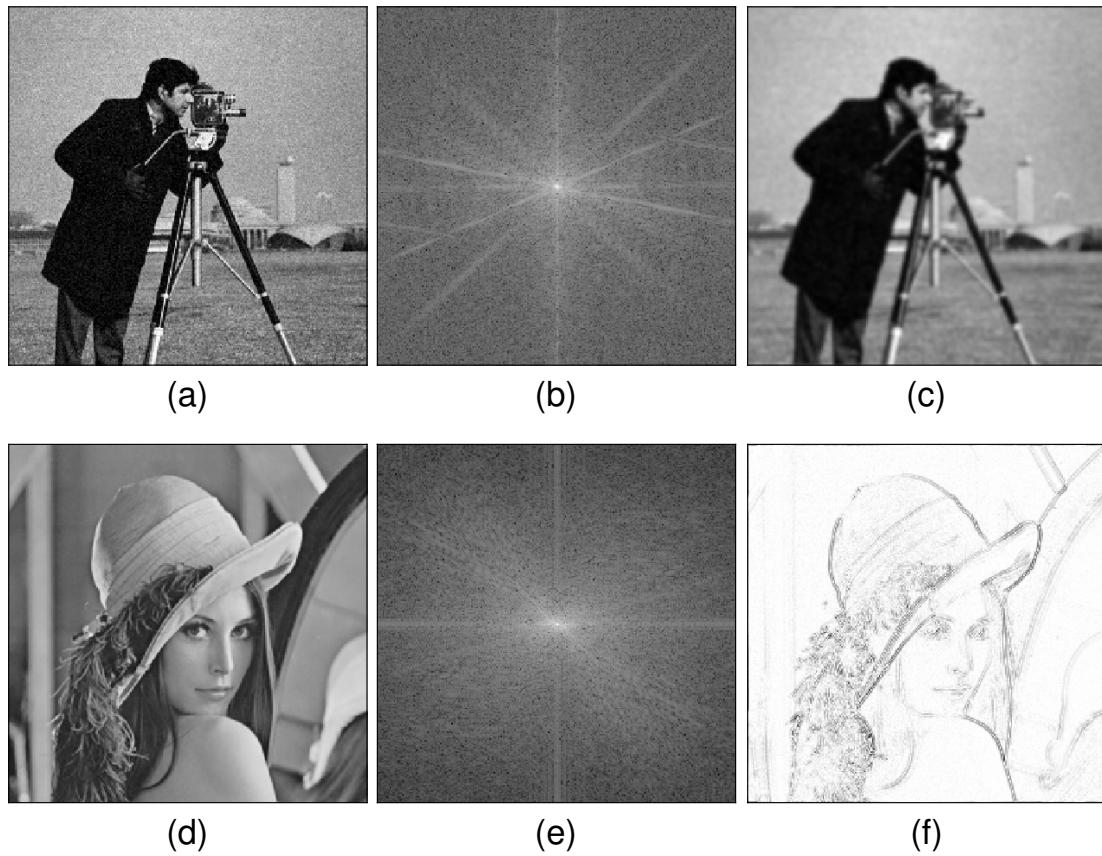


Figura 5.4: (a) Imagen `cameraman` con ruido. (b) Espectro de magnitud con compresión logarítmica de la imagen `cameraman`. (c) Filtro paso bajo aplicado a la imagen `cameraman` con $D_0 = 30$. (d) Imagen `lena`. (b) Espectro de magnitud con compresión logarítmica de la imagen `lena`. (c) Filtro paso alto aplicado a la imagen `lena` con $D_0 = 50$.

5.2. Segmentación de imágenes

La *segmentación de imágenes* es la tarea de dividir una imagen R en n regiones disjuntas R_1, R_2, \dots, R_n , donde cada región corresponde con una zona u objeto de interés. Por ejemplo, considere la imagen en la Figura 5.5(a), la cual está compuesta de cinco regiones con texturas diferentes. Un método de segmentación idealmente debe generar la imagen segmentada en la Figura 5.5(b), donde todos los píxeles de la región R_k , para $k = 1, \dots, 5$, pertenecen a la misma textura.

Para segmentar automáticamente la imagen en la Figura 5.5(a), primeramente

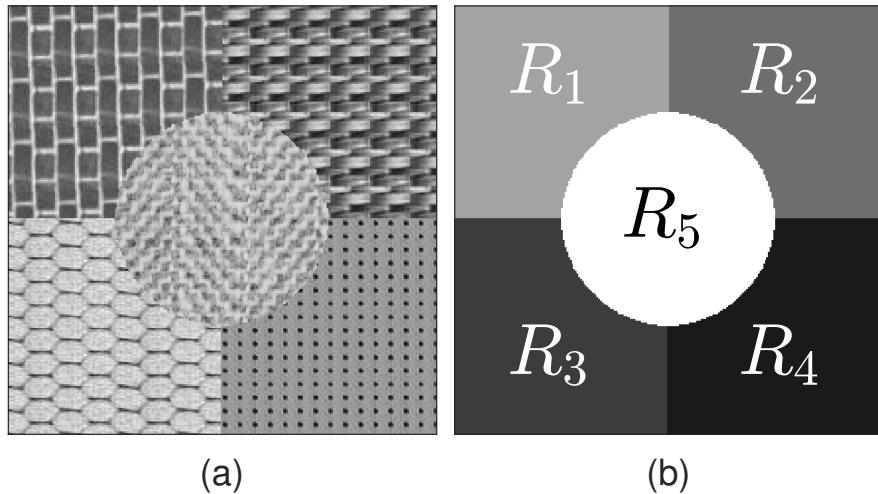


Figura 5.5: (a) Imagen con cinco regiones de texturas. (b) Imagen segmentada.

se debe describir cada píxel $f(x, y)$ para generar un vector representado por

$$\mathbf{z}_{x,y} = [z_{x,y,1}, z_{x,y,2}, \dots, z_{x,y,d}], \quad (5.6)$$

denominado *vector de características*, donde el elemento $z_{x,y,i}$, para $i = 1, \dots, d$, es un valor numérico que describe la textura en el punto (x, y) . Posteriormente, a partir de los vectores de características extraídos de todos los píxeles de la imagen, un algoritmo de aprendizaje automático asigna a cada píxel de la imagen una etiqueta que indica su pertenencia a alguna región de textura.

La textura se puede definir como un patrón de variaciones de intensidad locales y repetitivas, lo cual se relaciona con armónicos de alta energía en el espectro de Fourier, como se muestra en la Figura 5.6.

Para caracterizar los patrones de textura, se utilizan *filtros paso banda* que cubren una banda de frecuencias específica del espectro de Fourier, de manera que se realzan aquellos patrones de textura relacionados con las bandas de frecuencia que se preservan.

Los *filtros de Gabor* son un tipo de filtros paso banda muy utilizados para la descripción de texturas en imágenes, los cuales presentan dos características: 1) *multiescala*, se detectan texturas con diferentes tamaños, y 2) *orientación selectiva*, se detectan texturas con distintas orientaciones.

En el dominio espacial, la máscara de convolución de un filtro de Gabor es una

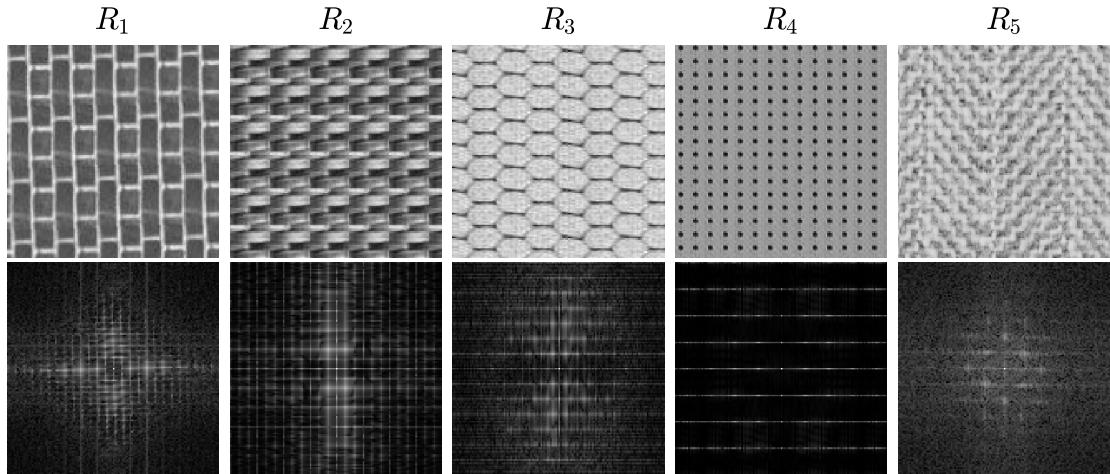


Figura 5.6: Renglón superior: imágenes de las texturas que componen la imagen en la Figura 5.5. Renglón inferior: correspondientes espectros de magnitud.

función Gaussiana modulada por una onda sinusoidal y se define como:

$$h(s, t) = \exp\left(-\frac{\hat{s}^2 + \gamma\hat{t}^2}{2\sigma^2}\right) \exp\left(j\left(2\pi\frac{\hat{s}}{\lambda} + \varphi\right)\right), \quad (5.7)$$

donde

$$\hat{s} = s \cos \theta + t \sin \theta \quad \text{y} \quad \hat{t} = t \cos \theta - s \sin \theta$$

son las coordenadas (s, t) rotadas un ángulo θ , λ es la longitud de onda, φ es el ángulo de fase, σ^2 es la varianza, y γ es la relación de aspecto. Nótese que los coeficientes del filtro de Gabor son números complejos, donde la parte real es la modulación de una onda coseno y la parte imaginaria es la modulación de una onda seno, como se muestra en la Figura 5.7.

Mediante el teorema de convolución, los filtros de Gabor se pueden implementar en el dominio de la frecuencia, donde la respuesta en frecuencia de un filtro está dada por la propiedad de modulación en (3.22):

$$H(u, v) = \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{(\hat{u} - u_k)^2}{\sigma_u^2} + \frac{\hat{v}^2}{\sigma_v^2}\right]\right\} + \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{(\hat{u} + u_k)^2}{\sigma_u^2} + \frac{\hat{v}^2}{\sigma_v^2}\right]\right\}, \quad (5.8)$$

donde $\hat{u} = u \cos \theta + v \sin \theta$ y $\hat{v} = v \cos \theta - u \sin \theta$ son coordenadas rotadas un ángulo $\theta \in (0, \pi)$, y $\sigma_u = \sigma_v = \frac{1}{2\pi\sigma_b}$ es la escala del filtro en función del parámetro de

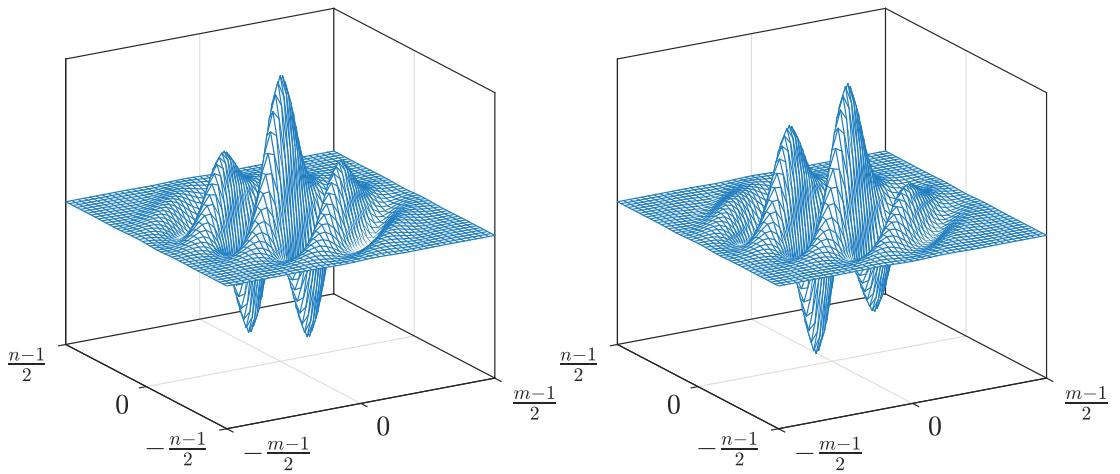


Figura 5.7: Filtro de Gabor 2D, partes real (izquierda) e imaginaria (derecha).

ancho de banda b definido como:

$$\sigma_b = \frac{1}{2u_k} \sqrt{\frac{\ln 2}{2}} \frac{2^b + 1}{2^b - 1}. \quad (5.9)$$

Nótese que el filtro en (5.8) está compuesto de dos funciones Gaussianas desplazadas simétricamente del origen a las frecuencias radiales u_k y $-u_k$, como se muestra en la Figura 5.8(a).

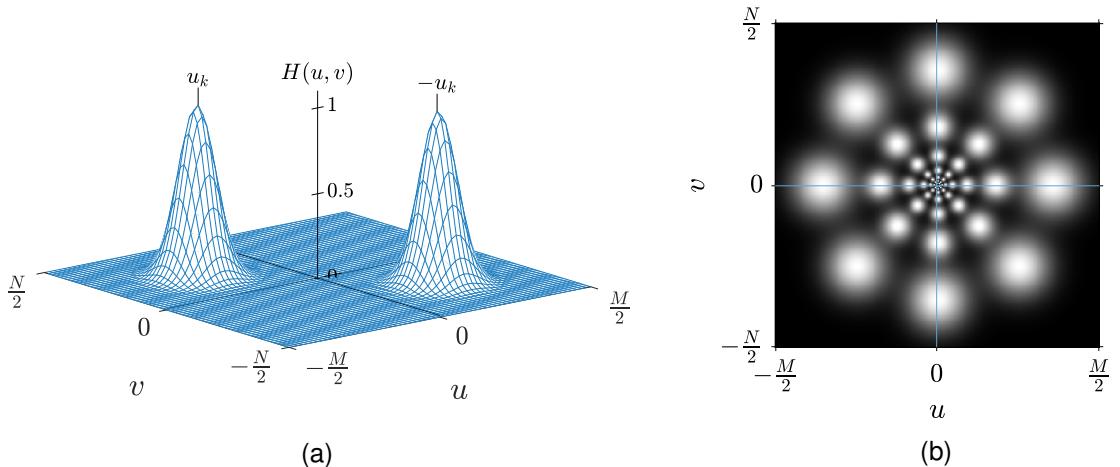


Figura 5.8: (a) Filtro de Gabor en el dominio de la frecuencia. (b) Banco de filtros de Gabor superpuestos con $\theta_0 = \frac{\pi}{4}$ y $b = 1$.

Debido a que los patrones de textura pueden tener armónicos de alta energía en diferentes bandas del espectro de Fourier, generalmente se utiliza un *banco de filtros de Gabor* para cubrir diferentes localidades del espectro. El banco de filtros se crea variando la orientación y la frecuencia radial de los filtros. Para manipular la orientación, se define un paso de ángulo θ_0 . Por ejemplo, si se define $\theta_0 = \frac{\pi}{4}$ (i.e., 45°), se crearán filtros con las orientaciones $\theta = [0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}]$. Nótese que el ángulo máximo es $\pi - \theta_0$.

La frecuencia radial u_k se varía en función del ancho de la imagen, N_c (número de columnas), con la siguiente serie:

$$2^0\sqrt{2}, 2^1\sqrt{2}, 2^2\sqrt{2}, \dots, 2^{\lfloor \log_2(N_c/4) \rfloor}\sqrt{2}. \quad (5.10)$$

La serie en (5.10) influye en el valor de la escala del filtro σ_b , definido en (5.9), de manera que a medida que aumenta el valor de u_k (i.e., se aleja del origen), el ancho de banda del filtro también aumenta para cubrir mayor área del espectro.

En la Figura 5.8(b) se muestra un banco de filtros de Gabor creado para filtrar la imagen en la Figura 5.5(a) de tamaño 256×256 píxeles. El resultado es la descomposición de la imagen original en 21 canales de textura mostrados en la Figura 5.9. Observe el realce de distintos patrones de textura de acuerdo con la orientación del filtro y su frecuencia radial. Estos canales de textura representan mapas de características, donde cada píxel de la imagen en la Figura 5.5(a) está descrito por un vector de características con 21 elementos para este caso particular.

Para realizar la segmentación de la imagen, los mapas de características son preprocesados para suavizar las respuestas de textura usando el filtro paso bajo Gaussiano en (5.4). La frecuencia de corte D_0 del filtro se define en función de la frecuencia radial u_k específica del canal de textura que será filtrado. A mayor frecuencia radial, menor es la frecuencia de corte del filtro Gaussiano, la cual se calcula como:

$$D_0 = \kappa \frac{N_c}{u_k}, \quad (5.11)$$

donde κ es una constante que controla el ancho del filtro. En la Figura 5.10 se muestran los canales de textura suavizados mediante filtros Gaussianos. En el renglón superior se observa cómo a medida que aumenta la frecuencia radial, el ancho de banda del filtro Gaussiano disminuye. También observe que cada filtro Gaussiano se aplica sobre todas las orientaciones dada una frecuencia radial específica.

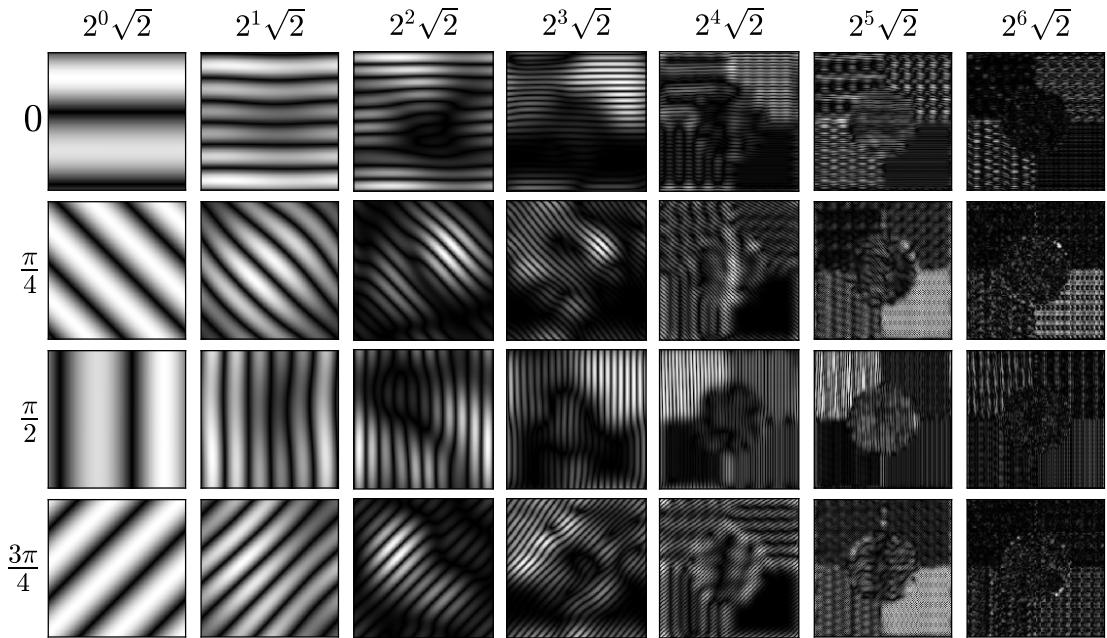


Figura 5.9: Filtrado de la imagen en la Figura 5.5(a) usando el banco de filtros de Gabor en la Figura 5.8(b) para generar 21 canales de textura.

La segmentación de la imagen se realiza mediante aprendizaje no supervisado usando un algoritmo de agrupamiento como el k -medias. El objetivo es crear grupos de píxeles que presenten similitud en los patrones de textura local.

El valor de intensidad en el punto (x, y) es extraído de cada canal de textura suavizado para formar el vector de características definido en (5.6). Además, se debe agregar información espacial incluyendo las coordenadas x e y , de modo que el vector de características en el punto (x, y) se reescribe como:

$$\mathbf{z}_{x,y} = [z_{x,y,1}, z_{x,y,2}, \dots, z_{x,y,d}, x, y]. \quad (5.12)$$

Considerando que la imagen tiene $M \times N$ píxeles, entonces se forma una matriz $Z = \{\mathbf{z}_{1,1}, \mathbf{z}_{1,2}, \dots, \mathbf{z}_{M,N}\}$, donde cada renglón es un vector de características. La matriz Z es la entrada al algoritmo k -medias, donde el parámetro k es el número de texturas que se desean agrupar; por ejemplo, $k = 5$ para la imagen en la Figura 5.5(a). Cabe señalar que antes de aplicar el algoritmo k -medias, es

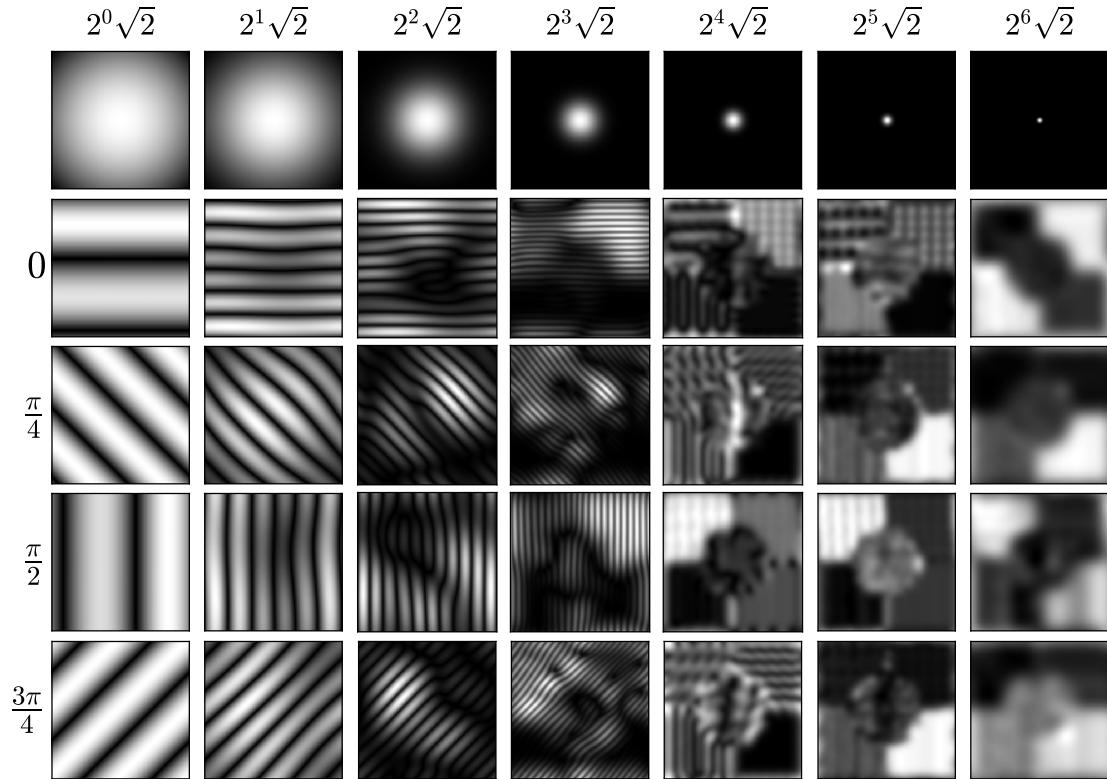


Figura 5.10: Efecto del filtrado Gaussiano sobre los canales de textura.

conveniente normalizar los valores de cada columna de la matriz Z como:

$$z'_i = \frac{z_i - \mu_i}{\sigma_i}, \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, d+2, \quad (5.13)$$

donde μ_i y σ_i son la media y desviación estándar de la i -ésima columna de la matriz Z .

La salida del algoritmo k -medias es un vector de etiquetas, donde cada elemento es un valor entero que indica la pertenencia del píxel $f(x, y)$, representado por $\mathbf{z}_{x,y}$, a algún grupo en el conjunto $\Omega = \{1, \dots, k\}$. Por lo tanto, la imagen segmentada contiene valores enteros en el conjunto Ω , donde regiones con la misma etiqueta corresponden con píxeles del mismo tipo de textura.

Resumiendo los pasos básicos para la segmentación por texturas se tiene:

1. Descomposición multi-canal: aplicar un banco de filtros de Gabor a la imagen de entrada para realzar diferentes texturas.

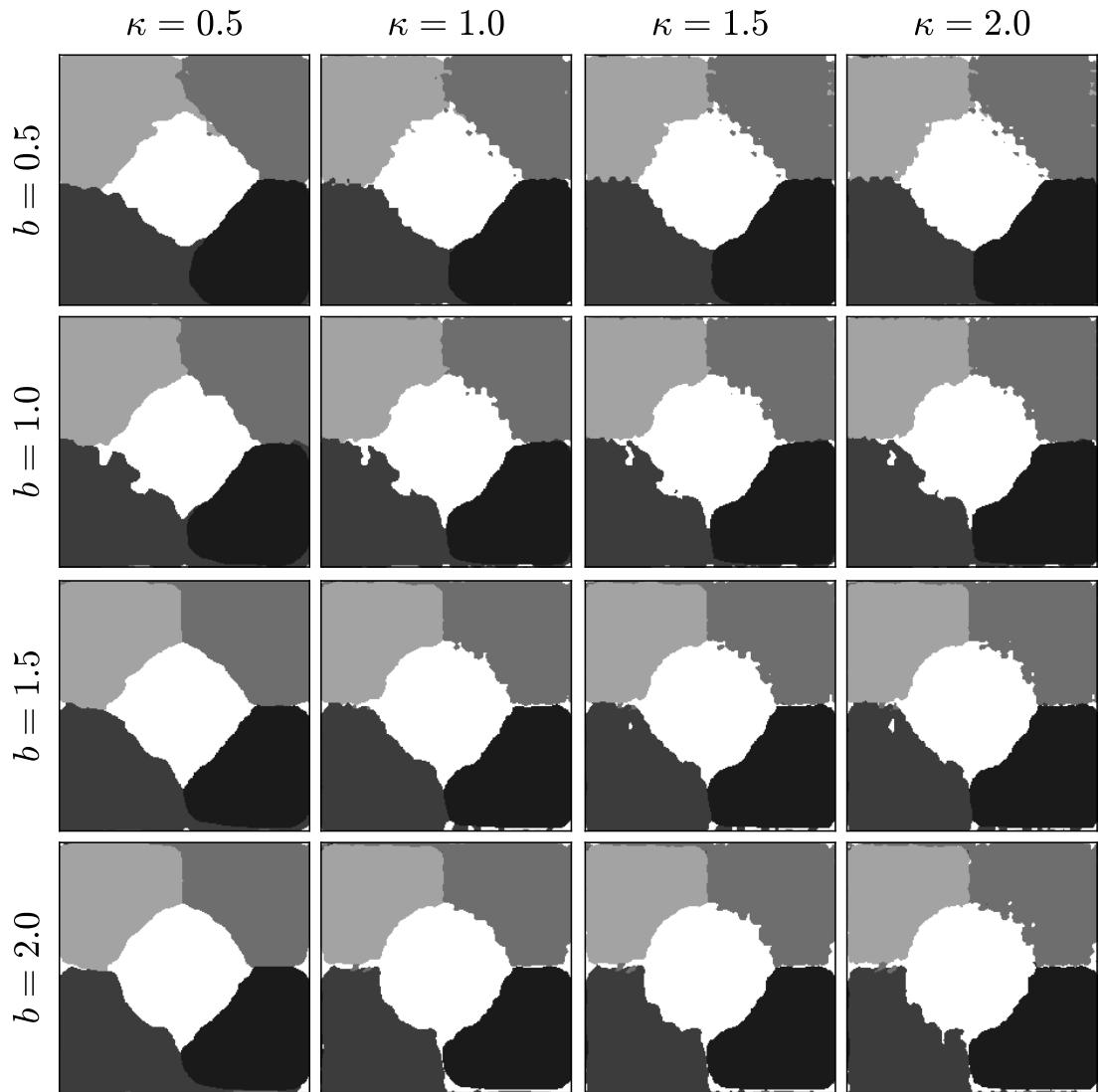


Figura 5.11: Imagen de textura segmentada con k -medias usando $\theta_0 = \frac{\pi}{4}$. Se muestra el efecto en la segmentación al variar los parámetros b y κ .

2. Suavizado: aplicar un banco de filtros de Gaussianos para suavizar regiones de textura similares.
3. Agrupamiento: agrupar píxeles que tiene texturas similares mediante el algoritmo k -medias.
4. Asignación: asignar a cada píxel de la imagen la etiqueta de grupo que le corresponde.

En la Figura 5.11 se muestra el resultado de segmentar la imagen en la Figura 5.5(a) usando diferentes configuraciones del banco de filtros de Gabor. Nótese que al variar los valores del ancho de banda b y factor de suavidad κ se obtienen distintas respuestas de segmentación.

5.3. Reconocimiento de objetos

El *reconocimiento de objetos* es una técnica de visión por computadora para identificar objetos en imágenes. Cuando los humanos miramos una imagen, podemos reconocer fácilmente personas, objetos, escenas y detalles visuales. El objetivo es enseñarle a una computadora a hacer lo que es natural para los humanos: obtener un nivel de comprensión de lo que contiene una imagen. El reconocimiento de objetos es el resultado de los algoritmos de aprendizaje automático, los cuales aprenden a distinguir diferentes tipos de objetos a partir de sus rasgos distintivos, por ejemplo, rasgos de la forma de los objetos.

La forma de un objeto se puede abstraer en una imagen binaria $f(x, y) \in \{0, 1\}$ que representa la extensión del objeto sobre el plano de la imagen. Generalmente, dicha imagen binaria se obtiene a partir de la segmentación de la imagen. Por ejemplo, en la Figura 5.12 se muestra una fotografía de una cebra segmentada por la técnica basada en filtros de Gabor y k -medias para generar la imagen binaria, donde los píxeles blancos representan la forma aproximada de la cebra.

A partir de la forma binaria de un objeto, se describen rasgos distintivos que son utilizados para reconocer la clase o tipo de objeto mediante un método de aprendizaje supervisado. Dichos rasgos son extraídos y almacenados en un *vector de características* como:

$$\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_d], \quad (5.14)$$

donde d es la cantidad de rasgos extraídos del objeto. Además, debido a que se utilizará un algoritmo de aprendizaje supervisado para el reconocimiento, el vector \mathbf{x} se asocia con una etiqueta de clase $y \in \Omega = \{1, 2, \dots, c\}$, donde c es el número total de clases de objetos que se desean reconocer.

Los *descriptores de Fourier* son coeficientes del espectro de Fourier que se extraen del borde de los objetos para describir su forma. Un píxel del borde es aquel que tiene al menos un píxel vecino del fondo, i.e., un píxel negro.

El borde de una forma binaria se extrae mediante un *algoritmo de seguimiento*

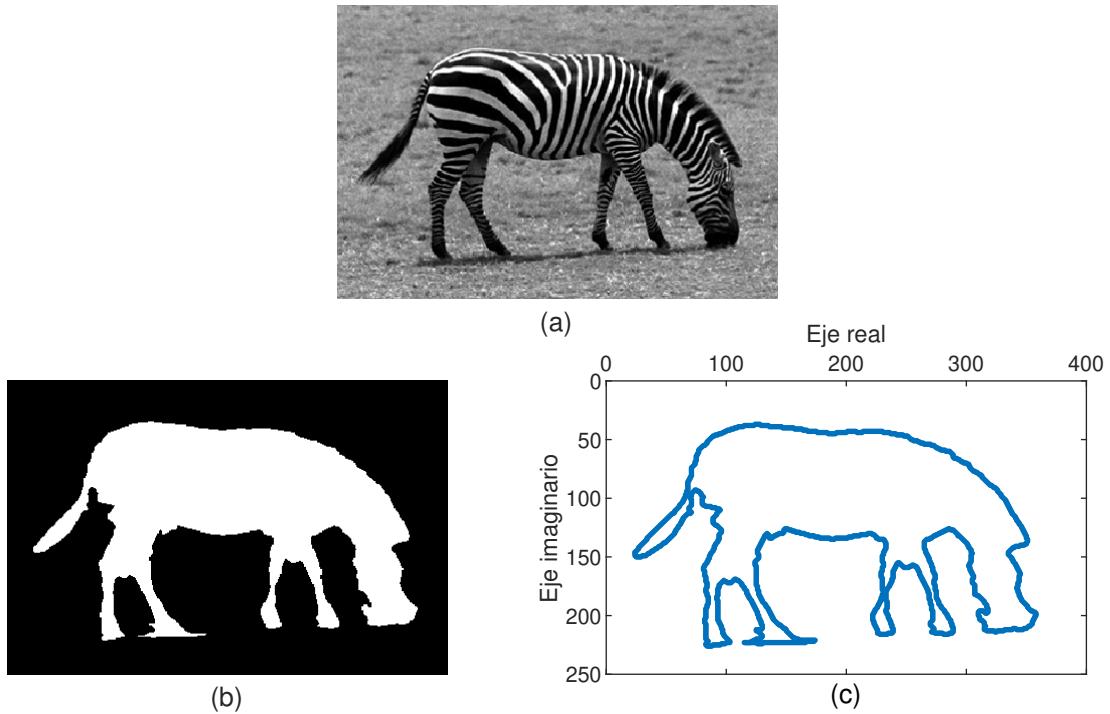


Figura 5.12: (a) Fotografía de una cebra. (b) Imagen segmentada para obtener la forma binaria de la cebra. (c) Borde de la forma binaria obtenido con un algoritmo de seguimiento de contorno.

de contorno[†] que devuelve la lista de coordenadas de los píxeles del borde ordenados en sentido horario (o antihorario). De este modo, se obtiene una secuencia ordenada de puntos $s(k) = [x(k), y(k)]$, para $k = 0, 1, \dots, n_p - 1$, donde n_p es el número total de píxeles del borde.

Para transformar la secuencia de puntos ordenados en dos dimensiones a una señal unidimensional, se utiliza una representación de números complejos, donde la parte real está dada por la coordenada en x y la parte imaginaria por la coordenada en y , como se muestra en la Figura 5.12(c). Por lo tanto, el borde del objeto se representa como una secuencia de números complejos:

$$s(k) = x(k) + jy(k), \quad \text{para } k = 0, 1, \dots, n_p - 1. \quad (5.15)$$

Los descriptores de Fourier se obtienen a partir de los coeficientes complejos

[†]En MATLAB se realiza con la función `bwboundaries`.

del espectro de Fourier obtenidos mediante la DFT de la secuencia compleja $s(k)$:

$$a(u) = \sum_{k=0}^{n_p-1} s(k) e^{-\frac{j2\pi uk}{n_p}}, \quad \text{para } u = 0, 1, \dots, n_p - 1. \quad (5.16)$$

Se pueden usar los primeros p coeficientes de Fourier para reconstruir el objeto usando la transformada inversa DFT:

$$\hat{s}(k) = \frac{1}{n_p} \sum_{u=0}^{n_p-1} \varphi_p(a(u)) e^{\frac{j2\pi uk}{n_p}}, \quad \text{donde } \varphi_p(a(u)) = \begin{cases} a(u) & \text{si } u < p, \\ 0 & \text{otro caso,} \end{cases} \quad (5.17)$$

para $k = 0, 1, \dots, n_p - 1$. La función $\varphi_p(\cdot)$ es un filtro paso bajo con frecuencia de corte p , que coloca en ceros las frecuencias altas y preserva el valor original de las frecuencias bajas, lo cual suavizará el contorno del objeto, como se muestra en la Figura 5.13. Observe que las frecuencias altas contienen detalles finos y ruido del contorno del objeto, mientras que las frecuencias bajas contienen la información global de la forma del objeto. Esto indica que unos pocos coeficientes de frecuencia baja pueden utilizarse para formar un vector de características que describa la forma del objeto.

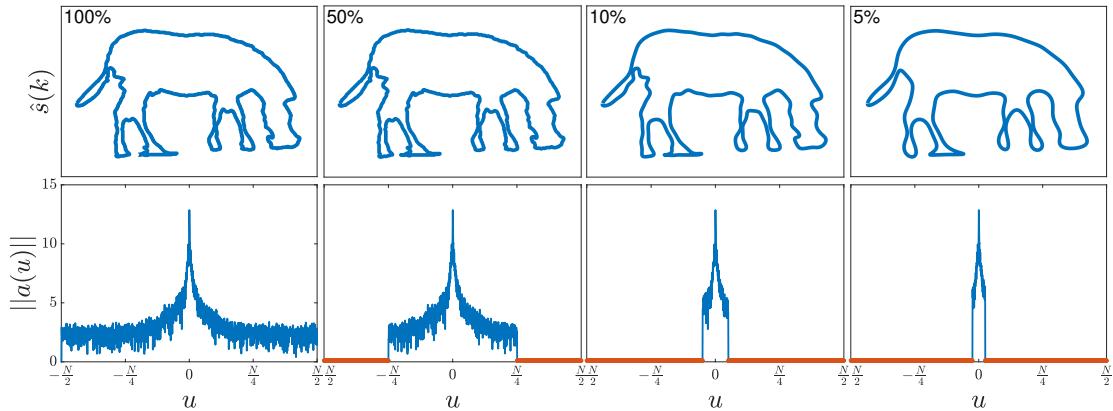


Figura 5.13: Contorno de la cebra reconstruido para diferentes porcentajes de coeficientes de Fourier preservados. En todos los casos, la señal original $s(k)$ y la reconstruida $\hat{s}(k)$ tienen el mismo número de puntos.

Existe un problema que debe resolverse antes de utilizar a los coeficientes de Fourier como descriptores de forma: no son invariantes a cambios de escala, traslación y rotación. Es crucial que cualquier descriptor de forma sea *invariante* a

las posibles transformaciones geométricas que un objeto puede sufrir, es decir, el valor numérico del descriptor debe ser aproximadamente igual aun si el tamaño o la pose del objeto cambian.

Los descriptores de Fourier son los coeficientes complejos $a(u)$ normalizados para hacerlos invariantes a cambios de escala, traslación y rotación de los objetos.

La traslación de un objeto sobre el plano de la imagen se representa como un desplazamiento de la secuencia $s(k)$ con $t = \Delta x + j\Delta y$, tal que $s_t(k) = s(k) + t$. Sustituyendo $s_t(k)$ en (5.16) se tiene:

$$\begin{aligned} a_t(u) &= \sum_{k=0}^{n_p-1} (s(k) + t)e^{-\frac{j2\pi uk}{n_p}}, \\ &= \sum_{k=0}^{n_p-1} s(k)e^{-\frac{j2\pi uk}{n_p}} + \sum_{k=0}^{n_p-1} te^{-\frac{j2\pi uk}{n_p}}, \\ &= a(u) + \sum_{k=0}^{n_p-1} te^{-\frac{j2\pi uk}{n_p}}. \end{aligned} \quad (5.18)$$

En (5.18), el desplazamiento t es una constante cuya DFT solo tiene efecto en $u = 0$ (i.e., componente DC), como se describió en la Sección 3.4.2. Por lo tanto,

$$a_t(u) = \begin{cases} a(u) + n_p t & \text{si } u = 0, \\ a(u) & \text{si } u > 0, \end{cases} \quad (5.19)$$

lo cual indica que la traslación no tiene efecto sobre $a(u)$ excepto en $u = 0$. De este modo, la normalización a traslación se realiza haciendo $a(0) = 0$. Si se reconstruye mediante la inversa DFT el espectro normalizado a traslación, se observa que el centro de masa del objeto se traslada al origen, como se observa en la Figura 5.14(a), lo cual se conoce como *centralización*. De este modo, cualquier objeto, independientemente de su localización, es desplazado al origen del plano coordenado.

El escalamiento de un objeto se representan como un cambio en la amplitud de la secuencia $s(k)$ por un factor $\alpha > 0$, tal que $s_\alpha(k) = \alpha s(k)$. Sustituyendo $\alpha s(k)$

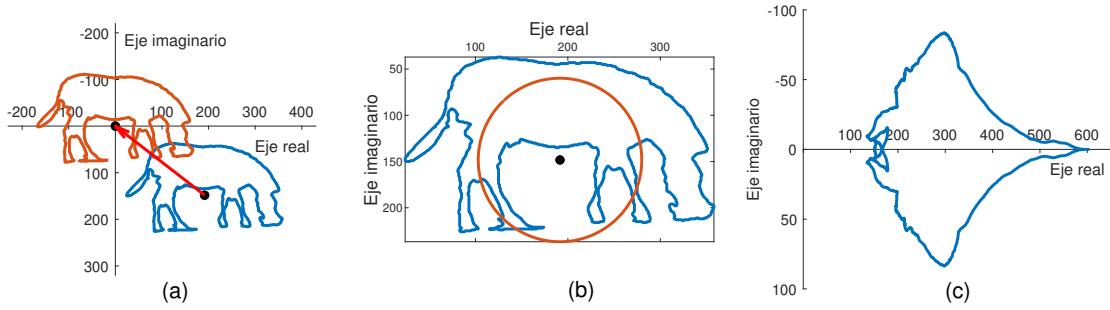


Figura 5.14: (a) Centralización del objeto al origen del plano coordenado. (b) El coeficiente $a(1)$ reconstruye un círculo con la misma área del objeto. (c) La magnitud de los coeficientes reconstruyen un objeto cuyo eje mayor es paralelo al eje horizontal.

en (5.18) se tiene:

$$\begin{aligned}
 a_\alpha(u) &= \sum_{k=0}^{n_p-1} \alpha s(k) e^{-\frac{j2\pi uk}{n_p}}, \\
 &= \alpha \sum_{k=0}^{n_p-1} s(k) e^{-\frac{j2\pi uk}{n_p}}, \\
 &= \alpha a(u).
 \end{aligned} \tag{5.20}$$

La expresión en (5.20) obedece a la propiedad de linealidad dada en (3.13), es decir, el factor α afecta a todos los coeficientes $a(u)$ por igual, para $u \geq 0$.

El coeficiente $a(1)$ reconstruye un círculo con la misma área del objeto, como se muestra en la Figura 5.14(b). Por lo tanto, la normalización a escalamientos se realiza dividiendo todos los coeficientes complejos sobre la magnitud de $a(1)$ como:

$$a(u) = \frac{a(u)}{\|a(1)\|}, \text{ para } u \geq 0. \tag{5.21}$$

Finalmente, la rotación de un objeto se representan como un desfase de la secuencia $s(k)$ por un ángulo θ , tal que $s_\theta(k) = s(k)e^{j\theta}$. Sustituyendo $s_\theta(k)$ en (5.18)

se tiene:

$$\begin{aligned}
 a_\theta(u) &= \sum_{k=0}^{n_p-1} s(k) e^{j\theta} e^{-\frac{j2\pi uk}{n_p}}, \\
 &= e^{j\theta} \sum_{k=0}^{n_p-1} s(k) e^{-\frac{j2\pi uk}{n_p}}, \\
 &= a(u) e^{j\theta}.
 \end{aligned} \tag{5.22}$$

La expresión en (5.22) indica que la rotación afecta a todos los coeficientes por igual por un término constante multiplicativo $e^{j\theta}$. Por lo tanto, para la normalización a rotaciones se remueve la fase del espectro considerando solamente la magnitud de los coeficientes:

$$a(u) = \|a(u)\|, \text{ para } u \geq 0, \tag{5.23}$$

Los coeficientes normalizados a rotaciones reconstruyen un objeto cuyo eje mayor siempre es paralelo al eje horizontal del plano cartesiano, como se muestra en la Figura 5.14(c). Observe que se pierde la forma original del objeto, aunque se mantiene la amplitud del espectro de Fourier, lo cual es información relevante para propósitos de reconocimiento.

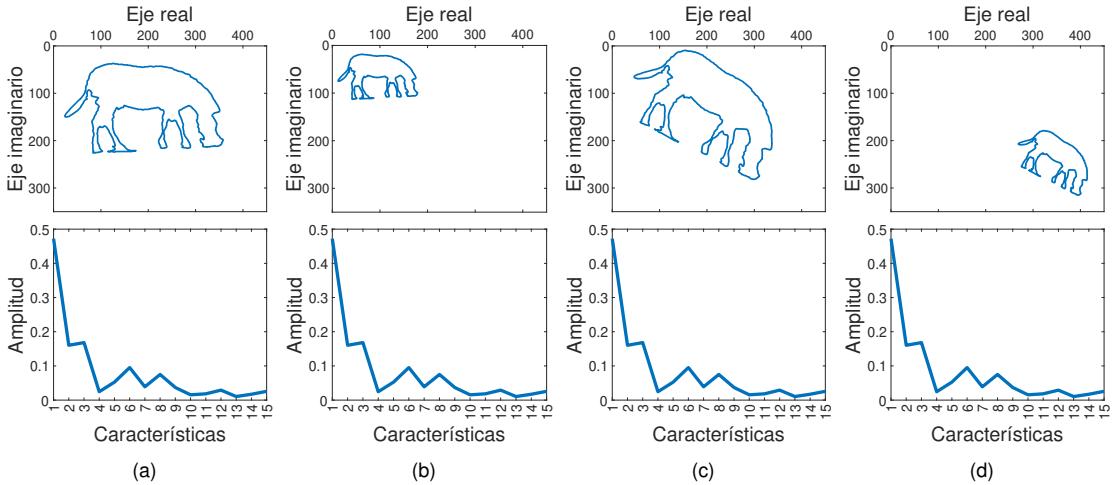


Figura 5.15: Descriptores de Fourier para diferentes transformaciones geométricas del objeto: (a) original, (b) escalamiento con $\alpha = 0.5$, (c) rotación con $\theta = \pi/6$, y (d) escalamiento con $\alpha = 0.5$, rotación con $\theta = \pi/6$ y translación con $t = 150 + j100$.

Los descriptores de Fourier pueden considerarse como una *firma espectral* del

borde del objeto, que deben presentar respuestas invariantes para objetos de la misma clase, independientemente de la transformación geométrica, como se muestra en la Figura 5.15. Por otro lado, los descriptores de Fourier son *discriminantes* para objetos diferentes, es decir, las firmas espectrales presentan distribuciones distintas, como se muestra en la Figura 5.16.

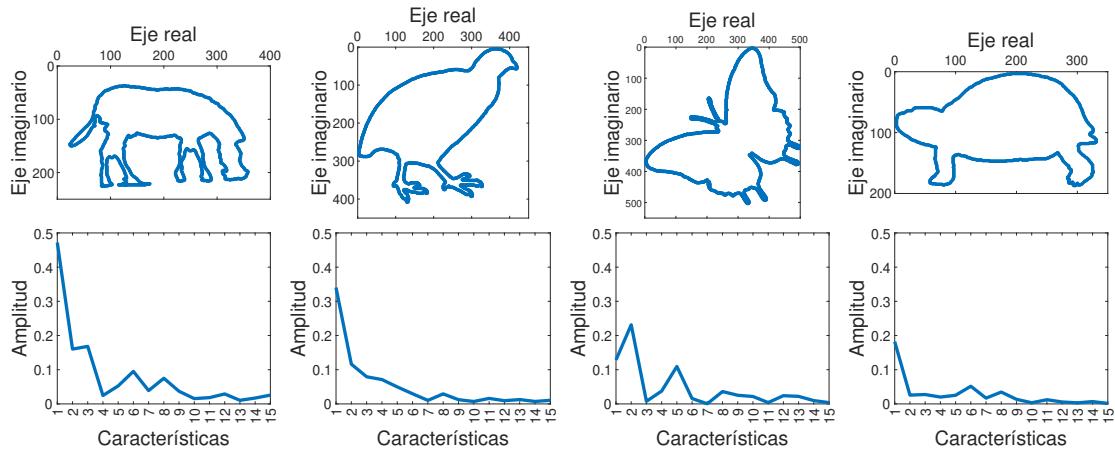


Figura 5.16: Descriptores de Fourier para diferentes clases de objetos.

Resumiendo los pasos básicos para extraer los descriptores de Fourier de una forma binaria se tiene:

1. Definir el número de p descriptores de Fourier.
2. Extraer los píxeles del borde del objeto con un algoritmo de seguimiento de contorno.
3. Expresar el borde del objeto como una secuencia $s(k)$ de números complejos.
4. Calcular la DFT de la secuencia $s(k)$ para obtener los coeficientes complejos $a(u)$.
5. Normalizar los coeficientes $a(u)$ a transformaciones geométricas:
 - a) Invarianza a traslación: colocar el primer coeficiente $a(0)$ (i.e., componente DC) en cero.
 - b) Invarianza a escalamiento: dividir cada coeficiente $a(u)$ sobre la magnitud del segundo coeficiente $a(1)$.

- c) Invarianza a rotación: calcular la magnitud de los coeficientes $a(u)$.
6. Obtener los coeficientes normalizados para formar el vector de características $\mathbf{x} = [a(2), a(3), \dots, a(p+2)]$. Nótese que los coeficientes normalizados $a(0) = 0$ y $a(1) = 1$; por lo tanto, son removidos.

Para el reconocimiento de objetos se obtienen los p descriptores de Fourier de las clases de objetos que se desean clasificar (i.e., se crea un conjunto de entrenamiento). Después, se puede utilizar el algoritmo de los k -vecinos más cercanos (kNN) para determinar la etiqueta de clase de un patrón de prueba \mathbf{x}_{test} . El algoritmo kNN mide la distancia Euclidiana de \mathbf{x}_{test} a todos los patrones de entrenamiento, selecciona a sus k vecinos más cercanos, y asigna \mathbf{x}_{test} a la clase más frecuente entre estos k vecinos.

5.4. Sumario

- El filtrado de una señal en el dominio de la frecuencia se basa en el teorema de convolución.
- El filtro paso bajo atenúa frecuencias altas y se utiliza para suavizar imágenes y reducir ruido.
- El filtro paso alto atenúa frecuencias bajas y se utiliza para detectar bordes en imágenes.
- Los filtros de Gabor son filtros paso banda con propiedades multi-escala y orientación selectiva.
- La segmentación de una imagen se puede realizar detectando diferentes patrones de textura relacionados con armónicos de alta energía en el espectro de Fourier.
- Los descriptores de Fourier son útiles para caracterizar la forma de los objetos para propósitos de reconocimiento. Están normalizados a translación, escalamiento y rotación de los objetos.

5.5. Ejercicios

Los siguientes ejercicios de programación se deberán implementar en MATLAB u OCTAVE:

- Implementar el filtrado en frecuencia de imágenes digitales dado una frecuencia de corte D_0 y un tipo de filtro Gaussiano: paso bajo y paso alto. Analizar el efecto de variar la frecuencia de corte. Mostrar en pantalla la comparación entre la imagen original y su versión filtrada.
- Implementar la segmentación de imágenes usando los filtros de Gabor en el dominio de la frecuencia. Analizar el efecto de variar los parámetros θ_0 , b y κ . Mostrar en pantalla la comparación entre la imagen original y su versión segmentada.
- Implementar el reconocimiento de objetos usando descriptores de Fourier. Utilizar el algoritmo kNN para evaluar el error de clasificación dentro de un esquema de validación cruzada dejando uno fuera. Analizar el efecto de variar el número de descriptores de Fourier y el número de k vecinos más cercanos. Mostrar en pantalla la matriz de confusión.

Bibliografía

- [1] Hwei P. Hsu. *Análisis de Fourier*. Addison-Wesley Iberoamericana, Delaware, USA, 1987.
- [2] Charles K. Alexander and Matthew N. O. Sadiku. *Fundamentals of Electric Circuits*. 5th Edition. Mc Graw-Hill, New York, USA, 2013.
- [3] Eleanor Chu. *Discrete and Continuous Fourier Transform. Analysis, Applications and Fast Algorithms*. CRC Press, Boca Raton, USA, 2008.
- [4] Rafael C. Gonzalez and Richard E. Woods. *Digital Image Processing*. 4th Edition. Pearson, New Jersey, USA, 2017.
- [5] Brian Gough. “*FFT Algorithms*”, 1997. <https://bit.ly/2RM00CS>.
- [6] Murray R. Spiegel. *Manual de Fórmulas y Tablas Matemáticas*. Mc Graw-Hill, Mexico, 1997.
- [7] Christopher M. Bishop. *Pattern Recognition and Machine Learning*. Springer, New York, USA, 2006.