

# 4

## Die aussagenlogische Sprache

### 4.1 Übungen

4.1 Übungen . . . . .	51
4.2 Lösungen . . . . .	53

**Übung 4.1.** Welche der folgenden Zeichenfolgen sind aussagenlogische Formeln? Beachten Sie dabei, daß wir in dieser Übung keine Klammerersparnisregeln gelten lassen wollen. Genaue Klammersetzung ist also wichtig.

1.  $p \wedge q \vee r$
2.  $((p \wedge q) \vee r))$
3.  $((p \wedge q) \vee r)$
4.  $(\neg(p \vee q) \rightarrow r)$
5.  $\neg((p \vee q) \rightarrow r)$
6.  $((p \vee q) \Rightarrow p)$
7.  $((\neg p \vee q) \rightarrow r)$
8.  $\neg((P \vee Q) \rightarrow R)$
9.  $((p \rightarrow \neg p) \rightarrow \neg p)$
10.  $(\neg\neg\neg\neg\neg r \rightarrow (p \vee q))$
11.  $p \leftrightarrow q$
12.  $((p \rightarrow q) \wedge \neg(\neg q \rightarrow \neg p))$
13.  $((p \rightarrow (q \rightarrow r) \rightarrow p))$
14.  $(p \rightarrow (q \rightarrow (r \rightarrow (s \rightarrow t))))$
15.  $((p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r)))$
16.  $\neg(\neg\neg((\neg((p_{12} \vee \neg p_9) \wedge p_8) \vee p_7) \rightarrow p_6) \leftrightarrow (p_5 \vee \neg\neg p_{13}))$
17.  $((p \wedge q) \rightarrow \neg(s))$

**Übung 4.2.** Welche der folgenden Zeichenfolgen sind aussagenlogische Argumentformen?

1.  $p, (p \rightarrow q) \therefore p, q$
2.  $\therefore (p \vee \neg p)$
3.  $(q \wedge r \vee s), (r) \therefore \neg(\neg(q))$
4.  $(q \rightarrow r), \neg r \therefore (\neg q \vee s)$
5.  $p, p, p, p, p \therefore p$
6.  $(q \wedge \neg q) \therefore$
7.  $p \neg q \therefore r$

**Übung 4.3.** Wenden Sie die beiden Klammerersparnisregeln auf die Formeln aus der Übung 4.1 an.

**Übung 4.4.** Setzen Sie in den folgenden Zeichenfolgen die Klammern, die den beiden Klammerersparnisregeln zum Opfer gefallen sind (kehren Sie also die Anwendung der Klammerersparnisregeln um).

1.  $p \vee q$
2.  $p \wedge q \rightarrow r$
3.  $p \rightarrow q \vee r$
4.  $p \vee q \rightarrow (p \wedge r) \vee \neg s$
5.  $\neg p \vee (q \wedge \neg r) \rightarrow \neg(p \vee \neg s) \vee \neg(q \rightarrow s)$

**Übung 4.5.** In welchen der folgenden Zeichenreihen wurden die beiden Klammerersparnisregeln korrekt angewendet?

1.  $p \rightarrow q \rightarrow r$
2.  $p \vee q \rightarrow r \wedge s$
3.  $p \wedge q \wedge r \rightarrow s$
4.  $p \vee q \rightarrow r \vee q \wedge p$
5.  $p \rightarrow (q \rightarrow r) \vee s \rightarrow q$

## 4.2 Lösungen

**Lösung zu Übungen 4.1 und 4.3.** (4.1) Welche der folgenden Zeichenfolgen sind aussagenlogische Formeln? Beachten Sie dabei, daß wir in dieser Übung keine Klammerersparnisregeln gelten lassen wollen. Genaue Klammersetzung ist also wichtig. (4.3) Wenden Sie die beiden Klammerersparnisregeln auf die Formeln aus der Übung 4.1 an.

1.  $p \wedge q \vee r$       keine aussagenlogische Formel

### Erklärung

Nicht klar, ob  $(p \wedge q) \vee r'$  oder  $p \wedge (q \vee r)'$  gemeint wird.

2.  $((p \wedge q) \vee r)$       keine aus. Formel

3.  $((p \wedge q) \vee r)$       aus. Formel

**Entklammerte Formel:**  $(p \wedge q) \vee r$

4.  $\neg(p \vee q) \rightarrow r$       aus. Formel

**Entklammerte Formel:**  $\neg(p \vee q) \rightarrow r$

5.  $\neg((p \vee q) \rightarrow r)$       aus. Formel

**Entklammerte Formel:** Wie das Original.

6.  $((p \vee q) \Rightarrow p)$       keine aus. Formel

7.  $((\neg p \vee q) \rightarrow r)$       aus. Formel

**Entklammerte Formel:**  $\neg p \vee q \rightarrow r$

8.  $\neg((P \vee Q) \rightarrow R)$       keine aus. Formel

### Erklärung

Großbuchstaben sind Metavariablen, aber keine Aussagenvariablen unserer Objektsprache.

9.  $((p \rightarrow \neg p) \rightarrow \neg p)$       aus. Formel

**Entklammerte Formel:**  $(p \rightarrow \neg p) \rightarrow \neg p$

10.  $(\neg\neg\neg\neg r \rightarrow (p \vee q))$

aus. Formel

**Entklammerte Formel:**  $\neg\neg\neg\neg r \rightarrow p \vee q$ 

11.  $p \leftrightarrow q$

keine aus. Formel

**Erklärung**

In dieser Formel fehlen die äußereren Klammern. Die korrekte Formel wäre  $((p \leftrightarrow q))'$ , deren entklammerte Version die fragliche Formel wäre.

12.  $((p \rightarrow q) \wedge \neg(\neg q \rightarrow \neg p))$

aus. Formel

**Entklammerte Formel:**  $(p \rightarrow q) \wedge \neg(\neg q \rightarrow \neg p)$ 

13.  $((p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow p))$

keine aus. Formel

14.  $(p \rightarrow (q \rightarrow (r \rightarrow (s \rightarrow t))))$

aus. Formel

**Entklammerte Formel:**  $p \rightarrow (q \rightarrow (r \rightarrow (s \rightarrow t)))$ 

15.  $((p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r)))$

aus. Formel

**Entklammerte Formel:**

$$((p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r)))$$

16.  $\neg(\neg\neg(\neg((p_{12} \vee \neg p_9) \wedge p_8) \vee p_7) \rightarrow p_6) \leftrightarrow (p_5 \vee \neg\neg p_{13}))$

aus. Formel

**Entklammerte Formel:**

$$\neg(\neg\neg(\neg((p_{12} \vee \neg p_9) \wedge p_8) \vee p_7) \rightarrow p_6) \leftrightarrow p_5 \vee \neg\neg p_{13})$$

17.  $((p \wedge q) \rightarrow \neg(s))$

keine aus. Formel

**Erklärung**

Aussagenvariablen stehen nie zwischen Klammern.

**Lösung zu Übung 4.2.** Welche der folgenden Zeichenfolgen sind aussagenlogische Argumentformen?

1.  $p, (p \rightarrow q) \therefore p, q$  keine aus. Argumentform

#### Erklärung

Argumente haben mindestens und höchstens eine Konklusion.

2.  $\therefore (p \vee \neg p)$  aus. Argumentform

3.  $(q \wedge r \vee s), (r) \therefore \neg(\neg(q))$  keine aus. Argumentform

4.  $(q \rightarrow r), \neg r \therefore (\neg q \vee s)$  aus. Argumentform

5.  $p, p, p, p, p \therefore p$  aus. Argumentform

#### Erklärung

Ein Argument, selbst ein gültiges, kann überflüssige Prämissen haben.

6.  $(q \wedge \neg q) \therefore$  keine aus. Argumentform

**Erklärung:** Wie in 1.

7.  $p \neg q \therefore r$  keine aus. Argumentform

#### Erklärung

$, p \neg q'$  ist keine aussagenlogische Formel. Was wurde gemeint?  $, p, \neg q \therefore r'$ ,  $, p \wedge \neg q \therefore r'$ ,  $, p \vee \neg q \therefore r'$ , ...?

**Lösung zu Übung 4.4** Setzen Sie in den folgenden Zeichenfolgen die Klammern, die den beiden Klammerersparnisregeln zum Opfer gefallen sind (kehren Sie also die Anwendung der Klammerersparnisregeln um).

1.  $p \vee q$

**Antwort:**  $(p \vee q)$

2.  $p \wedge q \rightarrow r$

**Antwort:**  $((p \wedge q) \rightarrow r)$

3.  $p \rightarrow q \vee r$

**Antwort:**  $(p \rightarrow (q \vee r))$

4.  $p \vee q \rightarrow (p \wedge r) \vee \neg s$

**Antwort:**  $((p \vee q) \rightarrow ((p \wedge r) \vee \neg s))$

5.  $\neg p \vee (q \wedge \neg r) \rightarrow \neg(p \vee \neg s) \vee \neg(q \rightarrow s)$

**Antwort:**  $((\neg p \vee (q \wedge \neg r)) \rightarrow (\neg(p \vee \neg s) \vee \neg(q \rightarrow s)))$

**Lösung zu Übung 4.5** In welchen der folgenden Zeichenreihen wurden die beiden Klammerersparnisregeln korrekt angewendet?

1.  $p \rightarrow q \rightarrow r$

nicht korrekt

2.  $p \vee q \rightarrow r \wedge s$

korrekt

**Ursprüngliche Formel:**  $((p \vee q) \rightarrow (r \wedge s))$

3.  $p \wedge q \wedge r \rightarrow s$

nicht korrekt<sup>1</sup>

4.  $p \vee q \rightarrow r \vee q \wedge p$

nicht korrekt

5.  $p \rightarrow (q \rightarrow r) \vee s \rightarrow q$

nicht korrekt

- 1: Es wäre jedoch kein Problem, eine Regel für das Weglassen von Klammern zwischen Konjunktionssätzen einzufügen. Dasselbe gilt für Disjunktions- und Äquivalenzsätze.