Die aussagenlogische Semantik 5

5.1 Vorbereitung

5.1.1 Erstellung einer Wahrheitstafel

Lass uns erinnern, die im Skript beschriebenen Regeln zur Erstellung einer Wahrheitstafel für eine beliebige Formel A.

Schritt 1: *Man stelle fest, welche verschiedenen Aussagenvariablen in A vorkommen, und schreibe diese Aussagenvariablen in der Reihenfolge ihres Vorkommens im Alphabet in eine Reihe.*

Schritt 2: *Daneben schreibe man die zu bewertende Formel an.*

Schritt 3: Handelt es sich um n verschiedene Aussagenvariablen, so gibt es 2^n verschiedene Möglichkeiten, die Wahrheitswerte auf die Aussagenvariablen von A zu verteilen. *Man schreibe also in 2^n Zeilen die möglichen Wahrheitswerte unter die Aussagenvariablen, und zwar so:*

(a) *In der Spalte unter der ersten Aussagenvariable alternieren Folgen von* `w`*s und* `f`*s, wobei jede dieser Folgen die Länge $\frac{2^n}{2}$ hat.*

(b) *In der Spalte unter der zweiten Aussagenvariable alternieren wiederum Folgen von* `w`*s und* `f`*s, wobei jede dieser Folgen die Länge $\frac{2^n}{4}$ hat.*

(c) *Allgemein stehen in der Spalte unter der k-ten Aussagenvariable alternierend Folgen von* `w`*s und* `f`*s, wobei jede dieser Folgen die Länge $\frac{2^n}{2^k}$ besitzt.*

Schritt 4: *Man berechne von innen nach außen die Wahrheitswerte für die Teilformeln von A und schließlich für die gesamte Formel A selbst. Unter dem Hauptjunktor von A lässt sich die Bewertung von A ablesen.*

Beispiel: $(p \to q) \wedge (q \to p)$ kontingent

Schritt 1:

p	q

Schritt 2:

p	q	$(p \to q)$	$\wedge$	$(q \to p)$

Schritt 3:

p	q	$(p \to q)$	$\wedge$	$(q \to p)$
w	w			
w	f			
f	w			
f	f			

Schritt 4: ①

p	q	$(p \to q)$	$\wedge$	$(q \to p)$
w	w	w		w
w	f	f		w
f	w	w		f
f	f	w		w

❷

p	q	$(p \to q)$	$\wedge$	$(q \to p)$
w	w	w	w	w
w	f	f	f	w
f	w	w	f	f
f	f	w	w	w

Zusammenfassung: Die Pfeile zeigen die Spalten an, deren Wahrheitswerte in der Zielspalte ausgewertet werden. ‚①', ‚②', ... geben an, in welchem Teilschritt (von Schritt 4) die jeweilige Spalte ausgefüllt wurde. ‚❶', ‚❷', ... geben an, die letzte Teilschritt.

p	q	$(p \to q)$	$\wedge$	$(q \to p)$
w	w	w	w	w
w	f	f	f	w
f	w	w	f	f
f	f	w	w	w
		①	❷	①

Aktivierungselement 5.1. Stellen Sie mit Hilfe von Wahrheitstafeln fest, welche der folgenden Formeln tautologisch, kontradiktorisch bzw. kontingent sind.

1. $p \wedge \neg p$
2. $p \wedge \neg p \rightarrow q$
3. $q \rightarrow p \wedge \neg p$
4. $p \vee \neg p$
5. $p \vee \neg p \rightarrow q$
6. $q \rightarrow p \vee \neg p$

Lösungen auf Seite 64.

5.1.2 Gültigkeit von Argumenten mit Wahrheitstabellen

Die Vorgehensweise zum Beweis der Gültigkeit von Argumenten mit Wahrheitstabellen besteht aus folgenden Schritten:

Schritt 1: *Erstellen Sie eine Wahrheitstabelle für jede Prämisse sowie für die Konklusion. Konstruieren Sie jede Tabelle so, als ob alle Aussagenvariablen in jeder Formel vorhanden wären.*[1]

1: Siehe z.B. Prämisse 1 im Argument 1.

Schritt 2: *Prüfen Sie, ob:*

(a) *die Prämisse inkonsistent sind* (d.h. in jeder Zeile gibt es mindestens eine Prämisse, die den Wert `f` hat);

(b) *die Konklusion tautologisch ist.*

Schritt 3: *Wenn mindestens eine der Bedingungen (2.a) oder (2.b) erfüllt ist, schließen Sie, dass das Argument gültig ist, und hören Sie auf. Andernfalls gehen Sie zum nächsten Schritt.*[2]

2: Wenn es offensichtlich ist, dass eine der Bedingungen (2.a) oder (2.b) erfüllt ist, dann kann man die entsprechende Tatsache direkt beweisen und daraus schließen, dass das Argument gültig ist.

Schritt 4: *Prüfen Sie, ob in den Zeilen, in denen alle Prämissen den Wert* `w` *haben, die Konklusion auch den Wert* `w` *hat.*

Schritt 5: *Wenn die Antwort auf Schritt 4 ‚ja' lautet, schließen Sie, dass das Argument gültig ist. Andernfalls schließen Sie, dass es ungültig ist.*

Beispiel. Wir werden diese Vorgehensweise Schritt für Schritt mit dem folgenden Argument durchgehen. Wir heben alle Zeilen grün hervor, in denen sowohl die Prämissen als auch die Konklusion wahr sind. Zeilen, in denen alle Prämissen wahr sind, die Konklusion jedoch falsch ist, heben wir rot hervor.

$p \therefore p$ gültig

Schritt 1: Erstellung der Wahrheitstabellen.

Prämisse

p	p
w	w
f	f
	❶

Konklusion

p	p
w	w
f	f
	❶

Schritt 2: Überprüfung der Bedingungen (2.a) und (2.b).

(a) Nicht erfüllt: Die Prämissen sind konsistent (der Wert f kommt in Zeile 1 nicht vor).

(b) Nicht erfüllt: Die Konklusion ist nicht tautologisch.

	Prämisse	Konklusion
p	p	p
w	w	w
f	f	f

Schritt 3: Da die Bedingungen (2.a) und (2.b) nicht erfüllt sind, gehen wir zum nächsten Schritt.

Schritt 4: Vergleich der Zeilen.

	Prämisse	Konklusion
p	p	p
w	w	w
f	f	f

Schritt 5: Zeile 1 ist die einzige Zeile, in der die einzige Prämisse wahr ist. Da dort auch die Konklusion wahr ist, ist das Argument gültig.

Aktivierungselement 5.2. Überprüfen Sie die folgenden Argumentformen auf ihre Gültigkeit unter Verwendung der Wahrheitstafelmethode:

1. $p, p \rightarrow q \therefore q$
2. $q, p \rightarrow q \therefore p$
3. $\neg p \vee (q \vee p), \neg(p \vee q) \rightarrow (p \wedge q) \therefore p$
4. $p, \neg(p \vee q) \rightarrow (p \wedge q) \therefore \neg p \vee (q \vee p)$
5. $p, \neg p \therefore q$
6. $\therefore p$

Lösungen auf Seite 65.

5.1.3 Vorgehensweise für einen informellen Beweis

Um einen informellen Beweis zu führen, müssen wir ein Argument in der Metasprache – also auf Deutsch oder in einer anderen natürlichen Sprache – begründen. Dabei kann man wie folgt vorgehen:

Schritt 1: *Schreiben Sie den zu beweisenden Satz auf und heben Sie die Schlüsselbegriffe hervor.*

Schritt 2: *Schauen Sie sich die Definitionen zu diesen Schlüsselbegriffen an.*

Schritt 3: *Notieren Sie einige Merkmale dieser Definitionen, die für Ihren Beweis nützlich sein könnten.*

Schritt 4: *Bestimmen Sie, was genau zu beweisen ist – z.B. eine Implikation, eine Äquivalenz, eine Existenzsatz usw.*

Schritt 5: *Identifizieren Sie eine mögliche Strategie, um den Satz zu beweisen.* Z.B., um eine Implikation zu beweisen, könnte man die Antezedenz annehmen und versuchen, die Konsequenz zu schließen.

Schritt 6: *Entwerfen Sie eine Beweisskizze, um zu prüfen, ob die Strategie praktikabel ist.*

Schritt 7: *Schreiben Sie Ihre Beweise klar auf und begründen Sie jeden logischen Schritt, den Sie machen.* (Sie können logische Regeln verwenden, die analog zu denen der Objektsprache sind. Denken Sie jedoch daran, dass Sie in der Metasprache arbeiten.)

Es reicht aus, nur den letzten Schritt in einer Klausur zu schreiben, da er dem eigentlichen Beweis entspricht. Gehen wir jeden dieser Schritte für das nächste Beispiel durch.

Beispiel. Beweisen Sie:

‚A' ist eine kontradiktorisch gdw ‚$\neg A$' eine tautologisch ist.

Schritt 1: *Schreiben Sie den zu beweisenden Satz auf und heben Sie die Schlüsselbegriffe hervor.*

Zu zeigen: A ist eine kontradiktorisch gdw $\neg A$ eine tautologisch ist.

Schritt 2: *Schauen Sie sich die Definitionen zu diesen Schlüsselbegriffen an.*

Die verwendeten Begriffe sind ‚kontradiktorisch', ‚tautologisch' und ‚$\neg$'. Alle diese Begriffe werden durch das Konzept der aussagenlogischen Bewertung definiert. Die Definitionen lauten wie folgt:

Definition 7 (Aussagenlogische Bewertung)**.** Eine aussagenlogische Bewertung (relativ zur Interpretation $\mathfrak{I}$) ist eine Funktion $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}} : \mathscr{F} \longrightarrow \{\mathtt{w}, \mathtt{f}\}$, sodass gilt: …

2. $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(\neg A) = \mathtt{w}$ gdw $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(A) = \mathtt{f}$, …

Definition 9 (Tautologie)**.** Eine Formel A aus $\mathscr{F}$ ist tautologisch gdw für alle Interpretationen $\mathfrak{I}$ gilt: $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(A) = \mathtt{w}$.

Definition 10 (Kontradiktion)**.** Eine Formel A aus $\mathscr{F}$ ist kontradiktorisch gdw für alle Interpretationen $\mathfrak{I}$ gilt: $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(A) = \mathtt{f}$.

Schritt 3: *Notieren Sie einige Merkmale dieser Definitionen, die für Ihren Beweis nützlich sein könnten.*

Folgendes ist bemerkenswert:

- Aus Definition 7 folgt aber, dass dies der Fall ist gdw $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(A) = \mathtt{f}$ oder $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(B) = \mathtt{w}$.
- Wendet man Definition 9 auf negierte Formeln an, so folgt, dass eine Formel $\neg A$ tautologisch ist gdw für alle Interpretationen $\mathfrak{I}$ gilt: $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(\neg A) = \mathtt{w}$.
- Aus Definition 7.2 folgt aber, dass dies der Fall ist gdw $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(A) = \mathtt{f}$.

  Mit anderen Worten: für alle $\mathfrak{I}$, $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(A) \neq \mathtt{w}$.
- Nach Definition 9 ist eine Formel A tautologisch gdw für alle Interpretationen $\mathfrak{I}$ gilt: $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(A) = \mathtt{w}$.
- Nach Definition 10 ist eine Formel A kontradiktorisch gdw für alle Interpretationen $\mathfrak{I}$ gilt: $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(A) = \mathtt{f}$.

Schritt 4: *Bestimmen Sie, was genau zu beweisen ist.*

Der Ausdruck ‚gdw' (Abkürzung für ‚genau dann, wenn') weist darauf hin, dass es sich um einen Äquivalenzsatz (von der Metasprache) handelt. Das bedeutet, dass gezeigt werden muss, dass die linke Seite aus der rechten Seite folgt und umgekehrt, dass die rechte Seite aus der linken Seite folgt.

Schritt 5: *Identifizieren Sie eine mögliche Strategie, um den Satz zu beweisen.*

Wir zeigen direkt die Folge von Äquivalenzen, die den Übergang von ‚A ist kontradiktorisch' zu ‚$\neg A$ ist tautologisch' in mehreren, unmittelbar gerechtfertigten Schritten verbindet.

Schritt 7: *Entwerfen Sie eine Beweisskizze, um zu prüfen, ob die Strategie praktikabel ist.*

Hier ist eine informellere Skizze des Beweises:

Was wir beweisen wollen:

‚A' ist eine kontradiktorisch gdw ‚$\neg A$' eine tautologisch ist.

Was wir beweisen wollen anders formuliert:

$$\text{für alle } \mathfrak{I} : \mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(A) = \mathtt{f} \text{ (Def. 10)}$$

$$\text{gdw}$$

$$\text{für alle } \mathfrak{I} : \mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(\neg A) = \mathtt{w} \text{ (Def. 9)}$$

Methode des Beweises:
Wir wollen die folgende Kette beweisen und jeden Übergang durch die passende Definition rechtfertigen:

$$\begin{aligned} A \text{ ist kontradiktorisch} &\text{ gdw für alle } \mathfrak{I} : \mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(A) = \mathtt{f} && \text{(Def. 10)} \\ &\text{ gdw für alle } \mathfrak{I} : \mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(\neg A) = \mathtt{w} && \text{(Def. 7.2)} \\ &\text{ gdw } \neg A \text{ ist tautologisch} && \text{(Def. 9)} \end{aligned}$$

Schätzung: Die Äquivalenzkette ist kurz und vollständig – jeder Schritt ist durch eine der angegebenen Definitionen gedeckt, die Strategie ist somit praktikabel und unmittelbar in einen formalen Beweis überführbar.

Schritt 8: *Schreiben Sie Ihre Beweise klar auf und begründen Sie jeden logischen Schritt.*

Satz: A ist kontradiktorisch gdw $\neg A$ tautologisch ist.

Beweis. Nach Definition 10 ist A kontradiktorisch gdw für alle Interpretationen $\mathfrak{I}$ gilt, dass $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(A) = \mathtt{f}$. Nach Definition 7.2 der Negation gilt für jede Interpretation $\mathfrak{I}$, dass $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(\neg A) = \mathtt{w}$ gdw $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(A) = \mathtt{f}$. Schließlich besagt Definition 9, dass $\neg A$ tautologisch ist gdw für alle Interpretationen $\mathfrak{I}$ gilt, dass $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(\neg A) = \mathtt{w}$. Kombiniert man diese drei Aussagen, so folgt unmittelbar, dass A kontradiktorisch ist gdw $\neg A$ tautologisch ist. □

Aktivierungselement 5.3. Beweisen Sie:

‚$A \vee \neg A$' ist eine Tautologie.

Lösung auf Seite 69 (ausstehend).

5.1.4 Lösungen

Lösung zu Aktivierungselement 5.1

1. $p \land \neg p$ — kontradiktorisch

p	p	$\land$	$\neg$	p
w		f	f	
f		f	w	
		❷	①	

2. $p \land \neg p \rightarrow q$ — tautologisch

p	q	p	$\land$	$\neg$	p	$\rightarrow$	q
w	w		f	f		w	
w	f		f	f		w	
f	w		f	w		w	
f	f		f	w		w	
			②	①		❸	

3. $q \rightarrow p \land \neg p$ — kontingent

p	q	q	$\rightarrow$	p	$\land$	$\neg$	p
w	w		f		f	f	
w	f		w		f	f	
f	w		f		f	w	
f	f		w		f	w	
			❸		②	①	

4. $p \lor \neg p$ — tautologisch

p	p	$\lor$	$\neg$	p
w		w	f	
f		w	w	
		❷	①	

5. $p \lor \neg p \rightarrow q$ — kontingent

p	q	p	$\lor$	$\neg$	p	$\rightarrow$	q
w	w		w	f		w	
w	f		w	f		f	
f	w		w	w		w	
f	f		w	w		f	
			②	①		❸	

6. $q \rightarrow p \lor \neg p$ — tautologisch

p	q	q	$\rightarrow$	p	$\lor$	$\neg$	p
w	w		w		w	f	
w	f		w		w	f	
f	w		w		w	w	
f	f		w		w	w	
			❸		②	①	

Lösung zu Aktivierungselement 5.2.

1. $p, p \to q \therefore q$ gültig

Schritt 1: Erstellung der Wahrheitstabellen.

Prämisse 1

p	q	p
w	w	w
w	f	w
f	w	f
f	f	f
		❶

Prämisse 2

p	q	$p \to q$
w	w	w
w	f	f
f	w	w
f	f	w
		❶

Konklusion

p	q	q
w	w	w
w	f	f
f	w	w
f	f	f
		❶

Schritt 2: Überprüfung der Bedingungen (2.a) und (2.b).

(a) Nicht erfüllt: Die Prämissen sind konsistent.

(b) Nicht erfüllt: Die Konklusion ist nicht tautologisch.

		Prämissen		Konklusion
p	q	p	$p \to q$	q
w	w	w	w	w
w	f	w	f	f
f	w	f	w	w
f	f	f	w	f

Schritt 3: Da die Bedingungen (2.a) und (2.b) nicht erfüllt sind, gehen wir zum nächsten Schritt.

Schritt 4: Vergleich der Zeilen.

		Prämissen		Konklusion
p	q	p	$p \to q$	q
w	w	w	w	w
w	f	w	f	f
f	w	f	w	w
f	f	f	w	f

Schritt 5: Die einzige Zeile, in der alle Prämissen wahr sind, ist Zeile 1. Da dort auch die Konklusion wahr ist, ist das Argument gültig.

2. $q, p \rightarrow q \therefore p$ ungültig

Schritt 1: Erstellung der Wahrheitstabellen.

Prämisse 1

p	q	q
w	w	w
w	f	f
f	w	w
f	f	f
		❶

Prämisse 2

p	q	$p \rightarrow q$
w	w	w
w	f	f
f	w	w
f	f	w
		❶

Konklusion

p	q	p
w	w	w
w	f	w
f	w	f
f	f	f
		❶

Schritt 2: Überprüfung der Bedingungen (2.a) und (2.b).

(a) Nicht erfüllt: Die Prämissen sind konsistent.

(b) Nicht erfüllt: Die Konklusion ist nicht tautologisch.

		Prämissen		Konklusion
p	q	q	$p \rightarrow q$	p
w	w	w	w	w
w	f	f	f	w
f	w	w	w	f
f	f	f	w	f

Schritt 3: Da die Bedingungen (2.a) und (2.b) nicht erfüllt sind, gehen wir zum nächsten Schritt.

Schritt 4: Vergleich der Zeilen.

		Prämissen		Konklusion
p	q	q	$p \rightarrow q$	p
w	w	w	w	w
w	f	f	f	w
f	w	w	w	f
f	f	f	w	f

Schritt 5: Es gibt genau zwei Zeilen, in denen alle Prämissen wahr sind: 1 und 3. Da die Konklusion in Zeile 3 falsch ist, ist das Argument ungültig.

3. $\neg p \vee (q \vee p), \neg(p \vee q) \rightarrow (p \wedge q) \therefore p$ ungültig

Schritt 1: Erstellung der Wahrheitstabellen.

Prämisse 1

p	q	$\neg p$	$\vee$	$(q \vee p)$
w	w	f	w	w
w	f	f	w	w
f	w	w	w	w
f	f	w	w	f
		①	❸	②

Prämisse 2

p	q	$\neg$	$(p \vee q)$	$\rightarrow$	$(p \wedge q)$
w	w	f	w	w	w
w	f	f	w	w	f
f	w	f	w	w	f
f	f	w	f	f	f
		②	①	❸	①

Konklusion

p	q	p
w	w	w
w	f	w
f	w	f
f	f	f
		❶

Schritt 2: Überprüfung der Bedingungen (2.a) und (2.b).

(a) Nicht erfüllt: Die Prämissen sind konsistent.

(b) Nicht erfüllt: Die Konklusion ist nicht tautologisch.

		Prämissen		Konklusion
p	q	$\neg p \vee (q \vee p)$	$\neg(p \vee q) \rightarrow (p \wedge q)$	p
w	w	w	w	w
w	f	w	w	w
f	w	w	w	f
f	f	w	f	f

Schritt 3: Da die Bedingungen (2.a) und (2.b) nicht erfüllt sind, gehen wir zum nächsten Schritt.

Schritt 4: Vergleich der Zeilen.

		Prämissen		Konklusion
p	q	$\neg p \vee (q \vee p)$	$\neg(p \vee q) \rightarrow (p \wedge q)$	p
w	w	w	w	w
w	f	w	w	w
f	w	w	w	f
f	f	w	f	f

Schritt 5: In Zeilen 1–3 sind alle Prämissen wahr sind. Da die Konklusion in Zeile 3 falsch ist, ist das Argument ungültig.

4. $p, \neg(p \vee q) \rightarrow (p \wedge q) \therefore \neg p \vee (q \vee p)$ gültig

Schritt 1: Erstellung der Wahrheitstabellen.

- Wahrheitstabelle für Prämisse 1: siehe Konklusion in Argument 3.
- Wahrheitstabelle für Prämisse 2: siehe Prämisse 2 in Argument 3.
- Wahrheitstabelle für die Konklusion: siehe Prämisse 1 in Argument 3.

Schritt 2: Überprüfung der Bedingungen (2.a) und (2.b).

(a) Nicht erfüllt: Die Prämissen sind konsistent.

(b) Erfüllt: Die Konklusion ist tautologisch.

		Prämissen		Konklusion
p	q	p	$\neg(p \vee q) \rightarrow (p \wedge q)$	$\neg p \vee (q \vee p)$
w	w	w	w	w
w	f	w	w	w
f	w	f	w	w
f	f	f	f	w

Schritt 3: Da die Bedingung (2.a) erfüllt ist, ist das Argument gültig.

5. $p, \neg p \therefore q$ gültig

Schritt 1: Erstellung der Wahrheitstabellen.

Prämisse 1

p	q	p
w	w	w
w	f	w
f	w	f
f	f	f
		❶

Prämisse 2

p	q	$\neg p$
w	w	f
w	f	f
f	w	w
f	f	w
		❶

Konklusion

p	q	q
w	w	w
w	f	f
f	w	w
f	f	f
		❶

Schritt 2: Überprüfung der Bedingungen (2.a) und (2.b).

(a) Erfüllt: Die Prämissen sind inkonsistent.

(b) Nicht erfüllt: Die Konklusion ist nicht tautologisch.

		Prämissen		Konklusion
p	q	p	$\neg p$	q
w	w	w	f	w
w	f	w	f	f
f	w	f	w	w
f	f	f	w	f

Schritt 3: Da die Bedingung (2.b) erfüllt ist, ist das Argument gültig.

Lösung zu Aktivierungselement 5.3. [Ausstehend.]

5.2 Übungen

Übung 5.1.

1. Was ist eine Wahrheitstafel für eine aussagenlogische Formel? Wie erstellt man eine Wahrheitstafel?
2. Erstellen Sie die Wahrheitstafeln zu allen aussagenlogischen Formeln in Übung 4.5 (4.1-4.5) mit weniger als 3 oder genau 3 Aussagenvariablen.

Übung 5.2. Stellen Sie mit Hilfe von Wahrheitstafeln fest, welche der folgenden Formeln tautologisch, kontradiktorisch bzw. kontingent sind.

1. $(p \to q) \lor (q \to p)$
2. $\neg(p \to q) \lor (q \land \neg p)$
3. $\neg((p \to q) \land p) \to q$
4. $((p \to q) \lor (q \to r)) \lor (r \to p)$
5. $(p \to q) \lor (\neg p \to q)$
6. $(p \to q) \to ((p \to r) \to (q \to r))$
7. $p \lor (\neg q \to r) \to q \lor (\neg p \to r)$
8. $\neg(p \land (q \to \neg r)) \to (p \to q) \land (p \to r)$
9. $\neg(\neg p \to q \lor r) \to \neg(p \lor q) \land r$
10. $(p \land q \to (r \land s) \lor t) \land (\neg(\neg p \lor \neg q) \land (\neg r \lor \neg s))$
11. $\neg((p \land q) \lor ((r \land s) \land t) \to q \lor t)$
12. $p \land (q \leftrightarrow r) \to (p \land q \leftrightarrow p \land r)$
13. $p \lor (\neg q \to r) \leftrightarrow q \lor (\neg p \to r)$
14. $\neg(p \land (q \to \neg r)) \leftrightarrow (p \to q) \land (p \to r)$

Übung 5.3.1.

1. Was ist eine aussagenlogische Interpretation?
2. Was ist eine aussagenlogische Bewertung?
3. Was ist eine Tautologie, was ist eine Kontradiktion, was ist eine kontingente Formel (gemäß exakter Definition über Interpretationen und aussagenlogische Bewertungen)?

Übung 5.3.2. Was kann gemeint sein, wenn man sagt ‚A impliziert B'?

Übung 5.3.3.

1. Was ist die logische Implikation (Äquivalenz): Ein zweistelliger Junktor oder eine zweistellige Relation?
2. Wie ist die logische Implikation (Äquivalenz) definiert?

Übung 5.3.4. Beweisen Sie:

A impliziert logisch B gdw ‚$A \to B$' eine Tautologie ist.

(Das ist übrigens ein metalogischer Satz, also ein Satz der über Formeln ‚spricht' und diesen Formeln gewisse logische Eigenschaften zuschreibt; ein Beweis dieses metalogischen Satz ist demnach ein metalogischer Beweis.)

Übung 5.4.1. Was ist eine gültige Argumentform? Was ist ein gültiges Argument?

Übung 5.4.2. Welche der folgenden Behauptungen sind wahr und welche sind falsch?

1. Ein Argument, das eine falsche Konklusion hat, ist ungültig.
2. Ein Argument, das falsche Prämissen und eine wahre Konklusion hat, ist ungültig.
3. Ein Argument, das wahre Prämissen und eine falsche Konklusion hat, ist ungültig.
4. Ein Argument, das lauter wahre Prämissen und eine wahre Konklusion hat, ist gültig.
5. Jemand, der behauptet, daß ein bestimmter Schluß korrekt ist, kann durch ein einziges Gegenbeispiel widerlegt werden.
6. Wenn ein gültiges Argument eine falsche Konklusion hat, dann sind alle seine Prämissen auch falsch.

Übung 5.4.3. Was ist die der Argumentform $A_1, \ldots, A_n \therefore B$ entsprechende Formel?

Übung 5.5.1. Überprüfen Sie die folgenden Argumentformen auf ihre Gültigkeit unter Verwendung der Wahrheitstafelmethode:

1. $p \wedge q \rightarrow r \wedge \neg s, r \rightarrow t, \neg t \wedge p \therefore \neg p$
2. $p \wedge q \rightarrow r \wedge \neg s, r \rightarrow t, \neg t \wedge q \therefore p \rightarrow r \wedge \neg r$
3. $p \rightarrow (q \rightarrow r), r \rightarrow \neg s \wedge \neg t, \neg t \rightarrow \neg s \therefore p \rightarrow t$
4. $\neg(q \vee (p \rightarrow r)), \neg r \rightarrow p \wedge \neg q \therefore \neg q \vee r \rightarrow s$
5. $\neg(\neg p \vee (q \rightarrow \neg r)), r \rightarrow s \wedge t \therefore t \vee \neg q$
6. $p \wedge q \rightarrow r, q \vee \neg r \therefore p \rightarrow (q \rightarrow r) \wedge (r \rightarrow q)$
7. $\neg(\neg p \vee \neg q) \rightarrow r, r \wedge (p \wedge q) \rightarrow p \wedge s \therefore \neg(p \wedge q) \vee s$
8. $p \vee \neg p \rightarrow q, \neg(\neg r \vee \neg s), t \rightarrow p \wedge \neg p \therefore (q \wedge s) \wedge \neg t$
9. $p \vee q \therefore ((p \rightarrow q) \rightarrow q) \wedge (\neg q \rightarrow p)$

Übung 5.5.2. Das folgende Argument war in Übung 3 bereits durch eine Argumentform zu repräsentieren.

> Der Papst ist Deutscher. Daher tritt Österreich am 1. Januar 2013 genau dann aus der EU aus, wenn Österreich dies tut.

(i) Überprüfen Sie, ob die nämliche Argumentform gültig ist.

(ii) Entspricht das Ergebnis aus (i) Ihrer Intuition?

Übung 5.5.3. Das folgende Argument war in Übung 3 bereits durch eine Argumentform zu repräsentieren.

> Bad Goisern ist die Hauptstadt von Oberösterreich und Bad Goisern ist nicht die Hauptstadt von Oberösterreich. Daher existiert Gott.

(i) Überprüfen Sie, ob die nämliche Argumentform gültig ist.

(ii) Ist dieses Argument ein Beweis für die Existenz Gottes?

5.2.1 Lösungen

Lösung zu Übung 5.1. 1. Was ist eine Wahrheitstafel für eine aussagenlogische Formel? Wie erstellt man eine Wahrheitstafel?

Antwort: Siehe Sektion 5.1.1.

2. Erstellen Sie die Wahrheitstafeln zu allen aussagenlogischen Formeln in Übung 4.5 (4.1-4.5) mit weniger als 3 oder genau 3 Aussagenvariablen.

Antwort: Hier nicht beantwortet.

Lösung zu Übung 5.2. Stellen Sie mit Hilfe von Wahrheitstafeln fest, welche der folgenden Formeln tautologisch, kontradiktorisch bzw. kontingent sind.

1. $(p \to q) \vee (q \to p)$ tautologisch

p	q	$(p \to q)$	$\vee$	$(q \to p)$
w	w	w	w	w
w	f	f	w	w
f	w	w	w	f
f	f	w	w	w
		①	❷	①

2. $\neg(p \to q) \vee (q \wedge \neg p)$ kontingent

p	q	$\neg$	$(p \to q)$	$\vee$	$(q \wedge$	$\neg p)$
w	w	f	w	f	f	f
w	f	w	f	w	f	f
f	w	f	w	w	w	w
f	f	f	w	f	f	w
		③	②	❹	②	①

3. $\neg((p \to q) \wedge p) \to q$ kontingent

p	q	$\neg$	$((p \to q)$	$\wedge p)$	$\to q$
w	w	f	w	w	w
w	f	w	f	f	w
f	w	w	w	f	f
f	f	w	w	f	w
		③	①	②	❹

4. $((p \to q) \lor (q \to r)) \lor (r \to p)$ — tautologisch

p	q	r	$((p \to q)$	$\lor$	$(q \to r))$	$\lor$	$(r \to p)$
w	w	w	w	w	w	w	w
w	w	f	w	w	f	w	w
w	f	w	f	w	w	w	w
w	f	f	f	w	w	w	w
f	w	w	w	w	w	w	f
f	w	f	w	w	f	w	w
f	f	w	w	w	w	w	f
f	f	f	w	w	w	w	w
			①	②	①	❸	①

5. $(p \to q) \lor (\neg p \to q)$ — tautologisch

p	q	$(p \to q)$	$\lor$	$(\neg p$	$\to q)$
w	w	w	w	f	w
w	f	f	w	f	w
f	w	w	w	w	w
f	f	w	w	w	f
		②	❸	①	②

6. $(p \to q) \to ((p \to r) \to (q \to r))$ — kontingent

7. $p \lor (\neg q \to r) \to q \lor (\neg p \to r)$ — tautologisch

8. $\neg(p \land (q \to \neg r)) \to (p \to q) \land (p \to r)$ — tautologisch

9. $\neg(\neg p \to q \lor r) \to \neg(p \lor q) \land r$ — kontingent

10. $(p \land q \to (r \land s) \lor t) \land (\neg(\neg p \lor \neg q) \land (\neg r \lor \neg s))$ — kontingent

11. $\neg((p \wedge q) \vee ((r \wedge s) \wedge t) \rightarrow q \vee t)$ kontradiktorisch

p	q	r	s	t	$\neg($	$(p \wedge q)$	$\vee$	$((r \wedge s)$	$\wedge\, t)$	$\rightarrow$	$q \vee t)$
w	w	w	w	w	f	w	w	w	w	w	w
w	w	w	w	f	f	w	w	w	f	w	w
w	w	w	f	w	f	w	w	f	f	w	w
w	w	w	f	f	f	w	w	f	f	w	w
w	w	f	w	w	f	w	w	f	f	w	w
w	w	f	w	f	f	w	w	f	f	w	w
w	w	f	f	w	f	w	w	f	f	w	w
w	w	f	f	f	f	w	w	f	f	w	w
w	f	w	w	w	f	f	w	w	w	w	w
w	f	w	w	f	f	f	f	w	f	w	f
w	f	w	f	w	f	f	f	f	f	w	w
w	f	w	f	f	f	f	f	f	f	w	f
w	f	f	w	w	f	f	f	f	f	w	w
w	f	f	w	f	f	f	f	f	f	w	f
w	f	f	f	w	f	f	f	f	f	w	w
w	f	f	f	f	f	f	f	f	f	w	f
f	w	w	w	w	f	f	w	w	w	w	w
f	w	w	w	f	f	f	f	w	f	w	w
f	w	w	f	w	f	f	f	f	f	w	w
f	w	w	f	f	f	f	f	f	f	w	w
f	w	f	w	w	f	f	f	f	f	w	w
f	w	f	w	f	f	f	f	f	f	w	w
f	w	f	f	w	f	f	f	f	f	w	w
f	w	f	f	f	f	f	f	f	f	w	w
f	f	w	w	w	f	f	w	w	w	w	w
f	f	w	w	f	f	f	f	w	f	w	f
f	f	w	f	w	f	f	f	f	f	w	w
f	f	w	f	f	f	f	f	f	f	w	f
f	f	f	w	w	f	f	f	f	f	w	w
f	f	f	w	f	f	f	f	f	f	w	f
f	f	f	f	w	f	f	f	f	f	w	w
f	f	f	f	f	f	f	f	f	f	w	f
					❺	①	③	①	②	④	①

Bemerkung: Die eingeklammerte Formel innerhalb der Negation ist tautologisch. Andernfalls wäre die negierte Formel nicht kontradiktorisch.

12. $p \wedge (q \leftrightarrow r) \rightarrow (p \wedge q \leftrightarrow p \wedge r)$ tautologisch

13. $p \vee (\neg q \rightarrow r) \leftrightarrow q \vee (\neg p \rightarrow r)$ tautologisch

14. $\neg(p \wedge (q \rightarrow \neg r)) \leftrightarrow (p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)$ tautologisch

p	q	r	$\neg$	$(p \wedge$	$(q \rightarrow$	$\neg r))$	$\leftrightarrow$	$(p \rightarrow$	$q) \wedge$	$(q \rightarrow t)$
w	w	w	w	f	f	f	w	w	w	w
w	w	f	f	w	w	w	w	w	f	f
w	f	w	f	w	w	f	w	f	f	w
w	f	f	f	w	w	w	w	f	f	f
f	w	w	w	f	f	f	w	w	w	w
f	w	f	w	f	w	w	w	w	w	w
f	f	w	w	f	w	f	w	w	w	w
f	f	f	w	f	w	w	w	w	w	w
			④	③	②	①	❺	①	②	①

Lösung zu Übung 5.3.1.

1. Was ist eine aussagenlogische Interpretation?

Antwort: Siehe Definition 6 auf S. 129.

2. Was ist eine aussagenlogische Bewertung?

Antwort: Siehe Definition 7 auf SS. 130–1.

3. Was ist eine Tautologie, was ist eine Kontradiktion, was ist eine kontingente Formel (gemäß exakter Definition über Interpretationen und aussagenlogische Bewertungen)?

Antwort: Siehe Definitionen 8–10 auf SS. 133–4.

Lösung zu Übung 5.3.2. Was kann gemeint sein, wenn man sagt ‚A impliziert B'?

Antwort

Wenn wir die Alltagssprache ‚A impliziert B' interpretieren, kann dies zumindest zwei verschiedene Bedeutungen haben, die mit logischen Begriffen interpretiert werden können:

(a) ‚$A \rightarrow B$', oder

(b) ‚A impliziert (aussagen-)logisch B' (siehe Definition 11 auf S. 137).

Es könnte auch eine kausale Interpretation geben, die aber mit den in diesem Kapitel gelernten logischen Konzepten nicht formalisiert werden kann.

Lösung zu Übung 5.3.3.

1. Was ist die logische Implikation (Äquivalenz): Ein zweistelliger Junktor oder eine zweistellige Relation?

Antwort

Die logische Implikation und die logische Äquivalenz sind zweistellige Relationen (siehe S. 140–141). Zweistellige Junktoren sind ‚$\rightarrow$' und ‚$\leftrightarrow$', ebenso wie ‚$\wedge$' und ‚$\vee$'.

2. Wie ist die logische Implikation (Äquivalenz) definiert?

Antwort: Siehe Definition 11.

Lösung zu Übung 5.3.4. Beweisen Sie:

A impliziert logisch B gdw ‚$A \rightarrow B$' eine Tautologie ist.

Hinweis: Es geht hier nicht darum, diese Aussage mit einer Herleitung in unserem System des natürlichen Schließens zu beweisen oder eine Wahrheitstabelle zu erstellen. Wir müssen stattdessen einen informellen Beweis führen. Gehen wir jeden der in Abschnitt 5.1.3 dafür vorgeschlagenen Schritte für den erforderlichen Beweis durch.

Schritt 1: *Schreiben Sie den zu beweisenden Satz auf und heben Sie die Schlüsselbegriffe hervor.*

Zu zeigen: A impliziert logisch B gdw $(A \rightarrow B)$ eine Tautologie ist.

Schritt 2: *Schauen Sie sich die Definitionen zu diesen Schlüsselbegriffen an.*

Die verwendeten Begriffe sind ‚Tautologie', ‚logisch impliziert' und ‚$\rightarrow$'. Alle diese Begriffe werden durch das Konzept der aussagenlogischen Bewertung definiert. Die Definitionen lauten wie folgt:

Definition 7 (Aussagenlogische Bewertung)**.** Eine aussagenlogische Bewertung (relativ zur Interpretation $\mathfrak{I}$) ist eine Funktion $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}} : \mathcal{F} \rightarrow \{\mathtt{w}, \mathtt{f}\}$, sodass gilt: ...
5. $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}((A \rightarrow B)) = \mathtt{w}$ gdw $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(A) = \mathtt{f}$ oder $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(B) = \mathtt{w}$, ...

Definition 9 (Tautologie)**.** Eine Formel A aus $\mathcal{F}$ ist tautologisch gdw für alle Interpretationen $\mathfrak{I}$ gilt: $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(A) = \mathtt{w}$.

Definition 12 (Aussagenlogische Implikation)**.** Für alle Formeln $A_1, \ldots, A_n$ und B aus $\mathcal{F}$: $A_1, \ldots, A_n$ implizieren (aussagen-)logisch B (bzw. B folgt logisch aus $A_1, \ldots, A_n$) gdw für alle Interpretationen $\mathfrak{I}$ gilt: Wenn $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(A_1) = \mathtt{w}, \ldots, \mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(A_n) = \mathtt{w}$, dann $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(B) = \mathtt{w}$.

Schritt 3: *Notieren Sie einige Merkmale dieser Definitionen, die für Ihren Beweis nützlich sein könnten.*

Folgendes ist bemerkenswert:

- Definition 7 besagt, dass die Funktion $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}} : \mathcal{F} \rightarrow \{\mathtt{w}, \mathtt{f}\}$ zwei mögliche Werte hat, nämlich $\mathtt{w}$ und $\mathtt{f}$.
- Folglich, wenn $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(A) \neq \mathtt{w}$ (d.h. wenn $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(A) = \mathtt{w}$ nicht der Fall ist), dann gilt $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(A) = \mathtt{f}$.
- Dies folgt auch umgekehrt, da $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}$ eine Funktion ist. Das bedeutet, es gibt kein A, für das $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(A) = \mathtt{w} = \mathtt{f}$ gilt. Folglich, $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(A) = \mathtt{f}$ gdw $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(A) \neq \mathtt{w}$.
- Wendet man Definition 9 auf Implikationssätze an, so folgt, dass eine Formel $(A \rightarrow B)$ tautologisch ist gdw für alle Interpretationen $\mathfrak{I}$ gilt: $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}((A \rightarrow B)) = \mathtt{w}$.
- Aus Definition 7.5 folgt aber, dass dies der Fall ist gdw $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(A) = \mathtt{f}$ oder $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(B) = \mathtt{w}$.

  Mit anderen Worten: für alle $\mathfrak{I}$, $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}((A \rightarrow B)) = \mathtt{w}$ gdw $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(A) \neq \mathtt{w}$ oder $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(B) = \mathtt{w}$.
- Aus Definition 12 folgt: A logisch impliziert B gdw für alle $\mathfrak{I}$, wenn $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(A) = \mathtt{w}$, dann $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(B) = \mathtt{w}$.

Schritt 4: *Bestimmen Sie, was genau zu beweisen ist – z.B. eine Implikation, eine Äquivalenz, eine Existenzsatz usw.*

Der Ausdruck ‚gdw' (Abkürzung für ‚genau dann, wenn') weist darauf hin, dass es sich um einen Äquivalenzsatz (von der Metasprache) handelt. Das bedeutet, dass gezeigt werden muss, dass die linke Seite aus der rechten Seite folgt und umgekehrt, dass die rechte Seite aus der linken Seite folgt.

Schritt 5: *Identifizieren Sie eine mögliche Strategie, um den Satz zu beweisen.*

Wir könnten die folgende Strategie verfolgen: Wir zeigen eine Äquivalenz zwischen der Definition der logischen Implikation und der Wahrheitstabelle einer Tautologie. Dafür gehen wir in zwei Richtungen vor:

($\Rightarrow$) Wir nehmen an, dass A logisch B impliziert, und überprüfen, dass $(A \rightarrow B)$ für alle Interpretationen $\mathfrak{I}$ gilt, indem wir die Fälle $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(A) = \mathtt{w}$ und $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(A) \neq \mathtt{w}$ getrennt betrachten.

($\Leftarrow$) Wir nehmen an, dass $(A \rightarrow B)$ eine Tautologie ist, und zeigen, dass daraus folgt, dass wenn $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(A) = \mathtt{w}$, dann $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(B) = \mathtt{w}$.

Damit schließen wir die Äquivalenz.

Schritt 6: *Entwerfen Sie eine Beweisskizze, um zu prüfen, ob die Strategie praktikabel ist.*

Hier ist eine informellere Skizze des Beweises:

Was wir beweisen wollen:

$$A \text{ impliziert logisch } B \text{ gdw } (A \rightarrow B) \text{ eine Tautologie ist.}$$

Was wir beweisen wollen anders formuliert:

$$\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(A) = \mathtt{w} \text{ (für alle } \mathfrak{I}\text{), dann } \mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(B) = \mathtt{w} \quad \text{(Def. 12)}$$

$$\text{gdw}$$

$$\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}((A \rightarrow B)) = \mathtt{w} \quad \text{(Def. 9).}$$

Methode des Beweises:
Wir führen für jede Richtung einen konditionalen Beweis an.

($\Rightarrow$) **Annahme:** $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(A) = \mathtt{w}$, dann $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(B) = \mathtt{w}$.

Ziel: $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}((A \rightarrow B)) = \mathtt{w}$.

Verfahren: Wir betrachten zwei mögliche Fälle:

(i) Wenn $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(A) = \mathtt{w}$, dann folgt aus der Annahme, dass auch $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(B) = \mathtt{w}$. Daher $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}((A \rightarrow B)) = \mathtt{w}$ (Def. 7).

(ii) Wenn $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(A) \neq \mathtt{w}$, dann gilt $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(A) = \mathtt{f}$ (Def. 7). Folglich: $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(A \rightarrow B) = \mathtt{w}$ (auch Def. 7).

($\Leftarrow$) **Annahmen:** $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}((A \rightarrow B)) = \mathtt{w}$, $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(A) = \mathtt{w}$.

Ziel: $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(B) = \mathtt{w}$.

Verfahren: $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}((A \rightarrow B)) = \mathtt{w}$ bedeutet, dass, wenn $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(A) = \mathtt{w}$, dann muss entweder $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(A) = \mathtt{f}$ oder $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(B) = \mathtt{w}$ gelten. Da jedoch die Annahme $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(A) = \mathtt{w}$ im Widerspruch zu $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(A) = \mathtt{f}$ steht (Def. 7), bleibt nur die Möglichkeit, dass $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(B) = \mathtt{w}$ (unser Ziel).

Schätzung: Die Beweisstrategie scheint praktikabel zu sein.

Schritt 7: *Schreiben Sie Ihre Beweise klar auf und begründen Sie jeden logischen Schritt, den Sie machen.*

> **Hinweis**: Eine viel kürzere Version des Beweises folgt unten. Es kann aus pädagogischen Gründen hilfreich sein, diese zuerst durchzugehen oder beide Versionen miteinander zu vergleichen.

Satz: A impliziert logisch B gdw $(A \to B)$ eine Tautologie ist.

Beweis. Nach den Def. 12 und 9 ist Folgendes zu zeigen:

$$\text{(a) für alle } \mathfrak{I}\text{: wenn } \mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(A) = \mathtt{w}\text{, dann } \mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(B) = \mathtt{w}$$

$$\text{gdw}$$

$$\text{(b) für alle } \mathfrak{I}\text{: } \mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}((A \to B)) = \mathtt{w}.$$

Aus Def. 7 wissen wir, dass $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}$ eine Funktion ist, die nur zwei Werte annehmen kann: $\mathtt{w}$ oder $\mathtt{f}$. Insbesondere gilt:

$$\text{(c) } \mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(A) = \mathtt{f} \quad \text{gdw} \quad \mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(A) \neq \mathtt{w}.$$

Nun beweisen wir die beiden Richtungen separat:

($\Rightarrow$) Angenommen, A impliziert logisch B. Das bedeutet:

$$\text{(a) für alle } \mathfrak{I}\text{: wenn } \mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(A) = \mathtt{w}\text{, dann } \mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(B) = \mathtt{w}.$$

Zu zeigen ist, dass $(A \to B)$ eine Tautologie ist, also:

$$\text{(b) für alle } \mathfrak{I}\text{: } \mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}((A \to B)) = \mathtt{w}.$$

Sei $\mathfrak{I}$ eine beliebige Interpretation. Aus (a) folgt unmittelbar:

$$\text{(a') wenn } \mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(A) = \mathtt{w}\text{, dann } \mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(B) = \mathtt{w}.$$

Wir unterscheiden zwei Fälle: (i) $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(A) = \mathtt{w}$, (ii) $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(A) \neq \mathtt{w}$.

(i) Angenommen, $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(A) = \mathtt{w}$. In Kombination mit (a') folgt daraus, dass $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(B) = \mathtt{w}$. Damit ist nach Def. 7 gezeigt, dass $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}((A \to B)) = \mathtt{w}$.

(ii) Angenommen, $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(A) \neq \mathtt{w}$. In Kombination mit (c) folgt daraus, dass $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(B) = \mathtt{f}$. Damit ist nach Def. 7 gezeigt, dass $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}((A \to B)) = \mathtt{w}$.

Da die Fälle (i) und (ii) erschöpfend und disjunkt sind, gilt $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}((A \to B)) = \mathtt{w}$. Da $\mathfrak{I}$ beliebig gewählt war, gilt für diese Bedingung jede $\mathfrak{I}$. Das war zu zeigen.

($\Leftarrow$) Angenommen, $(A \to B)$ ist eine Tautologie. Das bedeutet:

$$\text{(b) für alle } \mathfrak{I} \text{ gilt: } \mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}((A \to B)) = \mathtt{w}.$$

Zu zeigen ist, dass A logisch B impliziert, also:

$$\text{(a) für alle } \mathfrak{I}\text{: wenn } \mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(A) = \mathtt{w}\text{, dann } \mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(B) = \mathtt{w}.$$

Sei $\mathfrak{I}$ eine beliebige Interpretation. Aus (b) folgt unmittelbar:

$$\text{(b) } \mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}((A \to B)) = \mathtt{w}.$$

Nehmen wir nun an, dass:

$$\text{(a.1) } \mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(A) = \mathtt{w}.$$

Zu zeigen bleibt: $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(B) = \mathtt{w}$.

Man beachte, dass nach Def. 7 aus (a) folgt, dass:

$$\text{(i) } \mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(A) = \mathtt{f} \text{ oder (ii) } \mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(B) = \mathtt{w},$$

$$\text{d.h. (siehe (c))}$$

$$\text{(i) } \mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(A) \neq \mathtt{w} \text{ oder (ii) } \mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(B) = \mathtt{w}.$$

Fall (i) ist ausgeschlossen, da angenommen wurde, dass $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(A) = \mathtt{w}$ (siehe (a.1)). Es muss also Fall (ii) gelten, also $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(B) = \mathtt{w}$.

Dann gilt: wenn $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(A) = \mathtt{w}$, dann$\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(B) = \mathtt{w}$.

Da $\mathfrak{I}$ beliebig gewählt war, folgt:

$$\text{(a) für alle } \mathfrak{I}\text{: wenn } \mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(A) = \mathtt{w}, \text{ dann } \mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(B) = \mathtt{w}.$$

Das war zu zeigen.

Da wir gezeigt haben, dass (a) aus (b) folgt und (b) aus (a) folgt, gilt: A impliziert logisch B gdw $(A \to B)$ eine Tautologie ist. □

Bemerkung

Normalerweise würde ein Beweis einige Schritte auslassen, die als trivial betrachtet werden. Ich habe es hier jedoch vermieden, solche triviale Schritte auszulassen.

Nachstehend finden Sie einen kürzeren, aber ebenfalls akzeptabler Beweis. (In einer wissenschaftlichen Arbeit akzeptabel, aber vielleicht nicht in der Klausur.)

Satz: A impliziert logisch B gdw $(A \to B)$ eine Tautologie ist.

Beweis. Wir beweisen beide Seiten der Äquivalenz.

($\Rightarrow$) Angenommen, A impliziert logisch B. Das heißt, für alle $\mathfrak{I}$ gilt: Wenn $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(A) = \mathtt{w}$, dann $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(B) = \mathtt{w}$. In beiden Fällen (ob $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(A) = \mathtt{w}$ oder nicht) ist $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(A \to B) = \mathtt{w}$, also eine Tautologie.

($\Leftarrow$) Angenommen, $(A \to B)$ ist eine Tautologie, das heißt, dass $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(A) = \mathtt{f}$ oder $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(B) = \mathtt{w}$, für alle $\mathfrak{I}$ gilt. Folglich, wenn $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(A) = \mathtt{w}$ gilt, dann muss auch $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(B) = \mathtt{w}$ gelten. □

Lösung zu Übung 5.4.1. Was ist eine gültige Argumentform? Was ist ein gültiges Argument?

Antwort: Siehe Definition 13.

Lösung zu Übung 5.4.2. Welche der folgenden Behauptungen sind wahr und welche sind falsch?

1. Ein Argument, das eine falsche Konklusion hat, ist ungültig. falsch

Erklärung

‚$p \therefore p$' ist gültig auch wenn ‚p' falsch ist.

2. Ein Argument, das falsche Prämissen und eine wahre Konklusion hat, ist ungültig. falsch

Erklärung

‚$p \land \neg p \therefore p$' ist gültig auch wenn p wahr ist.

3. Ein Argument, das wahre Prämissen und eine falsche Konklusion hat, ist ungültig. wahr

Erklärung

Erinnern Sie sich, dass ein Argument ‚$A_1, ..., A_n \therefore B$' genau dann gültig ist, wenn der Implikationssatz ‚$A_1 \land ... \land A_n \rightarrow B$' eine Tautologie ist. Allerdings ist ‚$A_1 \land ... \land A_n \rightarrow B$' falsch, wenn ‚$A_1, ..., A_n$' wahr sind und B falsch.

4. Ein Argument, das lauter wahre Prämissen und eine wahre Konklusion hat, ist gültig. falsch

Erklärung

Das Argument ‚$p, q \therefore r$' ist ungültig, selbst wenn p, q und r alle wahr sind. Beispiel davon:

- Alle Menschen sind sterblich.
- Alle Tiere sind sterblich.

- $\therefore$ Hannes Leitgeb ist ein Logiker.

5. Jemand, der behauptet, daß ein bestimmter Schluß korrekt ist, kann durch ein einziges Gegenbeispiel widerlegt werden.

wahr

Erklärung

Das haben wir in den Fragen 5.4.1 und 5.4.2 gemacht. Machen wir es noch einmal:

Wenn jemand behauptet, dass das Argument ‚$p \rightarrow q, q \therefore p$' gültig ist, könnten wir das folgende Gegenbeispiel geben:

p: Es regnet.

q: Die Straße ist nass.

Obwohl es wahr ist, dass, wenn es regnet, die Straße nass ist (also ist ‚$p \rightarrow q$' wahr), ist manchmal die Straße nass (also ist ‚q' wahr), aber es hat nicht geregnet (also ist ‚p' falsch). Zum Beispiel könnte die Straße durch einen Wasserschlauch nass geworden sein.

6. Wenn ein gültiges Argument eine falsche Konklusion hat, dann sind alle seine Prämissen auch falsch. falsch

Erklärung

‚$p, q \therefore p$' ist gültig auch wenn p und q falsch sind.

Lösung zu Übung 5.4.3. Was ist die der Argumentform $A_1, \ldots, A_n \therefore B$ entsprechende Formel?

Antwort: $A_1 \wedge \ldots \wedge A_n \rightarrow B$

Beachten Sie, dass ‚$A_1, \ldots, A_n$' und ‚$A_1, \ldots, A_n \therefore B$' keine aussagenlogischen Formeln sind, sondern metasprachliche Ausdrücke. Aussagenlogische Formeln sind hingegen ‚$A_1 \wedge \ldots \wedge A_n$' und ‚$A_1 \wedge \ldots \wedge A_n \rightarrow B$'.

Lösung zu Übung 5.5.1. Überprüfen Sie die folgenden Argumentformen auf ihre Gültigkeit unter Verwendung der Wahrheitstafelmethode:

Bemerkung: Wir sagen hier nur, ob die Argumente gültig oder ungültig sind.

1. $p \wedge q \rightarrow r \wedge \neg s, r \rightarrow t, \neg t \wedge p \therefore \neg p$ ungültig
2. $p \wedge q \rightarrow r \wedge \neg s, r \rightarrow t, \neg t \wedge q \therefore p \rightarrow r \wedge \neg r$ gültig
3. $p \rightarrow (q \rightarrow r), r \rightarrow \neg s \wedge \neg t, \neg t \rightarrow \neg s \therefore p \rightarrow t$ ungültig
4. $\neg(q \vee (p \rightarrow r)), \neg r \rightarrow p \wedge \neg q \therefore \neg q \vee r \rightarrow s$ ungültig
5. $\neg(\neg p \vee (q \rightarrow \neg r)), r \rightarrow s \wedge t \therefore t \vee \neg q$ gültig
6. $p \wedge q \rightarrow r, q \vee \neg r \therefore p \rightarrow (q \rightarrow r) \wedge (r \rightarrow q)$ gültig
7. $\neg(\neg p \vee \neg q) \rightarrow r, r \wedge (p \wedge q) \rightarrow p \wedge s \therefore \neg(p \wedge q) \vee s$ gültig
8. $p \vee \neg p \rightarrow q, \neg(\neg r \vee \neg s), t \rightarrow p \wedge \neg p \therefore (q \wedge s) \wedge \neg t$ gültig
9. $p \vee q \therefore ((p \rightarrow q) \rightarrow q) \wedge (\neg q \rightarrow p)$ gültig

Lösung zu Übung 5.5.2. Das folgende Argument war in Übung 3.4.1 bereits durch eine Argumentform zu repräsentieren.[3]

3: **Repräsentation:** $p \therefore q \leftrightarrow q$.

> Der Papst ist Deutscher. Daher tritt Österreich am 1. Januar 2013 genau dann aus der EU aus, wenn Österreich dies tut.

(i) Überprüfen Sie, ob die nämliche Argumentform gültig ist.

Antwort: Sie ist gültig.

(ii) Entspricht das Ergebnis aus (i) Ihrer Intuition?

Bemerkung: Diese Antwort müssen Sie selbst überlegen.

Lösung zu Übung 5.5.3. Das folgende Argument war in Übung 3.4.2 bereits durch eine Argumentform zu repräsentieren.

> Bad Goisern ist die Hauptstadt von Oberösterreich und Bad Goisern ist nicht die Hauptstadt von Oberösterreich. Daher existiert Gott.

Repräsentation: $p \wedge \neg p \therefore q$.

(i) Überprüfen Sie, ob die nämliche Argumentform gültig ist.

Antwort: Sie ist gültig.

(ii) Ist dieses Argument ein Beweis für die Existenz Gottes?

Antwort: Nein, denn die Prämissen können nicht wahr sein.

5.3 Zusatzübungen

Zusatzübung 5.1. Stellen Sie mit Hilfe von Wahrheitstafeln fest, welche der folgenden Formeln tautologisch, kontradiktorisch bzw. kontingent sind.

1. $\neg((p \rightarrow q) \wedge p) \rightarrow \neg q$
2. $p \rightarrow (q \rightarrow p)$
3. $p \rightarrow (q \vee \neg q)$
4. $p \rightarrow \neg p$
5. $\neg p \rightarrow (p \rightarrow q)$
6. $(p \wedge \neg p) \rightarrow q$
7. $(p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow r)$
8. $\neg(p \rightarrow \neg p)$
9. $p \leftrightarrow \neg p$
10. $(p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow p)$

Zusatzübung 5.2. Stellen Sie mit Hilfe von Wahrheitstafeln fest, welche der folgenden Argumenten gültig sind.

1. $\neg((p \rightarrow q) \wedge p) \therefore \neg q$
2. $p \therefore (q \rightarrow p)$
3. $p \therefore (q \vee \neg q)$
4. $p \therefore \neg p$
5. $\neg p \therefore (p \rightarrow q)$
6. $(p \wedge \neg p) \therefore q$
7. $\therefore (p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow r)$
8. $\therefore \neg(p \rightarrow \neg p)$
9. $\therefore p \leftrightarrow \neg p$
10. $\therefore (p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow p)$

5.3.1 Lösungen

Lösung zu Zusatzübung 5.1.

1. $\neg((p \to q) \wedge p) \to \neg q$ kontingent

p	q	$\neg$	$((p \to$	$q) \wedge$	$p) \to$	$\neg\, q$
w	w	f	w	w	w	f
w	f	w	f	f	w	w
f	w	w	w	f	f	f
f	f	w	w	f	w	w
		④	②	③	❺	①

2. $p \to (q \to p)$ tautologisch
3. $p \to (q \vee \neg q)$ tautologisch
4. $p \to \neg p$ kontingent
5. $\neg p \to (p \to q)$ tautologisch
6. $(p \wedge \neg p) \to q$ tautologisch
7. $(p \to q) \vee (q \to r)$ tautologisch
8. $\neg(p \to \neg p)$ kontingent
9. $p \leftrightarrow \neg p$ kontradiktorisch
10. $(p \to q) \vee (q \to p)$ tautologisch

Lösung zu Zusatzübung 5.2.

1. $\neg((p \to q) \wedge p) \therefore \neg q$ nicht gültig
2. $p \therefore (q \to p)$ gültig
3. $p \therefore (q \vee \neg q)$ gültig
4. $p \therefore \neg p$ nicht gültig
5. $\neg p \therefore (p \to q)$ gültig
6. $(p \wedge \neg p) \therefore q$ gültig
7. $\therefore (p \to q) \vee (q \to r)$ gültig
8. $\therefore \neg(p \to \neg p)$ nicht gültig
9. $\therefore p \leftrightarrow \neg p$ nicht gültig
10. $\therefore (p \to q) \vee (q \to p)$ gültig