Die prädikatenlogische Semantik 10

10.1 Vorbereitung

Betrachten wir Definition 19.1, das heißt die Wahrheitsbedingungen für atomare Formeln der Prädikatenlogik:

$$\varphi_\sigma(P^n(t_1,\dots,t_n)) = \mathtt{w} \text{ gdw } \langle\varphi_\sigma(t_1),\dots,\varphi_\sigma(t_n)\rangle \in \varphi(P^n). \tag{19.1}$$

Da $\varphi_\sigma(A) \neq \mathtt{w}$ gdw $\varphi_\sigma(A) = \mathtt{f}$, gilt es äquivalent:

$$\varphi_\sigma(P^n(t_1,\dots,t_n)) = \mathtt{f} \text{ gdw } \langle\varphi_\sigma(t_1),\dots,\varphi_\sigma(t_n)\rangle \notin \varphi(P^n). \tag{19.1′}$$

Gehen wir die Definition Schritt für Schritt durch. Dazu werden wir einige Sonderfälle dieser Definition betrachten und einige Formeln unter der folgenden Interpretation analysieren:

Interpretation: $\mathfrak{I} = \langle \mathbf{D}, \varphi\rangle$

$$\begin{aligned}
\mathbf{D} &= \mathbb{N} = \{1,2,3,\dots\},\\
\varphi(a) = 1, \quad \varphi(b) &= 2, \quad \varphi(c) = 3, \quad \varphi(d) = 4, \quad \varphi(e) = 5,\\
\varphi(O) &= \{d \in \mathbf{D} \mid d \text{ ist ungerade}\} = \{1,3,5,\dots\},\\
\varphi(E) &= \{d \in \mathbf{D} \mid d \text{ ist gerade}\} = \{2,4,6,\dots\},\\
\varphi(H) &= \{d \in \mathbf{D} \mid d \text{ ist ein Mensch}\} = \{\},\\
\varphi(G) &= \{\langle d_1,d_2\rangle \in \mathbf{D}^2 \mid d_1 \text{ ist größer als } d_2\},\\
\varphi(L) &= \{\langle d_1,d_2\rangle \in \mathbf{D}^2 \mid d_1 \text{ ist kleiner als } d_2\},\\
\varphi(D) &= \{\langle d_1,d_2\rangle \in \mathbf{D}^2 \mid d_1 \text{ ist durch } d_2 \text{ teilbar}\}.
\end{aligned}$$

10.1.1 Sonderfall 1: Atomare Formeln mit individuellen Konstanten und einstelligen Prädikaten

Hier spielen die Variablenbelegungen σ keine Rolle, da es keine individuellen Variablen gibt. Der Grund hierfür ist, dass für jede individuelle Konstante t, jede Interpretation $\mathfrak{I} = \langle \mathbf{D}, \varphi\rangle$ sowie jede Variablenbelegung σ gilt:

$$\varphi_\sigma(t) = \varphi(t).$$

Somit reduziert sich Definition 19.1 auf:

$$\varphi_\sigma(P(t)) = \mathtt{w} \quad \text{gdw} \quad \langle\varphi(t)\rangle \in \varphi(P), \tag{19.1a}$$

wobei t eine individuelle Konstante ist.

Das 1-Tupel $\langle \varphi(t) \rangle$ ist im Wesentlichen gleichbedeutend mit dem Gegenstand $\varphi(t)$. Somit kann die rechte Seite der Definition 19.1a auch folgendermaßen interpretiert werden:

$$\varphi_\sigma(P(t)) = \mathtt{w} \quad \text{gdw} \quad \varphi(t) \in \varphi(P).$$

Lassen Sie uns die Wahrheitswerte der Formeln $O(a)$ und $E(a)$ unter $\mathfrak{I}$ und σ_i (wobei $i \in \{1, \ldots, 5\}$, d.h. $\sigma_1, \ldots, \sigma_5$) bestimmen.

Zunächst analysieren wir $O(a)$. Gemäß Definition 19.1 gilt:

$$\varphi_\sigma(O(a)) = \mathtt{w} \quad \text{gdw} \quad \varphi(a) \in \varphi(O).$$

Ersetzen wir nun $\varphi(a)$ und $\varphi(O)$ durch ihre konkreten Werte:

$$\varphi_\sigma(O(a)) = \mathtt{w} \quad \text{gdw} \quad 1 \in \{d \in \mathbf{D} \mid d \text{ ist ungerade}\}.$$

Dies bedeutet, dass $\varphi_\sigma(O(a))$ wahr ist, wenn 1 eine ungerade Zahl ist – was zutrifft. Daher gilt $\varphi_\sigma(O(a)) = \mathtt{w}$ für alle σ – d.h., auch für $\sigma_1, \ldots, \sigma_5$.

Die obige Erklärung lässt sich auch anhand des folgenden Schemas veranschaulichen.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{1 \text{ ist ungerade}^{1}}{1 \in \{d \in \mathbf{D} \mid d \text{ ist ungerade}\}^{2}}}{1 \in \varphi(O)^{3}}}{\varphi(a) \in \varphi(O)^{4}}}{\varphi_\sigma(a) \in \varphi(O)^{5}}}{\varphi_\sigma(O(a)) = \mathtt{w}^{6}}$$

1: Tatsache

2: Tatsache in mengentheoretische Sprache

3: Wir ersetzen: $\varphi(O) = \{d \in \mathbf{D} \mid d \text{ ist ungerade}\}$

4: Wir ersetzen: $\varphi(a) = 1$

5: Wir ersetzen: $\varphi(a) = \varphi_\sigma(a)$

6: Def. 19.1.

Nun wenden wir uns zu $E(a)$. Siehe das folgende Schema:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{1 \text{ ist } \textit{nicht} \text{ gerade}^{7}}{1 \notin \{d \in \mathbf{D} \mid d \text{ ist gerade}\}^{8}}}{1 \notin \varphi(E)^{9}}}{\varphi(a) \notin \varphi(E)^{10}}}{\varphi_\sigma(a) \notin \varphi(E)^{11}}}{\varphi_\sigma(E(a)) = \mathtt{w}^{12}}$$

7: Tatsache

8: Tatsache in mengentheoretische Sprache

9: Wir ersetzen: $\varphi(E) = \{d \in \mathbf{D} \mid d \text{ ist gerade}\}$

10: $\varphi(a) = 1$

11: $\varphi(a) = \varphi_\sigma(a)$

12: Def. 19.1.

Aktivierungselement 10.1. Bestimmen Sie, ob die folgenden Formeln unter $\mathfrak{I}$ (und beliebige σ) wahr oder falsch sind.

1. $O(b)$ 2. $E(b)$ 3. $O(c)$ 4. $E(d)$

10.1.2 Variablenbelegungen

Sei $\mathfrak{I} = \langle \mathbf{D}, \varphi \rangle$ eine Interpretation. Eine *Variablenbelegung* σ von $\mathfrak{I}$ ist eine Funktion, die jeder Variablen v unserer Sprache genau ein $d \in \mathbf{D}$ zuordnet, sodass $\varphi_\sigma(v) = \sigma(v) = d$ gilt.

Man kann sich das wie eine Fußballmannschaft vorstellen:

- Die Positionen auf dem Spielfeld (Torwart, Verteidiger, Mittelfeld, Stürmer) entsprechen den Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_{11}$.
- Die Spieler entsprechen den Elementen der Domäne **D**.
- Eine konkrete Belegung σ legt fest, welcher Spieler auf welcher Position eingesetzt wird.

Zum Beispiel: Wenn **D** die Spieler der argentinischen Mannschaft von 2022 enthält, könnte eine Belegung σ_1 wie folgt aussehen:

$$\begin{aligned}\sigma_1 = {} & Dibu, Molina, Romero, Otamendi, Tagliafico,\\ & Mac\ Allister, \textit{Fernández}, De\ Paul, Messi,\\ & Alvarez, \textit{Di María}, \ldots\end{aligned}$$

Also, in dieser Belegung haben wir:

$$\sigma_1(x_1) = Dibu,\ \ \sigma_1(x_2) = Molina,\ \ \ldots,\ \ \sigma_1(x_{11}) = \textit{Di María},\ \ \ldots$$

Hier sind die Positionen (Variablen) mit bestimmten Spielern (Elementen der Domäne) besetzt.[13]

13: Die Variablen $x_{12}, x_{13}, \ldots$ sollten ebenfalls durch σ_1 bezeichnet werden. In unserer Fußballanalogie könnten diese Variablen den Positionen der Ersatzspieler entsprechen. Da diese Positionen für unsere Mannschaft im Spiel irrelevant sind, können wir sie ignorieren und einfach ‚...' schreiben. Das bedeutet, dass den anderen Positionen/Variablen beliebige Werte zugewiesen werden können.

Die Variablen selbst sind also nur *leere Plätze* auf dem Spielfeld. Erst durch eine Belegung σ_1 wird klar, welche Spieler dort tatsächlich stehen. Ändert man die Belegung (z.B. durch Auswechseln), so bleibt die Menge der Positionen gleich, aber andere Spieler werden den Positionen zugeordnet.

Aktivierungselement 10.2. Gegeben seien die folgenden Variablenbelegungen in Bezug auf die Interpretation $\mathfrak{I}$ auf Seite 137:

$$\sigma_1 = 1, 1, 3, 4, \ldots \quad \sigma_2 = 2, 2, 4, 4, \ldots \quad \sigma_3 = 3, 3, 2, 4, \ldots$$

Bestimmen Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

1. $\sigma_1(x_1) = \sigma_2(x_1)$.
2. $\sigma_1(x_1) = \sigma_1(x_2)$.
3. $\sigma_3(x_2) = \sigma_1(x_3)$.
4. $\sigma_2(x_2) = \sigma_3(x_3)$.
5. Es gibt eine Variabel v, sodass $\sigma_1(v) = \sigma_2(v) = \sigma_3(v)$.
6. Es gibt eine Variablenbelegung σ, sodass $\sigma_i(x_1) = \sigma_i(x_2)$.
7. Für alle Variablenbelegungen σ, $\sigma_i(x_1) = \sigma_i(x_2)$.
8. Für alle Variablenbelegungen σ_i und σ_j (wobei $i, j \in \{1, 2, 3\}$): $\sigma_i(x_4) = \sigma_j(x_4)$.

10.1.3 Sonderfall 2: Atomare Formeln mit einstelligen Prädikaten

Hier spielt Variablenbelegungen eine Rolle, da es individuellen Variablen gibt. Der Grund liegt darin, dass für jede Interpretation $\mathfrak{I} = \langle \mathbf{D}, \varphi \rangle$ und jede individuelle Variable v, zwei Variablenbelegungen σ und σ' existieren können, für die gilt:

$$\varphi_\sigma(v) \neq \varphi_{\sigma'}(v).$$

Gegeben seien also die folgenden Variablenbelegungen in Bezug auf die Interpretation $\mathfrak{I}$ auf Seite 137:

Variablenbelegungen

$$\begin{array}{lclllll} & & x, & y, & z, & \dots \\ \sigma_1 & = & 1, & 2, & 3, & \dots \\ \sigma_2 & = & 2, & 2, & 3, & \dots \\ \sigma_3 & = & 3, & 4, & 3, & \dots \\ \sigma_4 & = & 3, & 4, & 2, & \dots \\ \sigma_5 & = & 4, & 3, & 2, & \dots \end{array}$$

Dann haben wir, dass:

$$\varphi_{\sigma_1}(x) = 1 \neq 2 = \varphi_{\sigma_2}(x).$$

Somit reduziert sich Definition 19.1 auf:

$$\varphi_\sigma(P(t)) = \mathtt{w} \quad \text{gdw} \quad \langle \varphi_\sigma(t) \rangle \in \varphi(P), \tag{19.1a}$$

wobei t ein individueller Term (Konstante oder eine Variabel) ist.

Lassen Sie uns die Wahrheitswerte der Formel $O(z)$ unter $\mathfrak{I}$ mit der Variablenbelegungen σ_1 und σ_4 bestimmen.

Zunächst lassen Sie uns $\varphi_{\sigma_1}(O(z))$ bestimmen. Gemäß Definition 19.1 gilt:

$$\varphi_{\sigma_1}(O(z)) = \mathtt{w} \quad \text{gdw} \quad \varphi_{\sigma_1}(z) \in \varphi(O).$$

Ersetzen wir nun $\varphi_{\sigma_1}(z)$ und $\varphi(O)$ durch ihre konkreten Werte:

$$\begin{aligned} \varphi_{\sigma_1}(O(z)) = \mathtt{w} \quad & \text{gdw} \quad \varphi_{\sigma_1}(z) \in \{d \in \mathbf{D} \mid d \text{ ist ungerade}\}, \\ & \text{gdw} \quad \sigma_1(z) \in \{d \in \mathbf{D} \mid d \text{ ist ungerade}\}, \\ & \text{gdw} \quad 3 \in \{d \in \mathbf{D} \mid d \text{ ist ungerade}\}. \end{aligned}$$

Dies bedeutet, dass $\varphi_{\sigma_1}(O(z))$ wahr ist, wenn 3 eine ungerade Zahl ist – was zutrifft. Daher gilt $\varphi_{\sigma_1}(O(z)) = \mathtt{w}$ für alle σ – d.h., auch für $\sigma_1, \dots, \sigma_5$.

Die obige Erklärung lässt sich auch anhand des folgenden Schemas veranschaulichen.

$$\frac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\text{3 ist ungerade}^{14}}{3 \in \{d \in \mathbf{D} \mid d \text{ ist ungerade}\}}}{3 \in \varphi(O)^{15}}}{\sigma_1(z) \in \varphi(O)^{16}}}{\varphi_{\sigma_1}(z) \in \varphi(O)^{17}}}{\varphi_{\sigma_1}(O(z)) = \mathtt{w}^{18}}$$

14: Tatsache

15: Wir ersetzen:
$\varphi(O) = \{d \in \mathbf{D} \mid d \text{ ist ungerade}\}$

16: $\sigma_1(z) = 3$

17: $\varphi_{\sigma_1}(z) = \sigma_1(z)$

18: Def. 19.1.

Nun wenden wir uns zu $\varphi_{\sigma_4}(O(z))$. Siehe das folgende Schema:

$$\frac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\text{2 ist \textit{nicht} ungerade}^{19}}{2 \notin \{d \in \mathbf{D} \mid d \text{ ist ungerade}\}}}{2 \notin \varphi(O)^{20}}}{\sigma_4(z) \notin \varphi(O)^{21}}}{\varphi_{\sigma_4}(z) \notin \varphi(O)^{22}}}{\varphi_{\sigma_4}(O(z)) = \mathtt{f}^{23}}$$

19: Tatsache

20: Wir ersetzen:
$\varphi(O) = \{d \in \mathbf{D} \mid d \text{ ist ungerade}\}$

21: $\sigma_4(z) = 2$

22: $\varphi_{\sigma_4}(z) = \sigma_4(z)$

23: Def. 19.1.

Belegungen auf die Seite 140:
$\sigma_1 = 1, 2, 3, \ldots$
$\sigma_2 = 2, 2, 3, \ldots$
$\sigma_3 = 3, 4, 3, \ldots$
$\sigma_4 = 3, 4, 2, \ldots$
$\sigma_5 = 4, 3, 2, \ldots$

Aktivierungselement 10.3. Bestimmen Sie, ob die folgenden Formeln unter $\mathfrak{I}$ und die Variablenbelegungen auf die Seite 140 wahr oder falsch sind.

1. $O(x)$ 2. $O(z)$ 3. $E(x)$ 4. $E(y)$ 5. $H(y)$ 6. $H(z)$

10.1.4 Sonderfall 3: Atomare Formeln mit zweistelligen Prädikaten

Wir betrachten nun atomare Formeln der Form $P(t_1, t_2)$, wobei P ein zweistelliges Prädikat und t_1, t_2 individuelle Termen sind.

Somit reduziert sich Definition 19.1 auf:

$$\varphi_\sigma(P(t_1, t_2)) = \mathtt{w} \quad \text{gdw} \quad \langle \varphi(t_1), \varphi(t_2) \rangle \in \varphi(P). \tag{19.1c}$$

Dies bedeutet: Eine atomare Formel mit einem zweistelligen Prädikat ist wahr gdw das geordnete Paar der durch die Terme bezeichneten Gegenstände Element derjenigen zweistelligen Relation ist, die durch das Prädikat ‚P' interpretiert wird.

Zur Veranschaulichung betrachten wir die Formel ‚$G(a, b)$'. Nach Definition 19.1a gilt:

$$\varphi_\sigma(G(a, b)) = \mathtt{w} \quad \text{gdw} \quad \langle \varphi(a), \varphi(b) \rangle \in \varphi(G).$$

Setzen wir die Werte der Interpretation ein, so erhalten wir:

$$\varphi_\sigma(G(a, b)) = \mathtt{w} \text{ gdw } \langle 1, 2 \rangle \in \{\langle d_1, d_2 \rangle \in \mathbf{D}^2 \mid d_1 \text{ ist größer als } d_2\}.$$

Da 1 nicht größer als 2 ist, gehört das entsprechende Tupel nicht zur Relation $\varphi(G)$. Folglich gilt, für alle σ:

$$\varphi_\sigma(G(a, b)) = \mathtt{f}.$$

Belegungen auf die Seite 140:
$\sigma_1 = 1, 2, 3, \ldots$
$\sigma_2 = 2, 2, 3, \ldots$
$\sigma_3 = 3, 4, 3, \ldots$
$\sigma_4 = 3, 4, 2, \ldots$
$\sigma_5 = 4, 3, 2, \ldots$

Die obige Erklärung lässt sich auch anhand des folgenden Schemas veranschaulichen.

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{1 \text{ ist nicht größer als } 2^{24}}{\langle 1, 2 \rangle \notin \{\langle d_1, d_2 \rangle \in \mathbf{D}^2 \mid d_1 \text{ ist größer als } d_2\}}}{\langle 1, 2 \rangle \notin \varphi(G)^{25}}}{\langle \varphi(a), \varphi(b) \rangle \notin \varphi(G)^{26}}}{\langle \varphi_\sigma(a), \varphi_\sigma(b) \rangle \notin \varphi(G)^{27}}}{\varphi_{\sigma_1}(G(a, b)) = \mathtt{f}^{28}}$$

24: Tatsache

25: Def. von $\varphi(G)$

26: $\varphi(a) = 1$ und $\varphi(b) = 2$

27: $\varphi_\sigma(t) = \varphi(t)$, für Konstanten t

28: Def. 19.1.

Analysieren wir nun die offene atomare Formel ‚$D(x, b)$' unter den Variablenbelegungen σ_4 und σ_5 auf Seite 140.

Erstens, $\varphi_{\sigma_5}(D(x,b))$. Siehe das folgende Schema:

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\text{4 ist durch 2 teilbar}^{29}}{\langle 4,2\rangle \in \{\langle d_1,d_2\rangle \in \mathbf{D}^2 \mid d_1 \text{ ist durch } d_2 \text{ teilbar}\}}}{\langle 4,2\rangle \in \varphi(D)^{30}}}{\langle 4,\varphi_{\sigma_5}(b)\rangle \in \varphi(D)^{31}}}{\langle \varphi_{\sigma_5}(x),\varphi_{\sigma_5}(b)\rangle \in \varphi(D)^{32}}}{\varphi_{\sigma_5}(D(x,b)) = \mathtt{w}^{33}}$$

29: Tatsache

30: Def. von $\varphi(D)$

31: $\varphi(b) = 2$ und $\varphi_\sigma(t) = \varphi(t)$, für Konstanten t

32: $\varphi_{\sigma_5}(x) = \sigma_5(x) = 4$

33: Def. 19.1.

Nun wenden wir uns zu $\varphi_{\sigma_4}(D(x,b))$:

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\text{3 ist } \textit{nicht} \text{ durch 2 teilbar}^{34}}{\langle 3,2\rangle \notin \{\langle d_1,d_2\rangle \in \mathbf{D}^2 \mid d_1 \text{ ist durch } d_2 \text{ teilbar}\}}}{\langle 3,2\rangle \notin \varphi(D)^{35}}}{\langle 3,\varphi_{\sigma_4}(b)\rangle \notin \varphi(D)^{36}}}{\langle \varphi_{\sigma_4}(x),\varphi_{\sigma_4}(b)\rangle \notin \varphi(D)^{37}}}{\varphi_{\sigma_4}(D(x,b)) = \mathtt{f}^{38}}$$

34: Tatsache

35: Def. von $\varphi(D)$

36: $\varphi_\sigma(b) = \varphi(b) = 2$

37: $\varphi_{\sigma_4}(x) = \sigma_4(x) = 3$

38: Def. 19.1.

Damit zeigt sich, dass bei zweistelligen Prädikaten nicht einzelne Gegenstände, sondern geordnete Paare von Gegenständen daraufhin überprüft werden, ob sie zur durch das Prädikat festgelegten Relation gehören.

Belegungen auf die Seite 140:
$\sigma_1 = 1,2,3,\ldots$
$\sigma_2 = 2,2,3,\ldots$
$\sigma_3 = 3,4,3,\ldots$
$\sigma_4 = 3,4,2,\ldots$
$\sigma_5 = 4,3,2,\ldots$

Aktivierungselement 10.4. Bestimmen Sie, ob die folgenden Formeln unter $\mathfrak{I}$ und σ_i (auf Seite 140) wahr oder falsch sind.

1. $G(x,b)$ 2. $G(x,z)$ 3. $L(z,b)$ 4. $L(x,x)$ 5. $D(y,z)$ 6. $D(z,z)$

10.1.5 Sonderfall 4: Molekulare Formeln ohne Quantoren

Wir betrachten nun molekulare Formeln ohne Quantoren, d. h. Formeln, die aus atomaren Formeln mithilfe der aussagenlogischen Junktoren ‚$\neg$‘, ‚$\land$‘, ‚$\lor$‘, ‚$\rightarrow$‘, ‚$\leftrightarrow$‘ gebildet werden, jedoch keine Quantoren ‚$\forall$‘ oder ‚$\exists$‘ enthalten.

Die Semantik solcher Formeln ist vollständig durch die Semantik ihrer atomaren Teilausdrücke sowie durch die wahrheitsfunktionale Bedeutung der Junktoren bestimmt.

Formal ergeben sich die Wahrheitsbedingungen aus der folgenden Klausen von Definition 19:

$$\varphi_\sigma(\neg A) = \texttt{w} \text{ gdw } \varphi_\sigma(A) = \texttt{f}, \tag{19.2}$$
$$\varphi_\sigma(A \land B) = \texttt{w} \text{ gdw } \varphi_\sigma(A) = \texttt{w} \text{ und } \varphi_\sigma(B) = \texttt{w}, \tag{19.3}$$
$$\varphi_\sigma(A \lor B) = \texttt{w} \text{ gdw } \varphi_\sigma(A) = \texttt{w} \text{ oder } \varphi_\sigma(B) = \texttt{w}, \tag{19.4}$$
$$\varphi_\sigma(A \rightarrow B) = \texttt{w} \text{ gdw } \varphi_\sigma(A) = \texttt{f} \text{ oder } \varphi_\sigma(B) = \texttt{w}, \tag{19.5}$$
$$\varphi_\sigma(A \leftrightarrow B) = \texttt{w} \text{ gdw } \varphi_\sigma(A) = \varphi_\sigma(B). \tag{19.6}$$

Da $\varphi_\sigma(A) \neq \texttt{w}$ gdw $\varphi_\sigma(A) = \texttt{f}$, gilt es äquivalent:

$$\varphi_\sigma(\neg A) = \texttt{f} \text{ gdw } \varphi_\sigma(A) = \texttt{w}, \tag{19.2'}$$
$$\varphi_\sigma(A \land B) = \texttt{f} \text{ gdw } \varphi_\sigma(A) = \texttt{f} \text{ oder } \varphi_\sigma(B) = \texttt{f}, \tag{19.3'}$$
$$\varphi_\sigma(A \lor B) = \texttt{f} \text{ gdw } \varphi_\sigma(A) = \texttt{f} \text{ und } \varphi_\sigma(B) = \texttt{f}, \tag{19.4'}$$
$$\varphi_\sigma(A \rightarrow B) = \texttt{f} \text{ gdw } \varphi_\sigma(A) = \texttt{w} \text{ und } \varphi_\sigma(B) = \texttt{f}, \tag{19.5'}$$
$$\varphi_\sigma(A \leftrightarrow B) = \texttt{f} \text{ gdw } \varphi_\sigma(A) \neq \varphi_\sigma(B). \tag{19.6'}$$

Als Beispiele betrachten wir die molekulare Formeln ‚$G(y,a) \land O(z)$‘ und ‚$G(y,a) \rightarrow O(z)$‘ unter σ_1 bzw. σ_5 (auf Seite 140).

Erstens, $\varphi_{\sigma_1}(G(y,a) \land O(z))$. Siehe das folgende Schema:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\text{2 ist größer als 1}}{\langle 2,1\rangle \in \{\langle d_1,d_2\rangle \in \mathbf{D} \mid d_1 \text{ ist größer als } d_2\}}}{\langle \varphi_{\sigma_1}(y), \varphi_{\sigma_1}(a)\rangle \in \varphi(G)}}{\varphi_{\sigma_1}(G(y,a)) = \texttt{w}} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\text{3 ist ungerade}}{3 \in \{d \in \mathbf{D} \mid d \text{ ist ungerade}\}}}{\varphi_{\sigma_1}(z) \in \varphi(O)}}{\varphi_{\sigma_1}(O(z)) = \texttt{w}}}{\varphi_{\sigma_1}(G(y,a) \land O(z)) = \texttt{w}} \ \text{Def. 19.3}$$

Nun wenden wir uns zu $\varphi_{\sigma_5}(G(y,a) \rightarrow O(z))$:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\text{3 ist größer als 1}}{\langle 3,1\rangle \in \{\langle d_1,d_2\rangle \in \mathbf{D} \mid d_1 \text{ ist größer als } d_2\}}}{\langle \varphi_{\sigma_5}(y), \varphi_{\sigma_5}(a)\rangle \in \varphi(G)}}{\varphi_{\sigma_5}(G(y,a)) = \texttt{w}} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\text{2 ist \textit{nicht} ungerade}}{2 \notin \{d \in \mathbf{D} \mid d \text{ ist ungerade}\}}}{\varphi_{\sigma_5}(z) \notin \varphi(O)}}{\varphi_{\sigma_5}(O(z)) = \texttt{f}}}{\varphi_{\sigma_5}(G(y,a) \rightarrow O(z)) = \texttt{f}} \ \text{Def. 19.5}$$

Nun sehen wir eine Formel mit dem Negationsoperator: ‚$\neg(E(x) \land \neg O(z))$' unter σ_5.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\text{4 ist gerade}}{4 \in \{d \in \mathbf{D} \mid d \text{ ist gerade}\}}}{\varphi_{\sigma_5}(x) \in \varphi(E)}}{\varphi_{\sigma_5}(E(x)) = \mathtt{w}} \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\text{2 ist nicht ungerade}}{2 \notin \{d \in \mathbf{D} \mid d \text{ ist ungerade}\}}}{\varphi_{\sigma_5}(z) \notin \varphi(O)}}{\varphi_{\sigma_5}(O(z)) = \mathtt{f}}}{\varphi_{\sigma_5}(\neg O(z)) = \mathtt{w}}}{\dfrac{\varphi_{\sigma_5}(E(x) \land \neg O(z)) = \mathtt{w}}{\varphi_{\sigma_5}(\neg(E(x) \land \neg O(z))) = \mathtt{f}} \text{ Def. 19.2}}$$

Damit zeigt sich, dass die Bewertung molekularer Formeln ohne Quantoren keine neuen semantischen Prinzipien erfordert, sondern vollständig auf der Semantik atomarer Formeln und der klassischen Aussagenlogik aufbaut.

Belegungen auf die Seite 140:
$\sigma_1 = 1, 2, 3, \ldots$
$\sigma_2 = 2, 2, 3, \ldots$
$\sigma_3 = 3, 4, 3, \ldots$
$\sigma_4 = 3, 4, 2, \ldots$
$\sigma_5 = 4, 3, 2, \ldots$

Aktivierungselement 10.5. Bestimmen Sie, ob die folgenden Formeln unter $\mathfrak{I}$ und σ_i (auf Seite 140) wahr oder falsch sind.

1. $G(d, x) \land E(d)$
2. $G(c, x) \lor O(d)$
3. $L(z, c) \longrightarrow D(y, z)$
4. $D(y, z) \longrightarrow \neg L(z, b)$
5. $O(x) \land O(c) \land O(z)$
6. $\neg E(y) \longrightarrow (G(c, x) \lor O(d))$

10.1.6 Varianten von Belegungen

Sei $\mathfrak{I} = \langle \mathbf{D}, \varphi \rangle$ eine Interpretation, wobei $\mathbf{D}$ die Menge aller Fußballspieler der argentinischen Nationalmannschaft bei der *FIFA-Weltmeisterschaft 2022* ist.

Betrachten wir die Folgende Variablenbelegungen von $\mathfrak{I}$:

Variablenbelegungen

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}	...
$\sigma_1 =$	*Dibu,*	*Molina,*	*Romero,*	*Otamendi,*	*Tagliafico,*	*De Paul,*	*Fernández,*	*Mac Allister,*	*Messi,*	*Alvarez,*	*Di María,*	...
$\sigma_2 =$	*Rulli,*	*Montiel,*	*Pezzella,*	*Foyth,*	*Acuña,*	*Paredes,*	*Palacios,*	*Gómez,*	*Dybala,*	*Martínez,*	*Correa,*	...
$\sigma_3 =$	*Dibu,*	*Montiel,*	*Romero,*	*Otamendi,*	*Tagliafico,*	*Pezzella,*	*Fernández,*	*Paredes,*	*Messi,*	*Lautaro,*	*Acuña,*	...
$\sigma_4 =$	*Messi,*	*Molina,*	*Romero,*	*Otamendi,*	*Tagliafico,*	*De Paul,*	*Fernández,*	*Mac Allister,*	*Dibu,*	*Alvarez,*	*Di María,*	...
$\sigma_5 =$	*Dibu,*	*Molina,*	*Romero,*	*Otamendi,*	*Tagliafico,*	*De Paul,*	*Fernández,*	*Mac Allister,*	*Messi,*	*Lautaro,*	*Di María,*	...
$\sigma_6 =$	*Dibu,*	*Montiel,*	*Romero,*	*Otamendi,*	*Tagliafico,*	*De Paul,*	*Fernández,*	*Mac Allister,*	*Messi,*	*Alvarez,*	*Di María,*	...
$\sigma_7 =$	*Dibu,*	*Molina,*	*Romero,*	*Otamendi,*	*Acuña,*	*De Paul,*	*Fernández,*	*Mac Allister,*	*Messi,*	*Alvarez,*	*Di María,*	...
$\sigma_8 =$	*Dibu,*	*Molina,*	*Romero,*	*Otamendi,*	*Montiel,*	*De Paul,*	*Fernández,*	*Mac Allister,*	*Messi,*	*Alvarez,*	*Di María,*	...
$\sigma_9 =$	*Dibu,*	*Montiel,*	*Romero,*	*Otamendi,*	*Tagliafico,*	*Pezzella,*	*Fernández,*	*Paredes,*	*Messi,*	*Lautaro,*	*Di María,*	...
$\sigma_{10} =$	*Messi,*	*Messi,*	*Messi,*	*Messi,*	*Messi,*	*Messi,*	*Messi,*	*Messi,*	*Messi,*	*Messi,*	*Messi,*	...

Es ist klar, dass σ_1 und σ_2 ganz verschiedene Belegungen sind: Die Spieler sind ganz andere, da für alle x_i (mit $i \leq 11$) gilt: $\sigma_1(x_i) \neq \sigma_2(x_i)$.

Auch σ_1 und σ_3 sind verschieden: Obwohl die Mehrheit der Spieler dieselben sind und sogar auf denselben Positionen stehen, gibt es einige x_i, für die $\sigma_1(x_i) \neq \sigma_3(x_i)$, konkret bei x_6, x_8, x_{10} und x_{11}.

Obwohl σ_1 und σ_4 dieselbe Menge von Spielern aus der Domäne verwenden, unterscheiden sie sich als Belegungen: die Zuordnung der Spieler zu den Positionen (Variablen) ist nicht identisch. Es macht etwa einen Unterschied, ob Messi als Torwart (Nummer 1) oder als Spielmacher (Nummer 10) eingesetzt wird.

Auch σ_1 und σ_5 unterscheiden sie sich als Belegungen obwohl sie sich nur in Bezug auf eine Variable unterscheiden (nämlich bei x_{10}). Es gibt jedoch eine Beziehung zwischen ihnen, die wir ‚Variante' nennen werden (siehe unten).

Auch σ_1 und σ_6 unterscheiden sie sich nur in Bezug auf eine Variable unterscheiden (nämlich bei x_1) und sind deshalb verschiedene Belegungen. Während im Fußball ein Spieler höchstens einer Position zugeordnet werden darf, gilt für Variablenbelegungen keine solche Einschränkung: Es ist möglich, dass verschiedene Variablen denselben Wert erhalten. Also wir könnten mit der Belegung σ_{10} ein *Team* definieren, in dem Messi auf allen Positionen spielt!

In unserer Fußball-Analogie nennen wir σ' eine *Variante* von σ, wenn beide Aufstellungen in allen Positionen übereinstimmen, mit Ausnahme höchstens einer Position, auf der ein anderer Spieler eingesetzt wird. Formal gilt:

39: Folglich, für alle anderen Variablen w mit $w \neq v$ gilt: $\sigma(w) = \sigma'(w)$.

Definition 10.1 (Variante)**.** Eine Belegung σ' heißt eine Variante von σ, falls es *höchstens* eine Variable v gibt, so dass $\sigma(v) \neq \sigma'(v)$.[39] Ist v eine solche Variable, so heißt σ' eine v-Variante von σ.

Anders gesagt: Eine x-Variante σ' von σ bezeichnet eine eventuell abweichende Auswahl eines Objekts im Bereich für ‚x' hinsichtlich σ und dieselbe Auswahl eines Objekts für alle anderen Variablen.

Aktivierungselement 10.6. Bestimmen Sie, ob die Variablenbelegungen $\sigma_1, \ldots, \sigma_{10}$ oben Varianten voneinander sind und, falls ja, bezüglich welcher Variable(n).

10.1.7 Sonderfall 5: Quantifizierte Formeln

Hier betrachten wir geschlossene Formeln der Form $\forall x\, A$ bzw. $\exists x\, A$, wobei A selbst quantorenfrei ist.

Maßgeblich sind hierbei die folgenden Klauseln aus Def. 19:

$\varphi_\sigma(\forall v\, A) = \mathtt{w}$ gdw für alle v-Varianten σ' von σ unter $\mathfrak{I}$ gilt:

$$\varphi_{\sigma'}(A) = \mathtt{w}, \tag{19.7}$$

$\varphi_\sigma(\exists v\, A) = \mathtt{w}$ gdw es eine v-Variante σ' von σ unter $\mathfrak{I}$ gibt, sodass:

$$\varphi_{\sigma'}(A) = \mathtt{w}. \tag{19.8}$$

Da $\varphi_\sigma(A) \neq \mathtt{w}$ gdw $\varphi_\sigma(A) = \mathtt{f}$, gilt es äquivalent:

$\varphi_\sigma(\forall v\, A) = \mathtt{f}$ gdw es eine v-Variante σ' von σ unter $\mathfrak{I}$ gibt, sodass:

$$\varphi_{\sigma'}(A) = \mathtt{f}, \tag{19.7′}$$

$\varphi_\sigma(\exists v\, A) = \mathtt{f}$ gdw für alle v-Varianten σ' von σ unter $\mathfrak{I}$ gilt:

$$\varphi_{\sigma'}(A) = \mathtt{f}. \tag{19.8′}$$

Die beiden Klauseln machen deutlich, dass sich die Überprüfung von quantifizierten Formeln wesentlich von der Überprüfung quantorenfreier Formeln unterscheidet.

$\varphi_\sigma(\forall x\, A(x)) = \mathtt{w}$ gdw für *jedes* Objekt des Bereichs die Teilformel ‚$A(x)$' wahr ist. Die Formel ‚$A(x)$' muss also für jede mögliche Wahl eines Objekts für ‚x' erfüllt sein.

$\varphi_\sigma(\exists x\, A(x)) = \mathtt{w}$ gdw für *mindestens ein* Objekt des Bereichs die Teilformel ‚$A(x)$' wahr ist. Die Formel ‚$A(x)$' muss also für eine mögliche Wahl eines Objekts für ‚x' erfüllt sein.

Diese Auswahlen werden technisch durch eine x-Variante σ' von σ festgelegt.[40] Da der Wahrheitswert von ‚$A(x)$' von der Belegung der Variablen ‚x' abhängt, kann die Bewertung von ‚$A(x)$' unter φ_σ und unter $\varphi_{\sigma'}$ unterschiedlich ausfallen.[41]

Formulieren wir dies nun mit Variablenbelegungen um.

Für universell quantifizierte Formeln haben wir die folgende Formulierung. Um zu zeigen, dass $\varphi_\sigma(\forall x\, A(x)) = \mathtt{w}$ gilt, muss nach

40: Sei $\mathfrak{I} = \langle \mathbf{D}, \varphi \rangle$ und $d_1, d_2 \in \mathbf{D}$. Dann können wir stets eine σ wählen, sodass $\varphi_\sigma(v) = d_1$, sowie eine v-Variante σ' von σ, sodass $\varphi_{\sigma'}(v) = d_2$.

41: Stimmen die Werte von $\sigma(x)$ und $\sigma'(x)$ überein, so ergibt sich dieselbe Bewertung; unterscheiden sie sich, so kann sich auch der Wahrheitswert von ‚$A(x)$' ändern.

Definition 19 nachgewiesen werden, dass die Teilformel ‚$A(x)$' unter *allen* x-Varianten σ' von σ wahr ist, d. h., dass $\varphi_{\sigma'}(A(x)) = \mathtt{w}$. Demgegenüber genügt es, um $\varphi_\sigma(\forall x\, A(x)) = \mathtt{f}$ zu zeigen, *eine einzige* x-Variante σ' anzugeben, für die $\varphi_{\sigma'}(A(x)) = \mathtt{f}$ ist.

Für existentiell quantifizierte Formeln verhält es sich dual. Hier reicht es aus, um $\varphi_\sigma(\exists x\, A(x)) = \mathtt{w}$ zu zeigen, eine einzige x-Variante σ' von σ zu finden, sodass $\varphi_{\sigma'}(A(x)) = \mathtt{w}$ gilt. Umgekehrt muss, um $\varphi_\sigma(\exists x\, A(x)) = \mathtt{f}$ zu zeigen, nachgewiesen werden, dass alle x-Varianten σ' von σ so sind, dass $\varphi_{\sigma'}(A(x)) = \mathtt{f}$ gilt.

Diese Asymmetrie zwischen ‚$\forall$' und ‚$\exists$' schließt unmittelbar an die zuvor erläuterte Rolle der x-Varianten an und spiegelt den grundlegenden Unterschied zwischen All- und Existenzsätze wider: Der Allquantor stellt eine globale Forderung an *alle* zulässigen Variablenbelegungen, während der Existenzquantor bereits durch das Vorhandensein *einer* geeigneten Belegung erfüllt ist.

Belegungen auf die Seite 140:
$\sigma_1 = 1, 2, 3, \ldots$
$\sigma_2 = 2, 2, 3, \ldots$
$\sigma_3 = 3, 4, 3, \ldots$
$\sigma_4 = 3, 4, 2, \ldots$
$\sigma_5 = 4, 3, 2, \ldots$

Betrachten wir einige Beispiele in Bezug auf σ_1:

$\exists x\, E(x)$: Sei σ_1' eine x-Variante von σ_1 mit $\sigma_1'(x) = 2 \in \mathbf{D}$. Da 2 gerade ist, gilt $\sigma_1'(x) = 2 \in \varphi(E)$. Daraus folgt (nach Def. 19.1), dass $\varphi_{\sigma_1'}(E(x)) = \mathtt{w}$, und damit (nach Def. 19.8), dass $\varphi_{\sigma_1}(\exists x\, E(x)) = \mathtt{w}$.

$\forall y\, E(y)$: Sei σ_1' eine y-Variante von σ_1 mit $\sigma_1'(y) = 3 \in \mathbf{D}$. Da 3 nicht gerade ist, gilt $\sigma_1'(y) = 3 \notin \varphi(E)$. Daraus folgt (nach Def. 19.1), dass $\varphi_{\sigma_1'}(E(y)) = \mathtt{f}$, und damit (nach Def. 19.8), dass $\varphi_{\sigma_1}(\forall y\, E(y)) = \mathtt{f}$.

$\forall x\,(E(x) \vee O(x))$: Sei σ_1' eine x-Variante von σ_1. Da $\mathbf{D}$ aus natürlichen Zahlen besteht, können wir zwei Unterfälle unterscheiden: (i) $\sigma_1'(x)$ ist gerade und (ii) $\sigma_1'(x)$ ist ungerade.

(i) Sei $\sigma_1'(x)$ gerade. Folglich:

$$\sigma_1'(x) \in \{d \mid d \text{ ungerade}\} = \varphi(E).$$

Daraus folgt (nach Def. 19.1), dass $\varphi_{\sigma_1'}(E(x)) = \mathtt{w}$ und, daraus (nach Def. 19.4), dass $\varphi_{\sigma_1'}(E(x) \vee O(x)) = \mathtt{w}$.

(ii) Sei $\sigma_1'(x)$ ungerade. Folglich:

$$\sigma_1'(x) \in \{d \mid d \text{ ist ungerade}\} = \varphi(O).$$

Daraus folgt (nach Def. 19.1), dass $\varphi_{\sigma_1'}(O(x)) = \mathtt{w}$ und, daraus (nach Def. 19.4), dass $\varphi_{\sigma_1'}(E(x) \vee O(x)) = \mathtt{w}$.

Da in beiden sich gegenseitig ausschließenden Fällen haben wir festgestellt, dass $\varphi_{\sigma_1'}(E(x) \vee O(x)) = \mathtt{f}$, gilt dies allgemein. Da σ_1' eine x-Variante von σ_1 ist, folgt außerdem (nach Def. 19.8), dass $\varphi_{\sigma_1}(\forall x\,(E(x) \vee O(x))) = \mathtt{w}$.

$\exists z\,(E(z) \land O(z))$: Sei σ'_1 eine z-Variante von σ_1. Da **D** aus natürlichen Zahlen besteht, können wir zwei Unterfälle unterscheiden: (i) $\sigma'_1(z)$ ist gerade und (ii) $\sigma'_1(z)$ ist ungerade.

(i) Sei $\sigma'_1(z)$ gerade. Dann ist $\sigma'_1(z)$ nicht ungerade, d.h.,

$$\sigma'_1(z) \notin \{d \mid d \text{ ist ungerade}\} = \varphi(O).$$

Daraus folgt (nach Def. 19.1), dass $\varphi_{\sigma'_1}(O(x)) = \mathtt{f}$ und, daraus (nach Def. 19.3), dass $\varphi_{\sigma'_1}(E(z) \land O(x)) = \mathtt{f}$.

(ii) Sei $\sigma'_1(z)$ ungerade. Wir können auch in diesem Fall ebenfalls zeigen, dass $\varphi_{\sigma'_1}(E(z) \land O(x)) = \mathtt{f}$.

Da in beiden sich gegenseitig ausschließenden Fällen haben wir festgestellt, dass $\varphi_{\sigma'_1}(E(z) \land O(x)) = \mathtt{f}$, gilt dies allgemein. Da σ'_1 eine z-Variante von σ_1 ist, folgt außerdem (nach Def. 19.8), dass $\varphi_{\sigma_1}(\forall x\,(E(x) \lor O(x))) = \mathtt{w}$.

$\forall z\, D(z,a)$: Nehmen wir an, um eine Absurdität zu erhalten, dass $\varphi_{\sigma_1}(\forall z\, D(z,a)) = \mathtt{f}$.

Dann muss es mindestens eine z-Variante σ'_1 von σ_1 geben, sodass $\varphi_{\sigma'_1}(D(z,a)) = \mathtt{f}$. Da $\varphi(a) = 1$, bedeutet dies, dass $\sigma'_1(z)$ so sein müsste, dass $(\sigma'_1(z), 1) \notin \varphi(D)$ ist – d. h., $\sigma'_1(z)$ wäre nicht durch 1 teilbar. Da jedoch $\sigma'_1(z) \in \varphi(D) = \mathbb{N}$ und jede natürliche Zahl durch 1 teilbar ist, ist dies absurd.

Dieser Widerspruch zeigt, dass $\varphi_{\sigma_1}(\forall z\, D(z,a)) = \mathtt{w}$.

Aktivierungselement 10.7. (i) Bestimmen Sie, ob die folgenden Formeln unter $\mathfrak{I}$ und σ_i (auf Seite 140) wahr oder falsch sind.

1. $\exists y\, H(y)$
2. $\exists y\, \neg H(y)$
3. $\forall x\,(E(x) \leftrightarrow \neg O(x))$
4. $\exists x\, D(a,x)$
5. $\exists x\, D(z,x)$
6. $\forall z\, \exists x\, D(z,x)$
7. $\forall z\, D(z,x)$
8. $\exists x\, \forall z\, D(z,x)$
9. $\exists z\, \neg D(z,x)$
10. $\forall x\, \exists z\, \neg D(z,x)$

(ii) Ist der Wahrheitswert einer geschlossenen quantifizierten Formel sensitiv gegenüber der Wahl der Variablenbelegung, oder bleibt er invariant?

Belegungen auf die Seite 140:
$\sigma_1 = 1, 2, 3, \ldots$
$\sigma_2 = 2, 2, 3, \ldots$
$\sigma_3 = 3, 4, 3, \ldots$
$\sigma_4 = 3, 4, 2, \ldots$
$\sigma_5 = 4, 3, 2, \ldots$

10.1.8 Beweise für Wahrheit und Falschheit unter $\mathfrak{I}$

Ein Beweis der Wahrheit für A unter $\mathfrak{I} = \langle \mathbf{D}, \varphi \rangle$ ist erbracht, wenn man beweist, dass $\varphi_\sigma(A) = \mathtt{w}$ für beliebige σ unter $\mathfrak{I}$.

Ein Beweis der Falschheit für A unter $\mathfrak{I} = \langle \mathbf{D}, \varphi \rangle$ ist erbracht, wenn man beweist, dass $\varphi_\sigma(A) = \mathtt{f}$ für beliebige σ unter $\mathfrak{I}$.

In beiden Fällen nehmen wir an, dass σ *beliebig gewählt* ist. Das bedeutet, dass wir für jedes v nicht darauf achten, welchen Wert $\sigma(v)$ annimmt. Mit anderen Worten: Wir müssen zeigen, dass $\varphi_\sigma(A) = \mathtt{w}$ bzw. $\mathtt{f}$ unabhängig davon gilt, was $\sigma(v)$ in $\mathbf{D}$ bezeichnet.

Gibt es zwei Variablenbelegungen σ_1 und σ_2 mit $\varphi_{\sigma_1}(A) = \mathtt{w}$ und $\varphi_{\sigma_2}(A) = \mathtt{f}$, so ist A unter der Interpretation $\mathfrak{I}$ weder wahr noch falsch.

Betrachten wir einige Beispiele:

$O(a)$: Wir haben bereits gesehen, dass $\varphi_\sigma(O(a)) = \mathtt{w}$ für alle σ – also unabhängig des σ – gilt. Folglich ist ‚$O(a)$' unter $\mathfrak{I}$ wahr.

$O(x)$: Wir haben auch gesehen, dass $\varphi_{\sigma_1}(O(x)) = \mathtt{w}$ und $\varphi_{\sigma_2}(O(x)) = \mathtt{f}$. Folglich ist ‚$O(x)$' unter $\mathfrak{I}$ weder wahr noch falsch.

$O(x) \vee E(x)$: Unter $\mathfrak{I}$ ist jedes $d \in \mathbf{D}$ eine natürliche Zahl. Folglich ist $\sigma(x)$ entweder gerade – d.h. $\sigma(x) \in \varphi(E)$ – oder ungerade – d.h. $\sigma(x) \in \varphi(O)$.

Falls $\sigma(x) \in \varphi(E)$, folgt (nach Def. 19.1), dass $\varphi_\sigma(E(x)) = \mathtt{w}$ und damit (nach Def. 19.4) auch $\varphi_\sigma(O(x) \vee E(a)) = \mathtt{w}$. Falls $\sigma(x) \in \varphi(O)$, folgt (nach Def. 19.1), dass $\varphi_\sigma(O(x)) = \mathtt{w}$ und daraus wiederum (nach Def. 19.4), dass $\varphi_\sigma(O(x) \vee E(a)) = \mathtt{w}$.

Aus diesen beiden sich gegenseitig ausschließenden und erschöpfenden Möglichkeiten folgt, dass $\varphi_\sigma(O(x) \vee E(a)) = \mathtt{w}$. Damit ist ‚$O(x) \vee E(a)$' unabhängig des σ wahr.

$O(x) \wedge E(x)$: Unter $\mathfrak{I}$ ist jedes $d \in \mathbf{D}$ eine natürliche Zahl. Folglich ist $\sigma(x)$ entweder gerade – d.h. $\sigma(x) \in \varphi(E)$ – oder ungerade – d.h. $\sigma(x) \in \varphi(O)$.

Falls $\sigma(x) \in \varphi(E)$, folgt, dass $\sigma(x) \notin \varphi(O)$. Daraus folgt (nach Def. 19.1), dass $\varphi_\sigma(O(x)) = \mathtt{f}$ und damit (nach Def. 19.3), dass $\varphi_\sigma(O(x) \wedge E(a)) = \mathtt{f}$. Falls $\sigma(x) \in \varphi(O)$, haben wir eine ähnliche Situation.

Aus diesen beiden sich gegenseitig ausschließenden und erschöpfenden Möglichkeiten folgt, dass $\varphi_\sigma(O(x) \wedge E(a)) = \mathtt{f}$. Damit ist ‚$O(x) \wedge E(a)$' unabhängig des σ falsch.

$\exists x\, H(x)$: Nehmen wir an, um einen Widerspruch zu erhalten, dass $\varphi_\sigma(\exists x\, H(x)) = \mathtt{w}$. Dann muss es eine x-Variante σ' von σ geben, sodass $\varphi_{\sigma'}(H(x)) = \mathtt{w}$. Dies bedeutet, dass $\sigma'(x) \in \varphi(H)$ ist. Da jedoch $\varphi(H)$ leer ist – es gibt keine natürliche Zahl, die ein Mensch ist – kann es kein solches σ' geben, was einen Widerspruch ergibt. Damit ist gezeigt, dass $\varphi_\sigma(\exists x\, H(x)) = \mathtt{f}$, und zwar unabhängig von des σ.

Aktivierungselement 10.8. Bestimmen Sie, ob die folgenden Formeln unter $\mathfrak{I}$ (in Seite 137) wahr oder falsch sind.

1. $\exists y\, H(y)$
2. $\forall z\, H(z)$
3. $E(x) \leftrightarrow \neg O(x)$
4. $\exists x\, \neg H(x)$
5. $\exists z\, (E(z) \land O(b))$
6. $\forall x\, (E(x) \rightarrow \neg O(d))$

10.1.9 Beweise für logische Wahrheit und logische Falschheit

Logische Wahrheit. Eine Formel A ist logisch wahr gdw für alle Interpretationen $\mathfrak{I} = \langle \mathbf{D}, \varphi \rangle$ und alle (mögliche) Variablenbelegungen σ (unter $\mathfrak{I}$): $\varphi_\sigma(A) = \mathtt{w}$.

Zum Beispiel ist die Formel ‚$O(a) \lor \neg O(a)$' logisch wahr.

Beweis. Sei $\mathfrak{I}$ eine beliebige Interpretation und σ eine beliebige Variablenbelegung. Wir wissen, dass die Formel ‚$O(a)$' unter $\mathfrak{I}$ und σ entweder wahr oder falsch ist – das heißt, es gilt entweder $\varphi_\sigma(O(a)) = \mathtt{w}$ oder $\varphi_\sigma(O(a)) = \mathtt{f}$.

Sei $\varphi_\sigma(O(a)) = \mathtt{w}$. Dann ist (nach Def. 19.4) $\varphi_\sigma(O(a) \lor \neg O(a)) = \mathtt{w}$. Sei jetzt $\varphi_\sigma(O(a)) = \mathtt{f}$. Dann ist (nach Def. 19.2) $\varphi_\sigma(\neg O(a)) = \mathtt{w}$ und, folglich (nach Def. 19.4), $\varphi_\sigma(O(a) \lor \neg O(a)) = \mathtt{w}$.

Da in beiden einander ausschließenden Fällen folgt, dass $\varphi_\sigma(O(a) \lor \neg O(a)) = \mathtt{w}$, gilt insgesamt $\varphi_\sigma(O(a) \lor \neg O(a)) = \mathtt{w}$. □

Logische Falschheit. Eine Formel A ist logisch falsch gdw für alle Interpretationen $\mathfrak{I} = \langle \mathbf{D}, \varphi \rangle$ und alle (mögliche) Variablenbelegungen σ (unter $\mathfrak{I}$): $\varphi_\sigma(A) = \mathtt{f}$.

Zum Beispiel ist die Formel ‚$O(a) \land \neg O(a)$' logisch falsch.

Beweis. Wir wissen, dass die Formel ‚$O(a)$' unter $\mathfrak{I}$ und σ entweder wahr oder falsch ist – das heißt, es gilt entweder $\varphi_\sigma(O(a)) = \mathtt{w}$ oder $\varphi_\sigma(O(a)) = \mathtt{f}$.

Sei $\varphi_\sigma(O(a)) = \mathtt{w}$. Dann ist (nach Def. 19.1) $\varphi_\sigma(\neg O(a)) = \mathtt{f}$ und, folglich (nach Def. 19.5), $\varphi_\sigma(O(a) \land \neg O(a)) = \mathtt{f}$. Sei jetzt $\varphi_\sigma(O(a)) = \mathtt{f}$. Dann ist (nach Def. 19.5), $\varphi_\sigma(O(a) \land \neg O(a)) = \mathtt{f}$.

Da in beiden einander ausschließenden Fällen folgt, dass $\varphi_\sigma(O(a) \land \neg O(a)) = \mathtt{f}$, gilt insgesamt $\varphi_\sigma(O(a) \land \neg O(a)) = \mathtt{f}$. □

Kontingenz. Eine Formel A ist nicht logisch wahr, wenn es mindestens eine $\mathfrak{I} = \langle \mathbf{D}, \varphi \rangle$ und eine σ gibt, sodass $\varphi_\sigma(A) = \mathtt{f}$. Eine Formel A ist nicht logisch falsch, wenn es mindestens eine $\mathfrak{I} = \langle \mathbf{D}, \varphi \rangle$ und eine σ gibt, sodass $\varphi_\sigma(A) = \mathtt{w}$.

Folglich ist eine Formel A kontingent, wenn Folgendes gilt:

1. Es gibt mindestens eine $\mathfrak{I} = \langle \mathbf{D}, \varphi \rangle$ und eine σ, sodass $\varphi_\sigma(A) = \mathtt{w}$ (Beispiel).
2. Es gibt mindestens eine $\mathfrak{I} = \langle \mathbf{D}, \varphi \rangle$ und eine σ, sodass $\varphi_\sigma(A) = \mathtt{f}$ (Gegenbeispiel).

Zum Beispiel ist die Formel ‚$D(x, a)$' kontingent:

Beispiel

Ein Beispiel für eine Interpretation $\mathfrak{I}$, die ‚$D(x, a)$' wahr macht, ist das auf Seite 137.

Gegenbeispiel

Ein Beispiel für eine Interpretation $\mathfrak{I}$, die ‚$D(x, a)$' falsch macht, ist das auf Seite 137, jedoch mit dem Unterschied, dass $\varphi(a) = 3$.

Aktivierungselement 10.9. Bestimmen Sie für jede dieser Formeln, ob sie logisch wahr, logisch falsch oder kontingent ist.

1. $O(x) \lor E(x)$
2. $\exists x\,(O(x) \lor E(x))$
3. $O(y) \lor \neg O(y)$
4. $\forall y\,(O(y) \lor \neg O(y))$
5. $E(z) \land \neg E(z)$
6. $\forall z\,(E(x) \land \neg E(z))$

10.1.10 Lösungen zu Aktivierungselemente

Lösung zum Aktivierungselement 10.1. Bestimmen Sie, ob die folgenden Formeln unter $\mathfrak{I}$ (und beliebige σ) wahr oder falsch sind.

1. $\varphi_{\sigma_i}(O(b)) = \mathtt{f}$ für $i = 1, \ldots, 5$

Erklärung: Das Schema unten zeigt dieses Ergebnis.

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{2 \text{ ist } \textit{nicht} \text{ ungerade}}{2 \notin \{d \in \mathbf{D} \mid d \text{ ist gerade}\}}}{\varphi(b) \notin \varphi(O)}}{\varphi_\sigma(E(a)) = \mathtt{f}}$$

2. $\varphi_{\sigma_i}(E(b)) = \mathtt{w}$ für $i = 1, \ldots, 5$

Erklärung: Das Schema unten zeigt dieses Ergebnis.

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{2 \text{ ist gerade}}{2 \in \{d \in \mathbf{D} \mid d \text{ ist gerade}\}}}{\varphi(b) \in \varphi(E)}}{\varphi_\sigma(E(b)) = \mathtt{w}}$$

3. $\varphi_{\sigma_i}(O(c)) = \mathtt{w}$ für $i = 1, \ldots, 5$

Erklärung: Das Schema unten zeigt dieses Ergebnis.

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{3 \text{ ist ungerade}}{3 \in \{d \in \mathbf{D} \mid d \text{ ist ungerade}\}}}{\varphi(c) \in \varphi(O)}}{\varphi_\sigma(O(c)) = \mathtt{w}}$$

4. $\varphi_{\sigma_i}(E(d)) = \mathtt{w}$ für $i = 1, \ldots, 5$

Erklärung: Das Schema unten zeigt dieses Ergebnis.

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{4 \text{ ist gerade}}{4 \in \{d \in \mathbf{D} \mid d \text{ ist gerade}\}}}{\varphi(d) \in \varphi(E)}}{\varphi_\sigma(E(d)) = \mathtt{w}}$$

Lösung zum Aktivierungselement 10.2.

Gegeben seien die folgenden Variablenbelegungen in Bezug auf die Interpretation $\mathfrak{I}$ auf Seite 137:

$$\sigma_1 = 1, 1, 3, 4, \ldots \quad \sigma_2 = 2, 2, 4, 4, \ldots \quad \sigma_3 = 3, 3, 2, 4, \ldots$$

Bestimmen Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

1. $\sigma_1(x_1) = \sigma_2(x_1)$. falsch
2. $\sigma_1(x_1) = \sigma_1(x_2)$. wahr
3. $\sigma_3(x_2) = \sigma_1(x_3)$. wahr
4. $\sigma_2(x_2) = \sigma_3(x_3)$. wahr
5. Es gibt eine Variabel v, sodass $\sigma_1(v) = \sigma_2(v) = \sigma_3(v)$.

Antwort: Wahr, die Variabel x_4.

6. Es gibt eine Variablenbelegung σ, sodass $\sigma_i(x_1) = \sigma_i(x_2)$.

Antwort: Wahr, z.B. die Variablenbelegungen $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$. Es gibt jedoch mehr.

7. Für alle Variablenbelegungen σ, $\sigma_i(x_1) = \sigma_i(x_2)$.

Antwort: Falsch. Dies gilt für $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, aber nicht für alle (mögliche) Variablenbelegungen σ. Dies gilt z.B. nicht für $\sigma := 1, 2, 3, 4, \ldots$.

8. Für alle Variablenbelegungen σ und σ': $\sigma(x_4) = \sigma'(x_4)$.

Antwort: Falsch. Dies gilt für $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, aber nicht für alle (mögliche) Variablenbelegungen σ. Dies gilt z.B. nicht für $\sigma := 5, 5, 5, 5, \ldots$ und $\sigma' := 6, 6, 6, 6, \ldots$.

Belegungen auf die Seite 140:
$\sigma_1 = 1, 2, 3, ...$
$\sigma_2 = 2, 2, 3, ...$
$\sigma_3 = 3, 4, 3, ...$
$\sigma_4 = 3, 4, 2, ...$
$\sigma_5 = 4, 3, 2, ...$

Lösung zum Aktivierungselement 10.3. Bestimmen Sie, ob die folgenden Formeln unter $\mathfrak{I}$ und die Variablenbelegungen auf die Seite 140 wahr oder falsch sind.

Antwort

	Formel	φ_{σ_1}	φ_{σ_2}	φ_{σ_3}	φ_{σ_4}	φ_{σ_5}
1.	$O(x)$	w	f	w	w	f
2.	$O(z)$	w	w	w	f	f
3.	$E(x)$	w	w	f	f	w
4.	$E(y)$	w	w	w	w	f
5.	$H(y)$	f	f	f	f	f
6.	$H(z)$	f	f	f	f	f

Lösung zum Aktivierungselement 10.4. Bestimmen Sie, ob die folgenden Formeln unter $\mathfrak{I}$ und σ_i (auf Seite 140) wahr oder falsch sind.

Antwort

	Formel	φ_{σ_1}	φ_{σ_2}	φ_{σ_3}	φ_{σ_4}	φ_{σ_5}
1.	$G(x, b)$	f	f	w	w	w
2.	$G(x, z)$	f	f	f	w	w
3.	$L(z, b)$	f	f	f	f	f
4.	$L(x, x)$	f	f	f	f	f
5.	$D(y, z)$	f	f	f	w	f
6.	$D(z, z)$	w	w	w	w	w

Lösung zum Aktivierungselement 10.5. Bestimmen Sie, ob die folgenden Formeln unter $\mathfrak{I}$ und σ_i (auf Seite 140) wahr oder falsch sind.

Antwort

	Formel	φ_{σ_1}	φ_{σ_2}	φ_{σ_3}	φ_{σ_4}	φ_{σ_5}
1.	$G(d, x) \wedge E(d)$	w	w	w	w	f
2.	$G(c, x) \vee O(d)$	w	w	f	f	f
3.	$L(z, c) \longrightarrow D(y, z)$	w	w	w	w	f
4.	$D(y, z) \longrightarrow \neg L(z, b)$	w	w	w	f	w
5.	$O(x) \wedge O(c) \wedge O(z)$	w	f	w	f	f
6.	$\neg E(y) \longrightarrow (G(c, x) \vee O(d))$	w	w	w	w	f

Lösung zum Aktivierungselement 10.6. Bestimmen Sie, ob die Variablenbelegungen $\sigma_1, \ldots, \sigma_{10}$ oben Varianten voneinander sind und, falls ja, bezüglich welcher Variable(n).

- Sind σ_i und σ_j keine Varianten voneinander, so wird dies durch ‚–' markiert.
- Sind σ_i und σ_j Varianten voneinander, so wird in der entsprechenden Schnittzelle angegeben, bezüglich welcher Variable sie Varianten sind.
- Sind sie bezüglich aller Variablen Varianten, so wird dies durch ‚·' markiert.

Antwort

	σ_1	σ_2	σ_1	σ_4	σ_5	σ_6	σ_7	σ_8	σ_9	σ_{10}
σ_1	·	–	–	–	x_{10}	x_2	x_5	–	–	–
σ_2	–	·	–	–	–	–	–	–	–	–
σ_3	–	–	·	–	–	–	–	–	x_{11}	–
σ_4	–	–	–	·	–	–	–	–	–	–
σ_5	x_{10}	–	–	–	·	–	–	–	–	–
σ_6	x_2	–	–	–	–	·	–	–	–	–
σ_7	x_5	–	–	–	–	–	·	–	–	–
σ_8	–	–	–	–	–	–	x_5	·	–	–
σ_9	–	–	x_{11}	–	–	–	–	–	·	–
σ_{10}	–	–	–	–	–	–	–	–	–	·

Belegungen auf die Seite 140:
$\sigma_1 = 1, 2, 3, \ldots$
$\sigma_2 = 2, 2, 3, \ldots$
$\sigma_3 = 3, 4, 3, \ldots$
$\sigma_4 = 3, 4, 2, \ldots$
$\sigma_5 = 4, 3, 2, \ldots$

Lösung zum Aktivierungselement 10.7. (i) Bestimmen Sie, ob die folgenden Formeln unter $\mathfrak{I}$ und σ_i (auf Seite 140) wahr oder falsch sind.

Antwort

	Formel	φ_{σ_1}	φ_{σ_2}	φ_{σ_3}	φ_{σ_4}	φ_{σ_5}
1.	$\exists y\, H(y)$	f	f	f	f	f
2.	$\exists y\, \neg H(y)$	w	w	w	w	w
3.	$\forall x\, (E(x) \leftrightarrow \neg O(x))$	w	w	w	w	w
4.	$\exists x\, D(a, x)$	w	w	w	w	w
5.	$\exists x\, D(z, x)$	w	w	w	w	w
6.	$\forall z\, \exists x\, D(z, x)$	w	w	w	w	w
7.	$\forall z\, D(z, x)$	w	f	f	f	f
8.	$\exists x\, \forall z\, D(z, x)$	w	w	w	w	w
9.	$\exists z\, \neg D(z, x)$	f	w	w	w	w
10.	$\forall x\, \exists z\, \neg D(z, x)$	f	f	f	f	f

(ii) Ist der Wahrheitswert einer geschlossenen quantifizierten Formel sensitiv gegenüber der Wahl der Variablenbelegung, oder bleibt er invariant?

Antwort: Er bleibt invariant.

Lösung zum Aktivierungselement 10.8 Bestimmen Sie, ob die folgenden Formeln unter $\Im$ (in Seite 137) wahr oder falsch sind.

1. $\exists y\, H(y)$ wahr
2. $\forall z\, H(z)$ falsch
3. $E(x) \leftrightarrow \neg O(x)$ wahr
4. $\exists x\, \neg H(x)$ wahr
5. $\exists z\, (E(z) \wedge O(b))$ falsch
6. $\forall x\, (E(x) \rightarrow \neg O(d))$ wahr

Lösung zum Aktivierungselement 10.9 Bestimmen Sie für jede dieser Formeln, ob sie logisch wahr, logisch falsch oder kontingent ist.

1. $O(x) \vee E(x)$ kontingent
2. $\exists x\, (O(x) \vee E(x))$ kontingent
3. $O(y) \vee \neg O(y)$ logisch wahr
4. $\forall y\, (O(y) \vee \neg O(y))$ logisch wahr
5. $E(z) \wedge \neg E(z)$ logisch falsch
6. $\forall z\, (E(x) \wedge \neg E(z))$ kontingent

10.2 Übungen

Übung 10.1.1.

1. Worauf beziehen sich singuläre Terme?
2. Was sind die Extensionen von n-stelligen Prädikaten (generellen Termen)?

Übung 10.1.2.

1. Geben Sie (natürsprachliche) singuläre Terme an, und erläutern Sie, was deren Referenz ist.
2. Geben Sie (natürsprachliche) Prädikate (mit jeweils verschiedener Stellenzahl) an, und erläutern Sie, was deren Extension ist.

Übung 10.1.3. Was sind die zwei wichtigen Eigenschaften von n-Tupeln?

Übung 10.1.4. Was ist das n-fache Cartesische Produkt

$$\mathbf{D}^n = \underbrace{\mathbf{D} \times \ldots \times \mathbf{D}}_{n-\text{mal}}$$

der Menge **D**?

Übung 10.1.5. Definieren Sie, was eine prädikatenlogische Interpretation ist.

Übung 10.1.6. Definieren Sie, was eine Variablenbelegung unter einer Interpretation ist.

Übung 10.1.7. Was heißt es, daß eine Variablenbelegung eine v-Variante einer Variablenbelegung ist?

Übung 10.1.8. Erläutern Sie, unter welchen Bedingungen eine Formel – gegeben eine Interpretation sowie eine Variablenbelegung unter dieser Interpretation – wahr bzw. falsch ist.

Übung 10.1.9. In $\mathfrak{I}$ und unter $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ zu bewertende Formeln: Stellen Sie fest, welche der dieser Formeln wahr bzw. falsch gemäß $\varphi_{\sigma_1}, \varphi_{\sigma_2}, \varphi_{\sigma_3}$ sind.

Interpretation: $\mathfrak{I} = \langle \mathbf{D}, \varphi \rangle$

$$\begin{aligned}
\mathbf{D} &= \{Barack, Joachim, Joseph\},\\
\varphi(a) &= Barack, \quad \varphi(b) = Joachim, \quad \varphi(c) = Joseph,\\
\varphi(P) &= \{Barack, Joachim\}\\
&= \{d \in \mathbf{D} \mid d \text{ ist Präsident}\},\\
\varphi(M) &= \{Barack, Joachim, Joseph\}\\
&= \{d \in \mathbf{D} \mid d \text{ ist ein Mensch}\},\\
\varphi(Z) &= \{\} = \{d \in \mathbf{D} \mid d \text{ ist eine Zahl}\},\\
\varphi(\ddot{A}) &= \{\langle Joseph, Barack\rangle, \langle Joseph, Joachim\rangle,\\
&\qquad \langle Joachim, Barack\rangle\},\\
&= \{\langle d_1, d_2\rangle \in \mathbf{D}^2 \mid d_1 \text{ ist alter als } d_2\}.
\end{aligned}$$

Variablenbelegungen

$\sigma_1 = Barack, Joachim, Joseph, \ldots$

$\sigma_2 = Joachim, Joachim, Joseph, \ldots$

$\sigma_3 = Joseph, Joachim, Joseph, \ldots$

10. $P(a)$
11. $P(b)$
12. $P(x)$
13. $M(c)$
14. $M(x)$
15. $Z(a)$
16. $Z(x)$
17. $\ddot{A}(a, b)$
18. $\ddot{A}(y, a)$
19. $\neg P(c)$
20. $\neg Z(x)$
21. $\ddot{A}(c, b) \wedge \neg P(x)$
22. $\forall x\, M(x)$
23. $\neg\forall x\, P(x)$
24. $\exists y\, Z(y)$
25. $\exists x\, P(x)$
26. $\neg\forall x\, P(x) \vee P(c)$
27. $\ddot{A}(b, a) \rightarrow \exists x\,(P(x) \wedge Z(x))$
28. $\forall x \exists y\, \ddot{A}(x, y)$
29. $\exists x \forall y\, \ddot{A}(x, y)$
30. $\ddot{A}(y, x) \wedge \ddot{A}(z, y) \rightarrow \ddot{A}(z, x)$

Übung 10.1.10.

1. Denken Sie sich drei weitere Variablenbelegungen aus und bewerten Sie die Formel 30.
2. Ist die Formel 30 wahr in $\mathfrak{I}$ unabhängig von der Wahl der Variablenbelegung?
3. Stellen Sie fest, welche der oben vorkommenden *geschlossenen* Formeln wahr bzw. falsch gemäß φ (d.h., in $\mathfrak{I}$) sind.

Übung 10.2. Überprüfen Sie die folgenden Formeln auf logische Wahrheit, logische Falschheit, bzw. Kontingenz. Argumentieren Sie für das Vorliegen von logischer Wahrheit/Falschheit auf Basis der semantischen Regeln, für das Vorliegen von Kontingenz jedoch durch Angabe von passenden Interpretationen (und Variablenbelegungen).

1. $M(x) \vee G(c)$
2. $\exists y\,(G(y) \wedge \neg G(y))$
3. $\forall x\,(P(x) \rightarrow \neg P(x))$
4. $\forall x\,P(x) \rightarrow \exists x\,P(x)$
5. $P(x) \rightarrow P(y)$
6. $P(x) \rightarrow P(x)$
7. $\exists x\,P(x) \rightarrow \forall x\,P(x)$
8. $\neg\forall x\,P(x) \leftrightarrow \exists x\,\neg P(x)$
9. $P(a,b) \wedge \forall x\,\neg\exists y\,P(x,y)$
10. $\forall x\,\forall y\,P(x,y) \rightarrow \forall y\,\forall x\,P(x,y)$
11. $P(x) \rightarrow \forall y\,P(y)$
12. $P(x) \rightarrow \forall y\,P(x)$
13. $\exists x\,\forall y\,P(x,y) \rightarrow \forall y\,\exists x\,P(x,y)$

Übung 10.3. In den folgenden Beispielen wird das Bestehen gewisser logischer Folgerungen behauptet. Überprüfen Sie diese Behauptungen auf ihre Richtigkeit! Argumentieren Sie entweder für die Behauptungen mit Hilfe der semantischen Regeln, oder widerlegen Sie die Behauptungen durch Angabe von Gegenbeispielen in Form von Interpretationen (und Variablenbelegungen).

1. $P(a) \vDash \exists x\, P(x)$
2. $\forall x\, (P(x) \rightarrow Q(x)) \vDash \exists x\, P(x) \rightarrow \exists x\, Q(x)$
3. $\forall x\, (P(x) \rightarrow Q(x)) \vDash \exists x\, Q(x)$
4. $\forall x\, \forall y\, P(x, y) \vDash \forall x\, \exists y\, P(x, y)$
5. $\exists x\, (P(y) \land Q(x)) \vDash P(y) \land \exists x\, Q(x)$
6. $\exists x\, P(y) \vDash \forall y\, P(x)$
7. $\forall x\, \forall y\, P(x, y) \vDash P(a, b) \land P(c, d)$
8. $\forall x\, (P(x) \rightarrow Q(x)), P(a) \vDash Q(a)$
9. $\forall x\, \exists y\, P(x, y) \vDash \exists y\, P(y, y)$
10. $\forall x\, (P(x) \lor Q(x)), \neg\exists y\, Q(y) \vDash \forall x\, P(x)$
11. $\forall x\, (P(x) \lor Q(x)), \neg Q(y) \vDash \forall x\, P(x)$
12. $P(a_1), P(a_2), \ldots, P(a_{10000}) \vDash \forall x\, P(x)$

10.2.1 Lösungen

Lösung zu Übung 10.1.1. 1. Worauf beziehen sich singuläre Terme?

Antwort: Singuläre Terme beziehen sich auf einzelne Objekte des Gegenstandsbereichs.

2. Was sind die Extensionen von n-stelligen Prädikaten (generellen Termen)?

Antwort: Die Extensionen von n-stelligen Prädikaten sind Mengen von n-Tupeln von Objekten des Gegenstandsbereichs.

Lösung zu Übung 10.1.2.

1. Geben Sie (natürsprachliche) singuläre Terme an, und erläutern Sie, was deren Referenz ist.

Antwort: Wir geben mehrere.

(1) Die Referenz von ‚Sokrates' ist (der Philosoph) *Sokrates*.

(2) Die Referenz von ‚Aristoteles' ist (der Philosoph) *Aristoteles*.

(3) Die Referenz von ‚der Stagirit' ist auch *Aristoteles*.

(4) Die Referenz von ‚die Sonne' ist *die Sonne* (der Stern im Sonnensystem).

(5) Die Referenz von ‚Mount Everest' ist der *Mount Everest* (der höchste Berg der Welt).

(6) Die Referenz von ‚Freddie Mercury' ist *Freddie Mercury* (der Hauptänger der Gruppe Queen).

(7) Die Referenz von ‚der Zahl eins' oder ‚eins' ist 1.

Bemerkung

Die Terme ‚der Hauptsänger der Gruppe Beatles' oder ‚der Verfasser von *Principia Mathematica*' sind keine singulären Terme, da mehr als eine Person diese Beschreibungen erfüllen könnten.

- Die Beschreibung ‚der Hauptsänger der Beatles' kann auf *John Lennon* und *Paul McCartney* zutreffen.
- Die Beschreibung ‚der Verfasser von *Principia Mathematica*' kann auf *Bertrand Russell* und *Alfred North Whitehead* zutreffen.

2. Geben Sie (natürsprachliche) Prädikate an, und erläutern Sie, was deren Extension ist.

Antwort 1

Die Extension von ‚Mitglied von The Beatles' ist die Menge **B** von Gegenstände d, sodass ‚d ist ein Mitglied von The Beatles' wahr ist. Die Elemente der Menge **B** sind:

$$\begin{aligned}\mathbf{B} &= \{George, John, Paul, Ringo\}\\ &= \{d \mid d \text{ ist ein Mitglied von The Beatles}\},\end{aligned}$$

weil alle folgenden Sätze wahr sind:

- $George$ ist ein Mitglied von The Beatles.
- $John$ ist ein Mitglied von The Beatles.
- $Paul$ ist ein Mitglied von The Beatles.
- $Ringo$ ist ein Mitglied von The Beatles.

Es ist jedoch *nicht* der Fall, dass:

$$Freddie \in \mathbf{B},$$

weil der folgende Satz *nicht* wahr ist:

- $Freddie$ ist ein Mitglied von The Beatles.

Anders gesagt: $Freddie \notin \mathbf{B}$, denn $Freddie$ ist **kein** Mitglied von The Beatles.

Antwort 2

Die Extension von ‚Rockgruppe' ist die Menge **G** von Gegenstände d, sodass ‚d ist eine Rockgruppe' wahr ist. Einige Elemente der Menge **G** sind:

$$The\ Beatles, Queen, Wings, Led\ Zeppelin,$$

$$The\ Police, Serú\ Girán, Invisible,$$

weil alle folgenden Sätze wahr sind:

- $The\ Beatles$ ist eine Rockgruppe.

  ⋮

- $Invisible$ ist eine Rockgruppe.

Es ist jedoch *nicht* der Fall, dass:

$$Freddie \in \mathbf{G},$$

weil der folgende Satz *nicht* wahr ist:

- $Freddie$ ist eine Rockgruppe. (Er ist ein Rocksänger.)

Antwort 3

Die Extension von ‚... Mitglied von ...' ist die Menge **M** von 2-Tupeln $\langle d_1, d_2 \rangle$, sodass ‚d_1 ist ein Mitglied von d_2' wahr ist.

Einige Elemente der Menge **G** sind:

$$\langle George, The\ Beatles \rangle, \langle John, The\ Beatles \rangle, \langle Paul, The\ Beatles \rangle, \langle Ringo, The\ Beatles \rangle,$$
$$\langle Freddie, Queen \rangle, \langle Brian, Queen \rangle, \langle Paul, Wings \rangle, \langle Sting, The\ Police \rangle,$$
$$\langle Robert, Led\ Zeppelin \rangle, \langle Charly, Serú\ Girán \rangle, \langle Luis, Invisible \rangle, \langle Lito, Los\ Gatos \rangle,$$

weil alle folgenden Sätze wahr sind:

- $George$ ist ein Mitglied von $The\ Beatles$.

  $\vdots$

- $Luis$ ist ein Mitglied von $Invisible$.

Es ist jedoch *nicht* der Fall, dass:

$$\langle Freddie, The\ Beatles \rangle \in \mathbf{G},$$

weil der folgende Satz *nicht* wahr ist:

- $Freddie$ ist ein Mitglied von $The\ Beatles$.

Antwort 4

Die Extension von ‚... ist der Vater von ...' ist die Menge **V** von 2-Tupeln d_1, d_2, sodass ‚d_1 ist der Vater d_2' wahr ist.

Einige Elemente der Menge **V** sind:

$$\langle Joe\ Biden, Hunter\ Biden \rangle, \langle Hermann\ Hesse, Bruno\ Hesse \rangle,$$
$$\langle Martin\ Sheen, Charlie\ Sheen \rangle, \langle Henry\ Fonda, Jane\ Fonda \rangle.$$

Es ist jedoch *nicht* der Fall, dass:

$$\langle Donald\ Trump, Hunter\ Biden \rangle, \langle Henry\ Fonda, Marlon\ Brando \rangle,$$
$$\langle Hunter\ Biden, Joe\ Biden \rangle, \langle Bruno\ Hesse, Hermann\ Hesse \rangle,$$
$$\langle Charlie\ Sheen, Martin\ Sheen \rangle, \langle Jane\ Fonda, Henry\ Fonda \rangle \in \mathbf{V},$$

weil alle folgenden Sätze *nicht* wahr sind:

- $Donald\ Trump$ ist der Vater von $Hunter\ Biden$.

  $\vdots$

- $Jane\ Fonda$ ist der Vater von $Henry\ Fonda$.

Bemerkung

Hier sehen wir, warum es wichtig ist, dass die Elemente von n-Tupeln geordnet sind.

Antwort 5

Die Extension von ‚... hat/haben (den Krieg) ... gegen ... verloren' ist die Menge K von 3-Tupeln d_1, d_2, d_3, sodass ‚d_1 hat/haben d_2 gegen d_3 verloren' wahr ist.

Einige Elemente der Menge K sind:

$$\langle Karthago, der\ 3.\ Punischer\ Krieg, das\ Römische\ Reich\rangle,$$
$$\langle die\ Mittelmächte, der\ 1.\ Weltkrieg, die\ Alliierte\rangle.$$

Es ist jedoch *nicht* der Fall, dass:

$$\langle das\ Römische\ Reich, der\ 3.\ Punischer\ Krieg, Karthago\rangle,$$
$$\langle die\ Alliierte, der\ 1.\ Weltkrieg, die\ Mittelmächte\rangle,$$
$$\langle der\ 3.\ Punischer\ Krieg, Karthago, das\ Römische\ Reich\rangle,$$
$$\langle Karthago, Römisches\ Reich, der\ 3.\ Punischer\ Krieg\rangle \in \mathbf{K}.$$

Bemerkung

Außerdem wäre es unsinnig zu sagen, dass die zwei letzten 3-Tupeln in der Extension von K sind. Denn es wäre nicht nur unwahr, sondern auch unsinnig, das Folgende zu sagen:

- $Der\ 3.\ Punischer\ Krieg$ hat/haben $Karthago$ gegen $das\ Römische\ Reich$ verloren.
- $Karthago$ hat/haben $das\ Römisches\ Reich$ gegen $den\ 3.\ Punischer\ Krieg$ verloren.

Antwort 6

Die Extension von ‚... hat (das Land oder Reich) ... von (dem Jahr) ... bis (zum Jahr) ... regiert' ist die Menge **R** von 4-Tupeln $\langle d_1, d_2, d_3, d_4\rangle$, sodass ‚$d_1$ hat d_2 von d_3 bis d_4 regiert' wahr ist.

Einige Elemente der Menge **R** sind:

$$\langle Napoleon\ Bonaparte, Französisches\ Kaiserreich, 1804, 1814\rangle,$$
$$\langle Josef\ Stalin, Sowjetunion, 1922, 1952\rangle.$$

Lösung zu Übung 10.1.3. Was sind die zwei wichtigen Eigenschaften von n-Tupeln?

Antwort

(a) Die Elemente sind *geordnet*, d.h.: Sie haben einen fixen ihnen zugeordneten Platz im n-Tupel.

(b) Die Elemente können *mehrfach* vorkommen.

Lösung zu Übung 10.1.4. Was ist das n-fache Cartesische Produkt

$$\mathbf{D}^n = \underbrace{\mathbf{D} \times \ldots \times \mathbf{D}}_{n-\text{mal}}$$

der Menge $\mathbf{D}$?

Antwort: Es ist die Menge aller n-Tupel von $\mathbf{D}$.

Lösung zu Übung 10.1.5. Definieren Sie, was eine prädikatenlogische Interpretation ist.

Antwort: Siehe Def. 17.

Lösung zu Übung 10.1.6. Definieren Sie, was eine Variablenbelegung unter einer Interpretation ist.

Antwort (siehe Def. 18): Eine Variablenbelegung ordnet jeder Variablen v ein Element $d \in \mathbf{D}$ zu.

Lösung zu Übung 10.1.7. Was heißt es, daß eine Variablenbelegung eine v-Variante einer Variablenbelegung ist?

Antwort (siehe S. 254)

Eine v-Variante σ' von σ ist eine Belegung, die für alle Variablen v', wenn $v' \neq v$, dann $\varphi_{\sigma'}(v') = \varphi_{\sigma}(v')$.

Mit anderem Worten: Eine v-Variante σ' von σ ist eine Belegung, die σ für alle Variablen mit der möglichen Ausnahme von v entspricht.

Lösung zu Übung 10.1.8. Erläutern Sie, unter welchen Bedingungen eine Formel wahr bzw. falsch ist.

Antwort (siehe Def. 19)

Eine prädikatenlogische Bewertung φ_σ relativ zu einer Interpretation $\mathfrak{I} = \langle \mathbf{D}, \varphi \rangle$ und einer Variablenbelegung σ ist eine Funktion, die:

- *Terme auswertet*: Sie ordnet jedem singulären Term t ein Element $d \in \mathbf{D}$ zu, basierend auf σ und der Interpretationsfunktion φ.
- *Formeln Wahrheitswerte zuweist*: Sie weist jeder Formel A einen Wahrheitswert $\mathtt{w}$ (wahr) oder $\mathtt{f}$ (falsch) zu, gemäß den Regeln:

1. Atomare Formeln:

   $\varphi_\sigma(P^n(t_1, \ldots, t_n)) = \mathtt{w}$ gdw $\langle \varphi_\sigma(t_1), \ldots, \varphi_\sigma(t_n) \rangle \in \varphi(P^n)$.

2. Negation:

   $\varphi_\sigma(\neg A) = \mathtt{w}$ gdw $\varphi_\sigma(A) = \mathtt{f}$.

3. Konjunktion:

   $\varphi_\sigma(A \wedge B) = \mathtt{w}$ gdw $\varphi_\sigma(A) = \mathtt{w}$ und $\varphi_\sigma(B) = \mathtt{w}$.

4. Disjunktion:

   $\varphi_\sigma(A \vee B) = \mathtt{w}$ gdw $\varphi_\sigma(A) = \mathtt{w}$ oder $\varphi_\sigma(B) = \mathtt{w}$.

5. Implikation:

   $\varphi_\sigma(A \rightarrow B) = \mathtt{w}$ gdw $\varphi_\sigma(A) = \mathtt{f}$ oder $\varphi_\sigma(B) = \mathtt{w}$.

6. Äquivalenz:

   $\varphi_\sigma(A \leftrightarrow B) = \mathtt{w}$ gdw $\varphi_\sigma(A) = \varphi_\sigma(B)$.

7. Allquantor:

   $\varphi_\sigma(\forall v\, A) = \mathtt{w}$ gdw für alle v-Varianten σ' von σ gilt $\varphi_{\sigma'}(A) = \mathtt{w}$.

8. Existenzquantor:

   $\varphi_\sigma(\exists v\, A) = \mathtt{w}$ gdw es eine v-Variante σ' von σ gibt, sodass $\varphi_{\sigma'}(A) = \mathtt{w}$.

Bemerkung

Negation, Konjunktion, Disjunktion, Implikation und Äquivalenz werden auf ähnliche Weise wie in der Aussagenlogik bewertet.

Lösung zu Übung 10.1.9. In $\mathfrak{I}$ und unter $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ zu bewertende Formeln: Stellen Sie fest, welche der dieser Formeln wahr bzw. falsch gemäß $\varphi_{\sigma_1}, \varphi_{\sigma_2}, \varphi_{\sigma_3}$ sind.

Interpretation: $\mathfrak{I} = \langle \mathbf{D}, \varphi \rangle$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{D} &= \{Barack, Joachim, Joseph\} \\
\varphi(a) &= Barack \quad \varphi(b) = Joachim \quad \varphi(c) = Joseph \\
\varphi(P) &= \{Barack, Joachim\} \\
&= \{d \in \mathbf{D} \mid d \text{ ist Präsident}\} \\
\varphi(M) &= \{Barack, Joachim, Joseph\} \\
&= \{d \in \mathbf{D} \mid d \text{ ist ein Mensch}\} \\
\varphi(Z) &= \{\} = \{d \in \mathbf{D} \mid d \text{ ist eine Zahl}\} \\
\varphi(\ddot{A}) &= \{\langle Joseph, Barack\rangle, \langle Joseph, Joachim\rangle, \\
&\quad \langle Joachim, Barack\rangle\} \\
&= \{\langle d_1, d_2\rangle \in \mathbf{D}^2 \mid d_1 \text{ ist alter als } d_2\}
\end{aligned}
$$

Variablenbelegungen $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ von $\mathfrak{I}$:

$$
\begin{aligned}
\sigma_1 &= Barack, Joachim, Joseph, \dots \\
\sigma_2 &= Joachim, Joachim, Joseph, \dots \\
\sigma_3 &= Joseph, Joachim, Joseph, \dots
\end{aligned}
$$

Vorbemerkung

Zu unseren Variablenbelegungen ist Folgendes zu bemerken.

(i) $\varphi_{\sigma_1}(x) = Barack$, $\varphi_{\sigma_2}(x) = Joachim$, $\varphi_{\sigma_3}(x) = Joseph$.

(ii) $\sigma_i(y) = Joachim$ für $i = 1, 2, 3$.[42]

(iii) $\sigma_i(z) = Joseph$ für $i = 1, 2, 3$.

(iv) Aus (i–iii) folgt, dass σ_1, σ_2 und σ_3 x-Varianten voneinander sind.

(v) Auch aus (i–iii) folgt, dass σ_1, σ_2 und σ_3 keine y- oder z-Varianten voneinander sind.

(vi) Per Definition (siehe S. 254) ist jede von σ_1, σ_2 und σ_3 sowohl eine x-, y- als auch z-Variante ihrer selbst.

42: D.h., $\varphi_{\sigma_1}(y) = \varphi_{\sigma_2}(y) = \varphi_{\sigma_3}(y) = Joachim$.

Mit diesen Informationen im Hinterkopf werden wir jede Formel Schritt für Schritt durchgehen.

Formeln 10–11.

	Formel	φ_{σ_1}	φ_{σ_2}	φ_{σ_3}
10.	$P(a)$	w	w	w
11.	$P(b)$	w	w	w

Erklärung

Es gibt keine freie Variable, der wir mit den Variablenbelegungen $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ ein Objekt aus unserem Gegenstandsbereich $\mathbf{D}$ zuordnen können. Folglich bedeutet ‚$P(a)$' unter allen drei Variablenbelegungen $\varphi_{\sigma_1}, \varphi_{\sigma_2}, \varphi_{\sigma_3}$ dasselbe:

$$Barack \text{ ist Präsident.}$$

Daher erhält diese Formel denselben Wahrheitswert in $\varphi_{\sigma_1}, \varphi_{\sigma_2}, \varphi_{\sigma_3}$. Anders gesagt gilt: $\varphi_{\sigma_i}(P(a)) = \mathtt{w}$ für $i = 1, 2, 3$.

Analog dazu können wir auch zeigen, dass $\varphi_{\sigma_i}(P(b)) = \mathtt{w}$ für $i = 1, 2, 3$.

Formel 12.

	Formel	φ_{σ_1}	φ_{σ_2}	φ_{σ_3}
12.	$P(x)$	w	w	f

Erklärung

‚$P(x)$' hat verschiedene Bedeutungen gemäß $\varphi_{\sigma_1}, \varphi_{\sigma_2}, \varphi_{\sigma_3}$.

- $\varphi_{\sigma_1}(P(x)) = \mathtt{w}$, denn $\varphi_{\sigma_1}(x) = Barack$ und $Barack$ ist Präsident – d.h., $Barack \in \varphi(P)$.
- $\varphi_{\sigma_2}(P(x)) = \mathtt{w}$, denn $\varphi_{\sigma_2}(x) = Joachim$ und $Joachim$ ist Präsident – d.h., $Joachim \in \varphi(P)$.
- $\varphi_{\sigma_3}(P(x)) = \mathtt{f}$, denn $\varphi_{\sigma_3}(x) = Joseph$ und $Joseph$ ist *nicht* Präsident – d.h., $Joseph \notin \varphi(P)$.

Formeln 13–16.

	Formel	φ_{σ_1}	φ_{σ_2}	φ_{σ_3}
13.	$M(c)$	w	w	w
14.	$M(x)$	w	w	w
15.	$Z(a)$	f	f	f
16.	$Z(x)$	f	f	f

Erklärung

‚$\varphi_{\sigma_i}(M(c)) = \varphi_{\sigma_i}(M(x)) = \mathtt{w}$' und ‚$\varphi_{\sigma_i}(Z(a)) = \varphi_{\sigma_i}(Z(x)) = \mathtt{f}$' für $i = 1, 2, 3$ gelten, jedoch aus unterschiedlichen Gründen.

‚$\varphi_{\sigma_i}(M(c)) = \mathtt{w}$' und ‚$\varphi_{\sigma_i}(Z(a)) = \mathtt{f}$' gelten für $i = 1, 2, 3$, denn:

$$\varphi(M(c)) = \mathtt{w} \quad \text{und} \quad \varphi(Z(a)) = \mathtt{f}.$$

Dies trifft jedoch nicht auf ‚$M(x)$' oder ‚$Z(x)$' zu. ‚$\varphi(M(x))$' und ‚$\varphi(Z(x))$' sind ohne eine Variablenzuweisung unter $\mathfrak{I}$ nicht wahr oder falsch. Denn ‚$M(x)$' und ‚$Z(x)$' sind offene Formeln, in denen ‚x' unter φ nicht interpretiert wird.

$\varphi_{\sigma_i}(M(x)) = \mathtt{w}$ für $i = 1, 2, 3$, denn:

- $\varphi_{\sigma_1}(M(x)) = \mathtt{w}$ – weil $\varphi_{\sigma_1}(x) = \mathit{Barack}$ und Barack ein Mensch ist.
- $\varphi_{\sigma_2}(M(x)) = \mathtt{w}$ – weil $\varphi_{\sigma_2}(x) = \mathit{Joachim}$ und $\mathit{Joachim}$ ein Mensch ist.
- $\varphi_{\sigma_3}(M(x)) = \mathtt{w}$ – weil $\varphi_{\sigma_3}(x) = \mathit{Joseph}$ und Joseph ein Mensch ist.

Formeln 17–20.

	Formel	φ_{σ_1}	φ_{σ_2}	φ_{σ_3}
17.	$\ddot{A}(a,b)$	f	f	f
18.	$\ddot{A}(y,a)$	w	w	w
19.a	$P(c)$	f	f	f
19.	$\neg P(c)$	w	w	w
16.	$Z(x)$	f	f	f
20.	$\neg Z(x)$	w	w	w

Erklärung zu 17

Da $Barack$ nicht älter als $Joachim$ ist, folgt, dass $\varphi(\ddot{A}(a,b)) = \mathtt{f}$. Folglich $\varphi_{\sigma_i}(\ddot{A}(a,b)) = \mathtt{f}$ für $i = 1,2,3$.

Erklärung zu 18

Da $\sigma_i(y) = Joachim$ für $i = 1,2,3$, folgt, dass $\varphi_{\sigma_i}(\ddot{A}(y,a)) = \mathtt{w}$ auch für $i = 1,2,3$ – weil $Joseph$ älter als $Barack$ ist.

Erklärung zu 19 und 20

Die Wahrheitswerte der Formel 19 (unter jedem φ_i) ergeben sich aus der Negation der Wahrheitswerte der entsprechenden Spalten der Formel 19.a.

Bei der Analyse dieser Formel (und Formel 20) sind wir analog zur Vorgehensweise bei einer Wahrheitstabelle vorgegangen.

Formel 21.

	Formel	φ_{σ_1}	φ_{σ_2}	φ_{σ_3}
21.a	$\ddot{A}(c,b)$	w	w	w
12.	$P(x)$	w	w	f
21.b	$\neg P(x)$	f	f	w
21.	$\ddot{A}(c,b) \wedge \neg P(x)$	f	f	w

Erklärung

Wie oben haben wir auch hier die Vorgehensweise einer Wahrheitstabelle angewendet, wobei wir eine Konjunktion analysiert haben.

Formel 22.

	Formel	φ_{σ_1}	φ_{σ_2}	φ_{σ_3}
14.	$M(x)$	w	w	w
22.	$\forall x\, M(x)$	w	w	w

Erklärung

$\varphi_{\sigma_1}(\forall x\, M(x)) = \mathtt{w}$, denn:

- σ_1 ist eine x-Variante von σ_1, $\varphi_{\sigma_1}(x) = \mathit{Barack}$ und $\varphi_{\sigma_1}(M(x)) = \mathtt{w}$ – weil Barack ein Mensch ist.
- σ_2 ist eine x-Variante von σ_1, $\varphi_{\sigma_2}(x) = \mathit{Joachim}$ und $\varphi_{\sigma_1}(M(x)) = \mathtt{w}$ – weil $\mathit{Joachim}$ ein Mensch ist.
- σ_3 ist eine x-Variante von σ_1, $\varphi_{\sigma_3}(x) = \mathit{Joseph}$ und $\varphi_{\sigma_1}(M(x)) = \mathtt{w}$ – weil Joseph ein Mensch ist.
- Da der Gegenstandsbereich **D** nur aus $\mathit{Barack}, \mathit{Joachim}$ und Joseph besteht, folgt für alle möglichen x-Varianten σ'_1 von σ_1, dass $\varphi_{\sigma'_1}(M(x)) = \mathtt{w}$.

Mit derselben Denkweise können wir ebenso zeigen, dass dies auch für σ_2, σ_3 und jede beliebige σ_i gilt. Daher ist auch $\varphi(\forall x\, M(x)) = \mathtt{w}$.

Bemerkung

Hätte der Gegenstandsbereich **D** ein Tier, z.B. Lassie, dann wäre es möglich, die folgende x-Variante von σ_1 zu definieren:

$$\sigma'_1 = \mathit{Lassie}, \mathit{Joachim}, \mathit{Joseph}, \ldots$$

D.h., eine x-Variante σ'_1 von σ_1, sodass $\varphi_{\sigma'_1}(x) = \mathit{Lassie}$.

Folglich wäre $\varphi_{\sigma_1}(\forall x\, M(x)) = \mathtt{f}$ gewesen, denn:

- σ'_1 ist eine x-Variante von σ_1, $\sigma'_1 = \mathit{Lassie}$ und $\varphi_{\sigma'_1}(M(x)) = \mathtt{f}$ – weil Lassie kein Mensch ist.

Formel 23.

	Formel	φ_{σ_1}	φ_{σ_2}	φ_{σ_3}
12.	$P(x)$	w	w	f
23.a	$\forall x\, P(x)$	f	f	f
23.	$\neg\forall x\, P(x)$	w	w	w

Erklärung zu 23.a

$\varphi_{\sigma_1}(\forall x\, M(x)) = \mathtt{f} \neq \mathtt{w}$, weil nicht alle möglichen x-Varianten σ_1' von σ_1 sind, sodass $\varphi_{\sigma_1'}(M(x)) = \mathtt{w}$. Zum Beispiel:

- σ_3 ist eine x-Variante von σ_1, $\varphi_{\sigma_3}(x) = Joseph$ und $\varphi_{\sigma_3}(M(x)) = \mathtt{f} \neq \mathtt{w}$ – weil $Joseph$ kein Präsident ist.

Mit derselben Denkweise können wir ebenso zeigen, dass dies auch für σ_2, σ_3 und jede beliebige σ_i gilt. Daher ist auch $\varphi(\forall x\, M(x)) = \mathtt{f}$.

Erklärung zu 23

$\varphi_{\sigma_i}(\neg\forall x\, M(x)) = \mathtt{w}$ für $i = 1, 2, 3$ und $\varphi(\neg\forall x\, M(x)) = \mathtt{w}$, denn ‚$\neg\forall x\, M(x)$‘ ist die Verneinung von ‚$\forall x\, M(x)$‘ und $\varphi_{\sigma_i}(\forall x\, M(x)) = \varphi(\forall x\, M(x)) = \mathtt{f}$ für $i = 1, 2, 3$.

Formeln 24–25.

	Formel	φ_{σ_1}	φ_{σ_2}	φ_{σ_3}
16.	$Z(x)$	f	f	f
24.	$\exists y\, Z(y)$	f	f	f
12.	$P(x)$	w	w	f
25.	$\exists x\, P(x)$	w	w	w

Erklärung

$\varphi_{\sigma_1}(\exists y\, Z(y)) = \mathtt{f} \neq \mathtt{w}$, weil es keine mögliche y-Variante σ_1' von σ_1 gibt, sodass $\varphi_{\sigma_1'}(Z(y)) = \mathtt{w}$. Mit anderen Worten:

- σ_1 ist eine y-Variante von σ_1, $\varphi_{\sigma_1}(y) = \mathit{Joachim}$ und $\varphi_{\sigma_1}(Z(y)) = \mathtt{f}$ – weil $\mathit{Joachim}$ keine Zahl ist.
- σ_2 ist eine y-Variante von σ_1, $\varphi_{\sigma_2}(y) = \mathit{Joachim}$ und $\varphi_{\sigma_2}(Z(y)) = \mathtt{f}$ – weil $\mathit{Joachim}$ keine Zahl ist.
- σ_3 ist eine y-Variante von σ_1, $\varphi_{\sigma_3}(y) = \mathit{Joachim}$ und $\varphi_{\sigma_3}(Z(y)) = \mathtt{f}$ – weil $\mathit{Joachim}$ keine Zahl ist.
- Da der Gegenstandsbereich **D** nur aus Barack, $\mathit{Joachim}$, Joseph besteht, folgt für alle möglichen y-Varianten σ_1' von σ_1, dass $\varphi_{\sigma_1'}(Z(y)) = \mathtt{f}$.

Mit derselben Denkweise können wir ebenso zeigen, dass dies auch für σ_2, σ_3 und jede beliebige σ unter $\mathfrak{I}$ gilt (nicht nur für σ_i mit $i = 1, 2, 3$). Daher ist auch $\varphi(\exists y\, Z(y)) = \mathtt{f} \neq \mathtt{w}$.

Bemerkung

Hätte der Gegenstandsbereich **D** eine Zahl, z.B. 1, dann wäre es möglich, die folgende y-Variante von σ_1 zu definieren:

$$\sigma_1' = \mathit{Barack}, 1, \mathit{Joseph}, \ldots$$

D.h., eine y-Variante σ_1' von σ_1, sodass $\varphi_{\sigma'}(y) = 1$.

Folglich wäre $\varphi_{\sigma_1}(\exists y\, Z(y)) = \mathtt{w}$ gewesen, denn:

- σ_1' ist eine y-Variante von σ_1, $\varphi_{\sigma_1'}(y) = 1$ und $\varphi_{\sigma_1'}(Z(y)) = \mathtt{w}$ – weil 1 eine Zahl ist.

Mit demselben Verfahren können wir ebenso zeigen, ohne unser Gegenstandsbereich **D** zu erweitern, dass $\varphi(\exists x\, P(x)) = \mathtt{w}$.

Formel 26.

	Formel	φ_{σ_1}	φ_{σ_2}	φ_{σ_3}
19.a	$P(c)$	f	f	f
23.	$\neg\forall x\, P(x)$	w	w	w
26.	$\neg\forall x\, P(x) \vee P(c)$	w	w	w

Erklärung

Wie zuvor haben wir auch hier die Vorgehensweise einer Wahrheitstabelle angewendet, wobei wir eine Disjunktion analysiert haben.

Formel 27.

	Formel	φ_{σ_1}	φ_{σ_2}	φ_{σ_3}
27.a	$\ddot{A}(b, a)$	w	w	w
12.	$P(x)$	w	w	f
16.	$Z(x$	f	f	f
27.b	$P(x) \wedge Z(x)$	f	f	f
27.c	$\exists x\, (P(x) \wedge Z(x))$	f	f	f
27.	$\ddot{A}(b, a) \longrightarrow \exists x\, (P(x) \wedge Z(x))$	f	f	f

Erklärung zu 27.a

$\varphi(\ddot{A}(b, a)) =$ w, denn $Joachim$ ist älter als $Barack$ – d.h., denn $\langle Joachim, Barack \rangle \in \varphi(\ddot{A})$. Folglich, ist $\varphi_{\sigma_i}(\ddot{A}(b, a)) =$ w für $i = 1, 2, 3$.

Erklärung zu 27.c

$\varphi_{\sigma_1}(\exists x\,(P(x) \wedge Z(x))) = \mathtt{f}$, weil es keine mögliche x-Variante σ_1' von σ_1 gibt, sodass $\varphi_{\sigma_1'}(P(x) \wedge Z(x)) = \mathtt{w}$. Mit anderen Worten:

- σ_1 ist eine x-Variante von σ_1, $\varphi_{\sigma_1}(x) = \mathit{Barack}$ und $\varphi_{\sigma_1}(P(x) \wedge Z(x)) = \mathtt{f}$ – weil Barack nicht sowohl eine Person als auch eine Zahl ist.
- σ_2 ist eine x-Variante von σ_1, $\varphi_{\sigma_2}(x) = \mathit{Joachim}$ und $\varphi_{\sigma_2}(P(x) \wedge Z(x)) = \mathtt{f}$ – weil $\mathit{Joachim}$ nicht sowohl eine Person als auch eine Zahl ist.
- σ_3 ist eine x-Variante von σ_1, $\varphi_{\sigma_3}(x) = \mathit{Joseph}$ und $\varphi_{\sigma_3}(P(x) \wedge Z(x)) = \mathtt{f}$ – weil Joseph nicht sowohl eine Person als auch eine Zahl ist.
- Da der Gegenstandsbereich **D** nur aus $\mathit{Barack}, \mathit{Joachim}, \mathit{Joseph}$ besteht, folgt für alle möglichen X-Varianten σ_1' von σ_1, dass $\varphi_{\sigma_1'}(P(x) \wedge Z(x)) = \mathtt{f}$.

Mit derselben Denkweise können wir ebenso zeigen, dass dies auch für σ_2, σ_3 und jede beliebige σ_i gilt (nicht nur für $i = 1, 2, 3$). Daher ist auch $\varphi(P(x) \wedge Z(x)) = \mathtt{f}$.

Erklärung zu 27.b und 27

Wie zuvor haben wir das Verfahren einer Wahrheitstabelle verwendet, in diesem Fall zur Analyse einer Konjunktion bzw. Implikation.

Frage zu 27

Ist es möglich, unseren Gegenstandsbereich **D** so zu erweitern, dass $\varphi(P(x) \wedge Z(x)) = \mathtt{w}$?

Antwort

Im Prinzip ja. Wir könnten $\mathit{Herrn\ Eins}$ und $\mathit{Frau\ Zwei}$ zu unserem Gegenstandsbereich **D** hinzufügen und φ so modifizieren, dass:

$$\mathit{Herr\ Eins}, \mathit{Frau\ Zwei} \in \varphi(P) \text{ und}$$
$$\mathit{Herr\ Eins}, \mathit{Frau\ Zwei} \in \varphi(Z).$$

Es würde jedoch kaum Sinn ergeben zu sagen, dass etwas zugleich eine Person und eine Zahl ist – es sei denn, wir befinden uns in einer fiktiven Welt wie der von Edwin A. Abbott's *Flatland*.

Formel 28.

	Formel	φ_{σ_1}	φ_{σ_2}	φ_{σ_3}
	$\ddot{A}(x,y)$	f	f	w
28.a	$\exists y\, \ddot{A}(x,y)$	f	w	w
28.	$\forall x\, \exists y\, \ddot{A}(x,y)$	f	f	f

Vorbemerkung

Schauen wir uns an, wie jeder $\varphi_{\sigma_1}, \varphi_{\sigma_2}, \varphi_{\sigma_3}$ die Formel ‚$\ddot{A}(x,y)$' bewertet.

- $\varphi_{\sigma_1}(\ddot{A}(x,y)) = \texttt{f}$, denn $\varphi_{\sigma_1}(x) = Barack$, $\varphi_{\sigma_1}(y) = Joachim$ und $Barack$ ist nicht älter als $Joachim$ – d.h., $\langle Barack, Joachim\rangle \notin \varphi(\ddot{A})$.
- $\varphi_{\sigma_2}(\ddot{A}(x,y)) = \texttt{f}$, denn $\varphi_{\sigma_2}(x) = Joachim$, $\varphi_{\sigma_2}(y) = Joachim$ und $Joachim$ ist nicht älter als $Joachim$ – d.h., $\langle Joachim, Joachim\rangle \notin \varphi(\ddot{A})$.
- $\varphi_{\sigma_3}(\ddot{A}(x,y)) = \texttt{w}$, denn $\varphi_{\sigma_3}(x) = Joseph$, $\varphi_{\sigma_3}(y) = Joachim$ und $Joseph$ ist älter als $Joachim$ – d.h., $\langle Joseph, Joachim\rangle \in \varphi(\ddot{A})$.

Erklärung zu 28.a

Lass uns jede $\varphi_{\sigma_1}, \varphi_{\sigma_2}, \varphi_{\sigma_3}$ analysieren.

- $\varphi_{\sigma_1}(\exists y\, \ddot{A}(x,y)) = \texttt{f}$, denn es gibt keine y-Variante σ'_1 von σ_1, sodass $\varphi_{\sigma'_1}(\ddot{A}(x,y)) = \texttt{w}$ – weil $\varphi_{\sigma_1}(x) = Barack$ und $Barack$ älter als keiner im Gegenstandsbereich **D** ist.[43]
- $\varphi_{\sigma_2}(\exists y\, \ddot{A}(x,y)) = \texttt{w}$, denn es gibt eine y-Variante σ'_2 von σ_2, sodass $\varphi_{\sigma'_2}(\ddot{A}(x,y))) = \texttt{w}$.

  Eine solche y-Variante σ'_2 kann wie folgt definiert werden:

  $$\sigma'_2 = Joachim, Barack, Joseph, \ldots$$

  D.h., als eine y-Variante σ'_2 von σ_2, sodass $\varphi_{\sigma'_2}(y) = Barack$. Damit gilt $\varphi_{\sigma'_2}(\ddot{A}(x,y)) = \texttt{w}$, denn $\varphi_{\sigma'_2}(x) = Joachim$, $\varphi_{\sigma'_2}(y) = Barack$ und $Joachim$ ist älter als $Barack$ – d.h., $\langle Joachim, Barack\rangle \in \varphi(\ddot{A})$.
- $\varphi_{\sigma_3}(\exists y\, \ddot{A}(x,y)) = \texttt{w}$, denn es gibt mindestens eine y-Variante σ'_3 von σ_3[44], sodass $\varphi_{\sigma'_3}(\ddot{A}(x,y)) = \texttt{w}$.

43: **Bemerkung:** Die Tatsache, dass $\varphi_{\sigma_1}(x) = Barack$, spielt eine zentrale Rolle: σ_1 und alle seine y-Varianten σ'_1 belegen $Barack$ mit ‚x'. Die Belegung von ‚x' ändert sich nicht, weil σ'_1 in diesem Fall eine y-Variante und keine x-Variante ist. Diese Zuordnung zu ‚x' ist notwendig, damit φ_{σ_1} und $\varphi_{\sigma'_1}$ der Aussage ‚$\ddot{A}(x,y)$' einen Wahrheitswert zuweisen können.

44: **Zum Beispiel:** σ_3 selbst.

Erklärung zu 28

$\varphi_{\sigma_1}(\forall x\, \exists y\, \ddot{A}(x,y)) = \texttt{f}$, denn nicht alle möglichen x-Varianten σ'_1 von σ_1 sind, sodass $\varphi_{\sigma'_1}(\exists y\, \ddot{A}(x,y)) = \texttt{w}$.[45]

Mit derselben Denkweise können wir ebenso zeigen, dass dies auch für σ_2, σ_3 und jede beliebige σ_i gilt (nicht nur für $i = 1, 2, 3$). Daher ist auch $\varphi(\forall x\, \exists y\, \ddot{A}(x,y)) = \texttt{f}$.

45: **Zum Beispiel:** σ_1 ist eine x-Variante von σ_1 und $\varphi_{\sigma_1}(\exists y\, \ddot{A}(x,y)) = \texttt{f}$ – denn $Barack$ ist nicht älter als alle anderen.

Formel 29

	Formel	φ_{σ_1}	φ_{σ_2}	φ_{σ_3}
	$\ddot{A}(x,y)$	f	f	w
29.a	$\forall y\,\ddot{A}(x,y)$	f	f	f
29.	$\exists x\,\forall y\,\ddot{A}(x,y)$	f	f	f

Erklärung zu 29.a

$\varphi_{\sigma_1}(\forall y\,\ddot{A}(x,y)) = \texttt{f}$, denn nicht alle möglichen y-Varianten σ_1' von σ_1 sind, sodass $\varphi_{\sigma_1'}(\ddot{A}(x,y)) = \texttt{w}$. Zum Beispiel: σ_1 ist eine y-Variante von σ_1 und $\varphi_{\sigma_1}(\ddot{A}(x,y)) = \texttt{f}$.

Mit derselben Denkweise können wir ebenso zeigen, dass dies auch für σ_2, σ_3 und jede beliebige σ_i gilt (nicht nur für $i = 1, 2, 3$).

Frage zu 29.a

Es scheint, als ob $Joseph$ der Älteste im Gegenstandsbereich **D** ist. Da $\varphi_{\sigma_3}(x) = Joseph$, warum gilt dann nicht $\varphi_{\sigma_3}(\forall y\,\ddot{A}(x,y)) = \texttt{w}$? Mit anderen Worten, warum ist ‚$Joseph$ ist älter als jeder' nicht wahr gemäß φ_{σ_3}?

Antwort

Wenn $\varphi_{\sigma_3}(\forall y\,\ddot{A}(x,y)) = \texttt{w}$ wäre, müsste $\varphi_{\sigma_3'}(\ddot{A}(x,y)) = \texttt{w}$ für alle y-Varianten σ_3' von σ_3 gelten. Sei eine solche σ_3' wie folgt definiert:

$$\sigma_3' = Joseph, Joseph, Joseph, \ldots$$

D.h., eine y-Variante σ_3' von σ_3, sodass $\varphi_{\sigma_3'}(y) = Joseph$.

Dann wäre $\varphi_{\sigma_3'}(\ddot{A}(x,y)) = \texttt{w}$, d.h., $Joseph$ wäre älter als $Joseph$ selbst, da $\varphi_{\sigma_3'}(x) = \varphi_{\sigma_3'}(y) = Joseph$. Dies widerspricht jedoch, dass $\langle Joseph, Joseph\rangle \notin \varphi(\ddot{A})$ – d.h., dass $Joseph$ nicht älter als sich selbst ist. Folglich $\varphi_{\sigma_3}(\forall y\,\ddot{A}(x,y)) \neq \texttt{w}$.

Erklärung zu 29

$\varphi_{\sigma_1}(\exists x\,\forall y\,\ddot{A}(x,y)) = \texttt{f}$, denn es keine mögliche y-Variante σ_1' von σ_1 gibt, sodass $\varphi_{\sigma_1'}(\forall y\,\ddot{A}(x,y)) = \texttt{w}$.

Andernfalls gäbe es einen Menschen, der älter ist als jeder, auch als er selbst.

Mit derselben Denkweise können wir ebenso zeigen, dass dies auch für σ_2, σ_3 und jede beliebige σ_i gilt (nicht nur für $i = 1, 2, 3$). Daher ist auch $\varphi(\exists x\,\forall y\,\ddot{A}(x,y)) = \texttt{f}$.

Übung 10.1.10.

1. Denken Sie sich drei weitere Variablenbelegungen aus und bewerten Sie die Formel 30.

Es seien die Variablenbelegungen:

$$\sigma_1 = Barack, Joachim, Joseph, \ldots$$
$$\sigma_2 = Joachim, Joachim, Joseph, \ldots$$
$$\sigma_3 = Joseph, Joachim, Joseph, \ldots$$
$$\sigma_4 = Joseph, Joachim, Barack, \ldots$$
$$\sigma_5 = Barack, Joseph, Joachim, \ldots$$
$$\sigma_6 = Joachim, Barack, Joseph, \ldots$$

Formel 30.

	Formel	φ_{σ_1}	φ_{σ_2}	φ_{σ_3}	φ_{σ_4}	φ_{σ_5}	φ_{σ_6}
30.a	$\ddot{A}(y,x)$	w	f	f	f	w	f
30.b	$\ddot{A}(z,y)$	w	w	w	f	f	w
30.c	$\ddot{A}(y,x) \wedge \ddot{A}(z,y)$	w	f	f	f	f	f
30.d	$\ddot{A}(z,x)$	w	w	f	f	w	w
30.	$\ddot{A}(y,x) \wedge \ddot{A}(z,y) \longrightarrow \ddot{A}(z,x)$	w	w	w	w	w	w

Erklärung

Beachten Sie, dass die erste zu bewertende Formel ‚$\ddot{A}(y,x)$' und nicht ‚$\ddot{A}(x,y)$' ist, wobei das Paar $\langle x,y\rangle$ als $\langle y,x\rangle$ umgedreht wird. Daher können die Bewertungen $\varphi_{\sigma_i}(\ddot{A}(y,x))$ anders ausfallen als bei $\varphi_{\sigma_i}(\ddot{A}(x,y))$ für einige i.

2. Ist die Formel 30 wahr in $\mathfrak{I}$ unabhängig von der Wahl der Variablenbelegung?

Bemerkung: Um einen informellen Beweis in der Metasprache zu konstruieren, sehen Sie noch einmal die Sektion 5.1.3.

Antwort

Obwohl unsere Formel gemäß allen sechs φ_{σ_i} (für $i = 1, \ldots, 6$) wahr ist, reicht dies nicht aus, um zu zeigen, dass sie in $\mathfrak{I}$ unabhängig von der Wahl der Variablenbelegung gilt. Um dies zu zeigen, müssen wir beweisen, dass sie in einer beliebigen φ_{σ_i} wahr ist, und nicht nur für $i = 1, \ldots, 6$. Wir tun dies mit einem informellen Beweis wie dem folgenden.

Beweis. Um zu zeigen, dass $\varphi_\sigma(\ddot{A}(y,x) \wedge \ddot{A}(z,y) \rightarrow \ddot{A}(z,x)) = \mathtt{w}$ in $\mathfrak{I}$ unabhängig von der Wahl der σ gilt, müssen wir zeigen (nach Def. 19.5), dass $\varphi_\sigma(\ddot{A}(y,x) \wedge \ddot{A}(z,y)) = \mathtt{f}$ oder $\varphi_\sigma(\ddot{A}(z,x)) = \mathtt{w}$ für beliebige σ gilt.

Sei σ beliebig und zeigen wir dies in den beiden sich gegenseitig ausschließenden und erschöpfenden Fällen:

(i) $\varphi_\sigma(\ddot{A}(y,x) \wedge \ddot{A}(z,y)) = \mathtt{w}$ und $\varphi_\sigma(\ddot{A}(y,x) \wedge \ddot{A}(z,y)) = \mathtt{f}$.

Fall (i) Sei $\varphi_\sigma(\ddot{A}(y,x) \wedge \ddot{A}(z,y)) = \mathtt{w}$. Daraus folgt nach Def. 19.3, dass $\varphi_\sigma(\ddot{A}(y,x)) = \mathtt{w}$ und $\ddot{A}(z,y)) = \mathtt{w}$.

Beachten Sie, dass σ so sein muss, dass $\varphi_\sigma(x) = \mathit{Barack}$, $\varphi_\sigma(y) = \mathit{Joachim}$ und $\varphi_\sigma(z) = \mathit{Joseph}$. Andernfalls wäre entweder $\varphi_\sigma(\ddot{A}(y,x)) = \mathtt{f}$ oder $\varphi_\sigma(\ddot{A}(z,y)) = \mathtt{f}$.[46] Da $\langle \mathit{Joseph}, \mathit{Barack} \rangle \in \varphi(\ddot{A})$, ergibt sich unter σ (nach Def. 19.1), dass $\varphi_\sigma(\ddot{A}(z,x)) = \mathtt{w}$. Folglich ist $\varphi_\sigma(\ddot{A}(y,x) \wedge \ddot{A}(z,y)) = \mathtt{f}$ oder $\varphi_\sigma(\ddot{A}(z,x)) = \mathtt{w}$.

46: Sie können die anderen möglichen Kombinationen der Belegungen $\varphi_\sigma(x), \varphi_\sigma(y), \varphi_\sigma(z)$ ausprobieren.

Fall (ii) Sei $\varphi_\sigma(\ddot{A}(y,x) \wedge \ddot{A}(z,y)) = \mathtt{f}$. Dann ist $\varphi_\sigma(\ddot{A}(y,x) \wedge \ddot{A}(z,y)) = \mathtt{f}$ oder $\varphi_\sigma(\ddot{A}(z,x)) = \mathtt{w}$.

In den beiden sich gegenseitig ausschließenden und erschöpfenden Fällen (i) und (ii) haben wir gezeigt, dass $\varphi_\sigma(\ddot{A}(y,x) \wedge \ddot{A}(z,y)) = \mathtt{f}$ oder $\varphi_\sigma(\ddot{A}(z,x)) = \mathtt{w}$. Daher ist $\varphi_\sigma(\ddot{A}(y,x) \wedge \ddot{A}(z,y)) = \mathtt{f}$ oder $\varphi_\sigma(\ddot{A}(z,x)) = \mathtt{w}$. Das war zu zeigen. $\square$

3. Stellen Sie fest, welche der oben vorkommenden *geschlossenen* Formeln wahr bzw. falsch gemäß φ (d.h., in $\mathfrak{I}$) sind.

Antwort: oben in Übung 10.1.9.

Lösung zu Übung 10.2. Überprüfen Sie die folgenden Formeln auf logische Wahrheit, logische Falschheit, bzw. Kontingenz. Argumentieren Sie für das Vorliegen von logischer Wahrheit/Falschheit auf Basis der semantischen Regeln, für das Vorliegen von Kontingenz jedoch durch Angabe von passenden Interpretationen (und Variablenbelegungen).

Definition:

Um die Kontingenz einer Formel begründen, werden wir vor allem die folgenden Mengen berücksichtigen.

$$\begin{aligned}
\mathbf{U} &= \{Carlos, Denny, George, Henry,\\
&\quad\; Héctor, John, Linda, Luis, Paul, Ringo\}.\\
\mathbf{B} &= \{d \in \mathbf{U} \mid d \text{ ist ein Mitglied von The Beatles}\}\\
&= \{George, John, Paul, Ringo\};\\
\mathbf{W} &= \{d \in \mathbf{U} \mid d \text{ ist ein Mitglied von Wings}\}\\
&= \{Denny, Henry, Linda, Paul\};\\
\mathbf{I} &= \{d \in \mathbf{U} \mid d \text{ ist ein Mitglied von Invisible}\}\\
&= \{Carlos, Héctor, Luis\}.
\end{aligned}$$

1. $M(x) \vee G(c)$ kontingent

Beispiel

Sei $\mathfrak{I} = \langle \varphi, \mathbf{D} \rangle$ mit:

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \mathbf{U}, \\ \varphi(c) &= \mathit{Paul}, \\ \varphi(G) &= \{d \in \mathbf{D} \mid d \text{ ist ein Mitglied von The Beatles}\} = \mathbf{B}, \\ \varphi(M) &= \{d \in \mathbf{D} \mid d \text{ ist ein Mitglied von Wings}\} = \mathbf{W}. \end{aligned}$$

Um zu zeigen, dass $\varphi_\sigma(M(x) \vee G(c)) = \mathtt{w}$ für beliebige σ unter $\mathfrak{I}$ gilt, müssen wir (nach Def. 19.4) zeigen, dass:

$$\varphi_\sigma(M(x)) = \mathtt{w} \quad \text{oder} \quad \varphi_\sigma(G(c)) = \mathtt{w}.$$

Wir zeigen, dass $\varphi_\sigma(G(c)) = \mathtt{w}$.

Dies folgt (nach Def. 19.1) daraus, dass $\mathit{Paul} \in \varphi(G)$ – d.h., dass Paul ein Mitglied von The Beatles ist.

Gegenbeispiel

Sei $\mathfrak{I} = \langle \varphi, \mathbf{D} \rangle$ mit:

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \mathbf{I} = \{\mathit{Carlos}, \mathit{Héctor}, \mathit{Luis}\}, \\ \varphi(c) &= \mathit{Luis}, \\ \varphi(G) &= \{d \in \mathbf{D} \mid d \text{ ist ein Mitglied von The Beatles}\} = \{\}, \\ \varphi(M) &= \{d \in \mathbf{D} \mid d \text{ ist ein Mitglied von Wings}\} = \{\}. \end{aligned}$$

Um zu zeigen, dass $\varphi_\sigma(M(x) \vee G(c)) = \mathtt{f}$ für beliebige σ unter $\mathfrak{I}$ gilt, müssen wir (nach Def. 19.4) zeigen, dass:

$$\text{(i) } \varphi_\sigma(M(x)) = \mathtt{f} \quad \text{und} \quad \text{(ii) } \varphi_\sigma(G(c)) = \mathtt{f}.$$

Beachte, dass es kein $d \in \mathbf{D}$ gibt, sodass $d \in \varphi(M(x))$. Dann gilt (nach Def. 19.1) für unsere beliebige σ, dass $\varphi_\sigma(M(x)) = \mathtt{f}$. Damit ist (i) gezeigt.

Ebenso ist (nach Def. 19.1) $\varphi_\sigma(G(c)) = \mathtt{f}$, denn $\mathit{Luis} \notin \varphi(G)$ (d.h., Luis ist kein Mitglied von The Beatles). Damit ist (ii) gezeigt.

Das war zu zeigen.

Bemerkung: Beachte, dass $\varphi(G)$ und $\varphi(M)$ im Gegenbeispiel leer sind, obwohl sie ähnlich wie **B** und **W** definiert sind. Der Grund dafür ist, dass **B** und **W** in Bezug auf **U** definiert sind, während $\varphi(G)$ und $\varphi(M)$ nur in Bezug auf **I** definiert sind, das keine Schnittmenge mit **B** oder **W** hat.

2. $\exists y\,(G(y) \land \neg G(y))$ logisch falsch

Beweis. Um zu zeigen, dass $\varphi_\sigma(\exists y\,(G(y) \land \neg G(y))) = \mathtt{f}$ für beliebig $\mathfrak{I} = \langle \mathbf{D}, \varphi \rangle$ und σ (unter $\mathfrak{I}$) gilt, müssen wir zeigen (nach Def. 19.8), dass:

für alle y-Varianten σ' von σ unter $\mathfrak{I}$: $\varphi_{\sigma'}(G(y) \land \neg G(y)) = \mathtt{f}$.

Seien $\mathfrak{I} = \langle \mathbf{D}, \varphi \rangle$ und σ beliebig und nehmen wir an, dass $\varphi_{\sigma'}(G(y) \land \neg G(y)) = \mathtt{w}$.

Dies bedeutet (nach Def. 19.3), dass $\varphi_{\sigma'}(G(y)) = \mathtt{w}$ und $\varphi_{\sigma'}(\neg G(y)) = \mathtt{w}$. Daher muss es ein $d \in \mathbf{D}$ geben, sodass $d \in \varphi(G)$ und $d \notin \varphi(G)$: ein Widerspruch!

Da unsere Annahme zu einem Widerspruch führt, ist sie falsch. Folglich ist $\varphi_{\sigma'}(G(y) \land \neg G(y)) \neq \mathtt{w}$ und ist $\varphi_\sigma(\exists y\,(G(y) \land \neg G(y))) = \mathtt{f}$. Das war zu zeigen. □

3. $\forall x\,(P(x) \to \neg P(x))$ kontingent

Beispiel

Sei $\mathfrak{I} = \langle \varphi, \mathbf{D} \rangle$ mit:

$$\mathbf{D} = \mathbf{B} = \{George, John, Paul, Ringo\},$$
$$\varphi(P) = \{d \in \mathbf{D} \mid d \text{ ist ein Mitglied von Invisible}\} = \{\}.$$

Um zu zeigen, dass $\varphi_\sigma(\forall x\,(P(x) \to \neg P(x))) = \mathtt{w}$ für beliebige σ unter $\mathfrak{I}$ gilt, müssen wir (nach Def. 19.7) zeigen, dass für alle x-Varianten σ' von σ unter $\mathfrak{I}$ gilt: $\varphi_{\sigma'}(P(x) \to \neg P(x)) = \mathtt{w}$. Dies gilt (nach Def. 19.5) gdw:

$$\varphi_{\sigma'}(P(x)) = \mathtt{f} \quad \text{oder} \quad \varphi_{\sigma'}(\neg P(x)) = \mathtt{w}.$$

Wir zeigen, dass: $\varphi_{\sigma'}(P(x)) = \mathtt{f}$.

Kein Mitglied von The Beatles ist ein Mitglied von Invisible. Das bedeutet, dass für alle $d \in \mathbf{D} = \mathbf{B}$ gilt: $d \in \varphi(P)$. Daraus folgt, (nach Def. 19.1), dass $\varphi_{\sigma'}(P(x)) = \mathtt{f}$ unabhängig von der σ'. Das war zu zeigen.

Gegenbeispiel

Sei $\mathfrak{I} = \langle \varphi, \mathbf{D} \rangle$ mit:

$$\mathbf{D} = \mathbf{B} = \{George, John, Paul, Ringo\},$$
$$\varphi(P) = \{d \in \mathbf{D} \mid d \text{ ist ein Mitglied von Wings}\} = \{Paul\}.$$

Um zu zeigen, dass $\varphi_\sigma(\forall x\,(P(x) \to \neg P(x))) = \mathtt{f}$ für beliebige σ unter $\mathfrak{I}$ gilt, müssen wir (nach Def. 19.7) eine x-Variante σ' von σ unter $\mathfrak{I}$ finden, sodass $\varphi_{\sigma'}(P(x) \to \neg P(x)) = \mathtt{f}$. Dies gilt (nach Def. 19.5) gdw:

$$\text{(i) } \varphi_{\sigma'}(P(x)) = \mathtt{w} \quad \text{und} \quad \text{(ii) } \varphi_{\sigma'}(\neg P(x)) = \mathtt{f}.$$

Wählen wir $\sigma' = Paul, \ldots$. (Also $\varphi_{\sigma'}(x) = Paul$.)

Dann gilt (nach Def. 19.1), dass $\varphi_{\sigma'}(P(x)) = \mathtt{w}$, weil $Paul \in \varphi(P)$ (d.h., $Paul$ ist ein Mitglied von Wings), was (i) zeigt. Daraus folgt (nach Def. 19.2), dass $\varphi_{\sigma'}(\neg P(x)) = \mathtt{f}$, was (ii) zeigt. Das war zu zeigen.

4. $\forall x\, P(x) \rightarrow \exists x\, P(x)$ logisch wahr

Beweis. Um zu zeigen, dass $\varphi_\sigma(\forall x\, P(x) \rightarrow \exists x\, P(x)) = \mathtt{w}$ für beliebig $\mathfrak{I} = \langle \mathbf{D}, \varphi \rangle$ und σ (unter $\mathfrak{I}$) gilt, müssen wir zeigen (nach Def. 19.5), dass:

$$\varphi_\sigma(\forall x\, P(x)) = \mathtt{f} \quad \text{oder} \quad \varphi_\sigma(\exists x\, P(x)) = \mathtt{w}.$$

Seien $\mathfrak{I} = \langle \mathbf{D}, \varphi \rangle$ und σ beliebig und zeigen wir dies in den beiden sich gegenseitig ausschließenden und erschöpfenden Fällen:

$$\text{(i) } \varphi_\sigma(\forall x\, P(x)) = \mathtt{w} \quad \text{und} \quad \text{(ii) } \varphi_\sigma(\forall x\, P(x)) = \mathtt{f}.$$

Fall (i) Sei $\varphi_\sigma(\forall x\, P(x)) = \mathtt{w}$. Dann gilt (nach Def. 19.7) für alle x-Varianten σ' von σ unter $\mathfrak{I}$: $\varphi_{\sigma'}(\forall x\, P(x))$. Sei σ'' eine solche x-Variante von σ. Dann gilt $\varphi_{\sigma''}(\forall x\, P(x))$. Daraus folgt (nach Def. 19.8), dass $\varphi_\sigma(\exists x\, P(x)) = \mathtt{w}$. Daraus folgt, dass $\varphi_\sigma(\forall x\, P(x)) = \mathtt{f}$ oder $\varphi_\sigma(\exists x\, P(x)) = \mathtt{w}$.

Fall (ii) Sei $\varphi_\sigma(\forall x\, P(x)) = \mathtt{f}$. Dann ist $\varphi_\sigma(\forall x\, P(x)) = \mathtt{f}$ oder $\varphi_\sigma(\exists x\, P(x)) = \mathtt{w}$.

In den beiden sich gegenseitig ausschließenden und erschöpfenden Fällen (i) und (ii) haben wir gezeigt, dass $\varphi_\sigma(\forall x\, P(x)) = \mathtt{f}$ oder $\varphi_\sigma(\exists x\, P(x)) = \mathtt{w}$. Daher ist $\varphi_\sigma(\forall x\, P(x)) = \mathtt{f}$ oder $\varphi_\sigma(\exists x\, P(x)) = \mathtt{w}$. Das war zu zeigen. $\square$

5. $P(x) \to P(y)$ kontingent

Beispiel

Sei $\mathfrak{I} = \langle \varphi, \mathbf{D} \rangle$ mit:

$$\mathbf{D} = \mathbf{B} = \{George, John, Paul, Ringo\},$$
$$\varphi(P) = \{d \in \mathbf{D} \mid d \text{ ist ein Mitglied von Wings}\} = \{Paul\}.$$

Wählen wir $\varphi_\sigma(x) = \varphi_\sigma(y)$. Dann ist $\varphi_\sigma(P(x)) = \varphi_\sigma(P(y))$.

Um zu zeigen, dass $\varphi_\sigma(P(x) \to P(y)) = \mathtt{w}$ unter $\mathfrak{I}$ gilt, müssen wir (nach Def. 19.5) zeigen, dass:

$$\varphi_\sigma(P(x)) = \mathtt{f} \quad \text{oder} \quad \varphi_\sigma(P(y)) = \mathtt{w}.$$

Da $\varphi_\sigma(P(x)) = \varphi_\sigma(P(y))$, zu zeigen ist, dass $\varphi_\sigma(P(x)) = \mathtt{f}$ oder $\varphi_\sigma(P(x)) = \mathtt{w}$. Dies ist jedoch immer der Fall.

Gegenbeispiel

Sei $\mathfrak{I} = \langle \varphi, \mathbf{D} \rangle$ mit:

$$\mathbf{D} = \mathbf{B} = \{George, John, Paul, Ringo\},$$
$$\varphi(P) = \{d \in \mathbf{D} \mid d \text{ ist ein Mitglied von Wings}\} = \{Paul\}.$$

Wählen wir $\sigma = Paul, John, \ldots$. (Also $\varphi_\sigma(x) = Paul$ und $\varphi_\sigma(y) = John$.)

Um zu zeigen, dass $\varphi_\sigma(P(x) \to P(y)) = \mathtt{f}$ unter $\mathfrak{I}$ gilt, müssen wir (nach Def. 19.5) zeigen, dass:

$$\text{(i) } \varphi_\sigma(P(x)) = \mathtt{w} \quad \text{und} \quad \text{(ii) } \varphi_\sigma(P(y)) = \mathtt{f}.$$

Aus $Paul \in \varphi(P)$ folgt (nach Def. 19.1), dass $\varphi_\sigma(P(x)) = \mathtt{w}$, was (i) zeigt.

Ebenso folgt aus $John \notin \varphi(P)$, dass $\varphi_\sigma(P(y)) = \mathtt{f}$, was (ii) zeigt.

6. $P(x) \to P(x)$ logisch wahr

Beweis. Nach Definition 19.5 ist $\varphi_\sigma(P(x) \to P(x)) = \mathtt{w}$ gdw $\varphi_\sigma(P(x)) = \mathtt{f}$ oder $\varphi_\sigma(P(x)) = \mathtt{w}$. Dies ist jedoch immer der Fall. □

7. $\exists x\, P(x) \rightarrow \forall x\, P(x)$ kontingent

Beispiel

Sei $\mathfrak{I} = \langle \varphi, \mathbf{D} \rangle$ mit:

$$\mathbf{D} = \mathbf{B} = \{George, John, Paul, Ringo\},$$
$$\varphi(P) = \{d \in \mathbf{D} \mid d \text{ ist ein Mitglied von The Beatles}\} = \mathbf{B}.$$

Um zu zeigen, dass $\varphi_\sigma(\exists x\, P(x) \rightarrow \forall x\, P(x)) = \mathtt{w}$ unter $\mathfrak{I}$ gilt, müssen wir zeigen (nach Def. 19.5), dass: $\varphi_\sigma(\exists x\, P(x)) = \mathtt{f}$ oder $\varphi_\sigma(\forall x\, P(x)) = \mathtt{w}$.
Wir zeigen, dass $\varphi_\sigma(\forall x\, P(x)) = \mathtt{w}$ (für beliebige σ).

Um $\varphi_\sigma(\forall x\, P(x)) = \mathtt{w}$ zu zeigen, müssen wir zeigen (nach Def. 19.8), dass für alle x-Variante σ' von σ: $\varphi_{\sigma'}(P(x)) = \mathtt{w}$.

Beachten Sie, dass es kein $d \in \mathbf{D}$ gibt, sodass $d \notin \mathbf{B}$ ist (d.h. es gibt kein Mitglied von The Beatles, das nicht Mitglied von The Beatles ist). Es gibt also keine x-Variante σ' von σ, sodass $\varphi_{\sigma'}(x) \notin \varphi(P)$.

Daraus folgt (nach Def. 19.1), für alle x-Variante σ' von σ: $\varphi_{\sigma'}(P(x)) = \mathtt{w}$. Das war zu zeigen.

Gegenbeispiel

Sei $\mathfrak{I} = \langle \varphi, \mathbf{D} \rangle$ mit:

$$\mathbf{D} = \mathbf{B} = \{George, John, Paul, Ringo\},$$
$$\varphi(P) = \{x \in \mathbf{D} \mid x \text{ ist ein Mitglied von Wings}\} = \{Paul\}.$$

Um zu zeigen, dass $\varphi_\sigma(\exists x\, P(x) \rightarrow \forall x\, P(x)) = \mathtt{f}$ unter $\mathfrak{I}$ gilt, müssen wir zeigen (nach Def. 19.5), dass: (i) $\varphi_\sigma(\exists x\, P(x)) = \mathtt{w}$ und (ii) $\varphi_\sigma(\forall x\, P(x)) = \mathtt{f}$.
Das heißt, zu zeigen ist, dass:

(i) es eine x-Variante σ' von σ unter $\mathfrak{I}$ gibt, sodass: $\varphi_{\sigma'}(A) = \mathtt{w}$ (nach Def. 19.8); und

(ii) es eine x-Variante σ'' von σ unter $\mathfrak{I}$ gibt, sodass: $\varphi_{\sigma''}(A) = \mathtt{f}$ (nach Def. 19.7).

Wir zeigen wir dies für ein beliebiges σ von $\mathfrak{I}$.

Wählen wir $\varphi_{\sigma'}(x) = Paul$. Dann ist $\varphi_{\sigma'}(x) \in \varphi(P)$ (denn $Paul$ ist ein Mitglied von Wings), woraus (nach Def. 19.1) folgt, dass $\varphi_{\sigma'}(A) = \mathtt{w}$. Damit ist (i) gezeigt.

Wählen wir $\sigma''(x) = John$. Dann ist $\sigma''(x) \notin \varphi(P)$ (denn $John$ ist kein Mitglied von Wings), woraus (nach Def. 19.1) folgt, dass $\varphi_{\sigma''}(A) = \mathtt{f}$. Damit ist (ii) gezeigt.

8. $\neg\forall x\, P(x) \leftrightarrow \exists x\, \neg P(x)$ logisch wahr

Beweis. Um zu zeigen, dass $\varphi_\sigma(\neg\forall x\, P(x) \leftrightarrow \exists x\, \neg P(x)) = \mathtt{w}$ für beliebig $\mathfrak{I} = \langle \mathbf{D}, \varphi \rangle$ und σ (unter $\mathfrak{I}$) gilt, müssen wir zeigen (nach Def. 19.6), dass:

$$\varphi_\sigma(\neg\forall x\, P(x)) = \varphi_\sigma(\exists x\, \neg P(x)).$$

Seien $\mathfrak{I} = \langle \mathbf{D}, \varphi \rangle$ und σ beliebig und zeigen wir dies in den beiden sich gegenseitig ausschließenden und erschöpfenden Fällen:

$$\text{(i) } \varphi_\sigma(\exists x\, \neg P(x)) = \mathtt{w} \quad \text{und} \quad \text{(ii) } \varphi_\sigma(\exists x\, \neg P(x)) = \mathtt{f}.$$

Fall (i) Sei $\varphi_\sigma(\exists x\, \neg P(x)) = \mathtt{w}$. Nach Def. 19.8 gilt dies gdw es eine x-Variante σ' von σ unter $\mathfrak{I}$ gibt, sodass: $\varphi_{\sigma'}(\neg P(x)) = \mathtt{w}$. Nach Def. 19.2 gilt dies gdw es eine x-Variante σ' von σ unter $\mathfrak{I}$ gibt, sodass: $\varphi_{\sigma'}(P(x)) = \mathtt{f}$. Nach Def. 19.7 gilt dies gdw $\varphi_\sigma(\forall x\, P(x)) = \mathtt{f}$. Nach Def. 19.2 gilt dies gdw $\varphi_\sigma(\neg\forall x\, P(x)) = \mathtt{w}$. Dann ist $\varphi_\sigma(\neg\forall x\, P(x)) = \varphi_\sigma(\exists x\, \neg P(x)) = \mathtt{w}$.

Fall (ii) Sei $\varphi_\sigma(\exists x\, \neg P(x)) = \mathtt{f}$. Nach Def. 19.8 gilt dies gdw für alle x-Variante σ' von σ unter $\mathfrak{I}$: $\varphi_{\sigma'}(\neg P(x)) = \mathtt{f}$. Nach Def. 19.2 gilt dies gdw für alle x-Variante σ' von σ unter $\mathfrak{I}$: $\varphi_{\sigma'}(P(x)) = \mathtt{w}$. Nach Def. 19.7 gilt dies gdw $\varphi_\sigma(\forall x\, P(x)) = \mathtt{w}$. Nach Def. 19.2 gilt dies gdw $\varphi_\sigma(\neg\forall x\, P(x)) = \mathtt{f}$. Dann ist $\varphi_\sigma(\neg\forall x\, P(x)) = \varphi_\sigma(\exists x\, \neg P(x)) = \mathtt{f}$.

In den beiden sich gegenseitig ausschließenden und erschöpfenden Fällen (i) und (ii) haben wir gezeigt, dass $\varphi_\sigma(\neg\forall x\, P(x)) = \varphi_\sigma(\exists x\, \neg P(x))$. Daher ist $\varphi_\sigma(\neg\forall x\, P(x)) = \varphi_\sigma(\exists x\, \neg P(x))$. Das war zu zeigen. □

9. $P(a,b) \land \forall x \neg \exists y\, P(x,y)$ logisch falsch

Beweis. Um zu zeigen, dass $\varphi_\sigma(P(a,b) \land \forall x \neg \exists y\, P(x,y)) = \mathtt{f}$ für beliebig $\mathfrak{I} = \langle \mathbf{D}, \varphi \rangle$ und σ (unter $\mathfrak{I}$) gilt, müssen wir zeigen (nach Def. 19.3), dass:

$$\varphi_\sigma(P(a,b)) = \mathtt{f} \quad \text{oder} \quad \varphi_\sigma(\forall x \neg \exists y\, P(x,y)) = \mathtt{f}.$$

Seien $\mathfrak{I} = \langle \mathbf{D}, \varphi \rangle$ und σ beliebig und zeigen wir dies in den beiden sich gegenseitig ausschließenden und erschöpfenden Fällen:

$$\text{(i) } \varphi_\sigma(P(a,b)) = \mathtt{w} \quad \text{und} \quad \text{(ii) } \varphi_\sigma(P(a,b)) = \mathtt{f}.$$

Fall (i) Sei $\varphi_\sigma(P(a,b)) = \mathtt{w}$. Wir zeigen, dass $\varphi_\sigma(\forall x \neg \exists y\, P(x,y)) = \mathtt{f}$.

(Um dies zu zeigen, müssen wir zeigen (nach Def. 19.7), dass es eine x-Variante σ' von σ unter $\mathfrak{I}$ gibt, sodass: $\varphi_{\sigma'}(\neg \exists y\, P(x,y)) = \mathtt{f}$. Dies gilt (nach Def. 19.2) gdw $\varphi_{\sigma'}(\exists y\, P(x,y)) = \mathtt{w}$. Dies gilt (nach Def. 19.8) gdw es eine y-Variante σ'' von σ' unter $\mathfrak{I}$ gibt, sodass: $\varphi_{\sigma''}(P(x,y)) = \mathtt{w}$.)

Wählen wir σ' und σ'', sodass: $\varphi_{\sigma'}(x) = \varphi(a)$ und $\sigma''(y) = \varphi(b)$. Beachten Sie, dass ‚$P(a,b)$' geschlossen ist. Daraus und aus $\varphi_\sigma(P(a,b)) = \mathtt{w}$ folgt, dass $\varphi_\sigma(P(a,b)) = \varphi_{\sigma'}(P(a,b)) = \varphi_{\sigma''}(P(a,b)) = \mathtt{w}$.

Daraus und aus $\sigma''(y) = \varphi(b)$ folgt (nach Def. 19.1), dass $\varphi_{\sigma''}(P(a,y)) = \varphi_{\sigma''}(P(a,b)) = \mathtt{w}$. Beachten Sie jedoch, dass σ'' eine y-Variante von σ' ist. Dann folgt (nach Def. 19.8), dass $\varphi_{\sigma'}(\exists y\, P(x,y)) = \mathtt{w}$ und (nach Def. 19.2), dass $\varphi_{\sigma'}(\neg \exists y\, P(x,y)) = \mathtt{f}$.

Daraus und aus $\varphi_{\sigma'}(x) = \varphi(a)$ folgt (nach Def. 19.1), dass $\varphi_{\sigma'}(\neg \exists y\, P(x,y)) = \varphi_{\sigma'}(\neg \exists y\, P(a,y)) = \mathtt{f}$. Beachten Sie jedoch, dass σ' eine x-Variante von σ ist. Dann folgt (nach Def. 19.7), dass $\varphi_\sigma(\forall x \neg \exists y\, P(x,y)) = \mathtt{f}$, woraus folgt, dass $\varphi_\sigma(P(a,b)) = \mathtt{f}$ oder $\varphi_\sigma(\forall x \neg \exists y\, P(x,y)) = \mathtt{f}$.

Fall (ii) Sei $\varphi_\sigma(P(a,b)) = \mathtt{f}$. Folglich: $\varphi_\sigma(P(a,b)) = \mathtt{f}$ oder $\varphi_\sigma(\forall x \neg \exists y\, P(x,y)) = \mathtt{f}$.

In den beiden sich gegenseitig ausschließenden und erschöpfenden Fällen (i) und (ii) haben wir gezeigt, dass $\varphi_\sigma(P(a,b)) = \mathtt{f}$ oder $\varphi_\sigma(\forall x \neg \exists y\, P(x,y)) = \mathtt{f}$. Daher ist $\varphi_\sigma(P(a,b)) = \mathtt{f}$ oder $\varphi_\sigma(\forall x \neg \exists y\, P(x,y)) = \mathtt{f}$. Das war zu zeigen. $\square$

10. $\forall x\, \forall y\, P(x,y) \to \forall y\, \forall x\, P(x,y)$ logisch wahr

Beweis. Um zu zeigen, dass $\varphi_\sigma(\forall x\, \forall y\, P(x,y) \to \forall y\, \forall x\, P(x,y)) = \mathtt{w}$ für beliebig $\mathfrak{I} = \langle \mathbf{D}, \varphi \rangle$ und σ (unter $\mathfrak{I}$) gilt, müssen wir zeigen (nach Def. 19.5), dass:

$$\varphi_\sigma(\forall x\, \forall y\, P(x,y)) = \mathtt{f} \quad \text{oder} \quad \varphi_\sigma(\forall y\, \forall x\, P(x,y)) = \mathtt{w}.$$

Seien $\mathfrak{I} = \langle \mathbf{D}, \varphi \rangle$ und σ beliebig und zeigen wir dies in den beiden sich gegenseitig ausschließenden und erschöpfenden Fällen:

$$\text{(i) } \varphi_\sigma(\forall x\, \forall y\, P(x,y)) = \mathtt{w} \quad \text{und} \quad \text{(ii) } \varphi_\sigma(\forall x\, \forall y\, P(x,y)) = \mathtt{f}.$$

Fall (i) Sei $\varphi_\sigma(\forall x\, \forall y\, P(x,y)) = \mathtt{w}$.

Da σ eine x-Variante von sich selbst ist, es folgt daraus (nach Def. 19.7), dass $\varphi_\sigma(\forall y\, P(x,y)) = \mathtt{w}$. Außerdem, da σ eine y-Variante von sich selbst ist, es folgt daraus (nach Def. 19.7), dass $\varphi_\sigma(P(x,y)) = \mathtt{w}$.

Da σ beliebig ist und da eine x-Variante von sich selbst ist, es folgt daraus (nach Def. 19.7), dass $\varphi_\sigma(\forall x\, P(x,y)) = \mathtt{w}$. Außerdem, da σ beliebig ist und da eine y-Variante von sich selbst ist, es folgt daraus (nach Def. 19.7), dass $\varphi_\sigma(\forall y\, \forall x\, P(x,y)) = \mathtt{w}$.

Dann ist $\varphi_\sigma(\exists x\, \forall y\, P(x,y)) = \mathtt{f}$ oder $\varphi_\sigma(\forall y\, \exists x\, P(x,y)) = \mathtt{w}$.

Fall (ii) Sei $\varphi_\sigma(\forall x\, \forall y\, P(x,y)) = \mathtt{f}$. Daraus ergibt sich, dass $\varphi_\sigma(\forall x\, \forall y\, P(x,y)) = \mathtt{f}$ oder $\varphi_\sigma(\forall y\, \forall x\, P(x,y)) = \mathtt{w}$.

In den beiden sich gegenseitig ausschließenden und erschöpfenden Fällen (i) und (ii) haben wir gezeigt, dass $\varphi_\sigma(\forall x\, \forall y\, P(x,y)) = \mathtt{f}$ oder $\varphi_\sigma(\forall y\, \forall x\, P(x,y)) = \mathtt{w}$. Daher ist $\varphi_\sigma(\forall x\, \forall y\, P(x,y)) = \mathtt{f}$ oder $\varphi_\sigma(\forall y\, \forall x\, P(x,y)) = \mathtt{w}$. $\square$

11. $P(x) \to \forall y\, P(y)$ kontingent

Beispiel

Sei $\mathfrak{I} = \langle \varphi, \mathbf{D} \rangle$ mit:

$$\mathbf{D} = \mathbf{B} = \{George, John, Paul, Ringo\},$$
$$\varphi(P) = \{d \in \mathbf{D} \mid d \text{ ist ein Mitglied von The Beatles}\} = \mathbf{B}.$$

Um zu zeigen, dass $\varphi_\sigma(P(x) \to \forall y\, P(y)) = \mathtt{w}$ unter $\mathfrak{I}$ gilt, müssen wir zeigen (nach Def. 19.5), dass:

$$\varphi_\sigma(P(x)) = \mathtt{f} \quad \text{oder} \quad \varphi_\sigma(\forall y\, P(y)) = \mathtt{w}.$$

Wir zeigen, dass $\varphi_\sigma(\forall y\, P(y)) = \mathtt{w}$ (für beliebige σ).

Beachten Sie, dass für alle $d \in \mathbf{D}$: $d \in \varphi(P)$ (denn sie sind alle Mitglieder von The Beatles). Folglich, für alle y-Varianten σ' von σ: $\varphi_{\sigma'}(y) \in \varphi(P)$. Daraus folgt (nach Def. 19.1), dass für alle y-Varianten σ' von σ: $\varphi_{\sigma'}(P(y)) = \mathtt{w}$.

Daraus folgt (nach Def. 19.7), dass $\varphi_\sigma(\forall y\, P(y)) = \mathtt{w}$. Das war zu zeigen.

Gegenbeispiel

Sei $\mathfrak{I} = \langle \varphi, \mathbf{D} \rangle$ mit:

$$\mathbf{D} = \mathbf{B} = \{George, John, Paul, Ringo\},$$
$$\varphi(P) = \{d \in \mathbf{D} \mid d \text{ ist ein Mitglied von Wings}\} = \{Paul\}.$$

Wählen wir $\sigma = Paul, John, \ldots$. Also $\varphi_\sigma(x) = Paul$, $\varphi_\sigma(y) = John$.

Um zu zeigen, dass $\varphi_\sigma(P(x) \to \forall y\, P(y)) = \mathtt{f}$ unter $\mathfrak{I}$ und σ gilt, müssen wir zeigen (nach Def. 19.5), dass:

$$\text{(i) } \varphi_\sigma(P(x)) = \mathtt{w} \quad \text{und} \quad \text{(ii) } \varphi_\sigma(\forall y\, P(y)) = \mathtt{f}.$$

Aus $\varphi_\sigma(x) = Paul$ und $Paul \in \varphi(P)$ folgt (nach Def. 19.1): $\varphi_\sigma(P(x)) = \mathtt{w}$. Damit ist (i) gezeigt.

Beachten Sie jetzt, dass (i) $\varphi_\sigma(y) = John$, (ii) $John \notin \varphi(P)$ und (ii) σ eine y-Variante von sich selbst ist. Aus (i) und (ii) folgt (nach Def. 19.1), dass $\varphi_\sigma(P(y)) = \mathtt{f}$. Daraus und aus (iii) folgt (nach Def. 19.7): $\varphi_\sigma(\forall y\, P(y)) = \mathtt{f}$. Damit ist (ii) gezeigt.

Das war zu zeigen.

12. $P(x) \rightarrow \forall y\, P(x)$ logisch wahr

Beweis. Um zu zeigen, dass $\varphi_\sigma(P(x) \rightarrow \forall y\, P(x)) = \mathtt{w}$ für beliebig $\mathfrak{I} = \langle \mathbf{D}, \varphi \rangle$ und σ (unter $\mathfrak{I}$) gilt, müssen wir zeigen (nach Def. 19.5), dass:

$$\varphi_\sigma(P(x)) = \mathtt{f} \quad \text{oder} \quad \varphi_\sigma(\forall y\, P(x)) = \mathtt{w}.$$

Seien $\mathfrak{I} = \langle \mathbf{D}, \varphi \rangle$ und σ beliebig und zeigen wir dies in den beiden sich gegenseitig ausschließenden und erschöpfenden Fällen:

$$\text{(i) } \varphi_\sigma(P(x)) = \mathtt{w} \quad \text{und} \quad \text{(ii) } \varphi_\sigma(P(x)) = \mathtt{f}.$$

Fall (i) Sei $\varphi_\sigma(P(x)) = \mathtt{w}$. Da σ beliebig ist, es folgt daraus, dass für alle σ gilt: $\varphi_\sigma(P(x)) = \mathtt{w}$. Daraus folgt (nach Def. 19.7), dass $\varphi_\sigma(\forall y\, P(x)) = \mathtt{w}$. Dann ist $\varphi_\sigma(P(x)) = \mathtt{f}$ oder $\varphi_\sigma(\forall y\, P(x)) = \mathtt{w}$.

Fall (ii) Sei $\varphi_\sigma(P(x)) = \mathtt{f}$. Dann ist $\varphi_\sigma(P(x)) = \mathtt{f}$ oder $\varphi_\sigma(\forall y\, P(x)) = \mathtt{w}$.

In den beiden sich gegenseitig ausschließenden und erschöpfenden Fällen (i) und (ii) haben wir gezeigt, dass $\varphi_\sigma(P(x)) = \mathtt{f}$ oder $\varphi_\sigma(\forall y\, P(x)) = \mathtt{w}$. Daher ist $\varphi_\sigma(P(x)) = \mathtt{f}$ oder $\varphi_\sigma(\forall y\, P(x)) = \mathtt{w}$. □

13. $\exists x\, \forall y\, P(x,y) \rightarrow \forall y\, \exists x\, P(x,y)$ logisch wahr

Beweis. Um zu zeigen, dass $\varphi_\sigma(\exists x\, \forall y\, P(x,y) \rightarrow \forall y\, \exists x\, P(x,y)) = \mathtt{w}$ für beliebig $\mathfrak{I} = \langle \mathbf{D}, \varphi\rangle$ und σ (unter $\mathfrak{I}$) gilt, müssen wir zeigen (nach Def. 19.5), dass:

$$\varphi_\sigma(\exists x\, \forall y\, P(x,y)) = \mathtt{f} \quad \text{oder} \quad \varphi_\sigma(\forall y\, \exists x\, P(x,y)) = \mathtt{w}.$$

Seien $\mathfrak{I} = \langle \mathbf{D}, \varphi\rangle$ und σ beliebig und zeigen wir dies in den beiden sich gegenseitig ausschließenden und erschöpfenden Fällen:

(i) $\varphi_\sigma(\exists x\, \forall y\, P(x,y)) = \mathtt{w}$ und (ii) $\varphi_\sigma(\exists x\, \forall y\, P(x,y)) = \mathtt{f}$.

Fall (i) Sei $\varphi_\sigma(\exists x\, \forall y\, P(x,y)) = \mathtt{w}$. Sei σ' (nach Def. 19.8) eine x-Variante von σ unter $\mathfrak{I}$, sodass $\varphi_{\sigma'}(\forall y\, P(x,y)) = \mathtt{w}$. Daraus folgt (nach Def. 19.1), dass für alle y-Varianten σ'' von σ' unter $\mathfrak{I}$: $\varphi_{\sigma''}(P(x,y)) = \mathtt{w}$.

Da σ' eine y-Variante von sich selbst ist, es folgt daraus, dass $\varphi_{\sigma'}(P(x,y)) = \mathtt{w}$. Da σ' eine x-Variante von sich selbst ist, folgt (nach Def. 19.8): $\varphi_{\sigma'}(\exists x\, P(x,y)) = \mathtt{w}$. Da σ' eine x-Variante von σ ist, gilt: $\varphi_\sigma(y) = \varphi_{\sigma'}(y)$. Daraus folgt, dass $\varphi_\sigma(\exists x\, P(x,y)) = \varphi_{\sigma'}(\exists x\, P(x,y)) = \mathtt{w}$ (denn x ist nicht frei in ‚$\exists x\, P(x,y)$').

Da σ beliebig ist, es folgt daraus, dass $\varphi_\sigma(\forall y\, \exists x\, P(x,y)) = \mathtt{w}$. Dann ist $\varphi_\sigma(\exists x\, \forall y\, P(x,y)) = \mathtt{f}$ oder $\varphi_\sigma(\forall y\, \exists x\, P(x,y)) = \mathtt{w}$.

Fall (ii) Sei $\varphi_\sigma(\exists x\, \forall y\, P(x,y)) = \mathtt{f}$. Daraus ergibt sich, dass $\varphi_\sigma(\exists x\, \forall y\, P(x,y)) = \mathtt{f}$ oder $\varphi_\sigma(\forall y\, \exists x\, P(x,y)) = \mathtt{w}$.

In den beiden sich gegenseitig ausschließenden und erschöpfenden Fällen (i) und (ii) haben wir gezeigt, dass $\varphi_\sigma(\exists x\, \forall y\, P(x,y)) = \mathtt{f}$ oder $\varphi_\sigma(\forall y\, \exists x\, P(x,y)) = \mathtt{w}$. Daher ist $\varphi_\sigma(\exists x\, \forall y\, P(x,y)) = \mathtt{f}$ oder $\varphi_\sigma(\forall y\, \exists x\, P(x,y)) = \mathtt{w}$. □

Lösung zu Übung 10.3. In den folgenden Beispielen wird das Bestehen gewisser logischer Folgerungen behauptet. Überprüfen Sie diese Behauptungen auf ihre Richtigkeit!

Bemerkung: Um zu zeigen, dass eine dieser Behauptungen richtig ist, muss man annehmen, dass alle Prämissen unter beliebigen $\mathfrak{I}$ und σ wahr sind, und daraus schließen, dass auch die Konklusion unter dieser beliebigen Interpretation wahr ist. Um zu zeigen, dass eine dieser Behauptungen nicht richtig ist, muss man eine Interpretation angeben, unter der die Prämissen wahr sind, die Konklusion jedoch falsch ist. Das machen wir jetzt.

1. $P(a) \vDash \exists x\, P(x)$ richtig

Beweis. Angenommen $\varphi_\sigma(P(a)) = \mathtt{w}$ für beliebige $\mathfrak{I} = \langle \mathbf{D}, \varphi \rangle$ und σ unter $\mathfrak{I}$. Um $\varphi_\sigma(\exists x\, P(x)) = \mathtt{w}$ zu zeigen, müssen wir zeigen (nach Def. 19.8), dass es eine x-Variante σ' von σ unter $\mathfrak{I}$ gibt, sodass $\varphi_{\sigma'}(P(x)) = \mathtt{w}$.

Wählen wir $\varphi_{\sigma'}(x) = \varphi(a)$. Es ist klar, dass $\varphi_{\sigma'}(P(x)) = \varphi_\sigma(P(a)) = \mathtt{w}$. Das war zu zeigen. □

2. $\forall x\, (P(x) \to Q(x)) \vDash \exists x\, P(x) \to \exists x\, Q(x)$ richtig

Beweis. Angenommen $\varphi_\sigma(\forall x\, (P(x) \to Q(x))) = \mathtt{w}$ für beliebige $\mathfrak{I} = \langle \mathbf{D}, \varphi \rangle$ und σ unter $\mathfrak{I}$. Daraus folgt (nach Def. 19.7), dass für beliebige x-Variante σ' von σ unter $\mathfrak{I}$: $\varphi_{\sigma'}(P(x) \to Q(x)) = \mathtt{w}$. Daraus folgt (nach Def. 19.5), dass:

$$\text{(i) } \varphi_{\sigma'}(P(x)) = \mathtt{f} \quad \text{oder} \quad \text{(ii) } \varphi_{\sigma'}(Q(x)) = \mathtt{w}.$$

Um $\varphi_\sigma(\exists x\, P(x) \to \exists x\, Q(x)) = \mathtt{w}$ zu zeigen, müssen wir zeigen (nach Def. 19.5), dass:

$$\varphi_\sigma(\exists x\, P(x)) = \mathtt{f} \quad \text{oder} \quad \varphi_\sigma(\exists x\, Q(x)) = \mathtt{w}.$$

Wir zeigen dies in den beiden sich gegenseitig ausschließenden und erschöpfenden Fällen (i) und (ii) oben.

Fall (i) Sei $\varphi_{\sigma'}(P(x)) = \mathtt{f}$. Da σ' eine beliebige x-Variante von σ ist, es folgt daraus (nach Def. 19.8), dass $\varphi_\sigma(\exists x\, P(x)) = \mathtt{f}$.

Dann ist $\varphi_\sigma(\exists x\, P(x)) = \mathtt{f}$ oder $\varphi_\sigma(\exists x\, Q(x)) = \mathtt{w}$.

Fall (ii) Sei $\varphi_{\sigma'}(Q(x)) = \mathtt{w}$. Da σ' eine x-Variante von σ ist, es folgt daraus (nach Def. 19.8), dass $\varphi_\sigma(\exists x\, Q(x)) = \mathtt{w}$.

Dann ist $\varphi_\sigma(\exists x\, P(x)) = \mathtt{f}$ oder $\varphi_\sigma(\exists x\, Q(x)) = \mathtt{w}$.

In den beiden sich gegenseitig ausschließenden und erschöpfenden Fällen (i) und (ii) haben wir gezeigt, dass $\varphi_\sigma(\exists x\, P(x)) = \mathtt{f}$ oder $\varphi_\sigma(\exists x\, Q(x)) = \mathtt{w}$. Daher ist $\varphi_\sigma(\exists x\, P(x)) = \mathtt{f}$ oder $\varphi_\sigma(\exists x\, Q(x)) = \mathtt{w}$. Das war zu zeigen. □

3. $\forall x\,(P(x) \to Q(x)) \vDash \exists x\,Q(x)$ nicht richtig

Beweis. Sei $\mathfrak{I} = \langle \varphi, \mathbf{D} \rangle$ mit:

$$\begin{aligned} \mathbf{D} = \mathbf{B} &= \{George, John, Paul, Ringo\}, \\ \varphi(P) &= \{d \in \mathbf{D} \mid d \text{ ist ein Mitglied von Invisible}\} = \{\}, \\ \varphi(Q) &= \{d \in \mathbf{D} \mid d \text{ ist ein Mitglied von Invisible}\} = \{\}. \end{aligned}$$

Wir zeigen, dass $\varphi_\sigma(\forall x\,(P(x) \to Q(x))) = \mathtt{w}$ und $\varphi_\sigma(\exists x\,Q(x))) = \mathtt{f}$ für beliebige σ unter $\mathfrak{I}$ gilt.

- Um $\varphi_\sigma(\forall x\,(P(x) \to Q(x))) = \mathtt{w}$ zu zeigen (nach Def. 19.7), müssen wir zeigen, dass für alle x-Varianten σ' von σ: $\varphi_{\sigma'}(P(x) \to Q(x)) = \mathtt{w}$. Um dies zu zeigen (nach Def. 19.5), müssen wir zeigen, dass:

  $$\text{(i) } \varphi_{\sigma'}(P(x)) = \mathtt{f} \quad \text{oder} \quad \text{(ii) } \varphi_{\sigma'}(Q(x)) = \mathtt{w}.$$

  Beachten Sie, dass alle $d \in \mathbf{D}$ so sind, dass $d \notin \varphi(P)$ (denn kein Mitglied von The Beatles ist ein Mitglied von Invisible). Daraus folgt, dass $\varphi_{\sigma'}(P(x)) = \mathtt{f}$ für alle x-Varianten σ' von σ gilt. Daraus folgt, dass $\varphi_{\sigma'}(P(x)) = \mathtt{f}$ oder $\varphi_{\sigma'}(Q(x)) = \mathtt{w}$. Das war zu zeigen.

- Um $\varphi_\sigma(\exists x\,Q(x))) = \mathtt{f}$ zu zeigen, müssen wir zeigen, dass für alle x-Varianten σ' von σ: $\varphi_{\sigma'}(Q(x)) = \mathtt{f}$. Noch einmal beachten Sie, dass alle $d \in \mathbf{D}$ so sind, dass $d \notin \varphi(Q)$ (denn kein Mitglied von The Beatles ist ein Mitglied von Invisible). Daraus folgt, dass $\varphi_{\sigma'}(Q(x)) = \mathtt{f}$ für alle x-Varianten σ' von σ gilt. Das war zu zeigen.

Da wir beide gewünschten Ziele erreicht haben, haben wir gezeigt, dass $\mathfrak{I}$ ein Gegenbeispiel für die obige Behauptung ist. □

4. $\forall x\,\forall y\,P(x,y) \vDash \forall x\,\exists y\,P(x,y)$ richtig

Beweis. Angenommen $\varphi_\sigma(\forall x\,\forall y\,P(x,y)) = \mathtt{w}$ für beliebige $\mathfrak{I} = \langle \mathbf{D}, \varphi \rangle$ und σ unter $\mathfrak{I}$. Zu zeigen: $\varphi_\sigma(\forall x\,\exists y\,P(x,y)) = \mathtt{w}$.

Aus unsere Annahme folgt (nach Def. 19.7), dass beliebige x-Variante σ' von σ unter $\mathfrak{I}$: $\varphi_{\sigma'}(\forall y\,P(x,y)) = \mathtt{w}$. Daraus folgt (nach Def. 19.7), dass für alle y-Varianten σ'' von σ' unter $\mathfrak{I}$: $\varphi_{\sigma''}(P(x,y)) = \mathtt{w}$.

Da dies für alle σ'' gilt, muss es auch für mindestens ein σ'' gelten. Daraus und da σ'' eine y-Variante von σ' ist, folgt es (nach Def. 19.8), dass für alle $\varphi_{\sigma'}(\exists x\,P(x,y)) = \mathtt{w}$. Daraus und da σ' eine beliebige x-Variante von σ ist, folgt es (nach Def. 19.7), dass $\varphi_{\sigma'}(\forall x\,\exists x\,P(x,y)) = \mathtt{w}$. □

5. $\exists x\,(P(y) \wedge Q(x)) \vDash P(y) \wedge \exists x\,Q(x)$ richtig

Beweis. Angenommen $\varphi_\sigma(\exists x\,(P(y) \wedge Q(x))) = \mathtt{w}$ für beliebige $\mathfrak{I} = \langle \mathbf{D}, \varphi \rangle$ und σ unter $\mathfrak{I}$. Um $\varphi_\sigma(P(y) \wedge \exists x\,Q(x)) = \mathtt{w}$ zu zeigen, müssen wir zeigen (nach Def. 19.3), dass:

$$\text{(i) } \varphi_\sigma(P(y)) = \mathtt{w} \quad \text{und} \quad \text{(ii) } \varphi_\sigma(P(y)) = \mathtt{w}.$$

Aus unsere Annahme folgt (nach Def. 19.8), dass es eine x-Variante σ' von σ gibt, sodass $\varphi_{\sigma'}(P(y) \wedge Q(x)) = \mathtt{w}$. Sei σ' eine solche x-Variante von σ. Daraus folgt (nach Def. 19.3), dass:

$$\varphi_{\sigma'}(P(y)) = \mathtt{w} \quad \text{und} \quad \varphi_{\sigma'}(Q(x)) = \mathtt{w}.$$

Beachten Sie, dass σ' keine y-Variante von σ ist. Folglich ist $\varphi_{\sigma'}(y) = \varphi_\sigma(y)$. Daraus und aus $\varphi_{\sigma'}(P(y)) = \mathtt{w}$, folgt es (nach Def. 19.1), dass $\varphi_\sigma(P(y)) = \mathtt{w}$. Damit ist (i) gezeigt.

Da σ' eine x-Variante von σ, folgt es aus $\varphi_{\sigma'}(Q(x)) = \mathtt{w}$ (nach Def. 19.8), dass $\varphi_\sigma(\exists x\,Q(x)) = \mathtt{w}$. Damit ist (ii) gezeigt. □

6. $\exists x\,P(y) \vDash \forall y\,P(x)$ nicht richtig

Herausforderung

Zeigen Sie, dass die Prämissen wahr und die Konklusion unter $\mathfrak{I}$ falsch sind, wobei $\mathfrak{I} = \langle \varphi, \mathbf{D} \rangle$ mit:

$$\mathbf{D} = \mathbf{B} = \{George, John, Paul, Ringo\},$$
$$\varphi(P) = \{d \in \mathbf{D} \mid d \text{ ist ein Mitglied von Wings}\} = \{Paul\}.$$

7. $\forall x\, \forall y\, P(x,y) \vDash P(a,b) \wedge P(c,d)$ richtig

Beweis. Angenommen $\varphi_\sigma(\forall x\, \forall y\, P(x,y)) = \mathtt{w}$ für beliebige $\mathfrak{I} = \langle \mathbf{D}, \varphi\rangle$ und σ unter $\mathfrak{I}$. Zu zeigen: $\varphi_\sigma(P(a,b) \wedge P(c,d)) = \mathtt{w}$.

Seien die x-Varianten σ_1 und σ_2, sodass: $\varphi_{\sigma_1}(x) = \varphi(a)$, $\varphi_{\sigma_2}(x) = \varphi(c)$. Seien die y-Varianten σ_3 und σ_4 von σ, sodass $\varphi_{\sigma_3}(y) = \varphi(b)$ und $\varphi_{\sigma_4}(y) = \varphi(d)$. Da σ_1 und σ_2 x-Varianten von σ sind, folgt es aus unsere Annahme (nach Def. 19.7), dass $\varphi_{\sigma_1}(\forall y\, P(x,y)) = \mathtt{w}$ und $\varphi_{\sigma_2}(\forall y\, P(x,y)) = \mathtt{w}$.

Aus $\varphi_{\sigma_1}(\forall y\, P(x,y)) = \mathtt{w}$ und $\varphi_{\sigma_1}(x) = \varphi(a)$ folgt (nach Def. 19.1), dass $\varphi_\sigma(\forall y\, P(a,y)) = \mathtt{w}$. Da σ_3 eine y-Variante von σ ist, folgt es (nach Def. 19.7), dass $\varphi_{\sigma_3}(P(a,y)) = \mathtt{w}$. Daraus und aus $\varphi_{\sigma_3}(y) = \varphi(b)$ folgt (nach Def. 19.1), dass $\varphi_\sigma(P(a,b)) = \mathtt{w}$.

Analog dazu erhalten wir (mit σ_4) $\varphi_\sigma(P(c,d)) = \mathtt{w}$ aus $\varphi_{\sigma_2}(\forall y\, P(x,y)) = \mathtt{w}$.

Da $\varphi_\sigma(P(a,b)) = \mathtt{w}$ und $\varphi_\sigma(P(c,d)) = \mathtt{w}$ folgt (nach Def. 19.3), dass $\varphi_\sigma(P(a,b) \wedge P(c,d)) = \mathtt{w}$. □

8. $\forall x\, (P(x) \rightarrow Q(x)), P(a) \vDash Q(a)$ richtig

Beweis. Angenommen $\varphi_\sigma(\forall x\, (P(x) \rightarrow Q(x))) = \mathtt{w}$ und $\varphi_\sigma(P(a)) = \mathtt{w}$ für beliebige $\mathfrak{I} = \langle \mathbf{D}, \varphi\rangle$ und σ unter $\mathfrak{I}$. Zu zeigen: $\varphi_\sigma(Q(a)) = \mathtt{w}$.

Sei σ' eine x-Variante von σ, sodass $\varphi_\sigma(x) = \varphi(a)$. Daraus und Aus unserer ersten Annahme folgt (nach Def. 19.7), dass $\varphi_{\sigma'}(P(x) \rightarrow Q(x)) = \mathtt{w}$. Daraus folgt (nach Def. 19.1), dass $\varphi_\sigma(P(a) \rightarrow Q(a)) = \mathtt{w}$. Daraus folgt (nach Def. 19.5), dass:

$$\text{(i) } \varphi_\sigma(P(a)) = \mathtt{f} \quad \text{oder} \quad \text{(ii) } \varphi_\sigma(Q(a)) = \mathtt{w}.$$

Unsere zweite Annahme, d.h. $\varphi_\sigma(P(a)) = \mathtt{w}$, widerspricht jedoch Fall (i). Daraus folgt, dass $\varphi_\sigma(Q(a)) = \mathtt{w}$. □

9. $\forall x\, \exists y\, P(x,y) \vDash \exists y\, P(y,y)$ nicht richtig

Herausforderung

Zeigen Sie, dass die Prämissen wahr und die Konklusion unter $\mathfrak{I}$ falsch sind, wobei $\mathfrak{I} = \langle \varphi, \mathbf{D}\rangle$ mit:

$$\mathbf{D} = \mathbb{N} = \{1,2,3,\dots\},$$
$$\varphi(P) = \{\langle d_1, d_2\rangle \in \mathbf{D} \mid d_1 + 1 = d_2\} = \{\langle 1,2\rangle, \langle 2,3\rangle, \langle 3,4\rangle, \dots\}.$$

Lemma 1. Für alle $v_1, v_2, \mathfrak{I} = \langle \mathbf{D}, \varphi \rangle$ und σ unter $\mathfrak{I}$:

$$\varphi_\sigma(\forall v_1\, P(v_1)) = \varphi_\sigma(\forall v_2\, P(v_2)) \quad \text{und}$$
$$\varphi_\sigma(\exists v_1\, P(v_1)) = \varphi_\sigma(\exists v_2\, P(v_2)).$$

Herausforderung

Beweisen Sie dieses Lemma oder einen der folgenden Teilfälle:

1. Wenn $\varphi_\sigma(\forall v_1\, P(v_1)) = \mathtt{w}$, dann $\varphi_\sigma(\forall v_2\, P(v_2)) = \mathtt{w}$.
2. Wenn $\varphi_\sigma(\forall v_1\, P(v_1)) = \mathtt{f}$, dann $\varphi_\sigma(\forall v_2\, P(v_2)) = \mathtt{f}$.
3. Wenn $\varphi_\sigma(\exists v_1\, P(v_1)) = \mathtt{w}$, dann $\varphi_\sigma(\forall v_2\, P(v_2)) = \mathtt{w}$.
4. Wenn $\varphi_\sigma(\exists v_1\, P(v_1)) = \mathtt{f}$, dann $\varphi_\sigma(\forall v_2\, P(v_2)) = \mathtt{f}$.

Die Teilfälle 2 und 3 (sowie 1 und 4) werden jeweils auf ähnliche Weise bewiesen.

10. $\forall x\, (P(x) \vee Q(x)), \neg\exists y\, Q(y) \vDash \forall x\, P(x)$ richtig

Beweis. Angenommen $\varphi_\sigma(\forall x\, (P(x) \vee Q(x))) = \mathtt{w}$ und $\varphi_\sigma(\neg\exists y\, Q(y)) = \mathtt{w}$ für beliebige $\mathfrak{I} = \langle \mathbf{D}, \varphi \rangle$ und σ unter $\mathfrak{I}$. Zu zeigen: $\varphi_\sigma(\forall x\, P(x)) = \mathtt{w}$.

Aus unserer zweiten Annahme folgt (nach Def. 19.2), dass $\varphi_\sigma(\exists y\, Q(y)) = \mathtt{f}$. Daraus folgt (nach Lemma 1), dass $\varphi_\sigma(\exists x\, Q(x)) = \mathtt{f}$. Daraus folgt (nach Def. 19.8) für eine beliebige x-Variante σ' von σ, dass $\varphi_{\sigma'}(Q(x)) = \mathtt{f}$.

Aus unserer ersten Annahme folgt (nach Def. 19.7), dass $\varphi_{\sigma'}(P(x) \vee Q(x)) = \mathtt{w}$. Daraus folgt, dass:

$$\text{(i) } \varphi_{\sigma'}(P(x)) = \mathtt{w} \quad \text{oder} \quad \text{(ii) } \varphi_{\sigma'}(Q(x)) = \mathtt{w}.$$

Fall (ii) steht jedoch im Widerspruch zu unserem vorherigen Ergebnis, dass $\varphi_{\sigma'}(Q(x)) = \mathtt{f}$. Daraus folgt, dass $\varphi_{\sigma'}(P(x)) = \mathtt{w}$. Und da σ' eine beliebige x-Variante von σ ist, folgt es (nach Def. 19.7), dass $\varphi_\sigma(\forall x\, P(x)) = \mathtt{w}$. □

11. $\forall x\,(P(x) \vee Q(x)), \neg Q(y) \vDash \forall x\,P(x)$ — nicht richtig

Herausforderung

Zeigen Sie, dass die Prämissen wahr und die Konklusion unter $\mathfrak{I}$ falsch sind, wobei $\mathfrak{I} = \langle \varphi, \mathbf{D} \rangle$ mit:

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \mathbf{U}, \\ \varphi(P) &= \{d \in \mathbf{D} \mid d \text{ ist ein Mitglied von The Beatles}\} = \mathbf{B}, \\ \varphi(Q) &= \{d \in \mathbf{D} \mid d \text{ ist ein Mitglied von Wings}\} = \mathbf{W}. \end{aligned}$$

12. $P(a_1), P(a_2), \ldots, P(a_{10000}) \vDash \forall x\,P(x)$ — nicht richtig

Herausforderung

Zeigen Sie, dass die Prämissen wahr und die Konklusion unter $\mathfrak{I}$ falsch sind, wobei $\mathfrak{I} = \langle \varphi, \mathbf{D} \rangle$ mit:

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}, \\ \varphi(a_n) &= n, \text{ für } = 1, \ldots, 10000, \\ &\text{d.h., } \varphi(a_1) = 1, \ldots, \varphi(a_{10000}) = 10000, \\ \varphi(P) &= \{d \in \mathbf{D} \mid d < 10001\} = \{1, 2, \ldots, 10000\}. \end{aligned}$$