Ludwig-Maximilians-Universität München
Fakultät für Philosophie, Wissenschaftstheorie und Religionswissenschaft
Munich Center for Mathematical Philosophie
Lehrstuhl für Logik und Sprachphilosophie

Wintersemester 2025/26

Tutorium zu Logik I

Basierend auf der Vorlesung von
Prof. Dr. Dr. Hannes Leitgeb, LMU München

Luis F. Bartolo Alegre
l.bartolo@campus.lmu.de

30. Januar 2026

https://github.com/luisbartolo/Logik1-WiSe-25-26.git

[Einige Lösungen können Fehler enthalten.]

Ludwig-Maximilians-Universität München
Fakultät für Philosophie, Wissenschaftstheorie und Religionswissenschaft
Munich Center for Mathematical Philosophie
Lehrstuhl für Logik und Sprachphilosophie

Hinweis
Dieses Dokument enthält meine Lösungen zu den Übungen aus dem Skript von Prof. Dr. Dr. Hannes Leitgeb sowie einige zusätzliche Übungen. Die Originalübungen gehören selbstverständlich den jeweiligen Autor:innen und werden hier nur zu Lernzwecken genutzt.

Colophon
Dieses Dokument wurde gesetzt mit Hilfe von KOMA-Script und LaTeX unter Verwendung der kaobook-Klasse.

Inhaltsverzeichnis

Inhaltsverzeichnis iii

0 Einführung in das Tutorium **1**
0.1 Warum Logik lernen? 1
0.2 Warum ein Spiel lernen? 2
0.3 Bedeutung der Übungen 4
0.4 Die Kunst des Fragens 4
0.5 Sitzungsübersicht 7
0.6 Sprechstunden 8
0.7 Materialien 8

1 Vorbemerkungen **9**
1.1 Vorbereitung 9
1.1.1 Anhang 13
1.1.2 Lösungen 14
1.2 Übungen 17
1.2.1 Lösungen 20
1.3 Zusatzübungen 29
1.3.1 Lösungen 30

2-3 Aussagenlogische Analyse und Repräsentierung **31**
2-3.1 Vorbereitung 31
2-3.2 Übungen 34
2-3.2.1 Übungen zu Kapitel 2 34
2-3.2.2 Übungen zu Kapitel 3 35
2-3.2.3 Lösungen 36

4 Die aussagenlogische Sprache **51**
4.1 Übungen 51
4.2 Lösungen 53

5 Die aussagenlogische Semantik **57**
5.1 Vorbereitung 57
5.1.1 Erstellung einer Wahrheitstafel 57
5.1.2 Gültigkeit von Argumenten mit Wahrheitstabellen 59
5.1.3 Vorgehensweise für einen informellen Beweis 61
5.1.4 Lösungen 64
5.2 Übungen 70
5.2.1 Lösungen 73
5.3 Zusatzübungen 86
5.3.1 Lösungen 87

6 Aussagenlogisches Herleiten **89**
6.1 Vorbereitung 89
6.2 Übungen 90
6.2.1 Lösungen 91

6.3 Zusatzübungen . . . 98
6.3.1 Lösungen . . . 99

8 Prädikatenlogische Analyse und Repräsentierung **105**
8.1 Vorbereitung . . . 105
8.1.1 Das logische Quadrat . . . 105
8.1.2 Aktivierungselemente . . . 107
8.1.3 Lösungen . . . 110
8.2 Übungen . . . 119
8.2.1 Lösungen . . . 121

9 Die prädikatenlogische Sprache **127**
9.1 Übungen . . . 127
9.1.1 Lösungen . . . 129

10 Die prädikatenlogische Semantik **137**
10.1 Vorbereitung . . . 137
10.1.1 Sonderfall 1 . . . 137
10.1.2 Variablenbelegungen . . . 139
10.1.3 Sonderfall 2 . . . 140
10.1.4 Sonderfall 3 . . . 142
10.1.5 Sonderfall 4 . . . 144
10.1.6 Varianten von Belegungen . . . 146
10.1.7 Sonderfall 5 . . . 147
10.1.8 Beweise für Wahrheit und Falschheit unter $\mathfrak{I}$ . . . 150
10.1.9 Beweise für logische Wahrheit und logische Falschheit . . . 152
10.1.10 Lösungen zu Aktivierungselemente . . . 154
10.2 Übungen . . . 159
10.2.1 Lösungen . . . 163

11 Prädikatenlogisches Herleiten **201**
11.1 Vorbereitung . . . 201
11.1.1 Abgeleitete Schlussregeln . . . 202
11.1.2 Lösungen . . . 204
11.2 Übungen . . . 209
11.2.1 Lösungen . . . 211
11.3 Zusatzübungen . . . 230
11.3.1 Lösungen . . . 230

13 Erweiterungen der Prädikatenlogik **247**
13.1 Vorbereitung . . . 247
13.1.1 Äquivalenz- und Totalordnungsrelationen . . . 247
13.1.2 Präferenz und Indifferenz . . . 248
13.1.3 Äquivalenz von Inferenzregelpaare . . . 249
13.1.4 Andere Eigenschaften von Relationen . . . 250
13.1.5 Lösungen . . . 251
13.2 Zusatzübungen . . . 256
13.2.1 Lösungen . . . 257

14 Klausurvorbereitung **263**
14.1 Hinweise für eine 90-minütige Klausur 263
14.1.1 Effektiver Start 263
14.1.2 Zeiteinteilung 263
14.2 Die Probeklausur 264
14.2.1 Lösungen 267
14.3 Zusatzübungen 285

Einführung in das Tutorium | 0

0.1 Warum Logik lernen? . 1
0.2 Warum ein Spiel lernen? 2
0.3 Bedeutung der Übungen 4
0.4 Die Kunst des Fragens . 4
0.5 Sitzungsübersicht 7
0.6 Sprechstunden 8
0.7 Materialien 8

Hallo zusammen!

Ich bin Luis und ich werde euch dieses Semester im Tutorium für **Logik I** begleiten. Ein bisschen was zu mir: Ich bin Doktorand im Bereich der Philosophie der Logik. Mein Doktorvater ist der Professor dieses Kurses, Hannes Leitgeb.

Ihr werdet es schnell merken: Deutsch ist nicht meine Muttersprache. Sie ist Spanisch. Ich komme ursprünglich aus Peru. Das bringt natürlich die ein oder andere lustige Situation mit sich, aber ich hoffe, das wird uns nicht zu sehr aus der Bahn werfen.

Wenn ihr mich mal nicht versteht, sagt einfach direkt Bescheid. Ihr könnt es ganz entspannt angehen:

> Hey Luis, ich habe dich nicht verstanden.

Oder:

> Hey Luis, kannst du das bitte nochmal wiederholen?

Das werde ich nicht übel nehmen. Im Gegenteil, das wird uns allen weiterhelfen.

Also keine Scheu! Es geht hier darum, dass wir alle die Logik so gut wie möglich lernen – und das funktioniert nur, wenn wir uns alle gut verstehen.

0.1 Warum Logik lernen?

Jetzt, wo ihr ein wenig mehr über mich wisst, lasst uns über eine spannende Frage sprechen:

> Warum sollten wir überhaupt Logik lernen?

Ich verspreche, es kann euer Leben retten!

Als ich jung war, war ich extrem skeptisch. Vielleicht kennt ihr das: Wie viele Philosophiestudenten habe ich oft an allem gezweifelt. Wissenschaft oder Religion? Für mich schienen beide nicht genug zu sein, um mir die Sicherheit zu geben, die ich suchte. Ich fühlte mich oft wie ein Philosoph in einer Sinnkrise.

Ich konnte keinen Sinn im Leben finden. Ich wusste nicht einmal, was die Ausdruck ‚Sinn des Lebens' bedeutet! Das ist selbst für einen Philosophen traurig. Als ich jedoch begann, Logik zu lernen, ist etwas Faszinierendes passiert.

Jedes Mal, wenn ich die Regeln der Logik befolgte, kam ich immer zum gleichen Ergebnis. Das ist eine verlässliche Erkenntnis! Wenn man die Regeln, die ihr hier lernen werdet, manipuliert, kommt man immer wieder zu den gleichen Ergebnissen zurück.

Dieses Wissen verschaffte mir etwas Gewissheit im Leben, die mir half, meinem Leben wieder Sinn zu geben. Daher hat Logik sozusagen mein Leben gerettet!

Natürlich gibt es philosophischen Debatten darüber, ob die klassische Logik korrekt ist, und ich beschäftige mich in meiner Forschung auch damit. Doch was wir über die klassische Logik wissen, ist ein faszinierendes und dennoch verlässliches Wissen. Im Laufe des Kurses werdet ihr mit diesem Wissen in Kontakt kommen.

Logik zu lernen ist ein bisschen wie die Regeln eines Spiels zu lernen – sagen wir Schach. Wenn ihr jemals Schach gespielt habt, wisst ihr, dass es einige Regeln gibt, die ihr kennen müsst, um das Spiel wirklich zu verstehen und spielen.

Im Schach haben wir Figuren wie den König, die Dame, den Turm und so weiter. Jede dieser Figuren hat ihre eigenen Bewegungsregeln. Genauso ist es auch in der Logik!

Die *Figuren* der Logik sind Begriffe wie Aussage, Negation, Gültigkeit, Implikation, Quantor, usw. Jede dieser logischen Begriffe hat eigene Gebrauchsregeln, die ihr im Laufe des Kurses kennenlernen werdet. Der Schlüssel liegt darin, zu lernen, wie man diese Regeln richtig (und auch falsch) anwendet.

0.2 Warum ein Spiel lernen?

Jetzt fragt ihr euch vielleicht:

> Warum müssen wir die Regeln eines Spiels lernen? Das sieht nicht besonders philosophisch aus! Lass uns einfach direkt in die tiefen Gewässer der Philosophie der Logik eintauchen!

Es gibt jedoch zwei Gründe, warum es wichtig ist, die *Spielregeln* der Logik zu lernen, bevor wir über Logik philosophieren.

Erstens: Wenn wir die Regeln des Schachspiels nicht kennen, können wir nicht sinnvoll über Schach sprechen. Das Gleiche gilt für die Logik.

Natürlich könnte man einwenden:

> Man braucht kein Schachmeister zu sein, um die grundlegenden Schachregeln zu kennen und darüber sprechen zu können.

Das stimmt! Aber um in diesem Kurs die Klausur zu bestehen, müsst ihr nicht einmal Logikmeister sein; ein gewisses Maß an Expertise genügt.

Diese *Expertise* ist besonders wichtig, wenn ihr die klassische Logik angreifen oder kritisieren wollt – denn ohne ein gewisses Maß an Wissen seid ihr wie ein Schachkommentator, der nicht einmal weiß, was ein Fianchetto ist!

Zweitens: Die Regeln der Logik regen unser Denken zu vielen philosophisch bedeutsamen Fragen an.

Tatsächlich können wir sogar die Regeln des Schachs nutzen, um über interessante Themen zu sprechen, wie Politik. Zum Beispiel könnte man sagen:

> Die Partei vollzog eine Rochade, um ihren Anführer vor den Angriffen der Opposition zu schützen.

Das ist eine sinnvolle Metapher, die wir nur verstehen können, wenn wir wissen, was eine Rochade ist! In ähnlicher Weise können wir auch die Regeln der Logik verwenden, um über etwas anderes als Logik zu sprechen.[1]

1: In der Tat sind Metaphern im Schach nicht immer vollständig treffend. Zum Beispiel:

> Der Senator verhielt sich wie ein Bauer, bewegte sich Feld für Feld und hatte keinen Einfluss.

Wenn man die Bewegungen eines Politikers mit den begrenzten Zügen eines Bauern vergleicht, wird übersehen, dass Bauern mächtig werden können, wenn sie die andere Seite des Schachbretts erreichen!

Im Gegensatz zum Schach werden die Regeln der Logik jedoch nicht metaphorisch benutzt. Wenn wir logische Konzepte verwenden, um Argumente zu begründen, versuchen wir, die echten logischen Zusammenhänge im Argument zu erfassen.

Und was wir über mit diesen Begriffen entdecken können, ist nicht oberflächlich. Lasst uns drei Beispiele kurz erwähnen.

1. Gödels Unvollständigkeitssätze zeigen, dass es in jedem konsistenten und hinreichend komplexen mathematischen System wahre Aussagen gibt, die weder bewiesen noch widerlegt werden können. Dies bedeutet, dass es Grenzen für das gibt, was in der Mathematik bewiesen werden kann.
2. Die Existenz einer Perpetuum Mobile steht in logischem Widerspruch zu den ersten beiden Gesetzen der Thermodynamik. Da beide Gesetze in der Physik als ziemlich sicher betrachtet werden, könnten wir davon schließen, dass ein Perpetuum Mobile unmöglich ist. Dies bedeutet, dass es Grenzen für das gibt, was physisch möglich ist.
3. Das Arrow-Theorem zeigt, dass es unmöglich ist, ein Wahlsystem zu konstruieren, das bestimmte faire Bedingungen erfüllt und gleichzeitig rational und konsistent ist, wenn es drei oder mehr Optionen gibt. Das bedeutet, dass es Grenzen für die Gestaltung von Wahlsystemen und Demokratie gibt.

Es ist möglich, eine Vorstellung von diesen Entdeckungen zu haben, ohne **Logik I** bestanden zu haben. Ich kann euch jedoch versichern, dass ihr sie nur vollständig verstehen werdet, wenn ihr **Logik I** erfolgreich abgeschlossen habt.

0.3 Bedeutung der Übungen

Nun, da wir gute Gründe genannt haben, Logik zu lernen, lasst uns über einen entscheidenden Teil des Kurses sprechen: die Übungen!

Die einzige Möglichkeit, wirklich von diesem Tutorium zu profitieren, besteht darin, aktiv zu versuchen, die Übungen zu machen. Dies bedeutet, sich die Zeit zu nehmen, die Aufgaben zu bearbeiten und zum Tutorium zu kommen, um zu überprüfen, ob sie korrekt oder falsch gelöst wurden und warum.

Lernen ist ein aktiver Prozess. Nur durch das Ausprobieren und Anwenden der Konzepte, die wir hier behandeln, werdet ihr in der Lage sein, die Regeln der Logik wirklich zu verinnerlichen.

Und ja, das bedeutet, dass ihr auch Fehler machen werdet – das ist ein Teil des Lernprozesses und eine Möglichkeit, herauszufinden, wo ihr mehr Klarheit benötigt.

Ich empfehle euch, sowohl individuell zu arbeiten als auch im Team (in dieser Reihenfolge). Das bedeutet, dass ihr nicht nur alleine lernen solltet, sondern auch mit euren Kommilitonen. Wenn ihr euch gegenseitig unterstützt und Fragen stellt, könnt ihr oft viel mehr lernen, als wenn ihr alleine arbeitet.

Außerdem teilt gerne eure Fragen und Bedenken im Tutorium – das bringt frischen Wind in unsere Sitzungen und hilft jedem von euch, das Gelernte besser zu verstehen.

Fragen sind ein wesentlicher Teil des Lernprozesses, und ich freue mich darauf, euch zu helfen. Denkt daran, je mehr ihr fragt und je mehr ihr übt, desto mehr werdet ihr in der Lage sein, die Konzepte zu beherrschen (und die Klausur zu bestehen).

0.4 Die Kunst des Fragens

Einige von euch sind vielleicht ein bisschen schüchtern. Das ist ganz normal!

Viele Menschen fühlen sich in einer neuen Umgebung oder beim Lernen neuer Konzepte unsicher. Aber ich möchte euch ermutigen, diese Schüchternheit zu überwinden.

Es gibt keine dummen Fragen! Das ist eine der wichtigsten Regeln, die ihr euch merken solltet. Egal wie einfach oder kompliziert eine Frage erscheinen mag – fragt einfach!

Wenn ihr euch jedoch nicht wohl dabei fühlt, während der Sitzungen Fragen zu stellen, könnt ihr mir auch gerne eine E-Mail schicken oder zu meinen Sprechstunden vorbeikommen. So können wir sicherstellen, dass wir alle Missverständnisse klären und ihr die Unterstützung bekommt, die ihr braucht.

Also, es gibt keine dummen Fragen.

Es gibt jedoch Fragen, die in einem Tutorium wie diesem hilfreicher sind als andere. Während *Was*- und *Warum*-Fragen ihren Platz haben, sind es die *Wie*-Fragen, die in diesem Kontext oft die besten Einsichten bieten.

Beginnen wir mit den *Was*-Fragen. Fragen wie:

> Was ist eine Implikation?

oder:

> Was bedeutet Gültigkeit?

können zwar informativ sein, aber sie führen oft nur zu oberflächlichen Antworten.

In einem philosophischen Kontext kann es zwar wichtig sein, eine Definition zu kennen, aber das allein reicht oft nicht aus, um wirklich zu lernen, das Konzept anzuwenden.

Dann gibt es die *Warum*-Fragen. Diese können sehr tiefgründig und anregend sein, wie zum Beispiel:

> Warum können wir nicht vom Satz des Widerspruchs absehen?

oder

> Warum müssen wir uns mit den klassischen Regeln der Logik zufrieden geben?

Diese Fragen führen oft zu interessanten Diskussionen, und ich wurde sie gerne in einem geeigneten Kontext behandeln. Aber in unserem Tutorium ist es hilfreich, sich auch auf praktischen Nutzen zu konzentrieren.

Jetzt kommen wir zu den *Wie*-Fragen – diese sind Gold wert! Zum Beispiel:

> Wie forme ich (nicht) ein gültiges Argument mit dieser Formel?
>
> Wie kann ich diese Regel bei diesem Satz (nicht) anwenden?
>
> Wie erkenne ich die Gültigkeit oder Ungültigkeit eines Arguments dieser Art?

Solche Fragen zeigen, dass ihr aktiv an eurem Verständnis arbeitet. Sie helfen uns, die praktischen Anwendungen der logischen Konzepte zu erkunden, die wir besprechen. Sie sind der Schlüssel, um die Regeln und Prinzipien der Logik tatsächlich zu beherrschen.

Das bedeutet jedoch nicht, dass ihr keine *Was*- und *Warum*-Fragen stellen dürft. Manchmal sind sie sehr nützlich, um die grundlegenden Konzepte zu klären oder um den theoretischen Rahmen zu verstehen. Zu beachten ist, dass die wesentlichen *Was*- und *Warum*-Fragen im Unterricht von Hannes behandelt werden.

Es ist einfach eine Frage der Balance. Während wir uns mit den Übungen beschäftigen und die Regeln erlernen, solltet ihr auch darüber nachdenken, wie ihr diese Regeln in verschiedenen Kontexten anwenden könnt.

Einige *Was*- und *Warum*-Fragen können jedoch auch sehr produktiv in diesem Tutorium sein. Zum Beispiel:

> Was ist der Unterschied zwischen dieser und der anderen Regel?
>
> Warum ist diese Regel hier nicht anwendbar?

Denkt also daran: Jede Frage kann wichtig und interessant sein.

Versucht jedoch, euch auf die Fragen zu konzentrieren, die euch helfen, die im Kurs gelernten Logikregeln anzuwenden.

Andere nützliche Fragen für unser Tutorium sind:

> Kannst du ein Beispiel geben, um das zu verdeutlichen?
>
> Sind diese beiden Konzepte nicht dasselbe?
>
> Kann ich die Gültigkeit dieses Arguments auf diese andere Weise beweisen?
>
> Kann ich hier diese andere Regel oder Prämisse benutzen?
>
> Was sind typische Fehler bei der Verwendung dieser Regel?

Und, natürlich:

> Luis, könntest du das noch einmal erklären?

Aber wenn ihr euch nicht sicher seid, ob eure Frage diese Kriterien erfüllt, sagt einfach, was ihr denkt. Wenn etwas unklar ist, ist es immer besser, nachzufragen, als still zu bleiben und zu hoffen, dass es irgendwann klarer wird. Wird es nicht!

Ihr werdet überrascht sein, wie oft eure Frage auch anderen helfen kann, die sich möglicherweise genau die gleiche Frage stellen!

Ludwig Wittgenstein sagte:

> Wovon man nicht sprechen kann, darüber muss man schweigen.

Ich ermutige euch dennoch, in diesem Tutorium nicht zu schweigen, denn eure Fragen könnten jemanden helfen, Logik zu verstehen (und ihm somit vielleicht sogar das Leben retten).

0.5 Sitzungsübersicht

Jedes Kapitel dieses Tutoriumsskripts (nicht zu verwechseln mit dem Kurs-Skript) ist in der Regel in drei Teile gegliedert:

1. **Vorbereitung:** Enthält eher einfache, einführende Übungen oder Begriffe.
2. **Übungen:** Beinhaltet die Aufgaben aus dem Kurs-Skript.
3. **Zusatzübungen:** Weitere Aufgaben für Studierende, die zusätzliche Übung wünschen.

Die Lösungen zu den meisten Übungen werden nach der jeweiligen Sitzung bereitgestellt.

Normalerweise wird jedes Kapitel in zwei halben Sitzungen (an zwei verschiedenen Tagen) behandelt:

- In der ersten Sitzung bearbeiten wir die Vorbereitungsübungen oder die einfacheren Übungen aus dem Kurs-Skript.
- Die zweite Sitzung konzentriert sich auf die schwierigeren Übungen aus dem Kursskript.

Aufgrund ihrer Komplexität werden die letzten beiden Kapitel mehr Zeit in Anspruch nehmen.

Im Folgenden sind alle Sitzungen der Gruppe I des Tutoriums **Logik I** für das Wintersemester 2025–26 in chronologischer Reihenfolge aufgeführt. Die Angaben in der Spalte ‚Thema' beziehen sich auf die Kapitel des Kursskripts von Prof. Leitgeb.

Nr.	Datum	Thema	Bemerkung
1	22.10.2025	Einf. & Ü. zu Kapitel 1	
2	29.10.2025	Ü. zu Kapitel 1	
3	5.11.2025	Ü. zu Kapitel 1 & 2–3	
4	12.11.2025	Ü. zu Kapitel 2–3	
5	19.11.2025	Ü. zu Kapitel 4 & 5	
6	26.11.2025	Ü. zu Kapitel 5	
7	29.11.2025	Ü. zu Kapitel 5 & 6	Samstag, 12:00–14:00, Online
8	6.12.2025	Ü. zu Kapitel 6	Samstag, 12:00–14:00, Online
9	13.12.2025	Ü. zu Kapitel 6 & 8	Samstag, 12:00–14:00, Online
		Winterpause	
10	7.1.2026	Ü. zu Kapitel 8, 9 & 10	
11	10.1.2026	Ü. zu Kapitel 10	Samstag, 12:00–14:00, Online Zusatztermin
12	14.1.2026	Ü. zu Kapitel 10 & 11	
13	17.1.2026	Ü. zu Kapitel 11	Samstag, 12:00–14:00, Online Zusatztermin
14	21.1.2026	Ü. zu Kapitel 11	
15	28.1.2026	Probeklausur 1	
16	30.1.2026	Probeklausur 2	Freitag, 18:00–20:00

Bemerkungen:

- Die meisten Treffen finden mittwochs von 16:00 bis 18:00 Uhr im Geschw.-Scholl-Pl. 1 (E), E 006 statt.
- Ausnahme 1: Die Sitzungen 7–10 finden online statt.

  Link: `https://lmu-munich.zoom-x.de/j/67669211312?pwd=LacxlbVCoQekQIsmZtbPP2tLwDLQPI.1`
- Ausnahme 2: Sitzung 14, die am Freitag (auch im Geschw.-Scholl-Pl. 1 (E), E 006) stattfindet.
- Es gibt keine Übungen zu den Kapiteln 7, 12–14.
- Zwischen dem 24.12.2025 und dem 6.1.2026 ist Winterpause.

0.6 Sprechstunden

Zusätzlich biete ich wöchentliche Sprechstunden an, in denen ihr offene Fragen klären, Übungsaufgaben besprechen.

Sprechstunde:	Montags, 18:00 & 20:00 Uhr
Gebäude:	Zimmer 223, Ludwigstraße 31, 80539 München
E-Mail:	L.Bartolo@campus.lmu.de

In den Sprechstunden könnt ihr mit mir auf Deutsch, Englisch, Französisch, Italienisch, Portugiesisch oder Spanisch sprechen.

Bemerkungen:

- Im Dezember finden die Sprechstunden nach Vereinbarung zwischen 12:00 und 13:00 Uhr online statt.
- Am 26.1.2026 entfällt die Sprechstunde um die Probeklausur zu machen.
- Die letzte Sprechstunde findet am 2.2.2026 statt.

0.7 Materialien

Ihr könnt dieses Tutoriumsskript sowie alle weiteren zusätzlichen Materialien für diese Übungsgruppe im folgenden GitHub-Repository finden:

`https://github.com/luisbartolo/Logik1-WiSe-25-26.git`

Vorbemerkungen 1

1.1 Vorbereitung

1.1 Vorbereitung 9
1.1.1 Anhang 13
1.1.2 Lösungen 14
1.2 Übungen 17
1.2.1 Lösungen 20
1.3 Zusatzübungen 29
1.3.1 Lösungen 30

Meiner Meinung nach gehört das Folgende zu den Top-5 der schwierigsten Themen in Logik I[1]:

1. Prädikatenlogische Semantik
2. Anführungszeichen, Verwendung und Erwähnung
3. Herzleitungsregeln für Quantoren
4. Informelle Beweise
5. Herzleitungsstrategien

1: **Bemerkung:** Sie müssen diese Begriffe noch nicht verstehen, sondern nur bereit sein, sie in zukünftigen Lektionen wiederzuerkennen und ihnen besondere Aufmerksamkeit zu schenken.

Kapitel 1 befasst sich genau mit dem Punkt 2 dieser Liste. Unsere Gehirne sind nicht dafür entwickelt, die zwischen Verwendung und Erwähnung – und noch mehr, die Bedeutung von Ausdrücken mit und ohne Anführungszeichen. Dieser vorbereitende Abschnitt wird Ihnen helfen, diesen Unterschied zu verstehen.

In der linken Spalte steht der Name des Ausdrucks, in der mittleren Spalte der Ausdruck selbst, und in der rechten Spalte die Bedeutung des Ausdrucks (aus der zweiten Spalte).[2]

2: **Bemerkung:** Stellen Sie sich vor, dass die Bilder von Angela Merkel und Allianz Arena nicht nur Fotos sind, sondern dass sie tatsächlich Angela Merkel und die Allianz Arena selbst sind! (Oder siehe Sektion 1.1.1.)

Name	Ausdruck	Bedeutung
‚Angela Merkel'	Angela Merkel	
‚Allianz Arena'	Allianz Arena	

Aktivierungselement 1.1. Für jede der folgenden Aussagen: Geben Sie an, ob sie wahr (`w`) oder falsch (`f`) ist. (Leerzeichen und Punkte werden dabei nicht als Zeichen gezählt.) [Antwort]

1. Obwohl ‚Angela Merkel' und ‚die Allianz Arena' Ausdrücke sind, sind Angela Merkel und die Allianz Arena keine Ausdrücke. [ ]
2. Angela Merkel war Bundeskanzlerin von Deutschland. [ ]
3. ‚Angela Merkel' war Bundeskanzlerin von Deutschland. [ ]
4. ‚Angela Merkel' ist der Name von Angela Merkel. [ ]
5. Angela Merkel ist der Name von Angela Merkel. [ ]
6. Angela Merkel ist Angela Merkel. [ ]
7. Angela Merkel ist ‚Angela Merkel'. [ ]
8. ‚Angela Merkel' ist Angela Merkel. [ ]
9. ‚Angela Merkel' ist ‚Angela Merkel'. [ ]
10. ‚Angela Merkel' ist der Name einer früheren Bundeskanzlerin von Deutschland. [ ]
11. ‚‚Angela Merkel'' ist der Name von ‚Angela Merkel'. [ ]
12. ‚‚Angela Merkel'' ist der Name von ‚‚Angela Merkel''. [ ]
13. ‚‚Angela Merkel'' ist ‚‚‚Angela Merkel'''. [ ]
14. ‚Angela Merkel' ist der Name von ‚‚‚Angela Merkel'''. [ ]
15. Satz 2 hat 44 Zeichen. [ ]
16. ‚Angela Merkel war Bundeskanzlerin von Deutschland' hat 44 Zeichen. [ ]
17. Satz 2 hat 5 Zeichen. [ ]
18. ‚Angela Merkel war Bundeskanzlerin von Deutschland' hat 5 Zeichen. [ ]
19. ‚Satz 2' hat 44 Zeichen. [ ]
20. ‚Satz 2' hat 5 Zeichen. [ ]
21. Satz 15 und Satz 16 bedeuten das Gleiche. [ ]
22. Satz 15 und Satz 16 haben die gleiche Anzahl von Zeichen. [ ]
23. ‚Satz 15' und ‚Satz 16' bedeuten das Gleiche. [ ]
24. ‚Satz 15' und ‚Satz 16' haben die gleiche Anzahl von Zeichen. [ ]
25. ‚Satz 15' und ‚Satz 16' haben die gleichen Zeichen. [ ]

Beziehungen zwischen Ausdrücken und Namen

Die folgende Tabelle zeigt, wie Ausdrücke und Ausdrücke in Anführungszeichen in Bezug auf ihre Namen und Bedeutungen zueinander stehen.

Name	**Ausdruck**	**Bedeutung**
‚Allianz Arena‘	Allianz Arena	
‚‚Allianz Arena‘‘	‚Allianz Arena‘	Allianz Arena
‚‚‚Allianz Arena‘‘‘	‚‚Allianz Arena‘‘	‚Allianz Arena‘
‚‚‚‚Allianz Arena‘‘‘‘	‚‚‚Allianz Arena‘‘‘	‚‚Allianz Arena‘‘
‚‚‚‚‚Allianz Arena‘‘‘‘‘	‚‚‚‚Allianz Arena‘‘‘‘	‚‚‚Allianz Arena‘‘‘

Aktivierungselement 1.2. Fügen Sie die fehlenden Informationen in der Tabelle unten hinzu. (Stellen Sie sich wie zuvor vor, dass die Bilder nicht nur Bilder sind, sondern dass sie tatsächlich die Objekte selbst sind.)

Name der Ausdruck	**Ausdruck**	**Bedeutung**
‚Die Erde‘		
	Freddie Mercury	
„‚2‘“		‚2‘
„Der Name der größten Musikband der Welt“		
	Der Name des Komponisten von *Messiah* (HWV 56)	
	Der Name von ‚Richard Wagner‘	
‚Der Name von Deutschlands berühmtestem Formel-1-Fahrer‘		
‚Der Name von ‚Deutschlands berühmtestem Formel-1-Fahrer‘‘		

1.1.1 Anhang

Die folgende Tabelle wäre eine korrektere Version der Tabelle am Anfang dieses Dokuments:

Name	Ausdruck	Bedeutung
‚Ein Bild von Angela Merkel'	Ein Bild von Angela Merkel	
‚Ein Bild der Allianz Arena'	Ein Bild der Allianz Arena	

1.1.2 Lösungen

Lösung zu Aktivierungselement 1.1. Wir verwenden Hervorhebungen oder Unterstreichungen, um Ausdrücke zu betonen und Begriffe mit gleicher Bedeutung anzuzeigen.

1. Obwohl ‚Angela Merkel' und ‚die Allianz Arena' Ausdrücke sind, sind Angela Merkel und die Allianz Arena keine Ausdrücke. [w]

   Erklärung

   Angela Merkel und die Allianz Arena sind Gegenstände, nicht Ausdrucke.

2. Angela Merkel war Bundeskanzlerin von Deutschland. [w]
3. ‚Angela Merkel' war Bundeskanzlerin von Deutschland. [f]

   Erklärung

   Kein Ausdruck konnte Bundeskanzlerin werden.

4. ‚Angela Merkel' ist der Name von Angela Merkel. [w]
5. Angela Merkel ist der Name von Angela Merkel. [f]
6. Angela Merkel ist Angela Merkel. [w]

   Erklärung

   Ein Fisch ist ein Fisch. Oder?

7. Angela Merkel ist ‚Angela Merkel'. [f]

   Erklärung

   Angela Merkel ist kein Ausdruck ...

8. ‚Angela Merkel' ist Angela Merkel. [f]

   Erklärung

   ... und kein Ausdruck ist Angela Merkel.

9. ‚Angela Merkel' ist ‚Angela Merkel'. [w]
10. ‚Angela Merkel' ist der Name einer früheren Bundeskanzlerin
    von Deutschland. [w]

11. „Angela Merkel“ ist der Name von ‚Angela Merkel‘. [w]
12. „Angela Merkel“ ist der Name von „Angela Merkel“. [f]

Erklärung

Ein Ausdruck kann (normalerweise) nicht sein eigener Name sein.

13. „Angela Merkel“ ist „„Angela Merkel“‘. [f]

Erklärung

Wie in Satz 12.

14. ‚Angela Merkel‘ ist der Name von „„Angela Merkel“‘. [f]

Erklärung

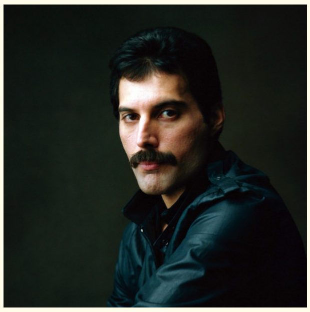
Ein Ausdruck kann nicht der Name seines Namens sein.

15. Satz 2 hat 44 Zeichen. [w]
16. ‚Angela Merkel war Bundeskanzlerin von Deutschland‘ hat 44 Zeichen. [w]
17. Satz 2 hat 5 Zeichen. [f]
18. ‚Angela Merkel war Bundeskanzlerin von Deutschland‘ hat 5 Zeichen. [f]
19. ‚Satz 2‘ hat 44 Zeichen. [f]
20. ‚Satz 2‘ hat 5 Zeichen. [w]
21. Satz 15 und Satz 16 bedeuten das Gleiche. [w]
22. Satz 15 und Satz 16 haben die gleiche Anzahl von Zeichen. [f]
23. ‚Satz 15‘ und ‚Satz 16‘ bedeuten das Gleiche. [f]
24. ‚Satz 15‘ und ‚Satz 16‘ haben die gleiche Anzahl von Zeichen. [w]
25. ‚Satz 15‘ und ‚Satz 16‘ haben die gleichen Zeichen. [f]

Erklärung

In ‚Satz 15‘ kommt eine ‚15‘ vor, aber nicht in ‚Satz 16‘.

Lösung zu Aktivierungselement 1.2.

Name	Ausdruck	Bedeutung
‚Die Erde‘	Die Erde	
‚Freddie Mercury‘	Freddie Mercury	
‚‚‚2‘‘‘	‚‚2‘‘	‚2‘
‚‚Der Name der größten Musikband der Welt‘‘	‚Der Name der größten Musikband der Welt‘	Der Name der größten Musikband der Welt
‚Der Name des Komponisten von *Messiah* (HWV 56)‘	Der Name des Komponisten von *Messiah* (HWV 56)	Georg Friedrich Händel
‚Der Name von ‚Richard Wagner‘‘	Der Name von ‚Richard Wagner‘	‚Richard Wagner‘
‚Der Name von Deutschlands berühmtestem Formel-1-Fahrer‘	Der Name von Deutschlands berühmtestem Formel-1-Fahrer	Michael Schumacher
‚Der Name von ‚Deutschlands berühmtestem Formel-1-Fahrer‘‘	Der Name von ‚Deutschlands berühmtestem Formel-1-Fahrer‘	‚Deutschlands berühmtestem Formel-1-Fahrer‘

1.2 Übungen

Übung 1.1. Wie viele Ausdruckstypen von Buchstaben bzw. Wörtern sind in jedem einzelnen der folgenden Sätze instantiiert, wie viele in allen Sätzen zusammen? Wie oft sind die Ausdruckstypen ‚a', ‚t', ‚d', ‚Hase' und ‚Nase' instantiiert?

1. Jeder Hase hat eine Nase.
2. Ich bin ein Hase.
3. Folglich habe ich eine Nase.

Übung 1.2. Ein logischer Laie äußert die drei unteren Übungssätze. Auf welche Arten lassen sich diese Sätze deuten, und was ist die wörtliche Deutung dieser Sätze?

1. Aristoteles hat 11 Buchstaben.
2. Dieser Satz hat 23 Zeichen.
3. ‚Dieser Satz' hat 10 Zeichen.

Übung 1.3. Geben Sie für jedes der folgenden Beispiele an, an welcher Stelle ein Ausdruck erwähnt bzw. verwendet wird, und wer oder was dabei jeweils erwähnt oder verwendet wird!

1. Aristoteles ist lang.
2. ‚Aristoteles' ist lang.
3. Aristoteles ist länger als ‚Aristoteles'.
4. ‚‚Aristoteles'' ist länger als ‚Aristoteles'.
5. ‚Aristoteles' bezeichnet nicht ‚Aristoteles', sondern Aristoteles. ‚‚Aristoteles'' hingegen bezeichnet nicht Aristoteles, sondern ‚Aristoteles'.
6. ‚Schnee ist weiß' ist wahr genau dann, wenn Schnee weiß ist.
7. Die Verwendung von ‚Verwendung' und von ‚Erwähnung' hilft, Verwendung von Erwähnung zu unterscheiden. Das ist der Grund meiner Erwähnung von ‚Die Verwendung von ‚Verwendung' und von ‚Erwähnung' hilft, Verwendung von Erwähnung zu unterscheiden.'
8. ‚Das Spielen mit der Unterscheidung von Verwendung und Erwähnung' ist nicht ‚alles im Leben, weißt du?'.
9. Dies ist ein Satz mit ‚Zwiebelringen', ‚Salatblättern', ‚Tomatenscheiben' und ‚Pommes Frites als Beilage'.

Übung 1.4. Welche der folgenden Zeichenfolgen sind Aussagesätze? Begründen Sie jeweils Ihre Antworten.

1. Herbert und Heidi sind befreundet.
2. Herbert und Heidi sind beliebt.
3. Herbert und Heidi sind beide nicht glücklich.
4. Herbert und Heidi lieben sich.
5. Herbert und Heidi lieben einander.
6. Es ist nicht der Fall, dass Herbert und Heidi beide nicht glücklich sind.
7. Oh nein, oh nein, oh nein! Das darf doch wohl nicht wahr sein!
8. Wenn Herbert in die Stadt gefahren ist, so sitzt er sicherlich bereits in seinem Büro.
9. An der Liebe Niederlagen
läßt der Dichter Lieder nagen.
(Mühsam)
10. Die Quadratwurzel aus Zwiebelsuppe und rechtwinkligem Lebertran ist mit Goethes Wanderjahren verheiratet und liebt Chopin mehr als die Kniekehlen ihrer Mutter.
11. Mein Bart ist genau dann rosarot, wenn ich mich weniger langeweile als die Fleischstrudelsuppe meiner Großmutter.
12. Ich weiß, dass $7 + 5 = 11$.
13. Thales von Milet, ein ionischer Naturphilosoph, sagte die Sonnenfinsternis vom 28. März 585 v. Chr. voraus.
14. Der Räuber sagte: ‚Geld oder Leben!', und er nahm beides.
15. Das Wetter ist heute grauenhaft, nicht wahr?
16. Wer andern eine Grube gräbt, fällt selbst hinein.
17. Zwei Trichter wandeln durch die Nacht.
Durch ihres Rumpfs verengten Schacht
fließt weißes Mondlicht
still und heiter
auf ihren
Waldweg
usw.
(Morgenstern)
18. Du sollst nicht töten.
19. balzerig würmelte es im mannechensee
und den weibern ward so pngstig ums heil
zumahn: wenn ein knie-ender sie hirschelte.
(Jandl)

20. Schweig, Elender!
21. Kleine Lügen und auch kleine
    Kinder haben kurze Beine.
    (Ringelnatz)
22. Die Eins sind nicht nur, sondern sie erhalten sich durch ihr gegenseitiges Ausschließen. (Hegel)
23. Wer in Wasser badet, kann nass werden.
24. Der April macht, was er will.
25. Dornröschen wurde von einem wunderschönen Prinzen durch einen zärtlichen Kuss aus einem tiefen Schlaf erweckt.
26. Österreich hat sich nach dem Staatsvertrag im Jahre 1955 durch ein Verfassungsgesetz zur Neutralität verpflichtet.
27. Dieses Verfassungsgesetz muss abgeschafft werden.
28. Dieses Lied gefällt mir besonders gut.
29. ’s echt cool, eh?
30. Der Satz mit der Nummer 30 auf dieser Seite ist falsch.

1.2.1 Lösungen

Lösung zu Übung 1.1. Wie viele Ausdruckstypen von Buchstaben bzw. Wörtern sind in jedem einzelnen der folgenden Sätze instantiiert, wie viele in allen Sätzen zusammen? Wie oft sind die Ausdruckstypen ‚a', ‚t', ‚d', ‚Hase' und ‚Nase' instantiiert?

Bemerkung: Leerzeichen und Punkte werden nicht als Zeichen gezählt. Zwei Ausdrücke, die dieselben Buchstaben in derselben Reihenfolge enthalten, aber sich in der Groß- und Kleinschreibung unterscheiden, gelten als Ausdrücke desselben Ausdruckstyps.

1. Jeder Hase hat eine Nase.

Antwort

- 10 Buchstabentypen: ‚j', ‚d', ‚r', ‚t', ‚i' (einmal); ‚h', ‚s', ‚n' (zweimal); ‚a' (dreimal); ‚e' (sechsmal).
- ‚Nase' (einmal); ‚Hase' (einmal).

2. Ich bin ein Hase.

Antwort

- 8 Buchstabentypen: ‚c', ‚b', ‚a', ‚s' (einmal); ‚h', ‚n', ‚e' (zweimal); ‚i' (dreimal).
- ‚Nase' (niemals); ‚Hase' (einmal).

3. Folglich habe ich eine Nase.

Antwort

- 12 Buchstabentypen: ‚f', ‚o', ‚g', ‚b', ‚n', ‚s' (einmal); ‚l', ‚c', ‚a' (zweimal); ‚i', ‚h' (dreimal); ‚e' (viermal).
- ‚Nase' (einmal); ‚Hase' (niemals).

Lösung zu Übung 1.2. Ein logischer Laie äußert die drei unteren Übungssätze. Auf welche Arten lassen sich diese Sätze deuten, und was ist die wörtliche Deutung dieser Sätze?

1. Aristoteles hat 11 Buchstaben.

Antwort

(Der Eigenname) ‚Aristoteles' (in deutscher Rechtschreibung) hat Buchstaben.

Erklärung

Wenn man den Satz wörtlich nimmt, besagt er, dass die Person Aristoteles selbst 11 Buchstaben besitzt. Das wäre unsinnig, da Personen nicht aus Buchstaben bestehen.

2. Dieser Satz hat 23 Zeichen.

Antwort: Der Satz 2 hat 23 Zeichen.

Erklärung: Solche Zeichen sind: ‚D', ‚i', ..., ‚e' und ‚n'.

3. ‚Dieser Satz' hat 10 Zeichen.

Antwort: (Der Ausdruck) ‚Dieser Satz' hat 10 Zeichen.

Erklärung: Solche Zeichen sind: ‚D', ‚i', ..., ‚t' und ‚z'.

Bemerkung: Im Folgenden präsentiere ich eigene Lösungsversuche zu den Aufgaben. Danach werde ich jeweils prüfen, ob diese Vorschläge korrekt sind. Einige der Antworten basieren auf Lösungen von Studierenden aus früheren Kursen.

Lösung zu Übung 1.3. Geben Sie für jedes der folgenden Beispiele an, an welcher Stelle ein Ausdruck erwähnt bzw. verwendet wird, und wer oder was dabei jeweils erwähnt oder verwendet wird!

1. Aristoteles ist lang.

Lösungsversuch

Der Ausdruck Aristoteles wird erwähnt und der Ausdruck 'Aristoteles' wird verwendet.

Erklärung: Nicht völlig korrekt. Die Antwort ist korrekt in Bezug auf die Anführungszeichen. Aristoteles ist jedoch keine Ausdruck, sondern eine Person, deren Name ‚Aristoteles' ist.

2. ‚Aristoteles' ist lang.

Lösungsversuch

(Der Ausdruck) ‚Aristoteles' wird erwähnt und (der Ausdruck) ‚‚Aristoteles'' wird verwendet.

Erklärung: Korrekt!

3. Aristoteles ist länger als ‚Aristoteles'.

Lösungsversuch

(Der Philosoph) Aristoteles und (sein Name) ‚Aristoteles' werden erwähnt. Ihre jeweiligen Namen, ‚Aristoteles' und ‚‚Aristoteles'', werden verwendet.

Erklärung: Korrekt! Andere Lösung wäre: ‚Aristoteles' wird links verwendet und rechts erwähnt.

4. ‚‚Aristoteles'' ist länger als ‚Aristoteles'.

Lösungsversuch

Aristoteles, ‚Aristoteles' und ‚‚Aristoteles'' werden erwähnt. ‚Aristoteles' und ‚‚Aristoteles'' werden verwendet.

Erklärung: Nicht korrekt! Der Satz handelt nicht von dem Philosophen.

5. ‚Aristoteles' bezeichnet nicht ‚Aristoteles', sondern Aristoteles. „Aristoteles" hingegen bezeichnet nicht Aristoteles, sondern ‚Aristoteles'.

Lösungsversuch

Die Ausdrücke ‚Aristoteles' und „Aristoteles", sowie die Person Aristoteles werden erwähnt. Die Ausdrücke ‚Aristoteles', „Aristoteles" und „‚Aristoteles'" werden verwendet.

Erklärung: Korrekt! Außerdem ist der Satz wahr.

6. ‚Schnee ist weiß' ist wahr genau dann, wenn Schnee weiß ist.

Lösungsversuch

Korrekt! Der Satz ‚Schnee ist weiß' ist links erwähnt und rechts verwendet.

Erklärung: Korrekt! Man kann auch sagen: Es wurde erwähnt, dass Schnee weiß ist.

7′. Die Verwendung von ‚Verwendung‘ und von ‚Erwähnung‘ hilft, Verwendung von Erwähnung zu unterscheiden.

Bemerkung: Wir könnten 7′ wie folgt umformulieren:

> Wenn wir ‚Verwendung‘ und ‚Erwähnung‘ verwenden, ist es einfacher zwischen Verwendung und Erwähnung zu unterscheiden.

7. Die Verwendung von ‚Verwendung‘ und von ‚Erwähnung‘ hilft, Verwendung von Erwähnung zu unterscheiden. Das ist der Grund meiner Erwähnung von ‚Die Verwendung von ‚Verwendung‘ und von ‚Erwähnung‘ hilft, Verwendung von Erwähnung zu unterscheiden.‘

Lösungsversuch 1

Verwendet werden ‚Verwendung‘, ‚Erwähnung‘, ,,Verwendung‘‘, ,,Erwähnung‘‘, sowie der Satz 7′.

Erklärung: Nicht völlig korrekt! Alles stimmt, bis auf den letzten Punkt. Es ist nicht ganz korrekt zu sagen, dass der Satz 7′ tatsächlich verwendet wurde.

Angenommen, ich habe Folgendes gesagt:

(a) Ich bin Luis.

(b) Ich sagte: ‚Ich bin Luis.‘

Im Satz (a) habe ich den Satz ‚Ich bin Luis‘ verwendet (und erwähnt, dass ich Luis bin).

Im Satz (b) habe ich ‚Ich bin Luis‘ erwähnt, und zugleich ,,Ich bin Luis‘‘ verwendet. Aber ,,Ich bin Luis‘‘ ist kein Satz, sondern der Name des Satzes ‚Ich bin Luis‘.

Lösungsversuch 2

Erwähnt werden Verwendung, Erwähnung, ‚Verwendung‘, ‚Erwähnung‘, und der Satz 7′.

Erklärung: Korrekt! Wie im 6, kann man auch antworten: Es wurde erwähnt, dass die Verwendung von ‚Verwendung‘ und von ‚Erwähnung‘ hilft, Verwendung von Erwähnung zu unterscheiden.

8. ‚Das Spielen mit der Unterscheidung von Verwendung und Erwähnung' ist nicht ‚alles im Leben, weißt du?'.

Lösungsversuch

Erwähnt ist, dass das Spielen mit der Unterscheidung von Verwendung und Erwähnung nicht alles im Leben ist, oder?

Erklärung: Nicht korrekt. Erwähnt werden die Ausdrücke, mit denen wir das erwähnen könnten.

Bemerkung: Betrachten Sie die folgenden zwei Sätze:

(a) Aristoteles ist der Stagirit.

(b) ‚Aristoteles' ist ‚der Stagirit'.

(c) Aristoteles und der Stagirit bedeuten dasselbe.

(d) ‚Aristoteles' und ‚der Stagirit' bedeuten dasselbe.

Der Satz (a) ist wahr, aber der Satz (b) ist falsch. Beachten Sie aber, dass (c) zwar keinen Sinn ergibt, aber (d) wahr ist. Sie sind ein und dieselbe Person, und Personen haben keine sprachliche Bedeutung.

9. Dies ist ein Satz mit ‚Zwiebelringen', ‚Salatblättern', ‚Tomatenscheiben' und ‚Pommes Frites als Beilage'.

Lösungsversuch

Erwähnt werden ‚Zwiebelringen', ‚Salatblättern', ‚Tomatenscheiben' und ‚Pommes Frites als Beilage'. Verwendet werden Zwiebelringen, Salatblättern, Tomatenscheiben und Pommes Frites als Beilage.

Erklärung: Korrekt hinsichtlich Erwähnung, aber nicht korrekt hinsichtlich Verwendung. Ein Satz ist keine Zubereitung von Nahrung.

Frage: Ist dieser Satz wahr oder falsch?

Lösung zu Übung 1.4. Welche der folgenden Zeichenfolgen sind Aussagesätze? Begründen Sie jeweils Ihre Antworten. [Antwort]

1. Herbert und Heidi sind befreundet. ja
2. Herbert und Heidi sind beliebt. ja
3. Herbert und Heidi sind beide nicht glücklich. ja
4. Herbert und Heidi lieben sich. ja
5. Herbert und Heidi lieben einander. ja
6. Es ist nicht der Fall, dass Herbert und Heidi beide nicht glücklich sind. ja
7. Oh nein, oh nein, oh nein! Das darf doch wohl nicht wahr sein! nein
8. Wenn Herbert in die Stadt gefahren ist, so sitzt er sicherlich bereits in seinem Büro. ja
9. An der Liebe Niederlagen
   läßt der Dichter Lieder nagen.
   (Mühsam) vielleicht
10. Die Quadratwurzel aus Zwiebelsuppe und rechtwinkligem Lebertran ist mit Goethes Wanderjahren verheiratet und liebt Chopin mehr als die Kniekehlen ihrer Mutter. nein
11. Mein Bart ist genau dann rosarot, wenn ich mich weniger langeweile als die Fleischstrudelsuppe meiner Großmutter. nein
12. Ich weiß, dass $7 + 5 = 11$. ja
13. Thales von Milet, ein ionischer Naturphilosoph, sagte die Sonnenfinsternis vom 28. März 585 v. Chr. voraus. ja
14. Der Räuber sagte: ‚Geld oder Leben!', und er nahm beides. vielleicht

15. Das Wetter ist heute grauenhaft, nicht wahr? vielleicht

> **Erklärung:** Dieser Satz zeigt, wie schwer es manchmal ist zu bestimmen, ob ein Satz ein Aussagesatz ist.
>
> **Fragesatz:** Wegen ‚nicht wahr?' wirkt er wie eine Frage.
>
> **Rhetorische Frage:** Als rhetorische Frage könnte er eine Aussage implizieren.
>
> **Ästhetisches Urteil:** Er enthält ein subjektives Urteil mit dem Wort ‚grauenhaft'.
>
> **Aussagesatz mit Wertung:** Wenn ästhetische Urteile wahr oder falsch sein könnten, wäre es ein Aussagesatz.

16. Wer andern eine Grube gräbt, fällt selbst hinein. vielleicht

17. Zwei Trichter wandeln durch die Nacht.
 Durch ihres Rumpfs verengten Schacht
 fließt weißes Mondlicht
 still und heiter
 auf ihren
 Waldweg
 usw.
 (Morgenstern) vermutlich nein

18. Du sollst nicht töten. nein

19. balzerig würmelte es im mannechensee
 und den weibern ward so pngstig ums heil
 zumahn: wenn ein knie-ender sie hirschelte.
 (Jandl) nein

20. Schweig, Elender! nein

21. Kleine Lügen und auch kleine
 Kinder haben kurze Beine.
 (Ringelnatz) vielleicht

22. Die Eins sind nicht nur, sondern sie erhalten sich durch ihr gegenseitiges Ausschließen. (Hegel)

 dafür werde ich nicht bezahlt!

23. Wer in Wasser badet, kann nass werden. ja

24. Der April macht, was er will. vielleicht

25. Dornröschen wurde von einem wunderschönen Prinzen durch einen zärtlichen Kuss aus einem tiefen Schlaf erweckt.

 vielleicht

26. Österreich hat sich nach dem Staatsvertrag im Jahre 1955 durch ein Verfassungsgesetz zur Neutralität verpflichtet. ja

27. Dieses Verfassungsgesetz muss abgeschafft werden.

    vielleicht

28. Dieses Lied gefällt mir besonders gut. ja

29. ’s echt cool, eh? ja

30. Der Satz mit der Nummer 30 auf dieser Seite ist falsch.

    dafür werde ich bezahlt!

Erklärung: Wenn Satz 30 ein Aussagesatz ist, müsste er entweder wahr oder falsch sein. Nehmen wir an, er ist wahr: Dann behauptet er seine eigene Falschheit, was zu einem Widerspruch führt. Nehmen wir an, er ist falsch: Dann wäre die Aussage, dass er falsch ist, wahr. In beiden Fällen ergibt sich ein Widerspruch.

Dies wirft die Frage auf, ob Satz 30 wirklich ein Aussagesatz ist. Die meisten philosophischen Positionen schließen die Möglichkeit aus, dass ein Satz sowohl wahr als auch falsch sein kann, aber einige Positionen wie der Dialetheismus lassen dies zu. Somit bleibt es eine philosophische Frage, wie wir Satz 30 letztlich verstehen.

1.3 Zusatzübungen

Zusatzübung 1.1. Sind diese Sätze wahr oder falsch?

1. ‚Allianz Arena' ist eine Arena in München. [ ]
2. Allianz Arena ist keine Arena. [ ]
3. Allianz Arena und ‚Allianz Arena' bedeuten das Gleiche. [ ]
4. Allianz Arena und der Name von Allianz Arena bedeuten das Gleiche. [ ]
5. ‚Allianz Arena' und der Name von Allianz Arena bedeuten das Gleiche. [ ]
6. Allianz Arena und Allianz Arena bedeuten das Gleiche. [ ]
7. Allianz Arena und der Name von ‚Allianz Arena' bedeuten das Gleiche. [ ]
8. Allianz Arena und Allianz Arena haben die gleichen Zeichen. [ ]
9. ‚Allianz Arena' und ‚Allianz Arena' haben die gleichen Zeichen. [ ]
10. ‚Allianz Arena' ist der Name von Allianz Arena. [ ]
11. ‚Allianz Arena' ist ‚Allianz Arena'. [ ]
12. Satz 10 und Satz 11 sind äquivalent. [ ]
13. Satz 10 und Satz 11 haben die gleiche Zeichenanzahl. [ ]
14. ‚Satz 10' und ‚Satz 11' sind äquivalent. [ ]
15. ‚Satz 10' und ‚Satz 11' haben die gleiche Zeichenanzahl. [ ]

1.3.1 Lösungen

Lösung zu Zusatzübung 1.1.

1. ‚Allianz Arena' ist eine Arena in München. falsch
2. Allianz Arena ist keine Arena. falsch
3. Allianz Arena und ‚Allianz Arena' bedeuten das Gleiche. falsch
4. Allianz Arena und der Name von Allianz Arena bedeuten das Gleiche. falsch
5. ‚Allianz Arena' und der Name von Allianz Arena bedeuten das Gleiche. wahr
6. Allianz Arena und Allianz Arena bedeuten das Gleiche. falsch
7. Allianz Arena und der Name von ‚Allianz Arena' bedeuten das Gleiche. falsch
8. Allianz Arena und Allianz Arena haben die gleichen Zeichen. falsch
9. ‚Allianz Arena' und ‚Allianz Arena' haben die gleichen Zeichen. wahr
10. ‚Allianz Arena' ist der Name von Allianz Arena. wahr
11. ‚Allianz Arena' ist ‚Allianz Arena'. wahr
12. Satz 10 und Satz 11 sind äquivalent. wahr
13. Satz 10 und Satz 11 haben die gleiche Zeichenanzahl. falsch
14. ‚Satz 10' und ‚Satz 11' sind äquivalent. falsch
15. ‚Satz 10' und ‚Satz 11' haben die gleiche Zeichenanzahl. wahr

Erklärung

- Sätze 1–4 sind falsch: ‚Allianz Arena' ist keine Arena, sondern ein Ausdruck, der der Name der Allianz Arena ist.
- Sätze 6–8 sind falsch: Die Allianz Arena hat keine Bedeutung, da es sich nicht um einen Ausdruck handelt.

Aussagenlogische Analyse und Repräsentierung | 2-3

2-3.1 Vorbereitung 31
2-3.2 Übungen 34
2-3.2.1 Übungen zu Kapitel 2 34
2-3.2.2 Übungen zu Kapitel 3 35
2-3.2.3 Lösungen 36

2-3.1 Vorbereitung

Einfache vs. komplexe (nicht einfache) Aussagesätze

Definition: Einfacher Aussagesatz

Enthält keinerlei logische Begriffe, weder aussagenlogische- (z.B. Konjunktion, Disjunktion, Verneinung, usw.) noch prädikatlogische- noch Modalbegriffe (z. B. Notwendigkeit, Möglichkeit) oder andere logische Begriffe wie Kausalität, Wissen oder Glauben (siehe Seiten 66–73 des Kursskripts).

Beispiel

- Peter ist müde.

  Logische und Aussagenlogische Repräsentation. p

  (Enthält überhaupt keinen logischen Begriff.)

Definition: Komplexer (oder nicht einfacher) Aussagesatz

Enthält mindestens einen logischen Begriff, sei es ein aussagenlogische- (z. B. Konjunktion, Disjunktion, Verneinung, usw.) oder andere logische Begriffe.

Beispiele

- Peter ist nicht müde.

  Aus. Repr.: $\neg p$

- Peter ist müde oder Peter ist nicht müde.

  Aus. Repr.: $p \vee \neg p$

- Jemand ist müde.

  Prädikatenlogische Repr.: $\exists x\, M(x)$

- Möglicherweise ist Peter müde.

  Modallogische Repr.: $\Diamond p$

Aussagenlogisch unzerlegbare vs. zerlegbare Aussagesätze

Definition: Aussagenlogisch unzerlegbarer Aussagesatz

Kann *nicht* mit den Operatoren der klassischen Aussagenlogik (Konjunktion, Disjunktion, Verneinung, usw.) in kleinere Teilaussagen analysiert werden.

Beispiele

- Peter ist müde.

  Logische Repr.: p

  (Enthält überhaupt keinen logischen Begriff.)

- Möglicherweise ist Peter müde.

  Mod. Repr.: $\Diamond p$

  Aus. Repr.: p

  (‚Möglicherweise' ist kein aussagenlogischer Begriff.)

- Möglicherweise: Peter ist müde oder Peter ist nicht müde.

  Mod. Repr.: $\Diamond(p \vee \neg p)$

  Aus. Repr.: p

  ($\vee$ und $\neg$ liegen im Skopus von $\Diamond$.)

Definition: Aussagenlogisch zerlegbarer Aussagesatz

Kann mit Hilfe seiner aussagenlogischen Operationen weiter in kleinere Teilaussagen analysiert werden.

Beispiele

- Peter ist müde <u>oder</u> Peter ist <u>nicht</u> müde.

  Aus. Repr.: $p \vee \neg p$

- Es ist <u>nicht</u> möglich, dass Peter müde ist.

  Mod. Repr.: $\neg\Diamond p$

  Aus. Repr.: $\neg p$

- Möglicherweise ist Peter müde oder möglicherweise ist Peter nicht müde.

  Mod. Repr.: $\Diamond p \vee \Diamond\neg p$

  Aus. Repr.: $p \vee q$

  ($\vee$ liegt außerhalb, aber $\neg$ liegt im Skopus von $\Diamond$.)

Beispiele für alle möglichen Kombinationen

Beispiel: Einfach und aussagenlogisch unzerlegbar

- Otto ist ein Musiker.

  Logische. Repr.: p

Erklärung

Tatsächlich ist jeder einfache Aussagesatz auch aussagenlogisch unzerlegbar.

Einfach und aussagenlogisch zerlegbar?

Unmöglich, da einfache Aussagesätze keine logischen Konnektoren enthalten, einschließlich aussagenlogischer Konnektoren.

Beispiele: Komplex und aussagenlogisch unzerlegbar.

- Möglicherweise ist Otto ein Musiker.

  Mod. Repr.: $\Diamond p$

  Aus. Repr.: p

- Möglicherweise: ist Otto ein Musiker oder auch nicht.

  Mod. Repr.: $\Diamond(p \vee \neg p)$

  Aus. Repr.: p

Beispiele: Komplex und aussagenlogisch zerlegbar

- Es ist nicht möglich, dass Otto ein Musiker ist.

  Mod. Repr.: $\neg\Diamond p$

  Aus. Repr.: $\neg p$

- Möglicherweise ist Otto ein Musiker oder möglicherweise ist er es nicht.

  Mod. Repr.: $\Diamond p \vee \Diamond\neg p$

  Aus. Repr.: $p \vee q$

Erklärung

Tatsächlich ist jede aussagenlogisch zerlegbare Aussagesätze auch komplex.

2-3.2 Übungen

2-3.2.1 Übungen zu Kapitel 2

Übung 2.1. Welche Aussagesätze in Übung 1.4 sind einfach?

Übung 2.2. Beantworten Sie die folgenden Fragen:

1. Ist in Übung 1.4 der Satz 6 die Negation des Satzes 3?

2. Ist in Übung 1.4 der Satz 3 die Negation des Satzes ‚Herbert ist nicht glücklich und Heidi ist nicht glücklich.'?

3. Welcher der Sätze 1–6 in Übung 1.4 ist ein Konjunktionssatz?

4. Was ist die Disjunktion der Aussagesätze ‚Heute schneit es nicht.' und ‚Die Straßen sind glatt.'?

5. Was ist die Implikation der Aussagesatze ‚Herbert ist glücklich.' und ‚Heidi ist glücklich'?

6. Geben Sie die Negation dieses Satzes an!

7. Ist der Satz ‚Wenn Dieter Bohlen österreichischer Bundeskanzler ist, dann ist der Papst österreichischer Bundeskanzler' wahr oder falsch?

Übung 2.3. Welche Aussagesätze in Übung 1.4 sind unzerlegbar aber nicht einfach?

Übung 2.4. Welche der folgenden Aussagesätze sind aussagenlogisch unzerlegbar? Welche der aussagenlogisch unzerlegbaren Aussagesätze sind einfach?

Übung 2.5. Bringen Sie die folgenden Argumente in Standardform.

1. Wenn Fips eine Katze ist, dann jagt Fips gerne Mause. Fips jagt aber nicht gerne Mause. Somit ist Fips keine Katze.

2. Wenn Fips eine Katze ist, dann trinkt Fips gerne Milch. Fips ist eine Katze. Folglich trinkt Fips gerne Milch.

3. Wenn Fips eine Katze ist, dann trinkt Fips gerne Milch. Fips trinkt gerne Milch. Folglich ist Fips eine Katze.

4. Fips ist eine Katze. Denn: Wenn Fips eine Katze ist, dann trinkt Fips gerne Milch. Fips trinkt gerne Milch.

5. Also ist Fips eine Katze oder er ist keine Katze.

6. Sokrates ist Philosoph und Grieche. Platon ist Philosoph und Grieche. Aristoteles ist Philosoph und Grieche. Daher sind alle Philosophen Griechen.

2-3.2.2 Übungen zu Kapitel 3

Übung 3.1. Repräsentieren Sie die folgenden Aussagesatze:

1. Wenn Dieter Bohlen 2013 Bundeskanzler wird, dann werden die Konservativen, aber nicht die Grünen in die Regierung gehen.

2. Wenn der Täter mit dem gestohlenen Auto flüchtete, so kann er, sofern die Zollbeamten nicht wachsam waren, schon über die Grenze sein, doch wenn er nicht mit dem gestohlenen Auto flüchtete, sondern zu Fuß ging, so kann er nicht weit gekommen sein.

Übung 3.2.1. Repräsentieren die Aussagesätze aus Übung 1.4.

Übung 3.2.2. Repräsentieren die Aussagesätze aus Übung 2.4.

Übung 3.3. Repräsentieren Sie die Argumente aus Übung 2.5.

Übung 3.4. Repräsentieren Sie die folgenden Argumente:

1. Der Papst ist Deutscher. Daher tritt Osterreich 2011 genau dann aus der EU aus, wenn Osterreich dies tut.

2. Bad Goisern ist die Hauptstadt von Oberosterreich und Bad Goisern ist nicht die Hauptstadt von Oberosterreich. Daher existiert Gott.

2-3.2.3 Lösungen

Bem.: Bedenken Sie, dass Formalisierung keine exakte Wissenschaft ist. Aus diesem Grund sind einige der folgenden Lösungen nur eine von vielen denkbaren Möglichkeiten

Lösung zu Übungen 2.1, 2.3 und 3.2.1. **(2.1)** Welche Aussagesätze in Übung 1.4 sind einfach? **(2.3)** Welche Aussagesätze in Übung 1.4 sind unzerlegbar aber nicht einfach? **(3.2.1)** Repräsentieren die Aussagesätze aus Übung 1.4.

1. Herbert und Heidi sind befreundet.

Antwort 1: aussagenlogisch unzerlegbar, einfach **Repr.:** p

Zwischenformalisation: Befreundet(Herbert, Heidi)

Antwort 2: aus. zerlegbar, komplex **Repr.:** $p \wedge q$

Zwisch.: Freund(Herbert, Heidi) ∧ Freund(Heidi, Herbert)

2. Herbert und Heidi sind beliebt.

Antwort: aus. zerlegbar, komplex **Repr.:** $p \wedge q$

Zwisch.: Beliebt(Herbert) ∧ Beliebt(Heidi)

3. Herbert und Heidi sind beide nicht glücklich.

Antwort 1: aus. zerlegbar, komplex **Repr.:** $\neg p$

Falls ‚beide' als ‚zusammen' verstanden wird.

Zwisch.: ¬Glücklich(Herbert, Heidi)

Bem.: Die ‚¬' macht diese Formalisierung aus. zerlegbar.

Antwort 2: aus. zerlegbar, komplex **Repr.:** $\neg(p \wedge q)$

Falls ‚beide' nicht als ‚zusammen' verstanden wird.

Zwisch.: ¬Glücklich(Herbert) ∧¬Glücklich(Heidi)

4. Herbert und Heidi lieben sich.

Antwort 1: aus. zerlegbar, komplex **Repr.:** $p \wedge q$

Falls ‚sich' eine reflexive Bedeutung hat.

Zwisch.: Liebt(Herbert, Herbert) ∧ Liebt(Heidi, Heidi)

Antwort 2

Falls ‚sich' eine nicht-reflexive Bedeutung hat, ist die Antwort wie im Satz 5.

5. Herbert und Heidi lieben einander.

Antwort 1: aus. zerlegbar, komplex **Repr.:** $p \wedge q$

Falls wir das Prädikat ‚Liebt' benutzen möchten.

Zwisch.: Liebt(Herbert, Heidi) ∧ Liebt(Heidi, Herbert)

Antwort 2: aus. unzerlegbar, einfach **Repr.:** p

Falls wir das Prädikat ‚Einander_Lieben' einführen möchten.

Zwisch.: Einander_Lieben(Herbert,Heidi)

6. Es ist nicht der Fall, dass Herbert und Heidi beide nicht glücklich sind.

Antwort 1: aus. zerlegbar, komplex **Repr.:** $\neg\neg p$

Falls ‚beide' als ‚zusammen' verstanden wird.

Zwisch.: ¬¬Glücklich(Herbert, Heidi)

Bem.: ‚$\neg\neg p$' ist logisch äquivalent zu der Formel ‚p', die einfach ist. ‚$\neg\neg p$' selbst ist jedoch komplex.

Antwort 2: aus. zerlegbar, komplex **Repr.:** $\neg\neg(p \wedge q)$

Falls ‚beide' nicht als ‚zusammen' verstanden wird.

Zwisch.: ¬(¬Glücklich(Herbert) ∧¬Glücklich(Heidi))

8. Wenn Herbert in die Stadt gefahren ist, so sitzt er sicherlich bereits in seinem Büro.

Antwort: aus. zerlegbar, komplex **Repr.:** $p \rightarrow q$

Zwisch.: Gefahren(Herbert, die Stadt) → Sitzt(Herbert, Büro)

12. Ich weiß, dass 7 + 5 = 11.

Bem.: ‚K_x' bezeichnet den epistemisch-logischen Operator ‚x weiß'.

Antwort: aus. unzerlegbar, komplex **Repr.:** p

Zwisch.: $\mathsf{K}_{ich}(7 + 5 = 11)$

13. Thales von Milet, ein ionischer Naturphilosoph, sagte die Sonnenfinsternis vom 28. März 585 v. Chr. voraus.

Antwort: aus. zerlegbar, komplex

Zwisch.: Ionischer(Thales) $\wedge$ Naturphilosoph(Thales) $\wedge$ Voraussagte(Thales, die Sonnenfinsternis vom 28. März 585 v. Chr.)

Repr. 1: $(p \wedge q) \wedge r$ **Repr. 2:** $p \wedge (q \wedge r)$

14. Der Räuber sagte: ‚Geld oder Leben!', und er nahm beides.

Antwort: aus. zerlegbar, komplex

Zwisch.: Sagte(Rauber, ‚Geld oder Leben!') $\wedge$ Nahm(Räuber, Geld) $\wedge$ Nahm(Räuber, Leben)

Repr. 1: $(p \wedge q) \wedge r$ **Repr. 2:** $p \wedge (q \wedge r)$

18. Du sollst nicht töten.

Antwort: aus. unzerlegbar, komplex **Repr.:** p

Zwisch.: O¬(Du tötest)

Bem. 1: ‚O' bezeichnet den Modaloperator ‚sollte'.
Bem. 2: Beachten Sie, dass beide Antworten zwei möglichen Interpretationen dieses Satzes entsprechen. Welche wäre die beste Interpretation in der Alltagssprache?

Antwort: aus. zerlegbar, komplex **Repr.:** $\neg p$

Zwisch.: ¬O(Du tötest)

21. Kleine Lügen und auch kleine
Kinder haben kurze Beine.
(Ringelnatz)

Antwort: aus. zerlegbar, komplex **Repr.:** $p \wedge q$

Falls der Satz wörtlich interpretiert wird.

Zwisch.: Für alle x (Klein_Kind(x) $\longrightarrow$ Kleine_Beine(x)) $\wedge$ Für alle x (Kleine_Lüge(x) $\longrightarrow$ Kleine_Beine(x))

23. Wer in Wasser badet, kann nass werden.

Antwort: aus. unzerlegbar, komplex **Repr.:** p

Zwisch.: Für alle x (Badet(x, Wasser) $\longrightarrow$ $\Diamond$Nass_Werden(x))

24. Der April macht, was er will.

Antwort: aus. unzerlegbar, komplex **Repr.:** p

Falls der Satz in dem Sinne interpretiert wird, dass sich das Klima im April unvorhersehbar verhält.

Zwisch.: Für alle x (Klima_von(x, April) $\rightarrow$ Unvorhersehbar(x))

Bem.: ‚Klima_von(x, y)' bedeutet x ist das Klima von y.

25. Dornröschen wurde von einem wunderschönen Prinzen durch einen zärtlichen Kuss aus einem tiefen Schlaf erweckt.

Antwort: aus. unzerlegbar, komplex **Repr.:** p

Zwisch.: Erweckt_aus(Dornröschen, tiefer Schlaf), weil Geküsst_von(Dornröschen, Prinz)

26. Österreich hat sich nach dem Staatsvertrag im Jahre 1955 durch ein Verfassungsgesetz zur Neutralität verpflichtet.

Antwort: aus. unzerlegbar, einfach **Repr.:** p

Zwisch.: Verpflichtet_zu_durch_nacht(Östereich, Neutralität, Verfassungsgesetz, Staatsvertrag im Jahre 1955)

27. Dieses Verfassungsgesetz muss abgeschafft werden.

Bem.: ‚O' bezeichnet den Modaloperator ‚sollen'.

Antwort: aus. unzerlegbar, komplex **Repr.:** p

Zwisch. 1: $\Box$Abschaffen(dieses Verfassungsgesetz)

Zwisch. 2: OAbschaffen(dieses Verfassungsgesetz)

28. Dieses Lied gefällt mir besonders gut.

Antwort: aus. unzerlegbar, einfach **Repr.:** p

Zwisch.: Gefällt(mir, dieses Lied)

29. ’s echt cool, eh?

Antwort: aus. unzerlegbar, einfach **Repr.:** p

Zwisch.: Echt_Cool(es)

Bem.: Falls es im Kontext klar ist, was ‚es' ist.

30. Der Satz mit der Nummer 30 auf dieser Seite ist falsch.

Antwort: aus. unzerlegbar?, komplex?

Zwisch.: Falsch(Falsch(Falsch(...Falsch(...)...)))

Repr.: Gibt es nicht.

Erklärung

Unmöglich in der Aussagenlogik zu formalisieren. Das Naheliegendste, was wir tun können, ist das Folgende:

$$p \leftrightarrow \neg p.$$

Da diese Formel aber keine hinreichende Formalisierung des Satzes 30 ist, können wir nicht sagen, dass Satz 30 aussagenlogisch zerlegbar ist. Man könnte argumentieren, dass er komplex ist, da das Falschheitsprädikat angeblich ein logischer Begriff ist. Diese Überlegung wäre zu beachten, wenn wir davon ausgehen, dass Satz 30 ein Aussagesatz ist.

Lösung zu Übung 2.2. Beantworten Sie die folgenden Fragen:

1. Ist in Übung 1.4 der Satz 6 die Negation des Satzes 3? ja

Bemerkung

Es ist jedoch zu beachten, dass die Sätze 3 und 6 zwei mögliche Formalisierungen haben. Die entsprechenden Formalisierungen dieser Sätze sind Negationen des jeweils anderen.

2. Ist in Übung 1.4 der Satz 3 die Negation des Satzes ‚Herbert ist nicht glücklich und Heidi ist nicht glücklich.'? nein

Bemerkung

Die Formalisierung von ‚Herbert ist nicht glücklich und Heidi ist nicht glücklich' ist ‚$\neg p \wedge \neg q$', was mit keiner der möglichen Formalisierungen von Satz 3 äquivalent ist.

3. Welcher der Sätze 1 bis 6 in Übung 1.4 ist ein Konjunktionssatz?

Antwort: 2, 3 und 5 (in einer Deutung).

Bemerkung

Eine Interpretation von 6, d.h. ‚$\neg\neg(p \wedge q)$' ist äquivalent zu einem Konjunktionssatz, aber selbst bei dieser Interpretation ist Satz 6 kein Konjunktionssatz.

4. Was ist die Disjunktion der Aussagesätze ‚Heute schneit es nicht.' und ‚Die Straßen sind glatt.'?

Antwort: Heute schneit es nicht oder die Straßen sind glatt.

5. Was ist die Implikation der Aussagesatze ‚Herbert ist glücklich.' und ‚Heidi ist glücklich'?

Antwort: Wenn Herber glücklich ist, ist Heidi glücklich.

6. Geben Sie die Negation dieses Satzes an!

Antwort: Geben Sie nicht die Negation dieses Satzes an!

7. Ist der Satz ‚Wenn Dieter Bohlen österreichischer Bundeskanzler ist, dann ist der Papst österreichischer Bundeskanzler' wahr oder falsch? falsch

Erklärung

Die Formalisierung dieses Satzes ist ‚$p \rightarrow q$', was keine Tautologie ist.

Lösung zu Übungen 2.4 und 3.2.2. **(2.4)** Welche der folgenden Aussagesätze sind aussagenlogisch unzerlegbar? Welche der aussagenlogisch unzerlegbaren Aussagesätze sind einfach? **(3.2.2)** Repräsentieren Sei die Argumente aus Übung 2.4

1. Heute regnet es in Salzburg.

Antwort: aus. unzerlegbar, einfach **Repr.:** p

Zwisch.: Regnet(Salzburg, heute)

2. In Salzburg regnet es fast immer.

Antwort: aus. unzerlegbar, komplex **Repr.:** p

Zwisch.: Für fast alle x Regnet(Salzburg, x)

Erklärung

‚Regnet(x, y)' bedeutet es regnet am Ort x zur Zeit y.

3. Wenn es in Salzburg nicht regnet, dann hagelt's, stürmt's oder schneit's.

Antwort: aus. unzerlegbar, komplex **Repr.:** p

Zwisch.: Für alle y ($\neg$Regnet(Salzburg, y) $\longrightarrow$ Hagelt(Salzburg, y) $\vee$ Stürmt(Salzburg, y) $\vee$ Schneit(Salzburg, y))

Erklärung

Die Prädikate ‚Hagelt(x, y)', ‚Stürmt(x, y)' und ‚Schneit(x, y)' haben analoge Bedeutungen wie ‚Regnet(x, y)'.

4. Dieter Bohlen soll Absichten haben, in absehbarer Zeit Bundeskanzler zu werden.

Antwort: aus. unzerlegbar, komplex **Repr.:** p

Zwisch.: S(Absicht(Dieter Bohlen, Bundeskanzler, absehbar))

Erklärung

- ‚Absicht(x, y, z)' bedeutet x hat Absichten y zu werden zur Zeit z.
- ‚S' bezeichnet den Modaloperator ‚sollen'.

5. Das englische Wort ‚mind' kann nicht ins Deutsche übersetzt werden.

Antwort: aus. zerlegbar, komplex **Repr.:** $\neg p$

Zwisch. 1: ¬Übersetzbar_aus_ins(‚mind', Englisch, Deutsch)

Zwisch. 2: ¬(Es gibt ein x Übersetzung_aus_von_ins(x, ‚mind', Englisch, Deutsch))

Zwisch. 3: ¬◇Übersetzen_aus_ins(‚mind', Englisch, Deutsch)

6. Wenn ich mir morgen mein linkes Schuhband zuerst zubinde, dann wird Hermann Maier der nächste Bundespräsident von Österreich.

Antwort: aus. zerlegbar, komplex **Repr.:** $p \longrightarrow q$

Zwisch.: Zubinden(ich, linkes Schuband, zuerst, morgen) ⟶ Nächster_Bundespräsident(Hermann Maier, Österreich)

7. Mit dem Beitritt zur EU hat es in Österreich einen gewaltigen wirtschaftlichen Aufschwung gegeben.

Antwort 1: aus. unzerlegbar, komplex **Repr.:** p

Wenn als Kausalsatz interpretiert wird.

Zwisch.: Wirtschaftliche_Aufschwung(Österreich, t), weil Beitreten(Österreich, EU, t)

Antwort 2: aus. zerlegbar, komplex **Repr.:** $p \wedge q$

Wenn nicht als Kausalsatz interpretiert wird.

Zwisch.: Beitreten(Österreich, EU, t) ∧ Wirtschaftliche_Aufschwung(Österreich, t)

Erklärung

‚t' ist eine Konstante, die ein bestimmter Zeitpunkt bezeichnet.

8. Wäre Österreich nicht der EU beigetreten, hätten wir wohl weniger Sorgen mit dem Euro.

Antwort: aus. unzerlegbar, komplex **Repr.:** p

Zwisch.: ¬Beitreten(Österreich, EU) > Sorgen_haben_-mit(weniger, Euro)

Erklärung

- ‚>‘ bezeichnet die kontrafaktische Implikation.
- Die Negation ‚¬‘ betrifft nur ‚Beitreten(Österreich, EU)‘ und nicht den gesamten kontrafaktischen Satz.

9. Der Österreicher ist eigentlich ein Freund fremder Kulturen, auch wenn er nicht zu viele Ausländer in seiner Heimat sehen möchte.

Antwort: aus. unzerlegbar, einfach **Repr.:** p

Zwisch.: Für alle x (Österreicher(x) $\to$ für alle y (Kultur(y) $\wedge$ Fremd (y) $\to$ Freund_von(x, y)) $\wedge$ es gibt ein y (Ausländer(y) $\wedge$ ¬Möchte_in(x, y, Heimat)))

Erklärung: Siehe Abschnitt 3.1, Beispiel 3 im Kursskript.

10. Sir Karl Popper und Theodor W. Adorno sind beide Philosophen, aber sie können einander nicht besonders gut leiden.

Antwort: aus. zerlegbar, komplex

Zwisch.: Philosoph(Popper) ∧ Philosoph(Adorno) ∧¬Leiden_-besonders_gut(Popper, Adorno)

Repr.: $p \wedge q \wedge \neg r$ – d.h., $(p \wedge q \wedge) \neg r$ oder $p \wedge (q \wedge \neg r)$

11. Zum Mittagessen gibt es Wiener Schnitzel mit Salat, Schweinsbraten mit Knödel oder Kasnocken.

Antwort: aus. zerlegbar, komplex

Zwisch.: Zum_Mittagessen(Wiener Schnitzel mit Salat) ∨ Zum_Mittagessen(Schweinsbraten mit Knödel) ∨ Zum_-Mittagessen(Kasnocken)

Repr.: $p \vee q \vee r$ – d.h., $(p \vee q) \vee r$ oder $p \vee (q \vee r)$

12. Einige bedeutende Österreicher stammen aus Böhmen oder Mähren.

Antwort: aus. unzerlegbar, komplex **Repr.:** p

Zwisch.: Es gibt zumindest ein x, sodass (Österreicher(x) $\wedge$ Bedeutender(x) $\wedge$ (Stammt_aus(x, Böhmen) $\vee$ Stammt_-aus(x, Mähren)))

13. Nächstes Jahr kommt der Präsident der USA nach Österreich.

Antwort: aus. unzerlegbar, einfach **Repr.:** p

Zwisch.: Kommt_nach(Präsident der USA, Österreich, nächstes Jahr)

14. Silber glänzt, Gold erst recht.

Antwort: aus. zerlegbar, komplex **Repr.:** $p \wedge q$

Zwisch.: glänzen(Silber) $>$ 0 $\wedge$ (glänzen(Gold) $>$ glänzen(Silber))

Erklärung

- ‚>' bezeichnet ‚größer als', und ‚glanz(x)' ist eine Funktion, die den Glanzwert eines Metalls angibt, z. B. als Zahlenwert. Beachten Sie, dass ‚glänzen(Gold) > glänzen(Silber)' nicht ausreichen würde, um diesen Satz auszudrücken, da es möglich ist, dass glänzen(Silber) = 0.
- Nach Gottlob Frege waren Funktionen und Ordnung (d.h. $>, <, \geq, \leq$) logische Begriffe.

15. Tirol ist in einen nördlichen, einen südlichen und einen östlichen Teil aufgeteilt.

Antwort: aus. unzerlegbar, einfach **Repr.:** p

Zwisch.: Aufgeteilt_in(Tirol, nördlichen Teil, südlichen Teil, östlichen Teil)

16. Jeder Junggeselle ist männlich und unverheiratet, ohne dabei gleich ein Priester zu sein.

Antwort: aus. unzerlegbar, komplex **Repr.:** p

Zwisch.: Für alle x (Junggeselle(x) $\rightarrow$ Männlich(x) $\wedge\neg$Verheiratet(x) $\wedge$ $\neg$Priester(x))

17. Alle Studenten lernen Logik, obgleich nicht alle Studenten dies mit Begeisterung tun.

Antwort: aus. zerlegbar, komplex **Repr.:** $p \wedge \neg q$

Zwisch.: Für alle x (Student(x) $\rightarrow$ Lernt(x, Logik)) $\wedge$ $\neg$(Für alle x (Student(x) $\rightarrow$ Lernt_mit(x, Logik, Begeisterung)))

18. Wenn das mit der Politik so weiter geht, dann werden sich Situationen wiederholen, die wir uns alle nicht wünschen.

Antwort: aus. zerlegbar, komplex **Repr.:** $p \rightarrow q$

Zwisch.: Weiter_gehen(Politik) $\rightarrow$ Es gibt zumindest ein x, sodass (Situation(x) $\wedge$ Wiederholt(x) $\wedge$ $\neg$Für alle y Wünscht(y, x))

Lösung zu Übung 3.1 Repräsentieren Sie die folgenden Aussagesatze:

1. Wenn Dieter Bohlen 2013 Bundeskanzler wird, dann werden die Konservativen, aber nicht die Grünen in die Regierung gehen.

   Antwort: $p \longrightarrow (q \wedge \neg r)$

   - ‚p' bezeichnet ‚Dieter Bohlen wird 2013 Bundeskanzler.'
   - ‚q' bezeichnet ‚Die Konservativen werden in die Regierung gehen.'
   - ‚r' bezeichnet ‚Die Grünen werden in die Regierung gehen.'

2. Wenn der Täter mit dem gestohlenen Auto flüchtete, so kann er, sofern die Zollbeamten nicht wachsam waren, schon über die Grenze sein, doch wenn er nicht mit dem gestohlenen Auto flüchtete, sondern zu Fuß ging, so kann er nicht weit gekommen sein.

   Antwort 1: $(p \longrightarrow (\neg q \longrightarrow r)) \wedge ((\neg p \wedge s) \longrightarrow \neg t)$

   - ‚p' bezeichnet ‚Der Täter mit dem gestohlenen Auto flüchtete.'
   - ‚q' bezeichnet ‚Die Zollbeamten waren wachsam.'
   - ‚r' bezeichnet ‚Der Täter kann schon über die Grenze sein.'
   - ‚s' bezeichnet ‚Der Täter ging zu Fuß.'
   - ‚t' bezeichnet ‚Der Täter kann weit gekommen sein.'

   Antwort 2: $(p \longrightarrow q) \wedge ((\neg p \wedge s) \longrightarrow \neg t)$

   - ‚p' bezeichnet ‚Der Täter mit dem gestohlenen Auto flüchtete.'
   - ‚q' bezeichnet ‚Es ist möglich, dass: wenn die Zollbeamten nicht wachsam waren, dann ist der Täter schon über der Grenze.'
   - ‚s' bezeichnet ‚Der Täter ging zu Fuß.'
   - ‚t' bezeichnet ‚Der Täter kann weit gekommen sein.'

Lösung zu Übungen 2.5 und 3.3 **(2.5)** Bringen Sie die folgenden Argumente in Standardform. **(3.3)** Repräsentieren Sie die Argumente aus Übung 2.5.

1. Wenn Fips eine Katze ist, dann jagt Fips gerne Mause. Fips jagt aber nicht gerne Mause. Somit ist Fips keine Katze.

Antwort

Standardform.

Wenn Fips eine Katze ist, dann jagt Fips gerne Mause.

Fips jagt aber nicht gerne Mause.

Daher: Fips ist keine Katze.

Repr. $p \rightarrow q, \neg q \therefore \neg p$

Bemerkung

Dies entspricht der Regel des Modus Tollens.

2. Wenn Fips eine Katze ist, dann trinkt Fips gerne Milch. Fips ist eine Katze. Folglich trinkt Fips gerne Milch.

Antwort

Stand.

Wenn Fips eine Katze ist, dann trinkt Fips gerne Milch.

Fips ist eine Katze.

Daher: Fips trinkt gerne Milch.

Repr. $p \rightarrow q, p \therefore q$

Bemerkung

Dies entspricht der Regel des Modus Ponens.

3. Wenn Fips eine Katze ist, dann trinkt Fips gerne Milch. Fips trinkt gerne Milch. Folglich ist Fips eine Katze.

Antwort

Stand.

Wenn Fips eine Katze ist, dann trinkt Fips gerne Milch.

Fips trinkt gerne Milch.

Daher: Fips ist eine Katze.

Repr. $p \rightarrow q, q \therefore p$

Bemerkung

Dies ist die (ungültige) Argumentform des Modus Morons.

4. Fips ist eine Katze. Denn: Wenn Fips eine Katze ist, dann trinkt Fips gerne Milch. Fips trinkt gerne Milch.

Antwort: Wie im Argument 3.

Bemerkung

Die Konklusion des Arguments wird gleich zu Beginn genannt.

5. Also ist Fips eine Katze oder er ist keine Katze.

Antwort

Stand.

Daher: Fips ist eine Katze oder er ist keine Katze.

Repr. $\therefore p \vee \neg p$

Bemerkung

Dies ist ein Argument ohne Prämissen.

6. Sokrates ist Philosoph und Grieche. Platon ist Philosoph und Grieche. Aristoteles ist Philosoph und Grieche. Daher sind alle Philosophen Griechen.

Antwort

Stand.

Sokrates ist Philosoph und Grieche.

Platon ist Philosoph und Grieche.

Aristoteles ist Philosoph und Grieche.

Daher: Alle Philosophen sind Griechen.

Repr. $p_1 \wedge p_2, q_1 \wedge q_2, r_1 \wedge r_2 \therefore s$

Lösung zu Übung 3.4 Repräsentieren Sie die folgenden Argumente:

1. Der Papst ist Deutscher. Daher tritt Osterreich 2011 genau dann aus der EU aus, wenn Osterreich dies tut.

Antwort: $p \therefore q \leftrightarrow q$

2. Bad Goisern ist die Hauptstadt von Oberosterreich und Bad Goisern ist nicht die Hauptstadt von Oberosterreich. Daher existiert Gott.

Antwort 1: $p \wedge \neg p \therefore q$

Antwort 2: $p, \neg p \therefore q$

Erklärung

Da die Prämisse als Konjunktion und nicht als zwei separate Prämissen erscheint, ist die alternative Antwort nicht so gut wie die erste.

4 Die aussagenlogische Sprache

4.1 Übungen 51
4.2 Lösungen 53

4.1 Übungen

Übung 4.1. Welche der folgenden Zeichenfolgen sind aussagenlogische Formeln? Beachten Sie dabei, daß wir in dieser Übung keine Klammerersparnisregeln gelten lassen wollen. Genaue Klammersetzung ist also wichtig.

1. $p \wedge q \vee r$
2. $((p \wedge q) \vee r))$
3. $((p \wedge q) \vee r)$
4. $(\neg(p \vee q) \rightarrow r)$
5. $\neg((p \vee q) \rightarrow r)$
6. $((p \vee q) \Rightarrow p)$
7. $((\neg p \vee q) \rightarrow r)$
8. $\neg((P \vee Q) \rightarrow R)$
9. $((p \rightarrow \neg p) \rightarrow \neg p)$
10. $(\neg\neg\neg\neg\neg\neg r \rightarrow (p \vee q))$
11. $p \leftrightarrow q$
12. $((p \rightarrow q) \wedge \neg(\neg q \rightarrow \neg p))$
13. $((p \rightarrow (q \rightarrow r) \rightarrow p))$
14. $(p \rightarrow (q \rightarrow (r \rightarrow (s \rightarrow t))))$
15. $((p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r)))$
16. $\neg(\neg\neg((\neg((p_{12} \vee \neg p_9) \wedge p_8) \vee p_7) \rightarrow p_6) \leftrightarrow (p_5 \vee \neg\neg p_{13}))$
17. $((p \wedge q) \rightarrow \neg(s))$

Übung 4.2. Welche der folgenden Zeichenfolgen sind aussagenlogische Argumentformen?

1. $p, (p \rightarrow q) \therefore p, q$
2. $\therefore (p \vee \neg p)$
3. $(q \wedge r \vee s), (r) \therefore \neg(\neg(q))$
4. $(q \rightarrow r), \neg r \therefore (\neg q \vee s)$
5. $p, p, p, p, p \therefore p$
6. $(q \wedge \neg q) \therefore$
7. $p \neg q \therefore r$

Übung 4.3. Wenden Sie die beiden Klammerersparnisregeln auf die Formeln aus der Übung 4.1 an.

Übung 4.4. Setzen Sie in den folgenden Zeichenfolgen die Klammern, die den beiden Klammerersparnisregeln zum Opfer gefallen sind (kehren Sie also die Anwendung der Klammerersparnisregeln um).

1. $p \vee q$
2. $p \wedge q \rightarrow r$
3. $p \rightarrow q \vee r$
4. $p \vee q \rightarrow (p \wedge r) \vee \neg s$
5. $\neg p \vee (q \wedge \neg r) \rightarrow \neg(p \vee \neg s) \vee \neg(q \rightarrow s)$

Übung 4.5. In welchen der folgenden Zeichenreihen wurden die beiden Klammerersparnisregeln korrekt angewendet?

1. $p \rightarrow q \rightarrow r$
2. $p \vee q \rightarrow r \wedge s$
3. $p \wedge q \wedge r \rightarrow s$
4. $p \vee q \rightarrow r \vee q \wedge p$
5. $p \rightarrow (q \rightarrow r) \vee s \rightarrow q$

4.2 Lösungen

Lösung zu Übungen 4.1 und 4.3. **(4.1)** Welche der folgenden Zeichenfolgen sind aussagenlogische Formeln? Beachten Sie dabei, daß wir in dieser Übung keine Klammerersparnisregeln gelten lassen wollen. Genaue Klammersetzung ist also wichtig. **(4.3)** Wenden Sie die beiden Klammerersparnisregeln auf die Formeln aus der Übung 4.1 an.

1. $p \wedge q \vee r$ — keine aussagenlogische Formel

   Erklärung

   Nicht klar, ob ‚$(p \wedge q) \vee r$' oder ‚$p \wedge (q \vee r)$' gemeint wird.

2. $((p \wedge q) \vee r))$ — keine aus. Formel
3. $((p \wedge q) \vee r)$ — aus. Formel

   Entklammerte Formel: $(p \wedge q) \vee r$

4. $(\neg(p \vee q) \rightarrow r)$ — aus. Formel

   Entklammerte Formel: $\neg(p \vee q) \rightarrow r$

5. $\neg((p \vee q) \rightarrow r)$ — aus. Formel

   Entklammerte Formel: Wie das Original.

6. $((p \vee q) \Rightarrow p)$ — keine aus. Formel
7. $((\neg p \vee q) \rightarrow r)$ — aus. Formel

   Entklammerte Formel: $\neg p \vee q \rightarrow r$

8. $\neg((P \vee Q) \rightarrow R)$ — keine aus. Formel

   Erklärung

   Großbuchstaben sind Metavariablen, aber keine Aussagenvariablen unserer Objektsprache.

9. $((p \rightarrow \neg p) \rightarrow \neg p)$ — aus. Formel

   Entklammerte Formel: $(p \rightarrow \neg p) \rightarrow \neg p$

10. $(\neg\neg\neg\neg\neg\neg r \rightarrow (p \vee q))$ — aus. Formel

Entklammerte Formel: $\neg\neg\neg\neg\neg\neg r \rightarrow p \vee q$

11. $p \leftrightarrow q$ — keine aus. Formel

Erklärung

In dieser Formel fehlen die äußeren Klammern. Die korrekte Formel wäre ‚$(p \leftrightarrow q)$', deren entklammerte Version die fragliche Formel wäre.

12. $((p \rightarrow q) \wedge \neg(\neg q \rightarrow \neg p))$ — aus. Formel

Entklammerte Formel: $(p \rightarrow q) \wedge \neg(\neg q \rightarrow \neg p)$

13. $((p \rightarrow (q \rightarrow r) \rightarrow p))$ — keine aus. Formel

14. $(p \rightarrow (q \rightarrow (r \rightarrow (s \rightarrow t))))$ — aus. Formel

Entklammerte Formel: $p \rightarrow (q \rightarrow (r \rightarrow (s \rightarrow t)))$

15. $((p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r)))$ — aus. Formel

Entklammerte Formel:

$((p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r)))$

16. $\neg(\neg\neg((\neg((p_{12} \vee \neg p_9) \wedge p_8) \vee p_7) \rightarrow p_6) \leftrightarrow (p_5 \vee \neg\neg p_{13}))$ — aus. Formel

Entklammerte Formel:

$\neg(\neg\neg(\neg((p_{12} \vee \neg p_9) \wedge p_8) \vee p_7 \rightarrow p_6) \leftrightarrow p_5 \vee \neg\neg p_{13})$

17. $((p \wedge q) \rightarrow \neg(s))$ — keine aus. Formel

Erklärung

Aussagenvariablen stehen nie zwischen Klammern.

Lösung zu Übung 4.2. Welche der folgenden Zeichenfolgen sind aussagenlogische Argumentformen?

1. $p, (p \rightarrow q) \therefore p, q$ — keine aus. Argumentform

Erklärung

Argumente haben mindestens und höchstens eine Konklusion.

2. $\therefore (p \vee \neg p)$ — aus. Argumentform
3. $(q \wedge r \vee s), (r) \therefore \neg(\neg(q))$ — keine aus. Argumentform
4. $(q \rightarrow r), \neg r \therefore (\neg q \vee s)$ — aus. Argumentform
5. $p, p, p, p, p \therefore p$ — aus. Argumentform

Erklärung

Ein Argument, selbst ein gültiges, kann überflüssige Prämissen haben.

6. $(q \wedge \neg q) \therefore$ — keine aus. Argumentform

Erklärung: Wie in 1.

7. $p\neg q \therefore r$ — keine aus. Argumentform

Erklärung

‚$p\neg q$' ist keine aussagenlogische Formel. Was wurde gemeint? ‚$p, \neg q \therefore r$', ‚$p \wedge \neg q \therefore r$', ‚$p \vee \neg q \therefore r$', ...?

Lösung zu Übung 4.4 Setzen Sie in den folgenden Zeichenfolgen die Klammern, die den beiden Klammerersparnisregeln zum Opfer gefallen sind (kehren Sie also die Anwendung der Klammerersparnisregeln um).

1. $p \vee q$

   Antwort: $(p \vee q)$

2. $p \wedge q \rightarrow r$

   Antwort: $((p \wedge q) \rightarrow r)$

3. $p \rightarrow q \vee r$

   Antwort: $(p \rightarrow (q \vee r))$

4. $p \vee q \rightarrow (p \wedge r) \vee \neg s$

   Antwort: $((p \vee q) \rightarrow ((p \wedge r) \vee \neg s))$

5. $\neg p \vee (q \wedge \neg r) \rightarrow \neg(p \vee \neg s) \vee \neg(q \rightarrow s)$

   Antwort: $((\neg p \vee (q \wedge \neg r)) \rightarrow (\neg(p \vee \neg s) \vee \neg(q \rightarrow s)))$

Lösung zu Übung 4.5 In welchen der folgenden Zeichenreihen wurden die beiden Klammerersparnisregeln korrekt angewendet?

1. $p \rightarrow q \rightarrow r$ nicht korrekt
2. $p \vee q \rightarrow r \wedge s$ korrekt

   Ursprüngliche Formel: $((p \vee q) \rightarrow (r \wedge s))$

3. $p \wedge q \wedge r \rightarrow s$ nicht korrekt[1]
4. $p \vee q \rightarrow r \vee q \wedge p$ nicht korrekt
5. $p \rightarrow (q \rightarrow r) \vee s \rightarrow q$ nicht korrekt

1: Es wäre jedoch kein Problem, eine Regel für das Weglassen von Klammern zwischen Konjunktionssätzen einzufügen. Dasselbe gilt für Disjunktions- und Äquivalenzsätze.

Die aussagenlogische Semantik 5

5.1 Vorbereitung 57
5.1.1 Erstellung einer Wahrheitstafel 57
5.1.2 Gültigkeit von Argumenten mit Wahrheitstabellen 59
5.1.3 Vorgehensweise für einen informellen Beweis 61
5.1.4 Lösungen 64
5.2 Übungen 70
5.2.1 Lösungen 73
5.3 Zusatzübungen 86
5.3.1 Lösungen 87

5.1 Vorbereitung

5.1.1 Erstellung einer Wahrheitstafel

Lass uns erinnern, die im Skript beschriebenen Regeln zur Erstellung einer Wahrheitstafel für eine beliebige Formel A.

Schritt 1: *Man stelle fest, welche verschiedenen Aussagenvariablen in A vorkommen, und schreibe diese Aussagenvariablen in der Reihenfolge ihres Vorkommens im Alphabet in eine Reihe.*

Schritt 2: *Daneben schreibe man die zu bewertende Formel an.*

Schritt 3: Handelt es sich um n verschiedene Aussagenvariablen, so gibt es 2^n verschiedene Möglichkeiten, die Wahrheitswerte auf die Aussagenvariablen von A zu verteilen. *Man schreibe also in 2^n Zeilen die möglichen Wahrheitswerte unter die Aussagenvariablen, und zwar so:*

(a) *In der Spalte unter der ersten Aussagenvariable alternieren Folgen von* `w`*s und* `f`*s, wobei jede dieser Folgen die Länge $\frac{2^n}{2}$ hat.*

(b) *In der Spalte unter der zweiten Aussagenvariable alternieren wiederum Folgen von* `w`*s und* `f`*s, wobei jede dieser Folgen die Länge $\frac{2^n}{4}$ hat.*

(c) *Allgemein stehen in der Spalte unter der k-ten Aussagenvariable alternierend Folgen von* `w`*s und* `f`*s, wobei jede dieser Folgen die Länge $\frac{2^n}{2^k}$ besitzt.*

Schritt 4: *Man berechne von innen nach außen die Wahrheitswerte für die Teilformeln von A und schließlich für die gesamte Formel A selbst. Unter dem Hauptjunktor von A lässt sich die Bewertung von A ablesen.*

Beispiel: $(p \to q) \land (q \to p)$ kontingent

Schritt 1:

p	q	

Schritt 2:

p	q	$(p \to q) \land (q \to p)$

Schritt 3:

p	q	$(p \to q) \land (q \to p)$
w	w	
w	f	
f	w	
f	f	

Schritt 4: ①

p	q	$(p \to q)$	$\land$	$(q \to p)$
w	w	w		w
w	f	f		w
f	w	w		f
f	f	w		w

❷

p	q	$(p \to q)$	$\land$	$(q \to p)$
w	w	w	w	w
w	f	f	f	w
f	w	w	f	f
f	f	w	w	w

Zusammenfassung: Die Pfeile zeigen die Spalten an, deren Wahrheitswerte in der Zielspalte ausgewertet werden. ‚①', ‚②', ... geben an, in welchem Teilschritt (von Schritt 4) die jeweilige Spalte ausgefüllt wurde. ‚❶', ‚❷', ... geben an, die letzte Teilschritt.

p	q	$(p \to q)$	$\land$	$(q \to p)$
w	w	w	w	w
w	f	f	f	w
f	w	w	f	f
f	f	w	w	w
		①	❷	①

Aktivierungselement 5.1. Stellen Sie mit Hilfe von Wahrheitstafeln fest, welche der folgenden Formeln tautologisch, kontradiktorisch bzw. kontingent sind.

1. $p \wedge \neg p$
2. $p \wedge \neg p \rightarrow q$
3. $q \rightarrow p \wedge \neg p$
4. $p \vee \neg p$
5. $p \vee \neg p \rightarrow q$
6. $q \rightarrow p \vee \neg p$

Lösungen auf Seite 64.

5.1.2 Gültigkeit von Argumenten mit Wahrheitstabellen

Die Vorgehensweise zum Beweis der Gültigkeit von Argumenten mit Wahrheitstabellen besteht aus folgenden Schritten:

Schritt 1: *Erstellen Sie eine Wahrheitstabelle für jede Prämisse sowie für die Konklusion. Konstruieren Sie jede Tabelle so, als ob alle Aussagenvariablen in jeder Formel vorhanden wären.*[1]

1: Siehe z.B. Prämisse 1 im Argument 1.

Schritt 2: *Prüfen Sie, ob:*

(a) *die Prämisse inkonsistent sind* (d.h. in jeder Zeile gibt es mindestens eine Prämisse, die den Wert `f` hat);

(b) *die Konklusion tautologisch ist.*

Schritt 3: *Wenn mindestens eine der Bedingungen (2.a) oder (2.b) erfüllt ist, schließen Sie, dass das Argument gültig ist, und hören Sie auf. Andernfalls gehen Sie zum nächsten Schritt.*[2]

2: Wenn es offensichtlich ist, dass eine der Bedingungen (2.a) oder (2.b) erfüllt ist, dann kann man die entsprechende Tatsache direkt beweisen und daraus schließen, dass das Argument gültig ist.

Schritt 4: *Prüfen Sie, ob in den Zeilen, in denen alle Prämissen den Wert `w` haben, die Konklusion auch den Wert `w` hat.*

Schritt 5: *Wenn die Antwort auf Schritt 4 ‚ja' lautet, schließen Sie, dass das Argument gültig ist. Andernfalls schließen Sie, dass es ungültig ist.*

Beispiel. Wir werden diese Vorgehensweise Schritt für Schritt mit dem folgenden Argument durchgehen. Wir heben alle Zeilen grün hervor, in denen sowohl die Prämissen als auch die Konklusion wahr sind. Zeilen, in denen alle Prämissen wahr sind, die Konklusion jedoch falsch ist, heben wir rot hervor.

$p \therefore p$ gültig

Schritt 1: Erstellung der Wahrheitstabellen.

Prämisse

p	p
w	w
f	f
	❶

Konklusion

p	p
w	w
f	f
	❶

Schritt 2: Überprüfung der Bedingungen (2.a) und (2.b).

(a) Nicht erfüllt: Die Prämissen sind konsistent (der Wert f kommt in Zeile 1 nicht vor).

(b) Nicht erfüllt: Die Konklusion ist nicht tautologisch.

	Prämisse	Konklusion
p	p	p
w	w	w
f	f	f

Schritt 3: Da die Bedingungen (2.a) und (2.b) nicht erfüllt sind, gehen wir zum nächsten Schritt.

Schritt 4: Vergleich der Zeilen.

	Prämisse	Konklusion
p	p	p
w	w	w
f	f	f

Schritt 5: Zeile 1 ist die einzige Zeile, in der die einzige Prämisse wahr ist. Da dort auch die Konklusion wahr ist, ist das Argument gültig.

Aktivierungselement 5.2. Überprüfen Sie die folgenden Argumentformen auf ihre Gültigkeit unter Verwendung der Wahrheitstafelmethode:

1. $p, p \rightarrow q \therefore q$
2. $q, p \rightarrow q \therefore p$
3. $\neg p \vee (q \vee p), \neg(p \vee q) \rightarrow (p \wedge q) \therefore p$
4. $p, \neg(p \vee q) \rightarrow (p \wedge q) \therefore \neg p \vee (q \vee p)$
5. $p, \neg p \therefore q$
6. $\therefore p$

Lösungen auf Seite 65.

5.1.3 Vorgehensweise für einen informellen Beweis

Um einen informellen Beweis zu führen, müssen wir ein Argument in der Metasprache – also auf Deutsch oder in einer anderen natürlichen Sprache – begründen. Dabei kann man wie folgt vorgehen:

Schritt 1: *Schreiben Sie den zu beweisenden Satz auf und heben Sie die Schlüsselbegriffe hervor.*

Schritt 2: *Schauen Sie sich die Definitionen zu diesen Schlüsselbegriffen an.*

Schritt 3: *Notieren Sie einige Merkmale dieser Definitionen, die für Ihren Beweis nützlich sein könnten.*

Schritt 4: *Bestimmen Sie, was genau zu beweisen ist – z.B. eine Implikation, eine Äquivalenz, eine Existenzsatz usw.*

Schritt 5: *Identifizieren Sie eine mögliche Strategie, um den Satz zu beweisen.* Z.B., um eine Implikation zu beweisen, könnte man die Antezedenz annehmen und versuchen, die Konsequenz zu schließen.

Schritt 6: *Entwerfen Sie eine Beweisskizze, um zu prüfen, ob die Strategie praktikabel ist.*

Schritt 7: *Schreiben Sie Ihre Beweise klar auf und begründen Sie jeden logischen Schritt, den Sie machen.* (Sie können logische Regeln verwenden, die analog zu denen der Objektsprache sind. Denken Sie jedoch daran, dass Sie in der Metasprache arbeiten.)

Es reicht aus, nur den letzten Schritt in einer Klausur zu schreiben, da er dem eigentlichen Beweis entspricht. Gehen wir jeden dieser Schritte für das nächste Beispiel durch.

Beispiel. Beweisen Sie:

‚A' ist eine kontradiktorisch gdw ‚$\neg A$' eine tautologisch ist.

Schritt 1: *Schreiben Sie den zu beweisenden Satz auf und heben Sie die Schlüsselbegriffe hervor.*

Zu zeigen: A ist eine kontradiktorisch gdw $\neg A$ eine tautologisch ist.

Schritt 2: *Schauen Sie sich die Definitionen zu diesen Schlüsselbegriffen an.*

Die verwendeten Begriffe sind ‚kontradiktorisch', ‚tautologisch' und ‚¬'. Alle diese Begriffe werden durch das Konzept der aussagenlogischen Bewertung definiert. Die Definitionen lauten wie folgt:

Definition 7 (Aussagenlogische Bewertung)**.** Eine aussagenlogische Bewertung (relativ zur Interpretation $\mathfrak{I}$) ist eine Funktion $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}} : \mathscr{F} \longrightarrow \{\mathtt{w}, \mathtt{f}\}$, sodass gilt: ...
2. $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(\neg A) = \mathtt{w}$ gdw $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(A) = \mathtt{f}$, ...

Definition 9 (Tautologie)**.** Eine Formel A aus $\mathscr{F}$ ist tautologisch gdw für alle Interpretationen $\mathfrak{I}$ gilt: $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(A) = \mathtt{w}$.

Definition 10 (Kontradiktion)**.** Eine Formel A aus $\mathscr{F}$ ist kontradiktorisch gdw für alle Interpretationen $\mathfrak{I}$ gilt: $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(A) = \mathtt{f}$.

Schritt 3: *Notieren Sie einige Merkmale dieser Definitionen, die für Ihren Beweis nützlich sein könnten.*

Folgendes ist bemerkenswert:

- Aus Definition 7 folgt aber, dass dies der Fall ist gdw $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(A) = \mathtt{f}$ oder $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(B) = \mathtt{w}$.
- Wendet man Definition 9 auf negierte Formeln an, so folgt, dass eine Formel $\neg A$ tautologisch ist gdw für alle Interpretationen $\mathfrak{I}$ gilt: $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(\neg A) = \mathtt{w}$.
- Aus Definition 7.2 folgt aber, dass dies der Fall ist gdw $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(A) = \mathtt{f}$.

  Mit anderen Worten: für alle $\mathfrak{I}$, $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(A) \neq \mathtt{w}$.
- Nach Definition 9 ist eine Formel A tautologisch gdw für alle Interpretationen $\mathfrak{I}$ gilt: $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(A) = \mathtt{w}$.
- Nach Definition 10 ist eine Formel A kontradiktorisch gdw für alle Interpretationen $\mathfrak{I}$ gilt: $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(A) = \mathtt{f}$.

Schritt 4: *Bestimmen Sie, was genau zu beweisen ist.*

Der Ausdruck ‚gdw' (Abkürzung für ‚genau dann, wenn') weist darauf hin, dass es sich um einen Äquivalenzsatz (von der Metasprache) handelt. Das bedeutet, dass gezeigt werden muss, dass die linke Seite aus der rechten Seite folgt und umgekehrt, dass die rechte Seite aus der linken Seite folgt.

Schritt 5: *Identifizieren Sie eine mögliche Strategie, um den Satz zu beweisen.*

Wir zeigen direkt die Folge von Äquivalenzen, die den Übergang von ‚A ist kontradiktorisch' zu ‚$\neg A$ ist tautologisch' in mehreren, unmittelbar gerechtfertigten Schritten verbindet.

Schritt 7: *Entwerfen Sie eine Beweisskizze, um zu prüfen, ob die Strategie praktikabel ist.*

Hier ist eine informellere Skizze des Beweises:

Was wir beweisen wollen:

‚A' ist eine kontradiktorisch gdw ‚$\neg A$' eine tautologisch ist.

Was wir beweisen wollen anders formuliert:

$$\text{für alle } \mathfrak{I} : \mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(A) = \mathtt{f} \text{ (Def. 10)}$$

$$\text{gdw}$$

$$\text{für alle } \mathfrak{I} : \mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(\neg A) = \mathtt{w} \text{ (Def. 9)}$$

Methode des Beweises:
Wir wollen die folgende Kette beweisen und jeden Übergang durch die passende Definition rechtfertigen:

$$\begin{aligned} A \text{ ist kontradiktorisch gdw } & \text{für alle } \mathfrak{I} : \mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(A) = \mathtt{f} && \text{(Def. 10)} \\ \text{gdw } & \text{für alle } \mathfrak{I} : \mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(\neg A) = \mathtt{w} && \text{(Def. 7.2)} \\ \text{gdw } & \neg A \text{ ist tautologisch} && \text{(Def. 9)} \end{aligned}$$

Schätzung: Die Äquivalenzkette ist kurz und vollständig – jeder Schritt ist durch eine der angegebenen Definitionen gedeckt, die Strategie ist somit praktikabel und unmittelbar in einen formalen Beweis überführbar.

Schritt 8: *Schreiben Sie Ihre Beweise klar auf und begründen Sie jeden logischen Schritt.*

Satz: A ist kontradiktorisch gdw $\neg A$ tautologisch ist.

Beweis. Nach Definition 10 ist A kontradiktorisch gdw für alle Interpretationen $\mathfrak{I}$ gilt, dass $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(A) = \mathtt{f}$. Nach Definition 7.2 der Negation gilt für jede Interpretation $\mathfrak{I}$, dass $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(\neg A) = \mathtt{w}$ gdw $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(A) = \mathtt{f}$. Schließlich besagt Definition 9, dass $\neg A$ tautologisch ist gdw für alle Interpretationen $\mathfrak{I}$ gilt, dass $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(\neg A) = \mathtt{w}$. Kombiniert man diese drei Aussagen, so folgt unmittelbar, dass A kontradiktorisch ist gdw $\neg A$ tautologisch ist. □

Aktivierungselement 5.3. Beweisen Sie:

‚$A \vee \neg A$' ist eine Tautologie.

Lösung auf Seite 69 (ausstehend).

5.1.4 Lösungen

Lösung zu Aktivierungselement 5.1

1. $p \wedge \neg p$ — kontradiktorisch

p	p	$\wedge$	$\neg$	p
w		f	f	
f		f	w	
		❷	①	

2. $p \wedge \neg p \rightarrow q$ — tautologisch

p	q	p	$\wedge$	$\neg$	p	$\rightarrow$	q
w	w		f	f		w	
w	f		f	f		w	
f	w		f	w		w	
f	f		f	w		w	
			②	①		❸	

3. $q \rightarrow p \wedge \neg p$ — kontingent

p	q	q	$\rightarrow$	p	$\wedge$	$\neg$	p
w	w		f		f	f	
w	f		w		f	f	
f	w		f		f	w	
f	f		w		f	w	
			❸		②	①	

4. $p \vee \neg p$ — tautologisch

p	p	$\vee$	$\neg$	p
w		w	f	
f		w	w	
		❷	①	

5. $p \vee \neg p \rightarrow q$ — kontingent

p	q	p	$\vee$	$\neg$	p	$\rightarrow$	q
w	w		w	f		w	
w	f		w	f		f	
f	w		w	w		w	
f	f		w	w		f	
			②	①		❸	

6. $q \rightarrow p \vee \neg p$ — tautologisch

p	q	q	$\rightarrow$	p	$\vee$	$\neg$	p
w	w		w		w	f	
w	f		w		w	f	
f	w		w		w	w	
f	f		w		w	w	
			❸		②	①	

Lösung zu Aktivierungselement 5.2.

1. $p, p \rightarrow q \therefore q$ gültig

Schritt 1: Erstellung der Wahrheitstabellen.

Prämisse 1

p	q	p
w	w	w
w	f	w
f	w	f
f	f	f
		❶

Prämisse 2

p	q	$p \rightarrow q$
w	w	w
w	f	f
f	w	w
f	f	w
		❶

Konklusion

p	q	q
w	w	w
w	f	f
f	w	w
f	f	f
		❶

Schritt 2: Überprüfung der Bedingungen (2.a) und (2.b).

(a) Nicht erfüllt: Die Prämissen sind konsistent.

(b) Nicht erfüllt: Die Konklusion ist nicht tautologisch.

		Prämissen		Konklusion
p	q	p	$p \rightarrow q$	q
w	w	w	w	w
w	f	w	f	f
f	w	f	w	w
f	f	f	w	f

Schritt 3: Da die Bedingungen (2.a) und (2.b) nicht erfüllt sind, gehen wir zum nächsten Schritt.

Schritt 4: Vergleich der Zeilen.

		Prämissen		Konklusion
p	q	p	$p \rightarrow q$	q
w	w	w	w	w
w	f	w	f	f
f	w	f	w	w
f	f	f	w	f

Schritt 5: Die einzige Zeile, in der alle Prämissen wahr sind, ist Zeile 1. Da dort auch die Konklusion wahr ist, ist das Argument gültig.

2. $q, p \rightarrow q \therefore p$ **ungültig**

Schritt 1: Erstellung der Wahrheitstabellen.

Prämisse 1

p	q	q
w	w	w
w	f	f
f	w	w
f	f	f
		❶

Prämisse 2

p	q	$p \rightarrow q$
w	w	w
w	f	f
f	w	w
f	f	w
		❶

Konklusion

p	q	p
w	w	w
w	f	w
f	w	f
f	f	f
		❶

Schritt 2: Überprüfung der Bedingungen (2.a) und (2.b).

(a) Nicht erfüllt: Die Prämissen sind konsistent.

(b) Nicht erfüllt: Die Konklusion ist nicht tautologisch.

		Prämissen		Konklusion
p	q	q	$p \rightarrow q$	p
w	w	w	w	w
w	f	f	f	w
f	w	w	w	f
f	f	f	w	f

Schritt 3: Da die Bedingungen (2.a) und (2.b) nicht erfüllt sind, gehen wir zum nächsten Schritt.

Schritt 4: Vergleich der Zeilen.

		Prämissen		Konklusion
p	q	q	$p \rightarrow q$	p
w	w	w	w	w
w	f	f	f	w
f	w	w	w	f
f	f	f	w	f

Schritt 5: Es gibt genau zwei Zeilen, in denen alle Prämissen wahr sind: 1 und 3. Da die Konklusion in Zeile 3 falsch ist, ist das Argument ungültig.

3. $\neg p \vee (q \vee p), \neg(p \vee q) \rightarrow (p \wedge q) \therefore p$ ungültig

Schritt 1: Erstellung der Wahrheitstabellen.

Prämisse 1

p	q	$\neg$	$p \vee (q$	$\vee\, p)$
w	w	f	w	w
w	f	f	w	w
f	w	w	w	w
f	f	w	w	f
		①	❸	②

Prämisse 2

p	q	$\neg$	$(p \vee q)$	$\rightarrow$	$(p \wedge q)$
w	w	f	w	w	w
w	f	f	w	w	f
f	w	f	w	w	f
f	f	w	f	f	f
		②	①	❸	①

Konklusion

p	q	p
w	w	w
w	f	w
f	w	f
f	f	f
		❶

Schritt 2: Überprüfung der Bedingungen (2.a) und (2.b).

(a) Nicht erfüllt: Die Prämissen sind konsistent.

(b) Nicht erfüllt: Die Konklusion ist nicht tautologisch.

		Prämissen		Konklusion
p	q	$\neg p \vee (q \vee p)$	$\neg(p \vee q) \rightarrow (p \wedge q)$	p
w	w	w	w	w
w	f	w	w	w
f	w	w	w	f
f	f	w	f	f

Schritt 3: Da die Bedingungen (2.a) und (2.b) nicht erfüllt sind, gehen wir zum nächsten Schritt.

Schritt 4: Vergleich der Zeilen.

		Prämissen		Konklusion
p	q	$\neg p \vee (q \vee p)$	$\neg(p \vee q) \rightarrow (p \wedge q)$	p
w	w	w	w	w
w	f	w	w	w
f	w	w	w	f
f	f	w	f	f

Schritt 5: In Zeilen 1–3 sind alle Prämissen wahr sind. Da die Konklusion in Zeile 3 falsch ist, ist das Argument ungültig.

4. $p, \neg(p \vee q) \rightarrow (p \wedge q) \therefore \neg p \vee (q \vee p)$ gültig

Schritt 1: Erstellung der Wahrheitstabellen.

- Wahrheitstabelle für Prämisse 1: siehe Konklusion in Argument 3.
- Wahrheitstabelle für Prämisse 2: siehe Prämisse 2 in Argument 3.
- Wahrheitstabelle für die Konklusion: siehe Prämisse 1 in Argument 3.

Schritt 2: Überprüfung der Bedingungen (2.a) und (2.b).

(a) Nicht erfüllt: Die Prämissen sind konsistent.

(b) Erfüllt: Die Konklusion ist tautologisch.

		Prämissen		Konklusion
p	q	p	$\neg(p \vee q) \rightarrow (p \wedge q)$	$\neg p \vee (q \vee p)$
w	w	w	w	w
w	f	w	w	w
f	w	f	w	w
f	f	f	f	w

Schritt 3: Da die Bedingung (2.a) erfüllt ist, ist das Argument gültig.

5. $p, \neg p \therefore q$ gültig

Schritt 1: Erstellung der Wahrheitstabellen.

Prämisse 1

p	q	p
w	w	w
w	f	w
f	w	f
f	f	f
		❶

Prämisse 2

p	q	$\neg p$
w	w	f
w	f	f
f	w	w
f	f	w
		❶

Konklusion

p	q	q
w	w	w
w	f	f
f	w	w
f	f	f
		❶

Schritt 2: Überprüfung der Bedingungen (2.a) und (2.b).

(a) Erfüllt: Die Prämissen sind inkonsistent.

(b) Nicht erfüllt: Die Konklusion ist nicht tautologisch.

		Prämissen		Konklusion
p	q	p	$\neg p$	q
w	w	w	f	w
w	f	w	f	f
f	w	f	w	w
f	f	f	w	f

Schritt 3: Da die Bedingung (2.b) erfüllt ist, ist das Argument gültig.

Lösung zu Aktivierungselement 5.3. [Ausstehend.]

5.2 Übungen

Übung 5.1.

1. Was ist eine Wahrheitstafel für eine aussagenlogische Formel? Wie erstellt man eine Wahrheitstafel?
2. Erstellen Sie die Wahrheitstafeln zu allen aussagenlogischen Formeln in Übung 4.5 (4.1-4.5) mit weniger als 3 oder genau 3 Aussagenvariablen.

Übung 5.2. Stellen Sie mit Hilfe von Wahrheitstafeln fest, welche der folgenden Formeln tautologisch, kontradiktorisch bzw. kontingent sind.

1. $(p \to q) \vee (q \to p)$
2. $\neg(p \to q) \vee (q \wedge \neg p)$
3. $\neg((p \to q) \wedge p) \to q$
4. $((p \to q) \vee (q \to r)) \vee (r \to p)$
5. $(p \to q) \vee (\neg p \to q)$
6. $(p \to q) \to ((p \to r) \to (q \to r))$
7. $p \vee (\neg q \to r) \to q \vee (\neg p \to r)$
8. $\neg(p \wedge (q \to \neg r)) \to (p \to q) \wedge (p \to r)$
9. $\neg(\neg p \to q \vee r) \to \neg(p \vee q) \wedge r$
10. $(p \wedge q \to (r \wedge s) \vee t) \wedge (\neg(\neg p \vee \neg q) \wedge (\neg r \vee \neg s))$
11. $\neg((p \wedge q) \vee ((r \wedge s) \wedge t) \to q \vee t)$
12. $p \wedge (q \leftrightarrow r) \to (p \wedge q \leftrightarrow p \wedge r)$
13. $p \vee (\neg q \to r) \leftrightarrow q \vee (\neg p \to r)$
14. $\neg(p \wedge (q \to \neg r)) \leftrightarrow (p \to q) \wedge (p \to r)$

Übung 5.3.1.

1. Was ist eine aussagenlogische Interpretation?
2. Was ist eine aussagenlogische Bewertung?
3. Was ist eine Tautologie, was ist eine Kontradiktion, was ist eine kontingente Formel (gemäß exakter Definition über Interpretationen und aussagenlogische Bewertungen)?

Übung 5.3.2. Was kann gemeint sein, wenn man sagt ‚A impliziert B'?

Übung 5.3.3.

1. Was ist die logische Implikation (Äquivalenz): Ein zweistelliger Junktor oder eine zweistellige Relation?
2. Wie ist die logische Implikation (Äquivalenz) definiert?

Übung 5.3.4. Beweisen Sie:

A impliziert logisch B gdw ‚$A \rightarrow B$' eine Tautologie ist.

(Das ist übrigens ein metalogischer Satz, also ein Satz der über Formeln ‚spricht' und diesen Formeln gewisse logische Eigenschaften zuschreibt; ein Beweis dieses metalogischen Satz ist demnach ein metalogischer Beweis.)

Übung 5.4.1. Was ist eine gültige Argumentform? Was ist ein gültiges Argument?

Übung 5.4.2. Welche der folgenden Behauptungen sind wahr und welche sind falsch?

1. Ein Argument, das eine falsche Konklusion hat, ist ungültig.
2. Ein Argument, das falsche Prämissen und eine wahre Konklusion hat, ist ungültig.
3. Ein Argument, das wahre Prämissen und eine falsche Konklusion hat, ist ungültig.
4. Ein Argument, das lauter wahre Prämissen und eine wahre Konklusion hat, ist gültig.
5. Jemand, der behauptet, daß ein bestimmter Schluß korrekt ist, kann durch ein einziges Gegenbeispiel widerlegt werden.
6. Wenn ein gültiges Argument eine falsche Konklusion hat, dann sind alle seine Prämissen auch falsch.

Übung 5.4.3. Was ist die der Argumentform $A_1, \ldots, A_n \therefore B$ entsprechende Formel?

Übung 5.5.1. Überprüfen Sie die folgenden Argumentformen auf ihre Gültigkeit unter Verwendung der Wahrheitstafelmethode:

1. $p \wedge q \rightarrow r \wedge \neg s, r \rightarrow t, \neg t \wedge p \therefore \neg p$
2. $p \wedge q \rightarrow r \wedge \neg s, r \rightarrow t, \neg t \wedge q \therefore p \rightarrow r \wedge \neg r$
3. $p \rightarrow (q \rightarrow r), r \rightarrow \neg s \wedge \neg t, \neg t \rightarrow \neg s \therefore p \rightarrow t$
4. $\neg(q \vee (p \rightarrow r)), \neg r \rightarrow p \wedge \neg q \therefore \neg q \vee r \rightarrow s$
5. $\neg(\neg p \vee (q \rightarrow \neg r)), r \rightarrow s \wedge t \therefore t \vee \neg q$
6. $p \wedge q \rightarrow r, q \vee \neg r \therefore p \rightarrow (q \rightarrow r) \wedge (r \rightarrow q)$
7. $\neg(\neg p \vee \neg q) \rightarrow r, r \wedge (p \wedge q) \rightarrow p \wedge s \therefore \neg(p \wedge q) \vee s$
8. $p \vee \neg p \rightarrow q, \neg(\neg r \vee \neg s), t \rightarrow p \wedge \neg p \therefore (q \wedge s) \wedge \neg t$
9. $p \vee q \therefore ((p \rightarrow q) \rightarrow q) \wedge (\neg q \rightarrow p)$

Übung 5.5.2. Das folgende Argument war in Übung 3 bereits durch eine Argumentform zu repräsentieren.

> Der Papst ist Deutscher. Daher tritt Österreich am 1. Januar 2013 genau dann aus der EU aus, wenn Österreich dies tut.

(i) Überprüfen Sie, ob die nämliche Argumentform gültig ist.

(ii) Entspricht das Ergebnis aus (i) Ihrer Intuition?

Übung 5.5.3. Das folgende Argument war in Übung 3 bereits durch eine Argumentform zu repräsentieren.

> Bad Goisern ist die Hauptstadt von Oberösterreich und Bad Goisern ist nicht die Hauptstadt von Oberösterreich. Daher existiert Gott.

(i) Überprüfen Sie, ob die nämliche Argumentform gültig ist.

(ii) Ist dieses Argument ein Beweis für die Existenz Gottes?

5.2.1 Lösungen

Lösung zu Übung 5.1. 1. Was ist eine Wahrheitstafel für eine aussagenlogische Formel? Wie erstellt man eine Wahrheitstafel?

Antwort: Siehe Sektion 5.1.1.

2. Erstellen Sie die Wahrheitstafeln zu allen aussagenlogischen Formeln in Übung 4.5 (4.1-4.5) mit weniger als 3 oder genau 3 Aussagenvariablen.

Antwort: Hier nicht beantwortet.

Lösung zu Übung 5.2. Stellen Sie mit Hilfe von Wahrheitstafeln fest, welche der folgenden Formeln tautologisch, kontradiktorisch bzw. kontingent sind.

1. $(p \to q) \vee (q \to p)$ tautologisch

p	q	$(p \to q)$	$\vee$	$(q \to p)$
w	w	w	w	w
w	f	f	w	w
f	w	w	w	f
f	f	w	w	w
		①	❷	①

2. $\neg(p \to q) \vee (q \wedge \neg p)$ kontingent

p	q	$\neg$	$(p \to q)$	$\vee$	$(q \wedge$	$\neg p)$
w	w	f	w	f	f	f
w	f	w	f	w	f	f
f	w	f	w	w	w	w
f	f	f	w	f	f	w
		③	②	❹	②	①

3. $\neg((p \to q) \wedge p) \to q$ kontingent

p	q	$\neg($	$(p \to q)$	$\wedge p)$	$\to q$
w	w	f	w	w	w
w	f	w	f	f	w
f	w	w	w	f	f
f	f	w	w	f	w
		③	①	②	❹

4. $((p \to q) \vee (q \to r)) \vee (r \to p)$ tautologisch

p	q	r	$((p \to q)$	$\vee$	$(q \to r))$	$\vee$	$(r \to p)$
w	w	w	w	w	w	w	w
w	w	f	w	w	f	w	w
w	f	w	f	w	w	w	w
w	f	f	f	w	w	w	w
f	w	w	w	w	w	w	f
f	w	f	w	w	f	w	w
f	f	w	w	w	w	w	f
f	f	f	w	w	w	w	w
			①	②	①	❸	①

5. $(p \to q) \vee (\neg p \to q)$ tautologisch

p	q	$(p \to q)$	$\vee$	$(\neg p$	$\to q)$
w	w	w	w	f	w
w	f	f	w	f	w
f	w	w	w	w	w
f	f	w	w	w	f
		②	❸	①	②

6. $(p \to q) \to ((p \to r) \to (q \to r))$ kontingent

7. $p \vee (\neg q \to r) \to q \vee (\neg p \to r)$ tautologisch

8. $\neg(p \wedge (q \to \neg r)) \to (p \to q) \wedge (p \to r)$ tautologisch

9. $\neg(\neg p \to q \vee r) \to \neg(p \vee q) \wedge r$ kontingent

10. $(p \wedge q \to (r \wedge s) \vee t) \wedge (\neg(\neg p \vee \neg q) \wedge (\neg r \vee \neg s))$ kontingent

11. $\neg((p \wedge q) \vee ((r \wedge s) \wedge t) \rightarrow q \vee t)$ kontradiktorisch

p	q	r	s	t	$\neg(($	$p \wedge q)$	$\vee$	$((r \wedge s)$	$\wedge\, t)$	$\rightarrow$	$q \vee t)$
w	w	w	w	w	f	w	w	w	w	w	w
w	w	w	w	f	f	w	w	w	f	w	w
w	w	w	f	w	f	w	w	f	f	w	w
w	w	w	f	f	f	w	w	f	f	w	w
w	w	f	w	w	f	w	w	f	f	w	w
w	w	f	w	f	f	w	w	f	f	w	w
w	w	f	f	w	f	w	w	f	f	w	w
w	w	f	f	f	f	w	w	f	f	w	w
w	f	w	w	w	f	f	w	w	w	w	w
w	f	w	w	f	f	f	f	w	f	w	f
w	f	w	f	w	f	f	f	f	f	w	w
w	f	w	f	f	f	f	f	f	f	w	f
w	f	f	w	w	f	f	f	f	f	w	w
w	f	f	w	f	f	f	f	f	f	w	f
w	f	f	f	w	f	f	f	f	f	w	w
w	f	f	f	f	f	f	f	f	f	w	f
f	w	w	w	w	f	f	w	w	w	w	w
f	w	w	w	f	f	f	f	w	f	w	w
f	w	w	f	w	f	f	f	f	f	w	w
f	w	w	f	f	f	f	f	f	f	w	w
f	w	f	w	w	f	f	f	f	f	w	w
f	w	f	w	f	f	f	f	f	f	w	w
f	w	f	f	w	f	f	f	f	f	w	w
f	w	f	f	f	f	f	f	f	f	w	w
f	f	w	w	w	f	f	w	w	w	w	w
f	f	w	w	f	f	f	f	w	f	w	f
f	f	w	f	w	f	f	f	f	f	w	w
f	f	w	f	f	f	f	f	f	f	w	f
f	f	f	w	w	f	f	f	f	f	w	w
f	f	f	w	f	f	f	f	f	f	w	f
f	f	f	f	w	f	f	f	f	f	w	w
f	f	f	f	f	f	f	f	f	f	w	f
					❺	①	③	①	②	④	①

Bemerkung: Die eingeklammerte Formel innerhalb der Negation ist tautologisch. Andernfalls wäre die negierte Formel nicht kontradiktorisch.

12. $p \wedge (q \leftrightarrow r) \rightarrow (p \wedge q \leftrightarrow p \wedge r)$ tautologisch

13. $p \vee (\neg q \rightarrow r) \leftrightarrow q \vee (\neg p \rightarrow r)$ tautologisch

14. $\neg(p \wedge (q \rightarrow \neg r)) \leftrightarrow (p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)$ **tautologisch**

p	q	r	$\neg($	$p \wedge$	$(q \rightarrow$	$\neg\, r))$	$\leftrightarrow$	$(p \rightarrow q)$	$\wedge$	$(q \rightarrow t)$
w	w	w	w	f	f	f	w	w	w	w
w	w	f	f	w	w	w	w	w	f	f
w	f	w	f	w	w	f	w	f	f	w
w	f	f	f	w	w	w	w	f	f	f
f	w	w	w	f	f	f	w	w	w	w
f	w	f	w	f	w	w	w	w	w	w
f	f	w	w	f	w	f	w	w	w	w
f	f	f	w	f	w	w	w	w	w	w
			④	③	②	①	❺	①	②	①

Lösung zu Übung 5.3.1.

1. Was ist eine aussagenlogische Interpretation?

Antwort: Siehe Definition 6 auf S. 129.

2. Was ist eine aussagenlogische Bewertung?

Antwort: Siehe Definition 7 auf SS. 130–1.

3. Was ist eine Tautologie, was ist eine Kontradiktion, was ist eine kontingente Formel (gemäß exakter Definition über Interpretationen und aussagenlogische Bewertungen)?

Antwort: Siehe Definitionen 8–10 auf SS. 133–4.

Lösung zu Übung 5.3.2. Was kann gemeint sein, wenn man sagt ‚A impliziert B‘?

Antwort

Wenn wir die Alltagssprache ‚A impliziert B‘ interpretieren, kann dies zumindest zwei verschiedene Bedeutungen haben, die mit logischen Begriffen interpretiert werden können:

(a) ‚$A \longrightarrow B$‘, oder

(b) ‚A impliziert (aussagen-)logisch B‘ (siehe Definition 11 auf S. 137).

Es könnte auch eine kausale Interpretation geben, die aber mit den in diesem Kapitel gelernten logischen Konzepten nicht formalisiert werden kann.

Lösung zu Übung 5.3.3.

1. Was ist die logische Implikation (Äquivalenz): Ein zweistelliger Junktor oder eine zweistellige Relation?

Antwort

Die logische Implikation und die logische Äquivalenz sind zweistellige Relationen (siehe S. 140–141). Zweistellige Junktoren sind ‚$\longrightarrow$‘ und ‚$\longleftrightarrow$‘, ebenso wie ‚$\wedge$‘ und ‚$\vee$‘.

2. Wie ist die logische Implikation (Äquivalenz) definiert?

Antwort: Siehe Definition 11.

Lösung zu Übung 5.3.4. Beweisen Sie:

A impliziert logisch B gdw ‚$A \longrightarrow B$‘ eine Tautologie ist.

Hinweis: Es geht hier nicht darum, diese Aussage mit einer Herleitung in unserem System des natürlichen Schließens zu beweisen oder eine Wahrheitstabelle zu erstellen. Wir müssen stattdessen einen informellen Beweis führen. Gehen wir jeden der in Abschnitt 5.1.3 dafür vorgeschlagenen Schritte für den erforderlichen Beweis durch.

Schritt 1: *Schreiben Sie den zu beweisenden Satz auf und heben Sie die Schlüsselbegriffe hervor.*

Zu zeigen: A impliziert logisch B gdw $(A \rightarrow B)$ eine Tautologie ist.

Schritt 2: *Schauen Sie sich die Definitionen zu diesen Schlüsselbegriffen an.*

Die verwendeten Begriffe sind ‚Tautologie', ‚logisch impliziert' und ‚$\rightarrow$'. Alle diese Begriffe werden durch das Konzept der aussagenlogischen Bewertung definiert. Die Definitionen lauten wie folgt:

Definition 7 (Aussagenlogische Bewertung)**.** Eine aussagenlogische Bewertung (relativ zur Interpretation $\mathfrak{I}$) ist eine Funktion $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}} : \mathcal{F} \rightarrow \{\mathtt{w}, \mathtt{f}\}$, sodass gilt: ...
5. $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}((A \rightarrow B)) = \mathtt{w}$ gdw $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(A) = \mathtt{f}$ oder $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(B) = \mathtt{w}$, ...

Definition 9 (Tautologie)**.** Eine Formel A aus $\mathcal{F}$ ist tautologisch gdw für alle Interpretationen $\mathfrak{I}$ gilt: $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(A) = \mathtt{w}$.

Definition 12 (Aussagenlogische Implikation)**.** Für alle Formeln $A_1, \ldots, A_n$ und B aus $\mathcal{F}$: $A_1, \ldots, A_n$ implizieren (aussagen-)logisch B (bzw. B folgt logisch aus $A_1, \ldots, A_n$) gdw für alle Interpretationen $\mathfrak{I}$ gilt: Wenn $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(A_1) = \mathtt{w}, \ldots, \mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(A_n) = \mathtt{w}$, dann $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(B) = \mathtt{w}$.

Schritt 3: *Notieren Sie einige Merkmale dieser Definitionen, die für Ihren Beweis nützlich sein könnten.*

Folgendes ist bemerkenswert:

- Definition 7 besagt, dass die Funktion $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}} : \mathcal{F} \rightarrow \{\mathtt{w}, \mathtt{f}\}$ zwei mögliche Werte hat, nämlich $\mathtt{w}$ und $\mathtt{f}$.
- Folglich, wenn $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(A) \neq \mathtt{w}$ (d.h. wenn $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(A) = \mathtt{w}$ nicht der Fall ist), dann gilt $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(A) = \mathtt{f}$.
- Dies folgt auch umgekehrt, da $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}$ eine Funktion ist. Das bedeutet, es gibt kein A, für das $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(A) = \mathtt{w} = \mathtt{f}$ gilt. Folglich, $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(A) = \mathtt{f}$ gdw $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(A) \neq \mathtt{w}$.
- Wendet man Definition 9 auf Implikationssätze an, so folgt, dass eine Formel $(A \rightarrow B)$ tautologisch ist gdw für alle Interpretationen $\mathfrak{I}$ gilt: $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}((A \rightarrow B)) = \mathtt{w}$.
- Aus Definition 7.5 folgt aber, dass dies der Fall ist gdw $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(A) = \mathtt{f}$ oder $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(B) = \mathtt{w}$.

  Mit anderen Worten: für alle $\mathfrak{I}$, $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}((A \rightarrow B)) = \mathtt{w}$ gdw $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(A) \neq \mathtt{w}$ oder $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(B) = \mathtt{w}$.
- Aus Definition 12 folgt: A logisch impliziert B gdw für alle $\mathfrak{I}$, wenn $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(A) = \mathtt{w}$, dann $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(B) = \mathtt{w}$.

Schritt 4: *Bestimmen Sie, was genau zu beweisen ist – z.B. eine Implikation, eine Äquivalenz, eine Existenzsatz usw.*

Der Ausdruck ‚gdw' (Abkürzung für ‚genau dann, wenn') weist darauf hin, dass es sich um einen Äquivalenzsatz (von der Metasprache) handelt. Das bedeutet, dass gezeigt werden muss, dass die linke Seite aus der rechten Seite folgt und umgekehrt, dass die rechte Seite aus der linken Seite folgt.

Schritt 5: *Identifizieren Sie eine mögliche Strategie, um den Satz zu beweisen.*

Wir könnten die folgende Strategie verfolgen: Wir zeigen eine Äquivalenz zwischen der Definition der logischen Implikation und der Wahrheitstabelle einer Tautologie. Dafür gehen wir in zwei Richtungen vor:

($\Rightarrow$) Wir nehmen an, dass A logisch B impliziert, und überprüfen, dass $(A \rightarrow B)$ für alle Interpretationen $\mathfrak{I}$ gilt, indem wir die Fälle $\mathfrak{W}_\mathfrak{I}(A) = \mathtt{w}$ und $\mathfrak{W}_\mathfrak{I}(A) \neq \mathtt{w}$ getrennt betrachten.

($\Leftarrow$) Wir nehmen an, dass $(A \rightarrow B)$ eine Tautologie ist, und zeigen, dass daraus folgt, dass wenn $\mathfrak{W}_\mathfrak{I}(A) = \mathtt{w}$, dann $\mathfrak{W}_\mathfrak{I}(B) = \mathtt{w}$.

Damit schließen wir die Äquivalenz.

Schritt 6: *Entwerfen Sie eine Beweisskizze, um zu prüfen, ob die Strategie praktikabel ist.*

Hier ist eine informellere Skizze des Beweises:

Was wir beweisen wollen:

A impliziert logisch B gdw $(A \rightarrow B)$ eine Tautologie ist.

Was wir beweisen wollen anders formuliert:

$$\mathfrak{W}_\mathfrak{I}(A) = \mathtt{w} \text{ (für alle } \mathfrak{I}\text{), dann } \mathfrak{W}_\mathfrak{I}(B) = \mathtt{w} \quad \text{(Def. 12)}$$

gdw

$$\mathfrak{W}_\mathfrak{I}((A \rightarrow B)) = \mathtt{w} \quad \text{(Def. 9).}$$

Methode des Beweises:
Wir führen für jede Richtung einen konditionalen Beweis an.

($\Rightarrow$) **Annahme:** $\mathfrak{W}_\mathfrak{I}(A) = \mathtt{w}$, dann $\mathfrak{W}_\mathfrak{I}(B) = \mathtt{w}$.

Ziel: $\mathfrak{W}_\mathfrak{I}((A \rightarrow B)) = \mathtt{w}$.

Verfahren: Wir betrachten zwei mögliche Fälle:

(i) Wenn $\mathfrak{W}_\mathfrak{I}(A) = \mathtt{w}$, dann folgt aus der Annahme, dass auch $\mathfrak{W}_\mathfrak{I}(B) = \mathtt{w}$. Daher $\mathfrak{W}_\mathfrak{I}((A \rightarrow B)) = \mathtt{w}$ (Def. 7).

(ii) Wenn $\mathfrak{W}_\mathfrak{I}(A) \neq \mathtt{w}$, dann gilt $\mathfrak{W}_\mathfrak{I}(A) = \mathtt{f}$ (Def. 7). Folglich: $\mathfrak{W}_\mathfrak{I}(A \rightarrow B) = \mathtt{w}$ (auch Def. 7).

($\Leftarrow$) **Annahmen:** $\mathfrak{W}_\mathfrak{I}((A \rightarrow B)) = \mathtt{w}$, $\mathfrak{W}_\mathfrak{I}(A) = \mathtt{w}$.

Ziel: $\mathfrak{W}_\mathfrak{I}(B) = \mathtt{w}$.

Verfahren: $\mathfrak{W}_\mathfrak{I}((A \rightarrow B)) = \mathtt{w}$ bedeutet, dass, wenn $\mathfrak{W}_\mathfrak{I}(A) = \mathtt{w}$, dann muss entweder $\mathfrak{W}_\mathfrak{I}(A) = \mathtt{f}$ oder $\mathfrak{W}_\mathfrak{I}(B) = \mathtt{w}$ gelten. Da jedoch die Annahme $\mathfrak{W}_\mathfrak{I}(A) = \mathtt{w}$ im Widerspruch zu $\mathfrak{W}_\mathfrak{I}(A) = \mathtt{f}$ steht (Def. 7), bleibt nur die Möglichkeit, dass $\mathfrak{W}_\mathfrak{I}(B) = \mathtt{w}$ (unser Ziel).

Schätzung: Die Beweisstrategie scheint praktikabel zu sein.

Schritt 7: *Schreiben Sie Ihre Beweise klar auf und begründen Sie jeden logischen Schritt, den Sie machen.*

Hinweis: Eine viel kürzere Version des Beweises folgt unten. Es kann aus pädagogischen Gründen hilfreich sein, diese zuerst durchzugehen oder beide Versionen miteinander zu vergleichen.

Satz: A impliziert logisch B gdw $(A \to B)$ eine Tautologie ist.

Beweis. Nach den Def. 12 und 9 ist Folgendes zu zeigen:

$$\text{(a) für alle } \mathfrak{I}\text{: wenn } \mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(A) = \mathtt{w}\text{, dann } \mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(B) = \mathtt{w}$$

gdw

$$\text{(b) für alle } \mathfrak{I}\text{: } \mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}((A \to B)) = \mathtt{w}.$$

Aus Def. 7 wissen wir, dass $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}$ eine Funktion ist, die nur zwei Werte annehmen kann: $\mathtt{w}$ oder $\mathtt{f}$. Insbesondere gilt:

$$\text{(c) } \mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(A) = \mathtt{f} \quad \text{gdw} \quad \mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(A) \neq \mathtt{w}.$$

Nun beweisen wir die beiden Richtungen separat:

($\Rightarrow$) Angenommen, A impliziert logisch B. Das bedeutet:

$$\text{(a) für alle } \mathfrak{I}\text{: wenn } \mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(A) = \mathtt{w}\text{, dann } \mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(B) = \mathtt{w}.$$

Zu zeigen ist, dass $(A \to B)$ eine Tautologie ist, also:

$$\text{(b) für alle } \mathfrak{I}\text{: } \mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}((A \to B)) = \mathtt{w}.$$

Sei $\mathfrak{I}$ eine beliebige Interpretation. Aus (a) folgt unmittelbar:

$$\text{(a') wenn } \mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(A) = \mathtt{w}\text{, dann } \mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(B) = \mathtt{w}.$$

Wir unterscheiden zwei Fälle: (i) $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(A) = \mathtt{w}$, (ii) $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(A) \neq \mathtt{w}$.

(i) Angenommen, $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(A) = \mathtt{w}$. In Kombination mit (a') folgt daraus, dass $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(B) = \mathtt{w}$. Damit ist nach Def. 7 gezeigt, dass $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}((A \to B)) = \mathtt{w}$.

(ii) Angenommen, $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(A) \neq \mathtt{w}$. In Kombination mit (c) folgt daraus, dass $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(B) = \mathtt{f}$. Damit ist nach Def. 7 gezeigt, dass $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}((A \to B)) = \mathtt{w}$.

Da die Fälle (i) und (ii) erschöpfend und disjunkt sind, gilt $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}((A \to B)) = \mathtt{w}$. Da $\mathfrak{I}$ beliebig gewählt war, gilt für diese Bedingung jede $\mathfrak{I}$. Das war zu zeigen.

($\Leftarrow$) Angenommen, $(A \to B)$ ist eine Tautologie. Das bedeutet:

$$\text{(b) für alle } \mathfrak{I} \text{ gilt: } \mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}((A \to B)) = \mathtt{w}.$$

Zu zeigen ist, dass A logisch B impliziert, also:

$$\text{(a) für alle } \mathfrak{I}\text{: wenn } \mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(A) = \mathtt{w}\text{, dann } \mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(B) = \mathtt{w}.$$

Sei $\mathfrak{I}$ eine beliebige Interpretation. Aus (b) folgt unmittelbar:

$$\text{(b) } \mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}((A \to B)) = \mathtt{w}.$$

Nehmen wir nun an, dass:

$$\text{(a.1) } \mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(A) = \mathtt{w}.$$

Zu zeigen bleibt: $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(B) = \mathtt{w}$.

Man beachte, dass nach Def. 7 aus (a) folgt, dass:

$$\text{(i) } \mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(A) = \mathtt{f} \text{ oder (ii) } \mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(B) = \mathtt{w},$$

$$\text{d.h. (siehe (c))}$$

$$\text{(i) } \mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(A) \neq \mathtt{w} \text{ oder (ii) } \mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(B) = \mathtt{w}.$$

Fall (i) ist ausgeschlossen, da angenommen wurde, dass $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(A) = \mathtt{w}$ (siehe (a.1)). Es muss also Fall (ii) gelten, also $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(B) = \mathtt{w}$.

Dann gilt: wenn $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(A) = \mathtt{w}$, dann$\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(B) = \mathtt{w}$.

Da $\mathfrak{I}$ beliebig gewählt war, folgt:

$$\text{(a) für alle } \mathfrak{I}\text{: wenn } \mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(A) = \mathtt{w}, \text{ dann } \mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(B) = \mathtt{w}.$$

Das war zu zeigen.

Da wir gezeigt haben, dass (a) aus (b) folgt und (b) aus (a) folgt, gilt: A impliziert logisch B gdw $(A \rightarrow B)$ eine Tautologie ist. □

Bemerkung

Normalerweise würde ein Beweis einige Schritte auslassen, die als trivial betrachtet werden. Ich habe es hier jedoch vermieden, solche triviale Schritte auszulassen.

Nachstehend finden Sie einen kürzeren, aber ebenfalls akzeptabler Beweis. (In einer wissenschaftlichen Arbeit akzeptabel, aber vielleicht nicht in der Klausur.)

Satz: A impliziert logisch B gdw $(A \rightarrow B)$ eine Tautologie ist.

Beweis. Wir beweisen beide Seiten der Äquivalenz.

($\Rightarrow$) Angenommen, A impliziert logisch B. Das heißt, für alle $\mathfrak{I}$ gilt: Wenn $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(A) = \mathtt{w}$, dann $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(B) = \mathtt{w}$. In beiden Fällen (ob $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(A) = \mathtt{w}$ oder nicht) ist $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(A \rightarrow B) = \mathtt{w}$, also eine Tautologie.

($\Leftarrow$) Angenommen, $(A \rightarrow B)$ ist eine Tautologie, das heißt, dass $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(A) = \mathtt{f}$ oder $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(B) = \mathtt{w}$, für alle $\mathfrak{I}$ gilt. Folglich, wenn $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(A) = \mathtt{w}$ gilt, dann muss auch $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(B) = \mathtt{w}$ gelten. □

Lösung zu Übung 5.4.1. Was ist eine gültige Argumentform? Was ist ein gültiges Argument?

Antwort: Siehe Definition 13.

Lösung zu Übung 5.4.2. Welche der folgenden Behauptungen sind wahr und welche sind falsch?

1. Ein Argument, das eine falsche Konklusion hat, ist ungültig. falsch

Erklärung

‚$p \therefore p$' ist gültig auch wenn ‚p' falsch ist.

2. Ein Argument, das falsche Prämissen und eine wahre Konklusion hat, ist ungültig. falsch

Erklärung

‚$p \wedge \neg p \therefore p$' ist gültig auch wenn p wahr ist.

3. Ein Argument, das wahre Prämissen und eine falsche Konklusion hat, ist ungültig. wahr

Erklärung

Erinnern Sie sich, dass ein Argument ‚$A_1, \ldots, A_n \therefore B$' genau dann gültig ist, wenn der Implikationssatz ‚$A_1 \wedge \ldots \wedge A_n \rightarrow B$' eine Tautologie ist. Allerdings ist ‚$A_1 \wedge \ldots \wedge A_n \rightarrow B$' falsch, wenn ‚$A_1, \ldots, A_n$' wahr sind und B falsch.

4. Ein Argument, das lauter wahre Prämissen und eine wahre Konklusion hat, ist gültig. falsch

Erklärung

Das Argument ‚$p, q \therefore r$' ist ungültig, selbst wenn p, q und r alle wahr sind. Beispiel davon:

- Alle Menschen sind sterblich.
- Alle Tiere sind sterblich.

- $\therefore$ Hannes Leitgeb ist ein Logiker.

5. Jemand, der behauptet, daß ein bestimmter Schluß korrekt ist, kann durch ein einziges Gegenbeispiel widerlegt werden.

wahr

Erklärung

Das haben wir in den Fragen 5.4.1 und 5.4.2 gemacht. Machen wir es noch einmal:

Wenn jemand behauptet, dass das Argument ‚$p \to q, q \therefore p$' gültig ist, könnten wir das folgende Gegenbeispiel geben:

p: Es regnet.

q: Die Straße ist nass.

Obwohl es wahr ist, dass, wenn es regnet, die Straße nass ist (also ist ‚$p \to q$' wahr), ist manchmal die Straße nass (also ist ‚q' wahr), aber es hat nicht geregnet (also ist ‚p' falsch). Zum Beispiel könnte die Straße durch einen Wasserschlauch nass geworden sein.

6. Wenn ein gültiges Argument eine falsche Konklusion hat, dann sind alle seine Prämissen auch falsch. falsch

Erklärung

‚$p, q \therefore p$' ist gültig auch wenn p und q falsch sind.

Lösung zu Übung 5.4.3. Was ist die der Argumentform $A_1, \ldots, A_n \therefore B$ entsprechende Formel?

Antwort: $A_1 \wedge \ldots \wedge A_n \to B$

Beachten Sie, dass ‚$A_1, \ldots, A_n$' und ‚$A_1, \ldots, A_n \therefore B$' keine aussagenlogischen Formeln sind, sondern metasprachliche Ausdrücke. Aussagenlogische Formeln sind hingegen ‚$A_1 \wedge \ldots \wedge A_n$' und ‚$A_1 \wedge \ldots \wedge A_n \to B$'.

Lösung zu Übung 5.5.1. Überprüfen Sie die folgenden Argumentformen auf ihre Gültigkeit unter Verwendung der Wahrheitstafelmethode:

Bemerkung: Wir sagen hier nur, ob die Argumente gültig oder ungültig sind.

1. $p \wedge q \rightarrow r \wedge \neg s, r \rightarrow t, \neg t \wedge p \therefore \neg p$ ungültig
2. $p \wedge q \rightarrow r \wedge \neg s, r \rightarrow t, \neg t \wedge q \therefore p \rightarrow r \wedge \neg r$ gültig
3. $p \rightarrow (q \rightarrow r), r \rightarrow \neg s \wedge \neg t, \neg t \rightarrow \neg s \therefore p \rightarrow t$ ungültig
4. $\neg(q \vee (p \rightarrow r)), \neg r \rightarrow p \wedge \neg q \therefore \neg q \vee r \rightarrow s$ ungültig
5. $\neg(\neg p \vee (q \rightarrow \neg r)), r \rightarrow s \wedge t \therefore t \vee \neg q$ gültig
6. $p \wedge q \rightarrow r, q \vee \neg r \therefore p \rightarrow (q \rightarrow r) \wedge (r \rightarrow q)$ gültig
7. $\neg(\neg p \vee \neg q) \rightarrow r, r \wedge (p \wedge q) \rightarrow p \wedge s \therefore \neg(p \wedge q) \vee s$ gültig
8. $p \vee \neg p \rightarrow q, \neg(\neg r \vee \neg s), t \rightarrow p \wedge \neg p \therefore (q \wedge s) \wedge \neg t$ gültig
9. $p \vee q \therefore ((p \rightarrow q) \rightarrow q) \wedge (\neg q \rightarrow p)$ gültig

Lösung zu Übung 5.5.2. Das folgende Argument war in Übung 3.4.1 bereits durch eine Argumentform zu repräsentieren.[3]

3: **Repräsentation:** $p \therefore q \leftrightarrow q$.

> Der Papst ist Deutscher. Daher tritt Österreich am 1. Januar 2013 genau dann aus der EU aus, wenn Österreich dies tut.

(i) Überprüfen Sie, ob die nämliche Argumentform gültig ist.

Antwort: Sie ist gültig.

(ii) Entspricht das Ergebnis aus (i) Ihrer Intuition?

Bemerkung: Diese Antwort müssen Sie selbst überlegen.

Lösung zu Übung 5.5.3. Das folgende Argument war in Übung 3.4.2 bereits durch eine Argumentform zu repräsentieren.

> Bad Goisern ist die Hauptstadt von Oberösterreich und Bad Goisern ist nicht die Hauptstadt von Oberösterreich. Daher existiert Gott.

Repräsentation: $p \wedge \neg p \therefore q$.

(i) Überprüfen Sie, ob die nämliche Argumentform gültig ist.

Antwort: Sie ist gültig.

(ii) Ist dieses Argument ein Beweis für die Existenz Gottes?

Antwort: Nein, denn die Prämissen können nicht wahr sein.

5.3 Zusatzübungen

Zusatzübung 5.1. Stellen Sie mit Hilfe von Wahrheitstafeln fest, welche der folgenden Formeln tautologisch, kontradiktorisch bzw. kontingent sind.

1. $\neg((p \rightarrow q) \wedge p) \rightarrow \neg q$
2. $p \rightarrow (q \rightarrow p)$
3. $p \rightarrow (q \vee \neg q)$
4. $p \rightarrow \neg p$
5. $\neg p \rightarrow (p \rightarrow q)$
6. $(p \wedge \neg p) \rightarrow q$
7. $(p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow r)$
8. $\neg(p \rightarrow \neg p)$
9. $p \leftrightarrow \neg p$
10. $(p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow p)$

Zusatzübung 5.2. Stellen Sie mit Hilfe von Wahrheitstafeln fest, welche der folgenden Argumenten gültig sind.

1. $\neg((p \rightarrow q) \wedge p) \therefore \neg q$
2. $p \therefore (q \rightarrow p)$
3. $p \therefore (q \vee \neg q)$
4. $p \therefore \neg p$
5. $\neg p \therefore (p \rightarrow q)$
6. $(p \wedge \neg p) \therefore q$
7. $\therefore (p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow r)$
8. $\therefore \neg(p \rightarrow \neg p)$
9. $\therefore p \leftrightarrow \neg p$
10. $\therefore (p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow p)$

5.3.1 Lösungen

Lösung zu Zusatzübung 5.1.

1. $\neg((p \rightarrow q) \wedge p) \rightarrow \neg q$ — kontingent

p	q	$\neg$	$((p \rightarrow q)$	$\wedge\ p)$	$\rightarrow$	$\neg\ q$
w	w	f	w	w	w	f
w	f	w	f	f	w	w
f	w	w	w	f	f	f
f	f	w	w	f	w	w
		④	②	③	❺	①

2. $p \rightarrow (q \rightarrow p)$ — tautologisch
3. $p \rightarrow (q \vee \neg q)$ — tautologisch
4. $p \rightarrow \neg p$ — kontingent
5. $\neg p \rightarrow (p \rightarrow q)$ — tautologisch
6. $(p \wedge \neg p) \rightarrow q$ — tautologisch
7. $(p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow r)$ — tautologisch
8. $\neg(p \rightarrow \neg p)$ — kontingent
9. $p \leftrightarrow \neg p$ — kontradiktorisch
10. $(p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow p)$ — tautologisch

Lösung zu Zusatzübung 5.2.

1. $\neg((p \rightarrow q) \wedge p) \therefore \neg q$ — nicht gültig
2. $p \therefore (q \rightarrow p)$ — gültig
3. $p \therefore (q \vee \neg q)$ — gültig
4. $p \therefore \neg p$ — nicht gültig
5. $\neg p \therefore (p \rightarrow q)$ — gültig
6. $(p \wedge \neg p) \therefore q$ — gültig
7. $\therefore (p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow r)$ — gültig
8. $\therefore \neg(p \rightarrow \neg p)$ — nicht gültig
9. $\therefore p \leftrightarrow \neg p$ — nicht gültig
10. $\therefore (p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow p)$ — gültig

Aussagenlogisches Herleiten 6

6.1 Vorbereitung 89
6.2 Übungen 90
6.2.1 Lösungen 91
6.3 Zusatzübungen 98
6.3.1 Lösungen 99

6.1 Vorbereitung

In Übung 6.3 wird folgendes gefragt:

> Hier sind in der Prämisse Klammern verloren gegangen. Was könnte gemeint sein?

Also, es kann sinnvoll sein, die Formel ‚$p \land q \land r$' entweder als ‚$(p \land q) \land r$' oder als ‚$p \land (q \land r)$' zu interpretieren. Beide Formeln sind jedoch logisch äquivalent (dies kann durch eine Wahrheitstabelle oder eine Herleitung bestätigt werden). Daher ist es problemlos möglich, die Klammern wegzulassen. Die Herleitungen der Formeln erfolgen jedoch nicht auf exakt dieselbe Weise. Die Formel ‚$(p \land q) \land r$' kann wie in der letzten Übung bewiesen werden. Jetzt verwenden wir die Formel ‚$p \land (q \land r)$' als Prämisse.

Aktivierungselement 6.1. Beweisen Sie die folgende Schlüsse mit Hilfe einer Herleitung:

1. $(p \land q) \land r \vdash p \land (q \land r)$
2. $p \land (q \land r) \vdash (p \land q) \land r$
3. $\vdash ((p \land q) \land r) \leftrightarrow (p \land (q \land r))$

6.2 Übungen

Übung 6. Führen Sie die Herleitungen zu folgenden deduktiv gültigen Schlüssen durch.

1. $p \to q \lor (r \land s),\ t \to q \lor (r \land s) \vdash p \lor t \to q \lor (r \land s)$
2. $(p \land q) \land r \vdash r \lor s$
3. $p \land q \land r \vdash r \lor s$
4. $p \lor q,\ p \to r,\ \neg r \vdash q \lor s$
5. $(p \land q) \lor r,\ r \to \neg q,\ \neg\neg(q \land r) \vdash p$
6. $(p \land q) \land r,\ p \to \neg s,\ q \to \neg t \vdash \neg s \land \neg t$
7. $\neg p \land q,\ p \lor (r \to \neg q),\ \neg r \to \neg\neg(s \land t),\ \neg\neg t \lor r \vdash s \land t$
8. $p \lor (q \land \neg q) \vdash p$
9. $p \lor q,\ p \lor \neg q \vdash p$
10. $p \to q,\ p \to \neg q \vdash \neg p$
11. $p \to q \vdash \neg(p \land \neg q)$
12. $\neg p \lor \neg q \vdash \neg(p \land q)$
13. $p \to (q \to r) \vdash p \land q \to r$
14. $p \to q \vdash p \land r \to q \land r$
15. $p \to q,\ p \lor r \vdash q \lor r$
16. $p \to \neg p \vdash \neg p$
17. $p \land (q \lor r) \vdash (p \land q) \lor (p \land r)$
18. $\neg(p \lor q) \lor (s \to t),\ p \land s,\ t \to r \vdash r$

6.2.1 Lösungen

Lösung zu Übung 6. Führen Sie die Herleitungen zu folgenden deduktiv gültigen Schlüssen durch.

1. $p \rightarrow q \vee (r \wedge s),\ t \rightarrow q \vee (r \wedge s) \vdash p \vee t \rightarrow q \vee (r \wedge s)$

Antwort

1.	$p \rightarrow q \vee (r \wedge s)$	(P1)
2.	$t \rightarrow q \vee (r \wedge s)$	(P2)
3.	$\|\ p \vee t$	(KB-Annahme)
4.	$\|\ \|\ p$	(FU-Annahme 1)
5.	$\|\ \|\ q \vee (r \wedge s)$	1., 4. (MP)
6.	$\|\ \|\ \neg p$	(FU-Annahme 2)
7.	$\|\ \|\ t$	3., 6. (DS1)
8.	$\|\ \|\ q \vee (r \wedge s)$	2., 7. (MP)
9.	$\|\ q \vee (r \wedge s)$	4.–6. (FU)
10.	$p \vee t \rightarrow q \vee (r \wedge s)$	3.–9. (KB)

2. $(p \wedge q) \wedge r \vdash r \vee s$

Antwort

1.	$(p \wedge q) \wedge r$	(P1)
2.	r	1. (SIMP2)
3.	$r \vee s$	2. (ADD1)

3. $p \wedge q \wedge r \vdash r \vee s$

Antwort

1.	$p \wedge (q \wedge r)$	(P1)
2.	$q \wedge r$	1. (SIMP2)
3.	r	2. (SIMP2)
4.	$r \vee s$	3. (ADD1)

4. $p \lor q,\ p \to r,\ \neg r \vdash q \lor s$

Antwort

1.	$p \lor q$	(P1)
2.	$p \to r$	(P2)
3.	$\neg r$	(P3)
4.	$\neg p$	2., 3. (MT)
5.	q	1., 4. (DS1)
6.	$q \lor s$	5. (ADD1)

5. $(p \land q) \lor r,\ r \to \neg q,\ \neg\neg(q \land r) \vdash p$

Antwort

1.	$(p \land q) \lor r$	(P1)
2.	$r \to \neg q$	(P2)
3.	$\neg\neg(q \land r)$	(P3)
4.	$q \land r$	3. (DN2)
5.	r	4. (SIMP2)
6.	$\neg q$	2., 5. (MP)
7.	q	4. (SIMP1)
8.	p	6., 7. (ECQ)

6. $(p \land q) \land r,\ p \to \neg s,\ q \to \neg t \vdash \neg s \land \neg t$

Antwort

1.	$(p \land q) \land r$	(P1)
2.	$p \to \neg s$	(P2)
3.	$q \to \neg t$	(P3)
4.	$p \land q$	1. (SIMP1)
5.	p	4. (SIMP1)
6.	$\neg s$	2., 5. (MP)
7.	q	4. (SIMP2)
8.	$\neg t$	3., 7. (MPP)
9.	$\neg s \land \neg t$	6., 8. (KON)

7. $\neg p \wedge q,\ p \vee (r \rightarrow \neg q),\ \neg r \rightarrow \neg\neg(s \wedge t),\ \neg\neg t \vee r \vdash s \wedge t$

Frage: Mindestens eine Prämisse war in dieser Herleitung nicht notwendig. Welche?

Antwort

1.	$\neg p \wedge q$	(P1)
2.	$p \vee (r \rightarrow \neg q)$	(P2)
3.	$\neg r \rightarrow \neg\neg(s \wedge t)$	(P3)
4.	$\neg\neg t \vee r$	(P4)
5.	$\neg p$	1. (SIMP1)
6.	$r \rightarrow \neg q$	2., 5. (DS1)
7.	q	1. (SIMP2)
8.	$\neg\neg q$	7. (DN1)
9.	$\neg r$	6., 8. (MT)[1]
10.	$\neg\neg(s \wedge t)$	3., 9. (MP)
11.	$s \wedge t$	10. (DN2)

1: Dieser Schritt ist nicht direkt von 6., 7. erhältlich. Mann kann jedoch beweisen, dass $A \rightarrow \neg B, B \vdash \neg A$ für alle A und B gilt.

8. $p \vee (q \wedge \neg q) \vdash p$

Antwort

1.	$p \vee (q \wedge \neg q)$	(P1)
2.	$\|\| \ \neg p$	(IB-Annahme)
3.	$\|\| \ q \wedge \neg q$	1., 2. (DS1)
4.	p	2.–3. (IB)

9. $p \vee q,\ p \vee \neg q \vdash p$

Antwort

1.	$p \vee q$	(P1)
2.	$p \vee \neg q$	(P2)
3.	$\|\| \ \neg p$	(IB-Annahme)
4.	$\|\| \ q$	1., 3. (DS1)
5.	$\|\| \ \neg q$	2., 3. (DS1)
6.	$\|\| \ q \wedge \neg q$	4., 5. (KON)
7.	p	3.–6. (IB)

10. $p \rightarrow q, p \rightarrow \neg q \vdash \neg p$

Antwort

1.	$p \rightarrow q$	(P1)
2.	$p \rightarrow \neg q$	(P2)
3.	$\|\| \neg\neg p$	(IB-Annahme)
4.	$\|\| p$	3. (DN)
5.	$\|\| q$	1., 4. (MP)
6.	$\|\| \neg q$	2., 4. (MP)
7.	$\|\| q \wedge \neg q$	5., 6. (KON)
8.	$\neg p$	3.–7. (IB)

Inkorrekte Lösung

1.	$p \rightarrow q$	(P1)
2.	$p \rightarrow \neg q$	(P2)
3.	$\|\| p$	(IB-Annahme)[2]
4.	$\|\| q$	1., 3. (MP)
5.	$\|\| \neg q$	2., 3. (MP)
6.	$\|\| q \wedge \neg q$	4., 5. (KON)
7.	$\neg p$	3.–6. (IB)

2: Eine IB-Annahme ist eine negierte Formel. Man kann jedoch eine zusätzliche Regel definieren, die durch IB ersetzt wird, um diese Herleitung gültig zu machen. Können Sie versuchen, diese Regel zu definieren?

11. $p \rightarrow q \vdash \neg(p \wedge \neg q)$

Antwort

1.	$p \rightarrow q$	(P1)
2.	$\|\| \neg\neg(p \wedge \neg q)$	(IB-Annahme)
3.	$\|\| p \wedge \neg q$	2. (DN2)
4.	$\|\| p$	3. (SIMP1)
5.	$\|\| q$	1., 4. (MP)
6.	$\|\| \neg q$	3. (SIMP2)
7.	$\|\| q \wedge \neg q$	5., 6. (KON)
8.	$\neg(p \wedge \neg q)$	2.–7. (IB)

12. $\neg p \vee \neg q \vdash \neg(p \wedge q)$

Antwort

1.	$\neg p \vee \neg q$	(P1)
2.	$\|\| \ \neg\neg(p \wedge q)$	(IB-Annahme)
3.	$\|\| \ p \wedge q$	2. (DN2)
4.	$\|\| \ p$	3. (SIMP1)
5.	$\|\| \ \neg\neg p$	4. (DN1)
6.	$\|\| \ \neg q$	1., 5. (DS1)[3]
7.	$\|\| \ q$	3. (SIMP2)
8.	$\|\| \ q \wedge \neg q$	6., 7. (KON)
9.	$\neg(p \wedge q)$	2.–8. (IB)

3: Dieser Schritt ist nicht direkt von 1., 4. erhältlich.

13. $p \rightarrow (q \rightarrow r) \vdash p \wedge q \rightarrow r$

Antwort

1.	$p \rightarrow (q \rightarrow r)$	(P1)
2.	$\|\| \ p \wedge q$	(KB-Annahme)
3.	$\|\| \ p$	2. (SIMP1)
4.	$\|\| \ q \rightarrow r$	1., 3. (MP)
5.	$\|\| \ q$	2. (SIMP2)
6.	$\|\| \ r$	4., 5. (MP)
7.	$p \wedge q \rightarrow r$	2.–6. (KB)

14. $p \rightarrow q \vdash p \wedge r \rightarrow q \wedge r$

Antwort

1.	$p \rightarrow q$	(P1)
2.	$\|\| \ p \wedge r$	(KB-Annahme)
3.	$\|\| \ p$	2. (SIMP1)
4.	$\|\| \ q$	1., 3. (MP)
5.	$\|\| \ r$	2. (SIMP2)
6.	$\|\| \ q \wedge r$	4., 5. (KON)
7.	$p \wedge r \rightarrow q \wedge r$	2.–5. (KB)

15. $p \rightarrow q,\ p \vee r \vdash q \vee r$

Antwort

1.	$p \rightarrow q$	(P1)
2.	$p \vee r$	(P2)
3.	$\|\| \ r$	(FU-Annahme 1)
4.	$\|\| \ q \vee r$	3. (ADD2)
5.	$\|\| \ \neg r$	(FU-Annahme 2)
6.	$\|\| \ p$	2., 5. (DS2)
7.	$\|\| \ q$	1., 6. (MP)
8.	$\|\| \ q \vee r$	7. (ADD1)
9.	$q \vee r$	3.–8. (FU)

16. $p \rightarrow \neg p \vdash \neg p$

Antwort

1.	$p \rightarrow \neg p$	(P1)
2.	$\|\| \ \neg\neg p$	(IB-Annahme)
3.	$\|\| \ p$	2. (DN2)
4.	$\|\| \ \neg p$	1., 3. (MP)
5.	$\|\| \ p \wedge \neg p$	3., 4. (KON)
6.	$\neg p$	2.–5. (IB)

17. $p \wedge (q \vee r) \vdash (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

Antwort

1.	$\underline{p \wedge (q \vee r)}$	(P1)
2.	p	1. (SIMP1)
3.	$q \vee r$	1. (SIMP2)
4.	$\|\|\ q$	(FU-Annahme 1)
5.	$\|\|\ p \wedge q$	2., 4. (KONJ)
6.	$\|\|\ (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	5. (ADD1)
7.	$\|\|\ \neg q$	(FU-Annahme 2)
8.	$\|\|\ r$	3., 7. (DS1)
9.	$\|\|\ p \wedge r$	2., 8. (KON)
10.	$\|\|\ (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	9. (ADD2)
11.	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	4.–10. (FU)

18. $\neg(p \vee q) \vee (s \rightarrow t),\ p \wedge s,\ t \rightarrow r \vdash r$

Antwort

1.	$\neg(p \vee q) \vee (s \rightarrow t)$	(P1)
2.	$p \wedge s$	(P2)
3.	$\underline{t \rightarrow r}$	(P3)
4.	p	2. (SIMP1)
5.	$p \vee q$	4. (ADD1)
6.	$\neg\neg(p \vee q)$	5. (DN1)
7.	$s \rightarrow t$	1., 6. (DS1)
8.	s	2. (SIMP2)
9.	t	7., 8. (MP)
10.	r	3., 9. (MP)

6.3 Zusatzübungen

Zusatzübung 6.1. Versuchen Sie, alternative Herleitungen für die folgenden Schlüsse zu finden, die den unten stehenden Hinweisen folgen.

10. $p \to q, p \to \neg q \vdash \neg p$

    Hinweis: Mit FU in 7 Schritten herleiten.

12. $\neg p \vee \neg q \vdash \neg(p \wedge q)$

    Hinweis: Mit FU in 9 Schritten herleiten.

15. $p \to q,\ p \vee r \vdash q \vee r$

    Hinweis: Mit FU auf p in 9 Schritten herleiten.

16. $p \to \neg p \vdash \neg p$

    Hinweis: Mit IB in 5 Schritten herleiten.

17. $p \wedge (q \vee r) \vdash (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

    Hinweis: Mit FU auf r in 11 Schritten herleiten.

18. $\neg(p \vee q) \vee (s \to t),\ p \wedge s,\ t \to r \vdash r$

    Hinweis: Mit IB auf r in XX Schritten herleiten.

Zusatzübung 6.2. Führen Sie die Herleitungen zu folgenden deduktiv gültigen Schlüssen durch.

1. $p \to \neg q, q \vdash \neg p$
2. $p \vdash (q \to p)$
3. $\vdash p \to (q \to p)$
4. $p \vdash (q \vee \neg q)$
5. $\vdash p \to (q \vee \neg q)$
6. $\neg p \vdash (p \to q)$
7. $(p \wedge \neg p) \vdash q$
8. $\vdash (p \to q) \vee (q \to r)$
9. $\vdash (p \to q) \vee (q \to p)$
10. $\vdash ((p \wedge q) \to r) \leftrightarrow (p \to (q \to r))$

6.3.1 Lösungen

Lösung zu Zusatzübung 6.1. Versuchen Sie, alternative Herleitungen für die folgenden Schlüsse zu finden, die den unten stehenden Hinweisen folgen.

10. $p \to q, p \to \neg q \vdash \neg p$

Antwort

1.	$p \to q$	(P1)
2.	$p \to \neg q$	(P2)
3.	$\|\| \ p$	(FU-Annahme 1)
4.	$\|\| \ \neg q$	2., 3. (MP)
5.	$\|\| \ \neg p$	1., 4. (MT)
6.	$\|\| \ \neg p$	(FU-Annahme 2)[4]
7.	$\neg p$	3.–6. (FU)

4: Die Annahme ist bereits das Ziel!

12. $\neg p \vee \neg q \vdash \neg(p \wedge q)$

Antwort

1.	$\neg p \vee \neg q$	(P1)
2.	$\|\| \ p \wedge q$	(FU-Annahme 1)
3.	$\|\| \ p$	2. (SIMP1)
4.	$\|\| \ \neg\neg p$	3. (DN1)
5.	$\|\| \ \neg q$	1., 4. (MT)[5]
6.	$\|\| \ q$	2. (SIMP2)
7.	$\|\| \ \neg(p \wedge q)$	5., 6. (ECQ)
8.	$\|\| \ \neg(p \wedge q)$	(FU-Annahme 2)[6]
9.	$\neg(p \wedge q)$	2.–8. (IB)

5: Dieser Schritt ist nicht direkt von 1., 4. erhältlich.

6: Die Annahme ist bereits das Ziel!

15. $p \to q, p \vee r \vdash q \vee r$

Antwort

1.	$p \to q$	(P1)
2.	$p \vee r$	(P2)
3.	$\|\| \; p$	(FU-Annahme 1)
4.	$\|\| \; q$	1., 3. (MP)
5.	$\|\| \; q \vee r$	4. (ADD1)
6.	$\|\| \; \neg p$	(FU-Annahme 2)
7.	$\|\| \; r$	2., 6. (DS1)
8.	$\|\| \; q \vee r$	7. (ADD2)
9.	$q \vee r$	3.–8. (FU)

16. $p \to \neg p \vdash \neg p$

Antwort

1.	$p \to \neg p$	(P1)
2.	$\|\| \; \neg\neg p$	(IB-Annahme)
3.	$\|\| \; \neg p$	1., 2. (MT)
4.	$\|\| \; \neg p \wedge \neg\neg p$	2., 3. (KON)[7]
5.	$\neg p$	2.–4. (IB)

7: $A \wedge \neg A$ wird hergeleitet, mit $A := \neg p$.

17. $p \wedge (q \vee r) \vdash (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

Antwort

1.	$\underline{p \wedge (q \vee r)}$	(P1)
2.	p	1. (SIMP1)
3.	$q \vee r$	1. (SIMP2)
4.	$\|\| \ r$	(FU-Annahme 1)
5.	$\|\| \ p \wedge r$	2., 4. (KON)
6.	$\|\| \ (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	5. (ADD2)
7.	$\|\| \ \neg r$	(FU-Annahme 2)
8.	$\|\| \ q$	3., 7. (DS2)
9.	$\|\| \ p \wedge q$	2., 8. (KONJ)
10.	$\|\| \ (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	9. (ADD1)
11.	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	4.–10. (FU)

18. $\neg(p \vee q) \vee (s \rightarrow t),\ p \wedge s,\ t \rightarrow r \vdash r$

Ausstehend

Lösung zu Zusatzübung 6.2. Führen Sie die Herleitungen zu folgenden deduktiv gültigen Schlüssen durch.

[Ausstehend.]

1. $p \rightarrow \neg q, q \vdash \neg p$

Ausstehend

2. $p \vdash (q \rightarrow p)$

Ausstehend

3. $\vdash p \rightarrow (q \rightarrow p)$

Ausstehend

4. $p \vdash (q \vee \neg q)$

Ausstehend

5. $\vdash p \rightarrow (q \vee \neg q)$

Ausstehend

6. $\neg p \vdash (p \rightarrow q)$

Ausstehend

7. $(p \wedge \neg p) \vdash q$

Ausstehend

8. $\vdash (p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow r)$

Ausstehend

9. $\vdash (p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow p)$

Ausstehend

10. $\vdash ((p \wedge q) \rightarrow r) \leftrightarrow (p \rightarrow (q \rightarrow r))$

Ausstehend

8 Prädikatenlogische Analyse und Repräsentierung

8.1 Vorbereitung 105
8.1.1 Das logische Quadrat 105
8.1.2 Aktivierungselemente (aus den Kapiteln 1-3) 107
8.1.3 Lösungen 110
8.2 Übungen 119
8.2.1 Lösungen 121

8.1 Vorbereitung

8.1.1 Das logische Quadrat

Die Übung 8.2 wird leichter, wenn wir die logische Form der kategorischen Sätze verstehen:

A**:** alle S sind P (universell affirmativ);

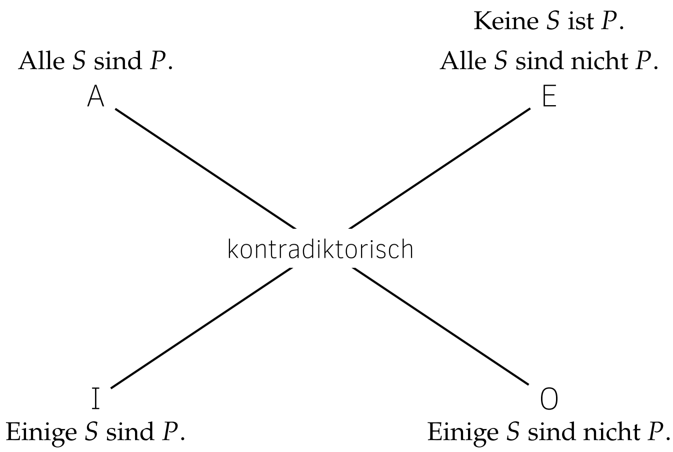
E**:** keine S ist P oder alle S sind nicht P (universell negativ);

I**:** einige S sind P (partikulär affirmativ); und

O**:** einige S sind nicht P (partikulär negativ).

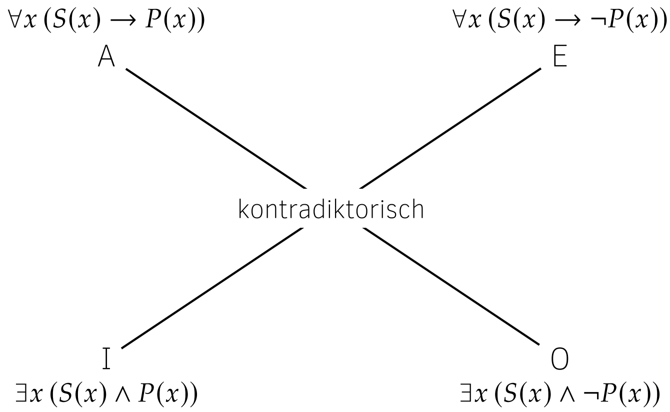
Sätze des Typs A und O sind gegenseitig kontradiktorisch, was bedeutet, dass ein Satz vom Typ A logisch äquivalent zur Negation eines Satzes vom Typ O ist – vorausgesetzt, S und P bezeichnen in den obigen Formeln die gleiche Eigenschaften. Dasselbe gilt für Sätze des Typs E und I.

Diese Beziehungen werden im folgenden logischen Quadrat dargestellt:



Bemerkung: Man kann andere Beziehungen (Kontrarität, Subkontrarität, Subalternität, usw.) zwischen den anderen Typen kategorischer Sätze herstellen, allerdings unter der Annahme, dass es mindestens ein x gibt, sodass $S(x)$. Das könnte jedoch zu Verwirrung führen, weshalb werden diese Beziehungen hier nicht erklärt.

In der Prädikatenlogik werden die Sätze dieses Quadrats wie folgt repräsentiert:



Frage: Warum wird ‚einige S sind P‘ als ‚$\exists x\,(S(x) \wedge P(x))$‘ und nicht als ‚$\exists x\,(S(x) \rightarrow P(x))$‘ repräsentiert?

Antwort

‚Einige S sind P‘ wird als ‚$\exists x\,(S(x) \wedge P(x))$‘ und nicht als ‚$\exists x\,(S(x) \rightarrow P(x))$‘ repräsentiert, weil ‚$S(a) \rightarrow P(a)$‘ logisch ‚$\neg S(a) \vee P(a)$‘ bedeutet.

Diese letzte Ausdruck ist wahr, wenn $\neg S(a)$ oder $P(a)$ (oder beide). Folglich kann ‚$\exists x\,(S(x) \wedge P(x))$‘ wahr sein, wenn es ein x gibt (z.B. a), das nicht S ist.

Die Bedeutung von ‚einige S sind P‘ ist jedoch, dass es mindestens ein x gibt, das sowohl S als auch P ist. Daher ist die richtige Darstellung ‚$\exists x\,(S(x) \wedge P(x))$‘, da diese ausdrückt, dass es mindestens ein x gibt, das beide Eigenschaften erfüllt.

Frage an Sie: Warum wird ‚alle S sind P‘ als ‚$\forall x\,(S(x) \rightarrow P(x))$‘ und nicht als ‚$\forall x\,(S(x) \wedge P(x))$‘ repräsentiert?

8.1.2 Aktivierungselemente (aus den Kapiteln 1-3)

Schauen wir uns noch einmal einige Sätze aus den Kapiteln 1 bis 3 an, die in der Prädikatenlogik komplexer repräsentiert werden können als in der Aussagenlogik.

Aktivierungselement 8.1 (Aus Übung 1.4)**.** Repräsentieren Sie die folgenden natürsprachlichen Aussagesatze in der prädikatenlogischen Sprache:

1. Herbert und Heidi sind befreundet.
2. Herbert und Heidi sind beliebt.
3. Herbert und Heidi sind beide nicht glücklich.
4. Herbert und Heidi lieben sich.
5. Herbert und Heidi lieben einander.
6. Es ist nicht der Fall, dass Herbert und Heidi beide nicht glücklich sind.
8. Wenn Herbert in die Stadt gefahren ist, so sitzt er sicherlich bereits in seinem Büro.
13. Thales von Milet, ein ionischer Naturphilosoph, sagte die Sonnenfinsternis vom 28. März 585 v. Chr. voraus.
21. Kleine Lügen und auch kleine
Kinder haben kurze Beine.
(Ringelnatz)[1]
23. Wer in Wasser badet, kann nass werden.
24. Der April macht, was er will.
28. Dieses Lied gefällt mir besonders gut.
29. ’s echt cool, eh?

1: Falls der Satz wörtlich interpretiert wird.

Aktivierungselement 8.2 (aus Übung 2.4)**.** Repräsentieren Sie die folgenden natürsprachlichen Aussagesatze in der prädikatenlogischen Sprache:

1. Heute regnet es in Salzburg.
3. Wenn es in Salzburg nicht regnet, dann hagelt's, stürmt's oder schneit's.
5. Das englische Wort ‚mind' kann nicht ins Deutsche übersetzt werden.
9. Der Österreicher ist eigentlich ein Freund fremder Kulturen, auch wenn er nicht zu viele Ausländer in seiner Heimat sehen möchte.
10. Sir Karl Popper und Theodor W. Adorno sind beide Philosophen, aber sie können einander nicht besonders gut leiden.
11. Zum Mittagessen gibt es Wiener Schnitzel mit Salat, Schweinsbraten mit Knödel oder Kasnocken.
12. Einige bedeutende Österreicher stammen aus Böhmen oder Mähren.
13. Nächstes Jahr kommt der Präsident der USA nach Österreich.
15. Tirol ist in einen nördlichen, einen südlichen und einen östlichen Teil aufgeteilt.
16. Jeder Junggeselle ist männlich und unverheiratet, ohne dabei gleich ein Priester zu sein.
17. Alle Studenten lernen Logik, obgleich nicht alle Studenten dies mit Begeisterung tun.
18. Wenn das mit der Politik so weiter geht, dann werden sich Situationen wiederholen, die wir uns alle nicht wünschen.

Aktivierungselement 8.3 (aus Übung 2.5)**.** Repräsentieren Sie die folgenden Argumente in der prädikatenlogischen Sprache:

1. Wenn Fips eine Katze ist, dann jagt Fips gerne Mause. Fips jagt aber nicht gerne Mause. Somit ist Fips keine Katze.
2. Wenn Fips eine Katze ist, dann trinkt Fips gerne Milch. Fips ist eine Katze. Folglich trinkt Fips gerne Milch.
3. Wenn Fips eine Katze ist, dann trinkt Fips gerne Milch. Fips trinkt gerne Milch. Folglich ist Fips eine Katze.
4. Fips ist eine Katze. Denn: Wenn Fips eine Katze ist, dann trinkt Fips gerne Milch. Fips trinkt gerne Milch.
5. Also ist Fips eine Katze oder er ist keine Katze.
6. Sokrates ist Philosoph und Grieche. Platon ist Philosoph und Grieche. Aristoteles ist Philosoph und Grieche. Daher sind alle Philosophen Griechen.

8.1.3 Lösungen

Im Folgenden bezeichnet ‚h_1' Herbert und ‚h_2' Heidi. Die Bedeutungen der anderen Buchstaben werden mit Bemerkungen erklärt oder im Kontext verstanden.

Lösung zu Aktivierungselement 8.1.

1. Herbert und Heidi sind befreundet.

Antwort 1: aussagenlogisch unzerlegbar, einfach

Zwischenformalisation: Befreundet(Herbert, Heidi)

Aussagenlogische Formalisation: p

Prädikatlogische Formalisation: $B(h_1, h_2)$

‚$B(x_1, x_2)$' bedeutet x_1 befreundet x_2.

Antwort 2: aus. zerlegbar, komplex

Zwisch. Freund(Herbert, Heidi) $\wedge$ Freund(Heidi, Herbert)

Aus. Repr. $p \wedge q$

Präd. Repr. $F(h_1, h_2) \wedge F(h_2, h_1)$

‚$F(x_1, x_2)$' bedeutet x_1 ist Freund von x_2.

2. Herbert und Heidi sind beliebt.

Antwort: aus. zerlegbar, komplex

Zwisch. Beliebt(Herbert) $\wedge$ Beliebt(Heidi)

Aus. Repr. $p \wedge q$

Präd. Repr. $B(h_1) \wedge B(h_2)$

‚$B(x)$' bedeutet x ist beliebt.

3. Herbert und Heidi sind beide nicht glücklich.

Antwort 1: aus. zerlegbar, komplex

Falls ‚beide' als ‚zusammen' verstanden wird.

Zwisch. $\neg$Glücklich(Herbert, Heidi)

Aus. Repr. $\neg p$

Präd. Repr. $\neg G(h_1, h_2)$

‚$G(x, y)$' bedeutet x und y sind glücklich zusammen.

Antwort 2: aus. zerlegbar, komplex

Falls ‚beide' nicht als ‚zusammen' verstanden wird.

Zwisch. $\neg$(Glücklich(Herbert) $\wedge$ Glücklich(Heidi))

Aus. Repr. $\neg(p \wedge q)$

Präd. Repr. $\neg(G(h_1) \wedge G(h_2))$

‚$G(x)$' bedeutet x ist glücklich.

4. Herbert und Heidi lieben sich.

Antwort 1: aus. zerlegbar, komplex

Falls ‚sich' eine reflexive Bedeutung hat.

Zwisch. Liebt(Herbert, Herbert) ∧ Liebt(Heidi, Heidi)

Aus. Repr. $p \wedge q$

Präd. Repr. $L(h_1, h_1) \wedge L(h_2, h_2)$

‚$L(x, y)$' bedeutet x liebt y. Daher bedeutet $L(x, x)$: ‚x liebt sich selbst'.

Antwort 2: aus. zerlegbar, komplex

Falls ‚sich' eine nicht-reflexive Bedeutung hat: wie Satz 5.

5. Herbert und Heidi lieben einander.

Antwort: aus. zerlegbar, komplex

Falls wir das Prädikat ‚L' aus der letzten Übung verwenden wollen.

Zwisch. Liebt(Herbert, Heidi) ∧ Liebt(Heidi, Herbert)

Aus. Repr. $p \wedge q$

Präd. Repr. $L(h_1, h_2) \wedge L(h_2, h_1)$

Antwort: aus. unzerlegbar, einfach

Falls wir ein Prädikat für ‚einander lieben' einführen wollen.

Zwisch. Einander_Lieben(Herbert,Heidi)

Aus. Repr. p

Präd. Repr. $E(h_1, h_2)$

‚$E(x, y)$' bedeutet x und y lieben einander.

6. Es ist nicht der Fall, dass Herbert und Heidi beide nicht glücklich sind.

Antwort: aus. zerlegbar, komplex

Falls ‚beide' als ‚zusammen' verstanden wird.

Zwisch. ¬¬Glücklich(Herbert, Heidi)

Aus. Repr. $\neg\neg p$

Präd. Repr. $\neg\neg G(h_1, h_2)$

Antwort: aus. zerlegbar, komplex

Falls ‚beide' nicht als ‚zusammen' verstanden wird.

Zwisch. ¬¬(Glücklich(Herbert) ∧ Glücklich(Heidi))

Aus. Repr. $\neg\neg(p \land q)$

Präd. Repr. $\neg\neg(G(h_1) \land G(h_2))$

8. Wenn Herbert in die Stadt gefahren ist, so sitzt er sicherlich bereits in seinem Büro.

Antwort: aus. zerlegbar, komplex

Zwisch. Gefahren(Herbert, die Stadt) ⟶ Sitzt(Herbert, Büro)

Aus. Repr. $p \longrightarrow q$

Präd. Repr. $G(h_1, s) \longrightarrow S(h_1, b)$

‚$G(x, y)$' bedeutet x ist in y gefahren. ‚$S(x, y)$' bedeutet x sitzt in y.

13. Thales von Milet, ein ionischer Naturphilosoph, sagte die Sonnenfinsternis vom 28. März 585 v. Chr. voraus.

Antwort: aus. zerlegbar, komplex

Zwisch. Ionischer(Thales) ∧ Naturphilosoph(Thales) ∧ Voraussagte(Thales, die Sonnenfinsternis vom 28. März 585 v. Chr.)

Aus. Repr. $p \land q \land r$ – d.h., $(p \land q) \land r$ und $p \land (q \land r)$

Präd. Repr. $I(t) \land N(t) \land V(t, s)$

‚$I(x)$' bedeutet x ist ionischer. ‚$N(x)$' bedeutet x ist ein Naturphilosoph. ‚$V(x, y)$' bedeutet x sagte y voraus.

21. Kleine Lügen und auch kleine
Kinder haben kurze Beine.
(Ringelnatz)

Antwort 1: aus. zerlegbar, komplex

Zwisch. Für alle x (Klein_Kind(x) ⟶ Kleine_Beine(x)) ∧ Für alle x (Kleine_Lüge(x) ⟶ Kleine_Beine(x))

Aus. Repr. $p \land q$

Präd. Repr. $\forall x\,(J(x) \longrightarrow B(x)) \land \forall x\,(L(x) \longrightarrow B(x))$

Antwort 2: aus. zerlegbar, komplex

Zwisch. Für alle x (Klein_Kind(x) $\vee$ Kleine_Lüge(x) $\rightarrow$ Kleine_Beine(x))

Aus. Repr. $p \wedge q$

Präd. Repr. $\forall x\,(J(x) \vee L(x) \rightarrow B(x))$

‚$J(x)$ bedeutet x ist ein klein Kind.' ‚$B(x)$' bedeutet x hat kleine Beine. ‚$L(x)$ bedeutet x ist eine kleine Lüge.'

Antwort 3: aus. unzerlegbar, komplex

Zwisch. Für alle x (Klein(x) $\wedge$ (Kind(x) $\vee$ Lüge(x)) $\rightarrow$ für alle y (Beine_von(y, x) $\rightarrow$ Klein(y)))

Aus. Repr. p

Präd. Repr. $\forall x\,(K(x) \wedge (J(x) \vee L(x)) \rightarrow \forall y\,(B(y,x) \rightarrow K(y)))$

‚$K(x)$' bedeutet x ist klein. ‚$J(x)$' bedeutet x ist ein Kind. ‚$L(x)$' bedeutet x ist eine Lüge. ‚$B(x,y)$' bedeutet x ist Bein von y.

23. Wer in Wasser badet, kann nass werden.

Antwort: aus. unzerlegbar, komplex

Zwisch. Für alle x (Badet(x, Wasser) $\rightarrow$ $\Diamond$Nass_Werden(x))

Aus. Repr. p

Präd. Repr. $\forall x\,(B(x,w) \rightarrow M(x))$

‚$B(x,y)$' bedeutet x badet in y. ‚$M(x)$' bedeutet x kann nass werden. ‚w' bezeichnet Wasser.

24. Der April macht, was er will.

Antwort: aus. unzerlegbar, komplex

Falls der Satz in dem Sinne interpretiert wird, dass sich das Klima im April unvorhersehbar verhält.

Zwisch. Für alle x (Klima_von(x, April) $\rightarrow$ Unvorhersehbar(x))

Aus. Repr. p

Präd. Repr. $\forall x\,(K(x,a) \rightarrow U(x))$

‚$K(x,y)$' bedeutet x ist das Klima von y. ‚$U(x)$' bedeutet x ist unvorhersehbar. ‚a' bezeichnet April.

28. Dieses Lied gefällt mir besonders gut.

Antwort: aus. unzerlegbar, einfach

Zwisch. Gefällt(mir, dieses Lied)

Aus. Repr. p

Präd. Repr. $G(m,l)$

‚$G(x,y)$' bedeutet x mag y. ‚m' bezeichnet den Sprecher. ‚m' bezeichnet ein Lied (auf das im Kontext Bezug genommen wird)

29. ’s echt cool, eh?

Antwort 1: aus. unzerlegbar, einfach

Zwisch. Echt_Cool(es)

Aus. Repr. p

Präd. Repr. $C(e)$

‚$C(x)$‘ bedeutet x ist cool. ‚e‘ bezeichnet das, worüber wir im Kontext sprechen.

Antwort 2: kein Aussagesatz

Falls es im Kontext nicht klar ist, was ‚es‘ ist.

Zwisch. Echt_Cool(es)

Aus. Repr. p

Präd. Repr. $C(x)$

Erklärung

Im natürlichen Sprachgebrauch entsprechen Sätze wie diese – vorausgesetzt, wir wissen nicht, worauf sich ‚es‘ im Kontext bezieht – am ehesten der Bedeutung einer offenen Formel.

Lösung zu Aktivierungselement 8.2.

1. Heute regnet es in Salzburg.

Antwort: aus. unzerlegbar, einfach

Zwisch. Regnet(Salzburg, heute)

Auss. Repr. p

Präd. Repr. $R(s, h)$

‚$R(x, y)$‘ bedeutet es regnet an Ort x zum Zeitpunkt y. ‚s‘ und ‚h‘ bezeichnen Salzburg bzw. heute.

3. Wenn es in Salzburg nicht regnet, dann hagelt’s, stürmt’s oder schneit’s.

Antwort: aus. unzerlegbar, komplex

Zwisch. Für alle y (¬Regnet(Salzburg, y) $\longrightarrow$ Hagelt(Salzburg, y) $\vee$ Stürmt(Salzburg, y) $\vee$ Schneit(Salzburg, y))

Auss. Repr. p

Präd. Repr. $\forall y\,(\neg R(s, y) \to H(s, y) \vee S(s, y) \vee C(s, y))$

‚$H(x, y)$‘, ‚$S(x, y)$‘ und ‚$C(x, y)$‘ bedeuten, dass es am Ort x zur Zeit y hagelt bzw. stürmt bzw. schneit.

5. Das englische Wort ‚mind' kann nicht ins Deutsche übersetzt werden.

Antwort 1: aus. zerlegbar, komplex

Zwisch. ¬Übersetzbar_aus_ins(‚mind', Englisch, Deutsch)

Auss. Repr. $\neg p$

Präd. Repr. $\neg B(m, e, d)$

Antwort 2: aus. zerlegbar, komplex

Zwisch. ¬(Es gibt ein x Übersetzung_aus_von_ins(x, ‚mind', Englisch, Deutsch))

Auss. Repr. $\neg p$

Präd. Repr. $\neg\exists x\, U(x, m, e, d)$

‚$B(x, y, z)$' bedeutet x ist übersetzbar von y ins z. ‚$U(x_1, x_2, x_3, x_4)$' bedeutet, dass x_1 eine Übersetzung des Wortes x_2 aus dem x_3 ins x_4 ist. ‚m' bezeichnet das Wort ‚mind', während ‚e' und ‚d' die englische und die deutsche Sprache bezeichnen.

9. Der Österreicher ist eigentlich ein Freund fremder Kulturen, auch wenn er nicht zu viele Ausländer in seiner Heimat sehen möchte.

Antwort: aus. unzerlegbar, einfach

Zwisch. Für alle x (Österreicher(x) $\rightarrow$ für alle y (Kultur(y) $\wedge$ Fremd (y) $\rightarrow$ Freund_von(x, y)) $\wedge$ für die meisten y (Ausländer(y) $\wedge\neg$Möchte_in(x, y, Heimat)))

Auss. Repr. p

Präd. Repr. $\forall x\,(O(x) \rightarrow \forall y\,(K(y) \wedge R(y) \rightarrow F(x, y)) \wedge \exists y\,(A(y) \wedge \neg M(x, y, h)))$

Bemerkung

Anstatt ‚$\exists y\,(A(y) \wedge \neg M(x, y, h))$' wäre es korrekter gewesen,

$$‚\mathbb{W} y\,(A(y) \wedge \neg M(x, y, h))'$$

zu sagen, wobei ‚$\mathbb{W}$' ein Quantor ist, dessen Bedeutung ‚für die meisten y' lautet. In der Prädikatenlogik gibt es diesen Quantor jedoch nicht.

10. Sir Karl Popper und Theodor W. Adorno sind beide Philosophen, aber sie können einander nicht besonders gut leiden.

Antwort: aus. zerlegbar, komplex

Zwisch. Philosoph(Popper) ∧ Philosoph(Adorno) ∧¬Leiden_besonders_gut(Popper, Adorno)

Auss. Repr. $p \wedge q \wedge \neg r$ – d.h., $(p \wedge q \wedge) \neg r$ oder $p \wedge (q \wedge \neg r)$

Präd. Repr. $P(p) \wedge P(a) \wedge \neg L(p, a)$

11. Zum Mittagessen gibt es Wiener Schnitzel mit Salat, Schweinsbraten mit Knödel oder Kasnocken.

Antwort: aus. zerlegbar, komplex

Zwisch. Zum_Mittagessen(Wiener Schnitzel mit Salat) ∨ Zum_Mittagessen(Schweinsbraten mit Knödel) ∨ Zum_Mittagessen(Kasnocken)

Auss. Repr. $p \vee q \vee r$ – d.h., $(p \vee q) \vee r$ oder $p \vee (q \vee r)$

Präd. Repr. $M(w) \vee M(s) \vee M(k)$

12. Einige bedeutende Österreicher stammen aus Böhmen oder Mähren.

Antwort: aus. unzerlegbar, komplex

Zwisch. Es gibt zumindest ein x, sodass (Österreicher(x) ∧ Bedeutender(x) ∧ (Stammt_aus(x, Böhmen) ∨ Stammt_aus(x, Mähren)))

Auss. Repr. p

Präd. Repr. $\exists x\, (O(x) \wedge B(x) \wedge (S(x, b) \vee S(x, m)))$

13. Nächstes Jahr kommt der Präsident der USA nach Österreich.

Antwort: aus. unzerlegbar, einfach

Zwisch. Kommt_nach(Präsident der USA, Österreich, nächstes Jahr)

Auss. Repr. p

Präd. Repr. $K(p, o, n)$

15. Tirol ist in einen nördlichen, einen südlichen und einen östlichen Teil aufgeteilt.

    Antwort: aus. unzerlegbar, einfach

    Zwisch. Aufgeteilt_in(Tirol, nördlichen Teil, südlichen Teil, östlichen Teil)

    Auss. Repr. p

    Präd. Repr. $A(t, n, s, o)$

16. Jeder Junggeselle ist männlich und unverheiratet, ohne dabei gleich ein Priester zu sein.

    Antwort: aus. unzerlegbar, komplex

    Zwisch. Für alle x (Junggeselle(x) $\rightarrow$ Männlich(x) $\wedge\neg$Verheiratet(x) $\wedge$ $\neg$Priester(x))

    Auss. Repr. p

    Präd. Repr. $\forall x\ (J(x) \rightarrow M(x) \wedge \neg V(x) \wedge \neg P(x))$

17. Alle Studenten lernen Logik, obgleich nicht alle Studenten dies mit Begeisterung tun.

    Antwort: aus. zerlegbar, komplex

    Zwisch. Für alle x (Student(x) $\rightarrow$ Lernt(x, Logik)) $\wedge$ $\neg$(Für alle x (Student(x) $\rightarrow$ Lernt_mit(x, Logik, Begeisterung)))

    Auss. Repr. $p \wedge \neg q$

    Präd. Repr. $\forall x\ (S(x) \rightarrow L(x, l)) \wedge \neg\forall x\ (S(x) \rightarrow M(x, l, b))$

18. Wenn das mit der Politik so weiter geht, dann werden sich Situationen wiederholen, die wir uns alle nicht wünschen.

    Antwort: aus. zerlegbar, komplex

    Zwisch. Weiter_gehen(Politik) $\rightarrow$ Es gibt zumindest ein x, sodass (Situation(x) $\wedge$ Wiederholt(x) $\wedge$ $\neg$Für alle y Wünscht(y, x))

    Auss. Repr. $p \rightarrow q$

    Präd. Repr. $G(p) \rightarrow \exists x\, (S(x) \wedge W(x) \wedge \neg\forall y\, H(y, x))$

Lösung zu Aktivierungselement 8.3. Im Folgenden bedeutet ‚$K(x)$', dass x eine Katze ist, ‚$J(x, y)$', dass x gerne y jagt, und ‚$T(x, y)$', dass x gerne y trinkt. ‚m' bezeichnet Mäuse oder Milch, entsprechend ‚f' bezeichnet Fips und ‚m' bezeichnet Milch.

1. Wenn Fips eine Katze ist, dann jagt Fips gerne Mause. Fips jagt aber nicht gerne Mause. Somit ist Fips keine Katze.

   Bem.: Dies entspricht der Regel des Modus Tollens.

   Antwort: $K(f) \rightarrow J(f, m), \neg J(f, m) \therefore \neg K(f)$

2. Wenn Fips eine Katze ist, dann trinkt Fips gerne Milch. Fips ist eine Katze. Folglich trinkt Fips gerne Milch.

   Bem.: Dies entspricht der Regel des Modus Ponens.

   Antwort: $K(f) \rightarrow T(f, m), K(f) \therefore T(f, m)$

3. Wenn Fips eine Katze ist, dann trinkt Fips gerne Milch. Fips trinkt gerne Milch. Folglich ist Fips eine Katze.

   Bem.: Dies ist die (ungültige) Argumentform des Modus Morons.

   Antwort: $K(f) \rightarrow T(f, m), T(f, m) \therefore K(f)$

4. Fips ist eine Katze. Denn: Wenn Fips eine Katze ist, dann trinkt Fips gerne Milch. Fips trinkt gerne Milch.

   Bem.: Die Konklusion des Arguments wird gleich zu Beginn genannt.

   Antwort: Wie im Satz 3.

5. Also ist Fips eine Katze oder er ist keine Katze.

   Bem.: Dies ist ein Argument ohne Prämissen.

   Antwort: $\therefore K(f) \vee \neg K(f)$

6. Sokrates ist Philosoph und Grieche. Platon ist Philosoph und Grieche. Aristoteles ist Philosoph und Grieche. Daher sind alle Philosophen Griechen.

   Bem.: Dies könnte ein induktiv gültiges Argument sein, wenn es viel mehr Prämissen in der Form von ‚$P(x) \wedge G(x)$' hätte.

   Antwort: $P(s) \wedge G(s), P(p) \wedge G(p), P(a) \wedge G(a)$
   $\therefore \forall x\,(P(x) \rightarrow G(x))$

8.2 Übungen

Übung 8.1.1. Erklären Sie, was eine atomare Formel der prädikatenlogischen Sprache ist!

Übung 8.1.2. Repräsentieren Sie die folgenden natürsprachlichen Aussagesatze in der prädikatenlogischen Sprache:

1. Anatol ist Gerber.
2. Anatol liebt Barbara.
3. Anatol geht mit Barbara von Drösselkirchen nach Cronberg.
4. Anatol und Barbara gehen von Cronberg nach Drösselkirchen.
5. Anatol arbeitet mit Barbara in Cronberg.

Übung 8.2.1. Welche Quantoren gibt es in der prädikatenlogischen Sprache, und was bedeuten sie?

Übung 8.2.2. Wie werden im allgemeinen Existenzsatze, welche mehr als einen generellen Term enthalten, repräsentiert?

Übung 8.2.3. Wie werden im allgemeinen Allsätze, welche mehr als einen generellen Term enthalten, repräsentiert?

Übung 8.2.4. Repräsentieren Sie die folgenden natürsprachlichen Aussagesatze in der prädikatenlogischen Sprache:

1. Es gibt keinen Gerber in Cronberg.
2. Alle Bürger in Drösselkirchen sind unzufrieden.
3. Alle Bürger in Drösselkirchen jubeln, aber manche Bürger in Cronberg sind verärgert.
4. Alle Österreicher sind keine Philosophen.
5. Alle Österreicher sind nicht keine Philosophen.
6. Nicht alle Österreicher sind keine Philosophen.
7. Es gibt Österreicher, die Philosophen sind.
8. Es gibt Österreicher, die keine Philosophen sind.
9. Es ist nicht der Fall, da es Österreicher gibt, die Philosophen sind.
10. Es ist keineswegs so, da manche Österreicher keine Philosophen sind.

11. Alle Salzbürger sind Österreicher und Europäer.
12. So mancher Oberösterreicher lebt in Salzburg.
13. Jeder Mensch hat eine Mutter und einen Vater, aber nicht jeder Mensch hat Kinder.
14. Es gibt ein Wesen, welches alle Dinge erschaffen hat.
15. Manche Menschen besitzen ein Auto.
16. Alle Deutschen beneiden sämtliche Bundestagsabgeordnete.

8.2.1 Lösungen

Lösung zu Übung 8.1.1. Erklären Sie, was eine atomare Formel der prädikatenlogischen Sprache ist!

Antwort: Siehe S. 198.

Lösung zu Übung 8.1.2. Repräsentieren Sie die folgenden natürsprachlichen Aussagesatze in der prädikatenlogischen Sprache:

1. Anatol ist Gerber.

Antwort: $G^1(a)$

‚$G^1(x)$' bedeutet x ist Gerber.

2. Anatol liebt Barbara.

Antwort: $L^2(a, b)$

‚$L^2(x, y)$' bedeutet x liebt y.

3. Anatol geht mit Barbara von Drösselkirchen nach Cronberg.

Antwort: $G^4(a, b, d, c)$

‚$G^4(x_1, x_2, x_3, x_4)$' bedeutet x_1 geht mit x_2 von x_3 nach x_4.

4. Anatol und Barbara gehen von Cronberg nach Drösselkirchen.

Antwort 1

Falls ‚x und y gehen' als ‚x und y zusammengehen' verstanden wird: wie im 3. Falls nicht, siehe Antwort 2.

Antwort 2: $G^3(a, d, c) \wedge G^3(b, d, c)$

‚$G^3(x, y, z)$' bedeutet x geht von y nach z.

5. Anatol arbeitet mit Barbara in Cronberg.

Antwort: $A^3(a, b, c)$

‚$A^3(x, y, z)$' bedeutet x arbeitet mit y in z.

Bemerkung

Man kann die Superindizes auch weglassen.

Lösung zu Übung 8.2.1. Welche Quantoren gibt es in der prädikatenlogischen Sprache, und was bedeuten sie?

Antwort: Existenz- und Allquantoren, d.h., $\exists$ und $\forall$.

Lösung zu Übung 8.2.2. Wie werden im allgemeinen Existenzsatze, welche mehr als einen generellen Term enthalten, repräsentiert?

Antwort: Siehe SS. 201–2.

Lösung zu Übung 8.2.3. Wie werden im allgemeinen Allsätze, welche mehr als einen generellen Term enthalten, repräsentiert?

Antwort: Siehe SS. 204–6.

Lösung zu Übung 8.2.4. Repräsentieren Sie die folgenden natürsprachlichen Aussagesatze in der prädikatenlogischen Sprache:

1. Es gibt keinen Gerber in Cronberg.

Antwort: $\neg\exists x\,(G(x) \wedge C(x))$

Negierter I-Satz mit $S := G$ und $P := C$. Logisch äquivalent zu einem E-Satz – auch mit $S := G$ und $P := C$.

2. Alle Bürger in Drösselkirchen sind unzufrieden.

‚$B(x, y)$' bedeutet x ist Bürger in y.
‚$Z(x)$' bedeutet x ist zufrieden.

Antwort: $\forall x\,(B(x, d) \rightarrow \neg Z(x))$

E-Satz mit $S(x) := B(x, d)$ und $P := Z$.

3. Alle Bürger in Drösselkirchen jubeln, aber manche Bürger in Cronberg sind verärgert.

Antwort: $\forall x\,(B(x,d) \rightarrow J(x)) \wedge \exists x\,(B(x,c) \wedge V(x))$

Konjunktion eines A-Satz – mit $S(x) := B(x,d)$ und $P := J$ – und eines I-Satz – mit $S(x) := B(x,c)$ und $P := V$.

4. Alle Österreicher sind keine Philosophen.

Antwort: $\forall x\,(O(x) \rightarrow \neg P(x))$

E-Satz mit $S := O$ (und $P := P$).

5. Alle Österreicher sind nicht keine Philosophen.

Antwort: $\forall x\,(O(x) \rightarrow \neg\neg P(x))$

Wie ein E-Satz, aber mit $S := O$ und $P := \neg P$. Logisch äquivalent zu einem A-Satz mit $S := O$ und $P := P$.

6. Nicht alle Österreicher sind keine Philosophen.

Antwort: $\neg\forall x\,(O(x) \rightarrow \neg P(x))$

Negierter E-Satz mit $S := O$. Logisch äquivalent zu einem I-Satz.

7. Es gibt Österreicher, die Philosophen sind.

Antwort: $\exists x\,(O(x) \wedge P(x))$

I-Satz mit $S := O$.

8. Es gibt Österreicher, die keine Philosophen sind.

Antwort: $\exists x\,(O(x) \wedge \neg P(x))$

O-Satz mit $S := O$.

9. Es ist nicht der Fall, da es Österreicher gibt, die Philosophen sind.

Antwort: $\neg\exists x\,(O(x) \wedge P(x))$
Negierter I-Satz mit $S := O$. Logisch äquivalent zu einem E-Satz.

10. Es ist keineswegs so, da manche Österreicher keine Philosophen sind.

Antwort: $\neg\exists x\,(O(x) \wedge \neg P(x))$
Negierter O-Satz mit $S := O$. Logisch äquivalent zu einem A-Satz.

11. Alle Salzbürger sind Österreicher und Europäer.

Antwort: $\forall x\,(S(x) \rightarrow O(x) \wedge E(x))$
A-Satz mit $P(x) := O(x) \wedge E(x)$.

12. So mancher Oberösterreicher lebt in Salzburg.

Antwort: $\exists x\,(O(x) \wedge L(x,s))$
I-Satz mit $S := O$ und $P(x) := L(x,s)$

,$S(x)$' bedeutet x ist ein Mensch.
,$M(x,y)$' bedeutet x ist Mutter von y.
,$V(x,y)$' bedeutet x ist Vater von y.
,$K(x,y)$' bedeutet x ist Kinder von y.

13. Jeder Mensch hat eine Mutter und einen Vater, aber nicht jeder Mensch hat Kinder.

Antwort: $\forall x\,(S(x) \rightarrow \exists y\,\exists z\,(M(y,x) \wedge V(z,x)))$ $\wedge\neg\forall x\,(S(x) \rightarrow \exists y\,K(y,x))$
Konjunktion eines A-Satzes – mit $P(x) := \exists y\,\exists z\,(M(y,x) \wedge V(z,x))$ – und eines quantifizierten Satzes – der nicht als A-, E-, I- oder O-Satz klassifiziert werden kann.

14. Es gibt ein Wesen, welches alle Dinge erschaffen hat.

Antwort 1: $\exists x\,(W(x) \land \forall y\,(D(y) \rightarrow E(x,y)))$

I-Satz mit $S := W$ und $P := \forall y\,(D(y) \rightarrow E(x,y))$.

Beachten Sie, dass P hier die Form eines A-Satzes hat – mit $S := D$ und $P(y) := E(x,y)$. Dies ist folglich ein A-Satz innerhalb eines I-Satzes.

‚$W(x)$' bedeutet x ist ein Wessen.
‚$D(x)$' bedeutet x ist ein Ding.
‚$E(x,y)$' bedeutet x hat y erschaffen.

Antwort 2: $\exists x\,\forall y\,E(x,y)$

‚D' und ‚W' bezeichnen Eigenschaften, die vermutlich alle Gegenstände haben.

15. Manche Menschen besitzen ein Auto.

‚$M(x)$' bedeutet x ist ein Mensch.
‚$A(x)$' bedeutet x ist ein Auto.
‚$B(x,y)$' bedeutet x besitzt y.

Antwort: $\exists x\,(M(x) \land \exists y\,(A(y) \land B(x,y)))$

I-Satz mit $S := M$ und $P := \exists y\,(A(y) \land B(x,y))$.

Beachten Sie, dass P hier die Form eines I-Satzes hat – mit $S := A$ und $P(y) := B(x,y)$. Dies ist folglich ein I-Satz innerhalb eines I-Satzes.

16. Alle Deutschen beneiden sämtliche Bundestagsabgeordnete.

‚$D(x)$' bedeutet x ist Deutsch.
‚$B(x)$' bedeutet x ist ein Bundestagsabgeordnete.
‚$E(x,y)$' bedeutet x beneidet y.

Antwort: $\forall x\,(D(x) \rightarrow \forall y\,(B(y) \rightarrow E(x,y)))$

A-Satz mit $S := D$ und $P := \forall y\,(B(y) \rightarrow E(x,y))$.

Beachten Sie, dass P hier die Form eines A-Satzes hat – mit $S := B$ und $P(y) := E(x,y)$. Dies ist folglich ein A-Satz innerhalb eines A-Satzes.

Die prädikatenlogische Sprache 9

9.1 Übungen

9.1 Übungen 127
9.1.1 Lösungen 129

Übung 9.1.1. Beschreiben Sie das Alphabet der prädikatenlogischen Sprache!

Übung 9.1.2. Was ist ein singulärer Term?

Übung 9.1.3. Was ist eine prädikatenlogische Formel?

Übung 9.1.4. Was heißt es, daß eine Individuenvariable in einer Formel frei vorkommt, und was heißt es, daß eine Individuenvariable in einer Formel gebunden vorkommt?

Übung 9.1.5. Was ist die Reichweite oder der Bereich eines Vorkommnisses eines Quantorausdrucks?

Übung 9.1.6. Welche Vorkommnisse von Individuenvariablen in den folgenden Formeln sind frei, welche Vorkommnisse sind gebunden?

Übung 9.2.1. Was heißt es, daß eine Formel offen ist, und was heißt es, daß eine Formel geschlossen ist?

Übung 9.2.2. Welche der folgenden Zeichenreihen sind prädikatenlogische Formeln, welche der Formeln sind offen und welche sind geschlossen?

Übung 9.3. Die folgenden Formeln sind etwas *ungeschickte* Formulierungen: ihre syntaktische Form suggeriert bestimmte inhaltliche Zusammenhänge, die, wenn man die Formeln genau unter die Lupe nimmt, gar nicht bestehen.

Z.B. sind $M(x)$ und $\exists x\, V(x, x)$ in der ersten Formel durch einen Implikationspfeil verbunden, obwohl sie gar nicht inhaltlich zusammenhängen (der Allquantor bindet zwar x in $M(x)$, aber nicht in $\exists x\, V(x, x)$).

Versuchen Sie den intuitiven Gehalt der folgenden Formeln syntaktisch besser, d.h. transparenter, auszudrücken, ohne dabei gleichzeitig den Inhalt der Formeln zu verändern!

1. $\forall x\, (M(x) \rightarrow \exists x\, V(x, x))$
2. $\forall x\, P(a)$
3. $\exists x\, (Q(x) \wedge \forall x\, R(x, a))$
4. $\forall y\, \forall x\, (\forall y\, P(x) \rightarrow \forall x\, P(y))$

Übung 9.4. (a) Führen Sie die folgenden Substitutionen durch und (b) stellen Sie fest, bei welchen dieser Substitutionen der singuläre Term t für eine nämliche Variable in einer Formel eingesetzt wird, sodass t frei für diese Variable in dieser Formel ist:

1. $A[x_1] : \exists x_1\, (R(x_1, a_3) \wedge P(x_1))$, $t : x_2$
2. $A[x_1] : \exists x_1\, (R(x_1, a_3) \wedge P(x_1))$, $t : a_1$
3. $A[x_1] : \exists x_1\, (R(x_1, a_3) \wedge P(x_1))$, $t : x_1$
4. $A[x_1] : \exists x_1\, R(x_1, a_3) \wedge P(x_1)$, $t : x_2$
5. $A[x_1] : \exists x_1\, R(x_1, a_3) \wedge P(x_1)$, $t : a_1$
6. $A[x_1] : \exists x_1\, R(x_1, a_3) \wedge P(x_1)$, $t : x_1$
7. $A[x_1] : \exists x_1\, \exists x_4\, (R(x_4, x_2) \vee P(x_1))$, $t : x_2$
8. $A[x_2] : \exists x_1\, \exists x_4\, (R(x_4, x_2) \vee P(x_1))$, $t : x_1$
9. $A[x_2] : \exists x_1\, \exists x_4\, (R(x_4, x_2) \vee P(x_1))$, $t : x_4$
10. $A[x_2] : \exists x_1\, \exists x_4\, (R(x_4, x_2) \vee P(x_1))$, $t : x_3$

9.1.1 Lösungen

Lösung zu Übung 9.1.1. Beschreiben Sie das Alphabet der prädikatenlogischen Sprache!

Hinweis: Siehe Anfang von Abschnitt 9.1.

Lösung zu Übung 9.1.2. Was ist ein singulärer Term?

Hinweis: Siehe S. 224 und Übung 9.1.6.

Lösung zu Übung 9.1.3. Was ist eine prädikatenlogische Formel?

Hinweis: Siehe Def. 16.

Lösung zu Übung 9.1.4. Was heißt es, daß eine Individuenvariable in einer Formel frei vorkommt, und was heißt es, daß eine Individuenvariable in einer Formel gebunden vorkommt?

Hinweis: Siehe S. 231.

Lösung zu Übung 9.1.5. Was ist die Reichweite oder der Bereich eines Vorkommnisses eines Quantorausdrucks?

Antwort: Die Definition im Skript lautet:

Die Reichweite (bzw. der Bereich oder Skopus) eines Vorkommnisses eines Quantorausdrucks $\exists v$ oder $\forall v$ in einer prädikatenlogischen Formel A ist dasjenige Vorkommnis einer Teilformel von A, das auf das Quantorausdruckvorkommnis folgt. (S. 232.)

$$\forall x\, \overbrace{(P(x) \wedge Q(y))}^{\text{Reichweite}} \wedge \underbrace{S(x,b)}_{\text{keine Reichweite}} \tag{9.1}$$

$$\forall x\, \overbrace{\exists y\, \underbrace{(P(x,y) \rightarrow Q(y))}}\tag{9.2}$$

Lösung zu Übung 9.1.6. Welche Vorkommnisse von Individuenvariablen in den folgenden Formeln sind frei, welche Vorkommnisse sind gebunden?

Antwort: Wir färben die freien Vorkommnisse einer Variablen rot ein. Wir färben die gebundenen Vorkommnisse einer Variablen zusammen mit ihrem verbindenden Quantor in anderen Farben ein.

1. $P(a_2)$

   Erklärung: Keine Individuenvariablen in dieser Formel.

2. $\forall x_1 \, (R(x_1, a_1) \rightarrow P(x_1))$

   Erklärung: Beide Vorkommnisse von ‚x_1' sind gebunden.

3. $\forall x_1 \, (R(x_1, x_3) \rightarrow P(x_1))$
4. $\exists x_3 \, (P(x_1) \wedge \forall x_2 \, R(x_3, x_2))$
5. $\forall x_5 \, (P(x_5) \rightarrow \exists x_2 \, (R(x_2, x_5) \wedge \forall x_1 \, S(x_2, x_1)))$
6. $\exists x_1 \, (P(x_1) \wedge R(a_7, x_1)) \wedge S(a_8, x_1)$

   Erklärung: Die erste und zweite Vorkommnisse von ‚x_1' sind durch das einzige Vorkommnis von ‚$\exists x_1$' gebunden. Das dritte Vorkommnis hingegen ist frei – es liegt nicht in der Reichweite des einzigen Vorkommnisses von ‚$\exists x_1$'.

Lösung zu Übung 9.2.1. Was heißt es, daß eine Formel offen ist, und was heißt es, daß eine Formel geschlossen ist?

Hinweis: Siehe S. 232.

Lösung zu Übung 9.2.2. Welche der folgenden Zeichenreihen sind prädikatenlogische Formeln, welche der Formeln sind offen und welche sind geschlossen?

1. $(R(a_1, a_3) \wedge \exists x_1 \, P(x_1))$

   Antwort: geschlossene prädikatenlogische Formel

2. $\exists x_1 \, (R(x_1, a_3) \wedge P(x_1))$

   Antwort: geschlossene präd. Formel

3. $\exists x_1 \, (R(x_1, a_3) \wedge P(x_2))$

   Antwort: offene präd. Formel

4. $\exists x_1 \, (R(x_1, a_3) \wedge \forall x_2 \, P(x_2))$

   Antwort: geschlossene präd. Formel

5. $\exists x_1 \, \forall x_2 \, \exists x_4 \, (R(x_4, x_2) \vee P(x_1))$

   Antwort: geschlossene präd. Formel

6. $\forall x_5 \, R(a_1, a_5)$

   Bem.: Keine Individuenvariablen in dieser Formel.

   Antwort: geschlossene präd. Formel

7. $\forall x_5 \, R(a_1, x_5)$

   Antwort: geschlossene präd. Formel

8. $\forall x_5 \, (R(a_1, x_5) \longrightarrow \exists x_3 \, P(x_3))$

   Antwort: geschlossene präd. Formel

9. $P(x_1) \wedge p$

   Bem.: Da ‚p' eine aussagenlogische Variable ist, handelt es sich bei dieser Formel weder um eine prädikatenlogische noch um eine aussagenlogische Formel.

   Antwort: keine präd. Formel

10. $P(x_1) \land \forall x_1\, P(x_1)$

Antwort: offene präd. Formel

Bem.: Ein Quantor muss von einer Variablen gefolgt werden.

11. $\exists\, \forall x_2\, R(x_2, a_{47355})$

Antwort: keine präd. Formel

12. $\forall x_{18}\, P^7(x_{18}, x_{18}, x_{18}, x_{18}, x_{18}, x_{18}, x_{18})$

Antwort: geschlossene präd. Formel

Bem.: ‚P^9' ist ein 9-stelliger Prädikat, aber die Formel hat nur 8 Terme.

13. $\forall x_{24}\, P^9(x_{24}, x_{24}, x_{24}, x_{24}, x_{24}, x_{24}, x_{24}, x_{24})$

Antwort: keine präd. Formel

14. $\exists x_1 \neg\forall x_2\, (P(x_1) \rightarrow Q(x_2))$

Antwort: geschlossene präd. Formel

15. $\exists x_1 \neg\neg(\forall x_2\, (P(x_1) \rightarrow Q(x_2)))$

Antwort: keine präd. Formel

16. $\forall x_3\, \exists x_3\, R(x_3, x_4)$

Antwort: offene präd. Formel

Bem.: Es gibt keine Regeln für die Klammerung von atomaren Formeln.

17. $\neg\forall x_1\, (P(x_1))$

Antwort: keine präd. Formel

Bem.: Man braucht eine schließende Klammer zwischen dem zweiten Vorkommnis von ‚x_2' und dem einzigen Vorkommnis von ‚$\rightarrow$'.

18. $\exists x_5\, (P(x_5) \land \forall x_2\, (Q(x_2 \rightarrow P(a_8)))$

Antwort: keine präd. Formel

Lösung zu Übung 9.3. Versuchen Sie den intuitiven Gehalt der folgenden Formeln syntaktisch besser, d.h. transparenter, auszudrücken, ohne dabei gleichzeitig den Inhalt der Formeln zu verändern!

1. $\forall x\,(M(x) \rightarrow \exists x\, V(x,x))$

   Antwort: $\exists x\, M(x) \rightarrow \exists x\, V(x,x)$

Bem.: Man kann die logische Äquivalenz der beiden Sätze beweisen.

2. $\forall x\, P(a)$

   Antwort: $P(a)$

3. $\exists x\,(Q(x) \wedge \forall x\, R(x,a))$

   Antwort: $\exists x\, Q(x) \wedge \forall x\, R(x,a)$

4. $\forall y\, \forall x\,(\forall y\, P(x) \rightarrow \forall x\, P(y))$

   Antwort: Es gibt einige interessante Optionen.

   - $\forall y\, \forall x\,(P(x) \rightarrow P(y))$
   - $\exists x\, P(x) \rightarrow \forall y\, P(y)$
   - $\neg\exists x\, P(x) \vee \forall y\, P(y)$
   - $\forall x\, \neg P(x) \vee \forall y\, P(y)$
   - $\forall x\, \neg P(x) \vee \forall x\, P(x)$

Erklärung

Bezüglich der Formeln 1 und 4: Um die Äquivalenzen zwischen den ursprünglichen Formeln und den entsprechenden Lösungsformeln zu beweisen, benötigen wir die Äquivalenz zwischen $A \rightarrow B$ und $\neg A \vee B$ sowie die Äquivalenz zwischen $\forall x\, \neg A$ und $\neg\exists x\, A$, die wir später noch lernen werden.

Lösung zu Übung 9.4. (a) Führen Sie die folgenden Substitutionen durch und **(b) stellen Sie fest, bei welchen dieser Substitutionen der singuläre Term t für eine nämliche Variable in einer Formel eingesetzt wird, sodass t frei für diese Variable in dieser Formel ist**:

1. $A[x_1] : \exists x_1 \,(R(x_1, a_3) \wedge P(x_1))$, $\quad t : x_2$

Antwort

a) $A[x_2/x_1] : A[x_1]$

Erkl. Es ist keine Substitution möglich, da alle Vorkommnisse von ‚x_1' gebunden sind.

b) x_2 ist frei für x_1 in $A[x_1]$

Erkl. Wenn ein Term t nicht in der Formel A vorkommt, dann ist t für alle v in A frei.

2. $A[x_1] : \exists x_1 \,(R(x_1, a_3) \wedge P(x_1))$, $\quad t : a_1$

Antwort

a) $A[a_1/x_1] : A[x_1]$

Erkl. Wie in 1a.

b) a_2 ist frei für x_1 in $A[x_1]$ – da a_2 eine Individuenkonstante ist.

3. $A[x_1] : \exists x_1 \,(R(x_1, a_3) \wedge P(x_1))$, $\quad t : x_1$

Antwort

a) $A[x_1/x_1] : A[x_1]$

Erkl. Wie in 1a, aber auch, weil $A[x/x] = A[x]$ für alle x gilt.

b) x_1 ist frei für x_1 in $A[x_1]$.

4. $A[x_1] : \exists x_1 \, R(x_1, a_3) \wedge P(x_1)$, $\quad t : x_2$

Antwort

a) $A[x_2/x_1] : \exists x_1 \, R(x_1, a_3) \wedge P(x_2)$

Erkl. Nur das zweite Vorkommnis von ‚x_1' kann substituiert werden, da das erste gebunden ist.

b) x_2 ist frei für x_1 in $A[x_1]$.

5. $A[x_1] : \exists x_1\, R(x_1, a_3) \wedge P(x_1)$, $\quad t : a_1$

Antwort

a) $A[a_1/x_1] : \exists x_1\, R(x_1, a_3) \wedge P(a_1)$

b) a_1 ist frei für x_1 in $A[x_1]$.

6. $A[x_1] : \exists x_1\, R(x_1, a_3) \wedge P(x_1)$, $\quad t : x_1$

Antwort

a) $A[x_1/x_1] : A[x_1]$

b) x_1 ist frei für x_1 in $A[x_1]$.

7. $A[x_1] : \exists x_1\, \exists x_4\, (R(x_4, x_2) \vee P(x_1))$, $\quad t : x_2$

Antwort

a) $A[x_2/x_1] : A[x_1]$

Erkl. Wie in 1a.

b) x_2 ist frei für x_1 in $A[x_1]$.

8. $A[x_2] : \exists x_1\, \exists x_4\, (R(x_4, x_2) \vee P(x_1))$, $\quad t : x_1$

Antwort

a) $A[x_1/x_2] : \exists x_1\, \exists x_4\, (R(x_4, x_1) \vee P(x_1))$

Bem.: Durch die Substitution wurde x_2 zu x_1 und ist daher gebunden.

b) x_1 ist nicht frei für x_2 in $A[x_2]$.

Bem.: Daher ist diese Substitution keine *gute Substitution* (siehe S. 237).

9. $A[x_2] : \exists x_1\, \exists x_4\, (R(x_4, x_2) \vee P(x_1))$, $\quad t : x_4$

Antwort

a) $A[x_4/x_2] : \exists x_1\, \exists x_4\, (R(x_4, x_4) \vee P(x_1))$

Bem.: Durch die Substitution wurde x_2 zu x_4 und ist daher gebunden.

b) x_4 ist nicht frei für x_2 in $A[x_2]$.

Bem.: Daher ist diese Substitution keine *gute Substitution* (siehe S. 237).

10. $A[x_2] : \exists x_1 \exists x_4 (R(x_4, x_2) \vee P(x_1))$, $\quad t : x_3$

Antwort

a) $A[x_3/x_2] : \exists x_1 \exists x_4 (R(x_4, x_3) \vee P(x_1))$

b) x_3 ist frei für x_2 in $A[x_2]$.

Die prädikatenlogische Semantik 10

10.1 Vorbereitung . . . 137
10.1.1 Sonderfall 1: Atomare Formeln mit individuellen Konstanten und einstelligen Prädikaten 137
10.1.2 Variablenbelegungen 139
10.1.3 Sonderfall 2: Atomare Formeln mit einstelligen Prädikaten 140
10.1.4 Sonderfall 3: Atomare Formeln mit zweistelligen Prädikaten 142
10.1.5 Sonderfall 4: Molekulare Formeln ohne Quantoren . 144
10.1.6 Varianten von Belegungen 146
10.1.7 Sonderfall 5: Quantifizierte Formeln . 147
10.1.8 Beweise für Wahrheit und Falschheit unter $\mathfrak{I}$ 150
10.1.9 Beweise für logische Wahrheit und logische Falschheit 152
10.1.10 Lösungen zu Aktivierungselemente 154
10.2 Übungen 159
10.2.1 Lösungen 163

10.1 Vorbereitung

Betrachten wir Definition 19.1, das heißt die Wahrheitsbedingungen für atomare Formeln der Prädikatenlogik:

$$\varphi_\sigma(P^n(t_1, \ldots, t_n)) = \mathtt{w} \text{ gdw } \langle \varphi_\sigma(t_1), \ldots, \varphi_\sigma(t_n) \rangle \in \varphi(P^n). \tag{19.1}$$

Da $\varphi_\sigma(A) \neq \mathtt{w}$ gdw $\varphi_\sigma(A) = \mathtt{f}$, gilt es äquivalent:

$$\varphi_\sigma(P^n(t_1, \ldots, t_n)) = \mathtt{f} \text{ gdw } \langle \varphi_\sigma(t_1), \ldots, \varphi_\sigma(t_n) \rangle \notin \varphi(P^n). \tag{19.1′}$$

Gehen wir die Definition Schritt für Schritt durch. Dazu werden wir einige Sonderfälle dieser Definition betrachten und einige Formeln unter der folgenden Interpretation analysieren:

Interpretation: $\mathfrak{I} = \langle \mathbf{D}, \varphi \rangle$

$$\begin{aligned}
\mathbf{D} &= \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}, \\
\varphi(a) = 1, \quad \varphi(b) &= 2, \quad \varphi(c) = 3, \quad \varphi(d) = 4, \quad \varphi(e) = 5, \\
\varphi(O) &= \{d \in \mathbf{D} \mid d \text{ ist ungerade}\} = \{1, 3, 5, \ldots\}, \\
\varphi(E) &= \{d \in \mathbf{D} \mid d \text{ ist gerade}\} = \{2, 4, 6, \ldots\}, \\
\varphi(H) &= \{d \in \mathbf{D} \mid d \text{ ist ein Mensch}\} = \{\}, \\
\varphi(G) &= \{\langle d_1, d_2 \rangle \in \mathbf{D}^2 \mid d_1 \text{ ist größer als } d_2\}, \\
\varphi(L) &= \{\langle d_1, d_2 \rangle \in \mathbf{D}^2 \mid d_1 \text{ ist kleiner als } d_2\}, \\
\varphi(D) &= \{\langle d_1, d_2 \rangle \in \mathbf{D}^2 \mid d_1 \text{ ist durch } d_2 \text{ teilbar}\}.
\end{aligned}$$

10.1.1 Sonderfall 1: Atomare Formeln mit individuellen Konstanten und einstelligen Prädikaten

Hier spielen die Variablenbelegungen σ keine Rolle, da es keine individuellen Variablen gibt. Der Grund hierfür ist, dass für jede individuelle Konstante t, jede Interpretation $\mathfrak{I} = \langle \mathbf{D}, \varphi \rangle$ sowie jede Variablenbelegung σ gilt:

$$\varphi_\sigma(t) = \varphi(t).$$

Somit reduziert sich Definition 19.1 auf:

$$\varphi_\sigma(P(t)) = \mathtt{w} \quad \text{gdw} \quad \langle \varphi(t) \rangle \in \varphi(P), \tag{19.1a}$$

wobei t eine individuelle Konstante ist.

Das 1-Tupel $\langle \varphi(t) \rangle$ ist im Wesentlichen gleichbedeutend mit dem Gegenstand $\varphi(t)$. Somit kann die rechte Seite der Definition 19.1a auch folgendermaßen interpretiert werden:

$$\varphi_\sigma(P(t)) = \mathtt{w} \quad \text{gdw} \quad \varphi(t) \in \varphi(P).$$

Lassen Sie uns die Wahrheitswerte der Formeln $O(a)$ und $E(a)$ unter $\mathfrak{I}$ und σ_i (wobei $i \in \{1, \ldots, 5\}$, d.h. $\sigma_1, \ldots, \sigma_5$) bestimmen.

Zunächst analysieren wir $O(a)$. Gemäß Definition 19.1 gilt:

$$\varphi_\sigma(O(a)) = \mathtt{w} \quad \text{gdw} \quad \varphi(a) \in \varphi(O).$$

Ersetzen wir nun $\varphi(a)$ und $\varphi(O)$ durch ihre konkreten Werte:

$$\varphi_\sigma(O(a)) = \mathtt{w} \quad \text{gdw} \quad 1 \in \{d \in \mathbf{D} \mid d \text{ ist ungerade}\}.$$

Dies bedeutet, dass $\varphi_\sigma(O(a))$ wahr ist, wenn 1 eine ungerade Zahl ist – was zutrifft. Daher gilt $\varphi_\sigma(O(a)) = \mathtt{w}$ für alle σ – d.h., auch für $\sigma_1, \ldots, \sigma_5$.

Die obige Erklärung lässt sich auch anhand des folgenden Schemas veranschaulichen.

$$\underline{1 \text{ ist ungerade}^{1}}$$
$$\underline{1 \in \{d \in \mathbf{D} \mid d \text{ ist ungerade}\}^{2}}$$
$$\underline{1 \in \varphi(O)^{3}}$$
$$\underline{\varphi(a) \in \varphi(O)^{4}}$$
$$\underline{\varphi_\sigma(a) \in \varphi(O)^{5}}$$
$$\varphi_\sigma(O(a)) = \mathtt{w}^{6}$$

1: Tatsache

2: Tatsache in mengentheoretische Sprache

3: Wir ersetzen: $\varphi(O) = \{d \in \mathbf{D} \mid d \text{ ist ungerade}\}$

4: Wir ersetzen: $\varphi(a) = 1$

5: Wir ersetzen: $\varphi(a) = \varphi_\sigma(a)$

6: Def. 19.1.

Nun wenden wir uns zu $E(a)$. Siehe das folgende Schema:

$$\underline{1 \text{ ist } \textit{nicht} \text{ gerade}^{7}}$$
$$\underline{1 \notin \{d \in \mathbf{D} \mid d \text{ ist gerade}\}^{8}}$$
$$\underline{1 \notin \varphi(E)^{9}}$$
$$\underline{\varphi(a) \notin \varphi(E)^{10}}$$
$$\underline{\varphi_\sigma(a) \notin \varphi(E)^{11}}$$
$$\varphi_\sigma(E(a)) = \mathtt{w}^{12}$$

7: Tatsache

8: Tatsache in mengentheoretische Sprache

9: Wir ersetzen: $\varphi(E) = \{d \in \mathbf{D} \mid d \text{ ist gerade}\}$

10: $\varphi(a) = 1$

11: $\varphi(a) = \varphi_\sigma(a)$

12: Def. 19.1.

Aktivierungselement 10.1. Bestimmen Sie, ob die folgenden Formeln unter $\mathfrak{I}$ (und beliebige σ) wahr oder falsch sind.

1. $O(b)$ 2. $E(b)$ 3. $O(c)$ 4. $E(d)$

10.1.2 Variablenbelegungen

Sei $\mathfrak{I} = \langle \mathbf{D}, \varphi \rangle$ eine Interpretation. Eine *Variablenbelegung* σ von $\mathfrak{I}$ ist eine Funktion, die jeder Variablen v unserer Sprache genau ein $d \in \mathbf{D}$ zuordnet, sodass $\varphi_\sigma(v) = \sigma(v) = d$ gilt.

Man kann sich das wie eine Fußballmannschaft vorstellen:

- Die Positionen auf dem Spielfeld (Torwart, Verteidiger, Mittelfeld, Stürmer) entsprechen den Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_{11}$.
- Die Spieler entsprechen den Elementen der Domäne $\mathbf{D}$.
- Eine konkrete Belegung σ legt fest, welcher Spieler auf welcher Position eingesetzt wird.

Zum Beispiel: Wenn $\mathbf{D}$ die Spieler der argentinischen Mannschaft von 2022 enthält, könnte eine Belegung σ_1 wie folgt aussehen:

$$\begin{aligned}\sigma_1 = {} & Dibu,\ Molina,\ Romero,\ Otamendi,\ Tagliafico,\\ & Mac\ Allister,\ \textit{Fernández},\ De\ Paul,\ Messi,\\ & Alvarez,\ \textit{Di María}, \ldots\end{aligned}$$

Also, in dieser Belegung haben wir:

$$\sigma_1(x_1) = Dibu,\ \ \sigma_1(x_2) = Molina,\ \ \ldots,\ \ \sigma_1(x_{11}) = \textit{Di María},\ \ \ldots$$

Hier sind die Positionen (Variablen) mit bestimmten Spielern (Elementen der Domäne) besetzt.[13]

13: Die Variablen $x_{12}, x_{13}, \ldots$ sollten ebenfalls durch σ_1 bezeichnet werden. In unserer Fußballanalogie könnten diese Variablen den Positionen der Ersatzspieler entsprechen. Da diese Positionen für unsere Mannschaft im Spiel irrelevant sind, können wir sie ignorieren und einfach ‚...' schreiben. Das bedeutet, dass den anderen Positionen/Variablen beliebige Werte zugewiesen werden können.

Die Variablen selbst sind also nur *leere Plätze* auf dem Spielfeld. Erst durch eine Belegung σ_1 wird klar, welche Spieler dort tatsächlich stehen. Ändert man die Belegung (z.B. durch Auswechseln), so bleibt die Menge der Positionen gleich, aber andere Spieler werden den Positionen zugeordnet.

Aktivierungselement 10.2. Gegeben seien die folgenden Variablenbelegungen in Bezug auf die Interpretation $\mathfrak{I}$ auf Seite 137:

$$\sigma_1 = 1, 1, 3, 4, \ldots \quad \sigma_2 = 2, 2, 4, 4, \ldots \quad \sigma_3 = 3, 3, 2, 4, \ldots$$

Bestimmen Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

1. $\sigma_1(x_1) = \sigma_2(x_1)$.
2. $\sigma_1(x_1) = \sigma_1(x_2)$.
3. $\sigma_3(x_2) = \sigma_1(x_3)$.
4. $\sigma_2(x_2) = \sigma_3(x_3)$.
5. Es gibt eine Variabel v, sodass $\sigma_1(v) = \sigma_2(v) = \sigma_3(v)$.
6. Es gibt eine Variablenbelegung σ, sodass $\sigma_i(x_1) = \sigma_i(x_2)$.
7. Für alle Variablenbelegungen σ, $\sigma_i(x_1) = \sigma_i(x_2)$.
8. Für alle Variablenbelegungen σ_i und σ_j (wobei $i, j \in \{1, 2, 3\}$): $\sigma_i(x_4) = \sigma_j(x_4)$.

10.1.3 Sonderfall 2: Atomare Formeln mit einstelligen Prädikaten

Hier spielt Variablenbelegungen eine Rolle, da es individuellen Variablen gibt. Der Grund liegt darin, dass für jede Interpretation $\mathfrak{I} = \langle \mathbf{D}, \varphi \rangle$ und jede individuelle Variable v, zwei Variablenbelegungen σ und σ' existieren können, für die gilt:

$$\varphi_\sigma(v) \neq \varphi_{\sigma'}(v).$$

Gegeben seien also die folgenden Variablenbelegungen in Bezug auf die Interpretation $\mathfrak{I}$ auf Seite 137:

Variablenbelegungen

$$\begin{array}{cccccc} & & x, & y, & z, & \ldots \\ \sigma_1 & = & 1, & 2, & 3, & \ldots \\ \sigma_2 & = & 2, & 2, & 3, & \ldots \\ \sigma_3 & = & 3, & 4, & 3, & \ldots \\ \sigma_4 & = & 3, & 4, & 2, & \ldots \\ \sigma_5 & = & 4, & 3, & 2, & \ldots \end{array}$$

Dann haben wir, dass:

$$\varphi_{\sigma_1}(x) = 1 \neq 2 = \varphi_{\sigma_2}(x).$$

Somit reduziert sich Definition 19.1 auf:

$$\varphi_\sigma(P(t)) = \mathtt{w} \quad \text{gdw} \quad \langle \varphi_\sigma(t) \rangle \in \varphi(P), \tag{19.1a}$$

wobei t ein individueller Term (Konstante oder eine Variabel) ist.

Lassen Sie uns die Wahrheitswerte der Formel $O(z)$ unter $\mathfrak{I}$ mit der Variablenbelegungen σ_1 und σ_4 bestimmen.

Zunächst lassen Sie uns $\varphi_{\sigma_1}(O(z))$ bestimmen. Gemäß Definition 19.1 gilt:

$$\varphi_{\sigma_1}(O(z)) = \mathtt{w} \quad \text{gdw} \quad \varphi_{\sigma_1}(z) \in \varphi(O).$$

Ersetzen wir nun $\varphi_{\sigma_1}(z)$ und $\varphi(O)$ durch ihre konkreten Werte:

$$\begin{aligned} \varphi_{\sigma_1}(O(z)) = \mathtt{w} \quad & \text{gdw} \quad \varphi_{\sigma_1}(z) \in \{d \in \mathbf{D} \mid d \text{ ist ungerade}\}, \\ & \text{gdw} \quad \sigma_1(z) \in \{d \in \mathbf{D} \mid d \text{ ist ungerade}\}, \\ & \text{gdw} \quad 3 \in \{d \in \mathbf{D} \mid d \text{ ist ungerade}\}. \end{aligned}$$

Dies bedeutet, dass $\varphi_{\sigma_1}(O(z))$ wahr ist, wenn 3 eine ungerade Zahl ist – was zutrifft. Daher gilt $\varphi_{\sigma_1}(O(z)) = \mathtt{w}$ für alle σ – d.h., auch für $\sigma_1, \ldots, \sigma_5$.

Die obige Erklärung lässt sich auch anhand des folgenden Schemas veranschaulichen.

$$\begin{array}{c}
\underline{\text{3 ist ungerade}}^{14} \\
\underline{3 \in \{d \in \mathbf{D} \mid d \text{ ist ungerade}\}} \\
\underline{3 \in \varphi(O)}^{15} \\
\underline{\sigma_1(z) \in \varphi(O)}^{16} \\
\underline{\varphi_{\sigma_1}(z) \in \varphi(O)}^{17} \\
\varphi_{\sigma_1}(O(z)) = \mathtt{w}^{18}
\end{array}$$

14: Tatsache

15: Wir ersetzen: $\varphi(O) = \{d \in \mathbf{D} \mid d \text{ ist ungerade}\}$

16: $\sigma_1(z) = 3$

17: $\varphi_{\sigma_1}(z) = \sigma_1(z)$

18: Def. 19.1.

Nun wenden wir uns zu $\varphi_{\sigma_4}(O(z))$. Siehe das folgende Schema:

$$\begin{array}{c}
\underline{\text{2 ist \textit{nicht} ungerade}}^{19} \\
\underline{2 \notin \{d \in \mathbf{D} \mid d \text{ ist ungerade}\}} \\
\underline{2 \notin \varphi(O)}^{20} \\
\underline{\sigma_4(z) \notin \varphi(O)}^{21} \\
\underline{\varphi_{\sigma_4}(z) \notin \varphi(O)}^{22} \\
\varphi_{\sigma_4}(O(z)) = \mathtt{f}^{23}
\end{array}$$

19: Tatsache

20: Wir ersetzen: $\varphi(O) = \{d \in \mathbf{D} \mid d \text{ ist ungerade}\}$

21: $\sigma_4(z) = 2$

22: $\varphi_{\sigma_4}(z) = \sigma_4(z)$

23: Def. 19.1.

belegungen auf Seite 140:
$\sigma_1 = 1, 2, 3, \ldots$
$\sigma_2 = 2, 2, 3, \ldots$
$\sigma_3 = 3, 4, 3, \ldots$
$\sigma_4 = 3, 4, 2, \ldots$
$\sigma_5 = 4, 3, 2, \ldots$

Aktivierungselement 10.3. Bestimmen Sie, ob die folgenden Formeln unter $\mathfrak{I}$ und die Variablenbelegungen auf Seite 140 wahr oder falsch sind.

1. $O(x)$ 2. $O(z)$ 3. $E(x)$ 4. $E(y)$ 5. $H(y)$ 6. $H(z)$

10.1.4 Sonderfall 3: Atomare Formeln mit zweistelligen Prädikaten

Wir betrachten nun atomare Formeln der Form $P(t_1, t_2)$, wobei P ein zweistelliges Prädikat und t_1, t_2 individuelle Termen sind.

Somit reduziert sich Definition 19.1 auf:

$$\varphi_\sigma(P(t_1, t_2)) = \mathtt{w} \quad \text{gdw} \quad \langle \varphi(t_1), \varphi(t_2) \rangle \in \varphi(P). \tag{19.1c}$$

Dies bedeutet: Eine atomare Formel mit einem zweistelligen Prädikat ist wahr gdw das geordnete Paar der durch die Terme bezeichneten Gegenstände Element derjenigen zweistelligen Relation ist, die durch das Prädikat ‚P' interpretiert wird.

Zur Veranschaulichung betrachten wir die Formel ‚$G(a, b)$'. Nach Definition 19.1a gilt:

$$\varphi_\sigma(G(a, b)) = \mathtt{w} \quad \text{gdw} \quad \langle \varphi(a), \varphi(b) \rangle \in \varphi(G).$$

Setzen wir die Werte der Interpretation ein, so erhalten wir:

$$\varphi_\sigma(G(a, b)) = \mathtt{w} \text{ gdw } \langle 1, 2 \rangle \in \{\langle d_1, d_2 \rangle \in \mathbf{D}^2 \mid d_1 \text{ ist größer als } d_2\}.$$

Da 1 nicht größer als 2 ist, gehört das entsprechende Tupel nicht zur Relation $\varphi(G)$. Folglich gilt, für alle σ:

$$\varphi_\sigma(G(a, b)) = \mathtt{f}.$$

Die obige Erklärung lässt sich auch anhand des folgenden Schemas veranschaulichen.

$$\underline{\text{1 ist nicht größer als 2}} \ [24]$$
$$\underline{\langle 1, 2 \rangle \notin \{\langle d_1, d_2 \rangle \in \mathbf{D}^2 \mid d_1 \text{ ist größer als } d_2\}}$$
$$\underline{\langle 1, 2 \rangle \notin \varphi(G)} \ [25]$$
$$\underline{\langle \varphi(a), \varphi(b) \rangle \notin \varphi(G)} \ [26]$$
$$\underline{\langle \varphi_\sigma(a), \varphi_\sigma(b) \rangle \notin \varphi(G)} \ [27]$$
$$\varphi_{\sigma_1}(G(a, b)) = \mathtt{f} \ [28]$$

belegungen auf Seite 140:
$\sigma_1 = 1, 2, 3, \ldots$
$\sigma_2 = 2, 2, 3, \ldots$
$\sigma_3 = 3, 4, 3, \ldots$
$\sigma_4 = 3, 4, 2, \ldots$
$\sigma_5 = 4, 3, 2, \ldots$

24: Tatsache

25: Def. von $\varphi(G)$

26: $\varphi(a) = 1$ und $\varphi(b) = 2$

27: $\varphi_\sigma(t) = \varphi(t)$, für Konstanten t

28: Def. 19.1.

Analysieren wir nun die offene atomare Formel ‚$D(x, b)$' unter den Variablenbelegungen σ_4 und σ_5 auf Seite 140.

Erstens, $\varphi_{\sigma_5}(D(x,b))$. Siehe das folgende Schema:

$$\underline{\text{4 ist durch 2 teilbar}}\ [29]$$
$$\underline{\langle 4,2\rangle \in \{\langle d_1,d_2\rangle \in \mathbf{D}^2 \mid d_1 \text{ ist durch } d_2 \text{ teilbar}\}}$$
$$\underline{\langle 4,2\rangle \in \varphi(D)}\ [30]$$
$$\underline{\langle 4,\varphi_{\sigma_5}(b)\rangle \in \varphi(D)}\ [31]$$
$$\underline{\langle \varphi_{\sigma_5}(x),\varphi_{\sigma_5}(b)\rangle \in \varphi(D)}\ [32]$$
$$\varphi_{\sigma_5}(D(x,b)) = \mathtt{w}\ [33]$$

29: Tatsache

30: Def. von $\varphi(D)$

31: $\varphi(b) = 2$ und $\varphi_\sigma(t) = \varphi(t)$, für Konstanten t

32: $\varphi_{\sigma_5}(x) = \sigma_5(x) = 4$

33: Def. 19.1.

Nun wenden wir uns zu $\varphi_{\sigma_4}(D(x,b))$:

$$\underline{\text{3 ist \textit{nicht} durch 2 teilbar}}\ [34]$$
$$\underline{\langle 3,2\rangle \notin \{\langle d_1,d_2\rangle \in \mathbf{D}^2 \mid d_1 \text{ ist durch } d_2 \text{ teilbar}\}}$$
$$\underline{\langle 3,2\rangle \notin \varphi(D)}\ [35]$$
$$\underline{\langle 3,\varphi_{\sigma_4}(b)\rangle \notin \varphi(D)}\ [36]$$
$$\underline{\langle \varphi_{\sigma_4}(x),\varphi_{\sigma_4}(b)\rangle \notin \varphi(D)}\ [37]$$
$$\varphi_{\sigma_4}(D(x,b)) = \mathtt{f}\ [38]$$

34: Tatsache

35: Def. von $\varphi(D)$

36: $\varphi_\sigma(b) = \varphi(b) = 2$

37: $\varphi_{\sigma_4}(x) = \sigma_4(x) = 3$

38: Def. 19.1.

Damit zeigt sich, dass bei zweistelligen Prädikaten nicht einzelne Gegenstände, sondern geordnete Paare von Gegenständen daraufhin überprüft werden, ob sie zur durch das Prädikat festgelegten Relation gehören.

belegungen auf Seite 140:
$\sigma_1 = 1,2,3,\ldots$
$\sigma_2 = 2,2,3,\ldots$
$\sigma_3 = 3,4,3,\ldots$
$\sigma_4 = 3,4,2,\ldots$
$\sigma_5 = 4,3,2,\ldots$

Aktivierungselement 10.4. Bestimmen Sie, ob die folgenden Formeln unter $\mathfrak{I}$ und σ_i (auf Seite 140) wahr oder falsch sind.

1. $G(x,b)$ 2. $G(x,z)$ 3. $L(z,b)$ 4. $L(x,x)$ 5. $D(y,z)$ 6. $D(z,z)$

10.1.5 Sonderfall 4: Molekulare Formeln ohne Quantoren

Wir betrachten nun molekulare Formeln ohne Quantoren, d. h. Formeln, die aus atomaren Formeln mithilfe der aussagenlogischen Junktoren ‚$\neg$', ‚$\wedge$', ‚$\vee$', ‚$\rightarrow$', ‚$\leftrightarrow$' gebildet werden, jedoch keine Quantoren ‚$\forall$' oder ‚$\exists$' enthalten.

Die Semantik solcher Formeln ist vollständig durch die Semantik ihrer atomaren Teilausdrücke sowie durch die wahrheitsfunktionale Bedeutung der Junktoren bestimmt.

Formal ergeben sich die Wahrheitsbedingungen aus der folgenden Klausen von Definition 19:

$$\varphi_\sigma(\neg A) = \mathtt{w} \text{ gdw } \varphi_\sigma(A) = \mathtt{f}, \tag{19.2}$$
$$\varphi_\sigma(A \wedge B) = \mathtt{w} \text{ gdw } \varphi_\sigma(A) = \mathtt{w} \text{ und } \varphi_\sigma(B) = \mathtt{w}, \tag{19.3}$$
$$\varphi_\sigma(A \vee B) = \mathtt{w} \text{ gdw } \varphi_\sigma(A) = \mathtt{w} \text{ oder } \varphi_\sigma(B) = \mathtt{w}, \tag{19.4}$$
$$\varphi_\sigma(A \rightarrow B) = \mathtt{w} \text{ gdw } \varphi_\sigma(A) = \mathtt{f} \text{ oder } \varphi_\sigma(B) = \mathtt{w}, \tag{19.5}$$
$$\varphi_\sigma(A \leftrightarrow B) = \mathtt{w} \text{ gdw } \varphi_\sigma(A) = \varphi_\sigma(B). \tag{19.6}$$

Da $\varphi_\sigma(A) \neq \mathtt{w}$ gdw $\varphi_\sigma(A) = \mathtt{f}$, gilt es äquivalent:

$$\varphi_\sigma(\neg A) = \mathtt{f} \text{ gdw } \varphi_\sigma(A) = \mathtt{w}, \tag{19.2'}$$
$$\varphi_\sigma(A \wedge B) = \mathtt{f} \text{ gdw } \varphi_\sigma(A) = \mathtt{f} \text{ oder } \varphi_\sigma(B) = \mathtt{f}, \tag{19.3'}$$
$$\varphi_\sigma(A \vee B) = \mathtt{f} \text{ gdw } \varphi_\sigma(A) = \mathtt{f} \text{ und } \varphi_\sigma(B) = \mathtt{f}, \tag{19.4'}$$
$$\varphi_\sigma(A \rightarrow B) = \mathtt{f} \text{ gdw } \varphi_\sigma(A) = \mathtt{w} \text{ und } \varphi_\sigma(B) = \mathtt{f}, \tag{19.5'}$$
$$\varphi_\sigma(A \leftrightarrow B) = \mathtt{f} \text{ gdw } \varphi_\sigma(A) \neq \varphi_\sigma(B). \tag{19.6'}$$

Als Beispiele betrachten wir die molekulare Formeln ‚$G(y,a) \wedge O(z)$' und ‚$G(y,a) \rightarrow O(z)$' unter σ_1 bzw. σ_5 (auf Seite 140).

Erstens, $\varphi_{\sigma_1}(G(y,a) \wedge O(z))$. Siehe das folgende Schema:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\text{2 ist größer als 1}}{\langle 2,1\rangle \in \{\langle d_1,d_2\rangle \in \mathbf{D} \mid d_1 \text{ ist größer als } d_2\}}}{\langle \varphi_{\sigma_1}(y), \varphi_{\sigma_1}(a)\rangle \in \varphi(G)}}{\varphi_{\sigma_1}(G(y,a)) = \mathtt{w}} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\text{3 ist ungerade}}{3 \in \{d \in \mathbf{D} \mid d \text{ ist ungerade}\}}}{\varphi_{\sigma_1}(z) \in \varphi(O)}}{\varphi_{\sigma_1}(O(z)) = \mathtt{w}}}{\varphi_{\sigma_1}(G(y,a) \wedge O(z)) = \mathtt{w}} \;\text{Def. 19.3}$$

Nun wenden wir uns zu $\varphi_{\sigma_5}(G(y,a) \rightarrow O(z))$:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\text{3 ist größer als 1}}{\langle 3,1\rangle \in \{\langle d_1,d_2\rangle \in \mathbf{D} \mid d_1 \text{ ist größer als } d_2\}}}{\langle \varphi_{\sigma_5}(y), \varphi_{\sigma_5}(a)\rangle \in \varphi(G)}}{\varphi_{\sigma_5}(G(y,a)) = \mathtt{w}} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\text{2 ist } \textit{nicht} \text{ ungerade}}{2 \notin \{d \in \mathbf{D} \mid d \text{ ist ungerade}\}}}{\varphi_{\sigma_5}(z) \notin \varphi(O)}}{\varphi_{\sigma_5}(O(z)) = \mathtt{f}}}{\varphi_{\sigma_5}(G(y,a) \rightarrow O(z)) = \mathtt{f}} \;\text{Def. 19.5}$$

Nun sehen wir eine Formel mit dem Negationsoperator: ‚$\neg(E(x) \wedge \neg O(z))$' unter σ_5.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\text{4 ist gerade}}{4 \in \{d \in \mathbf{D} \mid d \text{ ist gerade}\}}}{\varphi_{\sigma_5}(x) \in \varphi(E)}}{\varphi_{\sigma_5}(E(x)) = \mathtt{w}} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\text{2 ist nicht ungerade}}{2 \notin \{d \in \mathbf{D} \mid d \text{ ist ungerade}\}}}{\varphi_{\sigma_5}(z) \notin \varphi(O)}}{\varphi_{\sigma_5}(O(z)) = \mathtt{f}}}{\varphi_{\sigma_5}(\neg O(z)) = \mathtt{w}}}{\varphi_{\sigma_5}(E(x) \wedge \neg O(z)) = \mathtt{w}}}{\varphi_{\sigma_5}(\neg(E(x) \wedge \neg O(z))) = \mathtt{f}} \text{ Def. 19.2}$$

Damit zeigt sich, dass die Bewertung molekularer Formeln ohne Quantoren keine neuen semantischen Prinzipien erfordert, sondern vollständig auf der Semantik atomarer Formeln und der klassischen Aussagenlogik aufbaut.

belegungen auf Seite 140:
$\sigma_1 = 1, 2, 3, \ldots$
$\sigma_2 = 2, 2, 3, \ldots$
$\sigma_3 = 3, 4, 3, \ldots$
$\sigma_4 = 3, 4, 2, \ldots$
$\sigma_5 = 4, 3, 2, \ldots$

Aktivierungselement 10.5. Bestimmen Sie, ob die folgenden Formeln unter $\mathfrak{I}$ und σ_i (auf Seite 140) wahr oder falsch sind.

1. $G(d, x) \wedge E(d)$
2. $G(c, x) \vee O(d)$
3. $L(z, c) \longrightarrow D(y, z)$
4. $D(y, z) \longrightarrow \neg L(z, b)$
5. $O(x) \wedge O(c) \wedge O(z)$
6. $\neg E(y) \longrightarrow (G(c, x) \vee O(d))$

10.1.6 Varianten von Belegungen

Sei $\mathfrak{I} = \langle \mathbf{D}, \varphi \rangle$ eine Interpretation, wobei $\mathbf{D}$ die Menge aller Fußballspieler der argentinischen Nationalmannschaft bei der *FIFA-Weltmeisterschaft 2022* ist.

Betrachten wir die Folgende Variablenbelegungen von $\mathfrak{I}$:

Variablenbelegungen

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}	...
$\sigma_1 =$	*Dibu,*	*Molina,*	*Romero,*	*Otamendi,*	*Tagliafico,*	*De Paul,*	*Fernández,*	*Mac Allister,*	*Messi,*	*Alvarez,*	*Di María,*	...
$\sigma_2 =$	*Rulli,*	*Montiel,*	*Pezzella,*	*Foyth,*	*Acuña,*	*Paredes,*	*Palacios,*	*Gómez,*	*Dybala,*	*Martínez,*	*Correa,*	...
$\sigma_3 =$	*Dibu,*	*Montiel,*	*Romero,*	*Otamendi,*	*Tagliafico,*	*Pezzella,*	*Fernández,*	*Paredes,*	*Messi,*	*Lautaro,*	*Acuña,*	...
$\sigma_4 =$	*Messi,*	*Molina,*	*Romero,*	*Otamendi,*	*Tagliafico,*	*De Paul,*	*Fernández,*	*Mac Allister,*	*Dibu,*	*Alvarez,*	*Di María,*	...
$\sigma_5 =$	*Dibu,*	*Molina,*	*Romero,*	*Otamendi,*	*Tagliafico,*	*De Paul,*	*Fernández,*	*Mac Allister,*	*Messi,*	*Lautaro,*	*Di María,*	...
$\sigma_6 =$	*Dibu,*	*Montiel,*	*Romero,*	*Otamendi,*	*Tagliafico,*	*De Paul,*	*Fernández,*	*Mac Allister,*	*Messi,*	*Alvarez,*	*Di María,*	...
$\sigma_7 =$	*Dibu,*	*Molina,*	*Romero,*	*Otamendi,*	*Acuña,*	*De Paul,*	*Fernández,*	*Mac Allister,*	*Messi,*	*Alvarez,*	*Di María,*	...
$\sigma_8 =$	*Dibu,*	*Molina,*	*Romero,*	*Otamendi,*	*Montiel,*	*De Paul,*	*Fernández,*	*Mac Allister,*	*Messi,*	*Alvarez,*	*Di María,*	...
$\sigma_9 =$	*Dibu,*	*Montiel,*	*Romero,*	*Otamendi,*	*Tagliafico,*	*Pezzella,*	*Fernández,*	*Paredes,*	*Messi,*	*Lautaro,*	*Di María,*	...
$\sigma_{10} =$	*Messi,*	*Messi,*	*Messi,*	*Messi,*	*Messi,*	*Messi,*	*Messi,*	*Messi,*	*Messi,*	*Messi,*	*Messi,*	...

Es ist klar, dass σ_1 und σ_2 ganz verschiedene Belegungen sind: Die Spieler sind ganz andere, da für alle x_i (mit $i \leq 11$) gilt: $\sigma_1(x_i) \neq \sigma_2(x_i)$.

Auch σ_1 und σ_3 sind verschieden: Obwohl die Mehrheit der Spieler dieselben sind und sogar auf denselben Positionen stehen, gibt es einige x_i, für die $\sigma_1(x_i) \neq \sigma_3(x_i)$, konkret bei x_6, x_8, x_{10} und x_{11}.

Obwohl σ_1 und σ_4 dieselbe Menge von Spielern aus der Domäne verwenden, unterscheiden sie sich als Belegungen: die Zuordnung der Spieler zu den Positionen (Variablen) ist nicht identisch. Es macht etwa einen Unterschied, ob Messi als Torwart (Nummer 1) oder als Spielmacher (Nummer 10) eingesetzt wird.

Auch σ_1 und σ_5 unterscheiden sie sich als Belegungen obwohl sie sich nur in Bezug auf eine Variable unterscheiden (nämlich bei x_{10}). Es gibt jedoch eine Beziehung zwischen ihnen, die wir ‚Variante' nennen werden (siehe unten).

Auch σ_1 und σ_6 unterscheiden sie sich nur in Bezug auf eine Variable unterscheiden (nämlich bei x_1) und sind deshalb verschiedene Belegungen. Während im Fußball ein Spieler höchstens einer Position zugeordnet werden darf, gilt für Variablenbelegungen keine solche Einschränkung: Es ist möglich, dass verschiedene Variablen denselben Wert erhalten. Also wir könnten mit der Belegung σ_{10} ein *Team* definieren, in dem Messi auf allen Positionen spielt!

In unserer Fußball-Analogie nennen wir σ' eine *Variante* von σ, wenn beide Aufstellungen in allen Positionen übereinstimmen, mit Ausnahme höchstens einer Position, auf der ein anderer Spieler eingesetzt wird. Formal gilt:

39: Folglich, für alle anderen Variablen w mit $w \neq v$ gilt: $\sigma(w) = \sigma'(w)$.

Definition 10.1 (Variante)**.** Eine Belegung σ' heißt eine Variante von σ, falls es *höchstens* eine Variable v gibt, so dass $\sigma(v) \neq \sigma'(v)$.[39] Ist v eine solche Variable, so heißt σ' eine v-Variante von σ.

Anders gesagt: Eine x-Variante σ' von σ bezeichnet eine eventuell abweichende Auswahl eines Objekts im Bereich für ‚x' hinsichtlich σ und dieselbe Auswahl eines Objekts für alle anderen Variablen.

Aktivierungselement 10.6. Bestimmen Sie, ob die Variablenbelegungen $\sigma_1, \ldots, \sigma_{10}$ oben Varianten voneinander sind und, falls ja, bezüglich welcher Variable(n).

10.1.7 Sonderfall 5: Quantifizierte Formeln

Hier betrachten wir geschlossene Formeln der Form $\forall x\, A$ bzw. $\exists x\, A$, wobei A selbst quantorenfrei ist.

Maßgeblich sind hierbei die folgenden Klauseln aus Def. 19:

$$\varphi_\sigma(\forall v\, A) = \mathtt{w} \text{ gdw für alle } v\text{-Varianten } \sigma' \text{ von } \sigma \text{ unter } \mathfrak{I} \text{ gilt:}$$
$$\varphi_{\sigma'}(A) = \mathtt{w}, \tag{19.7}$$
$$\varphi_\sigma(\exists v\, A) = \mathtt{w} \text{ gdw es eine } v\text{-Variante } \sigma' \text{ von } \sigma \text{ unter } \mathfrak{I} \text{ gibt, sodass:}$$
$$\varphi_{\sigma'}(A) = \mathtt{w}. \tag{19.8}$$

Da $\varphi_\sigma(A) \neq \mathtt{w}$ gdw $\varphi_\sigma(A) = \mathtt{f}$, gilt es äquivalent:

$$\varphi_\sigma(\forall v\, A) = \mathtt{f} \text{ gdw es eine } v\text{-Variante } \sigma' \text{ von } \sigma \text{ unter } \mathfrak{I} \text{ gibt, sodass:}$$
$$\varphi_{\sigma'}(A) = \mathtt{f}, \tag{19.7$'$}$$
$$\varphi_\sigma(\exists v\, A) = \mathtt{f} \text{ gdw für alle } v\text{-Varianten } \sigma' \text{ von } \sigma \text{ unter } \mathfrak{I} \text{ gilt:}$$
$$\varphi_{\sigma'}(A) = \mathtt{f}. \tag{19.8$'$}$$

Die beiden Klauseln machen deutlich, dass sich die Überprüfung von quantifizierten Formeln wesentlich von der Überprüfung quantorenfreier Formeln unterscheidet.

$\varphi_\sigma(\forall x\, A(x)) = \mathtt{w}$ gdw für *jedes* Objekt des Bereichs die Teilformel ‚$A(x)$' wahr ist. Die Formel ‚$A(x)$' muss also für jede mögliche Wahl eines Objekts für ‚x' erfüllt sein.

$\varphi_\sigma(\exists x\, A(x)) = \mathtt{w}$ gdw für *mindestens ein* Objekt des Bereichs die Teilformel ‚$A(x)$' wahr ist. Die Formel ‚$A(x)$' muss also für eine mögliche Wahl eines Objekts für ‚x' erfüllt sein.

Diese Auswahlen werden technisch durch eine x-Variante σ' von σ festgelegt.[40] Da der Wahrheitswert von ‚$A(x)$' von der Belegung der Variablen ‚x' abhängt, kann die Bewertung von ‚$A(x)$' unter φ_σ und unter $\varphi_{\sigma'}$ unterschiedlich ausfallen.[41]

Formulieren wir dies nun mit Variablenbelegungen um.

Für universell quantifizierte Formeln haben wir die folgende Formulierung. Um zu zeigen, dass $\varphi_\sigma(\forall x\, A(x)) = \mathtt{w}$ gilt, muss nach

40: Sei $\mathfrak{I} = \langle \mathbf{D}, \varphi \rangle$ und $d_1, d_2 \in \mathbf{D}$. Dann können wir stets eine σ wählen, sodass $\varphi_\sigma(v) = d_1$, sowie eine v-Variante σ' von σ, sodass $\varphi_{\sigma'}(v) = d_2$.

41: Stimmen die Werte von $\sigma(x)$ und $\sigma'(x)$ überein, so ergibt sich dieselbe Bewertung; unterscheiden sie sich, so kann sich auch der Wahrheitswert von ‚$A(x)$' ändern.

Definition 19 nachgewiesen werden, dass die Teilformel ‚$A(x)$‘ unter *allen* x-Varianten σ' von σ wahr ist, d. h., dass $\varphi_{\sigma'}(A(x)) = \mathtt{w}$. Demgegenüber genügt es, um $\varphi_\sigma(\forall x\, A(x)) = \mathtt{f}$ zu zeigen, *eine einzige* x-Variante σ' anzugeben, für die $\varphi_{\sigma'}(A(x)) = \mathtt{f}$ ist.

Für existentiell quantifizierte Formeln verhält es sich dual. Hier reicht es aus, um $\varphi_\sigma(\exists x\, A(x)) = \mathtt{w}$ zu zeigen, eine einzige x-Variante σ' von σ zu finden, sodass $\varphi_{\sigma'}(A(x)) = \mathtt{w}$ gilt. Umgekehrt muss, um $\varphi_\sigma(\exists x\, A(x)) = \mathtt{f}$ zu zeigen, nachgewiesen werden, dass alle x-Varianten σ' von σ so sind, dass $\varphi_{\sigma'}(A(x)) = \mathtt{f}$ gilt.

Diese Asymmetrie zwischen ‚$\forall$‘ und ‚$\exists$‘ schließt unmittelbar an die zuvor erläuterte Rolle der x-Varianten an und spiegelt den grundlegenden Unterschied zwischen All- und Existenzsätze wider: Der Allquantor stellt eine globale Forderung an *alle* zulässigen Variablenbelegungen, während der Existenzquantor bereits durch das Vorhandensein *einer* geeigneten Belegung erfüllt ist.

belegungen auf Seite 140:
$\sigma_1 = 1, 2, 3, \ldots$
$\sigma_2 = 2, 2, 3, \ldots$
$\sigma_3 = 3, 4, 3, \ldots$
$\sigma_4 = 3, 4, 2, \ldots$
$\sigma_5 = 4, 3, 2, \ldots$

Betrachten wir einige Beispiele in Bezug auf σ_1:

$\exists x\, E(x)$: Sei σ_1' eine x-Variante von σ_1 mit $\sigma_1'(x) = 2 \in \mathbf{D}$. Da 2 gerade ist, gilt $\sigma_1'(x) = 2 \in \varphi(E)$. Daraus folgt (nach Def. 19.1), dass $\varphi_{\sigma_1'}(E(x)) = \mathtt{w}$, und damit (nach Def. 19.8), dass $\varphi_{\sigma_1}(\exists x\, E(x)) = \mathtt{w}$.

$\forall y\, E(y)$: Sei σ_1' eine y-Variante von σ_1 mit $\sigma_1'(y) = 3 \in \mathbf{D}$. Da 3 nicht gerade ist, gilt $\sigma_1'(y) = 3 \notin \varphi(E)$. Daraus folgt (nach Def. 19.1), dass $\varphi_{\sigma_1'}(E(y)) = \mathtt{f}$, und damit (nach Def. 19.8), dass $\varphi_{\sigma_1}(\forall y\, E(y)) = \mathtt{f}$.

$\forall x\, (E(x) \vee O(x))$: Sei σ_1' eine x-Variante von σ_1. Da $\mathbf{D}$ aus natürlichen Zahlen besteht, können wir zwei Unterfälle unterscheiden: (i) $\sigma_1'(x)$ ist gerade und (ii) $\sigma_1'(x)$ ist ungerade.

(i) Sei $\sigma_1'(x)$ gerade. Folglich:

$$\sigma_1'(x) \in \{d \mid d \text{ gerade}\} = \varphi(E).$$

Daraus folgt (nach Def. 19.1), dass $\varphi_{\sigma_1'}(E(x)) = \mathtt{w}$ und, daraus (nach Def. 19.4), dass $\varphi_{\sigma_1'}(E(x) \vee O(x)) = \mathtt{w}$.

(ii) Sei $\sigma_1'(x)$ ungerade. Folglich:

$$\sigma_1'(x) \in \{d \mid d \text{ ist ungerade}\} = \varphi(O).$$

Daraus folgt (nach Def. 19.1), dass $\varphi_{\sigma_1'}(O(x)) = \mathtt{w}$ und, daraus (nach Def. 19.4), dass $\varphi_{\sigma_1'}(E(x) \vee O(x)) = \mathtt{w}$.

Da wir in beiden sich gegenseitig ausschließenden Fällen festgestellt haben, dass $\varphi_{\sigma_1'}(E(x) \vee O(x)) = \mathtt{w}$, gilt dies allgemein. Da σ_1' eine x-Variante von σ_1 ist, folgt außerdem (nach Def. 19.8), dass $\varphi_{\sigma_1}(\forall x\, (E(x) \vee O(x))) = \mathtt{w}$.

$\exists z\,(E(z) \wedge O(z))$: Sei σ_1' eine z-Variante von σ_1. Da **D** aus natürlichen Zahlen besteht, können wir zwei Unterfälle unterscheiden: (i) $\sigma_1'(z)$ ist gerade und (ii) $\sigma_1'(z)$ ist ungerade.

(i) Sei $\sigma_1'(z)$ gerade. Dann ist $\sigma_1'(z)$ nicht ungerade, d.h.,

$$\sigma_1'(z) \notin \{d \mid d \text{ ist ungerade}\} = \varphi(O).$$

Daraus folgt (nach Def. 19.1), dass $\varphi_{\sigma_1'}(O(x)) = \mathtt{f}$ und, daraus (nach Def. 19.3), dass $\varphi_{\sigma_1'}(E(z) \wedge O(x)) = \mathtt{f}$.

(ii) Sei $\sigma_1'(z)$ ungerade. Wir können auch in diesem Fall ebenfalls zeigen, dass $\varphi_{\sigma_1'}(E(z) \wedge O(x)) = \mathtt{f}$.

Da wir in beiden sich gegenseitig ausschließenden Fällen festgestellt haben, dass $\varphi_{\sigma_1'}(E(z) \wedge O(x)) = \mathtt{f}$, gilt dies allgemein. Da σ_1' eine z-Variante von σ_1 ist, folgt außerdem (nach Def. 19.8), dass $\varphi_{\sigma_1}(\forall x\,(E(x) \vee O(x))) = \mathtt{w}$.

$\forall z\, D(z, a)$: Nehmen wir an, um eine Absurdität zu erhalten, dass $\varphi_{\sigma_1}(\forall z\, D(z, a)) = \mathtt{f}$.

Dann muss es mindestens eine z-Variante σ_1' von σ_1 geben, sodass $\varphi_{\sigma_1'}(D(z, a)) = \mathtt{f}$. Da $\varphi(a) = 1$, bedeutet dies, dass $\sigma_1'(z)$ so sein müsste, dass $(\sigma_1'(z), 1) \notin \varphi(D)$ ist – d. h., $\sigma_1'(z)$ wäre nicht durch 1 teilbar. Da jedoch $\sigma_1'(z) \in \varphi(D) = \mathbb{N}$ und jede natürliche Zahl durch 1 teilbar ist, ist dies absurd.

Dieser Widerspruch zeigt, dass $\varphi_{\sigma_1}(\forall z\, D(z, a)) = \mathtt{w}$.

belegungen auf Seite 140:
$\sigma_1 = 1, 2, 3, \ldots$
$\sigma_2 = 2, 2, 3, \ldots$
$\sigma_3 = 3, 4, 3, \ldots$
$\sigma_4 = 3, 4, 2, \ldots$
$\sigma_5 = 4, 3, 2, \ldots$

Aktivierungselement 10.7. (i) Bestimmen Sie, ob die folgenden Formeln unter $\mathfrak{I}$ und σ_i (auf Seite 140) wahr oder falsch sind.

1. $\exists y\, H(y)$
2. $\exists y\, \neg H(y)$
3. $\forall x\,(E(x) \leftrightarrow \neg O(x))$
4. $\exists x\, D(a, x)$
5. $\exists x\, D(z, x)$
6. $\forall z\, \exists x\, D(z, x)$
7. $\forall z\, D(z, x)$
8. $\exists x\, \forall z\, D(z, x)$
9. $\exists z\, \neg D(z, x)$
10. $\forall x\, \exists z\, \neg D(z, x)$

(ii) Ist der Wahrheitswert einer geschlossenen quantifizierten Formel sensitiv gegenüber der Wahl der Variablenbelegung, oder bleibt er invariant?

10.1.8 Beweise für Wahrheit und Falschheit unter $\mathfrak{I}$

Ein Beweis der Wahrheit für A unter $\mathfrak{I} = \langle \mathbf{D}, \varphi \rangle$ ist erbracht, wenn man beweist, dass $\varphi_\sigma(A) = \mathtt{w}$ für beliebige σ unter $\mathfrak{I}$.

Ein Beweis der Falschheit für A unter $\mathfrak{I} = \langle \mathbf{D}, \varphi \rangle$ ist erbracht, wenn man beweist, dass $\varphi_\sigma(A) = \mathtt{f}$ für beliebige σ unter $\mathfrak{I}$.

In beiden Fällen nehmen wir an, dass σ *beliebig gewählt* ist. Das bedeutet, dass wir für jedes v nicht darauf achten, welchen Wert $\sigma(v)$ annimmt. Mit anderen Worten: Wir müssen zeigen, dass $\varphi_\sigma(A) = \mathtt{w}$ bzw. $\mathtt{f}$ unabhängig davon gilt, was $\sigma(v)$ in $\mathbf{D}$ bezeichnet.

Gibt es zwei Variablenbelegungen σ_1 und σ_2 mit $\varphi_{\sigma_1}(A) = \mathtt{w}$ und $\varphi_{\sigma_2}(A) = \mathtt{f}$, so ist A unter der Interpretation $\mathfrak{I}$ weder wahr noch falsch.

Betrachten wir einige Beispiele:

$O(a)$: Wir haben bereits gesehen, dass $\varphi_\sigma(O(a)) = \mathtt{w}$ für alle σ – also unabhängig des σ – gilt. Folglich ist ‚$O(a)$' unter $\mathfrak{I}$ wahr.

$O(x)$: Wir haben auch gesehen, dass $\varphi_{\sigma_1}(O(x)) = \mathtt{w}$ und $\varphi_{\sigma_2}(O(x)) = \mathtt{f}$. Folglich ist ‚$O(x)$' unter $\mathfrak{I}$ weder wahr noch falsch.

$O(x) \vee E(x)$: Unter $\mathfrak{I}$ ist jedes $d \in \mathbf{D}$ eine natürliche Zahl. Folglich ist $\sigma(x)$ entweder gerade – d.h. $\sigma(x) \in \varphi(E)$ – oder ungerade – d.h. $\sigma(x) \in \varphi(O)$.

Falls $\sigma(x) \in \varphi(E)$, folgt (nach Def. 19.1), dass $\varphi_\sigma(E(x)) = \mathtt{w}$ und damit (nach Def. 19.4) auch $\varphi_\sigma(O(x) \vee E(a)) = \mathtt{w}$. Falls $\sigma(x) \in \varphi(O)$, folgt (nach Def. 19.1), dass $\varphi_\sigma(O(x)) = \mathtt{w}$ und daraus wiederum (nach Def. 19.4), dass $\varphi_\sigma(O(x) \vee E(a)) = \mathtt{w}$.

Aus diesen beiden sich gegenseitig ausschließenden und erschöpfenden Möglichkeiten folgt, dass $\varphi_\sigma(O(x) \vee E(a)) = \mathtt{w}$. Damit ist ‚$O(x) \vee E(a)$' unabhängig des σ wahr.

$O(x) \wedge E(x)$: Unter $\mathfrak{I}$ ist jedes $d \in \mathbf{D}$ eine natürliche Zahl. Folglich ist $\sigma(x)$ entweder gerade – d.h. $\sigma(x) \in \varphi(E)$ – oder ungerade – d.h. $\sigma(x) \in \varphi(O)$.

Falls $\sigma(x) \in \varphi(E)$, folgt, dass $\sigma(x) \notin \varphi(O)$. Daraus folgt (nach Def. 19.1), dass $\varphi_\sigma(O(x)) = \mathtt{f}$ und damit (nach Def. 19.3), dass $\varphi_\sigma(O(x) \wedge E(a)) = \mathtt{f}$. Falls $\sigma(x) \in \varphi(O)$, haben wir eine ähnliche Situation.

Aus diesen beiden sich gegenseitig ausschließenden und erschöpfenden Möglichkeiten folgt, dass $\varphi_\sigma(O(x) \wedge E(a)) = \mathtt{f}$. Damit ist ‚$O(x) \wedge E(a)$' unabhängig des σ falsch.

$\exists x\, H(x)$: Nehmen wir an, um einen Widerspruch zu erhalten, dass $\varphi_\sigma(\exists x\, H(x)) = \mathtt{w}$. Dann muss es eine x-Variante σ' von σ geben, sodass $\varphi_{\sigma'}(H(x)) = \mathtt{w}$. Dies bedeutet, dass $\sigma'(x) \in \varphi(H)$ ist. Da jedoch $\varphi(H)$ leer ist – es gibt keine natürliche Zahl, die ein Mensch ist – kann es kein solches σ' geben, was einen Widerspruch ergibt. Damit ist gezeigt, dass $\varphi_\sigma(\exists x\, H(x)) = \mathtt{f}$, und zwar unabhängig von des σ.

Aktivierungselement 10.8. Bestimmen Sie, ob die folgenden Formeln unter $\mathfrak{I}$ (in Seite 137) wahr oder falsch sind.

1. $\exists y\, H(y)$
2. $\forall z\, H(z)$
3. $E(x) \leftrightarrow \neg O(x)$
4. $\exists x\, \neg H(x)$
5. $\exists z\, (E(z) \land O(b))$
6. $\forall x\, (E(x) \rightarrow \neg O(d))$

10.1.9 Beweise für logische Wahrheit und logische Falschheit

Logische Wahrheit. Eine Formel A ist logisch wahr gdw für alle Interpretationen $\mathfrak{I} = \langle \mathbf{D}, \varphi \rangle$ und alle (mögliche) Variablenbelegungen σ (unter $\mathfrak{I}$): $\varphi_\sigma(A) = \mathtt{w}$.

Zum Beispiel ist die Formel ‚$O(a) \lor \neg O(a)$' logisch wahr.

Beweis. Sei $\mathfrak{I}$ eine beliebige Interpretation und σ eine beliebige Variablenbelegung. Wir wissen, dass die Formel ‚$O(a)$' unter $\mathfrak{I}$ und σ entweder wahr oder falsch ist – das heißt, es gilt entweder $\varphi_\sigma(O(a)) = \mathtt{w}$ oder $\varphi_\sigma(O(a)) = \mathtt{f}$.

Sei $\varphi_\sigma(O(a)) = \mathtt{w}$. Dann ist (nach Def. 19.4) $\varphi_\sigma(O(a) \lor \neg O(a)) = \mathtt{w}$. Sei jetzt $\varphi_\sigma(O(a)) = \mathtt{f}$. Dann ist (nach Def. 19.2) $\varphi_\sigma(\neg O(a)) = \mathtt{w}$ und, folglich (nach Def. 19.4), $\varphi_\sigma(O(a) \lor \neg O(a)) = \mathtt{w}$.

Da in beiden einander ausschließenden Fällen folgt, dass $\varphi_\sigma(O(a) \lor \neg O(a)) = \mathtt{w}$, gilt insgesamt $\varphi_\sigma(O(a) \lor \neg O(a)) = \mathtt{w}$. □

Logische Falschheit. Eine Formel A ist logisch falsch gdw für alle Interpretationen $\mathfrak{I} = \langle \mathbf{D}, \varphi \rangle$ und alle (mögliche) Variablenbelegungen σ (unter $\mathfrak{I}$): $\varphi_\sigma(A) = \mathtt{f}$.

Zum Beispiel ist die Formel ‚$O(a) \land \neg O(a)$' logisch falsch.

Beweis. Wir wissen, dass die Formel ‚$O(a)$' unter $\mathfrak{I}$ und σ entweder wahr oder falsch ist – das heißt, es gilt entweder $\varphi_\sigma(O(a)) = \mathtt{w}$ oder $\varphi_\sigma(O(a)) = \mathtt{f}$.

Sei $\varphi_\sigma(O(a)) = \mathtt{w}$. Dann ist (nach Def. 19.1) $\varphi_\sigma(\neg O(a)) = \mathtt{f}$ und, folglich (nach Def. 19.5), $\varphi_\sigma(O(a) \land \neg O(a)) = \mathtt{f}$. Sei jetzt $\varphi_\sigma(O(a)) = \mathtt{f}$. Dann ist (nach Def. 19.5), $\varphi_\sigma(O(a) \land \neg O(a)) = \mathtt{f}$.

Da in beiden einander ausschließenden Fällen folgt, dass $\varphi_\sigma(O(a) \land \neg O(a)) = \mathtt{f}$, gilt insgesamt $\varphi_\sigma(O(a) \land \neg O(a)) = \mathtt{f}$. □

Kontingenz. Eine Formel A ist nicht logisch wahr, wenn es mindestens eine $\mathfrak{I} = \langle \mathbf{D}, \varphi \rangle$ und eine σ gibt, sodass $\varphi_\sigma(A) = \mathtt{f}$. Eine Formel A ist nicht logisch falsch, wenn es mindestens eine $\mathfrak{I} = \langle \mathbf{D}, \varphi \rangle$ und eine σ gibt, sodass $\varphi_\sigma(A) = \mathtt{w}$.

Folglich ist eine Formel A kontingent, wenn Folgendes gilt:

1. Es gibt mindestens eine $\mathfrak{I} = \langle \mathbf{D}, \varphi \rangle$ und eine σ, sodass $\varphi_\sigma(A) = \mathtt{w}$ (Beispiel).
2. Es gibt mindestens eine $\mathfrak{I} = \langle \mathbf{D}, \varphi \rangle$ und eine σ, sodass $\varphi_\sigma(A) = \mathtt{f}$ (Gegenbeispiel).

Zum Beispiel ist die Formel ‚$D(x, a)$' kontingent:

Beispiel

Ein Beispiel für eine Interpretation $\mathfrak{I}$, die ‚$D(x, a)$' wahr macht, ist das auf Seite 137.

Gegenbeispiel

Ein Beispiel für eine Interpretation $\mathfrak{I}$, die ‚$D(x, a)$' falsch macht, ist das auf Seite 137, jedoch mit dem Unterschied, dass $\varphi(a) = 3$.

Aktivierungselement 10.9. Bestimmen Sie für jede dieser Formeln, ob sie logisch wahr, logisch falsch oder kontingent ist.

1. $O(x) \vee E(x)$
2. $\exists x\,(O(x) \vee E(x))$
3. $O(y) \vee \neg O(y)$
4. $\forall y\,(O(y) \vee \neg O(y))$
5. $E(z) \wedge \neg E(z)$
6. $\forall z\,(E(x) \wedge \neg E(z))$

10.1.10 Lösungen zu Aktivierungselemente

Lösung zum Aktivierungselement 10.1. Bestimmen Sie, ob die folgenden Formeln unter $\mathfrak{I}$ (und beliebige σ) wahr oder falsch sind.

1. $\varphi_{\sigma_i}(O(b)) = \mathtt{f}$ für $i = 1, \ldots, 5$

Erklärung: Das Schema unten zeigt dieses Ergebnis.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{2 \text{ ist } \textit{nicht} \text{ ungerade}}{2 \notin \{d \in \mathbf{D} \mid d \text{ ist gerade}\}}}{\varphi(b) \notin \varphi(O)}}{\varphi_\sigma(E(a)) = \mathtt{f}}$$

2. $\varphi_{\sigma_i}(E(b)) = \mathtt{w}$ für $i = 1, \ldots, 5$

Erklärung: Das Schema unten zeigt dieses Ergebnis.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{2 \text{ ist gerade}}{2 \in \{d \in \mathbf{D} \mid d \text{ ist gerade}\}}}{\varphi(b) \in \varphi(E)}}{\varphi_\sigma(E(b)) = \mathtt{w}}$$

3. $\varphi_{\sigma_i}(O(c)) = \mathtt{w}$ für $i = 1, \ldots, 5$

Erklärung: Das Schema unten zeigt dieses Ergebnis.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{3 \text{ ist ungerade}}{3 \in \{d \in \mathbf{D} \mid d \text{ ist ungerade}\}}}{\varphi(c) \in \varphi(O)}}{\varphi_\sigma(O(c)) = \mathtt{w}}$$

4. $\varphi_{\sigma_i}(E(d)) = \mathtt{w}$ für $i = 1, \ldots, 5$

Erklärung: Das Schema unten zeigt dieses Ergebnis.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{4 \text{ ist gerade}}{4 \in \{d \in \mathbf{D} \mid d \text{ ist gerade}\}}}{\varphi(d) \in \varphi(E)}}{\varphi_\sigma(E(d)) = \mathtt{w}}$$

Lösung zum Aktivierungselement 10.2.

Gegeben seien die folgenden Variablenbelegungen in Bezug auf die Interpretation $\mathfrak{I}$ auf Seite 137:

$$\sigma_1 = 1, 1, 3, 4, \ldots \quad \sigma_2 = 2, 2, 4, 4, \ldots \quad \sigma_3 = 3, 3, 2, 4, \ldots$$

Bestimmen Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

1. $\sigma_1(x_1) = \sigma_2(x_1)$. falsch
2. $\sigma_1(x_1) = \sigma_1(x_2)$. wahr
3. $\sigma_3(x_2) = \sigma_1(x_3)$. wahr
4. $\sigma_2(x_2) = \sigma_3(x_3)$. wahr
5. Es gibt eine Variabel v, sodass $\sigma_1(v) = \sigma_2(v) = \sigma_3(v)$.

Antwort: Wahr, die Variabel x_4.

6. Es gibt eine Variablenbelegung σ, sodass $\sigma_i(x_1) = \sigma_i(x_2)$.

Antwort: Wahr, z.B. die Variablenbelegungen $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$. Es gibt jedoch mehr.

7. Für alle Variablenbelegungen σ, $\sigma_i(x_1) = \sigma_i(x_2)$.

Antwort: Falsch. Dies gilt für $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, aber nicht für alle (mögliche) Variablenbelegungen σ. Dies gilt z.B. nicht für $\sigma := 1, 2, 3, 4, \ldots$.

8. Für alle Variablenbelegungen σ und σ': $\sigma(x_4) = \sigma'(x_4)$.

Antwort: Falsch. Dies gilt für $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, aber nicht für alle (mögliche) Variablenbelegungen σ. Dies gilt z.B. nicht für $\sigma := 5, 5, 5, 5, \ldots$ und $\sigma' := 6, 6, 6, 6, \ldots$.

Belegungen auf die Seite 140:
$\sigma_1 = 1, 2, 3, \ldots$
$\sigma_2 = 2, 2, 3, \ldots$
$\sigma_3 = 3, 4, 3, \ldots$
$\sigma_4 = 3, 4, 2, \ldots$
$\sigma_5 = 4, 3, 2, \ldots$

Lösung zum Aktivierungselement 10.3. Bestimmen Sie, ob die folgenden Formeln unter $\mathfrak{I}$ und die Variablenbelegungen auf die Seite 140 wahr oder falsch sind.

Antwort

	Formel	φ_{σ_1}	φ_{σ_2}	φ_{σ_3}	φ_{σ_4}	φ_{σ_5}
1.	$O(x)$	w	f	w	w	f
2.	$O(z)$	w	w	w	f	f
3.	$E(x)$	w	w	f	f	w
4.	$E(y)$	w	w	w	w	f
5.	$H(y)$	f	f	f	f	f
6.	$H(z)$	f	f	f	f	f

Lösung zum Aktivierungselement 10.4. Bestimmen Sie, ob die folgenden Formeln unter $\mathfrak{I}$ und σ_i (auf Seite 140) wahr oder falsch sind.

Antwort

	Formel	φ_{σ_1}	φ_{σ_2}	φ_{σ_3}	φ_{σ_4}	φ_{σ_5}
1.	$G(x, b)$	f	f	w	w	w
2.	$G(x, z)$	f	f	f	w	w
3.	$L(z, b)$	f	f	f	f	f
4.	$L(x, x)$	f	f	f	f	f
5.	$D(y, z)$	f	f	f	w	f
6.	$D(z, z)$	w	w	w	w	w

Lösung zum Aktivierungselement 10.5. Bestimmen Sie, ob die folgenden Formeln unter $\mathfrak{I}$ und σ_i (auf Seite 140) wahr oder falsch sind.

Antwort

	Formel	φ_{σ_1}	φ_{σ_2}	φ_{σ_3}	φ_{σ_4}	φ_{σ_5}
1.	$G(d, x) \land E(d)$	w	w	w	w	f
2.	$G(c, x) \lor O(d)$	w	w	f	f	f
3.	$L(z, c) \longrightarrow D(y, z)$	w	w	w	w	f
4.	$D(y, z) \longrightarrow \neg L(z, b)$	w	w	w	f	w
5.	$O(x) \land O(c) \land O(z)$	w	f	w	f	f
6.	$\neg E(y) \longrightarrow (G(c, x) \lor O(d))$	w	w	w	w	f

Lösung zum Aktivierungselement 10.6. Bestimmen Sie, ob die Variablenbelegungen $\sigma_1, \ldots, \sigma_{10}$ oben Varianten voneinander sind und, falls ja, bezüglich welcher Variable(n).

- Sind σ_i und σ_j keine Varianten voneinander, so wird dies durch ‚–' markiert.
- Sind σ_i und σ_j Varianten voneinander, so wird in der entsprechenden Schnittzelle angegeben, bezüglich welcher Variable sie Varianten sind.
- Sind sie bezüglich aller Variablen Varianten, so wird dies durch ‚·' markiert.

Antwort

	σ_1	σ_2	σ_1	σ_4	σ_5	σ_6	σ_7	σ_8	σ_9	σ_{10}
σ_1	·	–	–	–	x_{10}	x_2	x_5	–	–	–
σ_2	–	·	–	–	–	–	–	–	–	–
σ_3	–	–	·	–	–	–	–	–	x_{11}	–
σ_4	–	–	–	·	–	–	–	–	–	–
σ_5	x_{10}	–	–	–	·	–	–	–	–	–
σ_6	x_2	–	–	–	–	·	–	–	–	–
σ_7	x_5	–	–	–	–	–	·	–	–	–
σ_8	–	–	–	–	–	–	x_5	·	–	–
σ_9	–	–	x_{11}	–	–	–	–	–	·	–
σ_{10}	–	–	–	–	–	–	–	–	–	·

Belegungen auf die Seite 140:
$\sigma_1 = 1, 2, 3, \ldots$
$\sigma_2 = 2, 2, 3, \ldots$
$\sigma_3 = 3, 4, 3, \ldots$
$\sigma_4 = 3, 4, 2, \ldots$
$\sigma_5 = 4, 3, 2, \ldots$

Lösung zum Aktivierungselement 10.7. (i) Bestimmen Sie, ob die folgenden Formeln unter $\mathfrak{I}$ und σ_i (auf Seite 140) wahr oder falsch sind.

Antwort

	Formel	φ_{σ_1}	φ_{σ_2}	φ_{σ_3}	φ_{σ_4}	φ_{σ_5}
1.	$\exists y\, H(y)$	f	f	f	f	f
2.	$\exists y\, \neg H(y)$	w	w	w	w	w
3.	$\forall x\, (E(x) \leftrightarrow \neg O(x))$	w	w	w	w	w
4.	$\exists x\, D(a, x)$	w	w	w	w	w
5.	$\exists x\, D(z, x)$	w	w	w	w	w
6.	$\forall z\, \exists x\, D(z, x)$	w	w	w	w	w
7.	$\forall z\, D(z, x)$	w	f	f	f	f
8.	$\exists x\, \forall z\, D(z, x)$	w	w	w	w	w
9.	$\exists z\, \neg D(z, x)$	f	w	w	w	w
10.	$\forall x\, \exists z\, \neg D(z, x)$	f	f	f	f	f

(ii) Ist der Wahrheitswert einer geschlossenen quantifizierten Formel sensitiv gegenüber der Wahl der Variablenbelegung, oder bleibt er invariant?

Antwort: Er bleibt invariant.

Lösung zum Aktivierungselement 10.8 Bestimmen Sie, ob die folgenden Formeln unter $\mathfrak{I}$ (in Seite 137) wahr oder falsch sind.

1. $\exists y\, H(y)$ — wahr
2. $\forall z\, H(z)$ — falsch
3. $E(x) \leftrightarrow \neg O(x)$ — wahr
4. $\exists x\, \neg H(x)$ — wahr
5. $\exists z\, (E(z) \wedge O(b))$ — falsch
6. $\forall x\, (E(x) \rightarrow \neg O(d))$ — wahr

Lösung zum Aktivierungselement 10.9 Bestimmen Sie für jede dieser Formeln, ob sie logisch wahr, logisch falsch oder kontingent ist.

1. $O(x) \vee E(x)$ — kontingent
2. $\exists x\, (O(x) \vee E(x))$ — kontingent
3. $O(y) \vee \neg O(y)$ — logisch wahr
4. $\forall y\, (O(y) \vee \neg O(y))$ — logisch wahr
5. $E(z) \wedge \neg E(z)$ — logisch falsch
6. $\forall z\, (E(x) \wedge \neg E(z))$ — kontingent

10.2 Übungen

Übung 10.1.1.

1. Worauf beziehen sich singuläre Terme?
2. Was sind die Extensionen von n-stelligen Prädikaten (generellen Termen)?

Übung 10.1.2.

1. Geben Sie (natürsprachliche) singuläre Terme an, und erläutern Sie, was deren Referenz ist.
2. Geben Sie (natürsprachliche) Prädikate (mit jeweils verschiedener Stellenzahl) an, und erläutern Sie, was deren Extension ist.

Übung 10.1.3. Was sind die zwei wichtigen Eigenschaften von n-Tupeln?

Übung 10.1.4. Was ist das n-fache Cartesische Produkt

$$\mathbf{D}^n = \underbrace{\mathbf{D} \times \ldots \times \mathbf{D}}_{n-\text{mal}}$$

der Menge **D**?

Übung 10.1.5. Definieren Sie, was eine prädikatenlogische Interpretation ist.

Übung 10.1.6. Definieren Sie, was eine Variablenbelegung unter einer Interpretation ist.

Übung 10.1.7. Was heißt es, daß eine Variablenbelegung eine v-Variante einer Variablenbelegung ist?

Übung 10.1.8. Erläutern Sie, unter welchen Bedingungen eine Formel – gegeben eine Interpretation sowie eine Variablenbelegung unter dieser Interpretation – wahr bzw. falsch ist.

Übung 10.1.9. In $\mathfrak{I}$ und unter $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ zu bewertende Formeln: Stellen Sie fest, welche der dieser Formeln wahr bzw. falsch gemäß $\varphi_{\sigma_1}, \varphi_{\sigma_2}, \varphi_{\sigma_3}$ sind.

Interpretation: $\mathfrak{I} = \langle \mathbf{D}, \varphi \rangle$

$$\begin{aligned}
\mathbf{D} &= \{Barack, Joachim, Joseph\},\\
\varphi(a) &= Barack, \quad \varphi(b) = Joachim, \quad \varphi(c) = Joseph,\\
\varphi(P) &= \{Barack, Joachim\}\\
&= \{d \in \mathbf{D} \mid d \text{ ist Präsident}\},\\
\varphi(M) &= \{Barack, Joachim, Joseph\}\\
&= \{d \in \mathbf{D} \mid d \text{ ist ein Mensch}\},\\
\varphi(Z) &= \{\} = \{d \in \mathbf{D} \mid d \text{ ist eine Zahl}\},\\
\varphi(\ddot{A}) &= \{\langle Joseph, Barack\rangle, \langle Joseph, Joachim\rangle,\\
&\qquad \langle Joachim, Barack\rangle\},\\
&= \{\langle d_1, d_2\rangle \in \mathbf{D}^2 \mid d_1 \text{ ist alter als } d_2\}.
\end{aligned}$$

Variablenbelegungen

$\sigma_1 = Barack, Joachim, Joseph, \ldots$

$\sigma_2 = Joachim, Joachim, Joseph, \ldots$

$\sigma_3 = Joseph, Joachim, Joseph, \ldots$

10. $P(a)$
11. $P(b)$
12. $P(x)$
13. $M(c)$
14. $M(x)$
15. $Z(a)$
16. $Z(x)$
17. $\ddot{A}(a, b)$
18. $\ddot{A}(y, a)$
19. $\neg P(c)$
20. $\neg Z(x)$
21. $\ddot{A}(c, b) \wedge \neg P(x)$
22. $\forall x\, M(x)$
23. $\neg \forall x\, P(x)$
24. $\exists y\, Z(y)$
25. $\exists x\, P(x)$
26. $\neg \forall x\, P(x) \vee P(c)$
27. $\ddot{A}(b, a) \longrightarrow \exists x\, (P(x) \wedge Z(x))$
28. $\forall x \exists y\, \ddot{A}(x, y)$
29. $\exists x \forall y\, \ddot{A}(x, y)$
30. $\ddot{A}(y, x) \wedge \ddot{A}(z, y) \longrightarrow \ddot{A}(z, x)$

Übung 10.1.10.

1. Denken Sie sich drei weitere Variablenbelegungen (in Bezug auf $\mathfrak{I}$) aus und bewerten Sie die Formel 30.
2. Ist die Formel 30 wahr in $\mathfrak{I}$ unabhängig von der Wahl der Variablenbelegung?
3. Stellen Sie fest, welche der oben vorkommenden *geschlossenen* Formeln wahr bzw. falsch gemäß φ (d.h., in $\mathfrak{I}$) sind.

Übung 10.2. Überprüfen Sie die folgenden Formeln auf logische Wahrheit, logische Falschheit, bzw. Kontingenz. Argumentieren Sie für das Vorliegen von logischer Wahrheit/Falschheit auf Basis der semantischen Regeln, für das Vorliegen von Kontingenz jedoch durch Angabe von passenden Interpretationen (und Variablenbelegungen).

1. $M(x) \lor G(c)$
2. $\exists y\,(G(y) \land \neg G(y))$
3. $\forall x\,(P(x) \rightarrow \neg P(x))$
4. $\forall x\,P(x) \rightarrow \exists x\,P(x)$
5. $P(x) \rightarrow P(y)$
6. $P(x) \rightarrow P(x)$
7. $\exists x\,P(x) \rightarrow \forall x\,P(x)$
8. $\neg\forall x\,P(x) \leftrightarrow \exists x\,\neg P(x)$
9. $P(a,b) \land \forall x\,\neg\exists y\,P(x,y)$
10. $\forall x\,\forall y\,P(x,y) \rightarrow \forall y\,\forall x\,P(x,y)$
11. $P(x) \rightarrow \forall y\,P(y)$
12. $P(x) \rightarrow \forall y\,P(x)$
13. $\exists x\,\forall y\,P(x,y) \rightarrow \forall y\,\exists x\,P(x,y)$

Übung 10.3. In den folgenden Beispielen wird das Bestehen gewisser logischer Folgerungen behauptet. Überprüfen Sie diese Behauptungen auf ihre Richtigkeit! Argumentieren Sie entweder für die Behauptungen mit Hilfe der semantischen Regeln, oder widerlegen Sie die Behauptungen durch Angabe von Gegenbeispielen in Form von Interpretationen (und Variablenbelegungen).

1. $P(a) \vDash \exists x\, P(x)$
2. $\forall x\, (P(x) \rightarrow Q(x)) \vDash \exists x\, P(x) \rightarrow \exists x\, Q(x)$
3. $\forall x\, (P(x) \rightarrow Q(x)) \vDash \exists x\, Q(x)$
4. $\forall x\, \forall y\, P(x, y) \vDash \forall x\, \exists y\, P(x, y)$
5. $\exists x\, (P(y) \wedge Q(x)) \vDash P(y) \wedge \exists x\, Q(x)$
6. $\exists x\, P(y) \vDash \forall y\, P(x)$
7. $\forall x\, \forall y\, P(x, y) \vDash P(a, b) \wedge P(c, d)$
8. $\forall x\, (P(x) \rightarrow Q(x)), P(a) \vDash Q(a)$
9. $\forall x\, \exists y\, P(x, y) \vDash \exists y\, P(y, y)$
10. $\forall x\, (P(x) \vee Q(x)), \neg\exists y\, Q(y) \vDash \forall x\, P(x)$
11. $\forall x\, (P(x) \vee Q(x)), \neg Q(y) \vDash \forall x\, P(x)$
12. $P(a_1), P(a_2), \ldots, P(a_{10000}) \vDash \forall x\, P(x)$

10.2.1 Lösungen

Lösung zu Übung 10.1.1. 1. Worauf beziehen sich singuläre Terme?

Antwort: Singuläre Terme beziehen sich auf einzelne Objekte des Gegenstandsbereichs.

2. Was sind die Extensionen von n-stelligen Prädikaten (generellen Termen)?

Antwort: Die Extensionen von n-stelligen Prädikaten sind Mengen von n-Tupeln von Objekten des Gegenstandsbereichs.

Lösung zu Übung 10.1.2.

1. Geben Sie (natürsprachliche) singuläre Terme an, und erläutern Sie, was deren Referenz ist.

Antwort: Wir geben mehrere.

(1) Die Referenz von ‚Sokrates' ist (der Philosoph) $Sokrates$.

(2) Die Referenz von ‚Aristoteles' ist (der Philosoph) $Aristoteles$.

(3) Die Referenz von ‚der Stagirit' ist auch $Aristoteles$.

(4) Die Referenz von ‚die Sonne' ist $die\ Sonne$ (der Stern im Sonnensystem).

(5) Die Referenz von ‚Mount Everest' ist der $Mount\ Everest$ (der höchste Berg der Welt).

(6) Die Referenz von ‚Freddie Mercury' ist $Freddie\ Mercury$ (der Hauptänger der Gruppe Queen).

(7) Die Referenz von ‚der Zahl eins' oder ‚eins' ist 1.

Bemerkung

Die Terme ‚der Hauptsänger der Gruppe Beatles' oder ‚der Verfasser von *Principia Mathematica*' sind keine singulären Terme, da mehr als eine Person diese Beschreibungen erfüllen könnten.

- Die Beschreibung ‚der Hauptsänger der Beatles' kann auf $John\ Lennon$ und $Paul\ McCartney$ zutreffen.
- Die Beschreibung ‚der Verfasser von *Principia Mathematica*' kann auf $Bertrand\ Russell$ und $Alfred\ North\ Whitehead$ zutreffen.

2. Geben Sie (natürsprachliche) Prädikate an, und erläutern Sie, was deren Extension ist.

Antwort 1

Die Extension von ‚Mitglied von The Beatles' ist die Menge **B** von Gegenstände d, sodass ‚d ist ein Mitglied von The Beatles' wahr ist. Die Elemente der Menge **B** sind:

$$\begin{aligned}\mathbf{B} &= \{George, John, Paul, Ringo\} \\ &= \{d \mid d \text{ ist ein Mitglied von The Beatles}\},\end{aligned}$$

weil alle folgenden Sätze wahr sind:

- $George$ ist ein Mitglied von The Beatles.
- $John$ ist ein Mitglied von The Beatles.
- $Paul$ ist ein Mitglied von The Beatles.
- $Ringo$ ist ein Mitglied von The Beatles.

Es ist jedoch *nicht* der Fall, dass:

$$Freddie \in \mathbf{B},$$

weil der folgende Satz *nicht* wahr ist:

- $Freddie$ ist ein Mitglied von The Beatles.

Anders gesagt: $Freddie \notin \mathbf{B}$, denn $Freddie$ ist **kein** Mitglied von The Beatles.

Antwort 2

Die Extension von ‚Rockgruppe' ist die Menge **G** von Gegenstände d, sodass ‚d ist eine Rockgruppe' wahr ist. Einige Elemente der Menge **G** sind:

$$The\ Beatles, Queen, Wings, Led\ Zeppelin,$$

$$The\ Police, Serú\ Girán, Invisible,$$

weil alle folgenden Sätze wahr sind:

- $The\ Beatles$ ist eine Rockgruppe.

  ⋮

- $Invisible$ ist eine Rockgruppe.

Es ist jedoch *nicht* der Fall, dass:

$$Freddie \in \mathbf{G},$$

weil der folgende Satz *nicht* wahr ist:

- $Freddie$ ist eine Rockgruppe. (Er ist ein Rocksänger.)

Antwort 3

Die Extension von ‚... Mitglied von ...' ist die Menge **M** von 2-Tupeln $\langle d_1, d_2 \rangle$, sodass ‚d_1 ist ein Mitglied von d_2' wahr ist.

Einige Elemente der Menge **G** sind:

$$\langle George, The\ Beatles\rangle, \langle John, The\ Beatles\rangle, \langle Paul, The\ Beatles\rangle, \langle Ringo, The\ Beatles\rangle,$$
$$\langle Freddie, Queen\rangle, \langle Brian, Queen\rangle, \langle Paul, Wings\rangle, \langle Sting, The\ Police\rangle,$$
$$\langle Robert, Led\ Zeppelin\rangle, \langle Charly, Serú\ Girán\rangle, \langle Luis, Invisible\rangle, \langle Lito, Los\ Gatos\rangle,$$

weil alle folgenden Sätze wahr sind:

- $George$ ist ein Mitglied von $The\ Beatles$.

  ⋮

- $Luis$ ist ein Mitglied von $Invisible$.

Es ist jedoch *nicht* der Fall, dass:

$$\langle Freddie, The\ Beatles\rangle \in \mathbf{G},$$

weil der folgende Satz *nicht* wahr ist:

- $Freddie$ ist ein Mitglied von $The\ Beatles$.

Antwort 4

Die Extension von ‚... ist der Vater von ...' ist die Menge **V** von 2-Tupeln d_1, d_2, sodass ‚d_1 ist der Vater d_2' wahr ist.

Einige Elemente der Menge **V** sind:

$$\langle Joe\ Biden, Hunter\ Biden\rangle, \langle Hermann\ Hesse, Bruno\ Hesse\rangle,$$
$$\langle Martin\ Sheen, Charlie\ Sheen\rangle, \langle Henry\ Fonda, Jane\ Fonda\rangle.$$

Es ist jedoch *nicht* der Fall, dass:

$$\langle Donald\ Trump, Hunter\ Biden\rangle, \langle Henry\ Fonda, Marlon\ Brando\rangle,$$
$$\langle Hunter\ Biden, Joe\ Biden\rangle, \langle Bruno\ Hesse, Hermann\ Hesse\rangle,$$
$$\langle Charlie\ Sheen, Martin\ Sheen\rangle, \langle Jane\ Fonda, Henry\ Fonda\rangle \in \mathbf{V},$$

weil alle folgenden Sätze *nicht* wahr sind:

- $Donald\ Trump$ ist der Vater von $Hunter\ Biden$.

  ⋮

- $Jane\ Fonda$ ist der Vater von $Henry\ Fonda$.

Bemerkung

Hier sehen wir, warum es wichtig ist, dass die Elemente von n-Tupeln geordnet sind.

Antwort 5

Die Extension von ‚... hat/haben (den Krieg) ... gegen ... verloren' ist die Menge K von 3-Tupeln d_1, d_2, d_3, sodass ‚d_1 hat/haben d_2 gegen d_3 verloren' wahr ist.

Einige Elemente der Menge K sind:

$$\langle Karthago, der\ 3.\ Punischer\ Krieg, das\ Römische\ Reich\rangle,$$
$$\langle die\ Mittelmächte, der\ 1.\ Weltkrieg, die\ Alliierte\rangle.$$

Es ist jedoch *nicht* der Fall, dass:

$$\langle das\ Römische\ Reich, der\ 3.\ Punischer\ Krieg, Karthago\rangle,$$
$$\langle die\ Alliierte, der\ 1.\ Weltkrieg, die\ Mittelmächte\rangle,$$
$$\langle der\ 3.\ Punischer\ Krieg, Karthago, das\ Römische\ Reich\rangle,$$
$$\langle Karthago, Römisches\ Reich, der\ 3.\ Punischer\ Krieg\rangle \in \mathbf{K}.$$

Bemerkung

Außerdem wäre es unsinnig zu sagen, dass die zwei letzten 3-Tupeln in der Extension von K sind. Denn es wäre nicht nur unwahr, sondern auch unsinnig, das Folgende zu sagen:

- $Der\ 3.\ Punischer\ Krieg$ hat/haben $Karthago$ gegen $das\ Römische\ Reich$ verloren.
- $Karthago$ hat/haben $das\ Römisches\ Reich$ gegen $den\ 3.\ Punischer\ Krieg$ verloren.

Antwort 6

Die Extension von ‚... hat (das Land oder Reich) ... von (dem Jahr) ... bis (zum Jahr) ... regiert' ist die Menge $\mathbf{R}$ von 4-Tupeln $\langle d_1, d_2, d_3, d_4\rangle$, sodass ‚$d_1$ hat d_2 von d_3 bis d_4 regiert' wahr ist.

Einige Elemente der Menge $\mathbf{R}$ sind:

$$\langle Napoleon\ Bonaparte, Französisches\ Kaiserreich, 1804, 1814\rangle,$$
$$\langle Josef\ Stalin, Sowjetunion, 1922, 1952\rangle.$$

Lösung zu Übung 10.1.3. Was sind die zwei wichtigen Eigenschaften von n-Tupeln?

Antwort

(a) Die Elemente sind *geordnet*, d.h.: Sie haben einen fixen ihnen zugeordneten Platz im n-Tupel.

(b) Die Elemente können *mehrfach* vorkommen.

Lösung zu Übung 10.1.4. Was ist das n-fache Cartesische Produkt

$$\mathbf{D}^n = \underbrace{\mathbf{D} \times \ldots \times \mathbf{D}}_{n-\text{mal}}$$

der Menge **D**?

Antwort: Es ist die Menge aller n-Tupel von **D**.

Lösung zu Übung 10.1.5. Definieren Sie, was eine prädikatenlogische Interpretation ist.

Antwort: Siehe Def. 17.

Lösung zu Übung 10.1.6. Definieren Sie, was eine Variablenbelegung unter einer Interpretation ist.

Antwort (siehe Def. 18): Eine Variablenbelegung ordnet jeder Variablen v ein Element $d \in \mathbf{D}$ zu.

Lösung zu Übung 10.1.7. Was heißt es, daß eine Variablenbelegung eine v-Variante einer Variablenbelegung ist?

Antwort (siehe S. 254)

Eine v-Variante σ' von σ ist eine Belegung, die für alle Variablen v', wenn $v' \neq v$, dann $\varphi_{\sigma'}(v') = \varphi_\sigma(v')$.

Mit anderem Worten: Eine v-Variante σ' von σ ist eine Belegung, die σ für alle Variablen mit der möglichen Ausnahme von v entspricht.

Lösung zu Übung 10.1.8. Erläutern Sie, unter welchen Bedingungen eine Formel wahr bzw. falsch ist.

Antwort (siehe Def. 19)

Eine prädikatenlogische Bewertung φ_σ relativ zu einer Interpretation $\mathfrak{I} = \langle \mathbf{D}, \varphi \rangle$ und einer Variablenbelegung σ ist eine Funktion, die:

- *Terme auswertet*: Sie ordnet jedem singulären Term t ein Element $d \in \mathbf{D}$ zu, basierend auf σ und der Interpretationsfunktion φ.
- *Formeln Wahrheitswerte zuweist*: Sie weist jeder Formel A einen Wahrheitswert $\mathtt{w}$ (wahr) oder $\mathtt{f}$ (falsch) zu, gemäß den Regeln:

1. Atomare Formeln:

   $\varphi_\sigma(P^n(t_1, \ldots, t_n)) = \mathtt{w}$ gdw $\langle \varphi_\sigma(t_1), \ldots, \varphi_\sigma(t_n) \rangle \in \varphi(P^n)$.

2. Negation:

   $\varphi_\sigma(\neg A) = \mathtt{w}$ gdw $\varphi_\sigma(A) = \mathtt{f}$.

3. Konjunktion:

   $\varphi_\sigma(A \wedge B) = \mathtt{w}$ gdw $\varphi_\sigma(A) = \mathtt{w}$ und $\varphi_\sigma(B) = \mathtt{w}$.

4. Disjunktion:

   $\varphi_\sigma(A \vee B) = \mathtt{w}$ gdw $\varphi_\sigma(A) = \mathtt{w}$ oder $\varphi_\sigma(B) = \mathtt{w}$.

5. Implikation:

   $\varphi_\sigma(A \rightarrow B) = \mathtt{w}$ gdw $\varphi_\sigma(A) = \mathtt{f}$ oder $\varphi_\sigma(B) = \mathtt{w}$.

6. Äquivalenz:

   $\varphi_\sigma(A \leftrightarrow B) = \mathtt{w}$ gdw $\varphi_\sigma(A) = \varphi_\sigma(B)$.

7. Allquantor:

   $\varphi_\sigma(\forall v\, A) = \mathtt{w}$ gdw für alle v-Varianten σ' von σ gilt $\varphi_{\sigma'}(A) = \mathtt{w}$.

8. Existenzquantor:

   $\varphi_\sigma(\exists v\, A) = \mathtt{w}$ gdw es eine v-Variante σ' von σ gibt, sodass $\varphi_{\sigma'}(A) = \mathtt{w}$.

Bemerkung

Negation, Konjunktion, Disjunktion, Implikation und Äquivalenz werden auf ähnliche Weise wie in der Aussagenlogik bewertet.

Lösung zu Übung 10.1.9. In $\mathfrak{I}$ und unter $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ zu bewertende Formeln: Stellen Sie fest, welche der dieser Formeln wahr bzw. falsch gemäß $\varphi_{\sigma_1}, \varphi_{\sigma_2}, \varphi_{\sigma_3}$ sind.

Interpretation: $\mathfrak{I} = \langle \mathbf{D}, \varphi \rangle$

$$\begin{aligned}
\mathbf{D} &= \{Barack, Joachim, Joseph\} \\
\varphi(a) &= Barack \quad \varphi(b) = Joachim \quad \varphi(c) = Joseph \\
\varphi(P) &= \{Barack, Joachim\} \\
&= \{d \in \mathbf{D} \mid d \text{ ist Präsident}\} \\
\varphi(M) &= \{Barack, Joachim, Joseph\} \\
&= \{d \in \mathbf{D} \mid d \text{ ist ein Mensch}\} \\
\varphi(Z) &= \{\} = \{d \in \mathbf{D} \mid d \text{ ist eine Zahl}\} \\
\varphi(\ddot{A}) &= \{\langle Joseph, Barack\rangle, \langle Joseph, Joachim\rangle, \\
&\quad \langle Joachim, Barack\rangle\} \\
&= \{\langle d_1, d_2\rangle \in \mathbf{D}^2 \mid d_1 \text{ ist alter als } d_2\}
\end{aligned}$$

Variablenbelegungen $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ von $\mathfrak{I}$:

$$\begin{aligned}
\sigma_1 &= Barack, Joachim, Joseph, \ldots \\
\sigma_2 &= Joachim, Joachim, Joseph, \ldots \\
\sigma_3 &= Joseph, Joachim, Joseph, \ldots
\end{aligned}$$

Vorbemerkung

Zu unseren Variablenbelegungen ist Folgendes zu bemerken.

(i) $\varphi_{\sigma_1}(x) = Barack$, $\varphi_{\sigma_2}(x) = Joachim$, $\varphi_{\sigma_3}(x) = Joseph$.

(ii) $\sigma_i(y) = Joachim$ für $i = 1, 2, 3$.[42]

(iii) $\sigma_i(z) = Joseph$ für $i = 1, 2, 3$.

(iv) Aus (i–iii) folgt, dass σ_1, σ_2 und σ_3 x-Varianten voneinander sind.

(v) Auch aus (i–iii) folgt, dass σ_1, σ_2 und σ_3 keine y- oder z-Varianten voneinander sind.

(vi) Per Definition (siehe S. 254) ist jede von σ_1, σ_2 und σ_3 sowohl eine x-, y- als auch z-Variante ihrer selbst.

42: D.h., $\varphi_{\sigma_1}(y) = \varphi_{\sigma_2}(y) = \varphi_{\sigma_3}(y) = Joachim$.

Mit diesen Informationen im Hinterkopf werden wir jede Formel Schritt für Schritt durchgehen.

Formeln 10–11.

	Formel	φ_{σ_1}	φ_{σ_2}	φ_{σ_3}
10.	$P(a)$	w	w	w
11.	$P(b)$	w	w	w

Erklärung

Es gibt keine freie Variable, der wir mit den Variablenbelegungen $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ ein Objekt aus unserem Gegenstandsbereich **D** zuordnen können. Folglich bedeutet ‚$P(a)$' unter allen drei Variablenbelegungen $\varphi_{\sigma_1}, \varphi_{\sigma_2}, \varphi_{\sigma_3}$ dasselbe:

$$\mathit{Barack} \text{ ist Präsident.}$$

Daher erhält diese Formel denselben Wahrheitswert in $\varphi_{\sigma_1}, \varphi_{\sigma_2}, \varphi_{\sigma_3}$. Anders gesagt gilt: $\varphi_{\sigma_i}(P(a)) = \mathtt{w}$ für $i = 1, 2, 3$.

Analog dazu können wir auch zeigen, dass $\varphi_{\sigma_i}(P(b)) = \mathtt{w}$ für $i = 1, 2, 3$.

Formel 12.

	Formel	φ_{σ_1}	φ_{σ_2}	φ_{σ_3}
12.	$P(x)$	w	w	f

Erklärung

‚$P(x)$' hat verschiedene Bedeutungen gemäß $\varphi_{\sigma_1}, \varphi_{\sigma_2}, \varphi_{\sigma_3}$.

- $\varphi_{\sigma_1}(P(x)) = \mathtt{w}$, denn $\varphi_{\sigma_1}(x) = \mathit{Barack}$ und Barack ist Präsident – d.h., $\mathit{Barack} \in \varphi(P)$.
- $\varphi_{\sigma_2}(P(x)) = \mathtt{w}$, denn $\varphi_{\sigma_2}(x) = \mathit{Joachim}$ und $\mathit{Joachim}$ ist Präsident – d.h., $\mathit{Joachim} \in \varphi(P)$.
- $\varphi_{\sigma_3}(P(x)) = \mathtt{f}$, denn $\varphi_{\sigma_3}(x) = \mathit{Joseph}$ und Joseph ist *nicht* Präsident – d.h., $\mathit{Joseph} \notin \varphi(P)$.

Formeln 13–16.

	Formel	φ_{σ_1}	φ_{σ_2}	φ_{σ_3}
13.	$M(c)$	w	w	w
14.	$M(x)$	w	w	w
15.	$Z(a)$	f	f	f
16.	$Z(x)$	f	f	f

Erklärung

‚$\varphi_{\sigma_i}(M(c)) = \varphi_{\sigma_i}(M(x)) = \mathtt{w}$' und ‚$\varphi_{\sigma_i}(Z(a)) = \varphi_{\sigma_i}(Z(x)) = \mathtt{f}$' für $i = 1, 2, 3$ gelten, jedoch aus unterschiedlichen Gründen.

‚$\varphi_{\sigma_i}(M(c)) = \mathtt{w}$' und ‚$\varphi_{\sigma_i}(Z(a)) = \mathtt{f}$' gelten für $i = 1, 2, 3$, denn:

$$\varphi(M(c)) = \mathtt{w} \quad \text{und} \quad \varphi(Z(a)) = \mathtt{f}.$$

Dies trifft jedoch nicht auf ‚$M(x)$' oder ‚$Z(x)$' zu. ‚$\varphi(M(x))$' und ‚$\varphi(Z(x))$' sind ohne eine Variablenzuweisung unter $\mathfrak{I}$ nicht wahr oder falsch. Denn ‚$M(x)$' und ‚$Z(x)$' sind offene Formeln, in denen ‚x' unter φ nicht interpretiert wird.

$\varphi_{\sigma_i}(M(x)) = \mathtt{w}$ für $i = 1, 2, 3$, denn:

- $\varphi_{\sigma_1}(M(x)) = \mathtt{w}$ – weil $\varphi_{\sigma_1}(x) = \mathit{Barack}$ und Barack ein Mensch ist.
- $\varphi_{\sigma_2}(M(x)) = \mathtt{w}$ – weil $\varphi_{\sigma_2}(x) = \mathit{Joachim}$ und $\mathit{Joachim}$ ein Mensch ist.
- $\varphi_{\sigma_3}(M(x)) = \mathtt{w}$ – weil $\varphi_{\sigma_3}(x) = \mathit{Joseph}$ und Joseph ein Mensch ist.

Formeln 17–20.

	Formel	φ_{σ_1}	φ_{σ_2}	φ_{σ_3}
17.	$Ä(a,b)$	f	f	f
18.	$Ä(y,a)$	w	w	w
19.a	$P(c)$	f	f	f
19.	$\neg P(c)$	w	w	w
16.	$Z(x)$	f	f	f
20.	$\neg Z(x)$	w	w	w

Erklärung zu 17

Da $Barack$ nicht älter als $Joachim$ ist, folgt, dass $\varphi(Ä(a,b)) = \mathtt{f}$. Folglich $\varphi_{\sigma_i}(Ä(a,b)) = \mathtt{f}$ für $i = 1,2,3$.

Erklärung zu 18

Da $\sigma_i(y) = Joachim$ für $i = 1,2,3$, folgt, dass $\varphi_{\sigma_i}(Ä(y,a)) = \mathtt{w}$ auch für $i = 1,2,3$ – weil $Joseph$ älter als $Barack$ ist.

Erklärung zu 19 und 20

Die Wahrheitswerte der Formel 19 (unter jedem φ_i) ergeben sich aus der Negation der Wahrheitswerte der entsprechenden Spalten der Formel 19.a.

Bei der Analyse dieser Formel (und Formel 20) sind wir analog zur Vorgehensweise bei einer Wahrheitstabelle vorgegangen.

Formel 21.

	Formel	φ_{σ_1}	φ_{σ_2}	φ_{σ_3}
21.a	$Ä(c,b)$	w	w	w
12.	$P(x)$	w	w	f
21.b	$\neg P(x)$	f	f	w
21.	$Ä(c,b) \land \neg P(x)$	f	f	w

Erklärung

Wie oben haben wir auch hier die Vorgehensweise einer Wahrheitstabelle angewendet, wobei wir eine Konjunktion analysiert haben.

Formel 22.

	Formel	φ_{σ_1}	φ_{σ_2}	φ_{σ_3}
14.	$M(x)$	w	w	w
22.	$\forall x\, M(x)$	w	w	w

Erklärung

$\varphi_{\sigma_1}(\forall x\, M(x)) = \mathtt{w}$, denn:

- σ_1 ist eine x-Variante von σ_1, $\varphi_{\sigma_1}(x) = \mathit{Barack}$ und $\varphi_{\sigma_1}(M(x)) = \mathtt{w}$ – weil Barack ein Mensch ist.
- σ_2 ist eine x-Variante von σ_1, $\varphi_{\sigma_2}(x) = \mathit{Joachim}$ und $\varphi_{\sigma_1}(M(x)) = \mathtt{w}$ – weil $\mathit{Joachim}$ ein Mensch ist.
- σ_3 ist eine x-Variante von σ_1, $\varphi_{\sigma_3}(x) = \mathit{Joseph}$ und $\varphi_{\sigma_1}(M(x)) = \mathtt{w}$ – weil Joseph ein Mensch ist.
- Da der Gegenstandsbereich **D** nur aus $\mathit{Barack}, \mathit{Joachim}$ und Joseph besteht, folgt für alle möglichen x-Varianten σ_1' von σ_1, dass $\varphi_{\sigma_1'}(M(x)) = \mathtt{w}$.

Mit derselben Denkweise können wir ebenso zeigen, dass dies auch für σ_2, σ_3 und jede beliebige σ_i gilt. Daher ist auch $\varphi(\forall x\, M(x)) = \mathtt{w}$.

Bemerkung

Hätte der Gegenstandsbereich **D** ein Tier, z.B. Lassie, dann wäre es möglich, die folgende x-Variante von σ_1 zu definieren:

$$\sigma_1' = \mathit{Lassie}, \mathit{Joachim}, \mathit{Joseph}, \ldots$$

D.h., eine x-Variante σ_1' von σ_1, sodass $\varphi_{\sigma_1'}(x) = \mathit{Lassie}$.

Folglich wäre $\varphi_{\sigma_1}(\forall x\, M(x)) = \mathtt{f}$ gewesen, denn:

- σ_1' ist eine x-Variante von σ_1, $\sigma_1' = \mathit{Lassie}$ und $\varphi_{\sigma_1'}(M(x)) = \mathtt{f}$ – weil Lassie kein Mensch ist.

Formel 23.

	Formel	φ_{σ_1}	φ_{σ_2}	φ_{σ_3}
12.	$P(x)$	w	w	f
23.a	$\forall x\, P(x)$	f	f	f
23.	$\neg\forall x\, P(x)$	w	w	w

Erklärung zu 23.a

$\varphi_{\sigma_1}(\forall x\, M(x)) = \texttt{f} \neq \texttt{w}$, weil nicht alle möglichen x-Varianten σ_1' von σ_1 sind, sodass $\varphi_{\sigma_1'}(M(x)) = \texttt{w}$. Zum Beispiel:

- σ_3 ist eine x-Variante von σ_1, $\varphi_{\sigma_3}(x) = \mathit{Joseph}$ und $\varphi_{\sigma_3}(M(x)) = \texttt{f} \neq \texttt{w}$ – weil Joseph kein Präsident ist.

Mit derselben Denkweise können wir ebenso zeigen, dass dies auch für σ_2, σ_3 und jede beliebige σ_i gilt. Daher ist auch $\varphi(\forall x\, M(x)) = \texttt{f}$.

Erklärung zu 23

$\varphi_{\sigma_i}(\neg\forall x\, M(x)) = \texttt{w}$ für $i = 1, 2, 3$ und $\varphi(\neg\forall x\, M(x)) = \texttt{w}$, denn ‚$\neg\forall x\, M(x)$' ist die Verneinung von ‚$\forall x\, M(x)$' und $\varphi_{\sigma_i}(\forall x\, M(x)) = \varphi(\forall x\, M(x)) = \texttt{f}$ für $i = 1, 2, 3$.

Formeln 24–25.

	Formel	φ_{σ_1}	φ_{σ_2}	φ_{σ_3}
16.	$Z(x)$	$\mathtt{f}$	$\mathtt{f}$	$\mathtt{f}$
24.	$\exists y\, Z(y)$	$\mathtt{f}$	$\mathtt{f}$	$\mathtt{f}$
12.	$P(x)$	$\mathtt{w}$	$\mathtt{w}$	$\mathtt{f}$
25.	$\exists x\, P(x)$	$\mathtt{w}$	$\mathtt{w}$	$\mathtt{w}$

Erklärung

$\varphi_{\sigma_1}(\exists y\, Z(y)) = \mathtt{f} \neq \mathtt{w}$, weil es keine mögliche y-Variante σ_1' von σ_1 gibt, sodass $\varphi_{\sigma_1'}(Z(y)) = \mathtt{w}$. Mit anderen Worten:

- σ_1 ist eine y-Variante von σ_1, $\varphi_{\sigma_1}(y) = \mathit{Joachim}$ und $\varphi_{\sigma_1}(Z(y)) = \mathtt{f}$ – weil $\mathit{Joachim}$ keine Zahl ist.
- σ_2 ist eine y-Variante von σ_1, $\varphi_{\sigma_2}(y) = \mathit{Joachim}$ und $\varphi_{\sigma_2}(Z(y)) = \mathtt{f}$ – weil $\mathit{Joachim}$ keine Zahl ist.
- σ_3 ist eine y-Variante von σ_1, $\varphi_{\sigma_3}(y) = \mathit{Joachim}$ und $\varphi_{\sigma_3}(Z(y)) = \mathtt{f}$ – weil $\mathit{Joachim}$ keine Zahl ist.
- Da der Gegenstandsbereich **D** nur aus $\mathit{Barack}, \mathit{Joachim}, \mathit{Joseph}$ besteht, folgt für alle möglichen y-Varianten σ_1' von σ_1, dass $\varphi_{\sigma_1'}(Z(y)) = \mathtt{f}$.

Mit derselben Denkweise können wir ebenso zeigen, dass dies auch für σ_2, σ_3 und jede beliebige σ unter $\mathfrak{I}$ gilt (nicht nur für σ_i mit $i = 1, 2, 3$). Daher ist auch $\varphi(\exists y\, Z(y)) = \mathtt{f} \neq \mathtt{w}$.

Bemerkung

Hätte der Gegenstandsbereich **D** eine Zahl, z.B. 1, dann wäre es möglich, die folgende y-Variante von σ_1 zu definieren:

$$\sigma_1' = \mathit{Barack}, 1, \mathit{Joseph}, \ldots$$

D.h., eine y-Variante σ_1' von σ_1, sodass $\varphi_{\sigma'}(y) = 1$.

Folglich wäre $\varphi_{\sigma_1}(\exists y\, Z(y)) = \mathtt{w}$ gewesen, denn:

- σ_1' ist eine y-Variante von σ_1, $\varphi_{\sigma_1'}(y) = 1$ und $\varphi_{\sigma_1'}(Z(y)) = \mathtt{w}$ – weil 1 eine Zahl ist.

Mit demselben Verfahren können wir ebenso zeigen, ohne unser Gegenstandsbereich **D** zu erweitern, dass $\varphi(\exists x\, P(x)) = \mathtt{w}$.

Formel 26.

	Formel	φ_{σ_1}	φ_{σ_2}	φ_{σ_3}
19.a	$P(c)$	f	f	f
23.	$\neg\forall x\, P(x)$	w	w	w
26.	$\neg\forall x\, P(x) \vee P(c)$	w	w	w

Erklärung

Wie zuvor haben wir auch hier die Vorgehensweise einer Wahrheitstabelle angewendet, wobei wir eine Disjunktion analysiert haben.

Formel 27.

	Formel	φ_{σ_1}	φ_{σ_2}	φ_{σ_3}
27.a	$\ddot{A}(b, a)$	w	w	w
12.	$P(x)$	w	w	f
16.	$Z(x$	f	f	f
27.b	$P(x) \wedge Z(x)$	f	f	f
27.c	$\exists x\, (P(x) \wedge Z(x))$	f	f	f
27.	$\ddot{A}(b, a) \longrightarrow \exists x\, (P(x) \wedge Z(x))$	f	f	f

Erklärung zu 27.a

$\varphi(\ddot{A}(b, a)) =$ w, denn $Joachim$ ist älter als $Barack$ – d.h., denn $\langle Joachim, Barack\rangle \in \varphi(\ddot{A})$. Folglich, ist $\varphi_{\sigma_i}(\ddot{A}(b, a)) =$ w für $i = 1, 2, 3$.

Erklärung zu 27.c

$\varphi_{\sigma_1}(\exists x\,(P(x) \wedge Z(x))) = \mathtt{f}$, weil es keine mögliche x-Variante σ_1' von σ_1 gibt, sodass $\varphi_{\sigma_1'}(P(x) \wedge Z(x)) = \mathtt{w}$. Mit anderen Worten:

- σ_1 ist eine x-Variante von σ_1, $\varphi_{\sigma_1}(x) = \mathit{Barack}$ und $\varphi_{\sigma_1}(P(x) \wedge Z(x)) = \mathtt{f}$ – weil Barack nicht sowohl eine Person als auch eine Zahl ist.
- σ_2 ist eine x-Variante von σ_1, $\varphi_{\sigma_2}(x) = \mathit{Joachim}$ und $\varphi_{\sigma_2}(P(x) \wedge Z(x)) = \mathtt{f}$ – weil $\mathit{Joachim}$ nicht sowohl eine Person als auch eine Zahl ist.
- σ_3 ist eine x-Variante von σ_1, $\varphi_{\sigma_3}(x) = \mathit{Joseph}$ und $\varphi_{\sigma_3}(P(x) \wedge Z(x)) = \mathtt{f}$ – weil Joseph nicht sowohl eine Person als auch eine Zahl ist.
- Da der Gegenstandsbereich **D** nur aus Barack, $\mathit{Joachim}$, Joseph besteht, folgt für alle möglichen X-Varianten σ_1' von σ_1, dass $\varphi_{\sigma_1'}(P(x) \wedge Z(x)) = \mathtt{f}$.

Mit derselben Denkweise können wir ebenso zeigen, dass dies auch für σ_2, σ_3 und jede beliebige σ_i gilt (nicht nur für $i = 1, 2, 3$). Daher ist auch $\varphi(P(x) \wedge Z(x)) = \mathtt{f}$.

Erklärung zu 27.b und 27

Wie zuvor haben wir das Verfahren einer Wahrheitstabelle verwendet, in diesem Fall zur Analyse einer Konjunktion bzw. Implikation.

Frage zu 27

Ist es möglich, unseren Gegenstandsbereich **D** so zu erweitern, dass $\varphi(P(x) \wedge Z(x)) = \mathtt{w}$?

Antwort

Im Prinzip ja. Wir könnten $\mathit{Herrn\ Eins}$ und $\mathit{Frau\ Zwei}$ zu unserem Gegenstandsbereich **D** hinzufügen und φ so modifizieren, dass:

$$\mathit{Herr\ Eins}, \mathit{Frau\ Zwei} \in \varphi(P) \text{ und}$$
$$\mathit{Herr\ Eins}, \mathit{Frau\ Zwei} \in \varphi(Z).$$

Es würde jedoch kaum Sinn ergeben zu sagen, dass etwas zugleich eine Person und eine Zahl ist – es sei denn, wir befinden uns in einer fiktiven Welt wie der von Edwin A. Abbott's *Flatland*.

Formel 28.

	Formel	φ_{σ_1}	φ_{σ_2}	φ_{σ_3}
	$\ddot{A}(x,y)$	f	f	w
28.a	$\exists y\, \ddot{A}(x,y)$	f	w	w
28.	$\forall x\, \exists y\, \ddot{A}(x,y)$	f	f	f

Vorbemerkung

Schauen wir uns an, wie jeder $\varphi_{\sigma_1}, \varphi_{\sigma_2}, \varphi_{\sigma_3}$ die Formel ‚$\ddot{A}(x,y)$' bewertet.

- $\varphi_{\sigma_1}(\ddot{A}(x,y)) = \mathtt{f}$, denn $\varphi_{\sigma_1}(x) = \mathit{Barack}$, $\varphi_{\sigma_1}(y) = \mathit{Joachim}$ und Barack ist nicht älter als $\mathit{Joachim}$ – d.h., $\langle \mathit{Barack}, \mathit{Joachim} \rangle \notin \varphi(\ddot{A})$.
- $\varphi_{\sigma_2}(\ddot{A}(x,y)) = \mathtt{f}$, denn $\varphi_{\sigma_2}(x) = \mathit{Joachim}$, $\varphi_{\sigma_2}(y) = \mathit{Joachim}$ und $\mathit{Joachim}$ ist nicht älter als $\mathit{Joachim}$ – d.h., $\langle \mathit{Joachim}, \mathit{Joachim} \rangle \notin \varphi(\ddot{A})$.
- $\varphi_{\sigma_3}(\ddot{A}(x,y)) = \mathtt{w}$, denn $\varphi_{\sigma_3}(x) = \mathit{Joseph}$, $\varphi_{\sigma_3}(y) = \mathit{Joachim}$ und Joseph ist älter als $\mathit{Joachim}$ – d.h., $\langle \mathit{Joseph}, \mathit{Joachim} \rangle \in \varphi(\ddot{A})$.

Erklärung zu 28.a

Lass uns jede $\varphi_{\sigma_1}, \varphi_{\sigma_2}, \varphi_{\sigma_3}$ analysieren.

- $\varphi_{\sigma_1}(\exists y\, \ddot{A}(x,y)) = \mathtt{f}$, denn es gibt keine y-Variante σ_1' von σ_1, sodass $\varphi_{\sigma_1'}(\ddot{A}(x,y)) = \mathtt{w}$ – weil $\varphi_{\sigma_1}(x) = \mathit{Barack}$ und Barack älter als keiner im Gegenstandsbereich **D** ist.[43]
- $\varphi_{\sigma_2}(\exists y\, \ddot{A}(x,y)) = \mathtt{w}$, denn es gibt eine y-Variante σ_2' von σ_2, sodass $\varphi_{\sigma_2'}(\ddot{A}(x,y))) = \mathtt{w}$.

  Eine solche y-Variante σ_2' kann wie folgt definiert werden:

  $$\sigma_2' = \mathit{Joachim}, \mathit{Barack}, \mathit{Joseph}, \ldots$$

  D.h., als eine y-Variante σ_2' von σ_2, sodass $\varphi_{\sigma_2'}(y) = \mathit{Barack}$. Damit gilt $\varphi_{\sigma_2'}(\ddot{A}(x,y)) = \mathtt{w}$, denn $\varphi_{\sigma_2'}(x) = \mathit{Joachim}$, $\varphi_{\sigma_2'}(y) = \mathit{Barack}$ und $\mathit{Joachim}$ ist älter als Barack – d.h., $\langle \mathit{Joachim}, \mathit{Barack} \rangle \in \varphi(\ddot{A})$.
- $\varphi_{\sigma_3}(\exists y\, \ddot{A}(x,y)) = \mathtt{w}$, denn es gibt mindestens eine y-Variante σ_3' von σ_3[44], sodass $\varphi_{\sigma_3'}(\ddot{A}(x,y)) = \mathtt{w}$.

43: **Bemerkung:** Die Tatsache, dass $\varphi_{\sigma_1}(x) = \mathit{Barack}$, spielt eine zentrale Rolle: σ_1 und alle seine y-Varianten σ_1' belegen Barack mit ‚x'. Die Belegung von ‚x' ändert sich nicht, weil σ_1' in diesem Fall eine y-Variante und keine x-Variante ist. Diese Zuordnung zu ‚x' ist notwendig, damit φ_{σ_1} und $\varphi_{\sigma_1'}$ der Aussage ‚$\ddot{A}(x,y)$' einen Wahrheitswert zuweisen können.

44: **Zum Beispiel:** σ_3 selbst.

Erklärung zu 28

$\varphi_{\sigma_1}(\forall x\, \exists y\, \ddot{A}(x,y)) = \mathtt{f}$, denn nicht alle möglichen x-Varianten σ_1' von σ_1 sind, sodass $\varphi_{\sigma_1'}(\exists y\, \ddot{A}(x,y)) = \mathtt{w}$.[45]

Mit derselben Denkweise können wir ebenso zeigen, dass dies auch für σ_2, σ_3 und jede beliebige σ_i gilt (nicht nur für $i = 1, 2, 3$). Daher ist auch $\varphi(\forall x\, \exists y\, \ddot{A}(x,y)) = \mathtt{f}$.

45: **Zum Beispiel:** σ_1 ist eine x-Variante von σ_1 und $\varphi_{\sigma_1}(\exists y\, \ddot{A}(x,y)) = \mathtt{f}$ – denn Barack ist nicht älter als alle anderen.

Formel 29

	Formel	φ_{σ_1}	φ_{σ_2}	φ_{σ_3}
	$\ddot{A}(x,y)$	f	f	w
29.a	$\forall y\, \ddot{A}(x,y)$	f	f	f
29.	$\exists x\, \forall y\, \ddot{A}(x,y)$	f	f	f

Erklärung zu 29.a

$\varphi_{\sigma_1}(\forall y\, \ddot{A}(x,y)) = \mathtt{f}$, denn nicht alle möglichen y-Varianten σ_1' von σ_1 sind, sodass $\varphi_{\sigma_1'}(\ddot{A}(x,y)) = \mathtt{w}$. Zum Beispiel: σ_1 ist eine y-Variante von σ_1 und $\varphi_{\sigma_1}(\ddot{A}(x,y)) = \mathtt{f}$.

Mit derselben Denkweise können wir ebenso zeigen, dass dies auch für σ_2, σ_3 und jede beliebige σ_i gilt (nicht nur für $i = 1, 2, 3$).

Frage zu 29.a

Es scheint, als ob $Joseph$ der Älteste im Gegenstandsbereich **D** ist. Da $\varphi_{\sigma_3}(x) = Joseph$, warum gilt dann nicht $\varphi_{\sigma_3}(\forall y\, \ddot{A}(x,y)) = \mathtt{w}$? Mit anderen Worten, warum ist ‚$Joseph$ ist älter als jeder' nicht wahr gemäß φ_{σ_3}?

Antwort

Wenn $\varphi_{\sigma_3}(\forall y\, \ddot{A}(x,y)) = \mathtt{w}$ wäre, müsste $\varphi_{\sigma_3'}(\ddot{A}(x,y)) = \mathtt{w}$ für alle y-Varianten σ_3' von σ_3 gelten. Sei eine solche σ_3' wie folgt definiert:

$$\sigma_3' = Joseph, Joseph, Joseph, \ldots$$

D.h., eine y-Variante σ_3' von σ_3, sodass $\varphi_{\sigma_3'}(y) = Joseph$.

Dann wäre $\varphi_{\sigma_3'}(\ddot{A}(x,y)) = \mathtt{w}$, d.h., $Joseph$ wäre älter als $Joseph$ selbst, da $\varphi_{\sigma_3'}(x) = \varphi_{\sigma_3'}(y) = Joseph$. Dies widerspricht jedoch, dass $\langle Joseph, Joseph\rangle \notin \varphi(\ddot{A})$ – d.h., dass $Joseph$ nicht älter als sich selbst ist. Folglich $\varphi_{\sigma_3}(\forall y\, \ddot{A}(x,y)) \neq \mathtt{w}$.

Erklärung zu 29

$\varphi_{\sigma_1}(\exists x\, \forall y\, \ddot{A}(x,y)) = \mathtt{f}$, denn es keine mögliche y-Variante σ_1' von σ_1 gibt, sodass $\varphi_{\sigma_1'}(\forall y\, \ddot{A}(x,y)) = \mathtt{w}$.

Andernfalls gäbe es einen Menschen, der älter ist als jeder, auch als er selbst.

Mit derselben Denkweise können wir ebenso zeigen, dass dies auch für σ_2, σ_3 und jede beliebige σ_i gilt (nicht nur für $i = 1, 2, 3$). Daher ist auch $\varphi(\exists x\, \forall y\, \ddot{A}(x,y)) = \mathtt{f}$.

Übung 10.1.10.

1. Denken Sie sich drei weitere Variablenbelegungen (in Bezug auf $\mathfrak{I}$) aus und bewerten Sie die Formel 30.

Es seien die Variablenbelegungen:

$$\sigma_1 = Barack, Joachim, Joseph, \ldots$$
$$\sigma_2 = Joachim, Joachim, Joseph, \ldots$$
$$\sigma_3 = Joseph, Joachim, Joseph, \ldots$$
$$\sigma_4 = Joseph, Joachim, Barack, \ldots$$
$$\sigma_5 = Barack, Joseph, Joachim, \ldots$$
$$\sigma_6 = Joachim, Barack, Joseph, \ldots$$

Formel 30.

	Formel	φ_{σ_1}	φ_{σ_2}	φ_{σ_3}	φ_{σ_4}	φ_{σ_5}	φ_{σ_6}
30.a	$\ddot{A}(y,x)$	w	f	f	f	w	f
30.b	$\ddot{A}(z,y)$	w	w	w	f	f	w
30.c	$\ddot{A}(y,x) \wedge \ddot{A}(z,y)$	w	f	f	f	f	f
30.d	$\ddot{A}(z,x)$	w	w	f	f	w	w
30.	$\ddot{A}(y,x) \wedge \ddot{A}(z,y) \rightarrow \ddot{A}(z,x)$	w	w	w	w	w	w

Erklärung

Beachten Sie, dass die erste zu bewertende Formel ‚$\ddot{A}(y,x)$' und nicht ‚$\ddot{A}(x,y)$' ist, wobei das Paar $\langle x, y\rangle$ als $\langle y, x\rangle$ umgedreht wird. Daher können die Bewertungen $\varphi_{\sigma_i}(\ddot{A}(y,x))$ anders ausfallen als bei $\varphi_{\sigma_i}(\ddot{A}(x,y))$ für einige i.

2. Ist die Formel 30 wahr in $\mathfrak{I}$ unabhängig von der Wahl der Variablenbelegung?

Bemerkung: Um einen informellen Beweis in der Metasprache zu konstruieren, sehen Sie noch einmal die Sektion 5.1.3.

Antwort

Obwohl unsere Formel gemäß allen sechs φ_{σ_i} (für $i = 1, \ldots, 6$) wahr ist, reicht dies nicht aus, um zu zeigen, dass sie in $\mathfrak{I}$ unabhängig von der Wahl der Variablenbelegung gilt. Um dies zu zeigen, müssen wir beweisen, dass sie in einer beliebigen φ_{σ_i} wahr ist, und nicht nur für $i = 1, \ldots, 6$. Wir tun dies mit einem informellen Beweis wie dem folgenden.

Beweis. Um zu zeigen, dass $\varphi_\sigma(\ddot{A}(y,x) \wedge \ddot{A}(z,y) \to \ddot{A}(z,x)) = \mathtt{w}$ in $\mathfrak{I}$ unabhängig von der Wahl der σ gilt, müssen wir zeigen (nach Def. 19.5), dass $\varphi_\sigma(\ddot{A}(y,x) \wedge \ddot{A}(z,y)) = \mathtt{f}$ oder $\varphi_\sigma(\ddot{A}(z,x)) = \mathtt{w}$ für beliebige σ gilt.

Sei σ beliebig und zeigen wir dies in den beiden sich gegenseitig ausschließenden und erschöpfenden Fällen:

(i) $\varphi_\sigma(\ddot{A}(y,x) \wedge \ddot{A}(z,y)) = \mathtt{w}$ und $\varphi_\sigma(\ddot{A}(y,x) \wedge \ddot{A}(z,y)) = \mathtt{f}$.

Fall (i) Sei $\varphi_\sigma(\ddot{A}(y,x) \wedge \ddot{A}(z,y)) = \mathtt{w}$. Daraus folgt nach Def. 19.3, dass $\varphi_\sigma(\ddot{A}(y,x)) = \mathtt{w}$ und $\ddot{A}(z,y)) = \mathtt{w}$.

Beachten Sie, dass σ so sein muss, dass $\varphi_\sigma(x) = \mathit{Barack}$, $\varphi_\sigma(y) = \mathit{Joachim}$ und $\varphi_\sigma(z) = \mathit{Joseph}$. Andernfalls wäre entweder $\varphi_\sigma(\ddot{A}(y,x)) = \mathtt{f}$ oder $\varphi_\sigma(\ddot{A}(z,y)) = \mathtt{f}$.[46] Da $\langle \mathit{Joseph}, \mathit{Barack} \rangle \in \varphi(\ddot{A})$, ergibt sich unter σ (nach Def. 19.1), dass $\varphi_\sigma(\ddot{A}(z,x)) = \mathtt{w}$. Folglich ist $\varphi_\sigma(\ddot{A}(y,x) \wedge \ddot{A}(z,y)) = \mathtt{f}$ oder $\varphi_\sigma(\ddot{A}(z,x)) = \mathtt{w}$.

46: Sie können die anderen möglichen Kombinationen der Belegungen $\varphi_\sigma(x), \varphi_\sigma(y), \varphi_\sigma(z)$ ausprobieren.

Fall (ii) Sei $\varphi_\sigma(\ddot{A}(y,x) \wedge \ddot{A}(z,y)) = \mathtt{f}$. Dann ist $\varphi_\sigma(\ddot{A}(y,x) \wedge \ddot{A}(z,y)) = \mathtt{f}$ oder $\varphi_\sigma(\ddot{A}(z,x)) = \mathtt{w}$.

In den beiden sich gegenseitig ausschließenden und erschöpfenden Fällen (i) und (ii) haben wir gezeigt, dass $\varphi_\sigma(\ddot{A}(y,x) \wedge \ddot{A}(z,y)) = \mathtt{f}$ oder $\varphi_\sigma(\ddot{A}(z,x)) = \mathtt{w}$. Daher ist $\varphi_\sigma(\ddot{A}(y,x) \wedge \ddot{A}(z,y)) = \mathtt{f}$ oder $\varphi_\sigma(\ddot{A}(z,x)) = \mathtt{w}$. Das war zu zeigen. □

3. Stellen Sie fest, welche der oben vorkommenden *geschlossenen* Formeln wahr bzw. falsch gemäß φ (d.h., in $\mathfrak{I}$) sind.

Antwort: oben in Übung 10.1.9.

Lösung zu Übung 10.2. Überprüfen Sie die folgenden Formeln auf logische Wahrheit, logische Falschheit, bzw. Kontingenz. Argumentieren Sie für das Vorliegen von logischer Wahrheit/Falschheit auf Basis der semantischen Regeln, für das Vorliegen von Kontingenz jedoch durch Angabe von passenden Interpretationen (und Variablenbelegungen).

Definition:

Um die Kontingenz einer Formel begründen, werden wir vor allem die folgenden Mengen berücksichtigen.

$$\begin{aligned}
\mathbf{U} &= \{Carlos, Denny, George, Henry,\\
&\quad\; Héctor, John, Linda, Luis, Paul, Ringo\}.\\
\mathbf{B} &= \{d \in \mathbf{U} \mid d \text{ ist ein Mitglied von The Beatles}\}\\
&= \{George, John, Paul, Ringo\};\\
\mathbf{W} &= \{d \in \mathbf{U} \mid d \text{ ist ein Mitglied von Wings}\}\\
&= \{Denny, Henry, Linda, Paul\};\\
\mathbf{I} &= \{d \in \mathbf{U} \mid d \text{ ist ein Mitglied von Invisible}\}\\
&= \{Carlos, Héctor, Luis\}.
\end{aligned}$$

1. $M(x) \vee G(c)$ kontingent

Beispiel

Sei $\mathfrak{I} = \langle \varphi, \mathbf{D} \rangle$ mit:

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \mathbf{U}, \\ \varphi(c) &= \mathit{Paul}, \\ \varphi(G) &= \{d \in \mathbf{D} \mid d \text{ ist ein Mitglied von The Beatles}\} = \mathbf{B}, \\ \varphi(M) &= \{d \in \mathbf{D} \mid d \text{ ist ein Mitglied von Wings}\} = \mathbf{W}. \end{aligned}$$

Um zu zeigen, dass $\varphi_\sigma(M(x) \vee G(c)) = \mathtt{w}$ für beliebige σ unter $\mathfrak{I}$ gilt, müssen wir (nach Def. 19.4) zeigen, dass:

$$\varphi_\sigma(M(x)) = \mathtt{w} \quad \text{oder} \quad \varphi_\sigma(G(c)) = \mathtt{w}.$$

Wir zeigen, dass $\varphi_\sigma(G(c)) = \mathtt{w}$.

Dies folgt (nach Def. 19.1) daraus, dass $\mathit{Paul} \in \varphi(G)$ – d.h., dass Paul ein Mitglied von The Beatles ist.

Gegenbeispiel

Sei $\mathfrak{I} = \langle \varphi, \mathbf{D} \rangle$ mit:

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \mathbf{I} = \{\mathit{Carlos}, \mathit{Héctor}, \mathit{Luis}\}, \\ \varphi(c) &= \mathit{Luis}, \\ \varphi(G) &= \{d \in \mathbf{D} \mid d \text{ ist ein Mitglied von The Beatles}\} = \{\}, \\ \varphi(M) &= \{d \in \mathbf{D} \mid d \text{ ist ein Mitglied von Wings}\} = \{\}. \end{aligned}$$

Um zu zeigen, dass $\varphi_\sigma(M(x) \vee G(c)) = \mathtt{f}$ für beliebige σ unter $\mathfrak{I}$ gilt, müssen wir (nach Def. 19.4) zeigen, dass:

$$\text{(i) } \varphi_\sigma(M(x)) = \mathtt{f} \quad \text{und} \quad \text{(ii) } \varphi_\sigma(G(c)) = \mathtt{f}.$$

Beachte, dass es kein $d \in \mathbf{D}$ gibt, sodass $d \in \varphi(M(x))$. Dann gilt (nach Def. 19.1) für unsere beliebige σ, dass $\varphi_\sigma(M(x)) = \mathtt{f}$. Damit ist (i) gezeigt.

Ebenso ist (nach Def. 19.1) $\varphi_\sigma(G(c)) = \mathtt{f}$, denn $\mathit{Luis} \notin \varphi(G)$ (d.h., Luis ist kein Mitglied von The Beatles). Damit ist (ii) gezeigt.

Das war zu zeigen.

Bemerkung: Beachte, dass $\varphi(G)$ und $\varphi(M)$ im Gegenbeispiel leer sind, obwohl sie ähnlich wie $\mathbf{B}$ und $\mathbf{W}$ definiert sind. Der Grund dafür ist, dass $\mathbf{B}$ und $\mathbf{W}$ in Bezug auf $\mathbf{U}$ definiert sind, während $\varphi(G)$ und $\varphi(M)$ nur in Bezug auf $\mathbf{I}$ definiert sind, das keine Schnittmenge mit $\mathbf{B}$ oder $\mathbf{W}$ hat.

2. $\exists y\,(G(y) \land \neg G(y))$ logisch falsch

Beweis. Um zu zeigen, dass $\varphi_\sigma(\exists y\,(G(y) \land \neg G(y))) = \mathtt{f}$ für beliebig $\mathfrak{I} = \langle \mathbf{D}, \varphi \rangle$ und σ (unter $\mathfrak{I}$) gilt, müssen wir zeigen (nach Def. 19.8), dass:

für alle y-Varianten σ' von σ unter $\mathfrak{I}$: $\varphi_{\sigma'}(G(y) \land \neg G(y)) = \mathtt{f}$.

Seien $\mathfrak{I} = \langle \mathbf{D}, \varphi \rangle$ und σ beliebig und nehmen wir an, dass $\varphi_{\sigma'}(G(y) \land \neg G(y)) = \mathtt{w}$.

Dies bedeutet (nach Def. 19.3), dass $\varphi_{\sigma'}(G(y)) = \mathtt{w}$ und $\varphi_{\sigma'}(\neg G(y)) = \mathtt{w}$. Daher muss es ein $d \in \mathbf{D}$ geben, sodass $d \in \varphi(G)$ und $d \notin \varphi(G)$: ein Widerspruch!

Da unsere Annahme zu einem Widerspruch führt, ist sie falsch. Folglich ist $\varphi_{\sigma'}(G(y) \land \neg G(y)) \neq \mathtt{w}$ und ist $\varphi_\sigma(\exists y\,(G(y) \land \neg G(y))) = \mathtt{f}$. Das war zu zeigen. $\square$

3. $\forall x\,(P(x) \rightarrow \neg P(x))$ kontingent

Beispiel

Sei $\mathfrak{I} = \langle \varphi, \mathbf{D} \rangle$ mit:

$$\mathbf{D} = \mathbf{B} = \{George, John, Paul, Ringo\},$$
$$\varphi(P) = \{d \in \mathbf{D} \mid d \text{ ist ein Mitglied von Invisible}\} = \{\}.$$

Um zu zeigen, dass $\varphi_\sigma(\forall x\,(P(x) \rightarrow \neg P(x))) = \mathtt{w}$ für beliebige σ unter $\mathfrak{I}$ gilt, müssen wir (nach Def. 19.7) zeigen, dass für alle x-Varianten σ' von σ unter $\mathfrak{I}$ gilt: $\varphi_{\sigma'}(P(x) \rightarrow \neg P(x)) = \mathtt{w}$. Dies gilt (nach Def. 19.5) gdw:

$$\varphi_{\sigma'}(P(x)) = \mathtt{f} \quad \text{oder} \quad \varphi_{\sigma'}(\neg P(x)) = \mathtt{w}.$$

Wir zeigen, dass: $\varphi_{\sigma'}(P(x)) = \mathtt{f}$.

Kein Mitglied von The Beatles ist ein Mitglied von Invisible. Das bedeutet, dass für alle $d \in \mathbf{D} = \mathbf{B}$ gilt: $d \in \varphi(P)$. Daraus folgt, (nach Def. 19.1), dass $\varphi_{\sigma'}(P(x)) = \mathtt{f}$ unabhängig von der σ'. Das war zu zeigen.

Gegenbeispiel

Sei $\mathfrak{I} = \langle \varphi, \mathbf{D} \rangle$ mit:

$$\mathbf{D} = \mathbf{B} = \{George, John, Paul, Ringo\},$$
$$\varphi(P) = \{d \in \mathbf{D} \mid d \text{ ist ein Mitglied von Wings}\} = \{Paul\}.$$

Um zu zeigen, dass $\varphi_\sigma(\forall x\,(P(x) \rightarrow \neg P(x))) = \mathtt{f}$ für beliebige σ unter $\mathfrak{I}$ gilt, müssen wir (nach Def. 19.7) eine x-Variante σ' von σ unter $\mathfrak{I}$ finden, sodass $\varphi_{\sigma'}(P(x) \rightarrow \neg P(x)) = \mathtt{f}$. Dies gilt (nach Def. 19.5) gdw:

$$\text{(i) } \varphi_{\sigma'}(P(x)) = \mathtt{w} \quad \text{und} \quad \text{(ii) } \varphi_{\sigma'}(\neg P(x)) = \mathtt{f}.$$

Wählen wir $\sigma' = Paul, \ldots$. (Also $\varphi_{\sigma'}(x) = Paul$.)

Dann gilt (nach Def. 19.1), dass $\varphi_{\sigma'}(P(x)) = \mathtt{w}$, weil $Paul \in \varphi(P)$ (d.h., $Paul$ ist ein Mitglied von Wings), was (i) zeigt. Daraus folgt (nach Def. 19.2), dass $\varphi_{\sigma'}(\neg P(x)) = \mathtt{f}$, was (ii) zeigt. Das war zu zeigen.

4. $\forall x\, P(x) \rightarrow \exists x\, P(x)$ logisch wahr

Beweis. Um zu zeigen, dass $\varphi_\sigma(\forall x\, P(x) \rightarrow \exists x\, P(x)) = \mathtt{w}$ für beliebig $\mathfrak{I} = \langle \mathbf{D}, \varphi \rangle$ und σ (unter $\mathfrak{I}$) gilt, müssen wir zeigen (nach Def. 19.5), dass:

$$\varphi_\sigma(\forall x\, P(x)) = \mathtt{f} \quad \text{oder} \quad \varphi_\sigma(\exists x\, P(x)) = \mathtt{w}.$$

Seien $\mathfrak{I} = \langle \mathbf{D}, \varphi \rangle$ und σ beliebig und zeigen wir dies in den beiden sich gegenseitig ausschließenden und erschöpfenden Fällen:

$$\text{(i) } \varphi_\sigma(\forall x\, P(x)) = \mathtt{w} \quad \text{und} \quad \text{(ii) } \varphi_\sigma(\forall x\, P(x)) = \mathtt{f}.$$

Fall (i) Sei $\varphi_\sigma(\forall x\, P(x)) = \mathtt{w}$. Dann gilt (nach Def. 19.7) für alle x-Varianten σ' von σ unter $\mathfrak{I}$: $\varphi_{\sigma'}(\forall x\, P(x))$. Sei σ'' eine solche x-Variante von σ. Dann gilt $\varphi_{\sigma''}(\forall x\, P(x))$. Daraus folgt (nach Def. 19.8), dass $\varphi_\sigma(\exists x\, P(x)) = \mathtt{w}$. Daraus folgt, dass $\varphi_\sigma(\forall x\, P(x)) = \mathtt{f}$ oder $\varphi_\sigma(\exists x\, P(x)) = \mathtt{w}$.

Fall (ii) Sei $\varphi_\sigma(\forall x\, P(x)) = \mathtt{f}$. Dann ist $\varphi_\sigma(\forall x\, P(x)) = \mathtt{f}$ oder $\varphi_\sigma(\exists x\, P(x)) = \mathtt{w}$.

In den beiden sich gegenseitig ausschließenden und erschöpfenden Fällen (i) und (ii) haben wir gezeigt, dass $\varphi_\sigma(\forall x\, P(x)) = \mathtt{f}$ oder $\varphi_\sigma(\exists x\, P(x)) = \mathtt{w}$. Daher ist $\varphi_\sigma(\forall x\, P(x)) = \mathtt{f}$ oder $\varphi_\sigma(\exists x\, P(x)) = \mathtt{w}$. Das war zu zeigen. $\square$

5. $P(x) \rightarrow P(y)$ kontingent

Beispiel

Sei $\mathfrak{I} = \langle \varphi, \mathbf{D} \rangle$ mit:

$$\mathbf{D} = \mathbf{B} = \{George, John, Paul, Ringo\},$$
$$\varphi(P) = \{d \in \mathbf{D} \mid d \text{ ist ein Mitglied von Wings}\} = \{Paul\}.$$

Wählen wir $\varphi_\sigma(x) = \varphi_\sigma(y)$. Dann ist $\varphi_\sigma(P(x)) = \varphi_\sigma(P(y))$.

Um zu zeigen, dass $\varphi_\sigma(P(x) \rightarrow P(y)) = \mathtt{w}$ unter $\mathfrak{I}$ gilt, müssen wir (nach Def. 19.5) zeigen, dass:

$$\varphi_\sigma(P(x)) = \mathtt{f} \quad \text{oder} \quad \varphi_\sigma(P(y)) = \mathtt{w}.$$

Da $\varphi_\sigma(P(x)) = \varphi_\sigma(P(y))$, zu zeigen ist, dass $\varphi_\sigma(P(x)) = \mathtt{f}$ oder $\varphi_\sigma(P(x)) = \mathtt{w}$. Dies ist jedoch immer der Fall.

Gegenbeispiel

Sei $\mathfrak{I} = \langle \varphi, \mathbf{D} \rangle$ mit:

$$\mathbf{D} = \mathbf{B} = \{George, John, Paul, Ringo\},$$
$$\varphi(P) = \{d \in \mathbf{D} \mid d \text{ ist ein Mitglied von Wings}\} = \{Paul\}.$$

Wählen wir $\sigma = Paul, John, \ldots$. (Also $\varphi_\sigma(x) = Paul$ und $\varphi_\sigma(y) = John$.)

Um zu zeigen, dass $\varphi_\sigma(P(x) \rightarrow P(y)) = \mathtt{f}$ unter $\mathfrak{I}$ gilt, müssen wir (nach Def. 19.5) zeigen, dass:

$$\text{(i) } \varphi_\sigma(P(x)) = \mathtt{w} \quad \text{und} \quad \text{(ii) } \varphi_\sigma(P(y)) = \mathtt{f}.$$

Aus $Paul \in \varphi(P)$ folgt (nach Def. 19.1), dass $\varphi_\sigma(P(x)) = \mathtt{w}$, was (i) zeigt.

Ebenso folgt aus $John \notin \varphi(P)$, dass $\varphi_\sigma(P(y)) = \mathtt{f}$, was (ii) zeigt.

6. $P(x) \rightarrow P(x)$ logisch wahr

Beweis. Nach Definition 19.5 ist $\varphi_\sigma(P(x) \rightarrow P(x)) = \mathtt{w}$ gdw $\varphi_\sigma(P(x)) = \mathtt{f}$ oder $\varphi_\sigma(P(x)) = \mathtt{w}$. Dies ist jedoch immer der Fall. □

7. $\exists x\, P(x) \rightarrow \forall x\, P(x)$ kontingent

Beispiel

Sei $\mathfrak{I} = \langle \varphi, \mathbf{D} \rangle$ mit:

$$\mathbf{D} = \mathbf{B} = \{George, John, Paul, Ringo\},$$
$$\varphi(P) = \{d \in \mathbf{D} \mid d \text{ ist ein Mitglied von The Beatles}\} = \mathbf{B}.$$

Um zu zeigen, dass $\varphi_\sigma(\exists x\, P(x) \rightarrow \forall x\, P(x)) = \mathtt{w}$ unter $\mathfrak{I}$ gilt, müssen wir zeigen (nach Def. 19.5), dass: $\varphi_\sigma(\exists x\, P(x)) = \mathtt{f}$ oder $\varphi_\sigma(\forall x\, P(x)) = \mathtt{w}$.
Wir zeigen, dass $\varphi_\sigma(\forall x\, P(x)) = \mathtt{w}$ (für beliebige σ).

Um $\varphi_\sigma(\forall x\, P(x)) = \mathtt{w}$ zu zeigen, müssen wir zeigen (nach Def. 19.8), dass für alle x-Variante σ' von σ: $\varphi_{\sigma'}(P(x)) = \mathtt{w}$.

Beachten Sie, dass es kein $d \in \mathbf{D}$ gibt, sodass $d \notin \mathbf{B}$ ist (d.h. es gibt kein Mitglied von The Beatles, das nicht Mitglied von The Beatles ist). Es gibt also keine x-Variante σ' von σ, sodass $\varphi_{\sigma'}(x) \notin \varphi(P)$.

Daraus folgt (nach Def. 19.1), für alle x-Variante σ' von σ: $\varphi_{\sigma'}(P(x)) = \mathtt{w}$. Das war zu zeigen.

Gegenbeispiel

Sei $\mathfrak{I} = \langle \varphi, \mathbf{D} \rangle$ mit:

$$\mathbf{D} = \mathbf{B} = \{George, John, Paul, Ringo\},$$
$$\varphi(P) = \{x \in \mathbf{D} \mid x \text{ ist ein Mitglied von Wings}\} = \{Paul\}.$$

Um zu zeigen, dass $\varphi_\sigma(\exists x\, P(x) \rightarrow \forall x\, P(x)) = \mathtt{f}$ unter $\mathfrak{I}$ gilt, müssen wir zeigen (nach Def. 19.5), dass: (i) $\varphi_\sigma(\exists x\, P(x)) = \mathtt{w}$ und (ii) $\varphi_\sigma(\forall x\, P(x)) = \mathtt{f}$.
Das heißt, zu zeigen ist, dass:

(i) es eine x-Variante σ' von σ unter $\mathfrak{I}$ gibt, sodass: $\varphi_{\sigma'}(A) = \mathtt{w}$ (nach Def. 19.8); und

(ii) es eine x-Variante σ'' von σ unter $\mathfrak{I}$ gibt, sodass: $\varphi_{\sigma''}(A) = \mathtt{f}$ (nach Def. 19.7).

Wir zeigen wir dies für ein beliebiges σ von $\mathfrak{I}$.

Wählen wir $\varphi_{\sigma'}(x) = Paul$. Dann ist $\varphi_{\sigma'}(x) \in \varphi(P)$ (denn $Paul$ ist ein Mitglied von Wings), woraus (nach Def. 19.1) folgt, dass $\varphi_{\sigma'}(A) = \mathtt{w}$. Damit ist (i) gezeigt.

Wählen wir $\sigma''(x) = John$. Dann ist $\sigma''(x) \notin \varphi(P)$ (denn $John$ ist kein Mitglied von Wings), woraus (nach Def. 19.1) folgt, dass $\varphi_{\sigma''}(A) = \mathtt{f}$. Damit ist (ii) gezeigt.

8. $\neg\forall x\, P(x) \leftrightarrow \exists x\, \neg P(x)$ logisch wahr

Beweis. Um zu zeigen, dass $\varphi_\sigma(\neg\forall x\, P(x) \leftrightarrow \exists x\, \neg P(x)) = \texttt{w}$ für beliebig $\mathfrak{I} = \langle \mathbf{D}, \varphi \rangle$ und σ (unter $\mathfrak{I}$) gilt, müssen wir zeigen (nach Def. 19.6), dass:

$$\varphi_\sigma(\neg\forall x\, P(x)) = \varphi_\sigma(\exists x\, \neg P(x)).$$

Seien $\mathfrak{I} = \langle \mathbf{D}, \varphi \rangle$ und σ beliebig und zeigen wir dies in den beiden sich gegenseitig ausschließenden und erschöpfenden Fällen:

$$\text{(i) } \varphi_\sigma(\exists x\, \neg P(x)) = \texttt{w} \quad \text{und} \quad \text{(ii) } \varphi_\sigma(\exists x\, \neg P(x)) = \texttt{f}.$$

Fall (i) Sei $\varphi_\sigma(\exists x\, \neg P(x)) = \texttt{w}$. Nach Def. 19.8 gilt dies gdw es eine x-Variante σ' von σ unter $\mathfrak{I}$ gibt, sodass: $\varphi_{\sigma'}(\neg P(x)) = \texttt{w}$. Nach Def. 19.2 gilt dies gdw es eine x-Variante σ' von σ unter $\mathfrak{I}$ gibt, sodass: $\varphi_{\sigma'}(P(x)) = \texttt{f}$. Nach Def. 19.7 gilt dies gdw $\varphi_\sigma(\forall x\, P(x)) = \texttt{f}$. Nach Def. 19.2 gilt dies gdw $\varphi_\sigma(\neg\forall x\, P(x)) = \texttt{w}$. Dann ist $\varphi_\sigma(\neg\forall x\, P(x)) = \varphi_\sigma(\exists x\, \neg P(x)) = \texttt{w}$.

Fall (ii) Sei $\varphi_\sigma(\exists x\, \neg P(x)) = \texttt{f}$. Nach Def. 19.8 gilt dies gdw für alle x-Variante σ' von σ unter $\mathfrak{I}$: $\varphi_{\sigma'}(\neg P(x)) = \texttt{f}$. Nach Def. 19.2 gilt dies gdw für alle x-Variante σ' von σ unter $\mathfrak{I}$: $\varphi_{\sigma'}(P(x)) = \texttt{w}$. Nach Def. 19.7 gilt dies gdw $\varphi_\sigma(\forall x\, P(x)) = \texttt{w}$. Nach Def. 19.2 gilt dies gdw $\varphi_\sigma(\neg\forall x\, P(x)) = \texttt{f}$. Dann ist $\varphi_\sigma(\neg\forall x\, P(x)) = \varphi_\sigma(\exists x\, \neg P(x)) = \texttt{f}$.

In den beiden sich gegenseitig ausschließenden und erschöpfenden Fällen (i) und (ii) haben wir gezeigt, dass $\varphi_\sigma(\neg\forall x\, P(x)) = \varphi_\sigma(\exists x\, \neg P(x))$. Daher ist $\varphi_\sigma(\neg\forall x\, P(x)) = \varphi_\sigma(\exists x\, \neg P(x))$. Das war zu zeigen. □

9. $P(a,b) \land \forall x \neg\exists y\, P(x,y)$ logisch falsch

Beweis. Um zu zeigen, dass $\varphi_\sigma(P(a,b) \land \forall x \neg\exists y\, P(x,y)) = \mathtt{f}$ für beliebig $\mathfrak{I} = \langle \mathbf{D}, \varphi \rangle$ und σ (unter $\mathfrak{I}$) gilt, müssen wir zeigen (nach Def. 19.3), dass:

$$\varphi_\sigma(P(a,b)) = \mathtt{f} \quad \text{oder} \quad \varphi_\sigma(\forall x \neg\exists y\, P(x,y)) = \mathtt{f}.$$

Seien $\mathfrak{I} = \langle \mathbf{D}, \varphi \rangle$ und σ beliebig und zeigen wir dies in den beiden sich gegenseitig ausschließenden und erschöpfenden Fällen:

$$\text{(i) } \varphi_\sigma(P(a,b)) = \mathtt{w} \quad \text{und} \quad \text{(ii) } \varphi_\sigma(P(a,b)) = \mathtt{f}.$$

Fall (i) Sei $\varphi_\sigma(P(a,b)) = \mathtt{w}$. Wir zeigen, dass $\varphi_\sigma(\forall x \neg\exists y\, P(x,y)) = \mathtt{f}$.

(Um dies zu zeigen, müssen wir zeigen (nach Def. 19.7), dass es eine x-Variante σ' von σ unter $\mathfrak{I}$ gibt, sodass: $\varphi_{\sigma'}(\neg\exists y\, P(x,y)) = \mathtt{f}$. Dies gilt (nach Def. 19.2) gdw $\varphi_{\sigma'}(\exists y\, P(x,y)) = \mathtt{w}$. Dies gilt (nach Def. 19.8) gdw es eine y-Variante σ'' von σ' unter $\mathfrak{I}$ gibt, sodass: $\varphi_{\sigma''}(P(x,y)) = \mathtt{w}$.)

Wählen wir σ' und σ'', sodass: $\varphi_{\sigma'}(x) = \varphi(a)$ und $\sigma''(y) = \varphi(b)$. Beachten Sie, dass ‚$P(a,b)$' geschlossen ist. Daraus und aus $\varphi_\sigma(P(a,b)) = \mathtt{w}$ folgt, dass $\varphi_\sigma(P(a,b)) = \varphi_{\sigma'}(P(a,b)) = \varphi_{\sigma''}(P(a,b)) = \mathtt{w}$.

Daraus und aus $\sigma''(y) = \varphi(b)$ folgt (nach Def. 19.1), dass $\varphi_{\sigma''}(P(a,y)) = \varphi_{\sigma''}(P(a,b)) = \mathtt{w}$. Beachten Sie jedoch, dass σ'' eine y-Variante von σ' ist. Dann folgt (nach Def. 19.8), dass $\varphi_{\sigma'}(\exists y\, P(x,y)) = \mathtt{w}$ und (nach Def. 19.2), dass $\varphi_{\sigma'}(\neg\exists y\, P(x,y)) = \mathtt{f}$.

Daraus und aus $\varphi_{\sigma'}(x) = \varphi(a)$ folgt (nach Def. 19.1), dass $\varphi_{\sigma'}(\neg\exists y\, P(x,y)) = \varphi_{\sigma'}(\neg\exists y\, P(a,y)) = \mathtt{f}$. Beachten Sie jedoch, dass σ' eine x-Variante von σ ist. Dann folgt (nach Def. 19.7), dass $\varphi_\sigma(\forall x \neg\exists y\, P(x,y)) = \mathtt{f}$, woraus folgt, dass $\varphi_\sigma(P(a,b)) = \mathtt{f}$ oder $\varphi_\sigma(\forall x \neg\exists y\, P(x,y)) = \mathtt{f}$.

Fall (ii) Sei $\varphi_\sigma(P(a,b)) = \mathtt{f}$. Folglich: $\varphi_\sigma(P(a,b)) = \mathtt{f}$ oder $\varphi_\sigma(\forall x \neg\exists y\, P(x,y)) = \mathtt{f}$.

In den beiden sich gegenseitig ausschließenden und erschöpfenden Fällen (i) und (ii) haben wir gezeigt, dass $\varphi_\sigma(P(a,b)) = \mathtt{f}$ oder $\varphi_\sigma(\forall x \neg\exists y\, P(x,y)) = \mathtt{f}$. Daher ist $\varphi_\sigma(P(a,b)) = \mathtt{f}$ oder $\varphi_\sigma(\forall x \neg\exists y\, P(x,y)) = \mathtt{f}$. Das war zu zeigen. □

10. $\forall x\, \forall y\, P(x,y) \to \forall y\, \forall x\, P(x,y)$ logisch wahr

Beweis. Um zu zeigen, dass $\varphi_\sigma(\forall x\, \forall y\, P(x,y) \to \forall y\, \forall x\, P(x,y)) = \mathtt{w}$ für beliebig $\mathfrak{I} = \langle \mathbf{D}, \varphi \rangle$ und σ (unter $\mathfrak{I}$) gilt, müssen wir zeigen (nach Def. 19.5), dass:

$$\varphi_\sigma(\forall x\, \forall y\, P(x,y)) = \mathtt{f} \quad \text{oder} \quad \varphi_\sigma(\forall y\, \forall x\, P(x,y)) = \mathtt{w}.$$

Seien $\mathfrak{I} = \langle \mathbf{D}, \varphi \rangle$ und σ beliebig und zeigen wir dies in den beiden sich gegenseitig ausschließenden und erschöpfenden Fällen:

$$\text{(i) } \varphi_\sigma(\forall x\, \forall y\, P(x,y)) = \mathtt{w} \quad \text{und} \quad \text{(ii) } \varphi_\sigma(\forall x\, \forall y\, P(x,y)) = \mathtt{f}.$$

Fall (i) Sei $\varphi_\sigma(\forall x\, \forall y\, P(x,y)) = \mathtt{w}$.

Da σ eine x-Variante von sich selbst ist, es folgt daraus (nach Def. 19.7), dass $\varphi_\sigma(\forall y\, P(x,y)) = \mathtt{w}$. Außerdem, da σ eine y-Variante von sich selbst ist, es folgt daraus (nach Def. 19.7), dass $\varphi_\sigma(P(x,y)) = \mathtt{w}$.

Da σ beliebig ist und da eine x-Variante von sich selbst ist, es folgt daraus (nach Def. 19.7), dass $\varphi_\sigma(\forall x\, P(x,y)) = \mathtt{w}$. Außerdem, da σ beliebig ist und da eine y-Variante von sich selbst ist, es folgt daraus (nach Def. 19.7), dass $\varphi_\sigma(\forall y\, \forall x\, P(x,y)) = \mathtt{w}$.

Dann ist $\varphi_\sigma(\exists x\, \forall y\, P(x,y)) = \mathtt{f}$ oder $\varphi_\sigma(\forall y\, \exists x\, P(x,y)) = \mathtt{w}$.

Fall (ii) Sei $\varphi_\sigma(\forall x\, \forall y\, P(x,y)) = \mathtt{f}$. Daraus ergibt sich, dass $\varphi_\sigma(\forall x\, \forall y\, P(x,y)) = \mathtt{f}$ oder $\varphi_\sigma(\forall y\, \forall x\, P(x,y)) = \mathtt{w}$.

In den beiden sich gegenseitig ausschließenden und erschöpfenden Fällen (i) und (ii) haben wir gezeigt, dass $\varphi_\sigma(\forall x\, \forall y\, P(x,y)) = \mathtt{f}$ oder $\varphi_\sigma(\forall y\, \forall x\, P(x,y)) = \mathtt{w}$. Daher ist $\varphi_\sigma(\forall x\, \forall y\, P(x,y)) = \mathtt{f}$ oder $\varphi_\sigma(\forall y\, \forall x\, P(x,y)) = \mathtt{w}$. $\square$

11. $P(x) \rightarrow \forall y\, P(y)$ kontingent

Beispiel

Sei $\mathfrak{I} = \langle \varphi, \mathbf{D} \rangle$ mit:

$$\mathbf{D} = \mathbf{B} = \{George, John, Paul, Ringo\},$$
$$\varphi(P) = \{d \in \mathbf{D} \mid d \text{ ist ein Mitglied von The Beatles}\} = \mathbf{B}.$$

Um zu zeigen, dass $\varphi_\sigma(P(x) \rightarrow \forall y\, P(y)) = \mathtt{w}$ unter $\mathfrak{I}$ gilt, müssen wir zeigen (nach Def. 19.5), dass:

$$\varphi_\sigma(P(x)) = \mathtt{f} \quad \text{oder} \quad \varphi_\sigma(\forall y\, P(y)) = \mathtt{w}.$$

Wir zeigen, dass $\varphi_\sigma(\forall y\, P(y)) = \mathtt{w}$ (für beliebige σ).

Beachten Sie, dass für alle $d \in \mathbf{D}$: $d \in \varphi(P)$ (denn sie sind alle Mitglieder von The Beatles). Folglich, für alle y-Varianten σ' von σ: $\varphi_{\sigma'}(y) \in \varphi(P)$. Daraus folgt (nach Def. 19.1), dass für alle y-Varianten σ' von σ: $\varphi_{\sigma'}(P(y)) = \mathtt{w}$.

Daraus folgt (nach Def. 19.7), dass $\varphi_\sigma(\forall y\, P(y)) = \mathtt{w}$. Das war zu zeigen.

Gegenbeispiel

Sei $\mathfrak{I} = \langle \varphi, \mathbf{D} \rangle$ mit:

$$\mathbf{D} = \mathbf{B} = \{George, John, Paul, Ringo\},$$
$$\varphi(P) = \{d \in \mathbf{D} \mid d \text{ ist ein Mitglied von Wings}\} = \{Paul\}.$$

Wählen wir $\sigma = Paul, John, \ldots$. Also $\varphi_\sigma(x) = Paul$, $\varphi_\sigma(y) = John$.

Um zu zeigen, dass $\varphi_\sigma(P(x) \rightarrow \forall y\, P(y)) = \mathtt{f}$ unter $\mathfrak{I}$ und σ gilt, müssen wir zeigen (nach Def. 19.5), dass:

$$\text{(i) } \varphi_\sigma(P(x)) = \mathtt{w} \quad \text{und} \quad \text{(ii) } \varphi_\sigma(\forall y\, P(y)) = \mathtt{f}.$$

Aus $\varphi_\sigma(x) = Paul$ und $Paul \in \varphi(P)$ folgt (nach Def. 19.1): $\varphi_\sigma(P(x)) = \mathtt{w}$. Damit ist (i) gezeigt.

Beachten Sie jetzt, dass (i) $\varphi_\sigma(y) = John$, (ii) $John \notin \varphi(P)$ und (ii) σ eine y-Variante von sich selbst ist. Aus (i) und (ii) folgt (nach Def. 19.1), dass $\varphi_\sigma(P(y)) = \mathtt{f}$. Daraus und aus (iii) folgt (nach Def. 19.7): $\varphi_\sigma(\forall y\, P(y)) = \mathtt{f}$. Damit ist (ii) gezeigt.

Das war zu zeigen.

12. $P(x) \rightarrow \forall y\, P(x)$ logisch wahr

Beweis. Um zu zeigen, dass $\varphi_\sigma(P(x) \rightarrow \forall y\, P(x)) = \mathtt{w}$ für beliebig $\mathfrak{I} = \langle \mathbf{D}, \varphi \rangle$ und σ (unter $\mathfrak{I}$) gilt, müssen wir zeigen (nach Def. 19.5), dass:

$$\varphi_\sigma(P(x)) = \mathtt{f} \quad \text{oder} \quad \varphi_\sigma(\forall y\, P(x)) = \mathtt{w}.$$

Seien $\mathfrak{I} = \langle \mathbf{D}, \varphi \rangle$ und σ beliebig und zeigen wir dies in den beiden sich gegenseitig ausschließenden und erschöpfenden Fällen:

$$\text{(i) } \varphi_\sigma(P(x)) = \mathtt{w} \quad \text{und} \quad \text{(ii) } \varphi_\sigma(P(x)) = \mathtt{f}.$$

Fall (i) Sei $\varphi_\sigma(P(x)) = \mathtt{w}$. Da σ beliebig ist, es folgt daraus, dass für alle σ gilt: $\varphi_\sigma(P(x)) = \mathtt{w}$. Daraus folgt (nach Def. 19.7), dass $\varphi_\sigma(\forall y\, P(x)) = \mathtt{w}$. Dann ist $\varphi_\sigma(P(x)) = \mathtt{f}$ oder $\varphi_\sigma(\forall y\, P(x)) = \mathtt{w}$.

Fall (ii) Sei $\varphi_\sigma(P(x)) = \mathtt{f}$. Dann ist $\varphi_\sigma(P(x)) = \mathtt{f}$ oder $\varphi_\sigma(\forall y\, P(x)) = \mathtt{w}$.

In den beiden sich gegenseitig ausschließenden und erschöpfenden Fällen (i) und (ii) haben wir gezeigt, dass $\varphi_\sigma(P(x)) = \mathtt{f}$ oder $\varphi_\sigma(\forall y\, P(x)) = \mathtt{w}$. Daher ist $\varphi_\sigma(P(x)) = \mathtt{f}$ oder $\varphi_\sigma(\forall y\, P(x)) = \mathtt{w}$. □

13. $\exists x\, \forall y\, P(x, y) \to \forall y\, \exists x\, P(x, y)$ logisch wahr

Beweis. Um zu zeigen, dass $\varphi_\sigma(\exists x\, \forall y\, P(x, y) \to \forall y\, \exists x\, P(x, y)) = \mathtt{w}$ für beliebig $\mathfrak{I} = \langle \mathbf{D}, \varphi \rangle$ und σ (unter $\mathfrak{I}$) gilt, müssen wir zeigen (nach Def. 19.5), dass:

$$\varphi_\sigma(\exists x\, \forall y\, P(x, y)) = \mathtt{f} \quad \text{oder} \quad \varphi_\sigma(\forall y\, \exists x\, P(x, y)) = \mathtt{w}.$$

Seien $\mathfrak{I} = \langle \mathbf{D}, \varphi \rangle$ und σ beliebig und zeigen wir dies in den beiden sich gegenseitig ausschließenden und erschöpfenden Fällen:

$$\text{(i) } \varphi_\sigma(\exists x\, \forall y\, P(x, y)) = \mathtt{w} \quad \text{und} \quad \text{(ii) } \varphi_\sigma(\exists x\, \forall y\, P(x, y)) = \mathtt{f}.$$

Fall (i) Sei $\varphi_\sigma(\exists x\, \forall y\, P(x, y)) = \mathtt{w}$. Sei σ' (nach Def. 19.8) eine x-Variante von σ unter $\mathfrak{I}$, sodass $\varphi_{\sigma'}(\forall y\, P(x, y)) = \mathtt{w}$. Daraus folgt (nach Def. 19.1), dass für alle y-Varianten σ'' von σ' unter $\mathfrak{I}$: $\varphi_{\sigma''}(P(x, y)) = \mathtt{w}$.

Da σ' eine y-Variante von sich selbst ist, es folgt daraus, dass $\varphi_{\sigma'}(P(x, y)) = \mathtt{w}$. Da σ' eine x-Variante von sich selbst ist, folgt (nach Def. 19.8): $\varphi_{\sigma'}(\exists x\, P(x, y)) = \mathtt{w}$. Da σ' eine x-Variante von σ ist, gilt: $\varphi_\sigma(y) = \varphi_{\sigma'}(y)$. Daraus folgt, dass $\varphi_\sigma(\exists x\, P(x, y)) = \varphi_{\sigma'}(\exists x\, P(x, y)) = \mathtt{w}$ (denn x ist nicht frei in ‚$\exists x\, P(x, y)$').

Da σ beliebig ist, es folgt daraus, dass $\varphi_\sigma(\forall y\, \exists x\, P(x, y)) = \mathtt{w}$. Dann ist $\varphi_\sigma(\exists x\, \forall y\, P(x, y)) = \mathtt{f}$ oder $\varphi_\sigma(\forall y\, \exists x\, P(x, y)) = \mathtt{w}$.

Fall (ii) Sei $\varphi_\sigma(\exists x\, \forall y\, P(x, y)) = \mathtt{f}$. Daraus ergibt sich, dass $\varphi_\sigma(\exists x\, \forall y\, P(x, y)) = \mathtt{f}$ oder $\varphi_\sigma(\forall y\, \exists x\, P(x, y)) = \mathtt{w}$.

In den beiden sich gegenseitig ausschließenden und erschöpfenden Fällen (i) und (ii) haben wir gezeigt, dass $\varphi_\sigma(\exists x\, \forall y\, P(x, y)) = \mathtt{f}$ oder $\varphi_\sigma(\forall y\, \exists x\, P(x, y)) = \mathtt{w}$. Daher ist $\varphi_\sigma(\exists x\, \forall y\, P(x, y)) = \mathtt{f}$ oder $\varphi_\sigma(\forall y\, \exists x\, P(x, y)) = \mathtt{w}$. □

Lösung zu Übung 10.3. In den folgenden Beispielen wird das Bestehen gewisser logischer Folgerungen behauptet. Überprüfen Sie diese Behauptungen auf ihre Richtigkeit!

Bemerkung: Um zu zeigen, dass eine dieser Behauptungen richtig ist, muss man annehmen, dass alle Prämissen unter beliebigen $\mathfrak{I}$ und σ wahr sind, und daraus schließen, dass auch die Konklusion unter dieser beliebigen Interpretation wahr ist. Um zu zeigen, dass eine dieser Behauptungen nicht richtig ist, muss man eine Interpretation angeben, unter der die Prämissen wahr sind, die Konklusion jedoch falsch ist. Das machen wir jetzt.

1. $P(a) \vDash \exists x\, P(x)$ richtig

Beweis. Angenommen $\varphi_\sigma(P(a)) = \mathtt{w}$ für beliebige $\mathfrak{I} = \langle \mathbf{D}, \varphi \rangle$ und σ unter $\mathfrak{I}$. Um $\varphi_\sigma(\exists x\, P(x)) = \mathtt{w}$ zu zeigen, müssen wir zeigen (nach Def. 19.8), dass es eine x-Variante σ' von σ unter $\mathfrak{I}$ gibt, sodass $\varphi_{\sigma'}(P(x)) = \mathtt{w}$.

Wählen wir $\varphi_{\sigma'}(x) = \varphi(a)$. Es ist klar, dass $\varphi_{\sigma'}(P(x)) = \varphi_\sigma(P(a)) = \mathtt{w}$. Das war zu zeigen. □

2. $\forall x\, (P(x) \to Q(x)) \vDash \exists x\, P(x) \to \exists x\, Q(x)$ richtig

Beweis. Angenommen $\varphi_\sigma(\forall x\, (P(x) \to Q(x))) = \mathtt{w}$ für beliebige $\mathfrak{I} = \langle \mathbf{D}, \varphi \rangle$ und σ unter $\mathfrak{I}$. Daraus folgt (nach Def. 19.7), dass für beliebige x-Variante σ' von σ unter $\mathfrak{I}$: $\varphi_{\sigma'}(P(x) \to Q(x)) = \mathtt{w}$. Daraus folgt (nach Def. 19.5), dass:

$$\text{(i) } \varphi_{\sigma'}(P(x)) = \mathtt{f} \quad \text{oder} \quad \text{(ii) } \varphi_{\sigma'}(Q(x)) = \mathtt{w}.$$

Um $\varphi_\sigma(\exists x\, P(x) \to \exists x\, Q(x)) = \mathtt{w}$ zu zeigen, müssen wir zeigen (nach Def. 19.5), dass:

$$\varphi_\sigma(\exists x\, P(x)) = \mathtt{f} \quad \text{oder} \quad \varphi_\sigma(\exists x\, Q(x)) = \mathtt{w}.$$

Wir zeigen dies in den beiden sich gegenseitig ausschließenden und erschöpfenden Fällen (i) und (ii) oben.

Fall (i) Sei $\varphi_{\sigma'}(P(x)) = \mathtt{f}$. Da σ' eine beliebige x-Variante von σ ist, es folgt daraus (nach Def. 19.8), dass $\varphi_\sigma(\exists x\, P(x)) = \mathtt{f}$.

Dann ist $\varphi_\sigma(\exists x\, P(x)) = \mathtt{f}$ oder $\varphi_\sigma(\exists x\, Q(x)) = \mathtt{w}$.

Fall (ii) Sei $\varphi_{\sigma'}(Q(x)) = \mathtt{w}$. Da σ' eine x-Variante von σ ist, es folgt daraus (nach Def. 19.8), dass $\varphi_\sigma(\exists x\, Q(x)) = \mathtt{w}$.

Dann ist $\varphi_\sigma(\exists x\, P(x)) = \mathtt{f}$ oder $\varphi_\sigma(\exists x\, Q(x)) = \mathtt{w}$.

In den beiden sich gegenseitig ausschließenden und erschöpfenden Fällen (i) und (ii) haben wir gezeigt, dass $\varphi_\sigma(\exists x\, P(x)) = \mathtt{f}$ oder $\varphi_\sigma(\exists x\, Q(x)) = \mathtt{w}$. Daher ist $\varphi_\sigma(\exists x\, P(x)) = \mathtt{f}$ oder $\varphi_\sigma(\exists x\, Q(x)) = \mathtt{w}$. Das war zu zeigen. □

3. $\forall x\,(P(x) \to Q(x)) \vDash \exists x\, Q(x)$ nicht richtig

Beweis. Sei $\mathfrak{I} = \langle \varphi, \mathbf{D} \rangle$ mit:

$$\begin{aligned} \mathbf{D} = \mathbf{B} &= \{George, John, Paul, Ringo\}, \\ \varphi(P) &= \{d \in \mathbf{D} \mid d \text{ ist ein Mitglied von Invisible}\} = \{\}, \\ \varphi(Q) &= \{d \in \mathbf{D} \mid d \text{ ist ein Mitglied von Invisible}\} = \{\}. \end{aligned}$$

Wir zeigen, dass $\varphi_\sigma(\forall x\,(P(x) \to Q(x))) = \mathtt{w}$ und $\varphi_\sigma(\exists x\, Q(x))) = \mathtt{f}$ für beliebige σ unter $\mathfrak{I}$ gilt.

- Um $\varphi_\sigma(\forall x\,(P(x) \to Q(x))) = \mathtt{w}$ zu zeigen (nach Def. 19.7), müssen wir zeigen, dass für alle x-Varianten σ' von σ: $\varphi_{\sigma'}(P(x) \to Q(x)) = \mathtt{w}$. Um dies zu zeigen (nach Def. 19.5), müssen wir zeigen, dass:

  $$\text{(i) } \varphi_{\sigma'}(P(x)) = \mathtt{f} \quad \text{oder} \quad \text{(ii) } \varphi_{\sigma'}(Q(x)) = \mathtt{w}.$$

  Beachten Sie, dass alle $d \in \mathbf{D}$ so sind, dass $d \notin \varphi(P)$ (denn kein Mitglied von The Beatles ist ein Mitglied von Invisible). Daraus folgt, dass $\varphi_{\sigma'}(P(x)) = \mathtt{f}$ für alle x-Varianten σ' von σ gilt. Daraus folgt, dass $\varphi_{\sigma'}(P(x)) = \mathtt{f}$ oder $\varphi_{\sigma'}(Q(x)) = \mathtt{w}$. Das war zu zeigen.

- Um $\varphi_\sigma(\exists x\, Q(x))) = \mathtt{f}$ zu zeigen, müssen wir zeigen, dass für alle x-Varianten σ' von σ: $\varphi_{\sigma'}(Q(x)) = \mathtt{f}$. Noch einmal beachten Sie, dass alle $d \in \mathbf{D}$ so sind, dass $d \notin \varphi(Q)$ (denn kein Mitglied von The Beatles ist ein Mitglied von Invisible). Daraus folgt, dass $\varphi_{\sigma'}(Q(x)) = \mathtt{f}$ für alle x-Varianten σ' von σ gilt. Das war zu zeigen.

Da wir beide gewünschten Ziele erreicht haben, haben wir gezeigt, dass $\mathfrak{I}$ ein Gegenbeispiel für die obige Behauptung ist. □

4. $\forall x\, \forall y\, P(x,y) \vDash \forall x\, \exists y\, P(x,y)$ richtig

Beweis. Angenommen $\varphi_\sigma(\forall x\, \forall y\, P(x,y)) = \mathtt{w}$ für beliebige $\mathfrak{I} = \langle \mathbf{D}, \varphi \rangle$ und σ unter $\mathfrak{I}$. Zu zeigen: $\varphi_\sigma(\forall x\, \exists y\, P(x,y)) = \mathtt{w}$.

Aus unsere Annahme folgt (nach Def. 19.7), dass beliebige x-Variante σ' von σ unter $\mathfrak{I}$: $\varphi_{\sigma'}(\forall y\, P(x,y)) = \mathtt{w}$. Daraus folgt (nach Def. 19.7), dass für alle y-Varianten σ'' von σ' unter $\mathfrak{I}$: $\varphi_{\sigma''}(P(x,y)) = \mathtt{w}$.

Da dies für alle σ'' gilt, muss es auch für mindestens ein σ'' gelten. Daraus und da σ'' eine y-Variante von σ' ist, folgt es (nach Def. 19.8), dass für alle $\varphi_{\sigma'}(\exists x\, P(x,y)) = \mathtt{w}$. Daraus und da σ' eine beliebige x-Variante von σ ist, folgt es (nach Def. 19.7), dass $\varphi_{\sigma'}(\forall x\, \exists x\, P(x,y)) = \mathtt{w}$. □

5. $\exists x\,(P(y) \wedge Q(x)) \vDash P(y) \wedge \exists x\, Q(x)$ richtig

Beweis. Angenommen $\varphi_\sigma(\exists x\,(P(y) \wedge Q(x))) = \mathtt{w}$ für beliebige $\mathfrak{I} = \langle \mathbf{D}, \varphi \rangle$ und σ unter $\mathfrak{I}$. Um $\varphi_\sigma(P(y) \wedge \exists x\, Q(x)) = \mathtt{w}$ zu zeigen, müssen wir zeigen (nach Def. 19.3), dass:

$$\text{(i) } \varphi_\sigma(P(y)) = \mathtt{w} \quad \text{und} \quad \text{(ii) } \varphi_\sigma(P(y)) = \mathtt{w}.$$

Aus unsere Annahme folgt (nach Def. 19.8), dass es eine x-Variante σ' von σ gibt, sodass $\varphi_{\sigma'}(P(y) \wedge Q(x)) = \mathtt{w}$. Sei σ' eine solche x-Variante von σ. Daraus folgt (nach Def. 19.3), dass:

$$\varphi_{\sigma'}(P(y)) = \mathtt{w} \quad \text{und} \quad \varphi_{\sigma'}(Q(x)) = \mathtt{w}.$$

Beachten Sie, dass σ' keine y-Variante von σ ist. Folglich ist $\varphi_{\sigma'}(y) = \varphi_\sigma(y)$. Daraus und aus $\varphi_{\sigma'}(P(y)) = \mathtt{w}$, folgt es (nach Def. 19.1), dass $\varphi_\sigma(P(y)) = \mathtt{w}$. Damit ist (i) gezeigt.

Da σ' eine x-Variante von σ, folgt es aus $\varphi_{\sigma'}(Q(x)) = \mathtt{w}$ (nach Def. 19.8), dass $\varphi_\sigma(\exists x\, Q(x)) = \mathtt{w}$. Damit ist (ii) gezeigt. □

6. $\exists x\, P(y) \vDash \forall y\, P(x)$ nicht richtig

Herausforderung

Zeigen Sie, dass die Prämissen wahr und die Konklusion unter $\mathfrak{I}$ falsch sind, wobei $\mathfrak{I} = \langle \varphi, \mathbf{D} \rangle$ mit:

$$\mathbf{D} = \mathbf{B} = \{George, John, Paul, Ringo\},$$
$$\varphi(P) = \{d \in \mathbf{D} \mid d \text{ ist ein Mitglied von Wings}\} = \{Paul\}.$$

7. $\forall x\, \forall y\, P(x,y) \vDash P(a,b) \wedge P(c,d)$ richtig

Beweis. Angenommen $\varphi_\sigma(\forall x\, \forall y\, P(x,y)) = \mathtt{w}$ für beliebige $\mathfrak{I} = \langle \mathbf{D}, \varphi \rangle$ und σ unter $\mathfrak{I}$. Zu zeigen: $\varphi_\sigma(P(a,b) \wedge P(c,d)) = \mathtt{w}$.

Seien die x-Varianten σ_1 und σ_2, sodass: $\varphi_{\sigma_1}(x) = \varphi(a)$, $\varphi_{\sigma_2}(x) = \varphi(c)$. Seien die y-Varianten σ_3 und σ_4 von σ, sodass $\varphi_{\sigma_3}(y) = \varphi(b)$ und $\varphi_{\sigma_4}(y) = \varphi(d)$. Da σ_1 und σ_2 x-Varianten von σ sind, folgt es aus unsere Annahme (nach Def. 19.7), dass $\varphi_{\sigma_1}(\forall y\, P(x,y)) = \mathtt{w}$ und $\varphi_{\sigma_2}(\forall y\, P(x,y)) = \mathtt{w}$.

Aus $\varphi_{\sigma_1}(\forall y\, P(x,y)) = \mathtt{w}$ und $\varphi_{\sigma_1}(x) = \varphi(a)$ folgt (nach Def. 19.1), dass $\varphi_\sigma(\forall y\, P(a,y)) = \mathtt{w}$. Da σ_3 eine y-Variante von σ ist, folgt es (nach Def. 19.7), dass $\varphi_{\sigma_3}(P(a,y)) = \mathtt{w}$. Daraus und aus $\varphi_{\sigma_3}(y) = \varphi(b)$ folgt (nach Def. 19.1), dass $\varphi_\sigma(P(a,b)) = \mathtt{w}$.

Analog dazu erhalten wir (mit σ_4) $\varphi_\sigma(P(c,d)) = \mathtt{w}$ aus $\varphi_{\sigma_2}(\forall y\, P(x,y)) = \mathtt{w}$.

Da $\varphi_\sigma(P(a,b)) = \mathtt{w}$ und $\varphi_\sigma(P(c,d)) = \mathtt{w}$ folgt (nach Def. 19.3), dass $\varphi_\sigma(P(a,b) \wedge P(c,d)) = \mathtt{w}$. □

8. $\forall x\, (P(x) \rightarrow Q(x)), P(a) \vDash Q(a)$ richtig

Beweis. Angenommen $\varphi_\sigma(\forall x\, (P(x) \rightarrow Q(x))) = \mathtt{w}$ und $\varphi_\sigma(P(a)) = \mathtt{w}$ für beliebige $\mathfrak{I} = \langle \mathbf{D}, \varphi \rangle$ und σ unter $\mathfrak{I}$. Zu zeigen: $\varphi_\sigma(Q(a)) = \mathtt{w}$.

Sei σ' eine x-Variante von σ, sodass $\varphi_\sigma(x) = \varphi(a)$. Daraus und Aus unserer ersten Annahme folgt (nach Def. 19.7), dass $\varphi_{\sigma'}(P(x) \rightarrow Q(x)) = \mathtt{w}$. Daraus folgt (nach Def. 19.1), dass $\varphi_\sigma(P(a) \rightarrow Q(a)) = \mathtt{w}$. Daraus folgt (nach Def. 19.5), dass:

$$\text{(i) } \varphi_\sigma(P(a)) = \mathtt{f} \quad \text{oder} \quad \text{(ii) } \varphi_\sigma(Q(a)) = \mathtt{w}.$$

Unsere zweite Annahme, d.h. $\varphi_\sigma(P(a)) = \mathtt{w}$, widerspricht jedoch Fall (i). Daraus folgt, dass $\varphi_\sigma(Q(a)) = \mathtt{w}$. □

9. $\forall x\, \exists y\, P(x,y) \vDash \exists y\, P(y,y)$ nicht richtig

Herausforderung

Zeigen Sie, dass die Prämissen wahr und die Konklusion unter $\mathfrak{I}$ falsch sind, wobei $\mathfrak{I} = \langle \varphi, \mathbf{D} \rangle$ mit:

$$\mathbf{D} = \mathbb{N} = \{1,2,3,\ldots\},$$
$$\varphi(P) = \{\langle d_1, d_2 \rangle \in \mathbf{D} \mid d_1 + 1 = d_2\} = \{\langle 1,2 \rangle, \langle 2,3 \rangle, \langle 3,4 \rangle, \ldots\}.$$

Lemma 1. Für alle $v_1, v_2, \mathfrak{I} = \langle \mathbf{D}, \varphi \rangle$ und σ unter $\mathfrak{I}$:

$$\varphi_\sigma(\forall v_1\, P(v_1)) = \varphi_\sigma(\forall v_2\, P(v_2)) \quad \text{und}$$
$$\varphi_\sigma(\exists v_1\, P(v_1)) = \varphi_\sigma(\exists v_2\, P(v_2)).$$

Herausforderung

Beweisen Sie dieses Lemma oder einen der folgenden Teilfälle:

1. Wenn $\varphi_\sigma(\forall v_1\, P(v_1)) = \mathtt{w}$, dann $\varphi_\sigma(\forall v_2\, P(v_2)) = \mathtt{w}$.
2. Wenn $\varphi_\sigma(\forall v_1\, P(v_1)) = \mathtt{f}$, dann $\varphi_\sigma(\forall v_2\, P(v_2)) = \mathtt{f}$.
3. Wenn $\varphi_\sigma(\exists v_1\, P(v_1)) = \mathtt{w}$, dann $\varphi_\sigma(\forall v_2\, P(v_2)) = \mathtt{w}$.
4. Wenn $\varphi_\sigma(\exists v_1\, P(v_1)) = \mathtt{f}$, dann $\varphi_\sigma(\forall v_2\, P(v_2)) = \mathtt{f}$.

Die Teilfälle 2 und 3 (sowie 1 und 4) werden jeweils auf ähnliche Weise bewiesen.

10. $\forall x\, (P(x) \vee Q(x)), \neg\exists y\, Q(y) \vDash \forall x\, P(x)$ richtig

Beweis. Angenommen $\varphi_\sigma(\forall x\, (P(x) \vee Q(x))) = \mathtt{w}$ und $\varphi_\sigma(\neg\exists y\, Q(y)) = \mathtt{w}$ für beliebige $\mathfrak{I} = \langle \mathbf{D}, \varphi \rangle$ und σ unter $\mathfrak{I}$. Zu zeigen: $\varphi_\sigma(\forall x\, P(x)) = \mathtt{w}$.

Aus unserer zweiten Annahme folgt (nach Def. 19.2), dass $\varphi_\sigma(\exists y\, Q(y)) = \mathtt{f}$. Daraus folgt (nach Lemma 1), dass $\varphi_\sigma(\exists x\, Q(x)) = \mathtt{f}$. Daraus folgt (nach Def. 19.8) für eine beliebige x-Variante σ' von σ, dass $\varphi_{\sigma'}(Q(x)) = \mathtt{f}$.

Aus unserer ersten Annahme folgt (nach Def. 19.7), dass $\varphi_{\sigma'}(P(x) \vee Q(x)) = \mathtt{w}$. Daraus folgt, dass:

$$\text{(i) } \varphi_{\sigma'}(P(x)) = \mathtt{w} \quad \text{oder} \quad \text{(ii) } \varphi_{\sigma'}(Q(x)) = \mathtt{w}.$$

Fall (ii) steht jedoch im Widerspruch zu unserem vorherigen Ergebnis, dass $\varphi_{\sigma'}(Q(x)) = \mathtt{f}$. Daraus folgt, dass $\varphi_{\sigma'}(P(x)) = \mathtt{w}$. Und da σ' eine beliebige x-Variante von σ ist, folgt es (nach Def. 19.7), dass $\varphi_\sigma(\forall x\, P(x)) = \mathtt{w}$. □

11. $\forall x\,(P(x) \lor Q(x)), \neg Q(y) \vDash \forall x\, P(x)$ nicht richtig

Herausforderung

Zeigen Sie, dass die Prämissen wahr und die Konklusion unter $\mathfrak{I}$ falsch sind, wobei $\mathfrak{I} = \langle \varphi, \mathbf{D} \rangle$ mit:

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \mathbf{U}, \\ \varphi(P) &= \{d \in \mathbf{D} \mid d \text{ ist ein Mitglied von The Beatles}\} = \mathbf{B}, \\ \varphi(Q) &= \{d \in \mathbf{D} \mid d \text{ ist ein Mitglied von Wings}\} = \mathbf{W}. \end{aligned}$$

12. $P(a_1), P(a_2), \ldots, P(a_{10000}) \vDash \forall x\, P(x)$ nicht richtig

Herausforderung

Zeigen Sie, dass die Prämissen wahr und die Konklusion unter $\mathfrak{I}$ falsch sind, wobei $\mathfrak{I} = \langle \varphi, \mathbf{D} \rangle$ mit:

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}, \\ \varphi(a_n) &= n, \text{ für } = 1, \ldots, 10000, \\ &\text{d.h., } \varphi(a_1) = 1, \ldots, \varphi(a_{10000}) = 10000, \\ \varphi(P) &= \{d \in \mathbf{D} \mid d < 10001\} = \{1, 2, \ldots, 10000\}. \end{aligned}$$

Prädikatenlogisches Herleiten 11

11.1 Vorbereitung 201
11.1.1 Abgeleitete Schlussregeln 202
11.1.2 Lösungen 204
11.2 Übungen 209
11.2.1 Lösungen 211
11.3 Zusatzübungen . . . 230
11.3.1 Lösungen 230

11.1 Vorbereitung

Die folgenden Übungen sind relativ einfach im Vergleich zu den Übungen im Skript.

Aktivierungselement 11.1. Beweisen Sie die logische Gültigkeit der folgenden Schlussfolgerungen mit Herleitungen[1]:

1. $\vdash \forall x\,(F(x) \lor \neg F(x))$
2. $G(y) \vdash \forall x\,(G(y) \lor F(x))$
3. $\forall x\,(F(x) \leftrightarrow G(x)) \vdash \forall x\,F(x) \leftrightarrow \forall x\,G(x)$
4. $\vdash \neg\forall x\,\forall y\,\exists z\,F(x,y,z) \leftrightarrow \exists x\,\exists y\,\forall z\,\neg F(x,y,z)$

1: Adaptiert aus P. Suppes, *Introduction to Logic*, New York: Van Nostrand Reinhold, 1957, § 5.3, Übung 2.

Aktivierungselement 11.2. Beweisen Sie die logische Gültigkeit der folgenden Schlussfolgerungen mit Herleitungen[2]:

1. $\vdash \forall x\,(P(x) \land Q(x)) \leftrightarrow (\forall x\,P(x) \land \forall y\,Q(y))$
2. $\forall x\,(P(x) \to Q(x)), \exists x\,P(x) \vdash \exists x\,Q(x)$
3. $\forall x\,(P(x) \to Q(a)) \vdash \exists x\,P(x) \to Q(a)$
4. $\forall x\,(P(x) \to Q(x)) \vdash \forall x\,(\exists y\,(P(x) \land R(x,y)) \to \exists z\,(Q(x) \land R(x,z)))$
5. $\forall x\,\forall y\,L(x,y) \vdash \forall y\,\forall x\,L(x,y)$
6. $\forall x\,\forall y\,L(x,y) \vdash \forall y\,\forall x\,L(y,x)$
7. $\forall x\,P(x) \lor \forall y\,Q(y) \vdash \forall x\,(P(x) \lor Q(x))$
8. $\vdash \forall x\,P(x) \leftrightarrow \neg\exists y\,\neg P(y)$
9. $\forall x\,P(x) \vdash \exists x\,P(x)$
10. $\exists x\,\neg P(x) \vdash \neg\forall x\,P(x)$
11. $\vdash \forall x\,(P(x) \lor \neg P(x))$
12. $\vdash \neg\forall x\,(P(x) \land \neg P(x))$
13. $\vdash \forall x\,\neg(P(x) \land \neg P(x))$
14. $\forall x\,P(x) \vdash \forall x\,\forall y\,(R(x,y) \to P(y))$
15. $\forall x\,\forall y\,R(x,y) \vdash \forall x\,\forall y\,(\neg R(x,y) \to P(y))$

2: Adaptiert aus J.W. Garson, *Modal Logic for Philosophers*, CUP, 2013, Übung 12.2.

Bemerkung: Achten Sie in der Schlussfolgerung 6 auf die Reihenfolge der Variablen!

11.1.1 Abgeleitete Schlussregeln

Wie in der Aussagenlogik lassen sich auch in der Prädikatenlogik aus den (primitiven) Schlussregeln neue *abgeleitete Schlussregeln* gewinnen. Eine solche abgeleitete Schlussregel ist:

$$\forall v\, A \vdash \exists v\, A, \qquad \text{(AzuE)}$$

wobei ‚v' eine Metavariable für Individuenvariablen und ‚A' eine Metavariable für Formeln sind.

Wir können die Ableitbarkeit von AzuE sowie anderer abgeleiteter Schlussregeln in drei Schritten zeigen.

Schritt 1: Ein spezieller Fall. Zunächst betrachten wir einen einfachen Spezialfall dieser Regel. Wir wählen eine konkrete Individuenvariable (z.B. ‚x') und eine konkrete Formel (z.B. ‚$P(x)$') und erhalten die Schlussfolgerung:

$$\forall x\, P(x) \vdash \exists x\, P(x).$$

Schritt 2: Herleitung des Spezialfalls. Nun zeigen wir die Gültigkeit dieses Spezialfalls durch eine formale Herleitung.

1.	$\forall x\, P(x)$	(P1)
2.	$P(y)$	1. (UB)[3]
3.	$\forall x\, P(x)$	2. (UE)

3: Wir substituieren: $P(x)[y/x]$.

Schritt 3: Verallgemeinerung. Nun verallgemeinern wir die vorherige Herleitung, um zu zeigen, dass jede Herleitung der obigen Form gilt. Daraus folgt, dass die Schlussregel ableitbar ist. Dies zeigen wir mittels eines informellen Beweises.

Zu zeigen ist, dass eine Herleitung der Form:

$$\forall v\, A \vdash \exists v\, A$$

für jede Individuenvariable v und jede Formel A gilt.

Beweis. Seien v, v' Individuenvariablen und A eine Formel, wobei v' in A frei für v ist. Es lässt sich eine Herleitung der folgenden Form angeben:

1.	$\forall v\, A$	(P1)
2.	$A[v'/v]$	1. (UB)
3.	$\forall v\, A$	2. (UE)

Folglich gilt $\forall v\, A \vdash \exists v\, A$ für jede Individuenvariable v und jede Formel A, was zeigt, dass die Schlussregel AzuE ableitbar ist. □

Aktivierungselement 11.3. Beweisen Sie die Ableitbarkeit der folgenden Schlussregeln.[4]

4: Siehe S. 296 des Kursskripts.

1. $\neg\exists v\, A \vdash \forall v\, \neg A$ (NEGQUAN1)
2. $\forall v\, \neg A \vdash \neg\exists v\, A$ (NEGQUAN2)
3. $\neg\forall v\, A \vdash \exists v\, \neg A$ (NEGQUAN3)
4. $\exists v\, \neg A \vdash \neg\forall v\, A$ (NEGQUAN4)

11.1.2 Lösungen

Lösungen zu Aktivierungselement 11.1. [Ausstehend]

Lösungen zu Aktivierungselement 11.2. [Ausstehend]

Lösungen zu Aktivierungselement 11.3. Beweisen Sie die Ableitbarkeit der folgenden Schlussregeln.

1. $\neg\exists v\, A \vdash \forall v\, \neg A$ (NEGQUAN1)

Schritt 1: Wir wählen die konkrete Individuenvariable ‚x' und die konkrete Formel ‚$P(x)$' und erhalten die Schlussfolgerung:

$$\neg\exists x\, P(x) \vdash \forall x\, \neg P(x).$$

Schritt 2: Nun zeigen wir die Gültigkeit dieses Spezialfalls durch eine formale Herleitung.

1.	$\neg\exists x\, P(x)$	(P1)
2.	$\|\|$ $\neg\neg P(y)$	(IB-Annahme)
3.	$\|\|$ $P(y)$	2. (DN2)
4.	$\|\|$ $\exists x\, P(x)$	3. (DN2)
5.	$\|\|$ $\exists x\, P(x) \wedge \neg\exists x\, P(x)$	4., 1. (KON)
6.	$\neg P(y)$	2.–5. (IB)
7.	$\forall x\, \neg P(x)$	6. (UE)

Schritt 3: Schließlich zeigen wir, dass eine Herleitung der Form:

$$\neg\exists v\, A \vdash \forall v\, \neg A$$

für jede Individuenvariable v und jede Formel A gilt.

Beweis. Seien v, v' Individuenvariablen und A eine Formel, wobei v' in A frei für v ist. Es lässt sich eine Herleitung der folgenden Form angeben:

1.	$\neg\exists v\, A$	(P1)
2.	$\|\|$ $\neg\neg A[v'/v]$	(IB-Annahme)
3.	$\|\|$ $A[v'/v]$	2. (DN2)
4.	$\|\|$ $\exists v\, A$	3. (DN2)
5.	$\|\|$ $\exists v\, A \wedge \neg\exists v\, A$	4., 1. (KON)
6.	$\neg A[v'/v]$	2.–5. (IB)
7.	$\forall v\, \neg A$	6. (UE)

Folglich gilt $\neg\exists v\, A \vdash \forall v\, \neg A$ für jede Individuenvariable v und jede Formel A, was zeigt, dass NEGQUAN1 ableitbar ist. □

2. $\forall v \neg A \vdash \neg \exists v\, A$ (NEGQUAN2)

Schritt 1: Wir wählen die konkrete Individuenvariable ‚x' und die konkrete Formel ‚$P(x)$' und erhalten die Schlussfolgerung:

$$\forall x \neg P(x) \vdash \neg \exists x\, P(x).$$

Schritt 2: Nun zeigen wir die Gültigkeit dieses Spezialfalls durch eine formale Herleitung.

1.	$\forall x \neg P(x)$	(P1)
2.	$\|\|\ \neg\neg\exists x\, P(x)$	(IB-Annahme)
3.	$\|\|\ \exists x\, P(x)$	2. (DN2)
4.	$\|\|\ \|\|\ P(y)$	(EB-Annahme)
5.	$\|\|\ \|\|\ \neg P(y)$	1. (UB)
6.	$\|\|\ \|\|\ Q(a) \wedge \neg Q(a)$	4., 5. (ECQ)
7.	$\|\|\ Q(a) \wedge \neg Q(a)$	4.–6. (IB)
8.	$\neg\exists x\, P(x)$	2.–7. (IB)

Schritt 3: Schließlich zeigen wir, dass eine Herleitung der Form:

$$\forall v \neg A \vdash \neg \exists v\, A$$

für jede Individuenvariable v und jede Formel A gilt.

Beweis. Seien v, v' Individuenvariablen und A eine Formel, wobei v' in A frei für v ist. Es lässt sich eine Herleitung der folgenden Form angeben:

1.	$\forall v \neg A$	(P1)
2.	$\|\|\ \neg\neg\exists v\, A$	(IB-Annahme)
3.	$\|\|\ \exists v\, A$	2. (DN2)
4.	$\|\|\ \|\|\ P[v'/v]$	(EB-Annahme)
5.	$\|\|\ \|\|\ \neg P[v'/v]$	1. (UB)
6.	$\|\|\ \|\|\ Q(a) \wedge \neg Q(a)$	4., 5. (ECQ)
7.	$\|\|\ Q(a) \wedge \neg Q(a)$	4.–6. (IB)
8.	$\neg\exists v\, A$	2.–7. (IB)

Folglich gilt $\forall v \neg A \vdash \neg \exists v\, A$ für jede Individuenvariable v und jede Formel A, was zeigt, dass NEGQUAN2 ableitbar ist. □

3. $\neg\forall v\, A \vdash \exists v\, \neg A$ (NEGQUAN3)

Schritt 1: Wir wählen die konkrete Individuenvariable ‚x' und die konkrete Formel ‚$P(x)$' und erhalten die Schlussfolgerung:

$$\neg\forall x\, P(x) \vdash \exists x\, \neg P(x).$$

Schritt 2: Nun zeigen wir die Gültigkeit dieses Spezialfalls durch eine formale Herleitung.

1.	$\underline{\neg\forall x\, P(x)}$	(P1)
2.	$\|\| \quad \neg\exists x\, \neg P(x)$	(IB-Annahme)
3.	$\|\| \; \|\| \quad \neg P(y)$	(IB-Annahme)
4.	$\|\| \; \|\| \quad \exists x\, \neg P(x)$	3. (EE)
5.	$\|\| \; \|\| \quad \exists x\, \neg P(x) \wedge \neg\exists x\, \neg P(x)$	4., 2. (KON)
6.	$\|\| \quad P(y)$	3.–5. (IB)
7.	$\|\| \quad \forall x\, P(x)$	6. (UE)
8.	$\|\| \quad \forall x\, P(x) \wedge \neg\forall x\, P(x)$	7., 1. (KON)
9.	$\exists x\, \neg P(x)$	2.–8. (IB)

Schritt 3: Schließlich zeigen wir, dass eine Herleitung der Form:

$$\neg\forall v\, A \vdash \exists v\, \neg A$$

für jede Individuenvariable v und jede Formel A gilt.

Beweis. Seien v, v' Individuenvariablen und A eine Formel, wobei v' in A frei für v ist. Es lässt sich eine Herleitung der folgenden Form angeben:

1.	$\underline{\neg\forall v\, A}$	(P1)
2.	$\|\| \quad \neg\exists v\, \neg A$	(IB-Annahme)
3.	$\|\| \; \|\| \quad \neg A[v'/v]$	(IB-Annahme)
4.	$\|\| \; \|\| \quad \exists v\, \neg A$	3. (EE)
5.	$\|\| \; \|\| \quad \exists v\, \neg A \wedge \neg\exists v\, \neg A$	4., 2. (KON)
6.	$\|\| \quad A[v'/v]$	3.–5. (IB)
7.	$\|\| \quad \forall v\, A$	6. (UE)
8.	$\|\| \quad \forall v\, A \wedge \neg\forall v\, A$	7., 1. (KON)
9.	$\exists v\, \neg A$	2.–8. (IB)

Folglich gilt $\neg\forall v\, A \vdash \exists v\, \neg A$ für jede Individuenvariable v und jede Formel A, was zeigt, dass NEGQUAN3 ableitbar ist. □

4. $\exists v \neg A \vdash \neg\forall v\, A$ (NEGQUAN4)

Schritt 1: Wir wählen die konkrete Individuenvariable ‚x' und die konkrete Formel ‚$P(x)$' und erhalten die Schlussfolgerung:

$$\exists x \neg P(x) \vdash \forall x \neg P(x).$$

Schritt 2: Nun zeigen wir die Gültigkeit dieses Spezialfalls durch eine formale Herleitung.

1.	$\exists x \neg P(x)$	(P1)
2.	$\|\| \quad \neg\neg\forall x\, P(x)$	(IB-Annahme)
3.	$\|\| \quad \forall x\, P(x)$	2. (DN2)
4.	$\|\| \; \|\| \quad \neg P(y)$	(EB-Annahme)
5.	$\|\| \; \|\| \quad P(y)$	3. (UB)
6.	$\|\| \; \|\| \quad Q(a) \wedge \neg Q(a)$	5., 4. (ECQ)
7.	$\|\| \quad Q(a) \wedge \neg Q(a)$	4.–6. (IB)
8.	$\neg\forall x\, P(x)$	2.–7. (IB)

Schritt 3: Schließlich zeigen wir, dass eine Herleitung der Form:

$$\exists v \neg A \vdash \neg\forall v\, A$$

für jede Individuenvariable v und jede Formel A gilt.

Beweis. Seien v, v' Individuenvariablen und A eine Formel, wobei v' in A frei für v ist. Es lässt sich eine Herleitung der folgenden Form angeben:

1.	$\exists v \neg A$	(P1)
2.	$\|\| \quad \neg\neg\forall v\, A$	(IB-Annahme)
3.	$\|\| \quad \forall v\, A$	2. (DN2)
4.	$\|\| \; \|\| \quad \neg A[v'/v]$	(EB-Annahme)
5.	$\|\| \; \|\| \quad A[v'/v]$	3. (UB)
6.	$\|\| \; \|\| \quad Q(a) \wedge \neg Q(a)$	5., 4. (ECQ)
7.	$\|\| \quad Q(a) \wedge \neg Q(a)$	4.–6. (IB)
8.	$\neg\forall v\, A$	2.–7. (IB)

Folglich gilt $\exists v \neg A \vdash \neg\forall v\, A$ für jede Individuenvariable v und jede Formel A, was zeigt, dass NEGQUAN2 ableitbar ist. □

11.2 Übungen

Übung 11.1. Führen Sie die Herleitungen zu folgenden deduktiv gültigen Schlüssen durch:

1. $\forall x\,(P(x) \wedge Q(x)) \vdash \forall x\,P(x) \wedge \forall x\,Q(x)$
2. $\forall x\,P(x) \vee \forall x\,Q(x) \vdash \forall x\,(P(x) \vee Q(x))$
3. $\vdash \forall x\,(P(a) \vee Q(x)) \leftrightarrow P(a) \vee \forall x\,Q(x)$
4. $\vdash \forall x\,(P(a) \wedge Q(x)) \leftrightarrow P(a) \wedge \forall x\,Q(x)$
5. $\vdash \forall x\,(P(a) \rightarrow Q(x)) \leftrightarrow (P(a) \rightarrow \forall x\,Q(x))$
6. $\forall x\,\neg P(x) \vdash \neg\exists x\,P(x)$
7. $\vdash P(a) \wedge \exists x\,Q(x) \leftrightarrow \exists x\,(P(a) \wedge Q(x))$
8. $\vdash P(a) \vee \exists x\,Q(x) \leftrightarrow \exists x\,(P(a) \vee Q(x))$
9. $\exists x\,P(x) \vee \exists x\,Q(x) \vdash \exists x\,(P(x) \vee Q(x))$
10. $\exists x\,(P(x) \rightarrow Q(x)), \forall x\,P(x) \vdash \exists x\,Q(x)$
11. $\vdash (P(a) \rightarrow \exists x\,Q(x)) \leftrightarrow \exists x\,(P(a) \rightarrow Q(x))$

Übung 11.2. Repräsentieren Sie die folgenden Argumente, und zeigen Sie, dass die daraus resultierenden Argumentformen deduktiv gültig sind:

1. Alle Österreicher sind Europäer. Alle Salzburger sind Österreicher. Also sind alle Salzburger Europäer.
2. Alle Philosophen sind weise. Nun gibt es Salzburger Philosophen. Also sind einige Salzburger weise.
3. Es gibt keine Österreicher, die auf den Mond geflogen sind. Es gibt aber Kosmonauten, die Österreicher sind. Daher sind nicht alle Kosmonauten auf den Mond geflogen.
4. Nicht ein Lebewesen auf dem Mars ist glatzköpfig. Alle Skinheads sind jedoch glatzköpfig. Somit gibt es keinen Skinhead, der ein Lebewesen auf dem Mars ist.

Übung 11.3. Repräsentieren Sie die beiden folgenden Argumente und versuchen Sie zu zeigen, dass die daraus resultierenden Argumentformen deduktiv gültig sind. (Achtung: Eine der beiden Argumentformen ist deduktiv gültig, die andere jedoch nicht.)

1. Alle Lebewesen auf dem Mars sind glatzköpfig. Somit gibt es Lebewesen auf dem Mars, die glatzköpfig sind.
2. Es gibt Lebewesen auf dem Mars. Alle Lebewesen auf dem Mars sind glatzköpfig. Somit gibt es Lebewesen auf dem Mars, die glatzköpfig sind.

Übung 11.4. Führen Sie die Herleitungen zu folgenden deduktiv gültigen Schlüssen durch:

1. $\exists x\, \forall y\, R(x, y) \vdash \forall y\, \exists x\, R(x, y)$
2. $\neg\exists x\, \neg P(x) \vdash \forall x\, P(x)$
3. $\exists x\, P(x) \vdash \neg\forall x\, \neg P(x)$
4. $\neg\exists x\, P(x) \vdash \forall x\, \neg P(x)$
5. $\exists x\, \neg P(x) \vdash \neg\forall x\, P(x)$
6. $\forall x\, (\exists y\, P(y) \rightarrow Q(x)) \vdash \forall y\, (P(y) \rightarrow Q(a))$
7. $\neg\forall x\, (P(x) \rightarrow Q(x)) \vdash \exists x\, (P(x) \wedge \neg Q(x))$

Übung 11.5. Repräsentieren Sie die folgenden Argumente, und zeigen Sie, daß die daraus resultierenden Argumentformen deduktiv gültig sind:

1. Alles hat eine Ursache. Gott hat jedoch keine Ursache. Also ist der Papst Tiroler.
2. Alle Salzburger lieben Salzburg. Es gibt jedoch niemanden, der Salzburg und alle Touristen in Salzburg liebt. Somit lieben die Salzburger nicht alle Touristen in Salzburg.
3. Es gibt nichts Allmächtiges. Wenn etwas ein Gott ist, ist es jedoch allmächtig. Also gibt es keinen Gott.

11.2.1 Lösungen

Lösung zu Übung 11.1. Führen Sie die Herleitungen zu folgenden deduktiv gültigen Schlüssen durch:

1. $\forall x\,(P(x) \land Q(x)) \vdash \forall x\,P(x) \land \forall x\,Q(x)$

Antwort

1.	$\forall x\,(P(x) \land Q(x))$	(P1)
2.	$P(y) \land Q(y)$	1. (UB)[5]
3.	$P(y)$	2. (SIMP1)
4.	$\forall x\,P(x)$	3. (UE)[6]
5.	$Q(y)$	2. (SIMP2)
6.	$\forall x\,Q(x)$	5. (UE)[7]
7.	$\forall x\,P(x) \land \forall x\,Q(x)$	4., 6. (KON)

5: Wir substituieren: $(P(x) \land Q(x))[y/x]$.

6: VB erfüllt: ‚y' kommt in 1. und 4. nicht frei vor.

7: VB erfüllt: ‚y' kommt in 1. und 6. nicht frei vor.

2. $\forall x\,P(x) \lor \forall x\,Q(x) \vdash \forall x\,(P(x) \lor Q(x))$

Antwort

1.	$\forall x\,P(x) \lor \forall x\,Q(x)$	(P1)
2.	$\|\|$ $\forall x\,P(x)$	(FU-Annahme 1)
3.	$\|\|$ $P(y)$	2. (UB)
4.	$\|\|$ $P(y) \lor Q(y)$	3. (ADD1)
5.	$\|\|$ $\forall x\,(P(x) \lor Q(x))$	4. (UE)[8]
6.	$\|\|$ $\neg\forall x\,P(x)$	(FU-Annahme 2)
7.	$\|\|$ $\forall x\,Q(x)$	1., 6. (DS1)
8.	$\|\|$ $Q(z)$	7. (UB)
9.	$\|\|$ $P(z) \lor Q(z)$	8. (ADD2)
10.	$\|\|$ $\forall x\,(P(x) \lor Q(x))$	10.(UE)[9]
11.	$\forall x\,(P(x) \lor Q(x))$	2.–10. (FU)

8: VB erfüllt: ‚y' kommt in 1., 2. und 4. nicht frei vor.

9: VB erfüllt: ‚z' kommt in 1., 2. und 4. nicht frei vor.

Wir ziehen keinen Strich, weil die zu beweisende Schlussfolgerung keine Prämissen hat.

3. $\vdash \forall x\,(P(a) \vee Q(x)) \leftrightarrow P(a) \vee \forall x\, Q(x)$

Antwort

1.	$\|\| \;\forall x\,(P(a) \vee Q(x))$	(KB-Annahme)
2.	$\|\| \;P(a) \vee Q(x_1)$	1. (UB)
3.	$\|\| \;\|\| \;P(a)$	(FU-Annahme 1)
4.	$\|\| \;\|\| \;P(a) \vee \forall x\, Q(x)$	3. (ADD1)
5.	$\|\| \;\|\| \;\neg P(a)$	(FU-Annahme 2)
6.	$\|\| \;\|\| \;Q(x_1)$	2., 5. (DS1)
7.	$\|\| \;\|\| \;\forall x\, Q(x)$	6. (UE)[10]
8.	$\|\| \;\|\| \;P(a) \vee \forall x\, Q(x)$	7. (ADD2)
9.	$\|\| \;P(a) \vee \forall x\, Q(x)$	3.–8. (FU)
10.	$\forall x\,(P(a) \vee Q(x)) \rightarrow P(a) \vee \forall x\, Q(x)$	1.–9. (KB)
11.	$\|\| \;P(a) \vee \forall x\, Q(x)$	(KB-Annahme)
12.	$\|\| \;\|\| \;P(a)$	(FU-Annahme 1)
13.	$\|\| \;\|\| \;P(a) \vee Q(x_2)$	12. (ADD1)
14.	$\|\| \;\|\| \;\forall x\,(P(a) \vee Q(x))$	13. (UE)[11]
15.	$\|\| \;\|\| \;\neg P(a)$	(FU-Annahme 2)
16.	$\|\| \;\|\| \;\forall x\, Q(x)$	11., 15. (DS1)
17.	$\|\| \;\|\| \;Q(x_3)$	16. (UB)
18.	$\|\| \;\|\| \;P(a) \vee Q(x_3)$	17. (ADD)
19.	$\|\| \;\|\| \;\forall x\,(P(a) \vee Q(x))$	18. (UE) [12]
20.	$\|\| \;\forall x\,(P(a) \vee Q(x))$	12.–18. (FU)
21.	$P(a) \vee \forall x\, Q(x) \rightarrow \forall x\,(P(a) \vee Q(x))$	11.–19. (KB)
22.	$\forall x\,(P(a) \vee Q(x)) \leftrightarrow P(a) \vee \forall x\, Q(x)$	10., 21. (ÄQ-EIN)

10: VB erfüllt: ‚x_1' kommt in 1., 3. und 7. nicht frei vor.

11: VB erfüllt: ‚x_2' kommt in 11., 12. und 14. nicht frei vor.

12: VB erfüllt: ‚x_3' kommt in 11., 15. und 19. nicht frei vor.

4. $\vdash \forall x\,(P(a) \land Q(x)) \leftrightarrow P(a) \land \forall x\,Q(x)$

Antwort

1.	$\|\;\forall x\,(P(a) \land Q(x))$	(KB-Annahme)
2.	$\|\;P(a) \land Q(y)$	1. (UB)
3.	$\|\;P(a)$	2. (SIMP1)
4.	$\|\;Q(y)$	2. (SIMP2)
5.	$\|\;\forall x\,Q(x)$	4. (UE) [13]
6.	$\|\;P(a) \land \forall x\,Q(x)$	3., 5. (KON)
7.	$\forall x\,(P(a) \land Q(x)) \rightarrow P(a) \land \forall x\,Q(x)$	1.–6. (KB)
8.	$\|\;P(a) \land \forall x\,Q(x)$	(KB-Annahme)
9.	$\|\;P(a)$	8. (SIMP1)
10.	$\|\;\forall x\,Q(x)$	8. (SIMP2)
11.	$\|\;Q(z)$	10. (UB)
12.	$\|\;P(a) \land Q(z)$	9., 11. (ADD)
13.	$\|\;\forall x\,(P(a) \land Q(x))$	12. (UE)[14]
14.	$P(a) \land \forall x\,Q(x) \rightarrow \forall x\,(P(a) \land Q(x))$	8.–13. (KB)
15.	$\forall x\,(P(a) \land Q(x)) \leftrightarrow P(a) \land \forall x\,Q(x)$	7., 14. (ÄQ-EIN)

13: VB erfüllt: ‚y' kommt in 1. und 5. nicht frei vor.

14: VB erfüllt: ‚z' kommt in 8. und 13. nicht frei vor.

5. $\vdash \forall x\,(P(a) \rightarrow Q(x)) \leftrightarrow (P(a) \rightarrow \forall x\,Q(x))$

Antwort

1.	$\|\;\forall x\,(P(a) \rightarrow Q(x))$	(KB-Annahme)
2.	$\|\;P(a) \rightarrow Q(y)$	1. (UB)
3.	$\|\;\|\;P(a)$	(KB-Annahme)
4.	$\|\;\|\;Q(y)$	2., 3. (MP)
5.	$\|\;\|\;\forall x\,Q(x)$	4. (UE) [15]
6.	$\|\;P(a) \rightarrow \forall x\,Q(x)$	3.–5. (KB)
7.	$\forall x\,(P(a) \rightarrow Q(x)) \rightarrow (P(a) \rightarrow \forall x\,Q(x))$	1.–6. (KB)
8.	$\|\;P(a) \rightarrow \forall x\,Q(x)$	(KB-Annahme)
9.	$\|\;\|\;P(a)$	(KB-Annahme)
10.	$\|\;\|\;\forall x\,Q(x)$	8., 9. (MP)
11.	$\|\;\|\;Q(z)$	10. (UB)
12.	$\|\;P(a) \rightarrow Q(z)$	9.–11. (KB)
13.	$\|\;\forall x\,(P(a) \rightarrow Q(x))$	12. (UE)[16]
14.	$(P(a) \rightarrow \forall x\,Q(x)) \rightarrow \forall x\,(P(a) \rightarrow Q(x))$	8.–13. (KB)
15.	$\forall x\,(P(a) \rightarrow Q(x)) \leftrightarrow (P(a) \rightarrow \forall x\,Q(x))$	7., 14. (ÄQ-EIN)

15: VB erfüllt: ‚y' kommt in 1., 3. und 5. nicht frei vor.

16: VB erfüllt: ‚z' kommt in 9. und 13. nicht frei vor.

6. $\forall x \, \neg P(x) \vdash \neg\exists x \, P(x)$

Antwort

1.	$\forall x \, \neg P(x)$	(P1)
2.	$\|\| \; \neg\neg\exists x \, P(x)$	(IB-Annahme)
3.	$\|\| \; \exists x \, P(x)$	2. (DN2)
4.	$\|\| \; \|\| \; P(y)$	(EB-Annahme)[17]
5.	$\|\| \; \|\| \; \neg P(y)$	1. (UB)
6.	$\|\| \; \|\| \; Q(a) \wedge \neg Q(a)$	4., 5. (ECQ)
7.	$\|\| \; Q(a) \wedge \neg Q(a)$	4.–6. (EB)[18]
8.	$\neg\exists x \, P(x)$	2.–7. (IB)

17: In Bezug auf den 3. Schritt.

18: VB′ erfüllt: ‚y‘ kommt in 1. und 6. nicht frei vor.

7. $\vdash P(a) \wedge \exists x \, Q(x) \leftrightarrow \exists x \, (P(a) \wedge Q(x))$

Antwort

1.	$\|\| \; P(a) \wedge \exists x \, Q(x)$	(KB-Annahme)
2.	$\|\| \; P(a)$	1. (SIMP1)
3.	$\|\| \; \exists x \, Q(x)$	1. (SIMP2)
4.	$\|\| \; \|\| \; Q(y)$	(EB-Annahme)[19]
5.	$\|\| \; \|\| \; P(a) \wedge Q(y)$	2., 4. (KON)
6.	$\|\| \; \|\| \; \exists x \, (P(a) \wedge Q(x))$	5. (EE)
7.	$\|\| \; \exists x \, (P(a) \wedge Q(x))$	4.–6. (EB)[20]
8.	$P(a) \wedge \exists x \, Q(x) \rightarrow \exists x \, (P(a) \wedge Q(x))$	1.–7. (KB)
9.	$\|\| \; \exists x \, (P(a) \wedge Q(x))$	(KB-Annahme)
10.	$\|\| \; \|\| \; P(a) \wedge Q(z)$	(EB-Annahme)[21]
11.	$\|\| \; \|\| \; P(a)$	10. (SIMP1)
12.	$\|\| \; \|\| \; Q(z)$	10. (SIMP2)
13.	$\|\| \; \|\| \; \exists x \, Q(x)$	12. (EE)
14.	$\|\| \; \|\| \; P(a) \wedge \exists x \, Q(x)$	11., 13. (KON)
15.	$\|\| \; P(a) \wedge \exists x \, Q(x)$	10.–14. (EB)[22]
16.	$\exists x \, (P(a) \wedge Q(x)) \rightarrow P(a) \wedge \exists x \, Q(x)$	9.–15. (KB)
17.	$P(a) \wedge \exists x \, Q(x) \leftrightarrow \exists x \, (P(a) \wedge Q(x))$	8., 16. (ÄQ-EIN)

19: In Bezug auf den 3. Schritt.

20: VB′ erfüllt: ‚y‘ kommt in 1. und 6. nicht frei vor.

21: In Bezug auf den 9. Schritt.

22: VB′ erfüllt: ‚<‘ kommt in 9. und 14. nicht frei vor.

8. $\vdash P(a) \lor \exists x\, Q(x) \leftrightarrow \exists x\, (P(a) \lor Q(x))$

Antwort

1.	$\Vert\ P(a) \lor \exists x\, Q(x)$	(KB-Annahme)
2.	$\Vert\ \Vert\ P(a)$	(FU-Annahme 1)
3.	$\Vert\ \Vert\ P(a) \lor Q(x_1)$	2. (ADD1)
4.	$\Vert\ \Vert\ \exists x\, (P(a) \lor Q(x))$	3. (EE)
5.	$\Vert\ \Vert\ \neg P(a)$	(FU-Annahme 2)
6.	$\Vert\ \Vert\ \exists x\, Q(x)$	1., 5. (DS1)
7.	$\Vert\ \Vert\ \Vert\ Q(x_2)$	(EB-Annahme)[23]
8.	$\Vert\ \Vert\ \Vert\ P(a) \lor Q(x_2)$	7. (ADD2)
9.	$\Vert\ \Vert\ \Vert\ \exists x\, (P(a) \lor Q(x))$	8. (EE)
10.	$\Vert\ \Vert\ \exists x\, (P(a) \lor Q(x))$	7.–9. (EB)[24]
11.	$\Vert\ \exists x\, (P(a) \lor Q(x))$	2.–10. (FU)
12.	$P(a) \lor \exists x\, Q(x) \rightarrow \exists x\, (P(a) \lor Q(x))$	1.–11. (KB)
13.	$\Vert\ \exists x\, (P(a) \lor Q(x))$	(KB-Annahme)
14.	$\Vert\ \Vert\ P(a) \lor Q(x_3)$	(EB-Annahme)[25]
15.	$\Vert\ \Vert\ \Vert\ P(a)$	(FU-Annahme 1)
16.	$\Vert\ \Vert\ \Vert\ P(a) \lor \exists x\, Q(x)$	15. (ADD1)
17.	$\Vert\ \Vert\ \Vert\ \neg P(a)$	(FU-Annahme 2)
18.	$\Vert\ \Vert\ \Vert\ Q(x_3)$	14., 17. (DS1)
19.	$\Vert\ \Vert\ \Vert\ \exists x\, Q(x)$	18. (EE)
20.	$\Vert\ \Vert\ \Vert\ P(a) \lor \exists x\, Q(x)$	19. (ADD2)
21.	$\Vert\ \Vert\ P(a) \lor \exists x\, Q(x)$	15.–20. (FU)
22.	$\Vert\ P(a) \lor \exists x\, Q(x)$	14.–21. (EB)[26]
23.	$\exists x\, (P(a) \lor Q(x)) \rightarrow P(a) \lor \exists x\, Q(x)$	13.–19. (KB)
24.	$P(a) \lor \exists x\, Q(x) \leftrightarrow \exists x\, (P(a) \lor Q(x))$	12., 23. (ÄQ-EIN)

23: In Bezug auf den 6. Schritt.

24: VB′ erfüllt: ‚x_2‘ kommt in 1.. 2. und 9. nicht frei vor.

25: In Bezug auf den 13. Schritt.

26: VB′ erfüllt: ‚x_3‘ kommt in 14., 13. und 21. nicht frei vor.

9. $\exists x\, P(x) \lor \exists x\, Q(x) \vdash \exists x\, (P(x) \lor Q(x))$

Antwort

1.	$\exists x\, P(x) \lor \exists x\, Q(x)$	(P1)
2.	$\|\; \exists x\, P(x)$	(FU-Annahme 1)
3.	$\|\; \|\; P(y)$	(EB-Annahme)[27]
4.	$\|\; \|\; P(y) \lor Q(y)$	3. (ADD1)
5.	$\|\; \|\; \exists x\, (P(x) \lor Q(x))$	4. (EE)
6.	$\|\; \exists x\, (P(x) \lor Q(x))$	3.–5. ( )[28]
7.	$\|\; \neg\exists x\, P(x)$	(FU-Annahme 2)
8.	$\|\; \exists x\, Q(x)$	1., 7. (DS1)
9.	$\|\; \|\; Q(z)$	(EB-Annahme)[29]
10.	$\|\; \|\; P(z) \lor Q(z)$	9. (ADD2)
11.	$\|\; \|\; \exists x\, (P(x) \lor Q(x))$	10. (EE)
12.	$\|\; \exists x\, (P(x) \lor Q(x))$	9.–11. (EB)[30]
13.	$\exists x\, (P(x) \lor Q(x))$	2.–12. (FU)

27: In Bezug auf den 2. Schritt.

28: VB′ erfüllt: ‚y' kommt in 1., 2. und 5. nicht frei vor.

29: In Bezug auf den 8. Schritt.

30: VB′ erfüllt: ‚z' kommt in 1., 7. und 11. nicht frei vor.

10. $\exists x\, (P(x) \rightarrow Q(x)), \forall x\, P(x) \vdash \exists x\, Q(x)$

Antwort

1.	$\exists x\, (P(x) \rightarrow Q(x))$	(P1)
2.	$\forall x\, P(x)$	(P2)
3.	$\|\; P(y) \rightarrow Q(y)$	(EB-Annahme)[31]
4.	$\|\; P(y)$	2. (UB)
5.	$\|\; Q(y)$	3., 4. (MP)
6.	$\|\; \exists x\, Q(x)$	5. (EE)
7.	$\exists x\, Q(x)$	3.–6. (EB)[32]

31: In Bezug auf P1.

32: VB′ erfüllt: ‚y' kommt in 1., 2. und 6. nicht frei vor.

11. $\vdash (P(a) \rightarrow \exists x\, Q(x)) \leftrightarrow \exists x\, (P(a) \rightarrow Q(x))$

Antwort

1.	$\|\ P(a) \rightarrow \exists x\, Q(x)$	(KB-Annahme)
2.	$\|\ \|\ P(a)$	(FU-Annahme 1)
3.	$\|\ \|\ \exists x\, Q(x)$	1., 2. (MP)
4.	$\|\ \|\ \|\ Q(x_1)$	(EB-Annahme)[33]
5.	$\|\ \|\ \|\ \|\ P(a)$	(KB-Annahme)
6.	$\|\ \|\ \|\ \|\ Q(x_1)$	4. (TS)
7.	$\|\ \|\ \|\ P(a) \rightarrow Q(x_1)$	5.–6. (KB)
8.	$\|\ \|\ \|\ \exists x\, (P(a) \rightarrow Q(x))$	7. (EE)
9.	$\|\ \|\ \exists x\, (P(a) \rightarrow Q(x))$	4.–8. (EB)[34]
10.	$\|\ \|\ \neg P(a)$	(FU-Annahme 2)
11.	$\|\ \|\ \|\ P(a)$	(KB-Annahme)
12.	$\|\ \|\ \|\ Q(x_2)$	10., 11. (ECQ)
13.	$\|\ \|\ P(a) \rightarrow Q(x_2)$	11.–12. (KB)
14.	$\|\ \|\ \exists x\, (P(a) \rightarrow Q(x))$	13. (EE)
15.	$\|\ \exists x\, (P(a) \rightarrow Q(x))$	2.–14. (FU)
16.	$(P(a) \rightarrow \exists x\, Q(x)) \rightarrow \exists x\, (P(a) \rightarrow Q(x))$	1.–15. (KB)
17.	$\|\ \exists x\, (P(a) \rightarrow Q(x))$	(KB-Annahme)
18.	$\|\ \|\ P(a)$	(KB-Annahme)
19.	$\|\ \|\ \|\ P(a) \rightarrow Q(x_3)$	(EB-Annahme)[35]
20.	$\|\ \|\ \|\ Q(x_3)$	18., 19. (MP)
21.	$\|\ \|\ \|\ \exists x\, Q(x)$	20. (EE)
22.	$\|\ \|\ \exists x\, Q(x)$	19.–21. (EB)[36]
23.	$\|\ P(a) \rightarrow \exists x\, Q(x)$	18.–22. (KB)
24.	$\exists x\, (P(a) \rightarrow Q(x)) \rightarrow (P(a) \rightarrow \exists x\, Q(x))$	17.–23. (KB)
25.	$(P(a) \rightarrow \exists x\, Q(x)) \leftrightarrow \exists x\, (P(a) \rightarrow Q(x))$	16., 24. (ÄQ-EIN)

33: In Bezug auf den 3. Schritt.

34: VB′ erfüllt: ‚x_1‘ kommt in 1., 2. und 8. nicht frei vor.

35: In Bezug auf den 17. Schritt.

36: VB′ erfüllt: ‚x_3‘ kommt in 17., 18. und 21. nicht frei vor.

Lösung zu Übung 11.2. Repräsentieren Sie die folgenden Argumente, und zeigen Sie, dass die daraus resultierenden Argumentformen deduktiv gültig sind:

1. Alle Österreicher sind Europäer. Alle Salzburger sind Österreicher. Also sind alle Salzburger Europäer.

Repräsentation

$$\forall x\,(O(x) \rightarrow E(x)), \forall x\,(S(x) \rightarrow O(x)) \therefore \forall x\,(S(x) \rightarrow E(x))$$

Bemerkung: Dieses Argument hat die Struktur des Barbara-Syllogismus der aristotelischen Logik.

$E(x) := x$ ist Europäer,
$O(x) := x$ ist Österreicher,
$S(x) := x$ ist Salzburger.

Herleitung

1.	$\forall x\,(O(x) \rightarrow E(x))$	(P1)
2.	$\forall x\,(S(x) \rightarrow O(x))$	(P2)
3.	$\vert\vert\ S(y)$	(KB-Annahme)
4.	$\vert\vert\ S(y) \rightarrow O(y)$	2. (UB)
5.	$\vert\vert\ O(y)$	3., 4. (MP)
6.	$\vert\vert\ O(y) \rightarrow E(y)$	1. (UB)
7.	$\vert\vert\ E(y)$	5., 6. (MP)
8.	$S(y) \rightarrow E(y)$	3.–7. (KB)
9.	$\forall x\,(S(x) \rightarrow E(x))$	8. (UE)[37]

37: VB erfüllt: ‚y' kommt in 1., 2. und 9. nicht frei vor.

Alternative Herleitung

1.	$\forall x\,(O(x) \rightarrow E(x))$	(P1)
2.	$\forall x\,(S(x) \rightarrow O(x))$	(P2)
3.	$O(y) \rightarrow E(y)$	1. (UB)
4.	$S(y) \rightarrow O(y)$	2. (UB)
5.	$\vert\vert\ S(y)$	(KB-Annahme)
6.	$\vert\vert\ O(y)$	5., 4. (MP)
7.	$\vert\vert\ E(y)$	6., 3. (MP)
8.	$S(y) \rightarrow E(y)$	5.–7. (KB)
9.	$\forall x\,(S(x) \rightarrow E(x))$	8. (UE)[38]

38: VB erfüllt: ‚y' kommt in 1., 2. und 9. nicht frei vor.

2. Alle Philosophen sind weise. Nun gibt es Salzburger Philosophen. Also sind einige Salzburger weise.

Repräsentation

$$\forall x\,(P(x) \rightarrow W(x)), \exists x\,(S(x) \wedge P(x)) \therefore \exists x\,(S(x) \wedge W(x))$$

$P(x) :=$ x ist Philosoph,
$S(x) :=$ x ist Salzburger,
$W(x) :=$ x ist weise.

Herleitung

1.	$\forall x\,(P(x) \rightarrow W(x))$	(P1)
2.	$\exists x\,(S(x) \wedge P(x))$	(P2)
3.	$\|\|$ $S(y) \wedge P(y)$	(EB-Annahme)[39]
4.	$\|\|$ $P(y)$	3. (SIMP2)
5.	$\|\|$ $P(y) \rightarrow W(y)$	1. (UB)
6.	$\|\|$ $W(y)$	4., 5. (MP)
7.	$\|\|$ $S(y)$	3. (SIMP1)
8.	$\|\|$ $S(y) \wedge W(y)$	6., 7. (KON)
9.	$\|\|$ $\exists x\,(S(x) \wedge W(x))$	8. (EE)
10.	$\exists x\,(S(x) \wedge W(x))$	3.–9. (EB)[40]

39: In Bezug auf P2.

40: VB′ erfüllt: ‚y' kommt in 1., 2. und 9. nicht frei vor.

3. Es gibt keine Österreicher, die auf den Mond geflogen sind. Es gibt aber Kosmonauten, die Österreicher sind. Daher sind nicht alle Kosmonauten auf den Mond geflogen.

Repräsentation

$\neg\exists x\,(O(x) \wedge G(x,m)), \exists x\,(K(x) \wedge O(x)) \therefore \neg\forall x\,(K(x) \rightarrow G(x,m))$

m := der Mond,
$K(x)$:= x ist Kosmonaut,
$O(x)$:= x ist Österreicher,
$G(x,y)$:= x ist auf y geflogen.

Herleitung

1.	$\neg\exists x\,(O(x) \wedge G(x,m))$	(P1)
2.	$\exists x\,(K(x) \wedge O(x))$	(P2)
3.	$\|\| \; K(y) \wedge O(y)$	(EB-Annahme)[41]
4.	$\|\| \; K(y)$	3. (SIMP1)
5.	$\|\| \; O(y)$	3. (SIMP2)
6.	$\|\| \; \|\| \; \neg\neg\forall x\,(K(x) \rightarrow G(x,m))$	(IB-Annahme)
7.	$\|\| \; \|\| \; \forall x\,(K(x) \rightarrow G(x,m))$	6. (DN2)
8.	$\|\| \; \|\| \; K(y) \rightarrow G(y,m)$	7. (UB)
9.	$\|\| \; \|\| \; G(y,m)$	4., 8. (MP)
10.	$\|\| \; \|\| \; O(y) \wedge G(y,m)$	5., 9. (KON)
11.	$\|\| \; \|\| \; \exists x\,(O(x) \wedge G(x,m))$	10. (EE)
12.	$\|\| \; \|\| \; \exists x\,(O(x) \wedge G(x,m)) \wedge \neg\exists x\,(O(x) \wedge G(x,m))$	11., 1. (KON)
13.	$\|\| \; \neg\forall x\,(K(x) \rightarrow G(x,m))$	6.–12. (IB)
14.	$\neg\forall x\,(K(x) \rightarrow G(x,m))$	3.–13. (EB)[42]

41: In Bezug auf P2.

42: VB′ erfüllt: ‚y‘ kommt in 1., 2. und 13. nicht frei vor.

4. Nicht ein Lebewesen auf dem Mars ist glatzköpfig. Alle Skinheads sind jedoch glatzköpfig. Somit gibt es keinen Skinhead, der ein Lebewesen auf dem Mars ist.

Repräsentation

$\neg\exists x\,(L(x,m)\wedge G(x)), \forall x\,(S(x)\rightarrow G(x)) \therefore \neg\exists x\,(S(x)\wedge L(x,m))$

m := Mars,
$G(x) := x$ ist glatzköpfig,
$H(x) := x$ ist Skinhead,
$L(x,y) := x$ ist ein Lebewesen auf y.

Herleitung

1.	$\neg\exists x\,(L(x,m)\wedge G(x))$	(P1)
2.	$\forall x\,(S(x)\rightarrow G(x))$	(P2)
3.	$\|\|\ \neg\neg\exists x\,(S(x)\wedge L(x,m))$	(IB-Annahme)
4.	$\|\|\ \exists x\,(S(x)\wedge L(x,m))$	3. (DN)
5.	$\|\|\ \|\|\ S(y)\wedge L(y,m)$	(EB-Annahme)[43]
6.	$\|\|\ \|\|\ S(y)$	5. (SIMP1)
7.	$\|\|\ \|\|\ S(y)\rightarrow G(y)$	2. (UB)
8.	$\|\|\ \|\|\ G(y)$	6., 7. (MP)
9.	$\|\|\ \|\|\ L(y,m)$	5. (SIMP2)
10.	$\|\|\ \|\|\ G(y)\wedge L(y,m)$	8., 9. (KON)
11.	$\|\|\ \|\|\ \exists x\,(G(x)\wedge L(x,m))$	10. (EE)
12.	$\|\|\ \|\|\ A(a)\wedge\neg A(a)$	11., 1. (ECQ)
13.	$\|\|\ A(a)\wedge\neg A(a)$	5.–12. (EB)[44]
14.	$\neg\exists x\,(S(x)\wedge L(x,m))$	3.–13. (IB)

43: In Bezug auf den 4. Schritt.

44: VB′ erfüllt: ‚y‘ kommt in 1., 2. und 12. nicht frei vor.

Lösung zu Übung 11.3. Repräsentieren Sie die beiden folgenden Argumente und versuchen Sie zu zeigen, dass die daraus resultierenden Argumentformen deduktiv gültig sind.

1. Alle Lebewesen auf dem Mars sind glatzköpfig. Somit gibt es Lebewesen auf dem Mars, die glatzköpfig sind.

m := Mars,
$G(x)$:= x ist glatzköpfig,
$L(x, y)$:= x ist ein Lebewesen auf y.

Repräsentation

$$\forall x\,(L(x,m) \rightarrow G(x)) \mathrel{\therefore} \exists x\,(L(x,m) \wedge G(x))$$

Gültigkeit: Dieses Argument ist nicht gültig.

Wir können dies mit einer Interpretation der Formel im Sinne des formalisierten Satzes zeigen.

Wir können auch dies zeigen, mit der Interpretation $\mathfrak{I} = \langle \mathbf{D}, \varphi \rangle$, wobei:

- $\mathbf{D} = \{\mathit{Freddie}\}$,
- $\varphi(m) = \mathit{Freddie}$,
- $\varphi(L) = \{\langle d_1, d_2 \rangle \in \mathbf{D}^2 \mid d_1 \text{ ist der Vater von } d_2\} = \{\}$.
- (Die Extension von $\varphi(G)$ ist nicht wichtig.)

Unter $\mathfrak{I}$ ist die Prämisse wahr, aber die Konklusion ist falsch.

Es war ausreichend zu wissen, dass die Antezedenz falsch ist – d.h. $\varphi_{\sigma'}(L(x,m)) = \mathtt{f}$ –, um zu schließen, dass die gesamte Implikationsformel wahr ist – d.h. $\varphi_{\sigma'}(L(x,m) \rightarrow G(x)) = \mathtt{w}$. Daher war es nicht erforderlich, den Wahrheitswert von $G(x)$ – also $\varphi_{\sigma'}(G(x))$ – zu bestimmen.

Die Prämisse sind wahr

Sei σ eine beliebige Variablenbelegung. Es gibt genau eine mögliche x-Variante σ' von σ für die gilt: $\varphi_{\sigma'} = \mathit{Freddie}$. (Tatsächlich ist $\sigma' = \sigma$.)

Da Freddie nicht sein eigener Vater ist, folgt:

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\mathit{Freddie} \text{ ist } \textit{nicht} \text{ sein eigener Vater}}{\langle \mathit{Freddie}, \mathit{Freddie} \rangle \notin \varphi(L)}}{\langle \varphi_{\sigma'}(x), \varphi(m) \rangle \notin \varphi(L)}}{\langle \varphi_{\sigma'}(x), \varphi_{\sigma'}(m) \rangle \notin \varphi(L)}}{\varphi_{\sigma'}(L(x,m)) = \mathtt{f}} \qquad \varphi_{\sigma'}(G(x)) = ?$$
$$\overline{\varphi_{\sigma'}(L(x,m) \rightarrow G(x)) = \mathtt{w}}$$

Da σ' eine beliebige x-Variante von σ ist, folgt daraus, dass:

$$\varphi_\sigma(\forall x\,(L(x,m) \rightarrow G(x))) = \mathtt{w}.$$

Die Konklusion ist falsch

Sei σ eine beliebige Variablenbelegung. Es gibt genau eine mögliche x-Variante σ' von σ für die gilt: $\varphi_{\sigma'} = \mathit{Freddie}$. (Tatsächlich ist $\sigma' = \sigma$.)

Da Freddie nicht sein eigener Vater ist, folgt:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\mathit{Freddie} \text{ ist } \textit{nicht} \text{ sein eigener Vater}}{\langle \mathit{Freddie}, \mathit{Freddie}\rangle \notin \varphi(L)}}{\langle \varphi_{\sigma'}(x), \varphi(m)\rangle \notin \varphi(L)}}{\langle \varphi_{\sigma'}(x), \varphi_{\sigma'}(m)\rangle \notin \varphi(L)}}{\varphi_{\sigma'}(L(x,m)) = \mathtt{f}} \qquad \varphi_{\sigma'}(G(x)) = \mathtt{?}}{\varphi_{\sigma'}(L(x,m) \land G(x)) = \mathtt{f}}$$

Da σ' eine beliebige x-Variante von σ ist, folgt daraus, dass:

$$\varphi_\sigma(\exists x\,(L(x,m) \land G(x))) = \mathtt{f}.$$

Abschließend folgt, dass das Argument nicht logisch gültig ist, da unter $\mathfrak{I}$ sind die Prämissen sind, die Konklusion jedoch falsch.

2. Es gibt Lebewesen auf dem Mars. Alle Lebewesen auf dem Mars sind glatzköpfig. Somit gibt es Lebewesen auf dem Mars, die glatzköpfig sind.

m := Mars,
$G(x)$:= x ist glatzköpfig,
$L(x,y)$:= x ist ein Lebewesen auf y.

Repräsentation

$$\exists x\, L(x,m), \forall x\,(L(x,m) \rightarrow G(x)) \therefore \exists x\,(L(x,m) \land G(x))$$

Gültigkeit: Dieses Argument ist gültig (sie Herleitung unten).

1.	$\exists x\, L(x,m)$	(P1)
2.	$\forall x\,(L(x,m) \rightarrow G(x))$	(P2)
3.	$\Vert\ L(y,m)$	(EB-Annahme)[45]
4.	$\Vert\ L(y,m) \rightarrow G(y)$	2. (UB)
5.	$\Vert\ G(y)$	3., 4. (MP)
6.	$\Vert\ L(y,m) \land G(y)$	3., 5. (KON)
7.	$\Vert\ \exists x\,(L(x,m) \land G(x))$	6. (EE)
8.	$\exists x\,(L(x,m) \land G(x))$	3.–7. (EB)[46]

45: In Bezug auf P1.

46: VB′ erfüllt: ‚y' kommt in 1., 2. und 7. nicht frei vor.

Lösung zu Übung 11.4. Führen Sie die Herleitungen zu folgenden deduktiv gültigen Schlüssen durch:

1. $\exists x\, \forall y\, R(x,y) \vdash \forall y\, \exists x\, R(x,y)$

Antwort

1.	$\exists x\, \forall y\, R(x,y)$	(P1)
2.	$\|\|\ \forall y\, R(x_1,y)$	(EB-Annahme)[47]
3.	$\|\|\ R(x_1,y_1)$	2. (UB)
4.	$\|\|\ \exists x\, R(x,y_1)$	3. (EE)
5.	$\|\|\ \forall y\, \exists x\, R(x,y)$	4. (UE)[48]
6.	$\forall y\, \exists x\, R(x,y)$	2.–5. (EB)[49]

47: In Bezug auf P1.

48: VB erfüllt: ‚y_1' kommt in 1., 2. und 5. nicht frei vor.

49: VB′ erfüllt: ‚x_1' kommt in 1. und 5. nicht frei vor.

Frage

Können wir die Herleitung auch in umgekehrter Richtung durchführen? Siehe die folgende Pseudoherleitung.

1.	$\forall y\, \exists x\, R(x,y)$	(P1)
2.	$\exists x\, R(x,y_1)$	1. (UB)
3.	$\|\|\ R(x_1,y_1)$	(EB-Annahme)[50]
4.	$\|\|\ \forall y\, R(x_1,y)$	3. (UB)[51]
5.	$\|\|\ \exists x\, \forall y\, R(x,y)$	4. (EE)
6.	$\exists x\, \forall y\, R(x,y)$	3.–5. (EB)

50: In Bezug auf den 2. Schritt.

51: Unzulässiger Schritt, weil die Variablenbedingung VB nicht erfüllt ist: y vorkommt frei in der EB-Annahme (siehe S. 281).

2. $\neg\exists x\, \neg P(x) \vdash \forall x\, P(x)$

Antwort

1.	$\neg\exists x\, \neg P(x)$	(P1)
2.	$\|\|\ \neg P(y)$	(IB-Annahme)
3.	$\|\|\ \exists x\, \neg P(x)$	2. (EE)
4.	$\|\|\ \exists x\, \neg P(x) \land \neg\exists x\, \neg P(x)$	3., 1. (KON)
5.	$P(y)$	2.–4. (IB)
6.	$\forall x\, P(x)$	5. (UE)[52]

52: VB erfüllt: ‚y' kommt in 1. und 6. nicht frei vor.

3. $\exists x\, P(x) \vdash \neg\forall x\, \neg P(x)$

Antwort

1.	$\exists x\, P(x)$	(P1)
2.	$\|\;\; \neg\neg\forall x\, \neg P(x)$	(IB-Annahme)
3.	$\|\;\; \forall x\, \neg P(x)$	2. (DN2)
4.	$\|\;\; \|\;\; P(y)$	(EB-Annahme)[53]
5.	$\|\;\; \|\;\; \neg P(y)$	3. (UB)
6.	$\|\;\; \|\;\; Q(a) \wedge \neg Q(a)$	4., 5. (ECQ)
7.	$\|\;\; Q(a) \wedge \neg Q(a)$	4.–6. (EB)[54]
8.	$\neg\forall x\, \neg P(x)$	2.–7. (IB)

53: In Bezug auf P1.

54: VB′ erfüllt: ‚y' kommt in 1. und 6. nicht frei vor.

4. $\neg\exists x\, P(x) \vdash \forall x\, \neg P(x)$

Antwort

1.	$\neg\exists x\, P(x)$	(P1)
2.	$\|\;\; \neg\neg P(y)$	(IB-Annahme)
3.	$\|\;\; P(y)$	2. (DN2)
4.	$\|\;\; \exists x\, P(x)$	3. (EE)
5.	$\|\;\; \exists x\, P(x) \wedge \neg\exists x\, P(x)$	4., 1. (KON)
6.	$\neg P(y)$	2.–5. (IB)
7.	$\forall x\, \neg P(x)$	6. (UE)[55]

55: VB erfüllt: ‚y' kommt in 1. und 7. nicht frei vor.

5. $\exists x\, \neg P(x) \vdash \neg\forall x\, P(x)$

Antwort

1.	$\exists x\, \neg P(x)$	(P1)
2.	$\|\;\; \neg P(y)$	(EB-Annahme)[56]
3.	$\|\;\; \|\;\; \neg\neg\forall x\, P(x)$	(IB-Annahme)
4.	$\|\;\; \|\;\; \forall x\, P(x)$	3. (DN2)
5.	$\|\;\; \|\;\; P(y)$	4. (UB)
6.	$\|\;\; \|\;\; P(y) \wedge \neg P(y)$	5., 2. (KON)
7.	$\|\;\; \neg\forall x\, P(x)$	6. (IB)
8.	$\neg\forall x\, P(x)$	2.–7. (EB)[57]

56: In Bezug auf P1.

57: VB′ erfüllt: ‚y' kommt in 1. und 7. nicht frei vor.

6. $\forall x\,(\exists y\, P(y) \rightarrow Q(x)) \vdash \forall y\,(P(y) \rightarrow Q(a))$

Antwort

1.	$\underline{\forall x\,(\exists y\, P(y) \rightarrow Q(x))}$	(P1)
2.	$\exists y\, P(y) \rightarrow Q(a)$	1. (UB)
3.	$\|\|\ P(z)$	(KB-Annahme)
4.	$\|\|\ \exists y\, P(y)$	3. (EE)
5.	$\|\|\ Q(a)$	2., 4. (MP)
6.	$P(z) \rightarrow Q(a)$	3.–5. (KB)
7.	$\forall y\,(P(y) \rightarrow Q(a))$	6. (UE)[58]

58: VB erfüllt: ‚y' kommt in 1. und 7. nicht frei vor.

7. $\neg\forall x\,(P(x) \rightarrow Q(x)) \vdash \exists x\,(P(x) \wedge \neg Q(x))$

Antwort

1.	$\underline{\neg\forall x\,(P(x) \rightarrow Q(x))}$	(P1)
2.	$\|\|\ \neg\exists x\,(P(x) \wedge \neg Q(x)$	(IB-Annahme)
3.	$\|\|\ \|\|\ P(y)$	(FU-Annahme 1)
4.	$\|\|\ \|\|\ \|\|\ Q(y)$	(FU-Annahme 1.1)
5.	$\|\|\ \|\|\ \|\|\ \|\|\ P(y)$	(KB-Annahme)
6.	$\|\|\ \|\|\ \|\|\ \|\|\ Q(y)$	4. (TS)
7.	$\|\|\ \|\|\ \|\|\ P(y) \rightarrow Q(y)$	5.–6. (KB)
8.	$\|\|\ \|\|\ \|\|\ \neg Q(y)$	(FU-Annahme 1.2)
9.	$\|\|\ \|\|\ \|\|\ P(y) \wedge \neg Q(y)$	3., 8. (KON)
10.	$\|\|\ \|\|\ \|\|\ \exists x\,(P(x) \wedge \neg Q(x))$	9. (EE)
11.	$\|\|\ \|\|\ \|\|\ P(y) \rightarrow Q(y)$	2., 10. (EQC)
12.	$\|\|\ \|\|\ P(y) \rightarrow Q(y)$	4.–11. (FU)
13.	$\|\|\ \|\|\ \neg P(y)$	(FU-Annahme 2)
14.	$\|\|\ \|\|\ \|\|\ P(y)$	(KB-Annahme)
15.	$\|\|\ \|\|\ \|\|\ Q(y)$	13., 14. (ECQ)
16.	$\|\|\ \|\|\ P(y) \rightarrow Q(y)$	14.–15. (KB)
17.	$\|\|\ P(y) \rightarrow Q(y)$	3.–16. (FU)
18.	$\|\|\ \forall x\,(P(x) \rightarrow Q(x))$	17. (UE)[59]
19.	$\|\|\ \forall x\,(P(x) \rightarrow Q(x)) \wedge \neg\forall x\,(P(x) \rightarrow Q(x))$	18., 1. (KON)
20.	$\exists x\,(P(x) \wedge \neg Q(x)$	2.–19. (IB)

59: VB erfüllt: ‚y' kommt in 2. und 18. nicht frei vor.

Lösung zu Übung 11.5. Repräsentieren Sie die folgenden Argumente, und zeigen Sie, dass die daraus resultierenden Argumentformen deduktiv gültig sind:

1. Alles hat eine Ursache. Gott hat jedoch keine Ursache. Also ist der Papst Tiroler.

Repräsentation 1

$$\forall x\, \exists y\, U(y,x), \neg\exists x\, U(x,g) \therefore T(p)$$

Herleitung

1.	$\forall x\, \exists y\, U(y,x)$	(P1)
2.	$\neg\exists x\, U(x,g)$	(P2)
3.	$\exists y\, U(y,g)$	1. (UB)
4.	$\| \quad U(z,g)$	(EB-Annahme)[60]
5.	$\| \quad \exists x\, U(x,g)$	4. (EE)
6.	$\| \quad T(p)$	2., 4. (ECQ)
7.	$T(p)$	3.–6. (EB)[61]

g := Gott,
p := der Papst,
$T(x) := x$ ist Tiroler,
$U(x,y) := x$ ist die Ursache von y.

60: In Bezug auf den 3. Schritt.

61: VB′ erfüllt: ‚z' kommt in 1., 2. und 6. nicht frei vor.

Repräsentation 2

$$\forall x\, \exists y\, U(y,x), \neg\exists y\, U(y,g) \therefore T(p)$$

g, p, T, U wie in der Repr. 1.

Herleitung

1.	$\forall x\, \exists y\, U(y,x)$	(P1)
2.	$\neg\exists y\, U(y,g)$	(P2)
3.	$\exists y\, U(y,g)$	1. (UB)
4.	$T(p)$	3., 2. (ECQ)

2. Alle Salzburger lieben Salzburg. Es gibt jedoch niemanden, der Salzburg und alle Touristen in Salzburg liebt. Somit lieben die Salzburger nicht alle Touristen in Salzburg.

s := Salzburg,
$S(x)$:= x ist Salzburger,
$L(x, y)$:= x liebt y,
$T(x, y)$:= x ist ein Tourist in y.

Repräsentation

$$\forall x\,(S(x) \to L(x,s)), \neg\exists x\,(L(x,s) \land \forall y\,(T(y,s) \to L(x,y)))$$
$$\therefore\ \forall x\,(S(x) \to \neg\forall y\,(T(y,s) \to L(x,y)))$$

Herleitung

1.	$\forall x\,(S(x) \to L(x,s))$	(P1)
2.	$\neg\exists x\,(L(x,s) \land \forall y\,(T(y,s) \to L(x,y)))$	(P2)
3.	$\|\|\ S(z)$	(KB-Annahme)
4.	$\|\|\ S(z) \to L(z,s)$	1. (UB)
5.	$\|\|\ L(z,s)$	3., 4. (MP)
6.	$\|\|\ \|\|\ \neg\neg\forall y\,(T(y,s) \to L(z,y))$	(IB-Annahme)
7.	$\|\|\ \|\|\ \forall y\,(T(y,s) \to L(z,y))$	6. (DN2)
8.	$\|\|\ \|\|\ L(z,s) \land \forall y\,(T(y,s) \to L(z,y))$	5., 7. (KON)
9.	$\|\|\ \|\|\ \exists x\,(L(x,s) \land \forall y\,(T(y,s) \to L(x,y)))$	5., 7. (EE)
10.	$\|\|\ \|\|\ Q(a) \land \neg Q(a)$	9., 2. (ECQ)
11.	$\|\|\ \neg\forall y\,(T(y,s) \to L(z,y))$	6., 10. (IB)
12.	$S(z) \to \neg\forall y\,(T(y,s) \to L(z,y))$	3.–11. (KB)
13.	$\forall x\,(S(x) \to \neg\forall y\,(T(y,s) \to L(x,y)))$	12. (UE)[62]

62: VB erfüllt: ‚z' kommt in 1., 2. und 13. nicht frei vor.

Bemerkung

Das übliche Vorgehensweise in den 10. Schritt wäre gewesen, aus den Schritten 9. und 2. durch KON folgendes herzuleiten:

$$\exists x\,(L(x,s) \land \forall y\,(T(y,s) \to L(x,y))) \land \neg\exists x\,(L(x,s) \land \forall y\,(T(y,s) \to L(x,y))),$$

und dann mit denselben Schritten fortfahren.

Da diese Formel aber zu lang ist, haben wir entschieden, diesen anderen Weg zu gehen, der ebenso zulässig ist.

3. Es gibt nichts Allmächtiges. Wenn etwas ein Gott ist, ist es jedoch allmächtig. Also gibt es keinen Gott.

Repräsentation

$$\neg\exists x\, A(x), \forall x\, (G(x) \rightarrow A(x)) \therefore \neg\exists x\, G(x)$$

$A(x) :=x$ ist allmächtig,
$G(x) :=x$ ist ein Gott.

Man beachte, dass ‚Gott' in 11.5.1 als Eigenname verwendet wird, hier aber als Prädikat.

Herleitung

1.	$\neg\exists x\, A(x)$	(P1)
2.	$\forall x\, (G(x) \rightarrow A(x))$	(P2)
3.	$\|\| \quad \neg\neg\exists x\, G(x)$	(IB-Annahme)
4.	$\|\| \quad \exists x\, G(x)$	3. (DN2)
5.	$\|\| \; \|\| \quad G(y)$	(EB-Annahme)[63]
6.	$\|\| \; \|\| \quad G(y) \rightarrow A(y)$	2. (UB)
7.	$\|\| \; \|\| \quad A(y)$	5., 6. (MP)
8.	$\|\| \; \|\| \quad \exists x\, A(x)$	7. (EE)
9.	$\|\| \; \|\| \quad Q(a) \wedge \neg Q(a)$	8., 1. (ECQ)
10.	$\|\| \quad Q(a) \wedge \neg Q(a)$	5.–9. (EB) [64]
11.	$\neg\exists x\, G(x)$	3.–10. (IB)

63: In Bezug auf den 4. Schritt.

64: VB′ erfüllt: ‚y' kommt in 1., 2. und 9. nicht frei vor.

11.3 Zusatzübungen

Zusatzübung 11.1. Führen Sie alle Herleitungsübungen unter Verwendung der minimal notwendigen Anzahl an Variablen durch und stellen Sie sicher, dass sämtliche Variablenbedingungen eingehalten werden.

Zusatzübung 11.2. Beweisen Sie die logische Gültigkeit der folgenden Schlussfolgerungen mit Herleitungen[65]:

65: Adaptiert aus D. Hilbert & W. Ackermann, *Gründzüge der theoretischen Logik* (6. Auf.), Berlin: Springer, 1972, S. 83.

1. $\vdash \forall x\, \forall y\, F(x,y) \leftrightarrow \forall y\, \forall x\, F(x,y)$
2. $\vdash \forall x\, (F(x) \land G(x)) \leftrightarrow \forall x\, F(x) \land \forall x\, G(x)$
3. $\forall x\, (F(x) \rightarrow G(x)) \vdash (\forall x\, F(x) \rightarrow \forall x\, G(x))$
4. $\forall x\, (F(x) \leftrightarrow G(x)) \vdash (\forall x\, F(x) \leftrightarrow \forall x\, G(x))$
5. $\vdash \exists x\, F(x) \leftrightarrow \neg\forall x\, \neg F(x)$
6. $\vdash \exists x\, \neg F(x) \leftrightarrow \neg\forall x\, F(x)$
7. $\vdash \neg\exists x\, \neg F(x) \leftrightarrow \forall x\, F(x)$
8. $\vdash \neg\exists x\, F(x) \leftrightarrow \forall x\, \neg F(x)$
9. $\forall x\, (F(x) \rightarrow G(x)) \vdash (\exists x\, F(x) \rightarrow \exists x\, G(x))$
10. $\forall x\, (F(x) \leftrightarrow G(x)) \vdash (\exists x\, F(x) \leftrightarrow \exists x\, G(x))$
11. $\exists x\, \forall y\, F(x,y) \vdash \forall y\, \exists x\, F(x,y)$
12. $\forall x\, \forall y\, F(x,y) \vdash \forall x\, F(x,x)$
13. $\vdash \exists x\, (A \land F(x)) \leftrightarrow A \land \exists x\, F(x)$
14. $\vdash \exists x\, (A \lor F(x)) \leftrightarrow A \lor \exists x\, F(x)$
15. $\vdash \exists x\, (F(x) \lor G(x)) \leftrightarrow \exists x\, F(x) \lor \exists x\, G(x)$
16. $\vdash \exists x\, (F(x) \lor A) \leftrightarrow \exists x\, F(x) \lor A$
17. $\vdash \forall x\, (F(x) \lor A) \leftrightarrow \forall x\, F(x) \lor A$
18. $\exists x\, F(x,x) \vdash \exists x\, \exists y\, F(x,y)$
19. $\vdash \exists x\, \neg\exists y\, \neg(F(x) \lor \neg F(y))$

Lösung zu Zusatzübung 11.2. [Ausstehend.]

11.3.1 Lösungen

Lösung zu Zusatzübung 11.1 Führen Sie alle Herleitungsübungen unter Verwendung der minimal notwendigen Anzahl an Variablen durch und stellen Sie sicher, dass sämtliche Variablenbedingungen eingehalten werden.

Herleitungen aus Übung 11.1.

1. $\forall x\,(P(x) \wedge Q(x)) \vdash \forall x\,P(x) \wedge \forall x\,Q(x)$

Antwort

1.	$\forall x\,(P(x) \wedge Q(x))$	(P1)
2.	$P(x) \wedge Q(x)$	1. (UB)[66]
3.	$P(x)$	2. (SIMP1)
4.	$\forall x\,P(x)$	3. (UE)
5.	$Q(x)$	2. (SIMP2)
6.	$\forall x\,Q(x)$	5. (UE)
7.	$\forall x\,P(x) \wedge \forall x\,Q(x)$	4., 6. (KON)

66: Wir substituieren: $(P(x) \wedge Q(x))[x/x]$.

Erklärung

Im Lösungsblatt von Prof. Leitgeb wird in Schritt 2 die Substitution

$$(P(x) \wedge Q(x))[y/x] = (P(y) \wedge Q(y))$$

vorgenommen. Wir führen hier stattdessen die triviale Substitution

$$(P(x) \wedge Q(x))[x/x] = (P(x) \wedge Q(x))$$

durch, die ebenfalls mit UB möglich ist.

2. $\forall x\,P(x) \vee \forall x\,Q(x) \vdash \forall x\,(P(x) \vee Q(x))$

Antwort

1.	$\forall x\,P(x) \vee \forall x\,Q(x)$	(P1)
2.	$\|\|$ $\forall x\,P(x)$	(FU-Annahme 1)
3.	$\|\|$ $P(x)$	2. (UB)
4.	$\|\|$ $P(x) \vee Q(x)$	3. (ADD1)
5.	$\|\|$ $\neg\forall x\,P(x)$	(FU-Annahme 2)
6.	$\|\|$ $\forall x\,Q(x)$	1., 5. (DS1)
7.	$\|\|$ $Q(x)$	6. (UB)
8.	$\|\|$ $P(x) \vee Q(x)$	7. (ADD2)
9.	$P(x) \vee Q(x)$	2.–8. (FU)
10.	$\forall x\,(P(x) \vee Q(x))$	9. (UE)

Wir ziehen keinen Strich, weil die zu beweisende Schlussfolgerung keine Prämissen hat.

3. $\vdash \forall x\,(P(a) \lor Q(x)) \leftrightarrow P(a) \lor \forall x\, Q(x)$

Antwort

1.	$\|\ \forall x\,(P(a) \lor Q(x))$	(KB-Annahme)
2.	$\|\ P(a) \lor Q(x)$	1. (UB)
3.	$\|\ \|\ P(a)$	(FU-Annahme 1)
4.	$\|\ \|\ P(a) \lor \forall x\, Q(x)$	3. (ADD1)
5.	$\|\ \|\ \neg P(a)$	(FU-Annahme 2)
6.	$\|\ \|\ Q(x)$	2., 5. (DS1)
7.	$\|\ \|\ \forall x\, Q(x)$	6. (UE)
8.	$\|\ \|\ P(a) \lor \forall x\, Q(x)$	7. (ADD2)
9.	$\|\ P(a) \lor \forall x\, Q(x)$	3.–8. (FU)
10.	$\forall x\,(P(a) \lor Q(x)) \rightarrow P(a) \lor \forall x\, Q(x)$	1.–9. (KB)
11.	$\|\ P(a) \lor \forall x\, Q(x)$	(KB-Annahme)
12.	$\|\ \|\ P(a)$	(FU-Annahme 1)
13.	$\|\ \|\ P(a) \lor Q(x)$	12. (ADD1)
14.	$\|\ \|\ \neg P(a)$	(FU-Annahme 2)
15.	$\|\ \|\ \forall x\, Q(x)$	11., 14. (DS1)
16.	$\|\ \|\ Q(x)$	15. (UB)
17.	$\|\ \|\ P(a) \lor Q(x)$	16. (ADD)
18.	$\|\ P(a) \lor Q(x)$	12.–17. (FU)
19.	$\|\ \forall x\,(P(a) \lor Q(x))$	18. (UE)
20.	$P(a) \lor \forall x\, Q(x) \rightarrow \forall x\,(P(a) \lor Q(x))$	11.–18. (KB)
21.	$\forall x\,(P(a) \lor Q(x)) \leftrightarrow P(a) \lor \forall x\, Q(x)$	10., 20. (ÄQ-EIN)

4. $\vdash \forall x\,(P(a) \land Q(x)) \leftrightarrow P(a) \land \forall x\, Q(x)$

Antwort

1.	$\|\|\ \forall x\,(P(a) \land Q(x))$	(KB-Annahme)
2.	$\|\|\ P(a) \land Q(x)$	1. (UB)
3.	$\|\|\ P(a)$	2. (SIMP1)
4.	$\|\|\ Q(x)$	2. (SIMP2)
5.	$\|\|\ \forall x\, Q(x)$	4. (UE)
6.	$\|\|\ P(a) \land \forall x\, Q(x)$	3., 5. (KON)
7.	$\forall x\,(P(a) \land Q(x)) \rightarrow P(a) \land \forall x\, Q(x)$	1.–6. (KB)
8.	$\|\|\ P(a) \land \forall x\, Q(x)$	(KB-Annahme)
9.	$\|\|\ P(a)$	8. (SIMP1)
10.	$\|\|\ \forall x\, Q(x)$	8. (SIMP2)
11.	$\|\|\ Q(x)$	10. (UB)
12.	$\|\|\ P(a) \land Q(x)$	9., 11. (ADD)
13.	$\|\|\ \forall x\,(P(a) \land Q(x))$	12. (UE)
14.	$P(a) \land \forall x\, Q(x) \rightarrow \forall x\,(P(a) \land Q(x))$	8.–13. (KB)
15.	$\forall x\,(P(a) \land Q(x)) \leftrightarrow P(a) \land \forall x\, Q(x)$	7., 14. (ÄQ-EIN)

5. $\vdash \forall x\,(P(a) \rightarrow Q(x)) \leftrightarrow (P(a) \rightarrow \forall x\, Q(x))$

Antwort

1.	$\|\|\ \forall x\,(P(a) \rightarrow Q(x))$	(KB-Annahme)
2.	$\|\|\ P(a) \rightarrow Q(x)$	1. (UB)
3.	$\|\|\ \|\|\ P(a)$	(KB-Annahme)
4.	$\|\|\ \|\|\ Q(x)$	2., 3. (MP)
5.	$\|\|\ \|\|\ \forall x\, Q(x)$	4. (UE)
6.	$\|\|\ P(a) \rightarrow \forall x\, Q(x)$	3.–5. (KB)
7.	$\forall x\,(P(a) \rightarrow Q(x)) \rightarrow (P(a) \rightarrow \forall x\, Q(x))$	1.–6. (KB)
8.	$\|\|\ P(a) \rightarrow \forall x\, Q(x)$	(KB-Annahme)
9.	$\|\|\ \|\|\ P(a)$	(KB-Annahme)
10.	$\|\|\ \|\|\ \forall x\, Q(x)$	8., 9. (MP)
11.	$\|\|\ \|\|\ Q(x)$	10. (UB)
12.	$\|\|\ P(a) \rightarrow Q(x)$	9.–11. (KB)
13.	$\|\|\ \forall x\,(P(a) \rightarrow Q(x))$	12. (UE)
14.	$(P(a) \rightarrow \forall x\, Q(x)) \rightarrow \forall x\,(P(a) \rightarrow Q(x))$	8.–13. (KB)
15.	$\forall x\,(P(a) \rightarrow Q(x)) \leftrightarrow (P(a) \rightarrow \forall x\, Q(x))$	7., 14. (ÄQ-EIN)

6. $\forall x\, \neg P(x) \vdash \neg\exists x\, P(x)$

Antwort

1.	$\forall x\, \neg P(x)$	(P1)
2.	$\|\|$ $\neg\neg\exists x\, P(x)$	(IB-Annahme)
3.	$\|\|$ $\exists x\, P(x)$	2. (DN2)
4.	$\|\| \;\|\|$ $P(x)$	(EB-Annahme)[67]
5.	$\|\| \;\|\|$ $\neg P(x)$	1. (UB)
6.	$\|\| \;\|\|$ $Q(a) \wedge \neg Q(a)$	4., 5. (ECQ)
7.	$\|\|$ $Q(a) \wedge \neg Q(a)$	4.–6. (EB)
8.	$\neg\exists x\, P(x)$	2.–7. (IB)

67: In Bezug auf den 3. Schritt.

Erklärung

Die Variable x kommt in keiner Annahme frei vor. Deshalb können wir $P(x)$ als EB-Annahme verwenden.

7. $\vdash P(a) \wedge \exists x\, Q(x) \leftrightarrow \exists x\, (P(a) \wedge Q(x))$

Antwort

1.	$\|\|$ $P(a) \wedge \exists x\, Q(x)$	(KB-Annahme)
2.	$\|\|$ $P(a)$	1. (SIMP1)
3.	$\|\|$ $\exists x\, Q(x)$	1. (SIMP2)
4.	$\|\| \;\|\|$ $Q(x)$	(EB-Annahme)[68]
5.	$\|\| \;\|\|$ $P(a) \wedge Q(x)$	2., 4. (KON)
6.	$\|\| \;\|\|$ $\exists x\, (P(a) \wedge Q(x))$	5. (EE)
7.	$\|\|$ $\exists x\, (P(a) \wedge Q(x))$	4.–6. (EB)
8.	$P(a) \wedge \exists x\, Q(x) \rightarrow \exists x\, (P(a) \wedge Q(x))$	1.–7. (KB)
9.	$\|\|$ $\exists x\, (P(a) \wedge Q(x))$	(KB-Annahme)
10.	$\|\| \;\|\|$ $P(a) \wedge Q(x)$	(EB-Annahme)[69]
11.	$\|\| \;\|\|$ $P(a)$	10. (SIMP1)
12.	$\|\| \;\|\|$ $Q(x)$	10. (SIMP2)
13.	$\|\| \;\|\|$ $\exists x\, Q(x)$	12. (EE)
14.	$\|\| \;\|\|$ $P(a) \wedge \exists x\, Q(x)$	11., 13. (KON)
15.	$\|\|$ $P(a) \wedge \exists x\, Q(x)$	10.–14. (EB)
16.	$\exists x\, (P(a) \wedge Q(x)) \rightarrow P(a) \wedge \exists x\, Q(x)$	9.–15. (KB)
17.	$P(a) \wedge \exists x\, Q(x) \leftrightarrow \exists x\, (P(a) \wedge Q(x))$	8., 16. (ÄQ-EIN)

68: In Bezug auf den 3. Schritt.

69: In Bezug auf den 9. Schritt.

8. $\vdash P(a) \lor \exists x\, Q(x) \leftrightarrow \exists x\, (P(a) \lor Q(x))$

Antwort

1.	$\| \; P(a) \lor \exists x\, Q(x)$	(KB-Annahme)
2.	$\| \; \| \; P(a)$	(FU-Annahme 1)
3.	$\| \; \| \; P(a) \lor Q(x)$	2. (ADD1)
4.	$\| \; \| \; \exists x\, (P(a) \lor Q(x))$	3. (EE)
5.	$\| \; \| \; \neg P(a)$	(FU-Annahme 2)
6.	$\| \; \| \; \exists x\, Q(x)$	1., 5. (DS1)
7.	$\| \; \| \; \| \; Q(x)$	(EB-Annahme)[70]
8.	$\| \; \| \; \| \; P(a) \lor Q(x)$	7. (ADD2)
9.	$\| \; \| \; \| \; \exists x\, (P(a) \lor Q(x))$	8. (EE)
10.	$\| \; \| \; \exists x\, (P(a) \lor Q(x))$	7.–9. (EB)
11.	$\| \; \exists x\, (P(a) \lor Q(x))$	2.–10. (FU)
12.	$P(a) \lor \exists x\, Q(x) \rightarrow \exists x\, (P(a) \lor Q(x))$	1.–11. (KB)
13.	$\| \; \exists x\, (P(a) \lor Q(x))$	(KB-Annahme)
14.	$\| \; \| \; P(a) \lor Q(x)$	(EB-Annahme)[71]
15.	$\| \; \| \; \| \; P(a)$	(FU-Annahme 1)
16.	$\| \; \| \; \| \; P(a) \lor \exists x\, Q(x)$	15. (ADD1)
17.	$\| \; \| \; \| \; \neg P(a)$	(FU-Annahme 2)
18.	$\| \; \| \; \| \; Q(x)$	14., 17. (DS1)
19.	$\| \; \| \; \| \; \exists x\, Q(x)$	18. (EE)
20.	$\| \; \| \; \| \; P(a) \lor \exists x\, Q(x)$	19. (ADD2)
21.	$\| \; \| \; P(a) \lor \exists x\, Q(x)$	15.–20. (FU)
22.	$\| \; P(a) \lor \exists x\, Q(x)$	14.–21. (EB)
23.	$\exists x\, (P(a) \lor Q(x)) \rightarrow P(a) \lor \exists x\, Q(x)$	13.–19. (KB)
24.	$P(a) \lor \exists x\, Q(x) \leftrightarrow \exists x\, (P(a) \lor Q(x))$	12., 23. (ÄQ-EIN)

70: In Bezug auf den 6. Schritt.

71: In Bezug auf den 13. Schritt.

9. $\exists x\, P(x) \vee \exists x\, Q(x) \vdash \exists x\, (P(x) \vee Q(x))$

Antwort

1.	$\exists x\, P(x) \vee \exists x\, Q(x)$	(P1)
2.	$\|\ \exists x\, P(x)$	(FU-Annahme 1)
3.	$\|\ \|\ P(x)$	(EB-Annahme)[72]
4.	$\|\ \|\ P(x) \vee Q(x)$	3. (ADD1)
5.	$\|\ \|\ \exists x\, (P(x) \vee Q(x))$	4. (EE)
6.	$\|\ \exists x\, (P(x) \vee Q(x))$	3.–5. (EB)
7.	$\|\ \neg\exists x\, P(x)$	(FU-Annahme 2)
8.	$\|\ \exists x\, Q(x)$	1., 7. (DS1)
9.	$\|\ \|\ Q(x)$	(EB-Annahme)[73]
10.	$\|\ \|\ P(x) \vee Q(x)$	9. (ADD2)
11.	$\|\ \|\ \exists x\, (P(x) \vee Q(x))$	10. (EE)
12.	$\|\ \exists x\, (P(x) \vee Q(x))$	9.–11. (EB)
13.	$\exists x\, (P(x) \vee Q(x))$	2.–12. (FU)

72: In Bezug auf den 2. Schritt.

73: In Bezug auf den 8. Schritt.

10. $\exists x\, (P(x) \rightarrow Q(x)), \forall x\, P(x) \vdash \exists x\, Q(x)$

Antwort

1.	$\exists x\, (P(x) \rightarrow Q(x))$	(P1)
2.	$\forall x\, P(x)$	(P2)
3.	$\|\ P(x) \rightarrow Q(x)$	(EB-Annahme)[74]
4.	$\|\ P(x)$	2. (UB)
5.	$\|\ Q(x)$	3., 4. (MP)
6.	$\|\ \exists x\, Q(x)$	5. (EE)
7.	$\exists x\, Q(x)$	3.–6. (EB)

74: In Bezug auf P1.

11. $\vdash (P(a) \rightarrow \exists x\, Q(x)) \leftrightarrow \exists x\, (P(a) \rightarrow Q(x))$

Antwort

1.	$\parallel\ P(a) \rightarrow \exists x\, Q(x)$	(KB-Annahme)
2.	$\parallel \parallel\ P(a)$	(FU-Annahme 1)
3.	$\parallel \parallel\ \exists x\, Q(x)$	1., 2. (MP)
4.	$\parallel \parallel \parallel\ Q(x)$	(EB-Annahme)[75]
5.	$\parallel \parallel \parallel \parallel\ P(a)$	(KB-Annahme)
6.	$\parallel \parallel \parallel \parallel\ Q(x)$	4. (TS)
7.	$\parallel \parallel \parallel\ P(a) \rightarrow Q(x)$	5.–6. (KB)
8.	$\parallel \parallel \parallel\ \exists x\, (P(a) \rightarrow Q(x))$	7. (EE)
9.	$\parallel \parallel\ \exists x\, (P(a) \rightarrow Q(x))$	4.–8. (EB)
10.	$\parallel \parallel\ \neg P(a)$	(FU-Annahme 2)
11.	$\parallel \parallel \parallel\ P(a)$	(KB-Annahme)
12.	$\parallel \parallel \parallel\ Q(x)$	10., 11. (ECQ)
13.	$\parallel \parallel\ P(a) \rightarrow Q(x)$	11.–12. (KB)
14.	$\parallel \parallel\ \exists x\, (P(a) \rightarrow Q(x))$	13. (EE)
15.	$\parallel\ \exists x\, (P(a) \rightarrow Q(x))$	2.–14. (FU)
16.	$(P(a) \rightarrow \exists x\, Q(x)) \rightarrow \exists x\, (P(a) \rightarrow Q(x))$	1.–15. (KB)
17.	$\parallel\ \exists x\, (P(a) \rightarrow Q(x))$	(KB-Annahme)
18.	$\parallel \parallel\ P(a)$	(KB-Annahme)
19.	$\parallel \parallel \parallel\ P(a) \rightarrow Q(x)$	(EB-Annahme)[76]
20.	$\parallel \parallel \parallel\ Q(x)$	18., 19. (MP)
21.	$\parallel \parallel \parallel\ \exists x\, Q(x)$	20. (EE)
22.	$\parallel \parallel\ \exists x\, Q(x)$	19.–21. (EB)
23.	$\parallel\ P(a) \rightarrow \exists x\, Q(x)$	18.–22. (KB)
24.	$\exists x\, (P(a) \rightarrow Q(x)) \rightarrow (P(a) \rightarrow \exists x\, Q(x))$	17.–23. (KB)
25.	$(P(a) \rightarrow \exists x\, Q(x)) \leftrightarrow \exists x\, (P(a) \rightarrow Q(x))$	16., 24. (ÄQ-EIN)

75: In Bezug auf den 3. Schritt.

76: In Bezug auf den 17. Schritt.

Herleitungen aus Übung 11.2.

1. Alle Österreicher sind Europäer. Alle Salzburger sind Österreicher. Also sind alle Salzburger Europäer.

Antwort

1.	$\forall x\,(O(x) \rightarrow E(x))$	(P1)
2.	$\forall x\,(S(x) \rightarrow O(x))$	(P2)
3.	$\|\|\ S(x)$	(KB-Annahme)
4.	$\|\|\ S(x) \rightarrow O(x)$	2. (UB)
5.	$\|\|\ O(x)$	3., 4. (MP)
6.	$\|\|\ O(x) \rightarrow E(x)$	1. (UB)
7.	$\|\|\ E(x)$	5., 6. (MP)
8.	$S(x) \rightarrow E(x)$	3.–7. (KB)
9.	$\forall x\,(S(x) \rightarrow E(x))$	8. (UE)

2. Alle Philosophen sind weise. Nun gibt es Salzburger Philosophen. Also sind einige Salzburger weise.

Antwort

1.	$\forall x\,(P(x) \rightarrow W(x))$	(P1)
2.	$\exists x\,(S(x) \wedge P(x))$	(P2)
3.	$\|\|\ S(x) \wedge P(x)$	(EB-Annahme)[77]
4.	$\|\|\ P(x)$	3. (SIMP2)
5.	$\|\|\ P(x) \rightarrow W(x)$	1. (UB)
6.	$\|\|\ W(x)$	4., 5. (MP)
7.	$\|\|\ S(x)$	3. (SIMP1)
8.	$\|\|\ S(x) \wedge W(x)$	6., 7. (KON)
9.	$\|\|\ \exists x\,(S(x) \wedge W(x))$	8. (EE)
10.	$\exists x\,(S(x) \wedge W(x))$	3.–9. (EB)

77: In Bezug auf P2.

3. Es gibt keine Österreicher, die auf den Mond geflogen sind. Es gibt aber Kosmonauten, die Österreicher sind. Daher sind nicht alle Kosmonauten auf den Mond geflogen.

Antwort

1.	$\neg\exists x\,(O(x) \wedge G(x,m))$	(P1)
2.	$\exists x\,(K(x) \wedge O(x))$	(P2)
3.	$\|\|\ K(x) \wedge O(x)$	(EB-Annahme)[78]
4.	$\|\|\ K(x)$	3. (SIMP1)
5.	$\|\|\ O(x)$	3. (SIMP2)
6.	$\|\|\ \|\|\ \neg\neg\forall x\,(K(x) \rightarrow G(x,m))$	(IB-Annahme)
7.	$\|\|\ \|\|\ \forall x\,(K(x) \rightarrow G(x,m))$	6. (DN2)
8.	$\|\|\ \|\|\ K(x) \rightarrow G(x,m)$	7. (UB)
9.	$\|\|\ \|\|\ G(x,m)$	4., 8. (MP)
10.	$\|\|\ \|\|\ O(x) \wedge G(x,m)$	5., 9. (KON)
11.	$\|\|\ \|\|\ \exists x\,(O(x) \wedge G(x,m))$	10. (EE)
12.	$\|\|\ \|\|\ \exists x\,(O(x) \wedge G(x,m)) \wedge \neg\exists x\,(O(x) \wedge G(x,m))$	11., 1. (KON)
13.	$\|\|\ \neg\forall x\,(K(x) \rightarrow G(x,m))$	6.–12. (IB)
14.	$\neg\forall x\,(K(x) \rightarrow G(x,m))$	3.–13. (EB)

78: In Bezug auf P2.

4. Nicht ein Lebewesen auf dem Mars ist glatzköpfig. Alle Skinheads sind jedoch glatzköpfig. Somit gibt es keinen Skinhead, der ein Lebewesen auf dem Mars ist.

Herleitung

1.	$\neg\exists x\,(L(x,m) \wedge G(x))$	(P1)
2.	$\forall x\,(S(x) \rightarrow G(x))$	(P2)
3.	$\|\|$ $\neg\neg\exists x\,(S(x) \wedge L(x,m))$	(IB-Annahme)
4.	$\|\|$ $\exists x\,(S(x) \wedge L(x,m))$	3. (DN)
5.	$\|\|$ $\|\|$ $S(x) \wedge L(x,m)$	(EB-Annahme)[79]
6.	$\|\|$ $\|\|$ $S(x)$	5. (SIMP1)
7.	$\|\|$ $\|\|$ $S(x) \rightarrow G(x)$	2. (UB)
8.	$\|\|$ $\|\|$ $G(x)$	6., 7. (MP)
9.	$\|\|$ $\|\|$ $L(x,m)$	5. (SIMP2)
10.	$\|\|$ $\|\|$ $G(x) \wedge L(x,m)$	8., 9. (KON)
11.	$\|\|$ $\|\|$ $\exists x\,(G(x) \wedge L(x,m))$	10. (EE)
12.	$\|\|$ $\|\|$ $A(a) \wedge \neg A(a)$	11., 1. (ECQ)
13.	$\|\|$ $A(a) \wedge \neg A(a)$	5.–12. (EB)
14.	$\neg\exists x\,(S(x) \wedge L(x,m))$	3.–13. (EB)

79: In Bezug auf den 4. Schritt.

Herleitungen aus Übung 11.3.

2. Es gibt Lebewesen auf dem Mars. Alle Lebewesen auf dem Mars sind glatzköpfig. Somit gibt es Lebewesen auf dem Mars, die glatzköpfig sind.

Antwort

1.	$\exists x\, L(x,m)$	(P1)
2.	$\forall x\,(L(x,m) \rightarrow G(x))$	(P2)
3.	$\|\|$ $L(x,m)$	(EB-Annahme)[80]
4.	$\|\|$ $L(x,m) \rightarrow G(x)$	2. (UB)
5.	$\|\|$ $G(x)$	3., 4. (MP)
6.	$\|\|$ $L(x,m) \wedge G(x)$	3., 5. (KON)
7.	$\|\|$ $\exists x\,(L(x,m) \wedge G(x))$	6. (EE)
8.	$\exists x\,(L(x,m) \wedge G(x))$	3.–7. (EB)

80: In Bezug auf P1.

Herleitungen aus Übung 11.4.

1. $\exists x\, \forall y\, R(x,y) \vdash \forall y\, \exists x\, R(x,y)$

Antwort

1.	$\exists x\, \forall y\, R(x,y)$	(P1)
2.	$\|\| \quad \forall y\, R(x,y)$	(EB-Annahme)[81]
3.	$\|\| \quad R(x,y)$	2. (UB)
4.	$\|\| \quad \exists x\, R(x,y)$	3. (EE)
5.	$\|\| \quad \forall y\, \exists x\, R(x,y)$	4. (UE)
6.	$\forall y\, \exists x\, R(x,y)$	2.–5. (EB)

81: In Bezug auf P1.

2. $\neg\exists x\, \neg P(x) \vdash \forall x\, P(x)$

Antwort

1.	$\neg\exists x\, \neg P(x)$	(P1)
2.	$\|\| \quad \neg P(x)$	(IB-Annahme)
3.	$\|\| \quad \exists x\, \neg P(x)$	2. (EE)
4.	$\|\| \quad \exists x\, \neg P(x) \wedge \neg\exists x\, \neg P(x)$	3., 1. (KON)
5.	$P(x)$	2.–4. (IB)
6.	$\forall x\, P(x)$	5. (UE)

3. $\exists x\, P(x) \vdash \neg\forall x\, \neg P(x)$

Antwort

1.	$\exists x\, P(x)$	(P1)
2.	$\|\| \quad \neg\neg\forall x\, \neg P(x)$	(IB-Annahme)
3.	$\|\| \quad \forall x\, \neg P(x)$	2. (DN2)
4.	$\|\| \; \|\| \quad P(x)$	(EB-Annahme)[82]
5.	$\|\| \; \|\| \quad \neg P(x)$	3. (UB)
6.	$\|\| \; \|\| \quad Q(a) \wedge \neg Q(a)$	4., 5. (ECQ)
7.	$\|\| \quad Q(a) \wedge \neg Q(a)$	4.–6. (EB)
8.	$\neg\forall x\, \neg P(x)$	2.–7. (IB)

82: In Bezug auf P1.

4. $\neg\exists x\, P(x) \vdash \forall x\, \neg P(x)$

Antwort

1.	$\neg\exists x\, P(x)$	(P1)
2.	$\|\ \neg\neg P(x)$	(IB-Annahme)
3.	$\|\ P(x)$	2. (DN2)
4.	$\|\ \exists x\, P(x)$	3. (EE)
5.	$\|\ \exists x\, P(x) \wedge \neg\exists x\, P(x)$	4., 1. (KON)
6.	$\neg P(x)$	2.–5. (IB)
7.	$\forall x\, \neg P(x)$	6. (UE)

5. $\exists x\, \neg P(x) \vdash \neg\forall x\, P(x)$

Antwort

1.	$\exists x\, \neg P(x)$	(P1)
2.	$\|\ \neg P(x)$	(EB-Annahme)[83]
3.	$\|\ \|\ \neg\neg\forall x\, P(x)$	(IB-Annahme)
4.	$\|\ \|\ \forall x\, P(x)$	3. (DN2)
5.	$\|\ \|\ P(x)$	4. (UB)
6.	$\|\ \|\ P(x) \wedge \neg P(x)$	5., 2. (KON)
7.	$\|\ \neg\forall x\, P(x)$	6. (IB)
8.	$\neg\forall x\, P(x)$	2.–7. (EB)

83: In Bezug auf P1.

6. $\forall x\, (\exists y\, P(y) \rightarrow Q(x)) \vdash \forall y\, (P(y) \rightarrow Q(a))$

Antwort

1.	$\forall x\, (\exists y\, P(y) \rightarrow Q(x))$	(P1)
2.	$\exists y\, P(y) \rightarrow Q(a)$	1. (UB)
3.	$\|\ P(y)$	(KB-Annahme)
4.	$\|\ \exists y\, P(y)$	3. (EE)
5.	$\|\ Q(a)$	2., 4. (MP)
6.	$P(y) \rightarrow Q(a)$	3.–5. (KB)
7.	$\forall y\, (P(y) \rightarrow Q(a))$	6. (UE)[84]

84: Schritt erlaubt, weil y in keiner Annahme frei vorkommt.

7. $\neg\forall x\,(P(x) \rightarrow Q(x)) \vdash \exists x\,(P(x) \land \neg Q(x))$

Antwort

1.	$\neg\forall x\,(P(x) \rightarrow Q(x))$	(P1)
2.	$\|\ \neg\exists x\,(P(x) \land \neg Q(x)$	(IB-Annahme)
3.	$\|\ \|\ P(x)$	(FU-Annahme 1)
4.	$\|\ \|\ \|\ Q(x)$	(FU-Annahme 1.1)
5.	$\|\ \|\ \|\ \|\ P(x)$	(KB-Annahme)
6.	$\|\ \|\ \|\ \|\ Q(x)$	4. (TS)
7.	$\|\ \|\ \|\ P(x) \rightarrow Q(x)$	5.–6. (KB)
8.	$\|\ \|\ \|\ \neg Q(x)$	(FU-Annahme 1.2)
9.	$\|\ \|\ \|\ P(x) \land \neg Q(x)$	3., 8. (KON)
10.	$\|\ \|\ \|\ \exists x\,(P(x) \land \neg Q(x))$	9. (EE)
11.	$\|\ \|\ \|\ P(x) \rightarrow Q(x)$	2., 10. (EQC)
12.	$\|\ \|\ P(x) \rightarrow Q(x)$	4.–11. (FU)
13.	$\|\ \|\ \neg P(x)$	(FU-Annahme 2)
14.	$\|\ \|\ \|\ P(x)$	(KB-Annahme)
15.	$\|\ \|\ \|\ Q(x)$	13., 14. (ECQ)
16.	$\|\ \|\ P(x) \rightarrow Q(x)$	14.–15. (KB)
17.	$\|\ P(x) \rightarrow Q(x)$	3.–16. (FU)
18.	$\|\ \forall x\,(P(x) \rightarrow Q(x))$	17. (UE)
19.	$\|\ \forall x\,(P(x) \rightarrow Q(x)) \land \neg\forall x\,(P(x) \rightarrow Q(x))$	18., 1. (KON)
20.	$\exists x\,(P(x) \land \neg Q(x)$	2.–19. (IB)[85]

85: Schritt erlaubt, weil x in keiner Annahme frei vorkommt.

86: In Bezug auf den 3. Schritt.

Herleitungen aus Übung 11.5.

1. Alles hat eine Ursache. Gott hat jedoch keine Ursache. Also ist der Papst Tiroler.

Herleitung zu Repräsentation 1

1.	$\forall x\, \exists y\, U(y,x)$	(P1)
2.	$\neg\exists x\, U(x,g)$	(P2)
3.	$\exists y\, U(y,g)$	1. (UB)
4.	$\|\| \ U(x,g)$	(EB-Annahme)[86]
5.	$\|\| \ \exists x\, U(x,g)$	4. (EE)
6.	$\|\| \ T(p)$	4. (ECQ)
7.	$T(p)$	3.–6. (EB)

Herleitung zu Repräsentation 2

1.	$\forall x\, \exists y\, U(y,x)$	(P1)
2.	$\neg\exists y\, U(y,g)$	(P2)
3.	$\exists y\, U(y,g)$	1. (UB)
4.	$T(p)$	3., 2. (ECQ)

2. Alle Salzburger lieben Salzburg. Es gibt jedoch niemanden, der Salzburg und alle Touristen in Salzburg liebt. Somit lieben die Salzburger nicht alle Touristen in Salzburg.

Herleitung

1.	$\forall x\,(S(x) \rightarrow L(x,s))$	(P1)
2.	$\neg\exists x\,(L(x,s) \wedge \forall y\,(T(y,s) \rightarrow L(x,y)))$	(P2)
3.	$\|\|$ $S(x)$	(KB-Annahme)
4.	$\|\|$ $S(x) \rightarrow L(x,s)$	1. (UB)
5.	$\|\|$ $L(x,s)$	3., 4. (MP)
6.	$\|\|$ $\|\|$ $\neg\neg\forall y\,(T(y,s) \rightarrow L(x,y))$	(IB-Annahme)
7.	$\|\|$ $\|\|$ $\forall y\,(T(y,s) \rightarrow L(x,y))$	6. (DN2)
8.	$\|\|$ $\|\|$ $L(x,s) \wedge \forall y\,(T(y,s) \rightarrow L(x,y))$	5., 7. (KON)
9.	$\|\|$ $\|\|$ $\exists x\,(L(x,s) \wedge \forall y\,(T(y,s) \rightarrow L(x,y)))$	5., 7. (EE)
10.	$\|\|$ $\|\|$ $Q(a) \wedge \neg Q(a)$	9., 2. (ECQ)
11.	$\|\|$ $\neg\forall y\,(T(y,s) \rightarrow L(x,y))$	6., 10. (IB)
12.	$S(x) \rightarrow \neg\forall y\,(T(y,s) \rightarrow L(x,y))$	3.–11. (KB)
13.	$\forall x\,(S(x) \rightarrow \neg\forall y\,(T(y,s) \rightarrow L(x,y)))$	12. (UE)

3. Es gibt nichts Allmächtiges. Wenn etwas ein Gott ist, ist es jedoch allmächtig. Also gibt es keinen Gott.

Herleitung

1.	$\neg\exists x\, A(x)$	(P1)
2.	$\forall x\,(G(x) \rightarrow A(x))$	(P2)
3.	$\|\|$ $\neg\neg\exists x\, G(x)$	(IB-Annahme)
4.	$\|\|$ $\exists x\, G(x)$	3. (DN2)
5.	$\|\|$ $\|\|$ $G(x)$	(EB-Annahme)[87]
6.	$\|\|$ $\|\|$ $G(x) \rightarrow A(x)$	2. (UB)
7.	$\|\|$ $\|\|$ $A(x)$	5., 6. (MP)
8.	$\|\|$ $\|\|$ $\exists x\, A(x)$	7. (EE)
9.	$\|\|$ $\|\|$ $Q(a) \wedge \neg Q(a)$	8., 1. (ECQ)
10.	$\|\|$ $Q(a) \wedge \neg Q(a)$	5.–9. (EB)
11.	$\neg\exists x\, G(x)$	3.–10. (IB)

87: In Bezug auf den 4. Schritt.

Lösung zu Zusatzübung 11.2 Beweisen Sie die logische Gültigkeit der folgenden Schlussfolgerungen mit Herleitungen[88]:

1. $\vdash \forall x\, \forall y\, F(x,y) \leftrightarrow \forall y\, \forall x\, F(x,y)$
2. $\vdash \forall x\, (F(x) \land G(x)) \leftrightarrow \forall x\, F(x) \land \forall x\, G(x)$
3. $\forall x\, (F(x) \rightarrow G(x)) \vdash (\forall x\, F(x) \rightarrow \forall x\, G(x))$
4. $\forall x\, (F(x) \leftrightarrow G(x)) \vdash (\forall x\, F(x) \leftrightarrow \forall x\, G(x))$
5. $\vdash \exists x\, F(x) \leftrightarrow \neg\forall x\, \neg F(x)$
6. $\vdash \exists x\, \neg F(x) \leftrightarrow \neg\forall x\, F(x)$
7. $\vdash \neg\exists x\, \neg F(x) \leftrightarrow \forall x\, F(x)$
8. $\vdash \neg\exists x\, F(x) \leftrightarrow \forall x\, \neg F(x)$
9. $\forall x\, (F(x) \rightarrow G(x)) \vdash (\exists x\, F(x) \rightarrow \exists x\, G(x))$
10. $\forall x\, (F(x) \leftrightarrow G(x)) \vdash (\exists x\, F(x) \leftrightarrow \exists x\, G(x))$
11. $\exists x\, \forall y\, F(x,y) \vdash \forall y\, \exists x\, F(x,y)$
12. $\forall x\, \forall y\, F(x,y) \vdash \forall x\, F(x,x)$
13. $\vdash \exists x\, (A \land F(x)) \leftrightarrow A \land \exists x\, F(x)$
14. $\vdash \exists x\, (A \lor F(x)) \leftrightarrow A \lor \exists x\, F(x)$
15. $\vdash \exists x\, (F(x) \lor G(x)) \leftrightarrow \exists x\, F(x) \lor \exists x\, G(x)$
16. $\vdash \exists x\, (F(x) \lor A) \leftrightarrow \exists x\, F(x) \lor A$
17. $\vdash \forall x\, (F(x) \lor A) \leftrightarrow \forall x\, F(x) \lor A$
18. $\exists x\, F(x,x) \vdash \exists x\, \exists y\, F(x,y)$
19. $\vdash \exists x\, \neg\exists y\, \neg(F(x) \lor \neg F(y))$

[Ausstehend.]

88: Adaptiert aus D. Hilbert & W. Ackermann, *Gründzüge der theoretischen Logik* (6. Auf.), Berlin: Springer, 1972, S. 83.

Erweiterungen der Prädikatenlogik 13

13.1 Vorbereitung 247
13.1.1 Äquivalenz- und Totalordnungsrelationen 247
13.1.2 Präferenz und Indifferenz 248
13.1.3 Äquivalenz von Inferenzregelpaare 249
13.1.4 Andere Eigenschaften von Relationen 250
13.1.5 Lösungen 251
13.2 Zusatzübungen . . . 256
13.2.1 Lösungen 257

13.1 Vorbereitung

13.1.1 Äquivalenz- und Totalordnungsrelationen

Relationen können verschiedene Eigenschaften haben, von denen die folgenden besonders bemerkenswert sind:

Reflexivität: Für alle $t : R(t, t)$.

Symmetrie: Für alle $t_1, t_2 : R(t_1, t_2) \to R(t_2, t_1)$.

Transitivität: Für alle $t_1, t_2, t_3 : R(t_1, t_2) \wedge R(t_2, t_3) \to R(t_1, t_3)$.

Totalität: Für alle $t_1, t_2 : R(t_1, t_2) \vee R(t_2, t_1)$.

Es gibt zwei wichtige Arten von Relationen, die mehrere dieser Eigenschaften erfüllen:

Definition: Äquivalenzrelation

Eine Relation R ist eine *Äquivalenzrelation* gdw sie reflexiv, symmetrisch und transitiv ist.

Definition: Totalordnungsrelation

Eine Relation R ist eine *Totalordnungsrelation* gdw sie reflexiv, transitiv un total ist. D.h., die Inferenzregeln

Die folgenden Inferenzregeln sind für Relationen R angemessen, die reflexiv bzw. symmetrisch bzw. transitiv bzw. total sind.

Inferenzregeln für Reflexivität, Symmetrie, Transitivität und Totalität

$$\vdash \forall v\, R(v, v) \qquad (R\text{-REF1})$$
$$\vdash R(t, t) \qquad (R\text{-REF2})$$
$$\vdash \forall v_1 \forall v_2\, (R(v_1, v_2) \to R(v_2, v_1)) \qquad (R\text{-SYM1})$$
$$R(t_1, t_2) \vdash R(t_2, t_1) \qquad (R\text{-SYM2})$$
$$\vdash \forall v_1 \forall v_2 \forall v_3\, (R(v_1, v_2) \wedge R(v_2, v_3) \to R(v_1, v_3)) \qquad (R\text{-TRA1})$$
$$R(t_1, t_2), R(t_2, t_3) \vdash R(t_1, t_3) \qquad (R\text{-TRA2})$$
$$\vdash \forall v_1 \forall v_2\, (R(v_1, v_2) \vee R(v_2, v_1)) \qquad (R\text{-TOT1})$$
$$\neg R(t_1, t_2) \vdash R(t_2, t_1) \qquad (R\text{-TOT2})$$

Wie im Skript gesagt wurde, ist die Identitätsrelation eine Äquivalenzrelation.

Aktivierungselement 13.1. Formulieren Sie die Inferenzregeln, die der Relation der Identität (=) als Äquivalenzrelation entsprechen.

13.1.2 Präferenz und Indifferenz

Die Relationen der (schwacher) Präferenz ($\succcurlyeq$), strikten Präferenz ($\succ$) und Indifferenz ($\approx$) besitzen einige dieser Eigenschaften. Nun fügen wir sie zu unserer Sprache hinzu:

Formationsregel: Wenn t_1, t_2 singuläre Terme sind, dann sind $t_1 \succcurlyeq t_2$, $t_1 \succ t_2$ und $t_1 \approx t_2$ Formeln.

Die Relation $\succcurlyeq$ ist eine Totalordnungsrelation.

Aktivierungselement 13.2. Formulieren Sie die Inferenzregeln, die der Relation der (schwachen) Präferenz ($\succcurlyeq$) als Totalordnungsrelation entsprechen.

Die Relationen der strikten Präferenz ($\succ$) und der Indifferenz ($\approx$) können wie folgt aus der Relation der (schwachen) Präferenz definiert werden:

Definition: Strikte Präferenz ($\succ$) und Indifferenz ($\approx$)

$$t_1 \succ t_2 \overset{\text{def}}{=} (t_1 \succcurlyeq t_2 \land \neg t_2 \succcurlyeq t_1)$$

$$t_1 \approx t_2 \overset{\text{def}}{=} (t_1 \succcurlyeq t_2 \land t_2 \succcurlyeq t_1)$$

Falls zwei Ausdrücke definitionsäquivalent sind, können wir sie beliebig gegeneinander austauschen. Siehe hierzu exemplarisch die Herleitung der Reflexivität von $\approx$.

1.	$x \succcurlyeq x$	($\succcurlyeq$-REF1)
2.	$x \succcurlyeq x \land x \succcurlyeq x$	1., 1. (KON)
3.	$x \approx x$	2. (Def. $\approx$)
4.	$\forall x\, x \approx x$	3. (UE)[1]

1: UE ist hier zulässig, da x in keiner Prämisse frei vorkommt – x im 1. Schritt würde ohne Prämisse hergeleitet.

Die Indifferenzrelation ist nicht nur reflexiv, sondern besitzt darüber hinaus alle Eigenschaften, die sie zur Äquivalenzrelation qualifizieren.

Aktivierungselement 13.3. Beweisen Sie durch Herleitungen, dass die Relation $\approx$ eine Äquivalenzrelation ist.

13.1.3 Äquivalenz von Inferenzregelpaare

Jede der oben genannten Inferenzregeln besitzt zwei äquivalente Versionen (z.B. REF1 und REF2). Zur Veranschaulichung zeigen wir dies exemplarisch anhand eines Beweises für R-SYM.

Beweis. Zum Beweis führen wir zwei Herleitungen: zunächst leiten wir R-SYM2 aus R-SYM1 her und dann R-SYM1 aus R-SYM2.

($\Rightarrow$) Nehmen wir R-SYM1 an und führen eine Herleitung mit $R(x, y)$ als Prämisse durch. Dann haben wir:

1.	$\underline{R(x, y)}$	(P1)
2.	$\forall x \forall y\, (R(x, y) \rightarrow R(y, x))$	(R-SYM1)
3.	$\forall y\, (R(x, y) \rightarrow R(y, x))$	2. (UB)
4.	$R(x, y) \rightarrow R(y, x)$	3. (UB)
5.	$R(y, x)$	1., 4. (MP)

($\Leftarrow$) Nehmen wir nun R-SYM2 an. Dann haben wir:

1.	$\|\|\ R(x, y)$	(KBA)
2.	$\|\|\ R(y, x)$	1. (R-SYM2)
3.	$R(x, y) \rightarrow R(y, x)$	1.–2. (KB)
4.	$\forall y\, (R(x, y) \rightarrow R(y, x))$	3. (UE)
5.	$\forall x \forall y\, (R(x, y) \rightarrow R(y, x))$	4. (UE)

Beide Herleitungen zeigen, dass man die eine Inferenzregel aus der anderen gewinnen kann – und umgekehrt. □

Aktivierungselement 13.4. Zeigen Sie, dass die Inferenzregelpaare R-REF1 / R-REF2, R-TRA1 / R-TRA2 und R-TOT1 / R-TOT2.

13.1.4 Andere Eigenschaften von Relationen

Neben den bisher behandelten gibt es weitere wichtige Eigenschaften von einer Relation R mit jeweils zugehörigen Inferenzregeln, wie im Folgenden dargestellt:

Reflexivität: Für alle $t : R(t, t)$.

Symmetrie: Für alle $t_1, t_2 : R(t_1, t_2) \to R(t_2, t_1)$.

Transitivität: Für alle $t_1, t_2, t_3 : R(t_1, t_2) \wedge R(t_2, t_3) \to R(t_1, t_3)$.

Totalität: Für alle $t_1, t_2 : R(t_1, t_2) \vee R(t_2, t_1)$.

Irreflexivität: Für alle $t : \neg R(t, t)$.

Asymmetrie: Für alle $t_1, t_2 : R(t_1, t_2) \to \neg R(t_2, t_1)$.

Antisymmetrie: Für alle $t_1, t_2 : R(t_1, t_2) \wedge R(t_2, t_1) \to t_1 = t_2$.

Negative Transitivität: Für alle $t_1, t_2, t_3 :$
$$\neg R(t_1, t_2) \wedge \neg R(t_2, t_3) \to \neg R(t_1, t_3).$$

Trichotomie: Für alle $t_1, t_2 : R(t_1, t_2) \vee t_1 = t_2 \vee R(t_2, t_1)$.

Inferenzregeln für Reflexivität, Symmetrie, Transitivität und Totalität

$$\vdash \forall v\, R(v, v) \tag{R-REF1}$$
$$\vdash R(t, t) \tag{R-REF2}$$
$$\vdash \forall v_1 \forall v_2\, (R(v_1, v_2) \to R(v_2, v_1)) \tag{R-SYM1}$$
$$R(t_1, t_2) \vdash R(t_2, t_1) \tag{R-SYM2}$$
$$\vdash \forall v_1 \forall v_2 \forall v_3\, (R(v_1, v_2) \wedge R(v_2, v_3) \to R(v_1, v_3)) \tag{R-TRA1}$$
$$R(t_1, t_2), R(t_2, t_3) \vdash R(t_1, t_3) \tag{R-TRA2}$$
$$\vdash \forall v_1 \forall v_2\, (R(v_1, v_2) \vee R(v_2, v_1)) \tag{R-TOT1}$$
$$\neg R(t_1, t_2) \vdash R(t_2, t_1) \tag{R-TOT2}$$

13.1.5 Lösungen

Lösung zu Aktivierungselement 13.1 Formulieren Sie die Inferenzregeln, die der Relation der Identität (=) als Äquivalenzrelation entsprechen.

Antwort

Die folgende sind Inferenzregeln, die = entsprechen:

$$\vdash \forall v\, v = v \quad \text{(=-REF1)}$$
$$\vdash t = t \quad \text{(=-REF2)}$$
$$\vdash \forall v_1 \forall v_2\, (v_1 = v_2) \longrightarrow v_2 = v_1 \quad \text{(=-SYM1)}$$
$$t_1 = t_2 \vdash t_2 = t_1 \quad \text{(=-SYM2)}$$
$$\vdash \forall v_1 \forall v_2 \forall v_3\, (v_1 = v_2 \wedge v_2 = v_3 \longrightarrow v_1 = v_3) \quad \text{(=-TRA1)}$$
$$t_1 = t_2, t_2 = t_3 \vdash t_1 = t_3 \quad \text{(=-TRA2)}$$

Zusätzlich haben wir die folgende Substitutionsregeln:

$$\vdash \forall v_1 \forall v_2\, (v_1 = v_2 \wedge A[v_1/v_3] \longrightarrow A[v_2/v_3]) \quad \text{(=-SUB1)}$$
$$t_1 = t_2, A[t_1/t_3] \vdash A[t_2/t_3] \quad \text{(=-SUB2)}$$

Lösung zu Aktivierungselement 13.2. Formulieren Sie die Inferenzregeln, die der Relation der (schwachen) Präferenz ($\succcurlyeq$) als Totalordnungsrelation entsprechen.

Antwort

Die folgende sind Inferenzregeln, die $\succcurlyeq$ entsprechen:

$$\vdash \forall v\, v \succcurlyeq v \quad (\succcurlyeq\text{-REF1})$$
$$\vdash t \succcurlyeq t \quad (\succcurlyeq\text{-REF2})$$
$$\vdash \forall v_1 \forall v_2 \forall v_3\, (v_1 \succcurlyeq v_2 \wedge v_2 \succcurlyeq v_3 \longrightarrow v_1 \succcurlyeq v_3) \quad (\succcurlyeq\text{-TRA1})$$
$$t_1 \succcurlyeq t_2, t_2 \succcurlyeq t_3 \vdash t_1 \succcurlyeq t_3 \quad (\succcurlyeq\text{-TRA2})$$
$$\vdash \forall v_1 \forall v_2\, (v_1 \succcurlyeq v_2 \vee v_2 \succcurlyeq v_1) \quad (\succcurlyeq\text{-TOT1})$$
$$\neg t_1 \succcurlyeq t_2 \vdash t_2 \succcurlyeq t_1 \quad (\succcurlyeq\text{-TOT2})$$

Lösung zu Aktivierungselement 13.3. Beweisen Sie durch Herleitungen, dass die Relation $\approx$ eine Äquivalenzrelation ist.

Beweis. Um zu beweisen, dass $\approx$ eine Äquivalenzrelation ist, müssen wir zeigen, dass sie reflexiv, symmetrisch und transitiv ist. Dies werden wir durch die folgenden Herleitungen tun.

Herleitung der Reflexivität: Siehe Seite 248.

Herleitung der Symmetrie

1.	$\| \; x \approx y$	(KB Annahme)
2.	$\| \; x \succcurlyeq y \land y \succcurlyeq x$	1. (Def. $\approx$)
3.	$\| \; x \succcurlyeq y$	2. (SIMP1)
4.	$\| \; y \succcurlyeq x$	2. (SIMP2)
5.	$\| \; y \succcurlyeq x \land x \succcurlyeq y$	3., 4. (KON)
6.	$\| \; y \approx x$	5. (Def. $\approx$)
7.	$x \approx y \rightarrow y \approx x$	1.–5. (KB)
8.	$\forall y \, (x \approx y \rightarrow y \approx x)$	7. (UE)
9.	$\forall x \forall y \, (x \approx y \rightarrow y \approx x)$	8.(UE)

Herleitung der Transitivität

1.	$\| \; x \approx y \land y \approx z$	(KBA)
2.	$\| \; x \approx y$	(SIMP1)
3.	$\| \; y \approx z$	(SIMP2)
4.	$\| \; x \succcurlyeq y \land y \succcurlyeq x$	2. (Def. $\approx$)
5.	$\| \; y \succcurlyeq z \land z \succcurlyeq y$	3. (Def. $\approx$)
6.	$\| \; x \succcurlyeq y$	4. (SIMP1)
7.	$\| \; y \succcurlyeq z$	5. (SIMP2)
8.	$\| \; x \succcurlyeq z$	6., 7. ($\succcurlyeq$-TRA2)
9.	$x \succcurlyeq y \land y \succcurlyeq z \rightarrow x \succcurlyeq z$	1.–8. (KB)
10.	$\forall y \, (x \succcurlyeq y \land y \succcurlyeq z \rightarrow x \succcurlyeq z)$	9. (UE)
11.	$\forall x \forall y \, (x \succcurlyeq y \land y \succcurlyeq z \rightarrow x \succcurlyeq z)$	10. (UE)

Da $\approx$ alle drei Eigenschaften erfüllt, können wir schließen, dass es sich um eine Äquivalenzrelation handelt. $\square$

Lösung zu Aktivierungselement 13.4. Zeigen Sie, dass die Inferenzregelpaare R-REF1 / R-REF2, R-TRA1 / R-TRA2 und R-TOT1 / R-TOT2.

Antwort 1 (REF)

Satz. Die Inferenzregeln R-REF1 und R-REF2 sind äquivalent.

Beweis. Zum Beweis führen wir zwei Herleitungen: zunächst leiten wir R-REF2 aus R-REF1 her und dann R-REF1 aus R-REF2.

($\Rightarrow$) Nehmen wir R-REF1 an. Dann haben wir:

1.	$\forall x\, R(x, x)$	(R-REF1)
2.	$R(x, x)$	1. (UB)

($\Leftarrow$) Nehmen wir nun R-REF2 an. Dann haben wir:

1.	$R(x, x)$	(R-REF2)
2.	$\forall x\, R(x, x)$	1. (UB)[2]

Beide Herleitungen zeigen, dass man die eine Inferenzregel aus der anderen gewinnen kann – und umgekehrt. □

2: Zulässiger Schritt, da $R(x, x)$ ohne Prämissen hergeleitet wurde – somit ist x in keiner Annahme frei.

Antwort 2 (TRA)

Satz. Die Inferenzregeln R-TRA1 und R-TRA2 sind äquivalent.

Beweis. Zum Beweis führen wir zwei Herleitungen: zunächst leiten wir R-TRA2 aus R-TRA1 her und dann R-TRA1 aus R-TRA2.

($\Rightarrow$) Nehmen wir R-TRA1 an und führen eine Herleitung mit $R(x,y)$ und $R(y,z)$ als Prämissen durch. Dann haben wir:

1.	$R(x,y)$	(P1)
2.	$\underline{R(y,z)}$	(P2)
3.	$R(x,y) \wedge R(y,x)$	1., 2. (KON)
4.	$\forall x \forall y \forall z\, (R(x,y) \wedge R(y,z) \rightarrow R(x,z))$	3. (R-TRA1)
5.	$\forall y \forall z\, (R(x,y) \wedge R(y,z) \rightarrow R(x,z))$	4. (UB)
6.	$\forall z\, (R(x,y) \wedge R(y,z) \rightarrow R(x,z))$	5. (UB)
7.	$R(x,y) \wedge R(y,z) \rightarrow R(x,z)$	6. (UB)
8.	$R(x,z)$	3., 7. (MP)

($\Leftarrow$) Nehmen wir nun R-TRA2 an. Dann haben wir:

1.	$\Vert\;\; R(x,y) \wedge R(y,z)$	(KBA)
2.	$\Vert\;\; R(x,y)$	1. (SIMP1)
3.	$\Vert\;\; R(y,z)$	1. (SIMP2)
4.	$\Vert\;\; R(x,z)$	2., 3. (R-TRA)
5.	$R(x,y) \wedge R(y,z) \rightarrow R(x,z)$	1., 4. (KB)
6.	$\forall z\, (R(x,y) \wedge R(y,z) \rightarrow R(x,z))$	5. (UE)
7.	$\forall y \forall z\, (R(x,y) \wedge R(y,z) \rightarrow R(x,z))$	6. (UE)
8.	$\forall x \forall y \forall z\, (R(x,y) \wedge R(y,z) \rightarrow R(x,z))$	7. (UE)

Beide Herleitungen zeigen, dass man die eine Inferenzregel aus der anderen gewinnen kann – und umgekehrt. □

Antwort 3 (TOT)

Satz. Die Inferenzregeln R-TOT1 und R-TOT2 sind äquivalent.

Beweis. Zum Beweis führen wir zwei Herleitungen: zunächst leiten wir R-TOT2 aus R-TOT1 her und dann R-TOT1 aus R-TOT2.

($\Rightarrow$) Nehmen wir R-TOT1 an und führen eine Herleitung mit $\neg R(x, y)$ als Prämisse durch. Dann haben wir:

1.	$\underline{\neg R(x, y)}$	(P1)
2.	$\forall x \forall y\, (R(x, y) \vee R(y, x))$	(R-TOT1)
3.	$\forall y\, (R(x, y) \vee R(y, x))$	2. (UB)
4.	$R(x, y) \vee R(y, x)$	3. (UB)
5.	$R(y, x)$	1., 4. (DS1)

($\Leftarrow$) Nehmen wir nun R-TOT2 an. Dann haben wir:

1.	$\vert\vert\ R(x, y)$	(FU-Annahme 1)
2.	$\vert\vert\ R(x, y) \vee R(y, x)$	(ADD1)
3.	$\vert\vert\ \neg R(x, y)$	(FU-Annahme 2)
4.	$\vert\vert\ R(y, x)$	3. (R-TOT2)
5.	$\vert\vert\ R(x, y) \vee R(y, x)$	4. (ADD2)
6.	$R(x, y) \vee R(y, x)$	1.–5. (FU)
7.	$\forall y\, (R(x, y) \vee R(y, x))$	6. (UE)
8.	$\forall x \forall y\, (R(x, y) \vee R(y, x))$	7. (UE)

Beide Herleitungen zeigen, dass man die eine Inferenzregel aus der anderen gewinnen kann – und umgekehrt. □

13.2 Zusatzübungen

Zusatzübung 13.1. Sei die Relation A symmetrisch und transitiv, und sei die Relation E definiert durch:

$$E(t_1, t_2) \stackrel{\text{def}}{=} \exists v\, ((A(t_1, v) \vee t_1 = v) \wedge (A(t_2, v) \vee t_2 = v)).$$

Beweisen Sie durch Herleitungen, dass die Relation E eine Äquivalenzrelation ist.

Zusatzübung 13.2. Sei die Relation A symmetrisch und nicht transitiv, und sei die Relation E definiert durch:

$$E(t_1, t_2) \stackrel{\text{def}}{=} \exists v\, ((A(t_1, v) \vee t_1 = v) \wedge (A(t_2, v) \vee t_2 = v)).$$

Zeigen Sie mit einer Interpretation, dass die Relation E nicht transitiv ist.[3]

3: **Hinweis:** Geben Sie eine Interpretation an, in der ein Argument der Form $E(a, b), E(b, c) \therefore E(a, c)$ nicht gültig ist.

13.2.1 Lösungen

Lösung zu Zusatzübung 13.1. Sei die Relation A symmetrisch und transitiv, und sei die Relation E definiert durch:

$$E(t_1, t_2) \overset{\text{def}}{=} \exists v\,((A(t_1, v) \lor t_1 = v) \land (A(t_2, v) \lor t_2 = v)).$$

Beweisen Sie durch Herleitungen, dass die Relation E eine Äquivalenzrelation ist.

Beweis. Um zu beweisen, dass E eine Äquivalenzrelation ist, müssen wir zeigen, dass sie drei Eigenschaften erfüllt: Reflexivität, Symmetrie und Transitivität. Dies werden wir durch die folgenden Herleitungen tun.

Herleitung der Reflexivität

1.	$x = x$	(=-REF2)
2.	$A(x, x) \lor x = x$	1. (ADD2)
3.	$(A(x, x) \lor x = x) \land (A(x, x) \lor x = x)$	2., 2. (EE)
4.	$\exists z\,((A(x, z) \lor x = z) \land (A(x, z) \lor x = z))$	3. (EE)
5.	$E(x, x)$	4. (Def. E)
6.	$\forall x\, E(x, x)$	5. (UE)

Herleitung der Symmetrie

1.	$\|\| \quad E(x, y)$	(KB-Annahme)
2.	$\|\| \quad \exists z\,((A(x, z) \lor x = z) \land (A(y, z) \lor y = z))$	1. (Def. E)
3.	$\|\| \; \|\| \quad (A(x, z) \lor x = z) \land (A(y, z) \lor y = z)$	(EB-Annahme)
4.	$\|\| \; \|\| \quad (A(x, z) \lor x = z)$	3. (SIMP1)
5.	$\|\| \; \|\| \quad (A(y, z) \lor y = z)$	3. (SIMP2)
6.	$\|\| \; \|\| \quad (A(y, z) \lor y = z) \land (A(x, z) \lor x = z)$	4., 5. (KON)
7.	$\|\| \; \|\| \quad \exists z\,((A(y, z) \lor y = z) \land (A(x, z) \lor x = z))$	6. (EE)
8.	$\|\| \quad \exists z\,((A(y, z) \lor y = z) \land (A(x, z) \lor x = z))$	3.–7. (EB)
9.	$\|\| \quad E(y, x)$	8. (Def. E)
10.	$E(x, y) \to E(y, x)$	1.–9. (KB)
11.	$\forall y\,(E(x, y) \to E(y, x))$	10. (UE)
12.	$\forall x \forall y\,(E(x, y) \to E(y, x))$	11.(UE)

Herleitung der Transitivität

1.	$\|\| \quad E(x_1, x_2) \wedge E(x_2, x_3)$	(KB-Annahme)
2.	$\|\| \quad E(x_1, x_2)$	1. (SIMP1)
3.	$\|\| \quad E(x_2, x_3)$	1. (SIMP2)
4.	$\|\| \quad \exists x\,((A(x_1, x) \vee x_1 = x) \wedge (A(x_2, x) \vee x_2 = x))$	2. (Def. E)
5.	$\|\| \; \|\| \quad (A(x_1, x_4) \vee x_1 = x_4) \wedge (A(x_2, x_4) \vee x_2 = x_4)$	(EB-Annahme)
6.	$\|\| \; \|\| \quad A(x_1, x_4) \vee x_1 = x_4$	5. (SIMP1)
7.	$\|\| \; \|\| \quad A(x_2, x_4) \vee x_2 = x_4$	5. (SIMP2)
8.	$\|\| \; \|\| \; \|\| \quad A(x_1, x_4)$	(FU-Annahme 1)
9.	$\|\| \; \|\| \; \|\| \; \|\| \quad A(x_2, x_4)$	(FU-Annahme 1.1)
10.	$\|\| \; \|\| \; \|\| \; \|\| \quad A(x_4, x_2)$	9. (A-SIM2)
11.	$\|\| \; \|\| \; \|\| \; \|\| \quad A(x_1, x_2)$	8., 10. (A-TRA)
12.	$\|\| \; \|\| \; \|\| \; \|\| \quad \neg A(x_2, x_4)$	(FU-Annahme 1.2)
13.	$\|\| \; \|\| \; \|\| \; \|\| \quad x_2 = x_4$	7., 12. (DS1)
14.	$\|\| \; \|\| \; \|\| \; \|\| \quad A(x_1, x_2)$	8., 13. (=-SUB2)
15.	$\|\| \; \|\| \; \|\| \quad A(x_1, x_2)$	9.–14. (FU)
16.	$\|\| \; \|\| \; \|\| \quad A(x_1, x_2) \vee x_1 = x_2$	15. (ADD2)
17.	$\|\| \; \|\| \; \|\| \quad \neg A(x_1, x_4)$	(FU-Annahme 2)
18.	$\|\| \; \|\| \; \|\| \quad x_1 = x_4$	6., 17. (DS1)
19.	$\|\| \; \|\| \; \|\| \; \|\| \quad A(x_2, x_4)$	(FU-Annahme 2.1)
20.	$\|\| \; \|\| \; \|\| \; \|\| \quad A(x_4, x_2)$	19. (A-SIM2)
21.	$\|\| \; \|\| \; \|\| \; \|\| \quad A(x_1, x_2)$	18., 20. (=-SUB2)
22.	$\|\| \; \|\| \; \|\| \; \|\| \quad A(x_1, x_2) \vee x_1 = x_2$	21. (ADD1)
23.	$\|\| \; \|\| \; \|\| \; \|\| \quad \neg A(x_2, x_4)$	(FU-Annahme 2.2)
24.	$\|\| \; \|\| \; \|\| \; \|\| \quad x_2 = x_4$	7., 23. (DS1)
25.	$\|\| \; \|\| \; \|\| \; \|\| \quad x_1 = x_2$	18., 24. (=-SUB2)
26.	$\|\| \; \|\| \; \|\| \; \|\| \quad A(x_1, x_2) \vee x_1 = x_2$	25. (ADD2)
27.	$\|\| \; \|\| \; \|\| \quad A(x_1, x_2) \vee x_1 = x_2$	19.–26. (FU)
28.	$\|\| \; \|\| \quad A(x_1, x_2) \vee x_1 = x_2$	8.–27. (FU)
29.	$\|\| \quad A(x_1, x_2) \vee x_1 = x_2$	5.–28. (EB)
30.	$\|\| \quad \exists x\,((A(x_1, x) \vee x_2 = x) \wedge (A(x_3, x) \vee x_3 = x))$	3. (Def. E)
31.	$\|\| \; \|\| \quad (A(x_{2,5}) \vee x_2 = x_5) \wedge (A(x_3, x_5) \vee x_3 = x_5)$	(EB-Annahme)
$\vdots$	*Mit einer Herleitung ähnlich der von 28. erhalten wir:*	
53.	$\|\| \; \|\| \quad A(x_3, x_2) \vee x_3 = x_2$	33.–55. (FU)
54.	$\|\| \quad A(x_3, x_2) \vee x_3 = x_2$	31.–53. (EB)
55.	$\|\| \quad (A(x_1, x_2) \vee x_1 = x_2) \wedge (A(x_3, x_2) \vee x_3 = x_2)$	29., 54. (KON)
56.	$\|\| \quad \exists x\,((A(x_1, x) \vee x_1 = x) \wedge (A(x_3, x) \vee x_3 = x))$	55. (EE)
57.	$\|\| \quad E(x_1, x_3)$	56. (Def. E)
58.	$E(x_1, x_2) \wedge E(x_2, x_3) \longrightarrow E(x_1, x_3)$	1.–57. (KB)
59.	$\forall z\,(E(x_1, x_2) \wedge E(x_2, z) \longrightarrow E(x_1, z))$	58. (UE)
60.	$\forall y \forall z\,(E(x_1, y) \wedge E(y, z) \longrightarrow E(x_1, z))$	59. (UE)
61.	$\forall x \forall y \forall z\,(E(x, y) \wedge E(y, z) \longrightarrow E(x, z))$	60. (UE)

Da E alle drei Eigenschaften erfüllt, können wir schließen, dass es sich um eine Äquivalenzrelation handelt. □

Lösung zu Zusatzübung 13.2. Sei die Relation A symmetrisch und nicht transitiv, und sei die Relation E definiert durch:

$$E(t_1, t_2) \overset{\text{def}}{=} \exists v\,((A(t_1, v) \vee t_1 = v) \wedge (A(t_2, v) \vee t_2 = v)).$$

Zeigen Sie mit einer Interpretation, dass die Relation E nicht transitiv ist.

Beweis. Um zu zeigen, dass E nicht transitiv ist, genügt es, ein Gegenbeispiel für das folgende Argument zu finden:

$$E(a, b),\ E(b, c) \therefore E(a, c).$$

Das bedeutet, wir müssen eine Interpretation finden, in der $E(a, b)$ und $E(b, c)$ wahr sind, $E(a, c)$ jedoch falsch ist.

Die folgende Interpretation ist ein solches Gegenbeispiel:

Definition: Interpretation $\mathfrak{I} = \{D, \varphi\}$

$$\begin{aligned}
D &= \{1, 2, 3, 4, 5\},\\
\varphi(A) &= \{\langle 1,4\rangle, \langle 4,1\rangle, \langle 2,4\rangle, \langle 4,2\rangle,\\
&\qquad \langle 2,5\rangle, \langle 5,2\rangle, \langle 3,5\rangle, \langle 5,3\rangle\},\\
\varphi(a) &= 1,\\
\varphi(b) &= 2,\\
\varphi(c) &= 3.\\
\sigma &= 4, 5, \ldots.
\end{aligned}$$

Erstens haben wir, dass:

$$\begin{aligned}
\varphi_\sigma(E(a, b)) &= \varphi_\sigma(\exists x\,(A(a, x) \vee a = x) \wedge (A(b, x) \vee b = x))\\
&= \mathtt{w},
\end{aligned}$$

denn σ ist eine x-Variante von σ und:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\langle 1,4\rangle \in \varphi(A)}{\varphi_\sigma(A(a,x)) = \mathtt{w}} \quad \dfrac{1 \neq 4}{\varphi_\sigma(a = x) = \mathtt{f}}}{\varphi_\sigma(A(a,x) \vee a = x) = \mathtt{w}} \quad \dfrac{\dfrac{\langle 2,4\rangle \in \varphi(A)}{\varphi_\sigma(A(b,x)) = \mathtt{w}} \quad \dfrac{2 \neq 4}{\varphi_\sigma(b = x) = \mathtt{f}}}{\varphi_\sigma(A(b,x) \vee b = x) = \mathtt{w}}}{\varphi_\sigma((A(a,x) \vee a = x) \wedge (A(b,x) \vee b = x)) = \mathtt{w}}}{\varphi_\sigma(\exists x\,((A(a,x) \vee a = x) \wedge (A(b,x) \vee b = x))) = \mathtt{w}}$$

Erinnern Sie sich daran:

$$\begin{aligned}\varphi_\sigma(b) &= \varphi(b) = 2,\\ \varphi_\sigma(c) &= \varphi(c) = 3,\\ \varphi_\sigma(y) &= 5.\end{aligned}$$

Zweitens haben wir, dass:

$$\begin{aligned}\varphi_\sigma(E(b,c)) &= \varphi_\sigma(\exists y\,((A(b,y) \lor b = y) \land (A(c,y) \lor c = y)))\\ &= \mathtt{w},\end{aligned}$$

denn σ ist eine y-Variante von σ, so dass $\varphi_\sigma(y) = 5$, und:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\langle 2,5\rangle \in \varphi(A)}{\varphi_\sigma(A(b,y)) = \mathtt{w}} \quad \dfrac{2 \neq 5}{\varphi_\sigma(b = y) = \mathtt{f}}}{\varphi_\sigma(A(b,y) \lor b = y) = \mathtt{w}} \quad \dfrac{\dfrac{\langle 3,5\rangle \in \varphi(A)}{\varphi_\sigma(A(c,y)) = \mathtt{w}} \quad \dfrac{3 \neq 5}{\varphi_\sigma(c = y) = \mathtt{f}}}{\varphi_\sigma(A(c,y) \lor c = y) = \mathtt{w}}}{\varphi_\sigma((A(b,y) \lor b = y) \land (A(c,y) \lor c = y)) = \mathtt{w}}}{\varphi_\sigma(\exists y\,((A(b,y) \lor b = y) \land (A(c,y) \lor c = y))) = \mathtt{w}}$$

Drittens haben wir, dass:

$$\begin{aligned}\varphi_\sigma(E(a,c)) &= \varphi_\sigma(\exists z\,((A(a,z) \lor a = z) \land (A(c,z) \lor c = z)))\\ &= \mathtt{f},\end{aligned}$$

Erinnern Sie sich daran:

$$\begin{aligned}\varphi(a) &= \varphi_{\sigma'}(a) = 1,\\ \varphi(b) &= \varphi_{\sigma'}(b) = 2,\\ \varphi(c) &= \varphi_{\sigma'}(c) = 3,\\ \varphi_\sigma(x) &= \varphi_{\sigma'}(x) = 4,\\ \varphi_\sigma(y) &= \varphi_{\sigma'}(y) = 5.\end{aligned}$$

denn kein σ', das eine z-Variante von σ ist, erfüllt:

$$\begin{aligned}\varphi_\sigma(E(a,c)) &= \varphi_\sigma((A(a,z) \lor a = z) \land (A(c,z) \lor c = z))\\ &= \mathtt{w}.\end{aligned}$$

Die folgenden Diagramme zeigen dies für jedes mögliche z-Variante σ' von σ.

Fall 1: Sei $\varphi_{\sigma'}(z) := 1$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\langle 1,1\rangle \notin \varphi(A)}{\varphi_{\sigma'}(A(a,z)) = \mathtt{f}} \quad \dfrac{1 = 1}{\varphi_{\sigma'}(a = z) = \mathtt{w}}}{\varphi_{\sigma'}(A(a,z) \lor a = z) = \mathtt{w}} \quad \dfrac{\dfrac{\langle 3,1\rangle \notin \varphi(A)}{\varphi_{\sigma'}(A(c,z)) = \mathtt{f}} \quad \dfrac{3 \neq 1}{\varphi_{\sigma'}(c = z) = \mathtt{f}}}{\varphi_{\sigma'}(A(c,z) \lor c = z) = \mathtt{f}}}{\varphi_{\sigma'}((A(a,z) \lor a = z) \land (A(c,z) \lor c = z)) = \mathtt{f}}$$

Fall 2: Sei $\varphi_{\sigma'}(z) := 2$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\langle 1,2\rangle \notin \varphi(A)}{\varphi_{\sigma'}(A(a,z)) = \mathtt{f}} \quad \dfrac{1 \neq 2}{\varphi_{\sigma'}(a = z) = \mathtt{f}}}{\varphi_{\sigma'}(A(a,z) \lor a = z) = \mathtt{f}} \quad \dfrac{\dfrac{\langle 3,2\rangle \notin \varphi(A)}{\varphi_{\sigma'}(A(c,z)) = \mathtt{f}} \quad \dfrac{3 \neq 2}{\varphi_{\sigma'}(c = z) = \mathtt{f}}}{\varphi_{\sigma'}(A(c,z) \lor c = z) = \mathtt{f}}}{\varphi_{\sigma'}((A(a,z) \lor a = z) \land (A(c,z) \lor c = z)) = \mathtt{f}}$$

Fall 3: Sei $\varphi_{\sigma'}(z) := 3$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\langle 1,3\rangle \notin \varphi(A)}{\varphi_{\sigma'}(A(a,z)) = \mathtt{f}} \quad \dfrac{1 \neq 3}{\varphi_{\sigma'}(a = z) = \mathtt{f}}}{\varphi_{\sigma'}(A(a,z) \lor a = z) = \mathtt{f}} \quad \dfrac{\dfrac{\langle 3,3\rangle \notin \varphi(A)}{\varphi_{\sigma'}(A(c,z)) = \mathtt{f}} \quad \dfrac{3 = 3}{\varphi_{\sigma'}(c = z) = \mathtt{w}}}{\varphi_{\sigma'}(A(c,z) \lor c = z) = \mathtt{w}}}{\varphi_{\sigma'}((A(a,z) \lor a = z) \land (A(c,z) \lor c = z)) = \mathtt{f}}$$

Fall 4: Sei $\varphi_{\sigma'}(z) := 4$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\langle 1,4\rangle \in \varphi(A)}{\varphi_{\sigma'}(A(a,z)) = \texttt{w}} \quad \dfrac{1 \neq 4}{\varphi_{\sigma'}(a = z) = \texttt{f}}}{\varphi_{\sigma'}(A(a,z) \vee a = z) = \texttt{w}} \quad \dfrac{\dfrac{\langle 3,4\rangle \notin \varphi(A)}{\varphi_{\sigma'}(A(c,z)) = \texttt{f}} \quad \dfrac{3 \neq 4}{\varphi_{\sigma'}(c = z) = \texttt{f}}}{\varphi_{\sigma'}(A(c,z) \vee c = z) = \texttt{f}}}{\varphi_{\sigma'}((A(a,z) \vee a = z) \wedge (A(c,z) \vee c = z)) = \texttt{f}}$$

Fall 5: Sei $\varphi_{\sigma'}(z) := 5$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\langle 1,5\rangle \notin \varphi(A)}{\varphi_{\sigma'}(A(a,z)) = \texttt{f}} \quad \dfrac{1 \neq 5}{\varphi_{\sigma'}(a = z) = \texttt{f}}}{\varphi_{\sigma'}(A(a,z) \vee a = z) = \texttt{f}} \quad \dfrac{\dfrac{\langle 3,5\rangle \in \varphi(A)}{\varphi_{\sigma'}(A(c,z)) = \texttt{w}} \quad \dfrac{3 \neq 5}{\varphi_{\sigma'}(c = z) = \texttt{f}}}{\varphi_{\sigma'}(A(c,z) \vee c = z) = \texttt{w}}}{\varphi_{\sigma'}((A(a,z) \vee a = z) \wedge (A(c,z) \vee c = z)) = \texttt{f}}$$

Wir haben also eine Interpretation $\mathfrak{I} = \{D, \varphi\}$, in der A symmetrisch ist, sodass $\varphi(E(a,b)) = \varphi(E(b,c)) = \texttt{w}$, aber $\varphi(E(a,c)) = \texttt{f}$. Das zeigt, dass E nicht transitiv ist und daher auch keine Äquivalenzrelation darstellt. □

Erinnern Sie sich daran:

$$\begin{aligned}
\varphi_\sigma(a) &= \varphi_{\sigma'}(a) = 1,\\
\varphi_\sigma(b) &= \varphi_{\sigma'}(b) = 2,\\
\varphi_\sigma(c) &= \varphi_{\sigma'}(c) = 3,\\
\varphi_\sigma(x) &= \varphi_{\sigma'}(x) = 4,\\
\varphi_\sigma(y) &= \varphi_{\sigma'}(y) = 5.
\end{aligned}$$

Klausurvorbereitung 14

14.1 Hinweise für eine 90-minütige Klausur 263
14.1.1 Effektiver Start . . . 263
14.1.2 Zeiteinteilung . . . 263
14.2 Die Probeklausur . 264
14.2.1 Lösungen 267
14.3 Zusatzübungen . . . 285

14.1 Hinweise für eine 90-minütige Klausur

14.1.1 Effektiver Start

Nutzen Sie die ersten **5 Minuten**, um alle Fragen kurz durchzulesen und einzuschätzen:

1. Welche Fragen können Sie sicher beantworten?
2. Welche Fragen sind schwieriger oder unklar?
3. Wie viel Zeit könnte jede Frage in Anspruch nehmen?

14.1.2 Zeiteinteilung

Um 3 einzuschätzen, gehen Sie wie folgt vor:

- Ziehen Sie von den 90 Minuten 5 Minuten für die Planung und zusätzlich 10–15 Minuten am Ende ein, um Ihre Antworten zu überprüfen.
- Teilen Sie die verbleibende Zeit auf die Fragen auf, die Sie beantworten könnten. Zum Beispiel: Teilen Sie dafür die verbleibenden 70–75 Minuten durch die Anzahl der Fragen, die Sie bearbeiten könnten.
- Schreiben Sie neben jede Frage die Uhrzeit, zu der Sie mit dieser Frage beginnen möchten. Sie können die Fragen in einer beliebigen Reihenfolge beantworten, je nachdem, welche Ihnen am sinnvollsten erscheint – nicht zwingend in der Reihenfolge, in der sie in der Klausur erscheinen.
- Bleiben Sie flexibel: Falls eine Frage mehr Zeit in Anspruch nimmt als geplant, passen Sie Ihren Zeitplan entsprechend an.

Viel Erfolg bei der Klausur!

14.2 Die Probeklausur

Klausurfrage 1. Definieren Sie, was ein *Aussagesatz* ist, wie auch was ein *Argument* ist. (5 Pkt.)

Klausurfrage 2. Welche der folgenden Zeichenreihen sind Aussagesätze? Welche der Aussagesätze sind einfach? Welche der Aussagesätze sind aussagenlogisch unzerlegbar? (10 Pkt.)

1. Es ist nicht möglich, dass 2 + 2 gleich 5 ist.
2. Der Eiffelturm ist höher als die Frauenkirche.
3. Logik macht Spaß, aber Logik ist auch anstrengend.
4. Wieso muss ich das beantworten?
5. Wenn alles raumzeitlich ist, dann bin auch ich raumzeitlich.
6. Es gibt Philosophen, die die Ideenlehre ablehnen.
7. Sonja ist im Wohnzimmer, oder Sonja ist in der Küche.
8. Das Fenster ist kaputt, weil er den Stein geworfen hat.
9. Es ist notwendig, dass 2 + 2 = 4 ist.
10. Da Da Da.

Klausurfrage 3. (3.1) Geben Sie die Wahrheitstafel für das einschließende und für das ausschließende 'oder' an! (3.2) Wie lässt sich das ausschließende 'oder' mittels des einschließenden 'oder' und der Negation definieren? (10 Pkt.)

Klausurfrage 4. Definieren Sie für aussagenlogische Formeln den Begriff der *logischen Folge*. (5 Pkt.)

Klausurfrage 5. Erstellen Sie die Wahrheitstafel für die folgenden beiden Formeln. Um welche Art von Formel handelt es sich jeweils (Tautologie, Kontradiktion, kontingente Formel)? (10 Pkt.)

1. $p \wedge (q \vee \neg r)$
2. $(p \wedge \neg q) \rightarrow (p \vee q)$

Klausurfrage 6. Führen Sie die Herleitungen zu folgenden deduktiv gültigen Schlüssen durch (im aussagenlogischen System des natürlichen Schließens): (10 Pkt.)

1. $s \rightarrow p, \neg s \rightarrow \neg r \vdash \neg p \rightarrow \neg r$
2. $p \vee (q \wedge r), r \rightarrow p \vdash p$

Klausurfrage 7. Repräsentieren Sie die folgenden Aussagesätze in der prädikatenlogischen Sprache: (10 Pkt.)

1. Alle Zahlen sind abstrakt, und es gibt Zahlen.
2. Zu allem gibt es etwas, das größer ist, aber nichts ist größer als alles.
3. Paul ist verheiratet mit Susanne.
4. Kein Planet ist kleiner als der Mond.
5. Wenn Pflanzen Lebewesen sind, dann sind Blumen Lebewesen.

Klausurfrage 8. Definieren Sie, worum es sich bei einer prädikatenlogischen Bewertung φ_σ handelt (relativ zu einer prädikatenlogischen Interpretation $\mathfrak{I} = \langle \mathbf{D}, \varphi \rangle$ und einer Variablenbelegung σ)! (10 Pkt.)

Hinweis: Überprüfen Sie SS 248–255, insbesondere die Definitionen 17–19.

Klausurfrage 9. Es sei folgende Interpretation $\mathfrak{I} = \langle \mathbf{D}, \varphi \rangle$ gegeben:

$$\begin{aligned}
\mathbf{D} &= \{1, 2, 3, 4\}. \\
\varphi(a) &= 1, \quad \varphi(b) = 2, \quad \varphi(c) = 3, \quad \varphi(d) = 4. \\
\varphi(G) &= \{2, 4\} = \{d \mid d \text{ ist eine gerade Zahl}\} \\
\varphi(K) &= \{\langle 1,2\rangle, \langle 1,3\rangle, \langle 1,4\rangle, \langle 2,3\rangle, \langle 2,4\rangle, \langle 3,4\rangle\} \\
&= \{\langle d_1, d_2\rangle \in \mathbf{D}^2 \mid d_1 < d_2\}.
\end{aligned}$$

Weiter seien die folgenden zwei Variablenbelegungen σ_1 und σ_2 unter $\mathfrak{I}$ gegeben:

$$\sigma_1 = 1, 2, \ldots \qquad \sigma_2 = 2, 1, \ldots$$

Geben Sie an, welche der folgenden Formeln wahr bzw. falsch sind (i) gemäß φ_{σ_1}, (ii) gemäß φ_{σ_2}! (Es ist keine weitere Begründung nötig.) (10 Pkt.)

1. $K(a, b)$
2. $\neg(K(b, c) \vee G(c))$
3. $K(x, y)$
4. $\exists x\, (K(x, d) \wedge G(x))$
5. $\forall x\, \exists y\, K(x, y)$

Klausurfrage 10. Führen Sie die Herleitungen zu folgenden deduktiv gültigen Schlüssen durch (im prädikatenlogischen System des natürlichen Schließens): (10 Pkt.)

1. $\forall x \, \neg P(x) \vdash \neg \exists x \, P(x)$
2. $\neg\neg\forall x \, (P(x) \rightarrow Q(x)), \neg \exists x \, Q(x) \vdash \neg P(a)$

Klausurbonusfrage. Wie lässt sich das Identitätsprädikat als logisches Zeichen in die Prädikatenlogik einführen (Formationsregel, semantische Regel, Herleitungsregeln)? (10 Pkt.)

Max. Punktezahl (exklusive Bonusfrage): 90 Pkt. Viel Glück!!

14.2.1 Lösungen

Klausurfrage 1. Definieren Sie, was ein *Aussagesatz* ist, wie auch was ein *Argument* ist. (5 Pkt.)

Definition 1: Aussagesatz

Ein Aussagesatz ist ein sprachlicher Ausdruck, der wahr oder falsch ist.

Definition 3: Argument

Ein Argument ist eine Folge von n (wobei $n > 0$) Aussagesätzen,

1. deren erster bis $n-1$-ter Aussagesatz Prämisse genannt werden, und
2. deren n-ter Satz durch einen Konklusionsindikator eingeleitet wird, welchem ein Aussagesatz folgt, der Konklusion genannt wird.

Alternative Definition 3a: Argument

Ein Argument ist eine Folge von Aussagesätzen $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}, A_n$ (mit $n > 0$), wobei $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$ als Prämissen bezeichnet werden und A_n durch einen Konklusionsindikator als Konklusion bezeichnet wird.

Alternative Definition 3b: Argument

Ein Argument ist eine *Folge von Aussagesätzen* (*mindestens einem*), wobei die letzte Aussage *durch einen Konklusionsindikator als Konklusion* bezeichnet wird und die vorherigen Aussagen als *Prämissen* bezeichnet werden.

Klausurfrage 2. Welche der folgenden Zeichenreihen sind Aussagesätze? Welche der Aussagesätze sind einfach? Welche der Aussagesätze sind aussagenlogisch unzerlegbar? (10 Pkt.)

1. Es ist nicht möglich, dass $2 + 2$ gleich 5 ist.

Antwort: Aussagesatz, komplex, aus. zerlegbar.

Bemerkung: Die Details in den Erklärungskästen sind für die Beantwortung der Frage nicht notwendig, helfen jedoch, die vorgeschlagene Antwort zu verstehen.

Erklärung

Aus. Repräsentation: $\neg p$

Repr. in Modallogik und Arithmetik: $\neg\Diamond(2 + 2 = 5)$

2. Der Eiffelturm ist höher als die Frauenkirche.

Antwort: Aussagesatz, einfach, aus. unzerlegbar.

Erklärung

Aus. Repräsentation: p

3. Logik macht Spaß, aber Logik ist auch anstrengend.

Antwort: Aussagesatz, komplex, aus. zerlegbar.

p := Logik macht Spaß,
q := Logik ist anstrengend.

Erklärung

Aus. Repräsentation: $p \wedge q$

4. Wieso muss ich das beantworten?

Antwort: Kein Aussagesatz. (Es ist ein Fragesatz.)

5. Wenn alles raumzeitlich ist, dann bin auch ich raumzeitlich.

Antwort: Aussagesatz, komplex, aus. zerlegbar.

$p :=$ Alles ist raumzeitlich,
$q :=$ ich bin raumzeitlich,
$a :=$ ich,
$Z(x) := x$ ist zerlegbar.

Erklärung

Aus. Repräsentation: $p \rightarrow q$

Präd. Repräsentation: $\forall x\, Z(x) \rightarrow Z(a)$

6. Es gibt Philosophen, die die Ideenlehre ablehnen.

Antwort: Aussagesatz, komplex, aus. unzerlegbar.

$i :=$ die Ideenlehre
$P(x) := x$ ist Philosoph,
$A(x, y) := x$ lehnt y ab.

Erklärung

Aus. Repräsentation: p

Präd. Repräsentation: $\exists x\, (P(x) \wedge A(x, i))$

7. Sonja ist im Wohnzimmer, oder Sonja ist in der Küche.

Antwort: Aussagesatz, komplex, aus. zerlegbar.

$p :=$ Sonja ist im Wohnzimmer,
$q :=$ Sonja ist in der Küche.

Erklärung

Aus. Repräsentation: $p \vee q$

8. Das Fenster ist kaputt, weil er den Stein geworfen hat.

Antwort: Aussagesatz, komplex, aus. unzerlegbar.

$q :=$ Das Fenster ist kaputt,
$r :=$ Er hat den Stein geworfen.

Erklärung

Aus. Repräsentation: p

Repr. als Kausalsatz: q, weil r

9. Es ist notwendig, dass $2 + 2 = 4$ ist.

Antwort: Aussagesatz, komplex, aus. unzerlegbar.

Erklärung

Aus. Repräsentation: p

Repr. in Modallogik und Arithmetik: $\Box(2 + 2 = 4)$

10. Da Da Da.

Antwort: Überhaupt kein Aussagesatz.

Erklärung

Dieser Ausdruck erscheint in dem Lied *De Do Do Do, De Da Da Da* von The Police, jedoch wird er auch dort nicht als Aussagesatz verwendet

Klausurfrage 3. (3.1) Geben Sie die Wahrheitstafel für das einschließende und für das ausschließende ‘oder’ an! (3.2) Wie lässt sich das ausschließende ‘oder’ mittels des einschließenden ‘oder’ und der Negation definieren? (10 Pkt.)

Antwort auf 3a

Nachfolgend sind die Wahrheitstabellen des einschließenden ‚or‘ ($\vee$) und des ausschließenden ‚or‘ ($\oplus$) aufgeführt:

p	q	$p \vee q$	$p \oplus q$
w	w	w	f
w	f	w	w
f	w	w	w
f	f	f	f

Antwort auf 3b

‚$p \oplus q$' lässt sich mithilfe von ‚$\vee$' und ‚$\neg$' durch die Formel ‚$\neg(\neg p \vee q) \vee \neg(\neg q \vee p)$' definiert werden.

Erklärung

Beachten Sie, dass die Wahrheitstabelle von ‚$p \oplus q$' dieselbe ist wie die Wahrheitstabelle ‚$\neg(p \leftrightarrow q)$':

p	q	$p \oplus q$	$\neg(p \leftrightarrow q)$	
w	w	f	f	w
w	f	w	w	f
f	w	w	w	f
f	f	f	f	w

Erinnern Sie sich nun an die folgenden Tautologien (siehe SS. 135–6):

(T29) $\neg(A \wedge B) \leftrightarrow \neg A \vee \neg B$ (De Morgansches Gesetz 1)

(T31) $(A \rightarrow B) \leftrightarrow \neg A \vee B$ (Definition von ‚$\rightarrow$')

(T33) $(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$ (Definition von ‚$\leftrightarrow$')

Dann ergibt sich die folgende Äquivalenzkette:

$$
\begin{aligned}
p \oplus q &\leftrightarrow \neg(p \leftrightarrow q) && \text{(Wahrheitstabelle oben)}\\
&\leftrightarrow \neg((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)) && \text{(T33)}\\
&\leftrightarrow \neg((\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p)) && \text{(T31)}\\
&\leftrightarrow \neg(\neg p \vee q) \vee \neg(\neg q \vee p) && \text{(T29)}
\end{aligned}
$$

Wir können diese Äquivalenzen mit der folgenden Wahrheitstabelle bestätigen:

p	q	$p \oplus q$	$\neg(\neg\, p \vee q) \vee \neg\,(\neg\, q \vee p)$						
w	w	f	f	f	w	f	f	f	w
w	f	w	w	f	f	w	f	w	w
f	w	w	f	w	w	w	w	f	f
f	f	f	f	w	w	f	f	w	w
			③	①	②	❹	③	①	②

Bemerkung

Obwohl die Formel ‚$(p \vee q) \wedge \neg(p \wedge q)$' logisch äquivalent zu ‚$p \oplus q$' ist, ist sie keine passende Antwort auf Aufgabe 3b. Der Grund dafür ist, dass die Formel zwei Vorkommen von ‚$\wedge$' enthält, während in der Aufgabe gefordert wurde, ‚$p \oplus q$' ausschließlich mithilfe von ‚$\neg$' und ‚$\vee$' zu definieren.

Klausurfrage 4. Definieren Sie für aussagenlogische Formeln den Begriff der *logischen Folge*. (5 Pkt.)

Definition 12: aussagenlogische Folge

Für alle Formeln $A_1, \ldots, A_n, B \in \mathscr{F}$, B folgt aussagenlogisch aus $A_1, \ldots, A_n$ gdw für alle Interpretationen $\mathfrak{I}$:

$$\text{Wenn } \mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(A_1) = \mathtt{w}, \ldots, \mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(A_n) = \mathtt{w}, \text{ dann } \mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(B) = \mathtt{w}.$$

(Mit anderem Worten: Wenn die Bewertungen der Formeln $A_1, \ldots, A_n$ in $\mathfrak{I}$ wahr sind, dann muss auch die Bewertung von B in $\mathfrak{I}$ wahr sein.)

Alternative Definition im Skript: aussagenlogische Folge

Für alle Formeln $A_1, \ldots, A_n, B \in \mathscr{F}$, B folgt aussagenlogisch aus $A_1, \ldots, A_n$ gdw es keine Interpretation $\mathfrak{I}$ gibt, sodass:

$$\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(A_1) = \mathtt{w}, \ldots, \mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(A_n) = \mathtt{w} \text{ und } \mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(B) = \mathtt{f}.$$

(Mit anderem Worten: Es gibt keine Interpretation, bei der die Bewertungen der Formeln $A_1, \ldots, A_n$ in $\mathfrak{I}$ wahr sind, die Bewertung von B in $\mathfrak{I}$ jedoch falsch ist.)

Klausurfrage 5. Erstellen Sie die Wahrheitstafel für die folgenden beiden Formeln. Um welche Art von Formel handelt es sich jeweils (Tautologie, Kontradiktion, kontingente Formel)? (10 Pkt.)

1. $p \land (q \lor \neg r)$

Antwort

p	q	r	p	$\land$	$(q$	$\lor$	$\neg$	$r)$
w	w	w		w		w	f	
w	w	f		w		w	w	
w	f	w		f		f	f	
w	f	f		w		w	w	
f	w	w		f		w	f	
f	w	f		f		w	w	
f	f	w		f		f	f	
f	f	f		f		w	w	
				❸		②	①	

Diese Wahrheitstabelle zeigt, dass die Formel 1 kontingent ist.

2. $(p \wedge \neg q) \rightarrow (p \vee q)$

Antwort

p	q	$(p \wedge$	$\neg q)$	$\rightarrow$	$(p \vee q)$
w	w	f	f	w	w
w	f	w	w	w	w
f	w	f	f	w	w
f	f	f	w	w	f
		②	①	❸	②

Diese Wahrheitstabelle zeigt, dass die Formel 2 tautologisch ist.

Bemerkung

Die Wahrheitstabelle allein ist keine hinreichende Antwort, da explizit gefragt wird, ob die Formel tautologisch, kontingent oder kontradiktorisch ist.

Eine richtige Antwort auf diese Frage enthält eine der folgenden Behauptungen vor oder nach der Wahrheitstabelle:

- Diese Formel ist tautologisch (bzw. kontingent bzw. kontradiktorisch).
- Diese Formel ist eine Tautologie (bzw. Kontingenz bzw. Kontradiktion).
- Diese Wahrheitstabelle zeigt, dass diese Formel tautologisch (bzw. kontingent bzw. kontradiktorisch) ist. (bevorzugte Formulierung)

Eine Antwort, die lediglich ‚tautologisch' (bzw. ‚kontingent' bzw. ‚kontradiktorisch') erwähnt, könnte mit weniger Punkten bewertet werden, da sie nicht präzisiert, welche Formel diese Eigenschaft besitzt.

Klausurfrage 6. Führen Sie die Herleitungen zu folgenden deduktiv gültigen Schlüssen durch (im aussagenlogischen System des natürlichen Schließens): (10 Pkt.)

1. $s \rightarrow p, \neg s \rightarrow \neg r \vdash \neg p \rightarrow \neg r$

Antwort

1. $s \rightarrow p$ (P1)
2. $\neg s \rightarrow \neg r$ (P2)
3. $||\ \neg p$ (KB-Annahme)
4. $||\ \neg s$ 1., 3. (MT)
5. $||\ \neg r$ 2., 4. (MP)
6. $\neg p \rightarrow \neg r$ 3.–5. (KB)

Hinweis

Falls die Konklusion ein Implikationssatz ist, versuchen Sie einen konditionalen Beweis.

2. $p \vee (q \wedge r), r \rightarrow p \vdash p$

Antwort

1. $p \vee (q \wedge r)$ (P1)
2. $r \rightarrow p$ (P2)
3. $||\ \neg p$ (IB-Annahme)
4. $||\ q \wedge r$ 1., 3. (DS1)
5. $||\ r$ 4. (SIMP2)
6. $||\ p$ 5., 2. (MP)
7. $||\ p \wedge \neg p$ 3., 6. (KON)
8. p 3.–7. (IB)

Hinweis

In dieser Fall ist vielleicht offensichtlich, dass eine indirekte Beweise zu tun ist. Aber wenn Sie nicht sicher sind, welche Typ von Beweise zu führen, versuchen Sie eine Indirekte Beweis.[1]

1: Nach den Intuitionisten sind indirekte Beweise nicht besonders elegant. Vielleicht, aber in der Klausur vergessen Sie die Intuitionisten und ihre Spitzfindigkeiten über indirekte Beweise und doppelte Negation!

Klausurfrage 7. Repräsentieren Sie die folgenden Aussagesätze in der prädikatenlogischen Sprache: (10 Pkt.)

Bemerkung: Die durch ‚wobei' eingeführten Angaben zur Bedeutung der Individuenkonstanten und der Prädikate müssen (im Prinzip) Teil der Antwort sein. Ansonsten ist nicht klar, wie die Repräsentationen zu verstehen sind.

1. Alle Zahlen sind abstrakt, und es gibt Zahlen.

Antwort: $\forall x\,(Z(x) \rightarrow A(x)) \wedge \exists x\, Z(x)$, wobei:

$$A(x) := x \text{ ist abstrakt,}$$
$$Z(x) := x \text{ ist eine Zahl.}$$

2. Zu allem gibt es etwas, das größer ist, aber nichts ist größer als alles.

Antwort: $\forall x\, \exists y\, G(y, x) \wedge \neg\exists x\, \forall y\, G(x, y)$, wobei:

$$G(x, y) := x \text{ ist größer als } y.$$

3. Paul ist verheiratet mit Susanne.

Antwort: $V(p, s)$, wobei:

$$p := \text{Paul,}$$
$$s := \text{Susanne,}$$
$$V(x, y) := x \text{ ist verheiratet mit } y.$$

4. Kein Planet ist kleiner als der Mond.

Antwort: $\neg\exists x\,(P(x) \wedge K(x, m))$, wobei:

$$m := \text{Der Mond,}$$
$$P(x) := x \text{ ist ein Planet,}$$
$$K(x, y) := x \text{ ist kleiner als } y.$$

5. Wenn Pflanzen Lebewesen sind, dann sind Blumen Lebewesen.

Antwort: $\forall x\,(P(x) \rightarrow L(x)) \rightarrow \forall x\,(B(x) \rightarrow L(x))$, wobei:

$$B(x) := x \text{ ist eine Blume,}$$
$$L(x) := x \text{ ist ein Lebewesen,}$$
$$P(x) := x \text{ ist eine Pflanze.}$$

Klausurfrage 8. Definieren Sie, worum es sich bei einer prädikatenlogischen Bewertung φ_σ handelt (relativ zu einer prädikatenlogischen Interpretation $\mathfrak{I} = \langle \mathbf{D}, \varphi \rangle$ und einer Variablenbelegung σ)! (10 Pkt.)

Definition: Prädikatenlogische Bewertung

Eine prädikatenlogische Bewertung φ_σ relativ zu einer Interpretation $\mathfrak{I} = \langle \mathbf{D}, \varphi \rangle$ und einer Variablenbelegung σ ist eine Funktion, die:

1. Terme auswertet: Sie ordnet jedem singulären Term t ein Element $d \in \mathbf{D}$ zu, basierend auf σ und der Interpretationsfunktion φ.

2. Formeln Wahrheitswerte zuweist: Sie weist jeder Formel A einen Wahrheitswert $\mathtt{w}$ (wahr) oder $\mathtt{f}$ (falsch) zu, gemäß den Regeln:

1. Atomare Formeln:

   $\varphi_\sigma(P^n(t_1, \ldots, t_n)) = \mathtt{w}$ gdw $\langle \varphi_\sigma(t_1), \ldots, \varphi_\sigma(t_n) \rangle \in \varphi(P^n)$.

2. Negation:

   $\varphi_\sigma(\neg A) = \mathtt{w}$ gdw $\varphi_\sigma(A) = \mathtt{f}$.

3. Konjunktion:

   $\varphi_\sigma(A \land B) = \mathtt{w}$ gdw $\varphi_\sigma(A) = \mathtt{w}$ und $\varphi_\sigma(B) = \mathtt{w}$.

4. Disjunktion:

   $\varphi_\sigma(A \lor B) = \mathtt{w}$ gdw $\varphi_\sigma(A) = \mathtt{w}$ oder $\varphi_\sigma(B) = \mathtt{w}$.

5. Implikation:

   $\varphi_\sigma(A \to B) = \mathtt{w}$ gdw $\varphi_\sigma(A) = \mathtt{f}$ oder $\varphi_\sigma(B) = \mathtt{w}$.

6. Äquivalenz:

   $\varphi_\sigma(A \leftrightarrow B) = \mathtt{w}$ gdw $\varphi_\sigma(A) = \varphi_\sigma(B)$.[2]

7. Allquantor:

   $\varphi_\sigma(\forall v\, A) = \mathtt{w}$ gdw für alle v-Varianten σ' von σ gilt $\varphi_{\sigma'}(A) = \mathtt{w}$.

8. Existenzquantor:

   $\varphi_\sigma(\exists v\, A) = \mathtt{w}$ gdw es eine v-Variante σ' von σ gibt, sodass $\varphi_{\sigma'}(A) = \mathtt{w}$.

Eine v-Variante σ' von σ ist eine Belegung, die für alle Variablen $v' \neq v$: $\varphi_{\sigma'}(v') = \varphi_\sigma(v')$.

2: Wenn Sie die genauen Definitionen von 2–6 vergessen haben oder nicht genug Zeit haben, siehe kürzere Definition unten.

Kürzere Definition: Prädikatenlogische Bewertung

Eine prädikatenlogische Bewertung φ_σ relativ zu einer Interpretation $\mathfrak{I} = \langle \mathbf{D}, \varphi \rangle$ und einer Variablenbelegung σ ist eine Funktion, die:

1. Terme auswertet Sie ordnet jedem singulären Term t ein Element $d \in \mathbf{D}$ zu, basierend auf σ und der Interpretationsfunktion φ.

2. Formeln Wahrheitswerte zuweist: Sie weist jeder Formel A einen Wahrheitswert `w` (wahr) oder `f` (falsch) zu, gemäß den Regeln:

1. Atomare Formeln:

   $\varphi_\sigma(P^n(t_1, \ldots, t_n)) = \mathtt{w}$ gdw $\langle \varphi_\sigma(t_1), \ldots, \varphi_\sigma(t_n) \rangle \in \varphi(P^n)$.

2. Negation, Konjunktion, Disjunktion, Implikation und Äquivalenz werden auf ähnliche Weise wie in der Aussagenlogik bewertet.

3. Allquantor:

   $\varphi_\sigma(\forall v\, A) = \mathtt{w}$ gdw für alle v-Varianten σ' von σ gilt $\varphi_{\sigma'}(A) = \mathtt{w}$.

4. Existenzquantor:

   $\varphi_\sigma(\exists v\, A) = \mathtt{w}$ gdw es eine v-Variante σ' von σ gibt, sodass $\varphi_{\sigma'}(A) = \mathtt{w}$.

Eine v-Variante σ' von σ ist eine Belegung, die σ für alle Variablen mit der möglichen Ausnahme von v entspricht.

Klausurfrage 9. Es sei folgende Interpretation $\mathfrak{I} = \langle \mathbf{D}, \varphi \rangle$ gegeben:

$$\begin{aligned}
\mathbf{D} &= \{1, 2, 3, 4\}. \\
\varphi(a) = 1, \quad \varphi(b) &= 2, \quad \varphi(c) = 3, \quad \varphi(d) = 4. \\
\varphi(G) &= \{2, 4\} = \{d \mid d \text{ ist eine gerade Zahl}\} \\
\varphi(K) &= \{\langle 1, 2\rangle, \langle 1, 3\rangle, \langle 1, 4\rangle, \langle 2, 3\rangle, \langle 2, 4\rangle, \langle 3, 4\rangle\} \\
&= \{\langle d_1, d_2\rangle \in \mathbf{D}^2 \mid d_1 < d_2\}.
\end{aligned}$$

Weiter seien die folgenden zwei Variablenbelegungen σ_1 und σ_2 unter $\mathfrak{I}$ gegeben:

$$\sigma_1 = 1, 2, \ldots \qquad \sigma_2 = 2, 1, \ldots$$

Geben Sie an, welche der folgenden Formeln wahr bzw. falsch sind (i) gemäß φ_{σ_1}, (ii) gemäß φ_{σ_2}! (Es ist keine weitere Begründung nötig.) (10 Pkt.)

Vorbemerkung

$$\varphi_{\sigma_1}(x) = 1, \quad \varphi_{\sigma_1}(y) = 2, \quad \varphi_{\sigma_2}(x) = 2, \quad \varphi_{\sigma_2}(y) = 1.$$

1. $K(a, b)$

Antwort: $\varphi_{\sigma_i}(K(a, b)) = \mathtt{w}$ (für $i \in \{1, 2\}$).

Informelle Erklärung

Unter dieser Interpretation ist die Formel ‚$K(a, b)$' in Sinne zu verstehen, dass 1 (d.h. $\varphi(a)$) kleiner als 2 (d.h. $\varphi(b)$) ist. Da dies der Fall ist, gilt $\varphi_\sigma(K(a, b)) = \mathtt{w}$ unabhängig von der σ.

Technische Erklärung

$\varphi(a) = 1$ ist kleiner als $\varphi(b) = 2$, d.h., $\langle 1, 2\rangle \in \varphi(K)$.

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{1 < 2}{\langle 1, 2\rangle \in \varphi(K)}}{\langle \varphi(a), \varphi(b)\rangle \in \varphi(K)}}{\varphi(K(a, b)) = \mathtt{w}}$$

Da die zu bewertende Formel $K(a, b)$ geschlossen ist, dann, für alle σ_i, gilt: $\varphi_{\sigma_i}(K(a, b)) = \varphi(K(a, b)) = \mathtt{w}$.

2. $\neg(K(b,c) \vee G(c))$

Antwort: $\varphi_{\sigma_i}(\neg(K(b,c) \vee G(c))) = \texttt{f}$ (für $i \in \{1,2\}$).

Informelle Erklärung

Unter dieser Interpretation ist ‚$\neg(K(b,c) \vee G(c))$' in Sinne zu verstehen, dass es nicht der Fall ist, dass: $2 < 3$ (d.h. $\varphi(b) < \varphi(c)$) oder 3 (d. h. $\varphi(c)$) gerade ist. Da jedoch $2 < 3$ gilt, ist es der Fall, dass $2 < 3$ oder 3 gerade ist. Folglich ist $\varphi_\sigma(K(b,c) \vee G(c)) = \texttt{w}$ unabhängig von der σ, und damit ist $\varphi_\sigma(\neg(K(b,c) \vee G(c))) = \texttt{f}$.

In wenigen Worten: Da $\varphi(b) = 2 < 3 = \varphi(c)$, gilt $\varphi_{\sigma_i}(K(b,c)) = \texttt{w}$ und damit $\varphi_{\sigma_i}(K(b,c) \vee G(c)) = \texttt{w}$ und $\varphi_\sigma(\neg(K(b,c) \vee G(c))) = \texttt{f}$.

Technische Erklärung

$\varphi(b) = 2$ ist kleiner als $\varphi(c) = 3$. Folglich:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{2 < 3}{\langle 2,3\rangle \in \varphi(K)}}{\langle \varphi(b), \varphi(c)\rangle \in \varphi(K)}}{\varphi(K(b,c)) = \texttt{w}} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\text{3 ist nicht gerade}}{3 \notin \varphi(G)}}{\varphi(c) \notin \varphi(G)}}{\varphi(G(c)) = \texttt{f}}}{\varphi(K(b,c) \vee G(c)) = \texttt{w}}}{\varphi(\neg(K(b,c) \vee G(c))) = \texttt{f}}$$

Da die zu bewertende Formel $K(b,c) \vee G(c)$ geschlossen ist, dann, für alle σ_i, gilt: $\varphi_{\sigma_i}(K(b,c) \vee G(c) = \varphi(K(b,c) \vee G(c)) = \texttt{f}$.

3. $K(x, y)$

Antwort: $\varphi_{\sigma_1}(K(x, y)) = \texttt{w}$, $\varphi_{\sigma_2}(K(x, y)) = \texttt{f}$.

Informelle Erklärung

Fall σ_1: Unter dieser Interpretation und bezüglich σ_1 ist ‚$K(x, y)$' in Sinne zu verstehen, dass $1 < 2$ (d.h. $\varphi_{\sigma_1}(x) < \varphi_{\sigma_1}(y)$). Da dies der Fall ist, ist $\varphi_{\sigma_1}(K(x, y)) = \texttt{w}$.

Fall σ_2: Unter dieser Interpretation und bezüglich σ_2 ist ‚$K(x, y)$' in Sinne zu verstehen, dass $2 < 1$ (d.h. $\varphi_{\sigma_2}(x) < \varphi_{\sigma_2}(y)$). Da dies nicht der Fall ist, ist $\varphi_{\sigma_2}(K(x, y)) = \texttt{f}$.

Technische Erklärung

$\varphi_{\sigma_1}(x) = 1$ ist kleiner als $\varphi_{\sigma_1}(y) = 2$. Folglich:

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{1 < 2}{\langle 1, 2\rangle \in \varphi(K)}}{\langle \varphi_{\sigma_1}(x), \varphi_{\sigma_1}(y)\rangle \in \varphi(K)}}{\varphi_{\sigma_1}(K(x, y)) = \texttt{w}}$$

$\varphi_{\sigma_2}(x) = 2$ ist nicht kleiner als $\varphi_{\sigma_2}(y) = 1$. Folglich:

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{2 \not< 1}{\langle 2, 1\rangle \notin \varphi(K)}}{\langle \varphi_{\sigma_2}(x), \varphi_{\sigma_2}(y)\rangle \notin \varphi(K)}}{\varphi_{\sigma_2}(K(x, y)) = \texttt{f}}$$

4. $\exists x\,(K(x,d) \wedge G(x))$

Antwort: $\varphi_{\sigma_i}(\exists x\, K(x,d) \wedge G(x)) = \mathtt{w}$ (für $i \in \{1,2\}$).

Informelle Erklärung

Unter dieser Interpretation ist die Formel ‚$\exists x\,(K(x,d) \wedge G(x))$‘ in Sinne zu verstehen, dass es eine Zahl $n \in \mathbf{D} = \{1,2,3,4\}$ gibt, sodass $n < 4 = \varphi(d)$ und n gerade ist. Dies ist genau der Fall, da $2 < 4$ und 2 gerade ist. Folglich ist $\varphi_\sigma(\exists x\,(K(x,d) \wedge G(x))) = \mathtt{w}$ unabhängig von der Variablenbelegung σ.

In wenigen Worten: Es gilt $\varphi_{\sigma_i'}(K(x,d) \wedge G(x)) = \mathtt{w}$, denn $2 < 4$ und 2 ist gerade.

Technische Erklärung

Sei σ_i' eine x-Variante von σ_i mit $\varphi_{\sigma_i'}(x) = 2$. Folglich:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{2 < 4}{\langle 2,4\rangle \in \varphi(K)}}{\langle \varphi_{\sigma_i'}(x), \varphi(d)\rangle \in \varphi(K)}}{\langle \varphi_{\sigma_i'}(x), \varphi_{\sigma_i'}(d)\rangle \in \varphi(K)}}{\varphi_{\sigma_i'}(K(x,d)) = \mathtt{w}} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{2 \text{ ist gerade}}{2 \in \varphi(G)}}{\varphi_{\sigma_i'}(x) \in \varphi(G)}}{\varphi_{\sigma_i'}(G(x)) = \mathtt{w}}}{\varphi_{\sigma_i'}(K(x,d) \wedge G(x)) = \mathtt{w}}}{\varphi_{\sigma_i}(\exists x\,(K(x,d) \wedge G(x))) = \mathtt{w}}$$

5. $\forall x\,\exists y\,K(x,y)$

Antwort: $\varphi_{\sigma_i}(\forall x\,\exists y\,K(x,y)) = \mathtt{f}$ (für $i \in \{1,2\}$).

Informelle Erklärung

Unter dieser Interpretation ist die Formel ‚$\forall x\,\exists y\,K(x,y)$‘ in Sinne zu verstehen, dass für alle Zahlen $n \in \mathbf{D} = \{1,2,3,4\}$ eine Zahl $m \in \mathbf{D} = \{1,2,3,4\}$ existiert, sodass $n < m$. Es gibt jedoch ein Gegenbeispiel hierzu: Für $n = 4$ gibt es keine Zahl $m \in \mathbf{D} = \{1,2,3,4\}$ mit $n < m$. Folglich ist $\varphi_\sigma(\forall x\,\exists y\,K(x,y)) = \mathtt{f}$ unabhängig von der Variablenbelegung σ.

In wenigen Worten: Die Bewertung kann nicht wahr sein, weil es kein $m \in \mathbf{D}$ gibt, so dass $4 < m$.

Technische Erklärung

Sei σ_i' eine x-Variante von σ_i mit $\sigma_i'(x) = 4$. Wir prüfen jede mögliche y-Variante σ_i'' von σ_i'.

Fall $\sigma_i''(y) = 1$:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{4 \not< 1}{\langle 4, 1\rangle \notin \varphi(K)}}{\langle \varphi_{\sigma_i''}(x), \varphi_{\sigma_i''}(y)\rangle \notin \varphi(K)}}{\varphi_{\sigma_i''}(K(x,y)) = \mathtt{f}}$$

Fall $\sigma_i''(y) = 2$:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{4 \not< 2}{\langle 4, 2\rangle \notin \varphi(K)}}{\langle \varphi_{\sigma_i''}(x), \varphi_{\sigma_i''}(y)\rangle \notin \varphi(K)}}{\varphi_{\sigma_i''}(K(x,y)) = \mathtt{f}}$$

Fall $\sigma_i''(y) = 3$:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{4 \not< 3}{\langle 4, 3\rangle \notin \varphi(K)}}{\langle \varphi_{\sigma_i''}(x), \varphi_{\sigma_i''}(y)\rangle \notin \varphi(K)}}{\varphi_{\sigma_i''}(K(x,y)) = \mathtt{f}}$$

Fall $\sigma_i''(y) = 4$:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{4 \not< 4}{\langle 4, 4\rangle \notin \varphi(K)}}{\langle \varphi_{\sigma_i''}(x), \varphi_{\sigma_i''}(y)\rangle \notin \varphi(K)}}{\varphi_{\sigma_i''}(K(x,y)) = \mathtt{f}}$$

Also für jede y-Variante σ_i'' von σ_i' ist $\varphi_{\sigma_i''}(K(x,y)) = \mathtt{f}$.

Daher folgt $\varphi_{\sigma_i'}(\exists y\, K(x,y)) = \mathtt{f}$.

Daraus wiederum ergibt sich $\varphi_{\sigma_i}(\forall x\, \exists y\, K(x,y)) = \mathtt{f}$.

Klausurfrage 10. Führen Sie die Herleitungen zu folgenden deduktiv gültigen Schlüssen durch: (10 Pkt.)

1. $\forall x\, \neg P(x) \vdash \neg\exists x\, P(x)$

Antwort

1.	$\forall x\, \neg P(x)$	(P1)
2.	$\|\ \neg\neg\exists x\, P(x)$	(IB-Annahme)
3.	$\|\ \exists x\, P(x)$	2. (DN2)
4.	$\|\ \|\ P(y)$	(EB-Annahme)
5.	$\|\ \|\ \neg P(y)$	1. (UB)
6.	$\|\ \|\ Q(a) \wedge \neg Q(a)$	4., 5. (ECQ)
7.	$\|\ Q(a) \wedge \neg Q(a)$	4.–6. (EB)
8.	$\neg\exists x\, P(x)$	2.–7. (IB)

Erklärung

Da wir zwei sich gegenseitig widersprechende Formeln A und $\neg A$ – mit $A := P(y)$ – hergeleitet haben, dürfen wir nach der Regel ECQ jede beliebige Formel herleiten. In diesem Fall wählen wir eine widersprüchliche Formel $A \wedge \neg A$ – mit $A := Q(a)$ –, die wir aus dem EB-Teil mit EB herausnehmen wollen, um unseren IB-Teil zu vervollständigen.

Inkorrekte Antwort.

Es wäre aber inkorrekt gewesen, mit KON die $P(y) \wedge \neg P(y)$ herzuleiten, um sie dann aus dem EB-Teil mit EB herauszunehmen. Dies würde die Variablenbedingung VB′ nicht erfüllen (siehe SS. 289, 293, 295). Das Folgende ist also gar keine Herleitung:

1.	$\forall x\, \neg P(x)$	(P1)
2.	$\|\ \neg\neg\exists x\, P(x)$	(IB-Annahme)
3.	$\|\ \exists x\, P(x)$	2. (DN2)
4.	$\|\ \|\ P(y)$	(EB-Annahme)
5.	$\|\ \|\ \neg P(y)$	1. (UB)
6.	$\|\ \|\ P(y) \wedge \neg P(y)$	4., 5. (KON)
7.	$\|\ P(y) \wedge \neg P(y)$	4.–6. (EB)[3]
8.	$\neg\exists x\, P(x)$	2.–7. (IB)

3: Falscher Schritt: y vorkommt frei.

Vergiss auch nicht, die Variablenbedingung VB für EU auf Seite 281 zu überprüfen,

2. $\neg\neg\forall x\,(P(x) \to Q(x)), \neg\exists x\, Q(x) \vdash \neg P(a)$

Antwort

1.	$\neg\neg\forall x\,(P(x) \to Q(x))$	(P1)
2.	$\neg\exists x\, Q(x)$	(P2)
3.	$\forall x\,(P(x) \to Q(x))$	1. (DN2)
4.	$\|\|$ $\neg\neg P(a)$	(IB-Annahme)
5.	$\|\|$ $P(a)$	4. (DN2)
6.	$\|\|$ $P(a) \to Q(a)$	3. (UB)
7.	$\|\|$ $Q(a)$	5., 6. (MP)
8.	$\|\|$ $\exists x\, Q(x)$	7. (EE)
9.	$\|\|$ $\exists x\, Q(x) \wedge \neg\exists x\, Q(x)$	2., 8. (KON)
10.	$\neg P(a)$	4.–9. (IB)

Erklärung

In diesen beiden Herleitungen können wir sehen, dass indirekte Beweise in einer Klausur sehr nützlich sein können!

Klausurbonusfrage (optional). Wie lässt sich das Identitätsprädikat als logisches Zeichen in die Prädikatenlogik einführen (Formationsregel, semantische Regel, Herleitungsregeln)? (10 Pkt.)

Antwort

Das Identitätsprädikat wird eingeführt durch:

Formationsregel: Wenn t_1, t_2 singuläre Terme sind, dann ist $t_1 = t_2$ eine Formel.

Semantische Regel: $\varphi_\sigma(t_1 = t_2) = \mathtt{w}$ gdw $\varphi_\sigma(t_1) = \varphi_\sigma(t_2)$.

Herleitungsregeln:

$\vdash \forall v\; v = v$ (Reflexivität)

$\vdash \forall v_1\, \forall v_2\, (v_1 = v_2 \wedge A[v_1/v_3] \to A[v_2/v_3])$ (Substitution)

14.3 Zusatzübungen

Zusatzübung 14.1 (Alternative zu 3). (14.1.1) Geben Sie die Wahrheitstafel für das einschließende und für das ausschließende 'oder' an! (14.1.2) Wie lässt sich das ausschließende 'oder' mittels der Konjunktion/Implikation und der Negation definieren?

Zusatzübung 14.2 (Alternative zu 3). (14.2.1) Erstellen Sie die Wahrheitstafel für den Ausdruck: ‚p, es sei denn, q'. (14.2.2) Wie lässt sich diese Operation mittels der Konjunktion/Disjunktion/Implikation und der Negation definieren?

Versuchen Sie, die Wahrheitstabelle für diesen und andere umgangssprachliche Ausdrücke zu erstellen, die eine aussagenlogische Bedeutung haben könnten.

Zusatzübung 14.3 (alternative Bonusfrage). Definieren Sie, was eine Äquivalenzrelation ist, und erläutern Sie ihre Eigenschaften. Erklären Sie, warum die Identitätsrelation eine Äquivalenzrelation darstellt. (Oder: Beweisen Sie durch eine Herleitung die Gültigkeit von mindestens zwei der Eigenschaften von Äquivalenzrelationen für die Identitätsrelation.)

Zusatzübung 14.4 (alternative Bonusfrage). Definieren Sie, was Kennzeichnungen (*definite descriptions*) sind, und geben Sie an, ob die folgenden Ausdrücke Kennzeichnungen sind:

1. die Mutter von Marie Curie
2. die Bundeskanzlerin von Deutschland im Jahr 2023
3. der Hauptsänger von Queen
4. der Hauptsänger von The Beatles
5. die Hauptstadt von Frankreich
6. der derzeitige König von Deutschland
7. der erste Mensch auf dem Mond
8. die jüngere Person im Raum
9. der Autor der logischen Abhandlung *Principia Mathematica*
10. die Menge der Autoren der logischen Abhandlung *Principia Mathematica*

Hinweis: Siehe S. 328 des Skripts.