Die prädikatenlogische Sprache 9

9.1 Übungen

Übung 9.1.1. Beschreiben Sie das Alphabet der prädikatenlogischen Sprache!

Übung 9.1.2. Was ist ein singulärer Term?

Übung 9.1.3. Was ist eine prädikatenlogische Formel?

Übung 9.1.4. Was heißt es, daß eine Individuenvariable in einer Formel frei vorkommt, und was heißt es, daß eine Individuenvariable in einer Formel gebunden vorkommt?

Übung 9.1.5. Was ist die Reichweite oder der Bereich eines Vorkommnisses eines Quantorausdrucks?

Übung 9.1.6. Welche Vorkommnisse von Individuenvariablen in den folgenden Formeln sind frei, welche Vorkommnisse sind gebunden?

Übung 9.2.1. Was heißt es, daß eine Formel offen ist, und was heißt es, daß eine Formel geschlossen ist?

Übung 9.2.2. Welche der folgenden Zeichenreihen sind prädikatenlogische Formeln, welche der Formeln sind offen und welche sind geschlossen?

Übung 9.3. Die folgenden Formeln sind etwas *ungeschickte* Formulierungen: ihre syntaktische Form suggeriert bestimmte inhaltliche Zusammenhänge, die, wenn man die Formeln genau unter die Lupe nimmt, gar nicht bestehen.

Z.B. sind $M(x)$ und $\exists x\, V(x,x)$ in der ersten Formel durch einen Implikationspfeil verbunden, obwohl sie gar nicht inhaltlich zusammenhängen (der Allquantor bindet zwar x in $M(x)$, aber nicht in $\exists x\, V(x,x)$).

Versuchen Sie den intuitiven Gehalt der folgenden Formeln syntaktisch besser, d.h. transparenter, auszudrücken, ohne dabei gleichzeitig den Inhalt der Formeln zu verändern!

1. $\forall x\,(M(x) \rightarrow \exists x\, V(x,x))$
2. $\forall x\, P(a)$
3. $\exists x\,(Q(x) \wedge \forall x\, R(x,a))$
4. $\forall y\, \forall x\,(\forall y\, P(x) \rightarrow \forall x\, P(y))$

Übung 9.4. (a) Führen Sie die folgenden Substitutionen durch und (b) stellen Sie fest, bei welchen dieser Substitutionen der singuläre Term t für eine nämliche Variable in einer Formel eingesetzt wird, sodass t frei für diese Variable in dieser Formel ist:

1. $A[x_1] : \exists x_1\,(R(x_1,a_3) \wedge P(x_1))$, $t : x_2$
2. $A[x_1] : \exists x_1\,(R(x_1,a_3) \wedge P(x_1))$, $t : a_1$
3. $A[x_1] : \exists x_1\,(R(x_1,a_3) \wedge P(x_1))$, $t : x_1$
4. $A[x_1] : \exists x_1\, R(x_1,a_3) \wedge P(x_1)$, $t : x_2$
5. $A[x_1] : \exists x_1\, R(x_1,a_3) \wedge P(x_1)$, $t : a_1$
6. $A[x_1] : \exists x_1\, R(x_1,a_3) \wedge P(x_1)$, $t : x_1$
7. $A[x_1] : \exists x_1\, \exists x_4\,(R(x_4,x_2) \vee P(x_1))$, $t : x_2$
8. $A[x_2] : \exists x_1\, \exists x_4\,(R(x_4,x_2) \vee P(x_1))$, $t : x_1$
9. $A[x_2] : \exists x_1\, \exists x_4\,(R(x_4,x_2) \vee P(x_1))$, $t : x_4$
10. $A[x_2] : \exists x_1\, \exists x_4\,(R(x_4,x_2) \vee P(x_1))$, $t : x_3$

9.1.1 Lösungen

Lösung zu Übung 9.1.1. Beschreiben Sie das Alphabet der prädikatenlogischen Sprache!

> **Hinweis:** Siehe Anfang von Abschnitt 9.1.

Lösung zu Übung 9.1.2. Was ist ein singulärer Term?

> **Hinweis:** Siehe S. 224 und Übung 9.1.6.

Lösung zu Übung 9.1.3. Was ist eine prädikatenlogische Formel?

> **Hinweis:** Siehe Def. 16.

Lösung zu Übung 9.1.4. Was heißt es, daß eine Individuenvariable in einer Formel frei vorkommt, und was heißt es, daß eine Individuenvariable in einer Formel gebunden vorkommt?

> **Hinweis:** Siehe S. 231.

Lösung zu Übung 9.1.5. Was ist die Reichweite oder der Bereich eines Vorkommnisses eines Quantorausdrucks?

> **Antwort:** Die Definition im Skript lautet:
>
> Die Reichweite (bzw. der Bereich oder Skopus) eines Vorkommnisses eines Quantorausdrucks $\exists v$ oder $\forall v$ in einer prädikatenlogischen Formel A ist dasjenige Vorkommnis einer Teilformel von A, das auf das Quantorausdruckvorkommnis folgt. (S. 232.)

$$\forall x\, \overbrace{(P(x) \wedge Q(y))}^{\text{Reichweite}} \wedge \underbrace{S(x,b)}_{\text{keine Reichweite}} \tag{9.1}$$

$$\forall x\, \exists y\, \overbrace{\underbrace{(P(x,y) \rightarrow Q(y))}}\tag{9.2}$$

Lösung zu Übung 9.1.6. Welche Vorkommnisse von Individuenvariablen in den folgenden Formeln sind frei, welche Vorkommnisse sind gebunden?

Antwort: Wir färben die freien Vorkommnisse einer Variablen rot ein. Wir färben die gebundenen Vorkommnisse einer Variablen zusammen mit ihrem verbindenden Quantor in anderen Farben ein.

1. $P(a_2)$

   Erklärung: Keine Individuenvariablen in dieser Formel.

2. $\forall x_1 \, (R(x_1, a_1) \longrightarrow P(x_1))$

   Erklärung: Beide Vorkommnisse von ‚x_1' sind gebunden.

3. $\forall x_1 \, (R(x_1, x_3) \longrightarrow P(x_1))$
4. $\exists x_3 \, (P(x_1) \land \forall x_2 \, R(x_3, x_2))$
5. $\forall x_5 \, (P(x_5) \longrightarrow \exists x_2 \, (R(x_2, x_5) \land \forall x_1 \, S(x_2, x_1)))$
6. $\exists x_1 \, (P(x_1) \land R(a_7, x_1)) \land S(a_8, x_1)$

   Erklärung: Die erste und zweite Vorkommnisse von ‚x_1' sind durch das einzige Vorkommnis von ‚$\exists x_1$' gebunden. Das dritte Vorkommnis hingegen ist frei – es liegt nicht in der Reichweite des einzigen Vorkommnisses von ‚$\exists x_1$'.

Lösung zu Übung 9.2.1. Was heißt es, daß eine Formel offen ist, und was heißt es, daß eine Formel geschlossen ist?

Hinweis: Siehe S. 232.

Lösung zu Übung 9.2.2. Welche der folgenden Zeichenreihen sind prädikatenlogische Formeln, welche der Formeln sind offen und welche sind geschlossen?

1. $(R(a_1, a_3) \wedge \exists x_1\, P(x_1))$

   Antwort: geschlossene prädikatenlogische Formel

2. $\exists x_1\, (R(x_1, a_3) \wedge P(x_1))$

   Antwort: geschlossene präd. Formel

3. $\exists x_1\, (R(x_1, a_3) \wedge P(x_2))$

   Antwort: offene präd. Formel

4. $\exists x_1\, (R(x_1, a_3) \wedge \forall x_2\, P(x_2))$

   Antwort: geschlossene präd. Formel

5. $\exists x_1\, \forall x_2\, \exists x_4\, (R(x_4, x_2) \vee P(x_1))$

   Antwort: geschlossene präd. Formel

6. $\forall x_5\, R(a_1, a_5)$

   Bem.: Keine Individuenvariablen in dieser Formel.

   Antwort: geschlossene präd. Formel

7. $\forall x_5\, R(a_1, x_5)$

   Antwort: geschlossene präd. Formel

8. $\forall x_5\, (R(a_1, x_5) \longrightarrow \exists x_3\, P(x_3))$

   Antwort: geschlossene präd. Formel

9. $P(x_1) \wedge p$

   Bem.: Da ‚p' eine aussagenlogische Variable ist, handelt es sich bei dieser Formel weder um eine prädikatenlogische noch um eine aussagenlogische Formel.

   Antwort: keine präd. Formel

10. $P(x_1) \wedge \forall x_1\, P(x_1)$

Antwort: offene präd. Formel

Bem.: Ein Quantor muss von einer Variablen gefolgt werden.

11. $\exists\, \forall x_2\, R(x_2, a_{47355})$

Antwort: keine präd. Formel

12. $\forall x_{18}\, P^7(x_{18}, x_{18}, x_{18}, x_{18}, x_{18}, x_{18}, x_{18})$

Antwort: geschlossene präd. Formel

Bem.: ‚P^9' ist ein 9-stelliger Prädikat, aber die Formel hat nur 8 Terme.

13. $\forall x_{24}\, P^9(x_{24}, x_{24}, x_{24}, x_{24}, x_{24}, x_{24}, x_{24}, x_{24})$

Antwort: keine präd. Formel

14. $\exists x_1\, \neg\forall x_2\, (P(x_1) \to Q(x_2))$

Antwort: geschlossene präd. Formel

15. $\exists x_1\, \neg\neg(\forall x_2\, (P(x_1) \to Q(x_2)))$

Antwort: keine präd. Formel

16. $\forall x_3\, \exists x_3\, R(x_3, x_4)$

Antwort: offene präd. Formel

Bem.: Es gibt keine Regeln für die Klammerung von atomaren Formeln.

17. $\neg\forall x_1\, (P(x_1))$

Antwort: keine präd. Formel

Bem.: Man braucht eine schließende Klammer zwischen dem zweiten Vorkommnis von ‚x_2' und dem einzigen Vorkommnis von ‚$\to$'.

18. $\exists x_5\, (P(x_5) \wedge \forall x_2\, (Q(x_2 \to P(a_8)))$

Antwort: keine präd. Formel

Lösung zu Übung 9.3. Versuchen Sie den intuitiven Gehalt der folgenden Formeln syntaktisch besser, d.h. transparenter, auszudrücken, ohne dabei gleichzeitig den Inhalt der Formeln zu verändern!

1. $\forall x\,(M(x) \longrightarrow \exists x\,V(x,x))$

   Antwort: $\exists x\,M(x) \longrightarrow \exists x\,V(x,x)$

Bem.: Man kann die logische Äquivalenz der beiden Sätze beweisen.

2. $\forall x\,P(a)$

   Antwort: $P(a)$

3. $\exists x\,(Q(x) \wedge \forall x\,R(x,a))$

   Antwort: $\exists x\,Q(x) \wedge \forall x\,R(x,a)$

4. $\forall y\,\forall x\,(\forall y\,P(x) \longrightarrow \forall x\,P(y))$

   Antwort: Es gibt einige interessante Optionen.

   - $\forall y\,\forall x\,(P(x) \longrightarrow P(y))$
   - $\exists x\,P(x) \longrightarrow \forall y\,P(y)$
   - $\neg\exists x\,P(x) \vee \forall y\,P(y)$
   - $\forall x\,\neg P(x) \vee \forall y\,P(y)$
   - $\forall x\,\neg P(x) \vee \forall x\,P(x)$

Erklärung

Bezüglich der Formeln 1 und 4: Um die Äquivalenzen zwischen den ursprünglichen Formeln und den entsprechenden Lösungsformeln zu beweisen, benötigen wir die Äquivalenz zwischen $A \longrightarrow B$ und $\neg A \vee B$ sowie die Äquivalenz zwischen $\forall x\,\neg A$ und $\neg\exists x\,A$, die wir später noch lernen werden.

Lösung zu Übung 9.4. (a) Führen Sie die folgenden Substitutionen durch und **(b) stellen Sie fest, bei welchen dieser Substitutionen der singuläre Term t für eine nämliche Variable in einer Formel eingesetzt wird, sodass t frei für diese Variable in dieser Formel ist**:

1. $A[x_1] : \exists x_1\,(R(x_1, a_3) \wedge P(x_1)),$ $\quad t : x_2$

Antwort

a) $A[x_2/x_1] : A[x_1]$

Erkl. Es ist keine Substitution möglich, da alle Vorkommnisse von ‚x_1' gebunden sind.

b) x_2 ist frei für x_1 in $A[x_1]$

Erkl. Wenn ein Term t nicht in der Formel A vorkommt, dann ist t für alle v in A frei.

2. $A[x_1] : \exists x_1\,(R(x_1, a_3) \wedge P(x_1)),$ $\quad t : a_1$

Antwort

a) $A[a_1/x_1] : A[x_1]$

Erkl. Wie in 1a.

b) a_2 ist frei für x_1 in $A[x_1]$ – da a_2 eine Individuenkonstante ist.

3. $A[x_1] : \exists x_1\,(R(x_1, a_3) \wedge P(x_1)),$ $\quad t : x_1$

Antwort

a) $A[x_1/x_1] : A[x_1]$

Erkl. Wie in 1a, aber auch, weil $A[x/x] = A[x]$ für alle x gilt.

b) x_1 ist frei für x_1 in $A[x_1]$.

4. $A[x_1] : \exists x_1\, R(x_1, a_3) \wedge P(x_1),$ $\quad t : x_2$

Antwort

a) $A[x_2/x_1] : \exists x_1\, R(x_1, a_3) \wedge P(x_2)$

Erkl. Nur das zweite Vorkommnis von ‚x_1' kann substituiert werden, da das erste gebunden ist.

b) x_2 ist frei für x_1 in $A[x_1]$.

5. $A[x_1] : \exists x_1\, R(x_1, a_3) \wedge P(x_1)$, $t : a_1$

Antwort

a) $A[a_1/x_1] : \exists x_1\, R(x_1, a_3) \wedge P(a_1)$

b) a_1 ist frei für x_1 in $A[x_1]$.

6. $A[x_1] : \exists x_1\, R(x_1, a_3) \wedge P(x_1)$, $t : x_1$

Antwort

a) $A[x_1/x_1] : A[x_1]$

b) x_1 ist frei für x_1 in $A[x_1]$.

7. $A[x_1] : \exists x_1\, \exists x_4\, (R(x_4, x_2) \vee P(x_1))$, $t : x_2$

Antwort

a) $A[x_2/x_1] : A[x_1]$

Erkl. Wie in 1a.

b) x_2 ist frei für x_1 in $A[x_1]$.

8. $A[x_2] : \exists x_1\, \exists x_4\, (R(x_4, x_2) \vee P(x_1))$, $t : x_1$

Antwort

a) $A[x_1/x_2] : \exists x_1\, \exists x_4\, (R(x_4, x_1) \vee P(x_1))$

Bem.: Durch die Substitution wurde x_2 zu x_1 und ist daher gebunden.

b) x_1 ist nicht frei für x_2 in $A[x_2]$.

Bem.: Daher ist diese Substitution keine *gute Substitution* (siehe S. 237).

9. $A[x_2] : \exists x_1\, \exists x_4\, (R(x_4, x_2) \vee P(x_1))$, $t : x_4$

Antwort

a) $A[x_4/x_2] : \exists x_1\, \exists x_4\, (R(x_4, x_4) \vee P(x_1))$

Bem.: Durch die Substitution wurde x_2 zu x_4 und ist daher gebunden.

b) x_4 ist nicht frei für x_2 in $A[x_2]$.

Bem.: Daher ist diese Substitution keine *gute Substitution* (siehe S. 237).

10. $A[x_2] : \exists x_1 \, \exists x_4 \, (R(x_4, x_2) \lor P(x_1)),$ $\qquad t : x_3$

Antwort

a) $A[x_3/x_2] : \exists x_1 \, \exists x_4 \, (R(x_4, x_3) \lor P(x_1))$

b) x_3 ist frei für x_2 in $A[x_2]$.