11 Prädikatenlogisches Herleiten

11.1 Vorbereitung

Die folgenden Übungen sind relativ einfach im Vergleich zu den Übungen im Skript.

Aktivierungselement 11.1. Beweisen Sie die logische Gültigkeit der folgenden Schlussfolgerungen mit Herleitungen[1]:

1. $\vdash \forall x\,(F(x) \lor \neg F(x))$
2. $G(y) \vdash \forall x\,(G(y) \lor F(x))$
3. $\forall x\,(F(x) \leftrightarrow G(x)) \vdash \forall x\,F(x) \leftrightarrow \forall x\,G(x)$
4. $\vdash \neg\forall x\,\forall y\,\exists z\,F(x,y,z) \leftrightarrow \exists x\,\exists y\,\forall z\,\neg F(x,y,z)$

1: Adaptiert aus P. Suppes, *Introduction to Logic*, New York: Van Nostrand Reinhold, 1957, § 5.3, Übung 2.

Aktivierungselement 11.2. Beweisen Sie die logische Gültigkeit der folgenden Schlussfolgerungen mit Herleitungen[2]:

1. $\vdash \forall x\,(P(x) \land Q(x)) \leftrightarrow (\forall x\,P(x) \land \forall y\,Q(y))$
2. $\forall x\,(P(x) \to Q(x)), \exists x\,P(x) \vdash \exists x\,Q(x)$
3. $\forall x\,(P(x) \to Q(a)) \vdash \exists x\,P(x) \to Q(a)$
4. $\forall x\,(P(x) \to Q(x)) \vdash \forall x\,(\exists y\,(P(x) \land R(x,y)) \to \exists z\,(Q(x) \land R(x,z)))$
5. $\forall x\,\forall y\,L(x,y) \vdash \forall y\,\forall x\,L(x,y)$
6. $\forall x\,\forall y\,L(x,y) \vdash \forall y\,\forall x\,L(y,x)$
7. $\forall x\,P(x) \lor \forall y\,Q(y) \vdash \forall x\,(P(x) \lor Q(x))$
8. $\vdash \forall x\,P(x) \leftrightarrow \neg\exists y\,\neg P(y)$
9. $\forall x\,P(x) \vdash \exists x\,P(x)$
10. $\exists x\,\neg P(x) \vdash \neg\forall x\,P(x)$
11. $\vdash \forall x\,(P(x) \lor \neg P(x))$
12. $\vdash \neg\forall x\,(P(x) \land \neg P(x))$
13. $\vdash \forall x\,\neg(P(x) \land \neg P(x))$
14. $\forall x\,P(x) \vdash \forall x\,\forall y\,(R(x,y) \to P(y))$
15. $\forall x\,\forall y\,R(x,y) \vdash \forall x\,\forall y\,(\neg R(x,y) \to P(y))$

2: Adaptiert aus J.W. Garson, *Modal Logic for Philosophers*, CUP, 2013, Übung 12.2.

Bemerkung: Achten Sie in der Schlussfolgerung 6 auf die Reihenfolge der Variablen!

11.1.1 Abgeleitete Schlussregeln

Wie in der Aussagenlogik lassen sich auch in der Prädikatenlogik aus den (primitiven) Schlussregeln neue *abgeleitete Schlussregeln* gewinnen. Eine solche abgeleitete Schlussregel ist:

$$\forall v\, A \vdash \exists v\, A, \qquad \text{(AzuE)}$$

wobei ‚v' eine Metavariable für Individuenvariablen und ‚A' eine Metavariable für Formeln sind.

Wir können die Ableitbarkeit von AzuE sowie anderer abgeleiteter Schlussregeln in drei Schritten zeigen.

Schritt 1: Ein spezieller Fall. Zunächst betrachten wir einen einfachen Spezialfall dieser Regel. Wir wählen eine konkrete Individuenvariable (z.B. ‚x') und eine konkrete Formel (z.B. ‚$P(x)$') und erhalten die Schlussfolgerung:

$$\forall x\, P(x) \vdash \exists x\, P(x).$$

Schritt 2: Herleitung des Spezialfalls. Nun zeigen wir die Gültigkeit dieses Spezialfalls durch eine formale Herleitung.

1.	$\forall x\, P(x)$	(P1)
2.	$P(y)$	1. (UB)[3]
3.	$\forall x\, P(x)$	2. (UE)

3: Wir substituieren: $P(x)[y/x]$.

Schritt 3: Verallgemeinerung. Nun verallgemeinern wir die vorherige Herleitung, um zu zeigen, dass jede Herleitung der obigen Form gilt. Daraus folgt, dass die Schlussregel ableitbar ist. Dies zeigen wir mittels eines informellen Beweises.

Zu zeigen ist, dass eine Herleitung der Form:

$$\forall v\, A \vdash \exists v\, A$$

für jede Individuenvariable v und jede Formel A gilt.

Beweis. Seien v, v' Individuenvariablen und A eine Formel, wobei v' in A frei für v ist. Es lässt sich eine Herleitung der folgenden Form angeben:

1.	$\forall v\, A$	(P1)
2.	$A[v'/v]$	1. (UB)
3.	$\forall v\, A$	2. (UE)

Folglich gilt $\forall v\, A \vdash \exists v\, A$ für jede Individuenvariable v und jede Formel A, was zeigt, dass die Schlussregel AzuE ableitbar ist. $\square$

Aktivierungselement 11.3. Beweisen Sie die Ableitbarkeit der folgenden Schlussregeln.[4]

4: Siehe S. 296 des Kursskripts.

1. $\neg\exists v\, A \vdash \forall v\, \neg A$ (NEGQUAN1)
2. $\forall v\, \neg A \vdash \neg\exists v\, A$ (NEGQUAN2)
3. $\neg\forall v\, A \vdash \exists v\, \neg A$ (NEGQUAN3)
4. $\exists v\, \neg A \vdash \neg\forall v\, A$ (NEGQUAN4)

11.1.2 Lösungen

Lösungen zu Aktivierungselement 11.1. [Ausstehend]

Lösungen zu Aktivierungselement 11.2. [Ausstehend]

Lösungen zu Aktivierungselement 11.3. Beweisen Sie die Ableitbarkeit der folgenden Schlussregeln.

1. $\neg\exists v\, A \vdash \forall v\, \neg A$ (NEGQUAN1)

Schritt 1: Wir wählen die konkrete Individuenvariable ‚x' und die konkrete Formel ‚$P(x)$' und erhalten die Schlussfolgerung:

$$\neg\exists x\, P(x) \vdash \forall x\, \neg P(x).$$

Schritt 2: Nun zeigen wir die Gültigkeit dieses Spezialfalls durch eine formale Herleitung.

1.	$\neg\exists x\, P(x)$	(P1)
2.	$\|\| \quad \neg\neg P(y)$	(IB-Annahme)
3.	$\|\| \quad P(y)$	2. (DN2)
4.	$\|\| \quad \exists x\, P(x)$	3. (DN2)
5.	$\|\| \quad \exists x\, P(x) \wedge \neg\exists x\, P(x)$	4., 1. (KON)
6.	$\neg P(y)$	2.–5. (IB)
7.	$\forall x\, \neg P(x)$	6. (UE)

Schritt 3: Schließlich zeigen wir, dass eine Herleitung der Form:

$$\neg\exists v\, A \vdash \forall v\, \neg A$$

für jede Individuenvariable v und jede Formel A gilt.

Beweis. Seien v, v' Individuenvariablen und A eine Formel, wobei v' in A frei für v ist. Es lässt sich eine Herleitung der folgenden Form angeben:

1.	$\neg\exists v\, A$	(P1)
2.	$\|\| \quad \neg\neg A[v'/v]$	(IB-Annahme)
3.	$\|\| \quad A[v'/v]$	2. (DN2)
4.	$\|\| \quad \exists v\, A$	3. (DN2)
5.	$\|\| \quad \exists v\, A \wedge \neg\exists v\, A$	4., 1. (KON)
6.	$\neg A[v'/v]$	2.–5. (IB)
7.	$\forall v\, \neg A$	6. (UE)

Folglich gilt $\neg\exists v\, A \vdash \forall v\, \neg A$ für jede Individuenvariable v und jede Formel A, was zeigt, dass NEGQUAN1 ableitbar ist. □

2. $\forall v \neg A \vdash \neg \exists v\, A$ (NEGQUAN2)

Schritt 1: Wir wählen die konkrete Individuenvariable ‚x' und die konkrete Formel ‚$P(x)$' und erhalten die Schlussfolgerung:

$$\forall x \neg P(x) \vdash \neg \exists x\, P(x).$$

Schritt 2: Nun zeigen wir die Gültigkeit dieses Spezialfalls durch eine formale Herleitung.

1.	$\forall x \neg P(x)$	(P1)
2.	$\mid\mid\ \neg\neg\exists x\, P(x)$	(IB-Annahme)
3.	$\mid\mid\ \exists x\, P(x)$	2. (DN2)
4.	$\mid\mid\ \mid\mid\ P(y)$	(EB-Annahme)
5.	$\mid\mid\ \mid\mid\ \neg P(y)$	1. (UB)
6.	$\mid\mid\ \mid\mid\ Q(a) \wedge \neg Q(a)$	4., 5. (ECQ)
7.	$\mid\mid\ Q(a) \wedge \neg Q(a)$	4.–6. (IB)
8.	$\neg\exists x\, P(x)$	2.–7. (IB)

Schritt 3: Schließlich zeigen wir, dass eine Herleitung der Form:

$$\forall v \neg A \vdash \neg \exists v\, A$$

für jede Individuenvariable v und jede Formel A gilt.

Beweis. Seien v, v' Individuenvariablen und A eine Formel, wobei v' in A frei für v ist. Es lässt sich eine Herleitung der folgenden Form angeben:

1.	$\forall v \neg A$	(P1)
2.	$\mid\mid\ \neg\neg\exists v\, A$	(IB-Annahme)
3.	$\mid\mid\ \exists v\, A$	2. (DN2)
4.	$\mid\mid\ \mid\mid\ P[v'/v]$	(EB-Annahme)
5.	$\mid\mid\ \mid\mid\ \neg P[v'/v]$	1. (UB)
6.	$\mid\mid\ \mid\mid\ Q(a) \wedge \neg Q(a)$	4., 5. (ECQ)
7.	$\mid\mid\ Q(a) \wedge \neg Q(a)$	4.–6. (IB)
8.	$\neg\exists v\, A$	2.–7. (IB)

Folglich gilt $\forall v \neg A \vdash \neg \exists v\, A$ für jede Individuenvariable v und jede Formel A, was zeigt, dass NEGQUAN2 ableitbar ist. □

3. $\neg\forall v\, A \vdash \exists v\, \neg A$ (NEGQUAN3)

Schritt 1: Wir wählen die konkrete Individuenvariable ‚x' und die konkrete Formel ‚$P(x)$' und erhalten die Schlussfolgerung:

$$\neg\forall x\, P(x) \vdash \exists x\, \neg P(x).$$

Schritt 2: Nun zeigen wir die Gültigkeit dieses Spezialfalls durch eine formale Herleitung.

1.	$\neg\forall x\, P(x)$	(P1)
2.	$\|\ \neg\exists x\, \neg P(x)$	(IB-Annahme)
3.	$\|\ \|\ \neg P(y)$	(IB-Annahme)
4.	$\|\ \|\ \exists x\, \neg P(x)$	3. (EE)
5.	$\|\ \|\ \exists x\, \neg P(x) \wedge \neg\exists x\, \neg P(x)$	4., 2. (KON)
6.	$\|\ P(y)$	3.–5. (IB)
7.	$\|\ \forall x\, P(x)$	6. (UE)
8.	$\|\ \forall x\, P(x) \wedge \neg\forall x\, P(x)$	7., 1. (KON)
9.	$\exists x\, \neg P(x)$	2.–8. (IB)

Schritt 3: Schließlich zeigen wir, dass eine Herleitung der Form:

$$\neg\forall v\, A \vdash \exists v\, \neg A$$

für jede Individuenvariable v und jede Formel A gilt.

Beweis. Seien v, v' Individuenvariablen und A eine Formel, wobei v' in A frei für v ist. Es lässt sich eine Herleitung der folgenden Form angeben:

1.	$\neg\forall v\, A$	(P1)
2.	$\|\ \neg\exists v\, \neg A$	(IB-Annahme)
3.	$\|\ \|\ \neg A[v'/v]$	(IB-Annahme)
4.	$\|\ \|\ \exists v\, \neg A$	3. (EE)
5.	$\|\ \|\ \exists v\, \neg A \wedge \neg\exists v\, \neg A$	4., 2. (KON)
6.	$\|\ A[v'/v]$	3.–5. (IB)
7.	$\|\ \forall v\, A$	6. (UE)
8.	$\|\ \forall v\, A \wedge \neg\forall v\, A$	7., 1. (KON)
9.	$\exists v\, \neg A$	2.–8. (IB)

Folglich gilt $\neg\forall v\, A \vdash \exists v\, \neg A$ für jede Individuenvariable v und jede Formel A, was zeigt, dass NEGQUAN3 ableitbar ist. □

4. $\exists v \neg A \vdash \neg\forall v\, A$ (NEGQUAN4)

Schritt 1: Wir wählen die konkrete Individuenvariable ‚x' und die konkrete Formel ‚$P(x)$' und erhalten die Schlussfolgerung:

$$\exists x \neg P(x) \vdash \forall x \neg P(x).$$

Schritt 2: Nun zeigen wir die Gültigkeit dieses Spezialfalls durch eine formale Herleitung.

1.	$\exists x \neg P(x)$	(P1)
2.	$\|\| \quad \neg\neg\forall x\, P(x)$	(IB-Annahme)
3.	$\|\| \quad \forall x\, P(x)$	2. (DN2)
4.	$\|\| \; \|\| \quad \neg P(y)$	(EB-Annahme)
5.	$\|\| \; \|\| \quad P(y)$	3. (UB)
6.	$\|\| \; \|\| \quad Q(a) \wedge \neg Q(a)$	5., 4. (ECQ)
7.	$\|\| \quad Q(a) \wedge \neg Q(a)$	4.–6. (IB)
8.	$\neg\forall x\, P(x)$	2.–7. (IB)

Schritt 3: Schließlich zeigen wir, dass eine Herleitung der Form:

$$\exists v \neg A \vdash \neg\forall v\, A$$

für jede Individuenvariable v und jede Formel A gilt.

Beweis. Seien v, v' Individuenvariablen und A eine Formel, wobei v' in A frei für v ist. Es lässt sich eine Herleitung der folgenden Form angeben:

1.	$\exists v \neg A$	(P1)
2.	$\|\| \quad \neg\neg\forall v\, A$	(IB-Annahme)
3.	$\|\| \quad \forall v\, A$	2. (DN2)
4.	$\|\| \; \|\| \quad \neg A[v'/v]$	(EB-Annahme)
5.	$\|\| \; \|\| \quad A[v'/v]$	3. (UB)
6.	$\|\| \; \|\| \quad Q(a) \wedge \neg Q(a)$	5., 4. (ECQ)
7.	$\|\| \quad Q(a) \wedge \neg Q(a)$	4.–6. (IB)
8.	$\neg\forall v\, A$	2.–7. (IB)

Folglich gilt $\exists v \neg A \vdash \neg\forall v\, A$ für jede Individuenvariable v und jede Formel A, was zeigt, dass NEGQUAN2 ableitbar ist. □

11.2 Übungen

Übung 11.1. Führen Sie die Herleitungen zu folgenden deduktiv gültigen Schlüssen durch:

1. $\forall x\,(P(x) \land Q(x)) \vdash \forall x\,P(x) \land \forall x\,Q(x)$
2. $\forall x\,P(x) \lor \forall x\,Q(x) \vdash \forall x\,(P(x) \lor Q(x))$
3. $\vdash \forall x\,(P(a) \lor Q(x)) \leftrightarrow P(a) \lor \forall x\,Q(x)$
4. $\vdash \forall x\,(P(a) \land Q(x)) \leftrightarrow P(a) \land \forall x\,Q(x)$
5. $\vdash \forall x\,(P(a) \rightarrow Q(x)) \leftrightarrow (P(a) \rightarrow \forall x\,Q(x))$
6. $\forall x\,\neg P(x) \vdash \neg\exists x\,P(x)$
7. $\vdash P(a) \land \exists x\,Q(x) \leftrightarrow \exists x\,(P(a) \land Q(x))$
8. $\vdash P(a) \lor \exists x\,Q(x) \leftrightarrow \exists x\,(P(a) \lor Q(x))$
9. $\exists x\,P(x) \lor \exists x\,Q(x) \vdash \exists x\,(P(x) \lor Q(x))$
10. $\exists x\,(P(x) \rightarrow Q(x)), \forall x\,P(x) \vdash \exists x\,Q(x)$
11. $\vdash (P(a) \rightarrow \exists x\,Q(x)) \leftrightarrow \exists x\,(P(a) \rightarrow Q(x))$

Übung 11.2. Repräsentieren Sie die folgenden Argumente, und zeigen Sie, dass die daraus resultierenden Argumentformen deduktiv gültig sind:

1. Alle Österreicher sind Europäer. Alle Salzburger sind Österreicher. Also sind alle Salzburger Europäer.
2. Alle Philosophen sind weise. Nun gibt es Salzburger Philosophen. Also sind einige Salzburger weise.
3. Es gibt keine Österreicher, die auf den Mond geflogen sind. Es gibt aber Kosmonauten, die Österreicher sind. Daher sind nicht alle Kosmonauten auf den Mond geflogen.
4. Nicht ein Lebewesen auf dem Mars ist glatzköpfig. Alle Skinheads sind jedoch glatzköpfig. Somit gibt es keinen Skinhead, der ein Lebewesen auf dem Mars ist.

Übung 11.3. Repräsentieren Sie die beiden folgenden Argumente und versuchen Sie zu zeigen, dass die daraus resultierenden Argumentformen deduktiv gültig sind. (Achtung: Eine der beiden Argumentformen ist deduktiv gültig, die andere jedoch nicht.)

1. Alle Lebewesen auf dem Mars sind glatzköpfig. Somit gibt es Lebewesen auf dem Mars, die glatzköpfig sind.
2. Es gibt Lebewesen auf dem Mars. Alle Lebewesen auf dem Mars sind glatzköpfig. Somit gibt es Lebewesen auf dem Mars, die glatzköpfig sind.

Übung 11.4. Führen Sie die Herleitungen zu folgenden deduktiv gültigen Schlüssen durch:

1. $\exists x\, \forall y\, R(x,y) \vdash \forall y\, \exists x\, R(x,y)$
2. $\neg\exists x\, \neg P(x) \vdash \forall x\, P(x)$
3. $\exists x\, P(x) \vdash \neg\forall x\, \neg P(x)$
4. $\neg\exists x\, P(x) \vdash \forall x\, \neg P(x)$
5. $\exists x\, \neg P(x) \vdash \neg\forall x\, P(x)$
6. $\forall x\, (\exists y\, P(y) \rightarrow Q(x)) \vdash \forall y\, (P(y) \rightarrow Q(a))$
7. $\neg\forall x\, (P(x) \rightarrow Q(x)) \vdash \exists x\, (P(x) \wedge \neg Q(x))$

Übung 11.5. Repräsentieren Sie die folgenden Argumente, und zeigen Sie, daß die daraus resultierenden Argumentformen deduktiv gültig sind:

1. Alles hat eine Ursache. Gott hat jedoch keine Ursache. Also ist der Papst Tiroler.
2. Alle Salzburger lieben Salzburg. Es gibt jedoch niemanden, der Salzburg und alle Touristen in Salzburg liebt. Somit lieben die Salzburger nicht alle Touristen in Salzburg.
3. Es gibt nichts Allmächtiges. Wenn etwas ein Gott ist, ist es jedoch allmächtig. Also gibt es keinen Gott.

11.2.1 Lösungen

Lösung zu Übung 11.1. Führen Sie die Herleitungen zu folgenden deduktiv gültigen Schlüssen durch:

1. $\forall x\,(P(x) \wedge Q(x)) \vdash \forall x\,P(x) \wedge \forall x\,Q(x)$

Antwort

1.	$\forall x\,(P(x) \wedge Q(x))$	(P1)
2.	$P(y) \wedge Q(y)$	1. (UB)[5]
3.	$P(y)$	2. (SIMP1)
4.	$\forall x\,P(x)$	3. (UE)[6]
5.	$Q(y)$	2. (SIMP2)
6.	$\forall x\,Q(x)$	5. (UE)[7]
7.	$\forall x\,P(x) \wedge \forall x\,Q(x)$	4., 6. (KON)

5: Wir substituieren: $(P(x) \wedge Q(x))[y/x]$.

6: VB erfüllt: ‚y' kommt in 1. und 4. nicht frei vor.

7: VB erfüllt: ‚y' kommt in 1. und 6. nicht frei vor.

2. $\forall x\,P(x) \vee \forall x\,Q(x) \vdash \forall x\,(P(x) \vee Q(x))$

Antwort

1.	$\forall x\,P(x) \vee \forall x\,Q(x)$	(P1)
2.	$\|\|\ \forall x\,P(x)$	(FU-Annahme 1)
3.	$\|\|\ P(y)$	2. (UB)
4.	$\|\|\ P(y) \vee Q(y)$	3. (ADD1)
5.	$\|\|\ \forall x\,(P(x) \vee Q(x))$	4. (UE)[8]
6.	$\|\|\ \neg\forall x\,P(x)$	(FU-Annahme 2)
7.	$\|\|\ \forall x\,Q(x)$	1., 6. (DS1)
8.	$\|\|\ Q(z)$	7. (UB)
9.	$\|\|\ P(z) \vee Q(z)$	8. (ADD2)
10.	$\|\|\ \forall x\,(P(x) \vee Q(x))$	10.(UE)[9]
11.	$\forall x\,(P(x) \vee Q(x))$	2.–10. (FU)

8: VB erfüllt: ‚y' kommt in 1., 2. und 4. nicht frei vor.

9: VB erfüllt: ‚z' kommt in 1., 2. und 4. nicht frei vor.

Wir ziehen keinen Strich, weil die zu beweisende Schlussfolgerung keine Prämissen hat.

3. $\vdash \forall x\,(P(a) \lor Q(x)) \leftrightarrow P(a) \lor \forall x\,Q(x)$

Antwort

1.	$\Vert\ \forall x\,(P(a) \lor Q(x))$	(KB-Annahme)
2.	$\Vert\ P(a) \lor Q(x_1)$	1. (UB)
3.	$\Vert\ \Vert\ P(a)$	(FU-Annahme 1)
4.	$\Vert\ \Vert\ P(a) \lor \forall x\,Q(x)$	3. (ADD1)
5.	$\Vert\ \Vert\ \neg P(a)$	(FU-Annahme 2)
6.	$\Vert\ \Vert\ Q(x_1)$	2., 5. (DS1)
7.	$\Vert\ \Vert\ \forall x\,Q(x)$	6. (UE)[10]
8.	$\Vert\ \Vert\ P(a) \lor \forall x\,Q(x)$	7. (ADD2)
9.	$\Vert\ P(a) \lor \forall x\,Q(x)$	3.–8. (FU)
10.	$\forall x\,(P(a) \lor Q(x)) \rightarrow P(a) \lor \forall x\,Q(x)$	1.–9. (KB)
11.	$\Vert\ P(a) \lor \forall x\,Q(x)$	(KB-Annahme)
12.	$\Vert\ \Vert\ P(a)$	(FU-Annahme 1)
13.	$\Vert\ \Vert\ P(a) \lor Q(x_2)$	12. (ADD1)
14.	$\Vert\ \Vert\ \forall x\,(P(a) \lor Q(x))$	13. (UE)[11]
15.	$\Vert\ \Vert\ \neg P(a)$	(FU-Annahme 2)
16.	$\Vert\ \Vert\ \forall x\,Q(x)$	11., 15. (DS1)
17.	$\Vert\ \Vert\ Q(x_3)$	16. (UB)
18.	$\Vert\ \Vert\ P(a) \lor Q(x_3)$	17. (ADD)
19.	$\Vert\ \Vert\ \forall x\,(P(a) \lor Q(x))$	18. (UE)[12]
20.	$\Vert\ \forall x\,(P(a) \lor Q(x))$	12.–18. (FU)
21.	$P(a) \lor \forall x\,Q(x) \rightarrow \forall x\,(P(a) \lor Q(x))$	11.–19. (KB)
22.	$\forall x\,(P(a) \lor Q(x)) \leftrightarrow P(a) \lor \forall x\,Q(x)$	10., 21. (ÄQ-EIN)

10: VB erfüllt: ‚x_1‘ kommt in 1., 3. und 7. nicht frei vor.

11: VB erfüllt: ‚x_2‘ kommt in 11., 12. und 14. nicht frei vor.

12: VB erfüllt: ‚x_3‘ kommt in 11., 15. und 19. nicht frei vor.

4. $\vdash \forall x\,(P(a) \wedge Q(x)) \leftrightarrow P(a) \wedge \forall x\,Q(x)$

Antwort

1.	$\|\|\ \forall x\,(P(a) \wedge Q(x))$	(KB-Annahme)
2.	$\|\|\ P(a) \wedge Q(y)$	1. (UB)
3.	$\|\|\ P(a)$	2. (SIMP1)
4.	$\|\|\ Q(y)$	2. (SIMP2)
5.	$\|\|\ \forall x\,Q(x)$	4. (UE) [13]
6.	$\|\|\ P(a) \wedge \forall x\,Q(x)$	3., 5. (KON)
7.	$\forall x\,(P(a) \wedge Q(x)) \rightarrow P(a) \wedge \forall x\,Q(x)$	1.–6. (KB)
8.	$\|\|\ P(a) \wedge \forall x\,Q(x)$	(KB-Annahme)
9.	$\|\|\ P(a)$	8. (SIMP1)
10.	$\|\|\ \forall x\,Q(x)$	8. (SIMP2)
11.	$\|\|\ Q(z)$	10. (UB)
12.	$\|\|\ P(a) \wedge Q(z)$	9., 11. (ADD)
13.	$\|\|\ \forall x\,(P(a) \wedge Q(x))$	12. (UE)[14]
14.	$P(a) \wedge \forall x\,Q(x) \rightarrow \forall x\,(P(a) \wedge Q(x))$	8.–13. (KB)
15.	$\forall x\,(P(a) \wedge Q(x)) \leftrightarrow P(a) \wedge \forall x\,Q(x)$	7., 14. (ÄQ-EIN)

13: VB erfüllt: ‚y' kommt in 1. und 5. nicht frei vor.

14: VB erfüllt: ‚z' kommt in 8. und 13. nicht frei vor.

5. $\vdash \forall x\,(P(a) \rightarrow Q(x)) \leftrightarrow (P(a) \rightarrow \forall x\,Q(x))$

Antwort

1.	$\|\|\ \forall x\,(P(a) \rightarrow Q(x))$	(KB-Annahme)
2.	$\|\|\ P(a) \rightarrow Q(y)$	1. (UB)
3.	$\|\|\ \|\|\ P(a)$	(KB-Annahme)
4.	$\|\|\ \|\|\ Q(y)$	2., 3. (MP)
5.	$\|\|\ \|\|\ \forall x\,Q(x)$	4. (UE) [15]
6.	$\|\|\ P(a) \rightarrow \forall x\,Q(x)$	3.–5. (KB)
7.	$\forall x\,(P(a) \rightarrow Q(x)) \rightarrow (P(a) \rightarrow \forall x\,Q(x))$	1.–6. (KB)
8.	$\|\|\ P(a) \rightarrow \forall x\,Q(x)$	(KB-Annahme)
9.	$\|\|\ \|\|\ P(a)$	(KB-Annahme)
10.	$\|\|\ \|\|\ \forall x\,Q(x)$	8., 9. (MP)
11.	$\|\|\ \|\|\ Q(z)$	10. (UB)
12.	$\|\|\ P(a) \rightarrow Q(z)$	9.–11. (KB)
13.	$\|\|\ \forall x\,(P(a) \rightarrow Q(x))$	12. (UE)[16]
14.	$(P(a) \rightarrow \forall x\,Q(x)) \rightarrow \forall x\,(P(a) \rightarrow Q(x))$	8.–13. (KB)
15.	$\forall x\,(P(a) \rightarrow Q(x)) \leftrightarrow (P(a) \rightarrow \forall x\,Q(x))$	7., 14. (ÄQ-EIN)

15: VB erfüllt: ‚y' kommt in 1., 3. und 5. nicht frei vor.

16: VB erfüllt: ‚z' kommt in 9. und 13. nicht frei vor.

6. $\forall x\, \neg P(x) \vdash \neg\exists x\, P(x)$

Antwort

1.	$\forall x\, \neg P(x)$	(P1)
2.	$\|\|\ \neg\neg\exists x\, P(x)$	(IB-Annahme)
3.	$\|\|\ \exists x\, P(x)$	2. (DN2)
4.	$\|\|\ \|\|\ P(y)$	(EB-Annahme)[17]
5.	$\|\|\ \|\|\ \neg P(y)$	1. (UB)
6.	$\|\|\ \|\|\ Q(a) \land \neg Q(a)$	4., 5. (ECQ)
7.	$\|\|\ Q(a) \land \neg Q(a)$	4.–6. (EB)[18]
8.	$\neg\exists x\, P(x)$	2.–7. (IB)

17: In Bezug auf den 3. Schritt.

18: VB′ erfüllt: ‚y‘ kommt in 1. und 6. nicht frei vor.

7. $\vdash P(a) \land \exists x\, Q(x) \leftrightarrow \exists x\, (P(a) \land Q(x))$

Antwort

1.	$\|\|\ P(a) \land \exists x\, Q(x)$	(KB-Annahme)
2.	$\|\|\ P(a)$	1. (SIMP1)
3.	$\|\|\ \exists x\, Q(x)$	1. (SIMP2)
4.	$\|\|\ \|\|\ Q(y)$	(EB-Annahme)[19]
5.	$\|\|\ \|\|\ P(a) \land Q(y)$	2., 4. (KON)
6.	$\|\|\ \|\|\ \exists x\, (P(a) \land Q(x))$	5. (EE)
7.	$\|\|\ \exists x\, (P(a) \land Q(x))$	4.–6. (EB)[20]
8.	$P(a) \land \exists x\, Q(x) \to \exists x\, (P(a) \land Q(x))$	1.–7. (KB)
9.	$\|\|\ \exists x\, (P(a) \land Q(x))$	(KB-Annahme)
10.	$\|\|\ \|\|\ P(a) \land Q(z)$	(EB-Annahme)[21]
11.	$\|\|\ \|\|\ P(a)$	10. (SIMP1)
12.	$\|\|\ \|\|\ Q(z)$	10. (SIMP2)
13.	$\|\|\ \|\|\ \exists x\, Q(x)$	12. (EE)
14.	$\|\|\ \|\|\ P(a) \land \exists x\, Q(x)$	11., 13. (KON)
15.	$\|\|\ P(a) \land \exists x\, Q(x)$	10.–14. (EB)[22]
16.	$\exists x\, (P(a) \land Q(x)) \to P(a) \land \exists x\, Q(x)$	9.–15. (KB)
17.	$P(a) \land \exists x\, Q(x) \leftrightarrow \exists x\, (P(a) \land Q(x))$	8., 16. (ÄQ-EIN)

19: In Bezug auf den 3. Schritt.

20: VB′ erfüllt: ‚y‘ kommt in 1. und 6. nicht frei vor.

21: In Bezug auf den 9. Schritt.

22: VB′ erfüllt: ‚<‘ kommt in 9. und 14. nicht frei vor.

8. $\vdash P(a) \lor \exists x\, Q(x) \leftrightarrow \exists x\, (P(a) \lor Q(x))$

Antwort

1.	$\parallel\ P(a) \lor \exists x\, Q(x)$	(KB-Annahme)
2.	$\parallel \parallel\ P(a)$	(FU-Annahme 1)
3.	$\parallel \parallel\ P(a) \lor Q(x_1)$	2. (ADD1)
4.	$\parallel \parallel\ \exists x\, (P(a) \lor Q(x))$	3. (EE)
5.	$\parallel \parallel\ \neg P(a)$	(FU-Annahme 2)
6.	$\parallel \parallel\ \exists x\, Q(x)$	1., 5. (DS1)
7.	$\parallel \parallel \parallel\ Q(x_2)$	(EB-Annahme)[23]
8.	$\parallel \parallel \parallel\ P(a) \lor Q(x_2)$	7. (ADD2)
9.	$\parallel \parallel \parallel\ \exists x\, (P(a) \lor Q(x))$	8. (EE)
10.	$\parallel \parallel\ \exists x\, (P(a) \lor Q(x))$	7.–9. (EB)[24]
11.	$\parallel\ \exists x\, (P(a) \lor Q(x))$	2.–10. (FU)
12.	$P(a) \lor \exists x\, Q(x) \to \exists x\, (P(a) \lor Q(x))$	1.–11. (KB)
13.	$\parallel\ \exists x\, (P(a) \lor Q(x))$	(KB-Annahme)
14.	$\parallel \parallel\ P(a) \lor Q(x_3)$	(EB-Annahme)[25]
15.	$\parallel \parallel \parallel\ P(a)$	(FU-Annahme 1)
16.	$\parallel \parallel \parallel\ P(a) \lor \exists x\, Q(x)$	15. (ADD1)
17.	$\parallel \parallel \parallel\ \neg P(a)$	(FU-Annahme 2)
18.	$\parallel \parallel \parallel\ Q(x_3)$	14., 17. (DS1)
19.	$\parallel \parallel \parallel\ \exists x\, Q(x)$	18. (EE)
20.	$\parallel \parallel \parallel\ P(a) \lor \exists x\, Q(x)$	19. (ADD2)
21.	$\parallel \parallel\ P(a) \lor \exists x\, Q(x)$	15.–20. (FU)
22.	$\parallel\ P(a) \lor \exists x\, Q(x)$	14.–21. (EB)[26]
23.	$\exists x\, (P(a) \lor Q(x)) \to P(a) \lor \exists x\, Q(x)$	13.–19. (KB)
24.	$P(a) \lor \exists x\, Q(x) \leftrightarrow \exists x\, (P(a) \lor Q(x))$	12., 23. (ÄQ-EIN)

23: In Bezug auf den 6. Schritt.

24: VB′ erfüllt: ‚x_2‘ kommt in 1.. 2. und 9. nicht frei vor.

25: In Bezug auf den 13. Schritt.

26: VB′ erfüllt: ‚x_3‘ kommt in 14., 13. und 21. nicht frei vor.

9. $\exists x\, P(x) \lor \exists x\, Q(x) \vdash \exists x\, (P(x) \lor Q(x))$

Antwort

1.	$\exists x\, P(x) \lor \exists x\, Q(x)$	(P1)
2.	$\|\ \exists x\, P(x)$	(FU-Annahme 1)
3.	$\|\ \|\ P(y)$	(EB-Annahme)[27]
4.	$\|\ \|\ P(y) \lor Q(y)$	3. (ADD1)
5.	$\|\ \|\ \exists x\, (P(x) \lor Q(x))$	4. (EE)
6.	$\|\ \exists x\, (P(x) \lor Q(x))$	3.–5. ( )[28]
7.	$\|\ \neg\exists x\, P(x)$	(FU-Annahme 2)
8.	$\|\ \exists x\, Q(x)$	1., 7. (DS1)
9.	$\|\ \|\ Q(z)$	(EB-Annahme)[29]
10.	$\|\ \|\ P(z) \lor Q(z)$	9. (ADD2)
11.	$\|\ \|\ \exists x\, (P(x) \lor Q(x))$	10. (EE)
12.	$\|\ \exists x\, (P(x) \lor Q(x))$	9.–11. (EB)[30]
13.	$\exists x\, (P(x) \lor Q(x))$	2.–12. (FU)

27: In Bezug auf den 2. Schritt.

28: VB′ erfüllt: ‚y‘ kommt in 1., 2. und 5. nicht frei vor.

29: In Bezug auf den 8. Schritt.

30: VB′ erfüllt: ‚z‘ kommt in 1., 7. und 11. nicht frei vor.

10. $\exists x\, (P(x) \rightarrow Q(x)), \forall x\, P(x) \vdash \exists x\, Q(x)$

Antwort

1.	$\exists x\, (P(x) \rightarrow Q(x))$	(P1)
2.	$\forall x\, P(x)$	(P2)
3.	$\|\ P(y) \rightarrow Q(y)$	(EB-Annahme)[31]
4.	$\|\ P(y)$	2. (UB)
5.	$\|\ Q(y)$	3., 4. (MP)
6.	$\|\ \exists x\, Q(x)$	5. (EE)
7.	$\exists x\, Q(x)$	3.–6. (EB)[32]

31: In Bezug auf P1.

32: VB′ erfüllt: ‚y‘ kommt in 1., 2. und 6. nicht frei vor.

11. $\vdash (P(a) \to \exists x\, Q(x)) \leftrightarrow \exists x\, (P(a) \to Q(x))$

Antwort

1.	$\Vert\ P(a) \to \exists x\, Q(x)$	(KB-Annahme)
2.	$\Vert\ \Vert\ P(a)$	(FU-Annahme 1)
3.	$\Vert\ \Vert\ \exists x\, Q(x)$	1., 2. (MP)
4.	$\Vert\ \Vert\ \Vert\ Q(x_1)$	(EB-Annahme)[33]
5.	$\Vert\ \Vert\ \Vert\ \Vert\ P(a)$	(KB-Annahme)
6.	$\Vert\ \Vert\ \Vert\ \Vert\ Q(x_1)$	4. (TS)
7.	$\Vert\ \Vert\ \Vert\ P(a) \to Q(x_1)$	5.–6. (KB)
8.	$\Vert\ \Vert\ \Vert\ \exists x\, (P(a) \to Q(x))$	7. (EE)
9.	$\Vert\ \Vert\ \exists x\, (P(a) \to Q(x))$	4.–8. (EB)[34]
10.	$\Vert\ \Vert\ \neg P(a)$	(FU-Annahme 2)
11.	$\Vert\ \Vert\ \Vert\ P(a)$	(KB-Annahme)
12.	$\Vert\ \Vert\ \Vert\ Q(x_2)$	10., 11. (ECQ)
13.	$\Vert\ \Vert\ P(a) \to Q(x_2)$	11.–12. (KB)
14.	$\Vert\ \Vert\ \exists x\, (P(a) \to Q(x))$	13. (EE)
15.	$\Vert\ \exists x\, (P(a) \to Q(x))$	2.–14. (FU)
16.	$(P(a) \to \exists x\, Q(x)) \to \exists x\, (P(a) \to Q(x))$	1.–15. (KB)
17.	$\Vert\ \exists x\, (P(a) \to Q(x))$	(KB-Annahme)
18.	$\Vert\ \Vert\ P(a)$	(KB-Annahme)
19.	$\Vert\ \Vert\ \Vert\ P(a) \to Q(x_3)$	(EB-Annahme)[35]
20.	$\Vert\ \Vert\ \Vert\ Q(x_3)$	18., 19. (MP)
21.	$\Vert\ \Vert\ \Vert\ \exists x\, Q(x)$	20. (EE)
22.	$\Vert\ \Vert\ \exists x\, Q(x)$	19.–21. (EB)[36]
23.	$\Vert\ P(a) \to \exists x\, Q(x)$	18.–22. (KB)
24.	$\exists x\, (P(a) \to Q(x)) \to (P(a) \to \exists x\, Q(x))$	17.–23. (KB)
25.	$(P(a) \to \exists x\, Q(x)) \leftrightarrow \exists x\, (P(a) \to Q(x))$	16., 24. (ÄQ-EIN)

33: In Bezug auf den 3. Schritt.

34: VB′ erfüllt: ‚x_1‘ kommt in 1., 2. und 8. nicht frei vor.

35: In Bezug auf den 17. Schritt.

36: VB′ erfüllt: ‚x_3‘ kommt in 17., 18. und 21. nicht frei vor.

Lösung zu Übung 11.2. Repräsentieren Sie die folgenden Argumente, und zeigen Sie, dass die daraus resultierenden Argumentformen deduktiv gültig sind:

1. Alle Österreicher sind Europäer. Alle Salzburger sind Österreicher. Also sind alle Salzburger Europäer.

Repräsentation

$$\forall x\,(O(x) \rightarrow E(x)), \forall x\,(S(x) \rightarrow O(x)) \therefore \forall x\,(S(x) \rightarrow E(x))$$

Bemerkung: Dieses Argument hat die Struktur des Barbara-Syllogismus der aristotelischen Logik.

$E(x) := x$ ist Europäer,
$O(x) := x$ ist Österreicher,
$S(x) := x$ ist Salzburger.

Herleitung

1.	$\forall x\,(O(x) \rightarrow E(x))$	(P1)
2.	$\forall x\,(S(x) \rightarrow O(x))$	(P2)
3.	$\|\|\ S(y)$	(KB-Annahme)
4.	$\|\|\ S(y) \rightarrow O(y)$	2. (UB)
5.	$\|\|\ O(y)$	3., 4. (MP)
6.	$\|\|\ O(y) \rightarrow E(y)$	1. (UB)
7.	$\|\|\ E(y)$	5., 6. (MP)
8.	$S(y) \rightarrow E(y)$	3.–7. (KB)
9.	$\forall x\,(S(x) \rightarrow E(x))$	8. (UE)[37]

37: VB erfüllt: ‚y' kommt in 1., 2. und 9. nicht frei vor.

Alternative Herleitung

1.	$\forall x\,(O(x) \rightarrow E(x))$	(P1)
2.	$\forall x\,(S(x) \rightarrow O(x))$	(P2)
3.	$O(y) \rightarrow E(y)$	1. (UB)
4.	$S(y) \rightarrow O(y)$	2. (UB)
5.	$\|\|\ S(y)$	(KB-Annahme)
6.	$\|\|\ O(y)$	5., 4. (MP)
7.	$\|\|\ E(y)$	6., 3. (MP)
8.	$S(y) \rightarrow E(y)$	5.–7. (KB)
9.	$\forall x\,(S(x) \rightarrow E(x))$	8. (UE)[38]

38: VB erfüllt: ‚y' kommt in 1., 2. und 9. nicht frei vor.

2. Alle Philosophen sind weise. Nun gibt es Salzburger Philosophen. Also sind einige Salzburger weise.

Repräsentation

$$\forall x\,(P(x) \rightarrow W(x)), \exists x\,(S(x) \land P(x)) \therefore \exists x\,(S(x) \land W(x))$$

$P(x) :=$ x ist Philosoph,
$S(x) :=$ x ist Salzburger,
$W(x) :=$ x ist weise.

Herleitung

1.	$\forall x\,(P(x) \rightarrow W(x))$	(P1)
2.	$\exists x\,(S(x) \land P(x))$	(P2)
3.	$\|\|$ $S(y) \land P(y)$	(EB-Annahme)[39]
4.	$\|\|$ $P(y)$	3. (SIMP2)
5.	$\|\|$ $P(y) \rightarrow W(y)$	1. (UB)
6.	$\|\|$ $W(y)$	4., 5. (MP)
7.	$\|\|$ $S(y)$	3. (SIMP1)
8.	$\|\|$ $S(y) \land W(y)$	6., 7. (KON)
9.	$\|\|$ $\exists x\,(S(x) \land W(x))$	8. (EE)
10.	$\exists x\,(S(x) \land W(x))$	3.–9. (EB)[40]

39: In Bezug auf P2.

40: VB′ erfüllt: ‚y‘ kommt in 1., 2. und 9. nicht frei vor.

3. Es gibt keine Österreicher, die auf den Mond geflogen sind. Es gibt aber Kosmonauten, die Österreicher sind. Daher sind nicht alle Kosmonauten auf den Mond geflogen.

Repräsentation

$\neg\exists x\,(O(x) \wedge G(x,m)), \exists x\,(K(x) \wedge O(x)) \therefore \neg\forall x\,(K(x) \rightarrow G(x,m))$

m := der Mond,
$K(x)$:= x ist Kosmonaut,
$O(x)$:= x ist Österreicher,
$G(x,y)$:= x ist auf y geflogen.

Herleitung

1.	$\neg\exists x\,(O(x) \wedge G(x,m))$	(P1)
2.	$\exists x\,(K(x) \wedge O(x))$	(P2)
3.	$\|\|\ K(y) \wedge O(y)$	(EB-Annahme)[41]
4.	$\|\|\ K(y)$	3. (SIMP1)
5.	$\|\|\ O(y)$	3. (SIMP2)
6.	$\|\|\ \|\|\ \neg\neg\forall x\,(K(x) \rightarrow G(x,m))$	(IB-Annahme)
7.	$\|\|\ \|\|\ \forall x\,(K(x) \rightarrow G(x,m))$	6. (DN2)
8.	$\|\|\ \|\|\ K(y) \rightarrow G(y,m)$	7. (UB)
9.	$\|\|\ \|\|\ G(y,m)$	4., 8. (MP)
10.	$\|\|\ \|\|\ O(y) \wedge G(y,m)$	5., 9. (KON)
11.	$\|\|\ \|\|\ \exists x\,(O(x) \wedge G(x,m))$	10. (EE)
12.	$\|\|\ \|\|\ \exists x\,(O(x) \wedge G(x,m)) \wedge \neg\exists x\,(O(x) \wedge G(x,m))$	11., 1. (KON)
13.	$\|\|\ \neg\forall x\,(K(x) \rightarrow G(x,m))$	6.–12. (IB)
14.	$\neg\forall x\,(K(x) \rightarrow G(x,m))$	3.–13. (EB)[42]

41: In Bezug auf P2.

42: VB′ erfüllt: ‚y‘ kommt in 1., 2. und 13. nicht frei vor.

4. Nicht ein Lebewesen auf dem Mars ist glatzköpfig. Alle Skinheads sind jedoch glatzköpfig. Somit gibt es keinen Skinhead, der ein Lebewesen auf dem Mars ist.

Repräsentation

$\neg\exists x\,(L(x,m)\wedge G(x)), \forall x\,(S(x)\rightarrow G(x)) \therefore \neg\exists x\,(S(x)\wedge L(x,m))$

m := Mars,
$G(x)$:= x ist glatzköpfig,
$H(x)$:= x ist Skinhead,
$L(x,y)$:= x ist ein Lebewesen auf y.

Herleitung

1.	$\neg\exists x\,(L(x,m)\wedge G(x))$	(P1)
2.	$\forall x\,(S(x)\rightarrow G(x))$	(P2)
3.	$\|\ \neg\neg\exists x\,(S(x)\wedge L(x,m))$	(IB-Annahme)
4.	$\|\ \exists x\,(S(x)\wedge L(x,m))$	3. (DN)
5.	$\|\ \|\ S(y)\wedge L(y,m)$	(EB-Annahme)[43]
6.	$\|\ \|\ S(y)$	5. (SIMP1)
7.	$\|\ \|\ S(y)\rightarrow G(y)$	2. (UB)
8.	$\|\ \|\ G(y)$	6., 7. (MP)
9.	$\|\ \|\ L(y,m)$	5. (SIMP2)
10.	$\|\ \|\ G(y)\wedge L(y,m)$	8., 9. (KON)
11.	$\|\ \|\ \exists x\,(G(x)\wedge L(x,m))$	10. (EE)
12.	$\|\ \|\ A(a)\wedge\neg A(a)$	11., 1. (ECQ)
13.	$\|\ A(a)\wedge\neg A(a)$	5.–12. (EB)[44]
14.	$\neg\exists x\,(S(x)\wedge L(x,m))$	3.–13. (IB)

43: In Bezug auf den 4. Schritt.

44: VB′ erfüllt: ‚y' kommt in 1., 2. und 12. nicht frei vor.

Lösung zu Übung 11.3. Repräsentieren Sie die beiden folgenden Argumente und versuchen Sie zu zeigen, dass die daraus resultierenden Argumentformen deduktiv gültig sind.

1. Alle Lebewesen auf dem Mars sind glatzköpfig. Somit gibt es Lebewesen auf dem Mars, die glatzköpfig sind.

m := Mars,
$G(x)$:= x ist glatzköpfig,
$L(x, y)$:= x ist ein Lebewesen auf y.

Repräsentation

$$\forall x\,(L(x,m) \rightarrow G(x)) \;\therefore\; \exists x\,(L(x,m) \wedge G(x))$$

Gültigkeit: Dieses Argument ist nicht gültig.

Wir können dies mit einer Interpretation der Formel im Sinne des formalisierten Satzes zeigen.

Wir können auch dies zeigen, mit der Interpretation $\mathfrak{I} = \langle \mathbf{D}, \varphi \rangle$, wobei:

- $\mathbf{D} = \{Freddie\}$,
- $\varphi(m) = Freddie$,
- $\varphi(L) = \{\langle d_1, d_2 \rangle \in \mathbf{D}^2 \mid d_1 \text{ ist der Vater von } d_2\} = \{\}$.
- (Die Extension von $\varphi(G)$ ist nicht wichtig.)

Unter $\mathfrak{I}$ ist die Prämisse wahr, aber die Konklusion ist falsch.

Es war ausreichend zu wissen, dass die Antezedenz falsch ist – d.h. $\varphi_{\sigma'}(L(x,m)) = \mathtt{f}$ –, um zu schließen, dass die gesamte Implikationsformel wahr ist – d.h. $\varphi_{\sigma'}(L(x,m) \rightarrow G(x)) = \mathtt{w}$. Daher war es nicht erforderlich, den Wahrheitswert von $G(x)$ – also $\varphi_{\sigma'}(G(x))$ – zu bestimmen.

Die Prämisse sind wahr

Sei σ eine beliebige Variablenbelegung. Es gibt genau eine mögliche x-Variante σ' von σ für die gilt: $\varphi_{\sigma'} = Freddie$. (Tatsächlich ist $\sigma' = \sigma$.)

Da Freddie nicht sein eigener Vater ist, folgt:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{Freddie \text{ ist } \textit{nicht} \text{ sein eigener Vater}}{\langle Freddie, Freddie \rangle \notin \varphi(L)}}{\langle \varphi_{\sigma'}(x), \varphi(m) \rangle \notin \varphi(L)}}{\langle \varphi_{\sigma'}(x), \varphi_{\sigma'}(m) \rangle \notin \varphi(L)} \qquad\qquad}{\dfrac{\varphi_{\sigma'}(L(x,m)) = \mathtt{f} \qquad\qquad \varphi_{\sigma'}(G(x)) = \,?}{\varphi_{\sigma'}(L(x,m) \rightarrow G(x)) = \mathtt{w}}}$$

Da σ' eine beliebige x-Variante von σ ist, folgt daraus, dass:

$$\varphi_\sigma(\forall x\,(L(x,m) \rightarrow G(x))) = \mathtt{w}.$$

Die Konklusion ist falsch

Sei σ eine beliebige Variablenbelegung. Es gibt genau eine mögliche x-Variante σ' von σ für die gilt: $\varphi_{\sigma'} = \mathit{Freddie}$. (Tatsächlich ist $\sigma' = \sigma$.)

Da Freddie nicht sein eigener Vater ist, folgt:

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\mathit{Freddie} \text{ ist \textit{nicht} sein eigener Vater}}{\langle \mathit{Freddie}, \mathit{Freddie} \rangle \notin \varphi(L)}}{\langle \varphi_{\sigma'}(x), \varphi(m) \rangle \notin \varphi(L)}}{\langle \varphi_{\sigma'}(x), \varphi_{\sigma'}(m) \rangle \notin \varphi(L)}}{\varphi_{\sigma'}(L(x,m)) = \mathtt{f}} \qquad \varphi_{\sigma'}(G(x)) = \,?}{\varphi_{\sigma'}(L(x,m) \land G(x)) = \mathtt{f}}$$

Da σ' eine beliebige x-Variante von σ ist, folgt daraus, dass:

$$\varphi_\sigma(\exists x\,(L(x,m) \land G(x))) = \mathtt{f}.$$

Abschließend folgt, dass das Argument nicht logisch gültig ist, da unter $\mathfrak{I}$ sind die Prämissen sind, die Konklusion jedoch falsch.

2. Es gibt Lebewesen auf dem Mars. Alle Lebewesen auf dem Mars sind glatzköpfig. Somit gibt es Lebewesen auf dem Mars, die glatzköpfig sind.

m := Mars,
$G(x)$:= x ist glatzköpfig,
$L(x,y)$:= x ist ein Lebewesen auf y.

Repräsentation

$$\exists x\, L(x,m), \forall x\,(L(x,m) \to G(x)) \therefore \exists x\,(L(x,m) \land G(x))$$

Gültigkeit: Dieses Argument ist gültig (sie Herleitung unten).

1.	$\exists x\, L(x,m)$	(P1)
2.	$\forall x\,(L(x,m) \to G(x))$	(P2)
3.	$\|\|\ L(y,m)$	(EB-Annahme)[45]
4.	$\|\|\ L(y,m) \to G(y)$	2. (UB)
5.	$\|\|\ G(y)$	3., 4. (MP)
6.	$\|\|\ L(y,m) \land G(y)$	3., 5. (KON)
7.	$\|\|\ \exists x\,(L(x,m) \land G(x))$	6. (EE)
8.	$\exists x\,(L(x,m) \land G(x))$	3.–7. (EB)[46]

45: In Bezug auf P1.

46: VB′ erfüllt: ‚y‘ kommt in 1., 2. und 7. nicht frei vor.

Lösung zu Übung 11.4. Führen Sie die Herleitungen zu folgenden deduktiv gültigen Schlüssen durch:

1. $\exists x\, \forall y\, R(x, y) \vdash \forall y\, \exists x\, R(x, y)$

Antwort

1. $\exists x\, \forall y\, R(x, y)$	(P1)
2. $\|\|$ $\forall y\, R(x_1, y)$	(EB-Annahme)[47]
3. $\|\|$ $R(x_1, y_1)$	2. (UB)
4. $\|\|$ $\exists x\, R(x, y_1)$	3. (EE)
5. $\|\|$ $\forall y\, \exists x\, R(x, y)$	4. (UE)[48]
6. $\forall y\, \exists x\, R(x, y)$	2.–5. (EB)[49]

47: In Bezug auf P1.

48: VB erfüllt: ‚y_1‘ kommt in 1., 2. und 5. nicht frei vor.

49: VB′ erfüllt: ‚x_1‘ kommt in 1. und 5. nicht frei vor.

Frage

Können wir die Herleitung auch in umgekehrter Richtung durchführen? Siehe die folgende Pseudoherleitung.

1. $\forall y\, \exists x\, R(x, y)$	(P1)
2. $\exists x\, R(x, y_1)$	1. (UB)
3. $\|\|$ $R(x_1, y_1)$	(EB-Annahme)[50]
4. $\|\|$ $\forall y\, R(x_1, y)$	3. (UB)[51]
5. $\|\|$ $\exists x\, \forall y\, R(x, y)$	4. (EE)
6. $\exists x\, \forall y\, R(x, y)$	3.–5. (EB)

50: In Bezug auf den 2. Schritt.

51: Unzulässiger Schritt, weil die Variablenbedingung VB nicht erfüllt ist: y vorkommt frei in der EB-Annahme (siehe S. 281).

2. $\neg\exists x\, \neg P(x) \vdash \forall x\, P(x)$

Antwort

1. $\neg\exists x\, \neg P(x)$	(P1)
2. $\|\|$ $\neg P(y)$	(IB-Annahme)
3. $\|\|$ $\exists x\, \neg P(x)$	2. (EE)
4. $\|\|$ $\exists x\, \neg P(x) \wedge \neg\exists x\, \neg P(x)$	3., 1. (KON)
5. $P(y)$	2.–4. (IB)
6. $\forall x\, P(x)$	5. (UE)[52]

52: VB erfüllt: ‚y‘ kommt in 1. und 6. nicht frei vor.

3. $\exists x\, P(x) \vdash \neg\forall x\, \neg P(x)$

Antwort

1.	$\exists x\, P(x)$	(P1)
2.	$\|\| \ \neg\neg\forall x\, \neg P(x)$	(IB-Annahme)
3.	$\|\| \ \forall x\, \neg P(x)$	2. (DN2)
4.	$\|\| \ \|\| \ P(y)$	(EB-Annahme)[53]
5.	$\|\| \ \|\| \ \neg P(y)$	3. (UB)
6.	$\|\| \ \|\| \ Q(a) \wedge \neg Q(a)$	4., 5. (ECQ)
7.	$\|\| \ Q(a) \wedge \neg Q(a)$	4.–6. (EB)[54]
8.	$\neg\forall x\, \neg P(x)$	2.–7. (IB)

53: In Bezug auf P1.

54: VB′ erfüllt: ‚y' kommt in 1. und 6. nicht frei vor.

4. $\neg\exists x\, P(x) \vdash \forall x\, \neg P(x)$

Antwort

1.	$\neg\exists x\, P(x)$	(P1)
2.	$\|\| \ \neg\neg P(y)$	(IB-Annahme)
3.	$\|\| \ P(y)$	2. (DN2)
4.	$\|\| \ \exists x\, P(x)$	3. (EE)
5.	$\|\| \ \exists x\, P(x) \wedge \neg\exists x\, P(x)$	4., 1. (KON)
6.	$\neg P(y)$	2.–5. (IB)
7.	$\forall x\, \neg P(x)$	6. (UE)[55]

55: VB erfüllt: ‚y' kommt in 1. und 7. nicht frei vor.

5. $\exists x\, \neg P(x) \vdash \neg\forall x\, P(x)$

Antwort

1.	$\exists x\, \neg P(x)$	(P1)
2.	$\|\| \ \neg P(y)$	(EB-Annahme)[56]
3.	$\|\| \ \|\| \ \neg\neg\forall x\, P(x)$	(IB-Annahme)
4.	$\|\| \ \|\| \ \forall x\, P(x)$	3. (DN2)
5.	$\|\| \ \|\| \ P(y)$	4. (UB)
6.	$\|\| \ \|\| \ P(y) \wedge \neg P(y)$	5., 2. (KON)
7.	$\|\| \ \neg\forall x\, P(x)$	6. (IB)
8.	$\neg\forall x\, P(x)$	2.–7. (EB)[57]

56: In Bezug auf P1.

57: VB′ erfüllt: ‚y' kommt in 1. und 7. nicht frei vor.

6. $\forall x\,(\exists y\, P(y) \rightarrow Q(x)) \vdash \forall y\,(P(y) \rightarrow Q(a))$

Antwort

1. $\forall x\,(\exists y\, P(y) \rightarrow Q(x))$ (P1)
2. $\exists y\, P(y) \rightarrow Q(a)$ 1. (UB)
3. $\|\;\; P(z)$ (KB-Annahme)
4. $\|\;\; \exists y\, P(y)$ 3. (EE)
5. $\|\;\; Q(a)$ 2., 4. (MP)
6. $P(z) \rightarrow Q(a)$ 3.–5. (KB)
7. $\forall y\,(P(y) \rightarrow Q(a))$ 6. (UE)[58]

58: VB erfüllt: ‚y' kommt in 1. und 7. nicht frei vor.

7. $\neg\forall x\,(P(x) \rightarrow Q(x)) \vdash \exists x\,(P(x) \wedge \neg Q(x))$

Antwort

1. $\neg\forall x\,(P(x) \rightarrow Q(x))$ (P1)
2. $\|\;\; \neg\exists x\,(P(x) \wedge \neg Q(x)$ (IB-Annahme)
3. $\|\;\|\;\; P(y)$ (FU-Annahme 1)
4. $\|\;\|\;\|\;\; Q(y)$ (FU-Annahme 1.1)
5. $\|\;\|\;\|\;\|\;\; P(y)$ (KB-Annahme)
6. $\|\;\|\;\|\;\|\;\; Q(y)$ 4. (TS)
7. $\|\;\|\;\|\;\; P(y) \rightarrow Q(y)$ 5.–6. (KB)
8. $\|\;\|\;\|\;\; \neg Q(y)$ (FU-Annahme 1.2)
9. $\|\;\|\;\|\;\; P(y) \wedge \neg Q(y)$ 3., 8. (KON)
10. $\|\;\|\;\|\;\; \exists x\,(P(x) \wedge \neg Q(x))$ 9. (EE)
11. $\|\;\|\;\|\;\; P(y) \rightarrow Q(y)$ 2., 10. (EQC)
12. $\|\;\|\;\; P(y) \rightarrow Q(y)$ 4.–11. (FU)
13. $\|\;\|\;\; \neg P(y)$ (FU-Annahme 2)
14. $\|\;\|\;\|\;\; P(y)$ (KB-Annahme)
15. $\|\;\|\;\|\;\; Q(y)$ 13., 14. (ECQ)
16. $\|\;\|\;\; P(y) \rightarrow Q(y)$ 14.–15. (KB)
17. $\|\;\; P(y) \rightarrow Q(y)$ 3.–16. (FU)
18. $\|\;\; \forall x\,(P(x) \rightarrow Q(x))$ 17. (UE)[59]
19. $\|\;\; \forall x\,(P(x) \rightarrow Q(x)) \wedge \neg\forall x\,(P(x) \rightarrow Q(x))$ 18., 1. (KON)
20. $\exists x\,(P(x) \wedge \neg Q(x)$ 2.–19. (IB)

59: VB erfüllt: ‚y' kommt in 2. und 18. nicht frei vor.

Lösung zu Übung 11.5. Repräsentieren Sie die folgenden Argumente, und zeigen Sie, dass die daraus resultierenden Argumentformen deduktiv gültig sind:

1. Alles hat eine Ursache. Gott hat jedoch keine Ursache. Also ist der Papst Tiroler.

Repräsentation 1

$$\forall x\, \exists y\, U(y,x), \neg\exists x\, U(x,g) \therefore T(p)$$

g := Gott,
p := der Papst,
$T(x)$:= x ist Tiroler,
$U(x,y)$:= x ist die Ursache von y.

Herleitung

1.	$\forall x\, \exists y\, U(y,x)$	(P1)
2.	$\neg\exists x\, U(x,g)$	(P2)
3.	$\exists y\, U(y,g)$	1. (UB)
4.	$\|\|$ $U(z,g)$	(EB-Annahme)[60]
5.	$\|\|$ $\exists x\, U(x,g)$	4. (EE)
6.	$\|\|$ $T(p)$	2., 4. (ECQ)
7.	$T(p)$	3.–6. (EB)[61]

60: In Bezug auf den 3. Schritt.

61: VB′ erfüllt: ‚z' kommt in 1., 2. und 6. nicht frei vor.

Repräsentation 2

$$\forall x\, \exists y\, U(y,x), \neg\exists y\, U(y,g) \therefore T(p)$$

g, p, T, U wie in der Repr. 1.

Herleitung

1.	$\forall x\, \exists y\, U(y,x)$	(P1)
2.	$\neg\exists y\, U(y,g)$	(P2)
3.	$\exists y\, U(y,g)$	1. (UB)
4.	$T(p)$	3., 2. (ECQ)

2. Alle Salzburger lieben Salzburg. Es gibt jedoch niemanden, der Salzburg und alle Touristen in Salzburg liebt. Somit lieben die Salzburger nicht alle Touristen in Salzburg.

Repräsentation

$$\forall x\,(S(x) \to L(x,s)), \neg\exists x\,(L(x,s) \land \forall y\,(T(y,s) \to L(x,y)))$$
$$\therefore\ \forall x\,(S(x) \to \neg\forall y\,(T(y,s) \to L(x,y)))$$

s := Salzburg,
$S(x)$:= x ist Salzburger,
$L(x,y)$:= x liebt y,
$T(x,y)$:= x ist ein Tourist in y.

Herleitung

1.	$\forall x\,(S(x) \to L(x,s))$	(P1)
2.	$\neg\exists x\,(L(x,s) \land \forall y\,(T(y,s) \to L(x,y)))$	(P2)
3.	$\|\|$ $S(z)$	(KB-Annahme)
4.	$\|\|$ $S(z) \to L(z,s)$	1. (UB)
5.	$\|\|$ $L(z,s)$	3., 4. (MP)
6.	$\|\|$ $\|\|$ $\neg\neg\forall y\,(T(y,s) \to L(z,y))$	(IB-Annahme)
7.	$\|\|$ $\|\|$ $\forall y\,(T(y,s) \to L(z,y))$	6. (DN2)
8.	$\|\|$ $\|\|$ $L(z,s) \land \forall y\,(T(y,s) \to L(z,y))$	5., 7. (KON)
9.	$\|\|$ $\|\|$ $\exists x\,(L(x,s) \land \forall y\,(T(y,s) \to L(x,y)))$	5., 7. (EE)
10.	$\|\|$ $\|\|$ $Q(a) \land \neg Q(a)$	9., 2. (ECQ)
11.	$\|\|$ $\neg\forall y\,(T(y,s) \to L(z,y))$	6., 10. (IB)
12.	$S(z) \to \neg\forall y\,(T(y,s) \to L(z,y))$	3.–11. (KB)
13.	$\forall x\,(S(x) \to \neg\forall y\,(T(y,s) \to L(x,y)))$	12. (UE)[62]

62: VB erfüllt: ‚z' kommt in 1., 2. und 13. nicht frei vor.

Bemerkung

Das übliche Vorgehensweise in den 10. Schritt wäre gewesen, aus den Schritten 9. und 2. durch KON folgendes herzuleiten:

$$\exists x\,(L(x,s) \land \forall y\,(T(y,s) \to L(x,y))) \land \neg\exists x\,(L(x,s) \land \forall y\,(T(y,s) \to L(x,y))),$$

und dann mit denselben Schritten fortfahren.

Da diese Formel aber zu lang ist, haben wir entschieden, diesen anderen Weg zu gehen, der ebenso zulässig ist.

3. Es gibt nichts Allmächtiges. Wenn etwas ein Gott ist, ist es jedoch allmächtig. Also gibt es keinen Gott.

Repräsentation

$$\neg\exists x\, A(x), \forall x\, (G(x) \rightarrow A(x)) \therefore \neg\exists x\, G(x)$$

$A(x) :=$ x ist allmächtig,
$G(x) :=$ x ist ein Gott.

Man beachte, dass ‚Gott' in 11.5.1 als Eigenname verwendet wird, hier aber als Prädikat.

Herleitung

1.	$\neg\exists x\, A(x)$	(P1)
2.	$\forall x\, (G(x) \rightarrow A(x))$	(P2)
3.	$\|\|\ \neg\neg\exists x\, G(x)$	(IB-Annahme)
4.	$\|\|\ \exists x\, G(x)$	3. (DN2)
5.	$\|\|\ \|\|\ G(y)$	(EB-Annahme)[63]
6.	$\|\|\ \|\|\ G(y) \rightarrow A(y)$	2. (UB)
7.	$\|\|\ \|\|\ A(y)$	5., 6. (MP)
8.	$\|\|\ \|\|\ \exists x\, A(x)$	7. (EE)
9.	$\|\|\ \|\|\ Q(a) \wedge \neg Q(a)$	8., 1. (ECQ)
10.	$\|\|\ Q(a) \wedge \neg Q(a)$	5.–9. (EB)[64]
11.	$\neg\exists x\, G(x)$	3.–10. (IB)

63: In Bezug auf den 4. Schritt.

64: VB′ erfüllt: ‚y' kommt in 1., 2. und 9. nicht frei vor.

11.3 Zusatzübungen

Zusatzübung 11.1. Führen Sie alle Herleitungsübungen unter Verwendung der minimal notwendigen Anzahl an Variablen durch und stellen Sie sicher, dass sämtliche Variablenbedingungen eingehalten werden.

Zusatzübung 11.2. Beweisen Sie die logische Gültigkeit der folgenden Schlussfolgerungen mit Herleitungen[65]:

65: Adaptiert aus D. Hilbert & W. Ackermann, *Gründzüge der theoretischen Logik* (6. Auf.), Berlin: Springer, 1972, S. 83.

1. $\vdash \forall x\, \forall y\, F(x,y) \leftrightarrow \forall y\, \forall x\, F(x,y)$
2. $\vdash \forall x\, (F(x) \land G(x)) \leftrightarrow \forall x\, F(x) \land \forall x\, G(x)$
3. $\forall x\, (F(x) \to G(x)) \vdash (\forall x\, F(x) \to \forall x\, G(x))$
4. $\forall x\, (F(x) \leftrightarrow G(x)) \vdash (\forall x\, F(x) \leftrightarrow \forall x\, G(x))$
5. $\vdash \exists x\, F(x) \leftrightarrow \neg\forall x\, \neg F(x)$
6. $\vdash \exists x\, \neg F(x) \leftrightarrow \neg\forall x\, F(x)$
7. $\vdash \neg\exists x\, \neg F(x) \leftrightarrow \forall x\, F(x)$
8. $\vdash \neg\exists x\, F(x) \leftrightarrow \forall x\, \neg F(x)$
9. $\forall x\, (F(x) \to G(x)) \vdash (\exists x\, F(x) \to \exists x\, G(x))$
10. $\forall x\, (F(x) \leftrightarrow G(x)) \vdash (\exists x\, F(x) \leftrightarrow \exists x\, G(x))$
11. $\exists x\, \forall y\, F(x,y) \vdash \forall y\, \exists x\, F(x,y)$
12. $\forall x\, \forall y\, F(x,y) \vdash \forall x\, F(x,x)$
13. $\vdash \exists x\, (A \land F(x)) \leftrightarrow A \land \exists x\, F(x)$
14. $\vdash \exists x\, (A \lor F(x)) \leftrightarrow A \lor \exists x\, F(x)$
15. $\vdash \exists x\, (F(x) \lor G(x)) \leftrightarrow \exists x\, F(x) \lor \exists x\, G(x)$
16. $\vdash \exists x\, (F(x) \lor A) \leftrightarrow \exists x\, F(x) \lor A$
17. $\vdash \forall x\, (F(x) \lor A) \leftrightarrow \forall x\, F(x) \lor A$
18. $\exists x\, F(x,x) \vdash \exists x\, \exists y\, F(x,y)$
19. $\vdash \exists x\, \neg\exists y\, \neg(F(x) \lor \neg F(y))$

Lösung zu Zusatzübung 11.2. [Ausstehend.]

11.3.1 Lösungen

Lösung zu Zusatzübung 11.1 Führen Sie alle Herleitungsübungen unter Verwendung der minimal notwendigen Anzahl an Variablen durch und stellen Sie sicher, dass sämtliche Variablenbedingungen eingehalten werden.

Herleitungen aus Übung 11.1.

1. $\forall x\,(P(x) \wedge Q(x)) \vdash \forall x\,P(x) \wedge \forall x\,Q(x)$

Antwort

1.	$\forall x\,(P(x) \wedge Q(x))$	(P1)
2.	$P(x) \wedge Q(x)$	1. (UB)[66]
3.	$P(x)$	2. (SIMP1)
4.	$\forall x\,P(x)$	3. (UE)
5.	$Q(x)$	2. (SIMP2)
6.	$\forall x\,Q(x)$	5. (UE)
7.	$\forall x\,P(x) \wedge \forall x\,Q(x)$	4., 6. (KON)

66: Wir substituieren: $(P(x) \wedge Q(x))[x/x]$.

Erklärung

Im Lösungsblatt von Prof. Leitgeb wird in Schritt 2 die Substitution

$$(P(x) \wedge Q(x))[y/x] = (P(y) \wedge Q(y))$$

vorgenommen. Wir führen hier stattdessen die triviale Substitution

$$(P(x) \wedge Q(x))[x/x] = (P(x) \wedge Q(x))$$

durch, die ebenfalls mit UB möglich ist.

2. $\forall x\,P(x) \vee \forall x\,Q(x) \vdash \forall x\,(P(x) \vee Q(x))$

Antwort

1.	$\forall x\,P(x) \vee \forall x\,Q(x)$	(P1)
2.	$\|\|\ \forall x\,P(x)$	(FU-Annahme 1)
3.	$\|\|\ P(x)$	2. (UB)
4.	$\|\|\ P(x) \vee Q(x)$	3. (ADD1)
5.	$\|\|\ \neg\forall x\,P(x)$	(FU-Annahme 2)
6.	$\|\|\ \forall x\,Q(x)$	1., 5. (DS1)
7.	$\|\|\ Q(x)$	6. (UB)
8.	$\|\|\ P(x) \vee Q(x)$	7. (ADD2)
9.	$P(x) \vee Q(x)$	2.–8. (FU)
10.	$\forall x\,(P(x) \vee Q(x))$	9. (UE)

Wir ziehen keinen Strich, weil die zu beweisende Schlussfolgerung keine Prämissen hat.

3. $\vdash \forall x\,(P(a) \vee Q(x)) \leftrightarrow P(a) \vee \forall x\, Q(x)$

Antwort

1.	$\vert\vert\ \forall x\,(P(a) \vee Q(x))$	(KB-Annahme)
2.	$\vert\vert\ P(a) \vee Q(x)$	1. (UB)
3.	$\vert\vert\ \vert\vert\ P(a)$	(FU-Annahme 1)
4.	$\vert\vert\ \vert\vert\ P(a) \vee \forall x\, Q(x)$	3. (ADD1)
5.	$\vert\vert\ \vert\vert\ \neg P(a)$	(FU-Annahme 2)
6.	$\vert\vert\ \vert\vert\ Q(x)$	2., 5. (DS1)
7.	$\vert\vert\ \vert\vert\ \forall x\, Q(x)$	6. (UE)
8.	$\vert\vert\ \vert\vert\ P(a) \vee \forall x\, Q(x)$	7. (ADD2)
9.	$\vert\vert\ P(a) \vee \forall x\, Q(x)$	3.–8. (FU)
10.	$\forall x\,(P(a) \vee Q(x)) \rightarrow P(a) \vee \forall x\, Q(x)$	1.–9. (KB)
11.	$\vert\vert\ P(a) \vee \forall x\, Q(x)$	(KB-Annahme)
12.	$\vert\vert\ \vert\vert\ P(a)$	(FU-Annahme 1)
13.	$\vert\vert\ \vert\vert\ P(a) \vee Q(x)$	12. (ADD1)
14.	$\vert\vert\ \vert\vert\ \neg P(a)$	(FU-Annahme 2)
15.	$\vert\vert\ \vert\vert\ \forall x\, Q(x)$	11., 14. (DS1)
16.	$\vert\vert\ \vert\vert\ Q(x)$	15. (UB)
17.	$\vert\vert\ \vert\vert\ P(a) \vee Q(x)$	16. (ADD)
18.	$\vert\vert\ P(a) \vee Q(x)$	12.–17. (FU)
19.	$\vert\vert\ \forall x\,(P(a) \vee Q(x))$	18. (UE)
20.	$P(a) \vee \forall x\, Q(x) \rightarrow \forall x\,(P(a) \vee Q(x))$	11.–18. (KB)
21.	$\forall x\,(P(a) \vee Q(x)) \leftrightarrow P(a) \vee \forall x\, Q(x)$	10., 20. (ÄQ-EIN)

4. $\vdash \forall x\,(P(a) \wedge Q(x)) \leftrightarrow P(a) \wedge \forall x\,Q(x)$

Antwort

1.	$\Vert\ \forall x\,(P(a) \wedge Q(x))$	(KB-Annahme)
2.	$\Vert\ P(a) \wedge Q(x)$	1. (UB)
3.	$\Vert\ P(a)$	2. (SIMP1)
4.	$\Vert\ Q(x)$	2. (SIMP2)
5.	$\Vert\ \forall x\,Q(x)$	4. (UE)
6.	$\Vert\ P(a) \wedge \forall x\,Q(x)$	3., 5. (KON)
7.	$\forall x\,(P(a) \wedge Q(x)) \rightarrow P(a) \wedge \forall x\,Q(x)$	1.–6. (KB)
8.	$\Vert\ P(a) \wedge \forall x\,Q(x)$	(KB-Annahme)
9.	$\Vert\ P(a)$	8. (SIMP1)
10.	$\Vert\ \forall x\,Q(x)$	8. (SIMP2)
11.	$\Vert\ Q(x)$	10. (UB)
12.	$\Vert\ P(a) \wedge Q(x)$	9., 11. (ADD)
13.	$\Vert\ \forall x\,(P(a) \wedge Q(x))$	12. (UE)
14.	$P(a) \wedge \forall x\,Q(x) \rightarrow \forall x\,(P(a) \wedge Q(x))$	8.–13. (KB)
15.	$\forall x\,(P(a) \wedge Q(x)) \leftrightarrow P(a) \wedge \forall x\,Q(x)$	7., 14. (ÄQ-EIN)

5. $\vdash \forall x\,(P(a) \rightarrow Q(x)) \leftrightarrow (P(a) \rightarrow \forall x\,Q(x))$

Antwort

1.	$\Vert\ \forall x\,(P(a) \rightarrow Q(x))$	(KB-Annahme)
2.	$\Vert\ P(a) \rightarrow Q(x)$	1. (UB)
3.	$\Vert\ \Vert\ P(a)$	(KB-Annahme)
4.	$\Vert\ \Vert\ Q(x)$	2., 3. (MP)
5.	$\Vert\ \Vert\ \forall x\,Q(x)$	4. (UE)
6.	$\Vert\ P(a) \rightarrow \forall x\,Q(x)$	3.–5. (KB)
7.	$\forall x\,(P(a) \rightarrow Q(x)) \rightarrow (P(a) \rightarrow \forall x\,Q(x))$	1.–6. (KB)
8.	$\Vert\ P(a) \rightarrow \forall x\,Q(x)$	(KB-Annahme)
9.	$\Vert\ \Vert\ P(a)$	(KB-Annahme)
10.	$\Vert\ \Vert\ \forall x\,Q(x)$	8., 9. (MP)
11.	$\Vert\ \Vert\ Q(x)$	10. (UB)
12.	$\Vert\ P(a) \rightarrow Q(x)$	9.–11. (KB)
13.	$\Vert\ \forall x\,(P(a) \rightarrow Q(x))$	12. (UE)
14.	$(P(a) \rightarrow \forall x\,Q(x)) \rightarrow \forall x\,(P(a) \rightarrow Q(x))$	8.–13. (KB)
15.	$\forall x\,(P(a) \rightarrow Q(x)) \leftrightarrow (P(a) \rightarrow \forall x\,Q(x))$	7., 14. (ÄQ-EIN)

6. $\forall x\, \neg P(x) \vdash \neg \exists x\, P(x)$

Antwort

1.	$\underline{\forall x\, \neg P(x)}$	(P1)
2.	$\Vert\ \neg\neg\exists x\, P(x)$	(IB-Annahme)
3.	$\Vert\ \exists x\, P(x)$	2. (DN2)
4.	$\Vert\ \Vert\ P(x)$	(EB-Annahme)[67]
5.	$\Vert\ \Vert\ \neg P(x)$	1. (UB)
6.	$\Vert\ \Vert\ Q(a) \wedge \neg Q(a)$	4., 5. (ECQ)
7.	$\Vert\ Q(a) \wedge \neg Q(a)$	4.–6. (EB)
8.	$\neg \exists x\, P(x)$	2.–7. (IB)

67: In Bezug auf den 3. Schritt.

Erklärung

Die Variable x kommt in keiner Annahme frei vor. Deshalb können wir $P(x)$ als EB-Annahme verwenden.

7. $\vdash P(a) \wedge \exists x\, Q(x) \leftrightarrow \exists x\, (P(a) \wedge Q(x))$

Antwort

1.	$\Vert\ P(a) \wedge \exists x\, Q(x)$	(KB-Annahme)
2.	$\Vert\ P(a)$	1. (SIMP1)
3.	$\Vert\ \exists x\, Q(x)$	1. (SIMP2)
4.	$\Vert\ \Vert\ Q(x)$	(EB-Annahme)[68]
5.	$\Vert\ \Vert\ P(a) \wedge Q(x)$	2., 4. (KON)
6.	$\Vert\ \Vert\ \exists x\, (P(a) \wedge Q(x))$	5. (EE)
7.	$\Vert\ \exists x\, (P(a) \wedge Q(x))$	4.–6. (EB)
8.	$P(a) \wedge \exists x\, Q(x) \to \exists x\, (P(a) \wedge Q(x))$	1.–7. (KB)
9.	$\Vert\ \exists x\, (P(a) \wedge Q(x))$	(KB-Annahme)
10.	$\Vert\ \Vert\ P(a) \wedge Q(x)$	(EB-Annahme)[69]
11.	$\Vert\ \Vert\ P(a)$	10. (SIMP1)
12.	$\Vert\ \Vert\ Q(x)$	10. (SIMP2)
13.	$\Vert\ \Vert\ \exists x\, Q(x)$	12. (EE)
14.	$\Vert\ \Vert\ P(a) \wedge \exists x\, Q(x)$	11., 13. (KON)
15.	$\Vert\ P(a) \wedge \exists x\, Q(x)$	10.–14. (EB)
16.	$\exists x\, (P(a) \wedge Q(x)) \to P(a) \wedge \exists x\, Q(x)$	9.–15. (KB)
17.	$P(a) \wedge \exists x\, Q(x) \leftrightarrow \exists x\, (P(a) \wedge Q(x))$	8., 16. (ÄQ-EIN)

68: In Bezug auf den 3. Schritt.

69: In Bezug auf den 9. Schritt.

8. $\vdash P(a) \lor \exists x\, Q(x) \leftrightarrow \exists x\, (P(a) \lor Q(x))$

Antwort

1.	$\Vert\ P(a) \lor \exists x\, Q(x)$	(KB-Annahme)
2.	$\Vert\ \Vert\ P(a)$	(FU-Annahme 1)
3.	$\Vert\ \Vert\ P(a) \lor Q(x)$	2. (ADD1)
4.	$\Vert\ \Vert\ \exists x\, (P(a) \lor Q(x))$	3. (EE)
5.	$\Vert\ \Vert\ \neg P(a)$	(FU-Annahme 2)
6.	$\Vert\ \Vert\ \exists x\, Q(x)$	1., 5. (DS1)
7.	$\Vert\ \Vert\ \Vert\ Q(x)$	(EB-Annahme)[70]
8.	$\Vert\ \Vert\ \Vert\ P(a) \lor Q(x)$	7. (ADD2)
9.	$\Vert\ \Vert\ \Vert\ \exists x\, (P(a) \lor Q(x))$	8. (EE)
10.	$\Vert\ \Vert\ \exists x\, (P(a) \lor Q(x))$	7.–9. (EB)
11.	$\Vert\ \exists x\, (P(a) \lor Q(x))$	2.–10. (FU)
12.	$P(a) \lor \exists x\, Q(x) \to \exists x\, (P(a) \lor Q(x))$	1.–11. (KB)
13.	$\Vert\ \exists x\, (P(a) \lor Q(x))$	(KB-Annahme)
14.	$\Vert\ \Vert\ P(a) \lor Q(x)$	(EB-Annahme)[71]
15.	$\Vert\ \Vert\ \Vert\ P(a)$	(FU-Annahme 1)
16.	$\Vert\ \Vert\ \Vert\ P(a) \lor \exists x\, Q(x)$	15. (ADD1)
17.	$\Vert\ \Vert\ \Vert\ \neg P(a)$	(FU-Annahme 2)
18.	$\Vert\ \Vert\ \Vert\ Q(x)$	14., 17. (DS1)
19.	$\Vert\ \Vert\ \Vert\ \exists x\, Q(x)$	18. (EE)
20.	$\Vert\ \Vert\ \Vert\ P(a) \lor \exists x\, Q(x)$	19. (ADD2)
21.	$\Vert\ \Vert\ P(a) \lor \exists x\, Q(x)$	15.–20. (FU)
22.	$\Vert\ P(a) \lor \exists x\, Q(x)$	14.–21. (EB)
23.	$\exists x\, (P(a) \lor Q(x)) \to P(a) \lor \exists x\, Q(x)$	13.–19. (KB)
24.	$P(a) \lor \exists x\, Q(x) \leftrightarrow \exists x\, (P(a) \lor Q(x))$	12., 23. (ÄQ-EIN)

70: In Bezug auf den 6. Schritt.

71: In Bezug auf den 13. Schritt.

9. $\exists x\, P(x) \lor \exists x\, Q(x) \vdash \exists x\, (P(x) \lor Q(x))$

Antwort

1.	$\exists x\, P(x) \lor \exists x\, Q(x)$	(P1)
2.	$\|\| \ \exists x\, P(x)$	(FU-Annahme 1)
3.	$\|\| \ \|\| \ P(x)$	(EB-Annahme)[72]
4.	$\|\| \ \|\| \ P(x) \lor Q(x)$	3. (ADD1)
5.	$\|\| \ \|\| \ \exists x\, (P(x) \lor Q(x))$	4. (EE)
6.	$\|\| \ \exists x\, (P(x) \lor Q(x))$	3.–5. (EB)
7.	$\|\| \ \neg\exists x\, P(x)$	(FU-Annahme 2)
8.	$\|\| \ \exists x\, Q(x)$	1., 7. (DS1)
9.	$\|\| \ \|\| \ Q(x)$	(EB-Annahme)[73]
10.	$\|\| \ \|\| \ P(x) \lor Q(x)$	9. (ADD2)
11.	$\|\| \ \|\| \ \exists x\, (P(x) \lor Q(x))$	10. (EE)
12.	$\|\| \ \exists x\, (P(x) \lor Q(x))$	9.–11. (EB)
13.	$\exists x\, (P(x) \lor Q(x))$	2.–12. (FU)

72: In Bezug auf den 2. Schritt.

73: In Bezug auf den 8. Schritt.

10. $\exists x\, (P(x) \rightarrow Q(x)), \forall x\, P(x) \vdash \exists x\, Q(x)$

Antwort

1.	$\exists x\, (P(x) \rightarrow Q(x))$	(P1)
2.	$\forall x\, P(x)$	(P2)
3.	$\|\| \ P(x) \rightarrow Q(x)$	(EB-Annahme)[74]
4.	$\|\| \ P(x)$	2. (UB)
5.	$\|\| \ Q(x)$	3., 4. (MP)
6.	$\|\| \ \exists x\, Q(x)$	5. (EE)
7.	$\exists x\, Q(x)$	3.–6. (EB)

74: In Bezug auf P1.

11. $\vdash (P(a) \to \exists x\, Q(x)) \leftrightarrow \exists x\, (P(a) \to Q(x))$

Antwort

1.	$\|\ P(a) \to \exists x\, Q(x)$	(KB-Annahme)
2.	$\|\ \|\ P(a)$	(FU-Annahme 1)
3.	$\|\ \|\ \exists x\, Q(x)$	1., 2. (MP)
4.	$\|\ \|\ \|\ Q(x)$	(EB-Annahme)[75]
5.	$\|\ \|\ \|\ \|\ P(a)$	(KB-Annahme)
6.	$\|\ \|\ \|\ \|\ Q(x)$	4. (TS)
7.	$\|\ \|\ \|\ P(a) \to Q(x)$	5.–6. (KB)
8.	$\|\ \|\ \|\ \exists x\, (P(a) \to Q(x))$	7. (EE)
9.	$\|\ \|\ \exists x\, (P(a) \to Q(x))$	4.–8. (EB)
10.	$\|\ \|\ \neg P(a)$	(FU-Annahme 2)
11.	$\|\ \|\ \|\ P(a)$	(KB-Annahme)
12.	$\|\ \|\ \|\ Q(x)$	10., 11. (ECQ)
13.	$\|\ \|\ P(a) \to Q(x)$	11.–12. (KB)
14.	$\|\ \|\ \exists x\, (P(a) \to Q(x))$	13. (EE)
15.	$\|\ \exists x\, (P(a) \to Q(x))$	2.–14. (FU)
16.	$(P(a) \to \exists x\, Q(x)) \to \exists x\, (P(a) \to Q(x))$	1.–15. (KB)
17.	$\|\ \exists x\, (P(a) \to Q(x))$	(KB-Annahme)
18.	$\|\ \|\ P(a)$	(KB-Annahme)
19.	$\|\ \|\ \|\ P(a) \to Q(x)$	(EB-Annahme)[76]
20.	$\|\ \|\ \|\ Q(x)$	18., 19. (MP)
21.	$\|\ \|\ \|\ \exists x\, Q(x)$	20. (EE)
22.	$\|\ \|\ \exists x\, Q(x)$	19.–21. (EB)
23.	$\|\ P(a) \to \exists x\, Q(x)$	18.–22. (KB)
24.	$\exists x\, (P(a) \to Q(x)) \to (P(a) \to \exists x\, Q(x))$	17.–23. (KB)
25.	$(P(a) \to \exists x\, Q(x)) \leftrightarrow \exists x\, (P(a) \to Q(x))$	16., 24. (ÄQ-EIN)

75: In Bezug auf den 3. Schritt.

76: In Bezug auf den 17. Schritt.

Herleitungen aus Übung 11.2.

1. Alle Österreicher sind Europäer. Alle Salzburger sind Österreicher. Also sind alle Salzburger Europäer.

Antwort

1.	$\forall x\,(O(x) \rightarrow E(x))$	(P1)
2.	$\forall x\,(S(x) \rightarrow O(x))$	(P2)
3.	$\| \;\; S(x)$	(KB-Annahme)
4.	$\| \;\; S(x) \rightarrow O(x)$	2. (UB)
5.	$\| \;\; O(x)$	3., 4. (MP)
6.	$\| \;\; O(x) \rightarrow E(x)$	1. (UB)
7.	$\| \;\; E(x)$	5., 6. (MP)
8.	$S(x) \rightarrow E(x)$	3.–7. (KB)
9.	$\forall x\,(S(x) \rightarrow E(x))$	8. (UE)

2. Alle Philosophen sind weise. Nun gibt es Salzburger Philosophen. Also sind einige Salzburger weise.

Antwort

1.	$\forall x\,(P(x) \rightarrow W(x))$	(P1)
2.	$\exists x\,(S(x) \wedge P(x))$	(P2)
3.	$\| \;\; S(x) \wedge P(x)$	(EB-Annahme)[77]
4.	$\| \;\; P(x)$	3. (SIMP2)
5.	$\| \;\; P(x) \rightarrow W(x)$	1. (UB)
6.	$\| \;\; W(x)$	4., 5. (MP)
7.	$\| \;\; S(x)$	3. (SIMP1)
8.	$\| \;\; S(x) \wedge W(x)$	6., 7. (KON)
9.	$\| \;\; \exists x\,(S(x) \wedge W(x))$	8. (EE)
10.	$\exists x\,(S(x) \wedge W(x))$	3.–9. (EB)

77: In Bezug auf P2.

3. Es gibt keine Österreicher, die auf den Mond geflogen sind. Es gibt aber Kosmonauten, die Österreicher sind. Daher sind nicht alle Kosmonauten auf den Mond geflogen.

Antwort

1.	$\neg\exists x\,(O(x) \wedge G(x,m))$	(P1)
2.	$\exists x\,(K(x) \wedge O(x))$	(P2)
3.	$\|\|\;K(x) \wedge O(x)$	(EB-Annahme)[78]
4.	$\|\|\;K(x)$	3. (SIMP1)
5.	$\|\|\;O(x)$	3. (SIMP2)
6.	$\|\|\;\|\|\;\neg\neg\forall x\,(K(x) \rightarrow G(x,m))$	(IB-Annahme)
7.	$\|\|\;\|\|\;\forall x\,(K(x) \rightarrow G(x,m))$	6. (DN2)
8.	$\|\|\;\|\|\;K(x) \rightarrow G(x,m)$	7. (UB)
9.	$\|\|\;\|\|\;G(x,m)$	4., 8. (MP)
10.	$\|\|\;\|\|\;O(x) \wedge G(x,m)$	5., 9. (KON)
11.	$\|\|\;\|\|\;\exists x\,(O(x) \wedge G(x,m))$	10. (EE)
12.	$\|\|\;\|\|\;\exists x\,(O(x) \wedge G(x,m)) \wedge \neg\exists x\,(O(x) \wedge G(x,m))$	11., 1. (KON)
13.	$\|\|\;\neg\forall x\,(K(x) \rightarrow G(x,m))$	6.–12. (IB)
14.	$\neg\forall x\,(K(x) \rightarrow G(x,m))$	3.–13. (EB)

78: In Bezug auf P2.

4. Nicht ein Lebewesen auf dem Mars ist glatzköpfig. Alle Skinheads sind jedoch glatzköpfig. Somit gibt es keinen Skinhead, der ein Lebewesen auf dem Mars ist.

Herleitung

1.	$\neg\exists x\,(L(x,m) \wedge G(x))$	(P1)
2.	$\forall x\,(S(x) \rightarrow G(x))$	(P2)
3.	$\|\ \neg\neg\exists x\,(S(x) \wedge L(x,m))$	(IB-Annahme)
4.	$\|\ \exists x\,(S(x) \wedge L(x,m))$	3. (DN)
5.	$\|\ \|\ S(x) \wedge L(x,m)$	(EB-Annahme)[79]
6.	$\|\ \|\ S(x)$	5. (SIMP1)
7.	$\|\ \|\ S(x) \rightarrow G(x)$	2. (UB)
8.	$\|\ \|\ G(x)$	6., 7. (MP)
9.	$\|\ \|\ L(x,m)$	5. (SIMP2)
10.	$\|\ \|\ G(x) \wedge L(x,m)$	8., 9. (KON)
11.	$\|\ \|\ \exists x\,(G(x) \wedge L(x,m))$	10. (EE)
12.	$\|\ \|\ A(a) \wedge \neg A(a)$	11., 1. (ECQ)
13.	$\|\ A(a) \wedge \neg A(a)$	5.–12. (EB)
14.	$\neg\exists x\,(S(x) \wedge L(x,m))$	3.–13. (EB)

79: In Bezug auf den 4. Schritt.

Herleitungen aus Übung 11.3.

2. Es gibt Lebewesen auf dem Mars. Alle Lebewesen auf dem Mars sind glatzköpfig. Somit gibt es Lebewesen auf dem Mars, die glatzköpfig sind.

Antwort

1.	$\exists x\, L(x,m)$	(P1)
2.	$\forall x\,(L(x,m) \rightarrow G(x))$	(P2)
3.	$\|\ L(x,m)$	(EB-Annahme)[80]
4.	$\|\ L(x,m) \rightarrow G(x)$	2. (UB)
5.	$\|\ G(x)$	3., 4. (MP)
6.	$\|\ L(x,m) \wedge G(x)$	3., 5. (KON)
7.	$\|\ \exists x\,(L(x,m) \wedge G(x))$	6. (EE)
8.	$\exists x\,(L(x,m) \wedge G(x))$	3.–7. (EB)

80: In Bezug auf P1.

Herleitungen aus Übung 11.4.

1. $\exists x\, \forall y\, R(x,y) \vdash \forall y\, \exists x\, R(x,y)$

Antwort

1.	$\exists x\, \forall y\, R(x,y)$	(P1)
2.	$\|\ \forall y\, R(x,y)$	(EB-Annahme)[81]
3.	$\|\ R(x,y)$	2. (UB)
4.	$\|\ \exists x\, R(x,y)$	3. (EE)
5.	$\|\ \forall y\, \exists x\, R(x,y)$	4. (UE)
6.	$\forall y\, \exists x\, R(x,y)$	2.–5. (EB)

81: In Bezug auf P1.

2. $\neg\exists x\, \neg P(x) \vdash \forall x\, P(x)$

Antwort

1.	$\neg\exists x\, \neg P(x)$	(P1)
2.	$\|\ \neg P(x)$	(IB-Annahme)
3.	$\|\ \exists x\, \neg P(x)$	2. (EE)
4.	$\|\ \exists x\, \neg P(x) \wedge \neg\exists x\, \neg P(x)$	3., 1. (KON)
5.	$P(x)$	2.–4. (IB)
6.	$\forall x\, P(x)$	5. (UE)

3. $\exists x\, P(x) \vdash \neg\forall x\, \neg P(x)$

Antwort

1.	$\exists x\, P(x)$	(P1)
2.	$\|\ \neg\neg\forall x\, \neg P(x)$	(IB-Annahme)
3.	$\|\ \forall x\, \neg P(x)$	2. (DN2)
4.	$\|\ \|\ P(x)$	(EB-Annahme)[82]
5.	$\|\ \|\ \neg P(x)$	3. (UB)
6.	$\|\ \|\ Q(a) \wedge \neg Q(a)$	4., 5. (ECQ)
7.	$\|\ Q(a) \wedge \neg Q(a)$	4.–6. (EB)
8.	$\neg\forall x\, \neg P(x)$	2.–7. (IB)

82: In Bezug auf P1.

4. $\neg\exists x\, P(x) \vdash \forall x\, \neg P(x)$

Antwort

1.	$\neg\exists x\, P(x)$	(P1)
2.	$\|\ \neg\neg P(x)$	(IB-Annahme)
3.	$\|\ P(x)$	2. (DN2)
4.	$\|\ \exists x\, P(x)$	3. (EE)
5.	$\|\ \exists x\, P(x) \wedge \neg\exists x\, P(x)$	4., 1. (KON)
6.	$\neg P(x)$	2.–5. (IB)
7.	$\forall x\, \neg P(x)$	6. (UE)

5. $\exists x\, \neg P(x) \vdash \neg\forall x\, P(x)$

Antwort

1.	$\exists x\, \neg P(x)$	(P1)
2.	$\|\ \neg P(x)$	(EB-Annahme)[83]
3.	$\|\ \|\ \neg\neg\forall x\, P(x)$	(IB-Annahme)
4.	$\|\ \|\ \forall x\, P(x)$	3. (DN2)
5.	$\|\ \|\ P(x)$	4. (UB)
6.	$\|\ \|\ P(x) \wedge \neg P(x)$	5., 2. (KON)
7.	$\|\ \neg\forall x\, P(x)$	6. (IB)
8.	$\neg\forall x\, P(x)$	2.–7. (EB)

83: In Bezug auf P1.

6. $\forall x\, (\exists y\, P(y) \rightarrow Q(x)) \vdash \forall y\, (P(y) \rightarrow Q(a))$

Antwort

1.	$\forall x\, (\exists y\, P(y) \rightarrow Q(x))$	(P1)
2.	$\exists y\, P(y) \rightarrow Q(a)$	1. (UB)
3.	$\|\ P(y)$	(KB-Annahme)
4.	$\|\ \exists y\, P(y)$	3. (EE)
5.	$\|\ Q(a)$	2., 4. (MP)
6.	$P(y) \rightarrow Q(a)$	3.–5. (KB)
7.	$\forall y\, (P(y) \rightarrow Q(a))$	6. (UE)[84]

84: Schritt erlaubt, weil y in keiner Annahme frei vorkommt.

7. $\neg\forall x\,(P(x) \to Q(x)) \vdash \exists x\,(P(x) \land \neg Q(x))$

Antwort

1.	$\neg\forall x\,(P(x) \to Q(x))$	(P1)
2.	$\|\ \ \neg\exists x\,(P(x) \land \neg Q(x)$	(IB-Annahme)
3.	$\|\ \|\ \ P(x)$	(FU-Annahme 1)
4.	$\|\ \|\ \|\ \ Q(x)$	(FU-Annahme 1.1)
5.	$\|\ \|\ \|\ \|\ \ P(x)$	(KB-Annahme)
6.	$\|\ \|\ \|\ \|\ \ Q(x)$	4. (TS)
7.	$\|\ \|\ \|\ \ P(x) \to Q(x)$	5.–6. (KB)
8.	$\|\ \|\ \|\ \ \neg Q(x)$	(FU-Annahme 1.2)
9.	$\|\ \|\ \|\ \ P(x) \land \neg Q(x)$	3., 8. (KON)
10.	$\|\ \|\ \|\ \ \exists x\,(P(x) \land \neg Q(x))$	9. (EE)
11.	$\|\ \|\ \|\ \ P(x) \to Q(x)$	2., 10. (EQC)
12.	$\|\ \|\ \ P(x) \to Q(x)$	4.–11. (FU)
13.	$\|\ \|\ \ \neg P(x)$	(FU-Annahme 2)
14.	$\|\ \|\ \|\ \ P(x)$	(KB-Annahme)
15.	$\|\ \|\ \|\ \ Q(x)$	13., 14. (ECQ)
16.	$\|\ \|\ \ P(x) \to Q(x)$	14.–15. (KB)
17.	$\|\ \ P(x) \to Q(x)$	3.–16. (FU)
18.	$\|\ \ \forall x\,(P(x) \to Q(x))$	17. (UE)
19.	$\|\ \ \forall x\,(P(x) \to Q(x)) \land \neg\forall x\,(P(x) \to Q(x))$	18., 1. (KON)
20.	$\exists x\,(P(x) \land \neg Q(x)$	2.–19. (IB)[85]

85: Schritt erlaubt, weil x in keiner Annahme frei vorkommt.

Herleitungen aus Übung 11.5.

1. Alles hat eine Ursache. Gott hat jedoch keine Ursache. Also ist der Papst Tiroler.

Herleitung zu Repräsentation 1

1.	$\forall x\, \exists y\, U(y,x)$	(P1)
2.	$\neg\exists x\, U(x,g)$	(P2)
3.	$\exists y\, U(y,g)$	1. (UB)
4.	$\|\|\ U(x,g)$	(EB-Annahme)[86]
5.	$\|\|\ \exists x\, U(x,g)$	4. (EE)
6.	$\|\|\ T(p)$	4. (ECQ)
7.	$T(p)$	3.–6. (EB)

86: In Bezug auf den 3. Schritt.

Herleitung zu Repräsentation 2

1.	$\forall x\, \exists y\, U(y,x)$	(P1)
2.	$\neg\exists y\, U(y,g)$	(P2)
3.	$\exists y\, U(y,g)$	1. (UB)
4.	$T(p)$	3., 2. (ECQ)

2. Alle Salzburger lieben Salzburg. Es gibt jedoch niemanden, der Salzburg und alle Touristen in Salzburg liebt. Somit lieben die Salzburger nicht alle Touristen in Salzburg.

Herleitung

1.	$\forall x\,(S(x) \to L(x,s))$	(P1)
2.	$\neg\exists x\,(L(x,s) \land \forall y\,(T(y,s) \to L(x,y)))$	(P2)
3.	$\|\|$ $S(x)$	(KB-Annahme)
4.	$\|\|$ $S(x) \to L(x,s)$	1. (UB)
5.	$\|\|$ $L(x,s)$	3., 4. (MP)
6.	$\|\|$ $\|\|$ $\neg\neg\forall y\,(T(y,s) \to L(x,y))$	(IB-Annahme)
7.	$\|\|$ $\|\|$ $\forall y\,(T(y,s) \to L(x,y))$	6. (DN2)
8.	$\|\|$ $\|\|$ $L(x,s) \land \forall y\,(T(y,s) \to L(x,y))$	5., 7. (KON)
9.	$\|\|$ $\|\|$ $\exists x\,(L(x,s) \land \forall y\,(T(y,s) \to L(x,y)))$	5., 7. (EE)
10.	$\|\|$ $\|\|$ $Q(a) \land \neg Q(a)$	9., 2. (ECQ)
11.	$\|\|$ $\neg\forall y\,(T(y,s) \to L(x,y))$	6., 10. (IB)
12.	$S(x) \to \neg\forall y\,(T(y,s) \to L(x,y))$	3.–11. (KB)
13.	$\forall x\,(S(x) \to \neg\forall y\,(T(y,s) \to L(x,y)))$	12. (UE)

3. Es gibt nichts Allmächtiges. Wenn etwas ein Gott ist, ist es jedoch allmächtig. Also gibt es keinen Gott.

Herleitung

1.	$\neg\exists x\,A(x)$	(P1)
2.	$\forall x\,(G(x) \to A(x))$	(P2)
3.	$\|\|$ $\neg\neg\exists x\,G(x)$	(IB-Annahme)
4.	$\|\|$ $\exists x\,G(x)$	3. (DN2)
5.	$\|\|$ $\|\|$ $G(x)$	(EB-Annahme)[87]
6.	$\|\|$ $\|\|$ $G(x) \to A(x)$	2. (UB)
7.	$\|\|$ $\|\|$ $A(x)$	5., 6. (MP)
8.	$\|\|$ $\|\|$ $\exists x\,A(x)$	7. (EE)
9.	$\|\|$ $\|\|$ $Q(a) \land \neg Q(a)$	8., 1. (ECQ)
10.	$\|\|$ $Q(a) \land \neg Q(a)$	5.–9. (EB)
11.	$\neg\exists x\,G(x)$	3.–10. (IB)

87: In Bezug auf den 4. Schritt.

Lösung zu Zusatzübung 11.2 Beweisen Sie die logische Gültigkeit der folgenden Schlussfolgerungen mit Herleitungen[88]:

1. $\vdash \forall x\, \forall y\, F(x,y) \leftrightarrow \forall y\, \forall x\, F(x,y)$
2. $\vdash \forall x\, (F(x) \wedge G(x)) \leftrightarrow \forall x\, F(x) \wedge \forall x\, G(x)$
3. $\forall x\, (F(x) \rightarrow G(x)) \vdash (\forall x\, F(x) \rightarrow \forall x\, G(x))$
4. $\forall x\, (F(x) \leftrightarrow G(x)) \vdash (\forall x\, F(x) \leftrightarrow \forall x\, G(x))$
5. $\vdash \exists x\, F(x) \leftrightarrow \neg\forall x\, \neg F(x)$
6. $\vdash \exists x\, \neg F(x) \leftrightarrow \neg\forall x\, F(x)$
7. $\vdash \neg\exists x\, \neg F(x) \leftrightarrow \forall x\, F(x)$
8. $\vdash \neg\exists x\, F(x) \leftrightarrow \forall x\, \neg F(x)$
9. $\forall x\, (F(x) \rightarrow G(x)) \vdash (\exists x\, F(x) \rightarrow \exists x\, G(x))$
10. $\forall x\, (F(x) \leftrightarrow G(x)) \vdash (\exists x\, F(x) \leftrightarrow \exists x\, G(x))$
11. $\exists x\, \forall y\, F(x,y) \vdash \forall y\, \exists x\, F(x,y)$
12. $\forall x\, \forall y\, F(x,y) \vdash \forall x\, F(x,x)$
13. $\vdash \exists x\, (A \wedge F(x)) \leftrightarrow A \wedge \exists x\, F(x)$
14. $\vdash \exists x\, (A \vee F(x)) \leftrightarrow A \vee \exists x\, F(x)$
15. $\vdash \exists x\, (F(x) \vee G(x)) \leftrightarrow \exists x\, F(x) \vee \exists x\, G(x)$
16. $\vdash \exists x\, (F(x) \vee A) \leftrightarrow \exists x\, F(x) \vee A$
17. $\vdash \forall x\, (F(x) \vee A) \leftrightarrow \forall x\, F(x) \vee A$
18. $\exists x\, F(x,x) \vdash \exists x\, \exists y\, F(x,y)$
19. $\vdash \exists x\, \neg\exists y\, \neg(F(x) \vee \neg F(y))$

[Ausstehend.]

88: Adaptiert aus D. Hilbert & W. Ackermann, *Gründzüge der theoretischen Logik* (6. Auf.), Berlin: Springer, 1972, S. 83.