Prädikatenlogisches Herleiten 11

11.1 Vorbereitung

Die folgenden Übungen sind relativ einfach im Vergleich zu den Übungen im Skript.

Aktivierungselement 11.1. Beweisen Sie die logische Gültigkeit der folgenden Argumente mit Herleitungen[1]:

1. $\vdash \forall x\,(F(x) \vee \neg F(x))$
2. $G(y) \vdash \forall x\,(G(y) \vee F(x))$
3. $\forall x\,(F(x) \leftrightarrow G(x)) \vdash \forall x\,F(x) \leftrightarrow \forall x\,G(x)$
4. $\vdash \neg\forall x\,\forall y\,\exists z\,F(x,y,z) \leftrightarrow \exists x\,\exists y\,\forall z\,\neg F(x,y,z)$

1: Adaptiert aus P. Suppes, *Introduction to Logic*, New York: Van Nostrand Reinhold, 1957, § 5.3, Übung 2.

Aktivierungselement 11.2. Beweisen Sie die logische Gültigkeit der folgenden Argumente mit Herleitungen[2]:

1. $\vdash \forall x\,(P(x) \wedge Q(x)) \leftrightarrow (\forall x\,P(x) \wedge \forall y\,Q(y))$
2. $\forall x\,(P(x) \rightarrow Q(x)), \exists x\,P(x) \vdash \exists x\,Q(x)$
3. $\forall x\,(P(x) \rightarrow Q) \vdash \exists x\,P(x) \rightarrow Q$
4. $\forall x\,(P(x) \rightarrow Q(x)) \vdash \forall x\,(\exists y\,(P(x) \wedge R(x,y)) \rightarrow \exists z\,(Q(x) \wedge R(x,z)))$
5. $\forall x\,\forall y\,L(x,y) \vdash \forall y\,\forall x\,L(x,y)$
6. $\forall x\,\forall y\,L(x,y) \vdash \forall y\,\forall x\,L(y,x)$
7. $\forall x\,P(x) \vee \forall y\,Q(y) \vdash \forall x\,(P(x) \vee Q(x))$
8. $\vdash \forall x\,P(x) \leftrightarrow \neg\exists y\,\neg P(y)$
9. $\forall x\,P(x) \vdash \exists x\,P(x)$
10. $\exists x\,\neg P(x) \vdash \neg\forall x\,P(x)$
11. $\vdash \forall x\,(P(x) \vee \neg P(x))$
12. $\vdash \neg\forall x\,(P(x) \wedge \neg P(x))$
13. $\vdash \forall x\,\neg(P(x) \wedge \neg P(x))$
14. $\forall x\,P(x) \vdash \forall x\,\forall y\,(R(x,y) \rightarrow P(y))$
15. $\forall x\,\forall y\,R(x,y) \vdash \forall x\,\forall y\,(\neg R(x,y) \rightarrow P(y))$

2: Adaptiert aus J.W. Garson, *Modal Logic for Philosophers*, CUP, 2013, Übung 12.2.

Bemerkung: Achten Sie im Argument 6 auf die Reihenfolge der Variablen!

11.1.1 Lösungen

Lösungen zu Aktivierungselement 11.1. [Ausstehend]

Lösungen zu Aktivierungselement 11.2. [Ausstehend]

11.2 Übungen

Übung 11.1. Führen Sie die Herleitungen zu folgenden deduktiv gültigen Schlüssen durch:

1. $\forall x\,(P(x) \wedge Q(x)) \vdash \forall x\, P(x) \wedge \forall x\, Q(x)$
2. $\forall x\, P(x) \vee \forall x\, Q(x) \vdash \forall x\,(P(x) \vee Q(x))$
3. $\vdash \forall x\,(P(a) \vee Q(x)) \leftrightarrow P(a) \vee \forall x\, Q(x)$
4. $\vdash \forall x\,(P(a) \wedge Q(x)) \leftrightarrow P(a) \wedge \forall x\, Q(x)$
5. $\vdash \forall x\,(P(a) \rightarrow Q(x)) \leftrightarrow (P(a) \rightarrow \forall x\, Q(x))$
6. $\forall x\, \neg P(x) \vdash \neg \exists x\, P(x)$
7. $\vdash P(a) \wedge \exists x\, Q(x) \leftrightarrow \exists x\,(P(a) \wedge Q(x))$
8. $\vdash P(a) \vee \exists x\, Q(x) \leftrightarrow \exists x\,(P(a) \vee Q(x))$
9. $\exists x\, P(x) \vee \exists x\, Q(x) \vdash \exists x\,(P(x) \vee Q(x))$
10. $\exists x\,(P(x) \rightarrow Q(x)), \forall x\, P(x) \vdash \exists x\, Q(x)$
11. $\vdash (P(a) \rightarrow \exists x\, Q(x)) \leftrightarrow \exists x\,(P(a) \rightarrow Q(x))$

Übung 11.2. Repräsentieren Sie die folgenden Argumente, und zeigen Sie, dass die daraus resultierenden Argumentformen deduktiv gültig sind:

1. Alle Österreicher sind Europäer. Alle Salzburger sind Österreicher. Also sind alle Salzburger Europäer.
2. Alle Philosophen sind weise. Nun gibt es Salzburger Philosophen. Also sind einige Salzburger weise.
3. Es gibt keine Österreicher, die auf den Mond geflogen sind. Es gibt aber Kosmonauten, die Österreicher sind. Daher sind nicht alle Kosmonauten auf den Mond geflogen.
4. Nicht ein Lebewesen auf dem Mars ist glatzköpfig. Alle Skinheads sind jedoch glatzköpfig. Somit gibt es keinen Skinhead, der ein Lebewesen auf dem Mars ist.

Übung 11.3. Repräsentieren Sie die beiden folgenden Argumente und versuchen Sie zu zeigen, dass die daraus resultierenden Argumentformen deduktiv gültig sind. (Achtung: Eine der beiden Argumentformen ist deduktiv gültig, die andere jedoch nicht.)

1. Alle Lebewesen auf dem Mars sind glatzköpfig. Somit gibt es Lebewesen auf dem Mars, die glatzköpfig sind.
2. Es gibt Lebewesen auf dem Mars. Alle Lebewesen auf dem Mars sind glatzköpfig. Somit gibt es Lebewesen auf dem Mars, die glatzköpfig sind.

Übung 11.4. Führen Sie die Herleitungen zu folgenden deduktiv gültigen Schlüssen durch:

1. $\exists x\, \forall y\, R(x,y) \vdash \forall y\, \exists x\, R(x,y)$
2. $\neg\exists x\, \neg P(x) \vdash \forall x\, P(x)$
3. $\exists x\, P(x) \vdash \neg\forall x\, \neg P(x)$
4. $\neg\exists x\, P(x) \vdash \forall x\, \neg P(x)$
5. $\exists x\, \neg P(x) \vdash \neg\forall x\, P(x)$
6. $\forall x\, (\exists y\, P(y) \rightarrow Q(x)) \vdash \forall y\, (P(y) \rightarrow Q(a))$
7. $\neg\forall x\, (P(x) \rightarrow Q(x)) \vdash \exists x\, (P(x) \wedge \neg Q(x))$

Übung 11.5. Repräsentieren Sie die folgenden Argumente, und zeigen Sie, daß die daraus resultierenden Argumentformen deduktiv gültig sind:

1. Alles hat eine Ursache. Gott hat jedoch keine Ursache. Also ist der Papst Tiroler.
2. Alle Salzburger lieben Salzburg. Es gibt jedoch niemanden, der Salzburg und alle Touristen in Salzburg liebt. Somit lieben die Salzburger nicht alle Touristen in Salzburg.
3. Es gibt nichts Allmächtiges. Wenn etwas ein Gott ist, ist es jedoch allmächtig. Also gibt es keinen Gott.

11.2.1 Lösungen

Lösung zu Übung 11.1. Führen Sie die Herleitungen zu folgenden deduktiv gültigen Schlüssen durch:

1. $\forall x\,(P(x) \land Q(x)) \vdash \forall x\,P(x) \land \forall x\,Q(x)$

Antwort

1.	$\forall x\,(P(x) \land Q(x))$	(P1)
2.	$P(y) \land Q(y)$	1. (UB)[3]
3.	$P(y)$	2. (SIMP1)
4.	$\forall x\,P(x)$	3. (UE)[4]
5.	$Q(y)$	2. (SIMP2)
6.	$\forall x\,Q(x)$	5. (UE)[5]
7.	$\forall x\,P(x) \land \forall x\,Q(x)$	4., 6. (KON)

3: Wir substituieren: $(P(x) \land Q(x))[y/x]$.

4: VB erfüllt: ‚y' kommt in 1. und 4. nicht frei vor.

5: VB erfüllt: ‚y' kommt in 1. und 6. nicht frei vor.

2. $\forall x\,P(x) \lor \forall x\,Q(x) \vdash \forall x\,(P(x) \lor Q(x))$

Antwort

1.	$\forall x\,P(x) \lor \forall x\,Q(x)$	(P1)
2.	$\|\|\ \forall x\,P(x)$	(FU-Annahme 1)
3.	$\|\|\ P(y)$	2. (UB)
4.	$\|\|\ P(y) \lor Q(y)$	3. (ADD1)
5.	$\|\|\ \forall x\,(P(x) \lor Q(x))$	4. (UE)[6]
6.	$\|\|\ \neg\forall x\,P(x)$	(FU-Annahme 2)
7.	$\|\|\ \forall x\,Q(x)$	1., 6. (DS1)
8.	$\|\|\ Q(z)$	7. (UB)
9.	$\|\|\ P(z) \lor Q(z)$	8. (ADD2)
10.	$\|\|\ \forall x\,(P(x) \lor Q(x))$	10.(UE)[7]
11.	$\forall x\,(P(x) \lor Q(x))$	2.–10. (FU)

6: VB erfüllt: ‚y' kommt in 1., 2. und 4. nicht frei vor.

7: VB erfüllt: ‚z' kommt in 1., 2. und 4. nicht frei vor.

Wir ziehen keinen Strich, weil das zu beweisende Argument keine Prämissen hat.

3. $\vdash \forall x\,(P(a) \lor Q(x)) \leftrightarrow P(a) \lor \forall x\, Q(x)$

Antwort

1.	$\|\ \forall x\,(P(a) \lor Q(x))$	(KB-Annahme)
2.	$\|\ P(a) \lor Q(x_1)$	1. (UB)
3.	$\|\ \|\ P(a)$	(FU-Annahme 1)
4.	$\|\ \|\ P(a) \lor \forall x\, Q(x)$	3. (ADD1)
5.	$\|\ \|\ \neg P(a)$	(FU-Annahme 2)
6.	$\|\ \|\ Q(x_1)$	2., 5. (DS1)
7.	$\|\ \|\ \forall x\, Q(x)$	6. (UE)[8]
8.	$\|\ \|\ P(a) \lor \forall x\, Q(x)$	7. (ADD2)
9.	$\|\ P(a) \lor \forall x\, Q(x)$	3.–8. (FU)
10.	$\forall x\,(P(a) \lor Q(x)) \rightarrow P(a) \lor \forall x\, Q(x)$	1.–9. (KB)
11.	$\|\ P(a) \lor \forall x\, Q(x)$	(KB-Annahme)
12.	$\|\ \|\ P(a)$	(FU-Annahme 1)
13.	$\|\ \|\ P(a) \lor Q(x_2)$	12. (ADD1)
14.	$\|\ \|\ \forall x\,(P(a) \lor Q(x))$	13. (UE)[9]
15.	$\|\ \|\ \neg P(a)$	(FU-Annahme 2)
16.	$\|\ \|\ \forall x\, Q(x)$	11., 15. (DS1)
17.	$\|\ \|\ Q(x_3)$	16. (UB)
18.	$\|\ \|\ P(a) \lor Q(x_3)$	17. (ADD)
19.	$\|\ \|\ \forall x\,(P(a) \lor Q(x))$	18. (UE)[10]
20.	$\|\ \forall x\,(P(a) \lor Q(x))$	12.–18. (FU)
21.	$P(a) \lor \forall x\, Q(x) \rightarrow \forall x\,(P(a) \lor Q(x))$	11.–19. (KB)
22.	$\forall x\,(P(a) \lor Q(x)) \leftrightarrow P(a) \lor \forall x\, Q(x)$	10., 21. (ÄQ-EIN)

8: VB erfüllt: ‚x_1' kommt in 1., 3. und 7. nicht frei vor.

9: VB erfüllt: ‚x_2' kommt in 11., 12. und 14. nicht frei vor.

10: VB erfüllt: ‚x_3' kommt in 11., 15. und 19. nicht frei vor.

4. $\vdash \forall x\,(P(a) \land Q(x)) \leftrightarrow P(a) \land \forall x\, Q(x)$

Antwort

1.	$\|\| \ \forall x\,(P(a) \land Q(x))$	(KB-Annahme)
2.	$\|\| \ P(a) \land Q(y)$	1. (UB)
3.	$\|\| \ P(a)$	2. (SIMP1)
4.	$\|\| \ Q(y)$	2. (SIMP2)
5.	$\|\| \ \forall x\, Q(x)$	4. (UE) [11]
6.	$\|\| \ P(a) \land \forall x\, Q(x)$	3., 5. (KON)
7.	$\forall x\,(P(a) \land Q(x)) \rightarrow P(a) \land \forall x\, Q(x)$	1.–6. (KB)
8.	$\|\| \ P(a) \land \forall x\, Q(x)$	(KB-Annahme)
9.	$\|\| \ P(a)$	8. (SIMP1)
10.	$\|\| \ \forall x\, Q(x)$	8. (SIMP2)
11.	$\|\| \ Q(z)$	10. (UB)
12.	$\|\| \ P(a) \land Q(z)$	9., 11. (ADD)
13.	$\|\| \ \forall x\,(P(a) \land Q(x))$	12. (UE)[12]
14.	$P(a) \land \forall x\, Q(x) \rightarrow \forall x\,(P(a) \land Q(x))$	8.–13. (KB)
15.	$\forall x\,(P(a) \land Q(x)) \leftrightarrow P(a) \land \forall x\, Q(x)$	7., 14. (ÄQ-EIN)

11: VB erfüllt: ‚y' kommt in 1. und 5. nicht frei vor.

12: VB erfüllt: ‚z' kommt in 8. und 13. nicht frei vor.

5. $\vdash \forall x\,(P(a) \rightarrow Q(x)) \leftrightarrow (P(a) \rightarrow \forall x\, Q(x))$

Antwort

1.	$\|\| \ \forall x\,(P(a) \rightarrow Q(x))$	(KB-Annahme)
2.	$\|\| \ P(a) \rightarrow Q(y)$	1. (UB)
3.	$\|\| \ \|\| \ P(a)$	(KB-Annahme)
4.	$\|\| \ \|\| \ Q(y)$	2., 3. (MP)
5.	$\|\| \ \|\| \ \forall x\, Q(x)$	4. (UE) [13]
6.	$\|\| \ P(a) \rightarrow \forall x\, Q(x)$	3.–5. (KB)
7.	$\forall x\,(P(a) \rightarrow Q(x)) \rightarrow (P(a) \rightarrow \forall x\, Q(x))$	1.–6. (KB)
8.	$\|\| \ P(a) \rightarrow \forall x\, Q(x)$	(KB-Annahme)
9.	$\|\| \ \|\| \ P(a)$	(KB-Annahme)
10.	$\|\| \ \|\| \ \forall x\, Q(x)$	8., 9. (MP)
11.	$\|\| \ \|\| \ Q(z)$	10. (UB)
12.	$\|\| \ P(a) \rightarrow Q(z)$	9.–11. (KB)
13.	$\|\| \ \forall x\,(P(a) \rightarrow Q(x))$	12. (UE)[14]
14.	$(P(a) \rightarrow \forall x\, Q(x)) \rightarrow \forall x\,(P(a) \rightarrow Q(x))$	8.–13. (KB)
15.	$\forall x\,(P(a) \rightarrow Q(x)) \leftrightarrow (P(a) \rightarrow \forall x\, Q(x))$	7., 14. (ÄQ-EIN)

13: VB erfüllt: ‚y' kommt in 1., 3. und 5. nicht frei vor.

14: VB erfüllt: ‚z' kommt in 9. und 13. nicht frei vor.

6. $\forall x\, \neg P(x) \vdash \neg \exists x\, P(x)$

Antwort

1.	$\forall x\, \neg P(x)$	(P1)
2.	$\Vert\ \neg\neg\exists x\, P(x)$	(IB-Annahme)
3.	$\Vert\ \exists x\, P(x)$	2. (DN2)
4.	$\Vert\ \Vert\ P(y)$	(EB-Annahme)[15]
5.	$\Vert\ \Vert\ \neg P(y)$	1. (UB)
6.	$\Vert\ \Vert\ Q(a) \land \neg Q(a)$	4., 5. (ECQ)
7.	$\Vert\ Q(a) \land \neg Q(a)$	4.–6. (EB)[16]
8.	$\neg \exists x\, P(x)$	2.–7. (IB)

15: In Bezug auf den 3. Schritt.

16: VB′ erfüllt: ‚y‘ kommt in 1. und 6. nicht frei vor.

7. $\vdash P(a) \land \exists x\, Q(x) \leftrightarrow \exists x\, (P(a) \land Q(x))$

Antwort

1.	$\Vert\ P(a) \land \exists x\, Q(x)$	(KB-Annahme)
2.	$\Vert\ P(a)$	1. (SIMP1)
3.	$\Vert\ \exists x\, Q(x)$	1. (SIMP2)
4.	$\Vert\ \Vert\ Q(y)$	(EB-Annahme)[17]
5.	$\Vert\ \Vert\ P(a) \land Q(y)$	2., 4. (KON)
6.	$\Vert\ \Vert\ \exists x\, (P(a) \land Q(x))$	5. (EE)
7.	$\Vert\ \exists x\, (P(a) \land Q(x))$	4.–6. (EB)[18]
8.	$P(a) \land \exists x\, Q(x) \rightarrow \exists x\, (P(a) \land Q(x))$	1.–7. (KB)
9.	$\Vert\ \exists x\, (P(a) \land Q(x))$	(KB-Annahme)
10.	$\Vert\ \Vert\ P(a) \land Q(z)$	(EB-Annahme)[19]
11.	$\Vert\ \Vert\ P(a)$	10. (SIMP1)
12.	$\Vert\ \Vert\ Q(z)$	10. (SIMP2)
13.	$\Vert\ \Vert\ \exists x\, Q(x)$	12. (EE)
14.	$\Vert\ \Vert\ P(a) \land \exists x\, Q(x)$	11., 13. (KON)
15.	$\Vert\ P(a) \land \exists x\, Q(x)$	10.–14. (EB)[20]
16.	$\exists x\, (P(a) \land Q(x)) \rightarrow P(a) \land \exists x\, Q(x)$	9.–15. (KB)
17.	$P(a) \land \exists x\, Q(x) \leftrightarrow \exists x\, (P(a) \land Q(x))$	8., 16. (ÄQ-EIN)

17: In Bezug auf den 3. Schritt.

18: VB′ erfüllt: ‚y‘ kommt in 1. und 6. nicht frei vor.

19: In Bezug auf den 9. Schritt.

20: VB′ erfüllt: ‚<‘ kommt in 9. und 14. nicht frei vor.

8. $\vdash P(a) \lor \exists x\, Q(x) \leftrightarrow \exists x\, (P(a) \lor Q(x))$

Antwort

1.	$\Vert\; P(a) \lor \exists x\, Q(x)$	(KB-Annahme)
2.	$\Vert\; \Vert\; P(a)$	(FU-Annahme 1)
3.	$\Vert\; \Vert\; P(a) \lor Q(x_1)$	2. (ADD1)
4.	$\Vert\; \Vert\; \exists x\, (P(a) \lor Q(x))$	3. (EE)
5.	$\Vert\; \Vert\; \neg P(a)$	(FU-Annahme 2)
6.	$\Vert\; \Vert\; \exists x\, Q(x)$	1., 5. (DS1)
7.	$\Vert\; \Vert\; \Vert\; Q(x_2)$	(EB-Annahme)[21]
8.	$\Vert\; \Vert\; \Vert\; P(a) \lor Q(x_2)$	7. (ADD2)
9.	$\Vert\; \Vert\; \Vert\; \exists x\, (P(a) \lor Q(x))$	8. (EE)
10.	$\Vert\; \Vert\; \exists x\, (P(a) \lor Q(x))$	7.–9. (EB)[22]
11.	$\Vert\; \exists x\, (P(a) \lor Q(x))$	2.–10. (FU)
12.	$P(a) \lor \exists x\, Q(x) \rightarrow \exists x\, (P(a) \lor Q(x))$	1.–11. (KB)
13.	$\Vert\; \exists x\, (P(a) \lor Q(x))$	(KB-Annahme)
14.	$\Vert\; \Vert\; P(a) \lor Q(x_3)$	(EB-Annahme)[23]
15.	$\Vert\; \Vert\; \Vert\; P(a)$	(FU-Annahme 1)
16.	$\Vert\; \Vert\; \Vert\; P(a) \lor \exists x\, Q(x)$	15. (ADD1)
17.	$\Vert\; \Vert\; \Vert\; \neg P(a)$	(FU-Annahme 2)
18.	$\Vert\; \Vert\; \Vert\; Q(x_3)$	14., 17. (DS1)
19.	$\Vert\; \Vert\; \Vert\; \exists x\, Q(x)$	18. (EE)
20.	$\Vert\; \Vert\; \Vert\; P(a) \lor \exists x\, Q(x)$	19. (ADD2)
21.	$\Vert\; \Vert\; P(a) \lor \exists x\, Q(x)$	15.–20. (FU)
22.	$\Vert\; P(a) \lor \exists x\, Q(x)$	14.–21. (EB)[24]
23.	$\exists x\, (P(a) \lor Q(x)) \rightarrow P(a) \lor \exists x\, Q(x)$	13.–19. (KB)
24.	$P(a) \lor \exists x\, Q(x) \leftrightarrow \exists x\, (P(a) \lor Q(x))$	12., 23. (ÄQ-EIN)

21: In Bezug auf den 6. Schritt.

22: VB′ erfüllt: ‚x_2‘ kommt in 1.. 2. und 9. nicht frei vor.

23: In Bezug auf den 13. Schritt.

24: VB′ erfüllt: ‚x_3‘ kommt in 14., 13. und 21. nicht frei vor.

9. $\exists x\, P(x) \lor \exists x\, Q(x) \vdash \exists x\, (P(x) \lor Q(x))$

Antwort

1. $\exists x\, P(x) \lor \exists x\, Q(x)$ (P1)
2. $\|\ \exists x\, P(x)$ (FU-Annahme 1)
3. $\|\ \|\ P(y)$ (EB-Annahme)[25]
4. $\|\ \|\ P(y) \lor Q(y)$ 3. (ADD1)
5. $\|\ \|\ \exists x\, (P(x) \lor Q(x))$ 4. (EE)
6. $\|\ \exists x\, (P(x) \lor Q(x))$ 3.–5. ( )[26]
7. $\|\ \neg\exists x\, P(x)$ (FU-Annahme 2)
8. $\|\ \exists x\, Q(x)$ 1., 7. (DS1)
9. $\|\ \|\ Q(z)$ (EB-Annahme)[27]
10. $\|\ \|\ P(z) \lor Q(z)$ 9. (ADD2)
11. $\|\ \|\ \exists x\, (P(x) \lor Q(x))$ 10. (EE)
12. $\|\ \exists x\, (P(x) \lor Q(x))$ 9.–11. (EB)[28]
13. $\exists x\, (P(x) \lor Q(x))$ 2.–12. (FU)

25: In Bezug auf den 2. Schritt.

26: VB′ erfüllt: ‚y‘ kommt in 1., 2. und 5. nicht frei vor.

27: In Bezug auf den 8. Schritt.

28: VB′ erfüllt: ‚z‘ kommt in 1., 7. und 11. nicht frei vor.

10. $\exists x\, (P(x) \to Q(x)), \forall x\, P(x) \vdash \exists x\, Q(x)$

Antwort

1. $\exists x\, (P(x) \to Q(x))$ (P1)
2. $\forall x\, P(x)$ (P2)
3. $\|\ P(y) \to Q(y)$ (EB-Annahme)[29]
4. $\|\ P(y)$ 2. (UB)
5. $\|\ Q(y)$ 3., 4. (MP)
6. $\|\ \exists x\, Q(x)$ 5. (EE)
7. $\exists x\, Q(x)$ 3.–6. (EB)[30]

29: In Bezug auf P1.

30: VB′ erfüllt: ‚y‘ kommt in 1., 2. und 6. nicht frei vor.

11. $\vdash (P(a) \rightarrow \exists x\, Q(x)) \leftrightarrow \exists x\, (P(a) \rightarrow Q(x))$

Antwort

1.	$\Vert\ P(a) \rightarrow \exists x\, Q(x)$	(KB-Annahme)
2.	$\Vert\ \Vert\ P(a)$	(FU-Annahme 1)
3.	$\Vert\ \Vert\ \exists x\, Q(x)$	1., 2. (MP)
4.	$\Vert\ \Vert\ \Vert\ Q(x_1)$	(EB-Annahme)[31]
5.	$\Vert\ \Vert\ \Vert\ \Vert\ P(a)$	(KB-Annahme)
6.	$\Vert\ \Vert\ \Vert\ \Vert\ Q(x_1)$	4. (TS)
7.	$\Vert\ \Vert\ \Vert\ P(a) \rightarrow Q(x_1)$	5.–6. (KB)
8.	$\Vert\ \Vert\ \Vert\ \exists x\, (P(a) \rightarrow Q(x))$	7. (EE)
9.	$\Vert\ \Vert\ \exists x\, (P(a) \rightarrow Q(x))$	4.–8. (EB)[32]
10.	$\Vert\ \Vert\ \neg P(a)$	(FU-Annahme 2)
11.	$\Vert\ \Vert\ \Vert\ P(a)$	(KB-Annahme)
12.	$\Vert\ \Vert\ \Vert\ Q(x_2)$	10., 11. (ECQ)
13.	$\Vert\ \Vert\ P(a) \rightarrow Q(x_2)$	11.–12. (KB)
14.	$\Vert\ \Vert\ \exists x\, (P(a) \rightarrow Q(x))$	13. (EE)
15.	$\Vert\ \exists x\, (P(a) \rightarrow Q(x))$	2.–14. (FU)
16.	$(P(a) \rightarrow \exists x\, Q(x)) \rightarrow \exists x\, (P(a) \rightarrow Q(x))$	1.–15. (KB)
17.	$\Vert\ \exists x\, (P(a) \rightarrow Q(x))$	(KB-Annahme)
18.	$\Vert\ \Vert\ P(a)$	(KB-Annahme)
19.	$\Vert\ \Vert\ \Vert\ P(a) \rightarrow Q(x_3)$	(EB-Annahme)[33]
20.	$\Vert\ \Vert\ \Vert\ Q(x_3)$	18., 19. (MP)
21.	$\Vert\ \Vert\ \Vert\ \exists x\, Q(x)$	20. (EE)
22.	$\Vert\ \Vert\ \exists x\, Q(x)$	19.–21. (EB)[34]
23.	$\Vert\ P(a) \rightarrow \exists x\, Q(x)$	18.–22. (KB)
24.	$\exists x\, (P(a) \rightarrow Q(x)) \rightarrow (P(a) \rightarrow \exists x\, Q(x))$	17.–23. (KB)
25.	$(P(a) \rightarrow \exists x\, Q(x)) \leftrightarrow \exists x\, (P(a) \rightarrow Q(x))$	16., 24. (ÄQ-EIN)

31: In Bezug auf den 3. Schritt.

32: VB′ erfüllt: ‚x_1‘ kommt in 1., 2. und 8. nicht frei vor.

33: In Bezug auf den 17. Schritt.

34: VB′ erfüllt: ‚x_3‘ kommt in 17., 18. und 21. nicht frei vor.

Lösung zu Übung 11.2. Repräsentieren Sie die folgenden Argumente, und zeigen Sie, dass die daraus resultierenden Argumentformen deduktiv gültig sind:

1. Alle Österreicher sind Europäer. Alle Salzburger sind Österreicher. Also sind alle Salzburger Europäer.

$E(x) := x$ ist Europäer,
$O(x) := x$ ist Österreicher,
$S(x) := x$ ist Salzburger.

Repräsentation

$$\forall x\,(O(x) \to E(x)), \forall x\,(S(x) \to O(x)) \therefore \forall x\,(S(x) \to E(x))$$

Herleitung

1.	$\forall x\,(O(x) \to E(x))$	(P1)
2.	$\forall x\,(S(x) \to O(x))$	(P2)
3.	$\|\| \; S(y)$	(KB-Annahme)
4.	$\|\| \; S(y) \to O(y)$	2. (UB)
5.	$\|\| \; O(y)$	3., 4. (MP)
6.	$\|\| \; O(y) \to E(y)$	1. (UB)
7.	$\|\| \; E(y)$	5., 6. (MP)
8.	$S(y) \to E(y)$	3.–7. (KB)
9.	$\forall x\,(S(x) \to E(x))$	8. (UE)[35]

35: VB erfüllt: ‚y' kommt in 1., 2. und 9. nicht frei vor.

2. Alle Philosophen sind weise. Nun gibt es Salzburger Philosophen. Also sind einige Salzburger weise.

$P(x) := x$ ist Philosoph,
$S(x) := x$ ist Salzburger,
$W(x) := x$ ist weise.

Repräsentation

$$\forall x\,(P(x) \to W(x)), \exists x\,(S(x) \land P(x)) \therefore \exists x\,(S(x) \land W(x))$$

Herleitung

1.	$\forall x\,(P(x) \to W(x))$	(P1)
2.	$\exists x\,(S(x) \land P(x))$	(P2)
3.	$\|\| \; S(y) \land P(y)$	(EB-Annahme)[36]
4.	$\|\| \; P(y)$	3. (SIMP2)
5.	$\|\| \; P(y) \to W(y)$	1. (UB)
6.	$\|\| \; W(y)$	4., 5. (MP)
7.	$\|\| \; S(y)$	3. (SIMP1)
8.	$\|\| \; S(y) \land W(y)$	6., 7. (KON)
9.	$\|\| \; \exists x\,(S(x) \land W(x))$	8. (EE)
10.	$\exists x\,(S(x) \land W(x))$	3.–9. (EB)[37]

36: In Bezug auf P2.

37: VB' erfüllt: ‚y' kommt in 1., 2. und 9. nicht frei vor.

3. Es gibt keine Österreicher, die auf den Mond geflogen sind. Es gibt aber Kosmonauten, die Österreicher sind. Daher sind nicht alle Kosmonauten auf den Mond geflogen.

Repräsentation

$\neg\exists x\,(O(x) \wedge G(x,m)), \exists x\,(K(x) \wedge O(x)) \therefore \neg\forall x\,(K(x) \rightarrow G(x,m))$

m := der Mond,
$K(x)$:= x ist Kosmonaut,
$O(x)$:= x ist Österreicher,
$G(x,y)$:= x ist auf y geflogen.

Herleitung

1.	$\neg\exists x\,(O(x) \wedge G(x,m))$	(P1)
2.	$\exists x\,(K(x) \wedge O(x))$	(P2)
3.	$\|\|$ $K(y) \wedge O(y)$	(EB-Annahme)[38]
4.	$\|\|$ $K(y)$	3. (SIMP1)
5.	$\|\|$ $O(y)$	3. (SIMP2)
6.	$\|\|$ $\|\|$ $\neg\neg\forall x\,(K(x) \rightarrow G(x,m))$	(IB-Annahme)
7.	$\|\|$ $\|\|$ $\forall x\,(K(x) \rightarrow G(x,m))$	6. (DN2)
8.	$\|\|$ $\|\|$ $K(y) \rightarrow G(y,m)$	7. (UB)
9.	$\|\|$ $\|\|$ $G(y,m)$	4., 8. (MP)
10.	$\|\|$ $\|\|$ $O(y) \wedge G(y,m)$	5., 9. (KON)
11.	$\|\|$ $\|\|$ $\exists x\,(O(x) \wedge G(x,m))$	10. (EE)
12.	$\|\|$ $\|\|$ $\exists x\,(O(x) \wedge G(x,m)) \wedge \neg\exists x\,(O(x) \wedge G(x,m))$	11., 1. (KON)
13.	$\|\|$ $\neg\forall x\,(K(x) \rightarrow G(x,m))$	6.–12. (IB)
14.	$\neg\forall x\,(K(x) \rightarrow G(x,m))$	3.–13. (EB)[39]

38: In Bezug auf P2.

39: VB′ erfüllt: ‚y' kommt in 1., 2. und 13. nicht frei vor.

4. Nicht ein Lebewesen auf dem Mars ist glatzköpfig. Alle Skinheads sind jedoch glatzköpfig. Somit gibt es keinen Skinhead, der ein Lebewesen auf dem Mars ist.

Repräsentation

$\neg\exists x\,(L(x,m) \land G(x)), \forall x\,(S(x) \to G(x)) \therefore \neg\exists x\,(S(x) \land L(x,m))$

m := Mars,
$G(x)$:= x ist glatzköpfig,
$H(x)$:= x ist Skinhead,
$L(x,y)$:= x ist ein Lebewesen auf y.

Herleitung

1.	$\neg\exists x\,(L(x,m) \land G(x))$	(P1)
2.	$\forall x\,(S(x) \to G(x))$	(P2)
3.	$\Vert\ \neg\neg\exists x\,(S(x) \land L(x,m))$	(IB-Annahme)
4.	$\Vert\ \exists x\,(S(x) \land L(x,m))$	3. (DN)
5.	$\Vert\ \Vert\ S(y) \land L(y,m)$	(EB-Annahme)[40]
6.	$\Vert\ \Vert\ S(y)$	5. (SIMP1)
7.	$\Vert\ \Vert\ S(y) \to G(y)$	2. (UB)
8.	$\Vert\ \Vert\ G(y)$	6., 7. (MP)
9.	$\Vert\ \Vert\ L(y,m)$	5. (SIMP2)
10.	$\Vert\ \Vert\ G(y) \land L(y,m)$	8., 9. (KON)
11.	$\Vert\ \Vert\ \exists x\,(G(x) \land L(x,m))$	10. (EE)
12.	$\Vert\ \Vert\ A(a) \land \neg A(a)$	11., 1. (ECQ)
13.	$\Vert\ A(a) \land \neg A(a)$	5.–12. (EB)[41]
14.	$\neg\exists x\,(S(x) \land L(x,m))$	3.–13. (IB)

40: In Bezug auf den 4. Schritt.

41: VB′ erfüllt: ‚y' kommt in 1., 2. und 12. nicht frei vor.

Lösung zu Übung 11.3. Repräsentieren Sie die beiden folgenden Argumente und versuchen Sie zu zeigen, dass die daraus resultierenden Argumentformen deduktiv gültig sind.

1. Alle Lebewesen auf dem Mars sind glatzköpfig. Somit gibt es Lebewesen auf dem Mars, die glatzköpfig sind.

m := Mars,
$G(x)$:= x ist glatzköpfig,
$L(x, y)$:= x ist ein Lebewesen auf y.

Repräsentation

$$\forall x\,(L(x,m) \to G(x)) \mathrel{\therefore} \exists x\,(L(x,m) \land G(x))$$

Gültigkeit: Dieses Argument ist nicht gültig.

Wir können dies mit einer Interpretation der Formel im Sinne des formalisierten Satzes zeigen.

Wir können auch dies zeigen, mit der Interpretation $\mathfrak{I} = \langle \mathbf{D}, \varphi \rangle$, wobei:

- $\mathbf{D} = \{\mathit{Freddie}\}$,
- $\varphi(m) = \mathit{Freddie}$,
- $\varphi(L) = \{\langle d_1, d_2\rangle \in \mathbf{D}^2 \mid d_1 \text{ ist der Vater von } d_2\} = \{\}$.
- (Die Extension von $\varphi(G)$ ist nicht wichtig.)

Unter $\mathfrak{I}$ ist die Prämisse wahr, aber die Konklusion ist falsch.

Es war ausreichend zu wissen, dass die Antezedenz falsch ist – d.h. $\varphi_{\sigma'}(L(x,m)) = \mathtt{f}$ –, um zu schließen, dass die gesamte Implikationsformel wahr ist – d.h. $\varphi_{\sigma'}(L(x,m) \to G(x)) = \mathtt{w}$. Daher war es nicht erforderlich, den Wahrheitswert von $G(x)$ – also $\varphi_{\sigma'}(G(x))$ – zu bestimmen.

Die Prämisse sind wahr

Sei σ eine beliebige Variablenbelegung. Es gibt genau eine mögliche x-Variante σ' von σ für die gilt: $\varphi_{\sigma'} = \mathit{Freddie}$. (Tatsächlich ist $\sigma' = \sigma$.)

Da Freddie nicht sein eigener Vater ist, folgt:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\mathit{Freddie} \text{ ist } \textit{nicht} \text{ sein eigener Vater}}{\langle \mathit{Freddie}, \mathit{Freddie}\rangle \notin \varphi(L)}}{\langle \varphi_{\sigma'}(x), \varphi(m)\rangle \notin \varphi(L)}}{\langle \varphi_{\sigma'}(x), \varphi_{\sigma'}(m)\rangle \notin \varphi(L)}}{\varphi_{\sigma'}(L(x,m)) = \mathtt{f}} \qquad \varphi_{\sigma'}(G(x)) = ?$$
$$\overline{\varphi_{\sigma'}(L(x,m) \to G(x)) = \mathtt{w}}$$

Da σ' eine beliebige x-Variante von σ ist, folgt daraus, dass:

$$\varphi_\sigma(\forall x\,(L(x,m) \to G(x))) = \mathtt{w}.$$

Die Konklusion ist falsch

Sei σ eine beliebige Variablenbelegung. Es gibt genau eine mögliche x-Variante σ' von σ für die gilt: $\varphi_{\sigma'} = \mathit{Freddie}$. (Tatsächlich ist $\sigma' = \sigma$.)

Da Freddie nicht sein eigener Vater ist, folgt:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\mathit{Freddie}\text{ ist } \textit{nicht} \text{ sein eigener Vater}}{\langle \mathit{Freddie}, \mathit{Freddie}\rangle \notin \varphi(L)}}{\langle \varphi_{\sigma'}(x), \varphi(m)\rangle \notin \varphi(L)}}{\langle \varphi_{\sigma'}(x), \varphi_{\sigma'}(m)\rangle \notin \varphi(L)}}{\varphi_{\sigma'}(L(x,m)) = \mathtt{f}} \qquad \varphi_{\sigma'}(G(x)) = \mathtt{?}$$

$$\overline{\varphi_{\sigma'}(L(x,m) \wedge G(x)) = \mathtt{f}}$$

Da σ' eine beliebige x-Variante von σ ist, folgt daraus, dass:

$$\varphi_\sigma(\exists x\, (L(x,m) \wedge G(x))) = \mathtt{f}.$$

Abschließend folgt, dass das Argument nicht logisch gültig ist, da unter $\mathfrak{I}$ sind die Prämissen sind, die Konklusion jedoch falsch.

2. Es gibt Lebewesen auf dem Mars. Alle Lebewesen auf dem Mars sind glatzköpfig. Somit gibt es Lebewesen auf dem Mars, die glatzköpfig sind.

$m :=$ Mars,
$G(x) := x$ ist glatzköpfig,
$L(x,y) := x$ ist ein Lebewesen auf y.

Repräsentation

$$\exists x\, L(x,m), \forall x\, (L(x,m) \rightarrow G(x)) \therefore \exists x\, (L(x,m) \wedge G(x))$$

Gültigkeit: Dieses Argument ist gültig (sie Herleitung unten).

1.	$\exists x\, L(x,m)$	(P1)
2.	$\forall x\, (L(x,m) \rightarrow G(x))$	(P2)
3.	$\vert\vert\ L(y,m)$	(EB-Annahme)[42]
4.	$\vert\vert\ L(y,m) \rightarrow G(y)$	2. (UB)
5.	$\vert\vert\ G(y)$	3., 4. (MP)
6.	$\vert\vert\ L(y,m) \wedge G(y)$	3., 5. (KON)
7.	$\vert\vert\ \exists x\, (L(x,m) \wedge G(x))$	6. (EE)
8.	$\exists x\, (L(x,m) \wedge G(x))$	3.–7. (EB)[43]

42: In Bezug auf P1.

43: VB′ erfüllt: ‚y‘ kommt in 1., 2. und 7. nicht frei vor.

Lösung zu Übung 11.4. Führen Sie die Herleitungen zu folgenden deduktiv gültigen Schlüssen durch:

1. $\exists x\, \forall y\, R(x, y) \vdash \forall y\, \exists x\, R(x, y)$

Antwort

1.	$\exists x\, \forall y\, R(x, y)$	(P1)
2.	$\|\|\ \forall y\, R(x_1, y)$	(EB-Annahme)[44]
3.	$\|\|\ R(x_1, y_1)$	2. (UB)
4.	$\|\|\ \exists x\, R(x, y_1)$	3. (EE)
5.	$\|\|\ \forall y\, \exists x\, R(x, y)$	4. (UE)[45]
6.	$\forall y\, \exists x\, R(x, y)$	2.–5. (EB)[46]

44: In Bezug auf P1.

45: VB erfüllt: ‚y_1' kommt in 1., 2. und 5. nicht frei vor.

46: VB′ erfüllt: ‚x_1' kommt in 1. und 5. nicht frei vor.

Frage

Können wir die Herleitung auch in umgekehrter Richtung durchführen? Siehe die folgende Pseudoherleitung.

1.	$\forall y\, \exists x\, R(x, y)$	(P1)
2.	$\exists x\, R(x, y_1)$	1. (UB)
3.	$\|\|\ R(x_1, y_1)$	(EB-Annahme)[47]
4.	$\|\|\ \forall y\, R(x_1, y)$	3. (UB)[48]
5.	$\|\|\ \exists x\, \forall y\, R(x, y)$	4. (EE)
6.	$\exists x\, \forall y\, R(x, y)$	3.–5. (EB)

47: In Bezug auf den 2. Schritt.

48: Unzulässiger Schritt, weil die Variablenbedingung VB nicht erfüllt ist: y vorkommt frei in der EB-Annahme (siehe S. 281).

2. $\neg\exists x\, \neg P(x) \vdash \forall x\, P(x)$

Antwort

1.	$\neg\exists x\, \neg P(x)$	(P1)
2.	$\|\|\ \neg P(y)$	(IB-Annahme)
3.	$\|\|\ \exists x\, \neg P(x)$	2. (EE)
4.	$\|\|\ \exists x\, \neg P(x) \wedge \neg\exists x\, \neg P(x)$	3., 1. (KON)
5.	$P(y)$	2.–4. (IB)
6.	$\forall x\, P(x)$	5. (UE)[49]

49: VB erfüllt: ‚y' kommt in 1. und 6. nicht frei vor.

3. $\exists x\, P(x) \vdash \neg\forall x\, \neg P(x)$

Antwort

1.	$\exists x\, P(x)$	(P1)
2.	$\|\;\; \neg\neg\forall x\, \neg P(x)$	(IB-Annahme)
3.	$\|\;\; \forall x\, \neg P(x)$	2. (DN2)
4.	$\|\;\|\;\; P(y)$	(EB-Annahme)[50]
5.	$\|\;\|\;\; \neg P(y)$	3. (UB)
6.	$\|\;\|\;\; Q(a) \wedge \neg Q(a)$	4., 5. (ECQ)
7.	$\|\;\; Q(a) \wedge \neg Q(a)$	4.–6. (EB)[51]
8.	$\neg\forall x\, \neg P(x)$	2.–7. (IB)

50: In Bezug auf P1.

51: VB′ erfüllt: ‚y‘ kommt in 1. und 6. nicht frei vor.

4. $\neg\exists x\, P(x) \vdash \forall x\, \neg P(x)$

Antwort

1.	$\neg\exists x\, P(x)$	(P1)
2.	$\|\;\; \neg\neg P(y)$	(IB-Annahme)
3.	$\|\;\; P(y)$	2. (DN2)
4.	$\|\;\; \exists x\, P(x)$	3. (EE)
5.	$\|\;\; \exists x\, P(x) \wedge \neg\exists x\, P(x)$	4., 1. (KON)
6.	$\neg P(y)$	2.–5. (IB)
7.	$\forall x\, \neg P(x)$	6. (UE)[52]

52: VB erfüllt: ‚y‘ kommt in 1. und 7. nicht frei vor.

5. $\exists x\, \neg P(x) \vdash \neg\forall x\, P(x)$

Antwort

1.	$\exists x\, \neg P(x)$	(P1)
2.	$\|\;\; \neg P(y)$	(EB-Annahme)[53]
3.	$\|\;\|\;\; \neg\neg\forall x\, P(x)$	(IB-Annahme)
4.	$\|\;\|\;\; \forall x\, P(x)$	3. (DN2)
5.	$\|\;\|\;\; P(y)$	4. (UB)
6.	$\|\;\|\;\; P(y) \wedge \neg P(y)$	5., 2. (KON)
7.	$\|\;\; \neg\forall x\, P(x)$	6. (IB)
8.	$\neg\forall x\, P(x)$	2.–7. (EB)[54]

53: In Bezug auf P1.

54: VB′ erfüllt: ‚y‘ kommt in 1. und 7. nicht frei vor.

6. $\forall x\,(\exists y\,P(y) \to Q(x)) \vdash \forall y\,(P(y) \to Q(a))$

Antwort

1.	$\forall x\,(\exists y\,P(y) \to Q(x))$	(P1)
2.	$\exists y\,P(y) \to Q(a)$	1. (UB)
3.	$\|\|\ P(z)$	(KB-Annahme)
4.	$\|\|\ \exists y\,P(y)$	3. (EE)
5.	$\|\|\ Q(a)$	2., 4. (MP)
6.	$P(z) \to Q(a)$	3.–5. (KB)
7.	$\forall y\,(P(y) \to Q(a))$	6. (UE)[55]

55: VB erfüllt: ‚y' kommt in 1. und 7. nicht frei vor.

7. $\neg\forall x\,(P(x) \to Q(x)) \vdash \exists x\,(P(x) \wedge \neg Q(x))$

Antwort

1.	$\neg\forall x\,(P(x) \to Q(x))$	(P1)
2.	$\|\|\ \neg\exists x\,(P(x) \wedge \neg Q(x))$	(IB-Annahme)
3.	$\|\|\ \|\|\ P(y)$	(FU-Annahme 1)
4.	$\|\|\ \|\|\ \|\|\ Q(y)$	(FU-Annahme 1.1)
5.	$\|\|\ \|\|\ \|\|\ \|\|\ P(y)$	(KB-Annahme)
6.	$\|\|\ \|\|\ \|\|\ \|\|\ Q(y)$	4. (TS)
7.	$\|\|\ \|\|\ \|\|\ P(y) \to Q(y)$	5.–6. (KB)
8.	$\|\|\ \|\|\ \|\|\ \neg Q(y)$	(FU-Annahme 1.2)
9.	$\|\|\ \|\|\ \|\|\ P(y) \wedge \neg Q(y)$	3., 8. (KON)
10.	$\|\|\ \|\|\ \|\|\ \exists x\,(P(x) \wedge \neg Q(x))$	9. (EE)
11.	$\|\|\ \|\|\ \|\|\ P(y) \to Q(y)$	2., 10. (EQC)
12.	$\|\|\ \|\|\ P(y) \to Q(y)$	4.–11. (FU)
13.	$\|\|\ \|\|\ \neg P(y)$	(FU-Annahme 2)
14.	$\|\|\ \|\|\ \|\|\ P(y)$	(KB-Annahme)
15.	$\|\|\ \|\|\ \|\|\ Q(y)$	13., 14. (ECQ)
16.	$\|\|\ \|\|\ P(y) \to Q(y)$	14.–15. (KB)
17.	$\|\|\ P(y) \to Q(y)$	3.–16. (FU)
18.	$\|\|\ \forall x\,(P(x) \to Q(x))$	17. (UE)[56]
19.	$\|\|\ \forall x\,(P(x) \to Q(x)) \wedge \neg\forall x\,(P(x) \to Q(x))$	18., 1. (KON)
20.	$\exists x\,(P(x) \wedge \neg Q(x))$	2.–19. (IB)

56: VB erfüllt: ‚y' kommt in 2. und 18. nicht frei vor.

Lösung zu Übung 11.5. Repräsentieren Sie die folgenden Argumente, und zeigen Sie, dass die daraus resultierenden Argumentformen deduktiv gültig sind:

1. Alles hat eine Ursache. Gott hat jedoch keine Ursache. Also ist der Papst Tiroler.

Repräsentation 1

$$\forall x \, \exists y \, U(y,x), \neg\exists x \, U(x,g) \therefore T(p)$$

$g :=$ Gott,
$p :=$ der Papst,
$T(x) := x$ ist Tiroler,
$U(x,y) := x$ ist die Ursache von y.

Herleitung

1.	$\forall x \, \exists y \, U(y,x)$	(P1)
2.	$\neg\exists x \, U(x,g)$	(P2)
3.	$\exists y \, U(y,g)$	1. (UB)
4.	$\|\| \; U(z,g)$	(EB-Annahme)[57]
5.	$\|\| \; \exists x \, U(x,g)$	4. (EE)
6.	$\|\| \; T(p)$	2., 4. (ECQ)
7.	$T(p)$	3.–6. (EB)[58]

57: In Bezug auf den 3. Schritt.

58: VB′ erfüllt: ‚z' kommt in 1., 2. und 6. nicht frei vor.

Repräsentation 2

$$\forall x \, \exists y \, U(y,x), \neg\exists y \, U(y,g) \therefore T(p)$$

g, p, T, U wie in der Repr. 1.

Herleitung

1.	$\forall x \, \exists y \, U(y,x)$	(P1)
2.	$\neg\exists y \, U(y,g)$	(P2)
3.	$\exists y \, U(y,g)$	1. (UB)
4.	$T(p)$	3., 2. (ECQ)

2. Alle Salzburger lieben Salzburg. Es gibt jedoch niemanden, der Salzburg und alle Touristen in Salzburg liebt. Somit lieben die Salzburger nicht alle Touristen in Salzburg.

Repräsentation

$$\forall x\,(S(x) \to L(x,s)), \neg\exists x\,(L(x,s) \land \forall y\,(T(y,s) \to L(x,y)))$$
$$\therefore\ \forall x\,(S(x) \to \neg\forall y\,(T(y,s) \to L(x,y)))$$

s := Salzburg,
$S(x)$:= x ist Salzburger,
$L(x,y)$:= x liebt y,
$T(x,y)$:= x ist ein Tourist in y.

Herleitung

1.	$\forall x\,(S(x) \to L(x,s))$	(P1)
2.	$\neg\exists x\,(L(x,s) \land \forall y\,(T(y,s) \to L(x,y)))$	(P2)
3.	$\|\|\ S(z)$	(KB-Annahme)
4.	$\|\|\ S(z) \to L(z,s)$	1. (UB)
5.	$\|\|\ L(z,s)$	3., 4. (MP)
6.	$\|\|\ \|\|\ \neg\neg\forall y\,(T(y,s) \to L(z,y))$	(IB-Annahme)
7.	$\|\|\ \|\|\ \forall y\,(T(y,s) \to L(z,y))$	6. (DN2)
8.	$\|\|\ \|\|\ L(z,s) \land \forall y\,(T(y,s) \to L(z,y))$	5., 7. (KON)
9.	$\|\|\ \|\|\ \exists x\,(L(x,s) \land \forall y\,(T(y,s) \to L(x,y)))$	5., 7. (EE)
10.	$\|\|\ \|\|\ Q(a) \land \neg Q(a)$	9., 2. (ECQ)
11.	$\|\|\ \neg\forall y\,(T(y,s) \to L(z,y))$	6., 10. (IB)
12.	$S(z) \to \neg\forall y\,(T(y,s) \to L(z,y))$	3.–11. (KB)
13.	$\forall x\,(S(x) \to \neg\forall y\,(T(y,s) \to L(x,y)))$	12. (UE)[59]

59: VB erfüllt: ‚z' kommt in 1., 2. und 13. nicht frei vor.

Bemerkung

Das übliche Vorgehensweise in den 10. Schritt wäre gewesen, aus den Schritten 9. und 2. durch KON folgendes herzuleiten:

$$\exists x\,(L(x,s) \land \forall y\,(T(y,s) \to L(x,y))) \land \neg\exists x\,(L(x,s) \land \forall y\,(T(y,s) \to L(x,y))),$$

und dann mit denselben Schritten fortfahren.

Da diese Formel aber zu lang ist, haben wir entschieden, diesen anderen Weg zu gehen, der ebenso zulässig ist.

3. Es gibt nichts Allmächtiges. Wenn etwas ein Gott ist, ist es jedoch allmächtig. Also gibt es keinen Gott.

Repräsentation

$$\neg\exists x\, A(x), \forall x\,(G(x) \rightarrow A(x)) \mathrel{\therefore} \neg\exists x\, G(x)$$

$A(x) :=$ x ist allmächtig,
$G(x) :=$ x ist ein Gott.

Man beachte, dass ‚Gott' in 11.5.1 als Eigenname verwendet wird, hier aber als Prädikat.

Herleitung

1.	$\neg\exists x\, A(x)$	(P1)
2.	$\forall x\,(G(x) \rightarrow A(x))$	(P2)
3.	$\|\|$ $\neg\neg\exists x\, G(x)$	(IB-Annahme)
4.	$\|\|$ $\exists x\, G(x)$	3. (DN2)
5.	$\|\|$ $\|\|$ $G(y)$	(EB-Annahme)[60]
6.	$\|\|$ $\|\|$ $G(y) \rightarrow A(y)$	2. (UB)
7.	$\|\|$ $\|\|$ $A(y)$	5., 6. (MP)
8.	$\|\|$ $\|\|$ $\exists x\, A(x)$	7. (EE)
9.	$\|\|$ $\|\|$ $Q(a) \wedge \neg Q(a)$	8., 1. (ECQ)
10.	$\|\|$ $Q(a) \wedge \neg Q(a)$	5.–9. (EB)[61]
11.	$\neg\exists x\, G(x)$	3.–10. (IB)

60: In Bezug auf den 4. Schritt.

61: VB′ erfüllt: ‚y' kommt in 1., 2. und 9. nicht frei vor.

11.3 Zusatzübungen

Zusatzübung 11.1. Führen Sie alle Herleitungsübungen unter Verwendung der minimal notwendigen Anzahl an Variablen durch und stellen Sie sicher, dass sämtliche Variablenbedingungen eingehalten werden.

Zusatzübung 11.2. Beweisen Sie die logische Gültigkeit der folgenden Argumente mit Herleitungen[62]:

1. $\vdash \forall x\, \forall y\, F(x,y) \leftrightarrow \forall y\, \forall x\, F(x,y)$
2. $\vdash \forall x\, (F(x) \wedge G(x)) \leftrightarrow \forall x\, F(x) \wedge \forall x\, G(x)$
3. $\forall x\, (F(x) \rightarrow G(x)) \vdash (\forall x\, F(x) \rightarrow \forall x\, G(x))$
4. $\forall x\, (F(x) \leftrightarrow G(x)) \vdash (\forall x\, F(x) \leftrightarrow \forall x\, G(x))$
5. $\vdash \exists x\, F(x) \leftrightarrow \neg \forall x\, \neg F(x)$
6. $\vdash \exists x\, \neg F(x) \leftrightarrow \neg \forall x\, F(x)$
7. $\vdash \neg \exists x\, \neg F(x) \leftrightarrow \forall x\, F(x)$
8. $\vdash \neg \exists x\, F(x) \leftrightarrow \forall x\, \neg F(x)$
9. $\forall x\, (F(x) \rightarrow G(x)) \vdash (\exists x\, F(x) \rightarrow \exists x\, G(x))$
10. $\forall x\, (F(x) \leftrightarrow G(x)) \vdash (\exists x\, F(x) \leftrightarrow \exists x\, G(x))$
11. $\exists x\, \forall y\, F(x,y) \vdash \forall y\, \exists x\, F(x,y)$
12. $\forall x\, \forall y\, F(x,y) \vdash \forall x\, F(x,x)$
13. $\vdash \exists x\, (A \wedge F(x)) \leftrightarrow A \wedge \exists x\, F(x)$
14. $\vdash \exists x\, (A \vee F(x)) \leftrightarrow A \vee \exists x\, F(x)$
15. $\vdash \exists x\, (F(x) \vee G(x)) \leftrightarrow \exists x\, F(x) \vee \exists x\, G(x)$
16. $\vdash \exists x\, (F(x) \vee A) \leftrightarrow \exists x\, F(x) \vee A$
17. $\vdash \forall x\, (F(x) \vee A) \leftrightarrow \forall x\, F(x) \vee A$
18. $\exists x\, F(x,x) \vdash \exists x\, \exists y\, F(x,y)$
19. $\vdash \exists x\, \neg \exists y\, \neg (F(x) \vee \neg F(y))$

62: Adaptiert aus D. Hilbert & W. Ackermann, *Gründzüge der theoretischen Logik* (6. Auf.), Berlin: Springer, 1972, S. 83.

Lösung zu Zusatzübung 11.2. [Ausstehend.]

11.3.1 Lösungen

Lösung zu Zusatzübung 11.1 Führen Sie alle Herleitungsübungen unter Verwendung der minimal notwendigen Anzahl an Variablen durch und stellen Sie sicher, dass sämtliche Variablenbedingungen eingehalten werden.

Herleitungen aus Übung 11.1.

1. $\forall x\,(P(x) \wedge Q(x)) \vdash \forall x\,P(x) \wedge \forall x\,Q(x)$

Antwort

1.	$\forall x\,(P(x) \wedge Q(x))$	(P1)
2.	$P(x) \wedge Q(x)$	1. (UB)[63]
3.	$P(x)$	2. (SIMP1)
4.	$\forall x\,P(x)$	3. (UE)
5.	$Q(x)$	2. (SIMP2)
6.	$\forall x\,Q(x)$	5. (UE)
7.	$\forall x\,P(x) \wedge \forall x\,Q(x)$	4., 6. (KON)

63: Wir substituieren: $(P(x) \wedge Q(x))[x/x]$.

Erklärung

Im Lösungsblatt von Prof. Leitgeb wird in Schritt 2 die Substitution

$$(P(x) \wedge Q(x))[y/x] = (P(y) \wedge Q(y))$$

vorgenommen. Wir führen hier stattdessen die triviale Substitution

$$(P(x) \wedge Q(x))[x/x] = (P(x) \wedge Q(x))$$

durch, die ebenfalls mit UB möglich ist.

2. $\forall x\,P(x) \vee \forall x\,Q(x) \vdash \forall x\,(P(x) \vee Q(x))$

Antwort

1.	$\forall x\,P(x) \vee \forall x\,Q(x)$	(P1)
2.	$\|\|$ $\forall x\,P(x)$	(FU-Annahme 1)
3.	$\|\|$ $P(x)$	2. (UB)
4.	$\|\|$ $P(x) \vee Q(x)$	3. (ADD1)
5.	$\|\|$ $\neg\forall x\,P(x)$	(FU-Annahme 2)
6.	$\|\|$ $\forall x\,Q(x)$	1., 5. (DS1)
7.	$\|\|$ $Q(x)$	6. (UB)
8.	$\|\|$ $P(x) \vee Q(x)$	7. (ADD2)
9.	$P(x) \vee Q(x)$	2.–8. (FU)
10.	$\forall x\,(P(x) \vee Q(x))$	9. (UE)

3. $\vdash \forall x\,(P(a) \lor Q(x)) \leftrightarrow P(a) \lor \forall x\,Q(x)$

Wir ziehen keinen Strich, weil das zu beweisende Argument keine Prämissen hat.

Antwort

1.	$\|\| \quad \forall x\,(P(a) \lor Q(x))$	(KB-Annahme)
2.	$\|\| \quad P(a) \lor Q(x)$	1. (UB)
3.	$\|\| \; \|\| \quad P(a)$	(FU-Annahme 1)
4.	$\|\| \; \|\| \quad P(a) \lor \forall x\,Q(x)$	3. (ADD1)
5.	$\|\| \; \|\| \quad \neg P(a)$	(FU-Annahme 2)
6.	$\|\| \; \|\| \quad Q(x)$	2., 5. (DS1)
7.	$\|\| \; \|\| \quad \forall x\,Q(x)$	6. (UE)
8.	$\|\| \; \|\| \quad P(a) \lor \forall x\,Q(x)$	7. (ADD2)
9.	$\|\| \quad P(a) \lor \forall x\,Q(x)$	3.–8. (FU)
10.	$\forall x\,(P(a) \lor Q(x)) \rightarrow P(a) \lor \forall x\,Q(x)$	1.–9. (KB)
11.	$\|\| \quad P(a) \lor \forall x\,Q(x)$	(KB-Annahme)
12.	$\|\| \; \|\| \quad P(a)$	(FU-Annahme 1)
13.	$\|\| \; \|\| \quad P(a) \lor Q(x)$	12. (ADD1)
14.	$\|\| \; \|\| \quad \neg P(a)$	(FU-Annahme 2)
15.	$\|\| \; \|\| \quad \forall x\,Q(x)$	11., 14. (DS1)
16.	$\|\| \; \|\| \quad Q(x)$	15. (UB)
17.	$\|\| \; \|\| \quad P(a) \lor Q(x)$	16. (ADD)
18.	$\|\| \quad P(a) \lor Q(x)$	12.–17. (FU)
19.	$\|\| \quad \forall x\,(P(a) \lor Q(x))$	18. (UE)
20.	$P(a) \lor \forall x\,Q(x) \rightarrow \forall x\,(P(a) \lor Q(x))$	11.–18. (KB)
21.	$\forall x\,(P(a) \lor Q(x)) \leftrightarrow P(a) \lor \forall x\,Q(x)$	10., 20. (ÄQ-EIN)

4. $\vdash \forall x\,(P(a) \land Q(x)) \leftrightarrow P(a) \land \forall x\,Q(x)$

Antwort

1.	$\Vert\ \forall x\,(P(a) \land Q(x))$	(KB-Annahme)
2.	$\Vert\ P(a) \land Q(x)$	1. (UB)
3.	$\Vert\ P(a)$	2. (SIMP1)
4.	$\Vert\ Q(x)$	2. (SIMP2)
5.	$\Vert\ \forall x\,Q(x)$	4. (UE)
6.	$\Vert\ P(a) \land \forall x\,Q(x)$	3., 5. (KON)
7.	$\forall x\,(P(a) \land Q(x)) \to P(a) \land \forall x\,Q(x)$	1.–6. (KB)
8.	$\Vert\ P(a) \land \forall x\,Q(x)$	(KB-Annahme)
9.	$\Vert\ P(a)$	8. (SIMP1)
10.	$\Vert\ \forall x\,Q(x)$	8. (SIMP2)
11.	$\Vert\ Q(x)$	10. (UB)
12.	$\Vert\ P(a) \land Q(x)$	9., 11. (ADD)
13.	$\Vert\ \forall x\,(P(a) \land Q(x))$	12. (UE)
14.	$P(a) \land \forall x\,Q(x) \to \forall x\,(P(a) \land Q(x))$	8.–13. (KB)
15.	$\forall x\,(P(a) \land Q(x)) \leftrightarrow P(a) \land \forall x\,Q(x)$	7., 14. (ÄQ-EIN)

5. $\vdash \forall x\,(P(a) \to Q(x)) \leftrightarrow (P(a) \to \forall x\,Q(x))$

Antwort

1.	$\Vert\ \forall x\,(P(a) \to Q(x))$	(KB-Annahme)
2.	$\Vert\ P(a) \to Q(x)$	1. (UB)
3.	$\Vert\ \Vert\ P(a)$	(KB-Annahme)
4.	$\Vert\ \Vert\ Q(x)$	2., 3. (MP)
5.	$\Vert\ \Vert\ \forall x\,Q(x)$	4. (UE)
6.	$\Vert\ P(a) \to \forall x\,Q(x)$	3.–5. (KB)
7.	$\forall x\,(P(a) \to Q(x)) \to (P(a) \to \forall x\,Q(x))$	1.–6. (KB)
8.	$\Vert\ P(a) \to \forall x\,Q(x)$	(KB-Annahme)
9.	$\Vert\ \Vert\ P(a)$	(KB-Annahme)
10.	$\Vert\ \Vert\ \forall x\,Q(x)$	8., 9. (MP)
11.	$\Vert\ \Vert\ Q(x)$	10. (UB)
12.	$\Vert\ P(a) \to Q(x)$	9.–11. (KB)
13.	$\Vert\ \forall x\,(P(a) \to Q(x))$	12. (UE)
14.	$(P(a) \to \forall x\,Q(x)) \to \forall x\,(P(a) \to Q(x))$	8.–13. (KB)
15.	$\forall x\,(P(a) \to Q(x)) \leftrightarrow (P(a) \to \forall x\,Q(x))$	7., 14. (ÄQ-EIN)

6. $\forall x \, \neg P(x) \vdash \neg \exists x \, P(x)$

Antwort

1.	$\forall x \, \neg P(x)$	(P1)
2.	$\|\| \; \neg\neg\exists x \, P(x)$	(IB-Annahme)
3.	$\|\| \; \exists x \, P(x)$	2. (DN2)
4.	$\|\| \; \|\| \; P(x)$	(EB-Annahme)[64]
5.	$\|\| \; \|\| \; \neg P(x)$	1. (UB)
6.	$\|\| \; \|\| \; Q(a) \land \neg Q(a)$	4., 5. (ECQ)
7.	$\|\| \; Q(a) \land \neg Q(a)$	4.–6. (EB)
8.	$\neg \exists x \, P(x)$	2.–7. (IB)

64: In Bezug auf den 3. Schritt.

Erklärung

Die Variable x kommt in keiner Annahme frei vor. Deshalb können wir $P(x)$ als EB-Annahme verwenden.

7. $\vdash P(a) \land \exists x \, Q(x) \leftrightarrow \exists x \, (P(a) \land Q(x))$

Antwort

1.	$\|\| \; P(a) \land \exists x \, Q(x)$	(KB-Annahme)
2.	$\|\| \; P(a)$	1. (SIMP1)
3.	$\|\| \; \exists x \, Q(x)$	1. (SIMP2)
4.	$\|\| \; \|\| \; Q(x)$	(EB-Annahme)[65]
5.	$\|\| \; \|\| \; P(a) \land Q(x)$	2., 4. (KON)
6.	$\|\| \; \|\| \; \exists x \, (P(a) \land Q(x))$	5. (EE)
7.	$\|\| \; \exists x \, (P(a) \land Q(x))$	4.–6. (EB)
8.	$P(a) \land \exists x \, Q(x) \to \exists x \, (P(a) \land Q(x))$	1.–7. (KB)
9.	$\|\| \; \exists x \, (P(a) \land Q(x))$	(KB-Annahme)
10.	$\|\| \; \|\| \; P(a) \land Q(x)$	(EB-Annahme)[66]
11.	$\|\| \; \|\| \; P(a)$	10. (SIMP1)
12.	$\|\| \; \|\| \; Q(x)$	10. (SIMP2)
13.	$\|\| \; \|\| \; \exists x \, Q(x)$	12. (EE)
14.	$\|\| \; \|\| \; P(a) \land \exists x \, Q(x)$	11., 13. (KON)
15.	$\|\| \; P(a) \land \exists x \, Q(x)$	10.–14. (EB)
16.	$\exists x \, (P(a) \land Q(x)) \to P(a) \land \exists x \, Q(x)$	9.–15. (KB)
17.	$P(a) \land \exists x \, Q(x) \leftrightarrow \exists x \, (P(a) \land Q(x))$	8., 16. (ÄQ-EIN)

65: In Bezug auf den 3. Schritt.

66: In Bezug auf den 9. Schritt.

8. $\vdash P(a) \lor \exists x\, Q(x) \leftrightarrow \exists x\, (P(a) \lor Q(x))$

Antwort

1.	$\|\|\ P(a) \lor \exists x\, Q(x)$	(KB-Annahme)
2.	$\|\|\ \|\|\ P(a)$	(FU-Annahme 1)
3.	$\|\|\ \|\|\ P(a) \lor Q(x)$	2. (ADD1)
4.	$\|\|\ \|\|\ \exists x\, (P(a) \lor Q(x))$	3. (EE)
5.	$\|\|\ \|\|\ \neg P(a)$	(FU-Annahme 2)
6.	$\|\|\ \|\|\ \exists x\, Q(x)$	1., 5. (DS1)
7.	$\|\|\ \|\|\ \|\|\ Q(x)$	(EB-Annahme)[67]
8.	$\|\|\ \|\|\ \|\|\ P(a) \lor Q(x)$	7. (ADD2)
9.	$\|\|\ \|\|\ \|\|\ \exists x\, (P(a) \lor Q(x))$	8. (EE)
10.	$\|\|\ \|\|\ \exists x\, (P(a) \lor Q(x))$	7.–9. (EB)
11.	$\|\|\ \exists x\, (P(a) \lor Q(x))$	2.–10. (FU)
12.	$P(a) \lor \exists x\, Q(x) \to \exists x\, (P(a) \lor Q(x))$	1.–11. (KB)
13.	$\|\|\ \exists x\, (P(a) \lor Q(x))$	(KB-Annahme)
14.	$\|\|\ \|\|\ P(a) \lor Q(x)$	(EB-Annahme)[68]
15.	$\|\|\ \|\|\ \|\|\ P(a)$	(FU-Annahme 1)
16.	$\|\|\ \|\|\ \|\|\ P(a) \lor \exists x\, Q(x)$	15. (ADD1)
17.	$\|\|\ \|\|\ \|\|\ \neg P(a)$	(FU-Annahme 2)
18.	$\|\|\ \|\|\ \|\|\ Q(x)$	14., 17. (DS1)
19.	$\|\|\ \|\|\ \|\|\ \exists x\, Q(x)$	18. (EE)
20.	$\|\|\ \|\|\ \|\|\ P(a) \lor \exists x\, Q(x)$	19. (ADD2)
21.	$\|\|\ \|\|\ P(a) \lor \exists x\, Q(x)$	15.–20. (FU)
22.	$\|\|\ P(a) \lor \exists x\, Q(x)$	14.–21. (EB)
23.	$\exists x\, (P(a) \lor Q(x)) \to P(a) \lor \exists x\, Q(x)$	13.–19. (KB)
24.	$P(a) \lor \exists x\, Q(x) \leftrightarrow \exists x\, (P(a) \lor Q(x))$	12., 23. (ÄQ-EIN)

67: In Bezug auf den 6. Schritt.

68: In Bezug auf den 13. Schritt.

9. $\exists x\, P(x) \vee \exists x\, Q(x) \vdash \exists x\, (P(x) \vee Q(x))$

Antwort

1.	$\exists x\, P(x) \vee \exists x\, Q(x)$	(P1)
2.	$\|\|\ \exists x\, P(x)$	(FU-Annahme 1)
3.	$\|\|\ \|\|\ P(x)$	(EB-Annahme)[69]
4.	$\|\|\ \|\|\ P(x) \vee Q(x)$	3. (ADD1)
5.	$\|\|\ \|\|\ \exists x\, (P(x) \vee Q(x))$	4. (EE)
6.	$\|\|\ \exists x\, (P(x) \vee Q(x))$	3.–5. (EB)
7.	$\|\|\ \neg\exists x\, P(x)$	(FU-Annahme 2)
8.	$\|\|\ \exists x\, Q(x)$	1., 7. (DS1)
9.	$\|\|\ \|\|\ Q(x)$	(EB-Annahme)[70]
10.	$\|\|\ \|\|\ P(x) \vee Q(x)$	9. (ADD2)
11.	$\|\|\ \|\|\ \exists x\, (P(x) \vee Q(x))$	10. (EE)
12.	$\|\|\ \exists x\, (P(x) \vee Q(x))$	9.–11. (EB)
13.	$\exists x\, (P(x) \vee Q(x))$	2.–12. (FU)

69: In Bezug auf den 2. Schritt.

70: In Bezug auf den 8. Schritt.

10. $\exists x\, (P(x) \rightarrow Q(x)), \forall x\, P(x) \vdash \exists x\, Q(x)$

Antwort

1.	$\exists x\, (P(x) \rightarrow Q(x))$	(P1)
2.	$\forall x\, P(x)$	(P2)
3.	$\|\|\ P(x) \rightarrow Q(x)$	(EB-Annahme)[71]
4.	$\|\|\ P(x)$	2. (UB)
5.	$\|\|\ Q(x)$	3., 4. (MP)
6.	$\|\|\ \exists x\, Q(x)$	5. (EE)
7.	$\exists x\, Q(x)$	3.–6. (EB)

71: In Bezug auf P1.

11. $\vdash (P(a) \rightarrow \exists x\, Q(x)) \leftrightarrow \exists x\, (P(a) \rightarrow Q(x))$

Antwort

1.	$\|\ P(a) \rightarrow \exists x\, Q(x)$	(KB-Annahme)
2.	$\|\ \|\ P(a)$	(FU-Annahme 1)
3.	$\|\ \|\ \exists x\, Q(x)$	1., 2. (MP)
4.	$\|\ \|\ \|\ Q(x)$	(EB-Annahme)[72]
5.	$\|\ \|\ \|\ \|\ P(a)$	(KB-Annahme)
6.	$\|\ \|\ \|\ \|\ Q(x)$	4. (TS)
7.	$\|\ \|\ \|\ P(a) \rightarrow Q(x)$	5.–6. (KB)
8.	$\|\ \|\ \|\ \exists x\, (P(a) \rightarrow Q(x))$	7. (EE)
9.	$\|\ \|\ \exists x\, (P(a) \rightarrow Q(x))$	4.–8. (EB)
10.	$\|\ \|\ \neg P(a)$	(FU-Annahme 2)
11.	$\|\ \|\ \|\ P(a)$	(KB-Annahme)
12.	$\|\ \|\ \|\ Q(x)$	10., 11. (ECQ)
13.	$\|\ \|\ P(a) \rightarrow Q(x)$	11.–12. (KB)
14.	$\|\ \|\ \exists x\, (P(a) \rightarrow Q(x))$	13. (EE)
15.	$\|\ \exists x\, (P(a) \rightarrow Q(x))$	2.–14. (FU)
16.	$(P(a) \rightarrow \exists x\, Q(x)) \rightarrow \exists x\, (P(a) \rightarrow Q(x))$	1.–15. (KB)
17.	$\|\ \exists x\, (P(a) \rightarrow Q(x))$	(KB-Annahme)
18.	$\|\ \|\ P(a)$	(KB-Annahme)
19.	$\|\ \|\ \|\ P(a) \rightarrow Q(x)$	(EB-Annahme)[73]
20.	$\|\ \|\ \|\ Q(x)$	18., 19. (MP)
21.	$\|\ \|\ \|\ \exists x\, Q(x)$	20. (EE)
22.	$\|\ \|\ \exists x\, Q(x)$	19.–21. (EB)
23.	$\|\ P(a) \rightarrow \exists x\, Q(x)$	18.–22. (KB)
24.	$\exists x\, (P(a) \rightarrow Q(x)) \rightarrow (P(a) \rightarrow \exists x\, Q(x))$	17.–23. (KB)
25.	$(P(a) \rightarrow \exists x\, Q(x)) \leftrightarrow \exists x\, (P(a) \rightarrow Q(x))$	16., 24. (ÄQ-EIN)

72: In Bezug auf den 3. Schritt.

73: In Bezug auf den 17. Schritt.

Herleitungen aus Übung 11.2.

1. Alle Österreicher sind Europäer. Alle Salzburger sind Österreicher. Also sind alle Salzburger Europäer.

Antwort

1.	$\forall x\,(O(x) \rightarrow E(x))$	(P1)
2.	$\forall x\,(S(x) \rightarrow O(x))$	(P2)
3.	$\|\|\ S(x)$	(KB-Annahme)
4.	$\|\|\ S(x) \rightarrow O(x)$	2. (UB)
5.	$\|\|\ O(x)$	3., 4. (MP)
6.	$\|\|\ O(x) \rightarrow E(x)$	1. (UB)
7.	$\|\|\ E(x)$	5., 6. (MP)
8.	$S(x) \rightarrow E(x)$	3.–7. (KB)
9.	$\forall x\,(S(x) \rightarrow E(x))$	8. (UE)

2. Alle Philosophen sind weise. Nun gibt es Salzburger Philosophen. Also sind einige Salzburger weise.

Antwort

1.	$\forall x\,(P(x) \rightarrow W(x))$	(P1)
2.	$\exists x\,(S(x) \land P(x))$	(P2)
3.	$\|\|\ S(x) \land P(x)$	(EB-Annahme)[74]
4.	$\|\|\ P(x)$	3. (SIMP2)
5.	$\|\|\ P(x) \rightarrow W(x)$	1. (UB)
6.	$\|\|\ W(x)$	4., 5. (MP)
7.	$\|\|\ S(x)$	3. (SIMP1)
8.	$\|\|\ S(x) \land W(x)$	6., 7. (KON)
9.	$\|\|\ \exists x\,(S(x) \land W(x))$	8. (EE)
10.	$\exists x\,(S(x) \land W(x))$	3.–9. (EB)

74: In Bezug auf P2.

3. Es gibt keine Österreicher, die auf den Mond geflogen sind. Es gibt aber Kosmonauten, die Österreicher sind. Daher sind nicht alle Kosmonauten auf den Mond geflogen.

Antwort

1.	$\neg\exists x\,(O(x) \wedge G(x,m))$	(P1)
2.	$\exists x\,(K(x) \wedge O(x))$	(P2)
3.	$\|\ K(x) \wedge O(x)$	(EB-Annahme)[75]
4.	$\|\ K(x)$	3. (SIMP1)
5.	$\|\ O(x)$	3. (SIMP2)
6.	$\|\ \|\ \neg\neg\forall x\,(K(x) \rightarrow G(x,m))$	(IB-Annahme)
7.	$\|\ \|\ \forall x\,(K(x) \rightarrow G(x,m))$	6. (DN2)
8.	$\|\ \|\ K(x) \rightarrow G(x,m)$	7. (UB)
9.	$\|\ \|\ G(x,m)$	4., 8. (MP)
10.	$\|\ \|\ O(x) \wedge G(x,m)$	5., 9. (KON)
11.	$\|\ \|\ \exists x\,(O(x) \wedge G(x,m))$	10. (EE)
12.	$\|\ \|\ \exists x\,(O(x) \wedge G(x,m)) \wedge \neg\exists x\,(O(x) \wedge G(x,m))$	11., 1. (KON)
13.	$\|\ \neg\forall x\,(K(x) \rightarrow G(x,m))$	6.–12. (IB)
14.	$\neg\forall x\,(K(x) \rightarrow G(x,m))$	3.–13. (EB)

75: In Bezug auf P2.

4. Nicht ein Lebewesen auf dem Mars ist glatzköpfig. Alle Skinheads sind jedoch glatzköpfig. Somit gibt es keinen Skinhead, der ein Lebewesen auf dem Mars ist.

Herleitung

1.	$\neg\exists x\,(L(x,m) \wedge G(x))$	(P1)
2.	$\forall x\,(S(x) \rightarrow G(x))$	(P2)
3.	|| $\neg\neg\exists x\,(S(x) \wedge L(x,m))$	(IB-Annahme)
4.	|| $\exists x\,(S(x) \wedge L(x,m))$	3. (DN)
5.	|| || $S(x) \wedge L(x,m)$	(EB-Annahme)[76]
6.	|| || $S(x)$	5. (SIMP1)
7.	|| || $S(x) \rightarrow G(x)$	2. (UB)
8.	|| || $G(x)$	6., 7. (MP)
9.	|| || $L(x,m)$	5. (SIMP2)
10.	|| || $G(x) \wedge L(x,m)$	8., 9. (KON)
11.	|| || $\exists x\,(G(x) \wedge L(x,m))$	10. (EE)
12.	|| || $A(a) \wedge \neg A(a)$	11., 1. (ECQ)
13.	|| $A(a) \wedge \neg A(a)$	5.–12. (EB)
14.	$\neg\exists x\,(S(x) \wedge L(x,m))$	3.–13. (EB)

76: In Bezug auf den 4. Schritt.

Herleitungen aus Übung 11.3.

2. Es gibt Lebewesen auf dem Mars. Alle Lebewesen auf dem Mars sind glatzköpfig. Somit gibt es Lebewesen auf dem Mars, die glatzköpfig sind.

Antwort

1.	$\exists x\, L(x,m)$	(P1)
2.	$\forall x\,(L(x,m) \rightarrow G(x))$	(P2)
3.	|| $L(x,m)$	(EB-Annahme)[77]
4.	|| $L(x,m) \rightarrow G(x)$	2. (UB)
5.	|| $G(x)$	3., 4. (MP)
6.	|| $L(x,m) \wedge G(x)$	3., 5. (KON)
7.	|| $\exists x\,(L(x,m) \wedge G(x))$	6. (EE)
8.	$\exists x\,(L(x,m) \wedge G(x))$	3.–7. (EB)

77: In Bezug auf P1.

Herleitungen aus Übung 11.4.

1. $\exists x\, \forall y\, R(x,y) \vdash \forall y\, \exists x\, R(x,y)$

Antwort

1.	$\exists x\, \forall y\, R(x,y)$	(P1)
2.	$\|\| \quad \forall y\, R(x,y)$	(EB-Annahme)[78]
3.	$\|\| \quad R(x,y)$	2. (UB)
4.	$\|\| \quad \exists x\, R(x,y)$	3. (EE)
5.	$\|\| \quad \forall y\, \exists x\, R(x,y)$	4. (UE)
6.	$\forall y\, \exists x\, R(x,y)$	2.–5. (EB)

78: In Bezug auf P1.

2. $\neg\exists x\, \neg P(x) \vdash \forall x\, P(x)$

Antwort

1.	$\neg\exists x\, \neg P(x)$	(P1)
2.	$\|\| \quad \neg P(x)$	(IB-Annahme)
3.	$\|\| \quad \exists x\, \neg P(x)$	2. (EE)
4.	$\|\| \quad \exists x\, \neg P(x) \wedge \neg\exists x\, \neg P(x)$	3., 1. (KON)
5.	$P(x)$	2.–4. (IB)
6.	$\forall x\, P(x)$	5. (UE)

3. $\exists x\, P(x) \vdash \neg\forall x\, \neg P(x)$

Antwort

1.	$\exists x\, P(x)$	(P1)
2.	$\|\| \quad \neg\neg\forall x\, \neg P(x)$	(IB-Annahme)
3.	$\|\| \quad \forall x\, \neg P(x)$	2. (DN2)
4.	$\|\| \; \|\| \quad P(x)$	(EB-Annahme)[79]
5.	$\|\| \; \|\| \quad \neg P(x)$	3. (UB)
6.	$\|\| \; \|\| \quad Q(a) \wedge \neg Q(a)$	4., 5. (ECQ)
7.	$\|\| \quad Q(a) \wedge \neg Q(a)$	4.–6. (EB)
8.	$\neg\forall x\, \neg P(x)$	2.–7. (IB)

79: In Bezug auf P1.

4. $\neg\exists x\, P(x) \vdash \forall x\, \neg P(x)$

Antwort

1.	$\neg\exists x\, P(x)$	(P1)
2.	$\|\|\ \neg\neg P(x)$	(IB-Annahme)
3.	$\|\|\ P(x)$	2. (DN2)
4.	$\|\|\ \exists x\, P(x)$	3. (EE)
5.	$\|\|\ \exists x\, P(x) \wedge \neg\exists x\, P(x)$	4., 1. (KON)
6.	$\neg P(x)$	2.–5. (IB)
7.	$\forall x\, \neg P(x)$	6. (UE)

5. $\exists x\, \neg P(x) \vdash \neg\forall x\, P(x)$

Antwort

1.	$\exists x\, \neg P(x)$	(P1)
2.	$\|\|\ \neg P(x)$	(EB-Annahme)[80]
3.	$\|\|\ \|\|\ \neg\neg\forall x\, P(x)$	(IB-Annahme)
4.	$\|\|\ \|\|\ \forall x\, P(x)$	3. (DN2)
5.	$\|\|\ \|\|\ P(x)$	4. (UB)
6.	$\|\|\ \|\|\ P(x) \wedge \neg P(x)$	5., 2. (KON)
7.	$\|\|\ \neg\forall x\, P(x)$	6. (IB)
8.	$\neg\forall x\, P(x)$	2.–7. (EB)

80: In Bezug auf P1.

6. $\forall x\, (\exists y\, P(y) \rightarrow Q(x)) \vdash \forall y\, (P(y) \rightarrow Q(a))$

Antwort

1.	$\forall x\, (\exists y\, P(y) \rightarrow Q(x))$	(P1)
2.	$\exists y\, P(y) \rightarrow Q(a)$	1. (UB)
3.	$\|\|\ P(y)$	(KB-Annahme)
4.	$\|\|\ \exists y\, P(y)$	3. (EE)
5.	$\|\|\ Q(a)$	2., 4. (MP)
6.	$P(y) \rightarrow Q(a)$	3.–5. (KB)
7.	$\forall y\, (P(y) \rightarrow Q(a))$	6. (UE)[81]

81: Schritt erlaubt, weil y in keiner Annahme frei vorkommt.

7. $\neg\forall x\,(P(x) \to Q(x)) \vdash \exists x\,(P(x) \land \neg Q(x))$

Antwort

1.	$\neg\forall x\,(P(x) \to Q(x))$	(P1)
2.	$\|\ \ \neg\exists x\,(P(x) \land \neg Q(x)$	(IB-Annahme)
3.	$\|\ \|\ \ P(x)$	(FU-Annahme 1)
4.	$\|\ \|\ \|\ \ Q(x)$	(FU-Annahme 1.1)
5.	$\|\ \|\ \|\ \|\ \ P(x)$	(KB-Annahme)
6.	$\|\ \|\ \|\ \|\ \ Q(x)$	4. (TS)
7.	$\|\ \|\ \|\ \ P(x) \to Q(x)$	5.–6. (KB)
8.	$\|\ \|\ \|\ \ \neg Q(x)$	(FU-Annahme 1.2)
9.	$\|\ \|\ \|\ \ P(x) \land \neg Q(x)$	3., 8. (KON)
10.	$\|\ \|\ \|\ \ \exists x\,(P(x) \land \neg Q(x))$	9. (EE)
11.	$\|\ \|\ \|\ \ P(x) \to Q(x)$	2., 10. (EQC)
12.	$\|\ \|\ \ P(x) \to Q(x)$	4.–11. (FU)
13.	$\|\ \|\ \ \neg P(x)$	(FU-Annahme 2)
14.	$\|\ \|\ \|\ \ P(x)$	(KB-Annahme)
15.	$\|\ \|\ \|\ \ Q(x)$	13., 14. (ECQ)
16.	$\|\ \|\ \ P(x) \to Q(x)$	14.–15. (KB)
17.	$\|\ \ P(x) \to Q(x)$	3.–16. (FU)
18.	$\|\ \ \forall x\,(P(x) \to Q(x))$	17. (UE)
19.	$\|\ \ \forall x\,(P(x) \to Q(x)) \land \neg\forall x\,(P(x) \to Q(x))$	18., 1. (KON)
20.	$\exists x\,(P(x) \land \neg Q(x)$	2.–19. (IB)[82]

82: Schritt erlaubt, weil x in keiner Annahme frei vorkommt.

Herleitungen aus Übung 11.5.

1. Alles hat eine Ursache. Gott hat jedoch keine Ursache. Also ist der Papst Tiroler.

Herleitung zu Repräsentation 1

1.	$\forall x\, \exists y\, U(y,x)$	(P1)
2.	$\neg\exists x\, U(x,g)$	(P2)
3.	$\exists y\, U(y,g)$	1. (UB)
4.	$\|\|\ U(x,g)$	(EB-Annahme)[83]
5.	$\|\|\ \exists x\, U(x,g)$	4. (EE)
6.	$\|\|\ T(p)$	4. (ECQ)
7.	$T(p)$	3.–6. (EB)

83: In Bezug auf den 3. Schritt.

Herleitung zu Repräsentation 2

1.	$\forall x\, \exists y\, U(y,x)$	(P1)
2.	$\neg\exists y\, U(y,g)$	(P2)
3.	$\exists y\, U(y,g)$	1. (UB)
4.	$T(p)$	3., 2. (ECQ)

2. Alle Salzburger lieben Salzburg. Es gibt jedoch niemanden, der Salzburg und alle Touristen in Salzburg liebt. Somit lieben die Salzburger nicht alle Touristen in Salzburg.

Herleitung

1.	$\forall x\,(S(x) \rightarrow L(x,s))$	(P1)
2.	$\neg\exists x\,(L(x,s) \wedge \forall y\,(T(y,s) \rightarrow L(x,y)))$	(P2)
3.	$\|\| \; S(x)$	(KB-Annahme)
4.	$\|\| \; S(x) \rightarrow L(x,s)$	1. (UB)
5.	$\|\| \; L(x,s)$	3., 4. (MP)
6.	$\|\| \; \|\| \; \neg\neg\forall y\,(T(y,s) \rightarrow L(x,y))$	(IB-Annahme)
7.	$\|\| \; \|\| \; \forall y\,(T(y,s) \rightarrow L(x,y))$	6. (DN2)
8.	$\|\| \; \|\| \; L(x,s) \wedge \forall y\,(T(y,s) \rightarrow L(x,y))$	5., 7. (KON)
9.	$\|\| \; \|\| \; \exists x\,(L(x,s) \wedge \forall y\,(T(y,s) \rightarrow L(x,y)))$	5., 7. (EE)
10.	$\|\| \; \|\| \; Q(a) \wedge \neg Q(a)$	9., 2. (ECQ)
11.	$\|\| \; \neg\forall y\,(T(y,s) \rightarrow L(x,y))$	6., 10. (IB)
12.	$S(x) \rightarrow \neg\forall y\,(T(y,s) \rightarrow L(x,y))$	3.–11. (KB)
13.	$\forall x\,(S(x) \rightarrow \neg\forall y\,(T(y,s) \rightarrow L(x,y)))$	12. (UE)

3. Es gibt nichts Allmächtiges. Wenn etwas ein Gott ist, ist es jedoch allmächtig. Also gibt es keinen Gott.

Herleitung

1.	$\neg\exists x\,A(x)$	(P1)
2.	$\forall x\,(G(x) \rightarrow A(x))$	(P2)
3.	$\|\| \; \neg\neg\exists x\,G(x)$	(IB-Annahme)
4.	$\|\| \; \exists x\,G(x)$	3. (DN2)
5.	$\|\| \; \|\| \; G(x)$	(EB-Annahme)[84]
6.	$\|\| \; \|\| \; G(x) \rightarrow A(x)$	2. (UB)
7.	$\|\| \; \|\| \; A(x)$	5., 6. (MP)
8.	$\|\| \; \|\| \; \exists x\,A(x)$	7. (EE)
9.	$\|\| \; \|\| \; Q(a) \wedge \neg Q(a)$	8., 1. (ECQ)
10.	$\|\| \; Q(a) \wedge \neg Q(a)$	5.–9. (EB)
11.	$\neg\exists x\,G(x)$	3.–10. (IB)

84: In Bezug auf den 4. Schritt.

Lösung zu Zusatzübung 11.2 Beweisen Sie die logische Gültigkeit der folgenden Argumente mit Herleitungen[85]:

1. $\vdash \forall x\, \forall y\, F(x, y) \leftrightarrow \forall y\, \forall x\, F(x, y)$
2. $\vdash \forall x\, (F(x) \land G(x)) \leftrightarrow \forall x\, F(x) \land \forall x\, G(x)$
3. $\forall x\, (F(x) \rightarrow G(x)) \vdash (\forall x\, F(x) \rightarrow \forall x\, G(x))$
4. $\forall x\, (F(x) \leftrightarrow G(x)) \vdash (\forall x\, F(x) \leftrightarrow \forall x\, G(x))$
5. $\vdash \exists x\, F(x) \leftrightarrow \neg\forall x\, \neg F(x)$
6. $\vdash \exists x\, \neg F(x) \leftrightarrow \neg\forall x\, F(x)$
7. $\vdash \neg\exists x\, \neg F(x) \leftrightarrow \forall x\, F(x)$
8. $\vdash \neg\exists x\, F(x) \leftrightarrow \forall x\, \neg F(x)$
9. $\forall x\, (F(x) \rightarrow G(x)) \vdash (\exists x\, F(x) \rightarrow \exists x\, G(x))$
10. $\forall x\, (F(x) \leftrightarrow G(x)) \vdash (\exists x\, F(x) \leftrightarrow \exists x\, G(x))$
11. $\exists x\, \forall y\, F(x, y) \vdash \forall y\, \exists x\, F(x, y)$
12. $\forall x\, \forall y\, F(x, y) \vdash \forall x\, F(x, x)$
13. $\vdash \exists x\, (A \land F(x)) \leftrightarrow A \land \exists x\, F(x)$
14. $\vdash \exists x\, (A \lor F(x)) \leftrightarrow A \lor \exists x\, F(x)$
15. $\vdash \exists x\, (F(x) \lor G(x)) \leftrightarrow \exists x\, F(x) \lor \exists x\, G(x)$
16. $\vdash \exists x\, (F(x) \lor A) \leftrightarrow \exists x\, F(x) \lor A$
17. $\vdash \forall x\, (F(x) \lor A) \leftrightarrow \forall x\, F(x) \lor A$
18. $\exists x\, F(x, x) \vdash \exists x\, \exists y\, F(x, y)$
19. $\vdash \exists x\, \neg\exists y\, \neg(F(x) \lor \neg F(y))$

[Ausstehend.]

85: Adaptiert aus D. Hilbert & W. Ackermann, *Gründzüge der theoretischen Logik* (6. Auf.), Berlin: Springer, 1972, S. 83.

Erweiterungen der Prädikatenlogik 13

13.1 Vorbereitung

13.1.1 Äquivalenz- und Totalordnungsrelationen

Relationen können verschiedene Eigenschaften haben, von denen die folgenden besonders bemerkenswert sind:

Reflexivität: Für alle $t : R(t, t)$.

Symmetrie: Für alle $t_1, t_2 : R(t_1, t_2) \rightarrow R(t_2, t_1)$.

Transitivität: Für alle $t_1, t_2, t_3 : R(t_1, t_2) \wedge R(t_2, t_3) \rightarrow R(t_1, t_3)$.

Totalität: Für alle $t_1, t_2 : R(t_1, t_2) \vee R(t_2, t_1)$.

Es gibt zwei wichtige Arten von Relationen, die mehrere dieser Eigenschaften erfüllen:

Definition: Äquivalenzrelation

Eine Relation R ist eine *Äquivalenzrelation* gdw sie reflexiv, symmetrisch und transitiv ist.

Definition: Totalordnungsrelation

Eine Relation R ist eine *Totalordnungsrelation* gdw sie reflexiv, transitiv un total ist. D.h., die Inferenzregeln

Die folgenden Inferenzregeln sind für Relationen R angemessen, die reflexiv bzw. symmetrisch bzw. transitiv bzw. total sind.

Inferenzregeln für Reflexivität, Symmetrie, Transitivität und Totalität

$$\vdash \forall v\, R(v, v) \qquad (R\text{-REF1})$$

$$\vdash R(t, t) \qquad (R\text{-REF2})$$

$$\vdash \forall v_1 \forall v_2\, (R(v_1, v_2) \rightarrow R(v_2, v_1)) \qquad (R\text{-SYM1})$$

$$R(t_1, t_2) \vdash R(t_2, t_1) \qquad (R\text{-SYM2})$$

$$\vdash \forall v_1 \forall v_2 \forall v_3\, (R(v_1, v_2) \wedge R(v_2, v_3) \rightarrow R(v_1, v_3)) \qquad (R\text{-TRA1})$$

$$R(t_1, t_2), R(t_2, t_3) \vdash R(t_1, t_3) \qquad (R\text{-TRA2})$$

$$\vdash \forall v_1 \forall v_2\, (R(v_1, v_2) \vee R(v_2, v_1)) \qquad (R\text{-TOT1})$$

$$\neg R(t_1, t_2) \vdash R(t_2, t_1) \qquad (R\text{-TOT2})$$

Wie im Skript gesagt wurde, ist die Identitätsrelation eine Äquivalenzrelation.

Aktivierungselement 13.1. Formulieren Sie die Inferenzregeln, die der Relation der Identität (=) als Äquivalenzrelation entsprechen.

13.1.2 Präferenz und Indifferenz

Die Relationen der (schwacher) Präferenz ($\succcurlyeq$), strikten Präferenz ($\succ$) und Indifferenz ($\approx$) besitzen einige dieser Eigenschaften. Nun fügen wir sie zu unserer Sprache hinzu:

Formationsregel: Wenn t_1, t_2 singuläre Terme sind, dann sind $t_1 \succcurlyeq t_2$, $t_1 \succ t_2$ und $t_1 \approx t_2$ Formeln.

Die Relation $\succcurlyeq$ ist eine Totalordnungsrelation.

Aktivierungselement 13.2. Formulieren Sie die Inferenzregeln, die der Relation der (schwachen) Präferenz ($\succcurlyeq$) als Totalordnungsrelation entsprechen.

Die Relationen der strikten Präferenz ($\succ$) und der Indifferenz ($\approx$) können wie folgt aus der Relation der (schwachen) Präferenz definiert werden:

Definition: Strikte Präferenz ($\succ$) und Indifferenz ($\approx$)

$$t_1 \succ t_2 \overset{\text{def}}{=} (t_1 \succcurlyeq t_2 \land \neg t_2 \succcurlyeq t_1)$$

$$t_1 \approx t_2 \overset{\text{def}}{=} (t_1 \succcurlyeq t_2 \land t_2 \succcurlyeq t_1)$$

Falls zwei Ausdrücke definitionsäquivalent sind, können wir sie beliebig gegeneinander austauschen. Siehe hierzu exemplarisch die Herleitung der Reflexivität von $\approx$.

1.	$x \succcurlyeq x$	($\succcurlyeq$-REF1)
2.	$x \succcurlyeq x \land x \succcurlyeq x$	1., 1. (KON)
3.	$x \approx x$	2. (Def. $\approx$)
4.	$\forall x\, x \approx x$	3. (UE)[1]

1: UE ist hier zulässig, da x in keiner Prämisse frei vorkommt – x im 1. Schritt würde ohne Prämisse hergeleitet.

Die Indifferenzrelation ist nicht nur reflexiv, sondern besitzt darüber hinaus alle Eigenschaften, die sie zur Äquivalenzrelation qualifizieren.

Aktivierungselement 13.3. Beweisen Sie durch Herleitungen, dass die Relation $\approx$ eine Äquivalenzrelation ist.

13.1.3 Äquivalenz von Inferenzregelpaare

Jede der oben genannten Inferenzregeln besitzt zwei äquivalente Versionen (z.B. REF1 und REF2). Zur Veranschaulichung zeigen wir dies exemplarisch anhand eines Beweises für R-SYM.

Beweis. Zum Beweis führen wir zwei Herleitungen: zunächst leiten wir R-SYM2 aus R-SYM1 her und dann R-SYM1 aus R-SYM2.

($\Rightarrow$) Nehmen wir R-SYM1 an und führen eine Herleitung mit $R(x,y)$ als Prämisse durch. Dann haben wir:

1.	$R(x,y)$	(P1)
2.	$\forall x \forall y\,(R(x,y) \to R(y,x))$	(R-SYM1)
3.	$\forall y\,(R(x,y) \to R(y,x))$	2. (UB)
4.	$R(x,y) \to R(y,x)$	3. (UB)
5.	$R(y,x)$	1., 4. (MP)

($\Leftarrow$) Nehmen wir nun R-SYM2 an. Dann haben wir:

1.	$\|\|\ R(x,y)$	(KBA)
2.	$\|\|\ R(y,x)$	1. (R-SYM2)
3.	$R(x,y) \to R(y,x)$	1.–2. (KB)
4.	$\forall y\,(R(x,y) \to R(y,x))$	3. (UE)
5.	$\forall x \forall y\,(R(x,y) \to R(y,x))$	4. (UE)

Beide Herleitungen zeigen, dass man die eine Inferenzregel aus der anderen gewinnen kann – und umgekehrt. □

Aktivierungselement 13.4. Zeigen Sie, dass die Inferenzregelpaare R-REF1/R-REF2, R-TRA1/R-TRA2 und R-TOT1/R-TOT2.

13.1.4 Andere Eigenschaften von Relationen

Neben den bisher behandelten gibt es weitere wichtige Eigenschaften von einer Relation R mit jeweils zugehörigen Inferenzregeln, wie im Folgenden dargestellt:

Reflexivität: Für alle $t : R(t, t)$.

Symmetrie: Für alle $t_1, t_2 : R(t_1, t_2) \rightarrow R(t_2, t_1)$.

Transitivität: Für alle $t_1, t_2, t_3 : R(t_1, t_2) \wedge R(t_2, t_3) \rightarrow R(t_1, t_3)$.

Totalität: Für alle $t_1, t_2 : R(t_1, t_2) \vee R(t_2, t_1)$.

Irreflexivität: Für alle $t : \neg R(t, t)$.

Asymmetrie: Für alle $t_1, t_2 : R(t_1, t_2) \rightarrow \neg R(t_2, t_1)$.

Antisymmetrie: Für alle $t_1, t_2 : R(t_1, t_2) \wedge R(t_2, t_1) \rightarrow t_1 = t_2$.

Negative Transitivität: Für alle $t_1, t_2, t_3 :$
$$\neg R(t_1, t_2) \wedge \neg R(t_2, t_3) \rightarrow \neg R(t_1, t_3).$$

Trichotomie: Für alle $t_1, t_2 : R(t_1, t_2) \vee t_1 = t_2 \vee R(t_2, t_1)$.

Inferenzregeln für Reflexivität, Symmetrie, Transitivität und Totalität

$$\vdash \forall v\, R(v, v) \qquad (R\text{-REF1})$$
$$\vdash R(t, t) \qquad (R\text{-REF2})$$
$$\vdash \forall v_1 \forall v_2\, (R(v_1, v_2) \rightarrow R(v_2, v_1)) \qquad (R\text{-SYM1})$$
$$R(t_1, t_2) \vdash R(t_2, t_1) \qquad (R\text{-SYM2})$$
$$\vdash \forall v_1 \forall v_2 \forall v_3\, (R(v_1, v_2) \wedge R(v_2, v_3) \rightarrow R(v_1, v_3)) \qquad (R\text{-TRA1})$$
$$R(t_1, t_2), R(t_2, t_3) \vdash R(t_1, t_3) \qquad (R\text{-TRA2})$$
$$\vdash \forall v_1 \forall v_2\, (R(v_1, v_2) \vee R(v_2, v_1)) \qquad (R\text{-TOT1})$$
$$\neg R(t_1, t_2) \vdash R(t_2, t_1) \qquad (R\text{-TOT2})$$

13.1.5 Lösungen

Lösung zu Aktivierungselement 13.1 Formulieren Sie die Inferenzregeln, die der Relation der Identität (=) als Äquivalenzrelation entsprechen.

Antwort

Die folgende sind Inferenzregeln, die = entsprechen:

$$\vdash \forall v\, v = v \tag{=-REF1}$$
$$\vdash t = t \tag{=-REF2}$$
$$\vdash \forall v_1 \forall v_2\, (v_1 = v_2) \longrightarrow v_2 = v_1 \tag{=-SYM1}$$
$$t_1 = t_2 \vdash t_2 = t_1 \tag{=-SYM2}$$
$$\vdash \forall v_1 \forall v_2 \forall v_3\, (v_1 = v_2 \wedge v_2 = v_3 \longrightarrow v_1 = v_3) \tag{=-TRA1}$$
$$t_1 = t_2, t_2 = t_3 \vdash t_1 = t_3 \tag{=-TRA2}$$

Zusätzlich haben wir die folgende Substitutionsregeln:

$$\vdash \forall v_1 \forall v_2\, (v_1 = v_2 \wedge A[v_1/v_3] \longrightarrow A[v_2/v_3]) \tag{=-SUB1}$$
$$t_1 = t_2, A[t_1/t_3] \vdash A[t_2/t_3] \tag{=-SUB2}$$

Lösung zu Aktivierungselement 13.2. Formulieren Sie die Inferenzregeln, die der Relation der (schwachen) Präferenz ($\succcurlyeq$) als Totalordnungsrelation entsprechen.

Antwort

Die folgende sind Inferenzregeln, die $\succcurlyeq$ entsprechen:

$$\vdash \forall v\, v \succcurlyeq v \tag{$\succcurlyeq$-REF1}$$
$$\vdash t \succcurlyeq t \tag{$\succcurlyeq$-REF2}$$
$$\vdash \forall v_1 \forall v_2 \forall v_3\, (v_1 \succcurlyeq v_2 \wedge v_2 \succcurlyeq v_3 \longrightarrow v_1 \succcurlyeq v_3) \tag{$\succcurlyeq$-TRA1}$$
$$t_1 \succcurlyeq t_2, t_2 \succcurlyeq t_3 \vdash t_1 \succcurlyeq t_3 \tag{$\succcurlyeq$-TRA2}$$
$$\vdash \forall v_1 \forall v_2\, (v_1 \succcurlyeq v_2 \vee v_2 \succcurlyeq v_1) \tag{$\succcurlyeq$-TOT1}$$
$$\neg t_1 \succcurlyeq t_2 \vdash t_2 \succcurlyeq t_1 \tag{$\succcurlyeq$-TOT2}$$

Lösung zu Aktivierungselement 13.3. Beweisen Sie durch Herleitungen, dass die Relation $\approx$ eine Äquivalenzrelation ist.

Beweis. Um zu beweisen, dass $\approx$ eine Äquivalenzrelation ist, müssen wir zeigen, dass sie reflexiv, symmetrisch und transitiv ist. Dies werden wir durch die folgenden Herleitungen tun.

Herleitung der Reflexivität: Siehe Seite 242.

Herleitung der Symmetrie

1.	$\| \; x \approx y$	(KB Annahme)
2.	$\| \; x \succcurlyeq y \wedge y \succcurlyeq x$	1. (Def. $\approx$)
3.	$\| \; x \succcurlyeq y$	2. (SIMP1)
4.	$\| \; y \succcurlyeq x$	2. (SIMP2)
5.	$\| \; y \succcurlyeq x \wedge x \succcurlyeq y$	3., 4. (KON)
6.	$\| \; y \approx x$	5. (Def. $\approx$)
7.	$x \approx y \rightarrow y \approx x$	1.–5. (KB)
8.	$\forall y\,(x \approx y \rightarrow y \approx x)$	7. (UE)
9.	$\forall x \forall y\,(x \approx y \rightarrow y \approx x)$	8.(UE)

Herleitung der Transitivität

1.	$\| \; x \approx y \wedge y \approx z$	(KBA)
2.	$\| \; x \approx y$	(SIMP1)
3.	$\| \; y \approx z$	(SIMP2)
4.	$\| \; x \succcurlyeq y \wedge y \succcurlyeq x$	2. (Def. $\approx$)
5.	$\| \; y \succcurlyeq z \wedge z \succcurlyeq y$	3. (Def. $\approx$)
6.	$\| \; x \succcurlyeq y$	4. (SIMP1)
7.	$\| \; y \succcurlyeq z$	5. (SIMP2)
8.	$\| \; x \succcurlyeq z$	6., 7. ($\succcurlyeq$-TRA2)
9.	$x \succcurlyeq y \wedge y \succcurlyeq z \rightarrow x \succcurlyeq z$	1.–8. (KB)
10.	$\forall y\,(x \succcurlyeq y \wedge y \succcurlyeq z \rightarrow x \succcurlyeq z)$	9. (UE)
11.	$\forall x \forall y\,(x \succcurlyeq y \wedge y \succcurlyeq z \rightarrow x \succcurlyeq z)$	10. (UE)

Da $\approx$ alle drei Eigenschaften erfüllt, können wir schließen, dass es sich um eine Äquivalenzrelation handelt. □

Lösung zu Aktivierungselement 13.4. Zeigen Sie, dass die Inferenzregelpaare R-REF1 / R-REF2, R-TRA1 / R-TRA2 und R-TOT1 / R-TOT2.

Antwort 1 (REF)

Satz. Die Inferenzregeln R-REF1 und R-REF2 sind äquivalent.

Beweis. Zum Beweis führen wir zwei Herleitungen: zunächst leiten wir R-REF2 aus R-REF1 her und dann R-REF1 aus R-REF2.

($\Rightarrow$) Nehmen wir R-REF1 an. Dann haben wir:

1. $\forall x\, R(x, x)$ (R-REF1)
2. $R(x, x)$ 1. (UB)

($\Leftarrow$) Nehmen wir nun R-REF2 an. Dann haben wir:

1. $R(x, x)$ (R-REF2)
2. $\forall x\, R(x, x)$ 1. (UB)[2]

Beide Herleitungen zeigen, dass man die eine Inferenzregel aus der anderen gewinnen kann – und umgekehrt. □

2: Zulässiger Schritt, da $R(x, x)$ ohne Prämissen hergeleitet wurde – somit ist x in keiner Annahme frei.

Antwort 2 (TRA)

Satz. Die Inferenzregeln R-TRA1 und R-TRA2 sind äquivalent.

Beweis. Zum Beweis führen wir zwei Herleitungen: zunächst leiten wir R-TRA2 aus R-TRA1 her und dann R-TRA1 aus R-TRA2.

($\Rightarrow$) Nehmen wir R-TRA1 an und führen eine Herleitung mit $R(x, y)$ und $R(y, z)$ als Prämissen durch. Dann haben wir:

1.	$R(x, y)$	(P1)
2.	$\underline{R(y, z)}$	(P2)
3.	$R(x, y) \wedge R(y, x)$	1., 2. (KON)
4.	$\forall x \forall y \forall z\, (R(x, y) \wedge R(y, z) \rightarrow R(x, z))$	3. (R-TRA1)
5.	$\forall y \forall z\, (R(x, y) \wedge R(y, z) \rightarrow R(x, z))$	4. (UB)
6.	$\forall z\, (R(x, y) \wedge R(y, z) \rightarrow R(x, z))$	5. (UB)
7.	$R(x, y) \wedge R(y, z) \rightarrow R(x, z)$	6. (UB)
8.	$R(x, z)$	3., 7. (MP)

($\Leftarrow$) Nehmen wir nun R-TRA2 an. Dann haben wir:

1.	$\|\|\ R(x, y) \wedge R(y, z)$	(KBA)
2.	$\|\|\ R(x, y)$	1. (SIMP1)
3.	$\|\|\ R(y, z)$	1. (SIMP2)
4.	$\|\|\ R(x, z)$	2., 3. (R-TRA)
5.	$R(x, y) \wedge R(y, z) \rightarrow R(x, z)$	1., 4. (KB)
6.	$\forall z\, (R(x, y) \wedge R(y, z) \rightarrow R(x, z))$	5. (UE)
7.	$\forall y \forall z\, (R(x, y) \wedge R(y, z) \rightarrow R(x, z))$	6. (UE)
8.	$\forall x \forall y \forall z\, (R(x, y) \wedge R(y, z) \rightarrow R(x, z))$	7. (UE)

Beide Herleitungen zeigen, dass man die eine Inferenzregel aus der anderen gewinnen kann – und umgekehrt. □

Antwort 3 (TOT)

Satz. Die Inferenzregeln R-TOT1 und R-TOT2 sind äquivalent.

Beweis. Zum Beweis führen wir zwei Herleitungen: zunächst leiten wir R-TOT2 aus R-TOT1 her und dann R-TOT1 aus R-TOT2.

(⇒) Nehmen wir R-TOT1 an und führen eine Herleitung mit $\neg R(x,y)$ als Prämisse durch. Dann haben wir:

1.	$\underline{\neg R(x,y)}$	(P1)
2.	$\forall x \forall y\,(R(x,y) \vee R(y,x))$	(R-TOT1)
3.	$\forall y\,(R(x,y) \vee R(y,x))$	2. (UB)
4.	$R(x,y) \vee R(y,x)$	3. (UB)
5.	$R(y,x)$	1., 4. (DS1)

(⇐) Nehmen wir nun R-TOT2 an. Dann haben wir:

1.	$\|\|\;R(x,y)$	(FU-Annahme 1)
2.	$\|\|\;R(x,y) \vee R(y,x)$	(ADD1)
3.	$\|\|\;\neg R(x,y)$	(FU-Annahme 2)
4.	$\|\|\;R(y,x)$	3. (R-TOT2)
5.	$\|\|\;R(x,y) \vee R(y,x)$	4. (ADD2)
6.	$R(x,y) \vee R(y,x)$	1.–5. (FU)
7.	$\forall y\,(R(x,y) \vee R(y,x))$	6. (UE)
8.	$\forall x \forall y\,(R(x,y) \vee R(y,x))$	7. (UE)

Beide Herleitungen zeigen, dass man die eine Inferenzregel aus der anderen gewinnen kann – und umgekehrt. □

13.2 Zusatzübungen

Zusatzübung 13.1. Sei die Relation A symmetrisch und transitiv, und sei die Relation E definiert durch:

$$E(t_1, t_2) \stackrel{\text{def}}{=} \exists v\, ((A(t_1, v) \lor t_1 = v) \land (A(t_2, v) \lor t_2 = v)).$$

Beweisen Sie durch Herleitungen, dass die Relation E eine Äquivalenzrelation ist.

Zusatzübung 13.2. Sei die Relation A symmetrisch und nicht transitiv, und sei die Relation E definiert durch:

$$E(t_1, t_2) \stackrel{\text{def}}{=} \exists v\, ((A(t_1, v) \lor t_1 = v) \land (A(t_2, v) \lor t_2 = v)).$$

Zeigen Sie mit einer Interpretation, dass die Relation E nicht transitiv ist.[3]

3: **Hinweis:** Geben Sie eine Interpretation an, in der ein Argument der Form $E(a, b), E(b, c) \therefore E(a, c)$ nicht gültig ist.

13.2.1 Lösungen

Lösung zu Zusatzübung 13.1. Sei die Relation A symmetrisch und transitiv, und sei die Relation E definiert durch:

$$E(t_1, t_2) \stackrel{\text{def}}{=} \exists v\,((A(t_1, v) \vee t_1 = v) \wedge (A(t_2, v) \vee t_2 = v)).$$

Beweisen Sie durch Herleitungen, dass die Relation E eine Äquivalenzrelation ist.

Beweis. Um zu beweisen, dass E eine Äquivalenzrelation ist, müssen wir zeigen, dass sie drei Eigenschaften erfüllt: Reflexivität, Symmetrie und Transitivität. Dies werden wir durch die folgenden Herleitungen tun.

Herleitung der Reflexivität

1.	$x = x$	(=-REF2)
2.	$A(x, x) \vee x = x$	1. (ADD2)
3.	$(A(x, x) \vee x = x) \wedge (A(x, x) \vee x = x)$	2., 2. (EE)
4.	$\exists z\,((A(x, z) \vee x = z) \wedge (A(x, z) \vee x = z))$	3. (EE)
5.	$E(x, x)$	4. (Def. E)
6.	$\forall x\, E(x, x)$	5. (UE)

Herleitung der Symmetrie

1.	$\parallel\; E(x, y)$	(KB-Annahme)
2.	$\parallel\; \exists z\,((A(x, z) \vee x = z) \wedge (A(y, z) \vee y = z))$	1. (Def. E)
3.	$\parallel\;\parallel\; (A(x, z) \vee x = z) \wedge (A(y, z) \vee y = z)$	(EB-Annahme)
4.	$\parallel\;\parallel\; (A(x, z) \vee x = z)$	3. (SIMP1)
5.	$\parallel\;\parallel\; (A(y, z) \vee y = z)$	3. (SIMP2)
6.	$\parallel\;\parallel\; (A(y, z) \vee y = z) \wedge (A(x, z) \vee x = z)$	4., 5. (KON)
7.	$\parallel\;\parallel\; \exists z\,((A(y, z) \vee y = z) \wedge (A(x, z) \vee x = z))$	6. (EE)
8.	$\parallel\; \exists z\,((A(y, z) \vee y = z) \wedge (A(x, z) \vee x = z))$	3.–7. (EB)
9.	$\parallel\; E(y, x)$	8. (Def. E)
10.	$E(x, y) \rightarrow E(y, x)$	1.–9. (KB)
11.	$\forall y\,(E(x, y) \rightarrow E(y, x))$	10. (UE)
12.	$\forall x \forall y\,(E(x, y) \rightarrow E(y, x))$	11.(UE)

Herleitung der Transitivität

1.	$\parallel\ E(x_1, x_2) \land E(x_2, x_3)$	(KB-Annahme)
2.	$\parallel\ E(x_1, x_2)$	1. (SIMP1)
3.	$\parallel\ E(x_2, x_3)$	1. (SIMP2)
4.	$\parallel\ \exists x\, ((A(x_1, x) \lor x_1 = x) \land (A(x_2, x) \lor x_2 = x))$	2. (Def. E)
5.	$\parallel\ \parallel\ (A(x_1, x_4) \lor x_1 = x_4) \land (A(x_2, x_4) \lor x_2 = x_4)$	(EB-Annahme)
6.	$\parallel\ \parallel\ A(x_1, x_4) \lor x_1 = x_4$	5. (SIMP1)
7.	$\parallel\ \parallel\ A(x_2, x_4) \lor x_2 = x_4$	5. (SIMP2)
8.	$\parallel\ \parallel\ \parallel\ A(x_1, x_4)$	(FU-Annahme 1)
9.	$\parallel\ \parallel\ \parallel\ \parallel\ A(x_2, x_4)$	(FU-Annahme 1.1)
10.	$\parallel\ \parallel\ \parallel\ \parallel\ A(x_4, x_2)$	9. (A-SIM2)
11.	$\parallel\ \parallel\ \parallel\ \parallel\ A(x_1, x_2)$	8., 10. (A-TRA)
12.	$\parallel\ \parallel\ \parallel\ \parallel\ \neg A(x_2, x_4)$	(FU-Annahme 1.2)
13.	$\parallel\ \parallel\ \parallel\ \parallel\ x_2 = x_4$	7., 12. (DS1)
14.	$\parallel\ \parallel\ \parallel\ \parallel\ A(x_1, x_2)$	8., 13. (=-SUB2)
15.	$\parallel\ \parallel\ \parallel\ A(x_1, x_2)$	9.–14. (FU)
16.	$\parallel\ \parallel\ \parallel\ A(x_1, x_2) \lor x_1 = x_2$	15. (ADD2)
17.	$\parallel\ \parallel\ \parallel\ \neg A(x_1, x_4)$	(FU-Annahme 2)
18.	$\parallel\ \parallel\ \parallel\ x_1 = x_4$	6., 17. (DS1)
19.	$\parallel\ \parallel\ \parallel\ \parallel\ A(x_2, x_4)$	(FU-Annahme 2.1)
20.	$\parallel\ \parallel\ \parallel\ \parallel\ A(x_4, x_2)$	19. (A-SIM2)
21.	$\parallel\ \parallel\ \parallel\ \parallel\ A(x_1, x_2)$	18., 20. (=-SUB2)
22.	$\parallel\ \parallel\ \parallel\ \parallel\ A(x_1, x_2) \lor x_1 = x_2$	21. (ADD1)
23.	$\parallel\ \parallel\ \parallel\ \parallel\ \neg A(x_2, x_4)$	(FU-Annahme 2.2)
24.	$\parallel\ \parallel\ \parallel\ \parallel\ x_2 = x_4$	7., 23. (DS1)
25.	$\parallel\ \parallel\ \parallel\ \parallel\ x_1 = x_2$	18., 24. (=-SUB2)
26.	$\parallel\ \parallel\ \parallel\ \parallel\ A(x_1, x_2) \lor x_1 = x_2$	25. (ADD2)
27.	$\parallel\ \parallel\ \parallel\ A(x_1, x_2) \lor x_1 = x_2$	19.–26. (FU)
28.	$\parallel\ \parallel\ A(x_1, x_2) \lor x_1 = x_2$	8.–27. (FU)
29.	$\parallel\ A(x_1, x_2) \lor x_1 = x_2$	5.–28. (EB)
30.	$\parallel\ \exists x\, ((A(x_1, x) \lor x_2 = x) \land (A(x_3, x) \lor x_3 = x))$	3. (Def. E)
31.	$\parallel\ \parallel\ (A(x_{2,5}) \lor x_2 = x_5) \land (A(x_3, x_5) \lor x_3 = x_5)$	(EB-Annahme)
$\vdots$	*Mit einer Herleitung ähnlich der von 28. erhalten wir:*	
53.	$\parallel\ \parallel\ A(x_3, x_2) \lor x_3 = x_2$	33.–55. (FU)
54.	$\parallel\ A(x_3, x_2) \lor x_3 = x_2$	31.–53. (EB)
55.	$\parallel\ (A(x_1, x_2) \lor x_1 = x_2) \land (A(x_3, x_2) \lor x_3 = x_2)$	29., 54. (KON)
56.	$\parallel\ \exists x\, ((A(x_1, x) \lor x_1 = x) \land (A(x_3, x) \lor x_3 = x))$	55. (EE)
57.	$\parallel\ E(x_1, x_3)$	56. (Def. E)
58.	$E(x_1, x_2) \land E(x_2, x_3) \rightarrow E(x_1, x_3)$	1.–57. (KB)
59.	$\forall z\, (E(x_1, x_2) \land E(x_2, z) \rightarrow E(x_1, z))$	58. (UE)
60.	$\forall y \forall z\, (E(x_1, y) \land E(y, z) \rightarrow E(x_1, z))$	59. (UE)
61.	$\forall x \forall y \forall z\, (E(x, y) \land E(y, z) \rightarrow E(x, z))$	60. (UE)

Da E alle drei Eigenschaften erfüllt, können wir schließen, dass es sich um eine Äquivalenzrelation handelt. □

Lösung zu Zusatzübung 13.2. Sei die Relation A symmetrisch und nicht transitiv, und sei die Relation E definiert durch:

$$E(t_1, t_2) \overset{\text{def}}{=} \exists v\,((A(t_1, v) \vee t_1 = v) \wedge (A(t_2, v) \vee t_2 = v)).$$

Zeigen Sie mit einer Interpretation, dass die Relation E nicht transitiv ist.

Beweis. Um zu zeigen, dass E nicht transitiv ist, genügt es, ein Gegenbeispiel für das folgende Argument zu finden:

$$E(a, b),\ E(b, c) \therefore E(a, c).$$

Das bedeutet, wir müssen eine Interpretation finden, in der $E(a, b)$ und $E(b, c)$ wahr sind, $E(a, c)$ jedoch falsch ist.

Die folgende Interpretation ist ein solches Gegenbeispiel:

Definition: Interpretation $\mathfrak{I} = \{D, \varphi\}$

$$\begin{aligned} D &= \{1, 2, 3, 4, 5\}, \\ \varphi(A) &= \{\langle 1, 4\rangle, \langle 4, 1\rangle, \langle 2, 4\rangle, \langle 4, 2\rangle, \\ &\quad \langle 2, 5\rangle, \langle 5, 2\rangle, \langle 3, 5\rangle, \langle 5, 3\rangle\}, \\ \varphi(a) &= 1, \\ \varphi(b) &= 2, \\ \varphi(c) &= 3. \\ \sigma &= 4, 5, \ldots. \end{aligned}$$

Erstens haben wir, dass:

$$\begin{aligned} \varphi_\sigma(E(a, b)) &= \varphi_\sigma(\exists x\,(A(a, x) \vee a = x) \wedge (A(b, x) \vee b = x)) \\ &= \mathtt{w}, \end{aligned}$$

denn σ ist eine x-Variante von σ und:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\langle 1, 4\rangle \in \varphi(A)}{\varphi_\sigma(A(a, x)) = \mathtt{w}} \quad \dfrac{1 \neq 4}{\varphi_\sigma(a = x) = \mathtt{f}}}{\varphi_\sigma(A(a, x) \vee a = x) = \mathtt{w}} \quad \dfrac{\dfrac{\langle 2, 4\rangle \in \varphi(A)}{\varphi_\sigma(A(b, x)) = \mathtt{w}} \quad \dfrac{2 \neq 4}{\varphi_\sigma(b = x) = \mathtt{f}}}{\varphi_\sigma(A(b, x) \vee b = x) = \mathtt{w}}}{\varphi_\sigma((A(a, x) \vee a = x) \wedge (A(b, x) \vee b = x)) = \mathtt{w}}}{\varphi_\sigma(\exists x\,((A(a, x) \vee a = x) \wedge (A(b, x) \vee b = x))) = \mathtt{w}}$$

Erinnern Sie sich daran:

$$\begin{aligned}\varphi_\sigma(b) &= \varphi(b) = 2,\\ \varphi_\sigma(c) &= \varphi(c) = 3,\\ \varphi_\sigma(y) &= 5.\end{aligned}$$

Zweitens haben wir, dass:

$$\begin{aligned}\varphi_\sigma(E(b,c)) &= \varphi_\sigma(\exists y\,((A(b,y) \lor b = y) \land (A(c,y) \lor c = y)))\\ &= \mathtt{w},\end{aligned}$$

denn σ ist eine y-Variante von σ, so dass $\varphi_\sigma(y) = 5$, und:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\langle 2,5\rangle \in \varphi(A)}{\varphi_\sigma(A(b,y)) = \mathtt{w}} \quad \dfrac{2 \neq 5}{\varphi_\sigma(b = y) = \mathtt{f}}}{\varphi_\sigma(A(b,y) \lor b = y) = \mathtt{w}} \quad \dfrac{\dfrac{\langle 3,5\rangle \in \varphi(A)}{\varphi_\sigma(A(c,y)) = \mathtt{w}} \quad \dfrac{3 \neq 5}{\varphi_\sigma(c = y) = \mathtt{f}}}{\varphi_\sigma(A(c,y) \lor c = y) = \mathtt{w}}}{\varphi_\sigma((A(b,y) \lor b = y) \land (A(c,y) \lor c = y)) = \mathtt{w}}}{\varphi_\sigma(\exists y\,((A(b,y) \lor b = y) \land (A(c,y) \lor c = y))) = \mathtt{w}}$$

Drittens haben wir, dass:

$$\begin{aligned}\varphi_\sigma(E(a,c)) &= \varphi_\sigma(\exists z\,((A(a,z) \lor a = z) \land (A(c,z) \lor c = z)))\\ &= \mathtt{f},\end{aligned}$$

Erinnern Sie sich daran:

$$\begin{aligned}\varphi(a) &= \varphi_{\sigma'}(a) = 1,\\ \varphi(b) &= \varphi_{\sigma'}(b) = 2,\\ \varphi(c) &= \varphi_{\sigma'}(c) = 3,\\ \varphi_\sigma(x) &= \varphi_{\sigma'}(x) = 4,\\ \varphi_\sigma(y) &= \varphi_{\sigma'}(y) = 5.\end{aligned}$$

denn kein σ', das eine z-Variante von σ ist, erfüllt:

$$\begin{aligned}\varphi_\sigma(E(a,c)) &= \varphi_\sigma((A(a,z) \lor a = z) \land (A(c,z) \lor c = z))\\ &= \mathtt{w}.\end{aligned}$$

Die folgenden Diagramme zeigen dies für jedes mögliche z-Variante σ' von σ.

Fall 1: Sei $\varphi_{\sigma'}(z) := 1$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\langle 1,1\rangle \notin \varphi(A)}{\varphi_{\sigma'}(A(a,z)) = \mathtt{f}} \quad \dfrac{1 = 1}{\varphi_{\sigma'}(a = z) = \mathtt{w}}}{\varphi_{\sigma'}(A(a,z) \lor a = z) = \mathtt{w}} \quad \dfrac{\dfrac{\langle 3,1\rangle \notin \varphi(A)}{\varphi_{\sigma'}(A(c,z)) = \mathtt{f}} \quad \dfrac{3 \neq 1}{\varphi_{\sigma'}(c = z) = \mathtt{f}}}{\varphi_{\sigma'}(A(c,z) \lor c = z) = \mathtt{f}}}{\varphi_{\sigma'}((A(a,z) \lor a = z) \land (A(c,z) \lor c = z)) = \mathtt{f}}$$

Fall 2: Sei $\varphi_{\sigma'}(z) := 2$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\langle 1,2\rangle \notin \varphi(A)}{\varphi_{\sigma'}(A(a,z)) = \mathtt{f}} \quad \dfrac{1 \neq 2}{\varphi_{\sigma'}(a = z) = \mathtt{f}}}{\varphi_{\sigma'}(A(a,z) \lor a = z) = \mathtt{f}} \quad \dfrac{\dfrac{\langle 3,2\rangle \notin \varphi(A)}{\varphi_{\sigma'}(A(c,z)) = \mathtt{f}} \quad \dfrac{3 \neq 2}{\varphi_{\sigma'}(c = z) = \mathtt{f}}}{\varphi_{\sigma'}(A(c,z) \lor c = z) = \mathtt{f}}}{\varphi_{\sigma'}((A(a,z) \lor a = z) \land (A(c,z) \lor c = z)) = \mathtt{f}}$$

Fall 3: Sei $\varphi_{\sigma'}(z) := 3$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\langle 1,3\rangle \notin \varphi(A)}{\varphi_{\sigma'}(A(a,z)) = \mathtt{f}} \quad \dfrac{1 \neq 3}{\varphi_{\sigma'}(a = z) = \mathtt{f}}}{\varphi_{\sigma'}(A(a,z) \lor a = z) = \mathtt{f}} \quad \dfrac{\dfrac{\langle 3,3\rangle \notin \varphi(A)}{\varphi_{\sigma'}(A(c,z)) = \mathtt{f}} \quad \dfrac{3 = 3}{\varphi_{\sigma'}(c = z) = \mathtt{w}}}{\varphi_{\sigma'}(A(c,z) \lor c = z) = \mathtt{w}}}{\varphi_{\sigma'}((A(a,z) \lor a = z) \land (A(c,z) \lor c = z)) = \mathtt{f}}$$

Fall 4: Sei $\varphi_{\sigma'}(z) := 4$.

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\langle 1,4\rangle \in \varphi(A)}{\varphi_{\sigma'}(A(a,z)) = \mathtt{w}} \quad \cfrac{1 \neq 4}{\varphi_{\sigma'}(a = z) = \mathtt{f}}}{\varphi_{\sigma'}(A(a,z) \lor a = z) = \mathtt{w}} \quad \cfrac{\cfrac{\langle 3,4\rangle \notin \varphi(A)}{\varphi_{\sigma'}(A(c,z)) = \mathtt{f}} \quad \cfrac{3 \neq 4}{\varphi_{\sigma'}(c = z) = \mathtt{f}}}{\varphi_{\sigma'}(A(c,z) \lor c = z) = \mathtt{f}}}{\varphi_{\sigma'}((A(a,z) \lor a = z) \land (A(c,z) \lor c = z)) = \mathtt{f}}$$

Fall 5: Sei $\varphi_{\sigma'}(z) := 5$.

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\langle 1,5\rangle \notin \varphi(A)}{\varphi_{\sigma'}(A(a,z)) = \mathtt{f}} \quad \cfrac{1 \neq 5}{\varphi_{\sigma'}(a = z) = \mathtt{f}}}{\varphi_{\sigma'}(A(a,z) \lor a = z) = \mathtt{f}} \quad \cfrac{\cfrac{\langle 3,5\rangle \in \varphi(A)}{\varphi_{\sigma'}(A(c,z)) = \mathtt{w}} \quad \cfrac{3 \neq 5}{\varphi_{\sigma'}(c = z) = \mathtt{f}}}{\varphi_{\sigma'}(A(c,z) \lor c = z) = \mathtt{w}}}{\varphi_{\sigma'}((A(a,z) \lor a = z) \land (A(c,z) \lor c = z)) = \mathtt{f}}$$

Wir haben also eine Interpretation $\mathfrak{I} = \{D, \varphi\}$, in der A symmetrisch ist, sodass $\varphi(E(a,b)) = \varphi(E(b,c)) = \mathtt{w}$, aber $\varphi(E(a,c)) = \mathtt{f}$. Das zeigt, dass E nicht transitiv ist und daher auch keine Äquivalenzrelation darstellt. □

Erinnern Sie sich daran:

$$\begin{aligned}
\varphi_\sigma(a) &= \varphi_{\sigma'}(a) = 1,\\
\varphi_\sigma(b) &= \varphi_{\sigma'}(b) = 2,\\
\varphi_\sigma(c) &= \varphi_{\sigma'}(c) = 3,\\
\varphi_\sigma(x) &= \varphi_{\sigma'}(x) = 4,\\
\varphi_\sigma(y) &= \varphi_{\sigma'}(y) = 5.
\end{aligned}$$