Ludwig-Maximilians-Universität München
Fakultät für Philosophie, Wissenschaftstheorie und Religionswissenschaft
Munich Center for Mathematical Philosophie
Lehrstuhl für Logik und Sprachphilosophie

Wintersemester 2025/26

Tutorium zu Logik I

Basierend auf der Vorlesung von
Prof. Dr. Dr. Hannes Leitgeb, LMU München

Luis F. Bartolo Alegre
l.bartolo@campus.lmu.de

1. Januar 2026

https://github.com/luisbartolo/Logik1-WiSe-25-26.git

[Einige Lösungen können Fehler enthalten.]

Ludwig-Maximilians-Universität München
Fakultät für Philosophie, Wissenschaftstheorie und Religionswissenschaft
Munich Center for Mathematical Philosophie
Lehrstuhl für Logik und Sprachphilosophie

Hinweis
Dieses Dokument enthält meine Lösungen zu den Übungen aus dem Skript von Prof. Dr. Dr. Hannes Leitgeb sowie einige zusätzliche Übungen. Die Originalübungen gehören selbstverständlich den jeweiligen Autor:innen und werden hier nur zu Lernzwecken genutzt.

Colophon
Dieses Dokument wurde gesetzt mit Hilfe von KOMA-Script und LaTeX unter Verwendung der kaobook-Klasse.

Inhaltsverzeichnis

Einführung in das Tutorium | 0

Hallo zusammen!

Ich bin Luis und ich werde euch dieses Semester im Tutorium für **Logik I** begleiten. Ein bisschen was zu mir: Ich bin Doktorand im Bereich der Philosophie der Logik. Mein Doktorvater ist der Professor dieses Kurses, Hannes Leitgeb.

Ihr werdet es schnell merken: Deutsch ist nicht meine Muttersprache. Sie ist Spanisch. Ich komme ursprünglich aus Peru. Das bringt natürlich die ein oder andere lustige Situation mit sich, aber ich hoffe, das wird uns nicht zu sehr aus der Bahn werfen.

Wenn ihr mich mal nicht versteht, sagt einfach direkt Bescheid. Ihr könnt es ganz entspannt angehen:

> Hey Luis, ich habe dich nicht verstanden.

Oder:

> Hey Luis, kannst du das bitte nochmal wiederholen?

Das werde ich nicht übel nehmen. Im Gegenteil, das wird uns allen weiterhelfen.

Also keine Scheu! Es geht hier darum, dass wir alle die Logik so gut wie möglich lernen – und das funktioniert nur, wenn wir uns alle gut verstehen.

0.1 Warum Logik lernen?

Jetzt, wo ihr ein wenig mehr über mich wisst, lasst uns über eine spannende Frage sprechen:

> Warum sollten wir überhaupt Logik lernen?

Ich verspreche, es kann euer Leben retten!

Als ich jung war, war ich extrem skeptisch. Vielleicht kennt ihr das: Wie viele Philosophiestudenten habe ich oft an allem gezweifelt. Wissenschaft oder Religion? Für mich schienen beide nicht genug zu sein, um mir die Sicherheit zu geben, die ich suchte. Ich fühlte mich oft wie ein Philosoph in einer Sinnkrise.

Ich konnte keinen Sinn im Leben finden. Ich wusste nicht einmal, was die Ausdruck ‚Sinn des Lebens' bedeutet! Das ist selbst für einen Philosophen traurig. Als ich jedoch begann, Logik zu lernen, ist etwas Faszinierendes passiert.

Jedes Mal, wenn ich die Regeln der Logik befolgte, kam ich immer zum gleichen Ergebnis. Das ist eine verlässliche Erkenntnis! Wenn man die Regeln, die ihr hier lernen werdet, manipuliert, kommt man immer wieder zu den gleichen Ergebnissen zurück.

Dieses Wissen verschaffte mir etwas Gewissheit im Leben, die mir half, meinem Leben wieder Sinn zu geben. Daher hat Logik sozusagen mein Leben gerettet!

Natürlich gibt es philosophischen Debatten darüber, ob die klassische Logik korrekt ist, und ich beschäftige mich in meiner Forschung auch damit. Doch was wir über die klassische Logik wissen, ist ein faszinierendes und dennoch verlässliches Wissen. Im Laufe des Kurses werdet ihr mit diesem Wissen in Kontakt kommen.

Logik zu lernen ist ein bisschen wie die Regeln eines Spiels zu lernen – sagen wir Schach. Wenn ihr jemals Schach gespielt habt, wisst ihr, dass es einige Regeln gibt, die ihr kennen müsst, um das Spiel wirklich zu verstehen und spielen.

Im Schach haben wir Figuren wie den König, die Dame, den Turm und so weiter. Jede dieser Figuren hat ihre eigenen Bewegungsregeln. Genauso ist es auch in der Logik!

Die *Figuren* der Logik sind Begriffe wie Aussage, Negation, Gültigkeit, Implikation, Quantor, usw. Jede dieser logischen Begriffe hat eigene Gebrauchsregeln, die ihr im Laufe des Kurses kennenlernen werdet. Der Schlüssel liegt darin, zu lernen, wie man diese Regeln richtig (und auch falsch) anwendet.

0.2 Warum ein Spiel lernen?

Jetzt fragt ihr euch vielleicht:

> Warum müssen wir die Regeln eines Spiels lernen? Das sieht nicht besonders philosophisch aus! Lass uns einfach direkt in die tiefen Gewässer der Philosophie der Logik eintauchen!

Es gibt jedoch zwei Gründe, warum es wichtig ist, die *Spielregeln* der Logik zu lernen, bevor wir über Logik philosophieren.

Erstens: Wenn wir die Regeln des Schachspiels nicht kennen, können wir nicht sinnvoll über Schach sprechen. Das Gleiche gilt für die Logik.

Natürlich könnte man einwenden:

> Man braucht kein Schachmeister zu sein, um die grundlegenden Schachregeln zu kennen und darüber sprechen zu können.

Das stimmt! Aber um in diesem Kurs die Klausur zu bestehen, müsst ihr nicht einmal Logikmeister sein; ein gewisses Maß an Expertise genügt.

Diese *Expertise* ist besonders wichtig, wenn ihr die klassische Logik angreifen oder kritisieren wollt – denn ohne ein gewisses Maß an Wissen seid ihr wie ein Schachkommentator, der nicht einmal weiß, was ein Fianchetto ist!

Zweitens: Die Regeln der Logik regen unser Denken zu vielen philosophisch bedeutsamen Fragen an.

Tatsächlich können wir sogar die Regeln des Schachs nutzen, um über interessante Themen zu sprechen, wie Politik. Zum Beispiel könnte man sagen:

> Die Partei vollzog eine Rochade, um ihren Anführer vor den Angriffen der Opposition zu schützen.

Das ist eine sinnvolle Metapher, die wir nur verstehen können, wenn wir wissen, was eine Rochade ist! In ähnlicher Weise können wir auch die Regeln der Logik verwenden, um über etwas anderes als Logik zu sprechen.[1]

Im Gegensatz zum Schach werden die Regeln der Logik jedoch nicht metaphorisch benutzt. Wenn wir logische Konzepte verwenden, um Argumente zu begründen, versuchen wir, die echten logischen Zusammenhänge im Argument zu erfassen.

Und was wir über mit diesen Begriffen entdecken können, ist nicht oberflächlich. Lasst uns drei Beispiele kurz erwähnen.

1. Gödels Unvollständigkeitssätze zeigen, dass es in jedem konsistenten und hinreichend komplexen mathematischen System wahre Aussagen gibt, die weder bewiesen noch widerlegt werden können. Dies bedeutet, dass es Grenzen für das gibt, was in der Mathematik bewiesen werden kann.
2. Die Existenz einer Perpetuum Mobile steht in logischem Widerspruch zu den ersten beiden Gesetzen der Thermodynamik. Da beide Gesetze in der Physik als ziemlich sicher betrachtet werden, könnten wir davon schließen, dass ein Perpetuum Mobile unmöglich ist. Dies bedeutet, dass es Grenzen für das gibt, was physisch möglich ist.
3. Das Arrow-Theorem zeigt, dass es unmöglich ist, ein Wahlsystem zu konstruieren, das bestimmte faire Bedingungen erfüllt und gleichzeitig rational und konsistent ist, wenn es drei oder mehr Optionen gibt. Das bedeutet, dass es Grenzen für die Gestaltung von Wahlsystemen und Demokratie gibt.

Es ist möglich, eine Vorstellung von diesen Entdeckungen zu haben, ohne **Logik I** bestanden zu haben. Ich kann euch jedoch versichern, dass ihr sie nur vollständig verstehen werdet, wenn ihr **Logik I** erfolgreich abgeschlossen habt.

1: In der Tat sind Metaphern im Schach nicht immer vollständig treffend. Zum Beispiel:

> Der Senator verhielt sich wie ein Bauer, bewegte sich Feld für Feld und hatte keinen Einfluss.

Wenn man die Bewegungen eines Politikers mit den begrenzten Zügen eines Bauern vergleicht, wird übersehen, dass Bauern mächtig werden können, wenn sie die andere Seite des Schachbretts erreichen!

0.3 Bedeutung der Übungen

Nun, da wir gute Gründe genannt haben, Logik zu lernen, lasst uns über einen entscheidenden Teil des Kurses sprechen: die Übungen!

Die einzige Möglichkeit, wirklich von diesem Tutorium zu profitieren, besteht darin, aktiv zu versuchen, die Übungen zu machen. Dies bedeutet, sich die Zeit zu nehmen, die Aufgaben zu bearbeiten und zum Tutorium zu kommen, um zu überprüfen, ob sie korrekt oder falsch gelöst wurden und warum.

Lernen ist ein aktiver Prozess. Nur durch das Ausprobieren und Anwenden der Konzepte, die wir hier behandeln, werdet ihr in der Lage sein, die Regeln der Logik wirklich zu verinnerlichen.

Und ja, das bedeutet, dass ihr auch Fehler machen werdet – das ist ein Teil des Lernprozesses und eine Möglichkeit, herauszufinden, wo ihr mehr Klarheit benötigt.

Ich empfehle euch, sowohl individuell zu arbeiten als auch im Team (in dieser Reihenfolge). Das bedeutet, dass ihr nicht nur alleine lernen solltet, sondern auch mit euren Kommilitonen. Wenn ihr euch gegenseitig unterstützt und Fragen stellt, könnt ihr oft viel mehr lernen, als wenn ihr alleine arbeitet.

Außerdem teilt gerne eure Fragen und Bedenken im Tutorium – das bringt frischen Wind in unsere Sitzungen und hilft jedem von euch, das Gelernte besser zu verstehen.

Fragen sind ein wesentlicher Teil des Lernprozesses, und ich freue mich darauf, euch zu helfen. Denkt daran, je mehr ihr fragt und je mehr ihr übt, desto mehr werdet ihr in der Lage sein, die Konzepte zu beherrschen (und die Klausur zu bestehen).

0.4 Die Kunst des Fragens

Einige von euch sind vielleicht ein bisschen schüchtern. Das ist ganz normal!

Viele Menschen fühlen sich in einer neuen Umgebung oder beim Lernen neuer Konzepte unsicher. Aber ich möchte euch ermutigen, diese Schüchternheit zu überwinden.

Es gibt keine dummen Fragen! Das ist eine der wichtigsten Regeln, die ihr euch merken solltet. Egal wie einfach oder kompliziert eine Frage erscheinen mag – fragt einfach!

Wenn ihr euch jedoch nicht wohl dabei fühlt, während der Sitzungen Fragen zu stellen, könnt ihr mir auch gerne eine E-Mail schicken oder zu meinen Sprechstunden vorbeikommen. So können wir sicherstellen, dass wir alle Missverständnisse klären und ihr die Unterstützung bekommt, die ihr braucht.

Also, es gibt keine dummen Fragen.

Es gibt jedoch Fragen, die in einem Tutorium wie diesem hilfreicher sind als andere. Während *Was*- und *Warum*-Fragen ihren Platz haben, sind es die *Wie*-Fragen, die in diesem Kontext oft die besten Einsichten bieten.

Beginnen wir mit den *Was*-Fragen. Fragen wie:

> Was ist eine Implikation?

oder:

> Was bedeutet Gültigkeit?

können zwar informativ sein, aber sie führen oft nur zu oberflächlichen Antworten.

In einem philosophischen Kontext kann es zwar wichtig sein, eine Definition zu kennen, aber das allein reicht oft nicht aus, um wirklich zu lernen, das Konzept anzuwenden.

Dann gibt es die *Warum*-Fragen. Diese können sehr tiefgründig und anregend sein, wie zum Beispiel:

> Warum können wir nicht vom Satz des Widerspruchs absehen?

oder

> Warum müssen wir uns mit den klassischen Regeln der Logik zufrieden geben?

Diese Fragen führen oft zu interessanten Diskussionen, und ich wurde sie gerne in einem geeigneten Kontext behandeln. Aber in unserem Tutorium ist es hilfreich, sich auch auf praktischen Nutzen zu konzentrieren.

Jetzt kommen wir zu den *Wie*-Fragen – diese sind Gold wert! Zum Beispiel:

> Wie forme ich (nicht) ein gültiges Argument mit dieser Formel?
>
> Wie kann ich diese Regel bei diesem Satz (nicht) anwenden?
>
> Wie erkenne ich die Gültigkeit oder Ungültigkeit eines Arguments dieser Art?

Solche Fragen zeigen, dass ihr aktiv an eurem Verständnis arbeitet. Sie helfen uns, die praktischen Anwendungen der logischen Konzepte zu erkunden, die wir besprechen. Sie sind der Schlüssel, um die Regeln und Prinzipien der Logik tatsächlich zu beherrschen.

Das bedeutet jedoch nicht, dass ihr keine *Was-* und *Warum-*Fragen stellen dürft. Manchmal sind sie sehr nützlich, um die grundlegenden Konzepte zu klären oder um den theoretischen Rahmen zu verstehen. Zu beachten ist, dass die wesentlichen *Was-* und *Warum-*Fragen im Unterricht von Hannes behandelt werden.

Es ist einfach eine Frage der Balance. Während wir uns mit den Übungen beschäftigen und die Regeln erlernen, solltet ihr auch darüber nachdenken, wie ihr diese Regeln in verschiedenen Kontexten anwenden könnt.

Einige *Was-* und *Warum-*Fragen können jedoch auch sehr produktiv in diesem Tutorium sein. Zum Beispiel:

> Was ist der Unterschied zwischen dieser und der anderen Regel?
>
> Warum ist diese Regel hier nicht anwendbar?

Denkt also daran: Jede Frage kann wichtig und interessant sein.

Versucht jedoch, euch auf die Fragen zu konzentrieren, die euch helfen, die im Kurs gelernten Logikregeln anzuwenden.

Andere nützliche Fragen für unser Tutorium sind:

> Kannst du ein Beispiel geben, um das zu verdeutlichen?
>
> Sind diese beiden Konzepte nicht dasselbe?
>
> Kann ich die Gültigkeit dieses Arguments auf diese andere Weise beweisen?
>
> Kann ich hier diese andere Regel oder Prämisse benutzen?
>
> Was sind typische Fehler bei der Verwendung dieser Regel?

Und, natürlich:

> Luis, könntest du das noch einmal erklären?

Aber wenn ihr euch nicht sicher seid, ob eure Frage diese Kriterien erfüllt, sagt einfach, was ihr denkt. Wenn etwas unklar ist, ist es immer besser, nachzufragen, als still zu bleiben und zu hoffen, dass es irgendwann klarer wird. Wird es nicht!

Ihr werdet überrascht sein, wie oft eure Frage auch anderen helfen kann, die sich möglicherweise genau die gleiche Frage stellen!

Ludwig Wittgenstein sagte:

> Wovon man nicht sprechen kann, darüber muss man schweigen.

Ich ermutige euch dennoch, in diesem Tutorium nicht zu schweigen, denn eure Fragen könnten jemanden helfen, Logik zu verstehen (und ihm somit vielleicht sogar das Leben retten).

0.5 Sitzungsübersicht

Jedes Kapitel dieses Tutoriumsskripts (nicht zu verwechseln mit dem Kurs-Skript) ist in der Regel in drei Teile gegliedert:

1. **Vorbereitung:** Enthält eher einfache, einführende Übungen oder Begriffe.
2. **Übungen:** Beinhaltet die Aufgaben aus dem Kurs-Skript.
3. **Zusatzübungen:** Weitere Aufgaben für Studierende, die zusätzliche Übung wünschen.

Die Lösungen zu den meisten Übungen werden nach der jeweiligen Sitzung bereitgestellt.

Normalerweise wird jedes Kapitel in zwei halben Sitzungen (an zwei verschiedenen Tagen) behandelt:

- In der ersten Sitzung bearbeiten wir die Vorbereitungsübungen oder die einfacheren Übungen aus dem Kurs-Skript.
- Die zweite Sitzung konzentriert sich auf die schwierigeren Übungen aus dem Kursskript.

Aufgrund ihrer Komplexität werden die letzten beiden Kapitel mehr Zeit in Anspruch nehmen.

Im Folgenden sind alle Sitzungen der Gruppe I des Tutoriums **Logik I** für das Wintersemester 2025–26 in chronologischer Reihenfolge aufgeführt. Die Angaben in der Spalte ‚Thema' beziehen sich auf die Kapitel des Kursskripts von Prof. Leitgeb.

Nr.	Datum	Thema	Bemerkung
1	22.10.2025	Einf. & Ü. zu Kapitel 1	
2	29.10.2025	Ü. zu Kapitel 1	
3	5.11.2025	Ü. zu Kapitel 1 & 2–3	
4	12.11.2025	Ü. zu Kapitel 2–3	
5	19.11.2025	Ü. zu Kapitel 4 & 5	
6	26.11.2025	Ü. zu Kapitel 5	
7	29.11.2025	Ü. zu Kapitel 5 & 6	Samstag, 12:00–14:00, Online
8	6.12.2025	Ü. zu Kapitel 6	Samstag, 12:00–14:00, Online
9	13.12.2025	Ü. zu Kapitel 6 & 8	Samstag, 12:00–14:00, Online
		Winterpause	
10	7.1.2026	Ü. zu Kapitel 8, 9 & 10	
11	10.1.2026	Ü. zu Kapitel 10	Samstag, 12:00–14:00, Online Zusatztermin
12	14.1.2026	Ü. zu Kapitel 10 & 11	
13	17.1.2026	Ü. zu Kapitel 11	Samstag, 12:00–14:00, Online Zusatztermin
14	21.1.2026	Ü. zu Kapitel 11	
15	28.1.2026	Probeklausur 1	
16	30.1.2026	Probeklausur 2	Freitag, 18:00–20:00

Bemerkungen:

- Die meisten Treffen finden mittwochs von 16:00 bis 18:00 Uhr im Geschw.-Scholl-Pl. 1 (E), E 006 statt.
- Ausnahme 1: Die Sitzungen 7–10 finden online statt.

  Link: `https://lmu-munich.zoom-x.de/j/67669211312?pwd=LacxlbVCoQekQIsmZtbPP2tLwDLQPI.1`
- Ausnahme 2: Sitzung 14, die am Freitag (auch im Geschw.-Scholl-Pl. 1 (E), E 006) stattfindet.
- Es gibt keine Übungen zu den Kapiteln 7, 12–14.
- Zwischen dem 24.12.2025 und dem 6.1.2026 ist Winterpause.

0.6 Sprechstunden

Zusätzlich biete ich wöchentliche Sprechstunden an, in denen ihr offene Fragen klären, Übungsaufgaben besprechen.

Sprechstunde:	Montags, 18:00 & 20:00 Uhr
Gebäude:	Zimmer 223, Ludwigstraße 31, 80539 München
E-Mail:	L.Bartolo@campus.lmu.de

In den Sprechstunden könnt ihr mit mir auf Deutsch, Englisch, Französisch, Italienisch, Portugiesisch oder Spanisch sprechen.

Bemerkungen:

- Im Dezember finden die Sprechstunden nach Vereinbarung zwischen 12:00 und 13:00 Uhr online statt.
- Am 26.1.2026 entfällt die Sprechstunde um die Probeklausur zu machen.
- Die letzte Sprechstunde findet am 2.2.2026 statt.

0.7 Materialien

Ihr könnt dieses Tutoriumsskript sowie alle weiteren zusätzlichen Materialien für diese Übungsgruppe im folgenden GitHub-Repository finden:

`https://github.com/luisbartolo/Logik1-WiSe-25-26.git`

Vorbemerkungen 1

1.1 Vorbereitung

Meiner Meinung nach gehört das Folgende zu den Top-5 der schwierigsten Themen in Logik I[1]:

1. Prädikatenlogische Semantik
2. Anführungszeichen, Verwendung und Erwähnung
3. Herzleitungsregeln für Quantoren
4. Informelle Beweise
5. Herzleitungsstrategien

Kapitel 1 befasst sich genau mit dem Punkt 2 dieser Liste. Unsere Gehirne sind nicht dafür entwickelt, die zwischen Verwendung und Erwähnung – und noch mehr, die Bedeutung von Ausdrücken mit und ohne Anführungszeichen. Dieser vorbereitende Abschnitt wird Ihnen helfen, diesen Unterschied zu verstehen.

In der linken Spalte steht der Name des Ausdrucks, in der mittleren Spalte der Ausdruck selbst, und in der rechten Spalte die Bedeutung des Ausdrucks (aus der zweiten Spalte).[2]

Name	Ausdruck	Bedeutung
‚Angela Merkel'	Angela Merkel	
‚Allianz Arena'	Allianz Arena	

1: **Bemerkung:** Sie müssen diese Begriffe noch nicht verstehen, sondern nur bereit sein, sie in zukünftigen Lektionen wiederzuerkennen und ihnen besondere Aufmerksamkeit zu schenken.

2: **Bemerkung:** Stellen Sie sich vor, dass die Bilder von Angela Merkel und Allianz Arena nicht nur Fotos sind, sondern dass sie tatsächlich Angela Merkel und die Allianz Arena selbst sind! (Oder siehe Sektion 1.1.1.)

Aktivierungselement 1.1. Für jede der folgenden Aussagen: Geben Sie an, ob sie wahr (`w`) oder falsch (`f`) ist. (Leerzeichen und Punkte werden dabei nicht als Zeichen gezählt.) [Antwort]

1. Obwohl ‚Angela Merkel' und ‚die Allianz Arena' Ausdrücke sind, sind Angela Merkel und die Allianz Arena keine Ausdrücke. [ ]
2. Angela Merkel war Bundeskanzlerin von Deutschland. [ ]
3. ‚Angela Merkel' war Bundeskanzlerin von Deutschland. [ ]
4. ‚Angela Merkel' ist der Name von Angela Merkel. [ ]
5. Angela Merkel ist der Name von Angela Merkel. [ ]
6. Angela Merkel ist Angela Merkel. [ ]
7. Angela Merkel ist ‚Angela Merkel'. [ ]
8. ‚Angela Merkel' ist Angela Merkel. [ ]
9. ‚Angela Merkel' ist ‚Angela Merkel'. [ ]
10. ‚Angela Merkel' ist der Name einer früheren Bundeskanzlerin von Deutschland. [ ]
11. ‚‚Angela Merkel'' ist der Name von ‚Angela Merkel'. [ ]
12. ‚‚Angela Merkel'' ist der Name von ‚‚Angela Merkel''. [ ]
13. ‚‚Angela Merkel'' ist ‚‚‚Angela Merkel'''. [ ]
14. ‚Angela Merkel' ist der Name von ‚‚‚Angela Merkel'''. [ ]
15. Satz 2 hat 44 Zeichen. [ ]
16. ‚Angela Merkel war Bundeskanzlerin von Deutschland' hat 44 Zeichen. [ ]
17. Satz 2 hat 5 Zeichen. [ ]
18. ‚Angela Merkel war Bundeskanzlerin von Deutschland' hat 5 Zeichen. [ ]
19. ‚Satz 2' hat 44 Zeichen. [ ]
20. ‚Satz 2' hat 5 Zeichen. [ ]
21. Satz 15 und Satz 16 bedeuten das Gleiche. [ ]
22. Satz 15 und Satz 16 haben die gleiche Anzahl von Zeichen. [ ]
23. ‚Satz 15' und ‚Satz 16' bedeuten das Gleiche. [ ]
24. ‚Satz 15' und ‚Satz 16' haben die gleiche Anzahl von Zeichen. [ ]
25. ‚Satz 15' und ‚Satz 16' haben die gleichen Zeichen. [ ]

Beziehungen zwischen Ausdrücken und Namen

Die folgende Tabelle zeigt, wie Ausdrücke und Ausdrücke in Anführungszeichen in Bezug auf ihre Namen und Bedeutungen zueinander stehen.

Name	**Ausdruck**	**Bedeutung**
‚Allianz Arena‘	Allianz Arena	
‚‚Allianz Arena‘‘	‚Allianz Arena‘	Allianz Arena
‚‚‚Allianz Arena‘‘‘	‚‚Allianz Arena‘‘	‚Allianz Arena‘
‚‚‚‚Allianz Arena‘‘‘‘	‚‚‚Allianz Arena‘‘‘	‚‚Allianz Arena‘‘
‚‚‚‚‚Allianz Arena‘‘‘‘‘	‚‚‚‚Allianz Arena‘‘‘‘	‚‚‚Allianz Arena‘‘‘

Aktivierungselement 1.2. Fügen Sie die fehlenden Informationen in der Tabelle unten hinzu. (Stellen Sie sich wie zuvor vor, dass die Bilder nicht nur Bilder sind, sondern dass sie tatsächlich die Objekte selbst sind.)

Name der Ausdruck	**Ausdruck**	**Bedeutung**
‚Die Erde‘		
	Freddie Mercury	
‚‚‚2‘‘‘		‚2‘
‚‚Der Name der größten Musikband der Welt‘‘		
	Der Name des Komponisten von *Messiah* (HWV 56)	
	Der Name von ‚Richard Wagner‘	
‚Der Name von Deutschlands berühmtestem Formel-1-Fahrer‘		
‚Der Name von ‚Deutschlands berühmtestem Formel-1-Fahrer‘‘		

1.1.1 Anhang

Die folgende Tabelle wäre eine korrektere Version der Tabelle am Anfang dieses Dokuments:

Name	Ausdruck	Bedeutung
‚Ein Bild von Angela Merkel'	Ein Bild von Angela Merkel	
‚Ein Bild der Allianz Arena'	Ein Bild der Allianz Arena	

1.1.2 Lösungen

Lösung zu Aktivierungselement 1.1. Wir verwenden Hervorhebungen oder Unterstreichungen, um Ausdrücke zu betonen und Begriffe mit gleicher Bedeutung anzuzeigen.

1. Obwohl ‚Angela Merkel' und ‚die Allianz Arena' Ausdrücke sind, sind Angela Merkel und die Allianz Arena keine Ausdrücke. [w]

   Erklärung

   Angela Merkel und die Allianz Arena sind Gegenstände, nicht Ausdrucke.

2. Angela Merkel war Bundeskanzlerin von Deutschland. [w]
3. ‚Angela Merkel' war Bundeskanzlerin von Deutschland. [f]

   Erklärung

   Kein Ausdruck konnte Bundeskanzlerin werden.

4. ‚Angela Merkel' ist der Name von Angela Merkel. [w]
5. Angela Merkel ist der Name von Angela Merkel. [f]
6. Angela Merkel ist Angela Merkel. [w]

   Erklärung

   Ein Fisch ist ein Fisch. Oder?

7. Angela Merkel ist ‚Angela Merkel'. [f]

   Erklärung

   Angela Merkel ist kein Ausdruck ...

8. ‚Angela Merkel' ist Angela Merkel. [f]

   Erklärung

   ... und kein Ausdruck ist Angela Merkel.

9. ‚Angela Merkel' ist ‚Angela Merkel'. [w]
10. ‚Angela Merkel' ist der Name einer früheren Bundeskanzlerin
    von Deutschland. [w]

11. „Angela Merkel“ ist der Name von ‚Angela Merkel‘. [w]
12. „Angela Merkel“ ist der Name von „Angela Merkel“. [f]

Erklärung

Ein Ausdruck kann (normalerweise) nicht sein eigener Name sein.

13. „Angela Merkel“ ist „„Angela Merkel“‘. [f]

Erklärung

Wie in Satz 12.

14. ‚Angela Merkel‘ ist der Name von „„Angela Merkel“‘. [f]

Erklärung

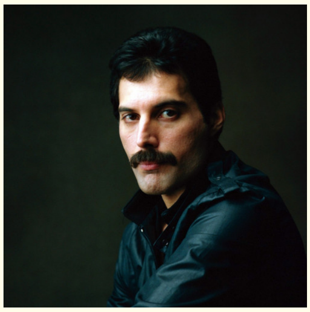
Ein Ausdruck kann nicht der Name seines Namens sein.

15. Satz 2 hat 44 Zeichen. [w]
16. ‚Angela Merkel war Bundeskanzlerin von Deutschland‘ hat 44 Zeichen. [w]
17. Satz 2 hat 5 Zeichen. [f]
18. ‚Angela Merkel war Bundeskanzlerin von Deutschland‘ hat 5 Zeichen. [f]
19. ‚Satz 2‘ hat 44 Zeichen. [f]
20. ‚Satz 2‘ hat 5 Zeichen. [w]
21. Satz 15 und Satz 16 bedeuten das Gleiche. [w]
22. Satz 15 und Satz 16 haben die gleiche Anzahl von Zeichen. [f]
23. ‚Satz 15‘ und ‚Satz 16‘ bedeuten das Gleiche. [f]
24. ‚Satz 15‘ und ‚Satz 16‘ haben die gleiche Anzahl von Zeichen. [w]
25. ‚Satz 15‘ und ‚Satz 16‘ haben die gleichen Zeichen. [f]

Erklärung

In ‚Satz 15‘ kommt eine ‚15‘ vor, aber nicht in ‚Satz 16‘.

Lösung zu Aktivierungselement 1.2.

Name	Ausdruck	Bedeutung
‚Die Erde‘	Die Erde	
‚Freddie Mercury‘	Freddie Mercury	
‚‚‚2‘‘‘	‚‚2‘‘	‚2‘
‚‚Der Name der größten Musikband der Welt‘‘	‚Der Name der größten Musikband der Welt‘	Der Name der größten Musikband der Welt
‚Der Name des Komponisten von *Messiah* (HWV 56)‘	Der Name des Komponisten von *Messiah* (HWV 56)	Georg Friedrich Händel
‚Der Name von ‚Richard Wagner‘‘	Der Name von ‚Richard Wagner‘	‚Richard Wagner‘
‚Der Name von Deutschlands berühmtestem Formel-1-Fahrer‘	Der Name von Deutschlands berühmtestem Formel-1-Fahrer	Michael Schumacher
‚Der Name von ‚Deutschlands berühmtestem Formel-1-Fahrer‘‘	Der Name von ‚Deutschlands berühmtestem Formel-1-Fahrer‘	‚Deutschlands berühmtestem Formel-1-Fahrer‘

1.2 Übungen

Übung 1.1. Wie viele Ausdruckstypen von Buchstaben bzw. Wörtern sind in jedem einzelnen der folgenden Sätze instantiiert, wie viele in allen Sätzen zusammen? Wie oft sind die Ausdruckstypen ‚a', ‚t', ‚d', ‚Hase' und ‚Nase' instantiiert?

1. Jeder Hase hat eine Nase.
2. Ich bin ein Hase.
3. Folglich habe ich eine Nase.

Übung 1.2. Ein logischer Laie äußert die drei unteren Übungssätze. Auf welche Arten lassen sich diese Sätze deuten, und was ist die wörtliche Deutung dieser Sätze?

1. Aristoteles hat 11 Buchstaben.
2. Dieser Satz hat 23 Zeichen.
3. ‚Dieser Satz' hat 10 Zeichen.

Übung 1.3. Geben Sie für jedes der folgenden Beispiele an, an welcher Stelle ein Ausdruck erwähnt bzw. verwendet wird, und wer oder was dabei jeweils erwähnt oder verwendet wird!

1. Aristoteles ist lang.
2. ‚Aristoteles' ist lang.
3. Aristoteles ist länger als ‚Aristoteles'.
4. ‚‚Aristoteles'' ist länger als ‚Aristoteles'.
5. ‚Aristoteles' bezeichnet nicht ‚Aristoteles', sondern Aristoteles. ‚‚Aristoteles'' hingegen bezeichnet nicht Aristoteles, sondern ‚Aristoteles'.
6. ‚Schnee ist weiß' ist wahr genau dann, wenn Schnee weiß ist.
7. Die Verwendung von ‚Verwendung' und von ‚Erwähnung' hilft, Verwendung von Erwähnung zu unterscheiden. Das ist der Grund meiner Erwähnung von ‚Die Verwendung von ‚Verwendung' und von ‚Erwähnung' hilft, Verwendung von Erwähnung zu unterscheiden.'
8. ‚Das Spielen mit der Unterscheidung von Verwendung und Erwähnung' ist nicht ‚alles im Leben, weißt du?'.
9. Dies ist ein Satz mit ‚Zwiebelringen', ‚Salatblättern', ‚Tomatenscheiben' und ‚Pommes Frites als Beilage'.

Übung 1.4. Welche der folgenden Zeichenfolgen sind Aussagesätze? Begründen Sie jeweils Ihre Antworten.

1. Herbert und Heidi sind befreundet.
2. Herbert und Heidi sind beliebt.
3. Herbert und Heidi sind beide nicht glücklich.
4. Herbert und Heidi lieben sich.
5. Herbert und Heidi lieben einander.
6. Es ist nicht der Fall, dass Herbert und Heidi beide nicht glücklich sind.
7. Oh nein, oh nein, oh nein! Das darf doch wohl nicht wahr sein!
8. Wenn Herbert in die Stadt gefahren ist, so sitzt er sicherlich bereits in seinem Büro.
9. An der Liebe Niederlagen
läßt der Dichter Lieder nagen.
(Mühsam)
10. Die Quadratwurzel aus Zwiebelsuppe und rechtwinkligem Lebertran ist mit Goethes Wanderjahren verheiratet und liebt Chopin mehr als die Kniekehlen ihrer Mutter.
11. Mein Bart ist genau dann rosarot, wenn ich mich weniger langeweile als die Fleischstrudelsuppe meiner Großmutter.
12. Ich weiß, dass $7 + 5 = 11$.
13. Thales von Milet, ein ionischer Naturphilosoph, sagte die Sonnenfinsternis vom 28. März 585 v. Chr. voraus.
14. Der Räuber sagte: ‚Geld oder Leben!', und er nahm beides.
15. Das Wetter ist heute grauenhaft, nicht wahr?
16. Wer andern eine Grube gräbt, fällt selbst hinein.
17. Zwei Trichter wandeln durch die Nacht.
Durch ihres Rumpfs verengten Schacht
fließt weißes Mondlicht
still und heiter
auf ihren
Waldweg
usw.
(Morgenstern)
18. Du sollst nicht töten.
19. balzerig würmelte es im mannechensee
und den weibern ward so pngstig ums heil
zumahn: wenn ein knie-ender sie hirschelte.
(Jandl)

20. Schweig, Elender!
21. Kleine Lügen und auch kleine
    Kinder haben kurze Beine.
    (Ringelnatz)
22. Die Eins sind nicht nur, sondern sie erhalten sich durch ihr gegenseitiges Ausschließen. (Hegel)
23. Wer in Wasser badet, kann nass werden.
24. Der April macht, was er will.
25. Dornröschen wurde von einem wunderschönen Prinzen durch einen zärtlichen Kuss aus einem tiefen Schlaf erweckt.
26. Österreich hat sich nach dem Staatsvertrag im Jahre 1955 durch ein Verfassungsgesetz zur Neutralität verpflichtet.
27. Dieses Verfassungsgesetz muss abgeschafft werden.
28. Dieses Lied gefällt mir besonders gut.
29. ’s echt cool, eh?
30. Der Satz mit der Nummer 30 auf dieser Seite ist falsch.

1.2.1 Lösungen

Lösung zu Übung 1.1. Wie viele Ausdruckstypen von Buchstaben bzw. Wörtern sind in jedem einzelnen der folgenden Sätze instantiiert, wie viele in allen Sätzen zusammen? Wie oft sind die Ausdruckstypen ‚a', ‚t', ‚d', ‚Hase' und ‚Nase' instantiiert?

Bemerkung: Leerzeichen und Punkte werden nicht als Zeichen gezählt. Zwei Ausdrücke, die dieselben Buchstaben in derselben Reihenfolge enthalten, aber sich in der Groß- und Kleinschreibung unterscheiden, gelten als Ausdrücke desselben Ausdruckstyps.

1. Jeder Hase hat eine Nase.

Antwort

- 10 Buchstabentypen: ‚j', ‚d', ‚r', ‚t', ‚i' (einmal); ‚h', ‚s', ‚n' (zweimal); ‚a' (dreimal); ‚e' (sechsmal).
- ‚Nase' (einmal); ‚Hase' (einmal).

2. Ich bin ein Hase.

Antwort

- 8 Buchstabentypen: ‚c', ‚b', ‚a', ‚s' (einmal); ‚h', ‚n', ‚e' (zweimal); ‚i' (dreimal).
- ‚Nase' (niemals); ‚Hase' (einmal).

3. Folglich habe ich eine Nase.

Antwort

- 12 Buchstabentypen: ‚f', ‚o', ‚g', ‚b', ‚n', ‚s' (einmal); ‚l', ‚c', ‚a' (zweimal); ‚i', ‚h' (dreimal); ‚e' (viermal).
- ‚Nase' (einmal); ‚Hase' (niemals).

Lösung zu Übung 1.2. Ein logischer Laie äußert die drei unteren Übungssätze. Auf welche Arten lassen sich diese Sätze deuten, und was ist die wörtliche Deutung dieser Sätze?

1. Aristoteles hat 11 Buchstaben.

Antwort

(Der Eigenname) ‚Aristoteles' (in deutscher Rechtschreibung) hat Buchstaben.

Erklärung

Wenn man den Satz wörtlich nimmt, besagt er, dass die Person Aristoteles selbst 11 Buchstaben besitzt. Das wäre unsinnig, da Personen nicht aus Buchstaben bestehen.

2. Dieser Satz hat 23 Zeichen.

Antwort: Der Satz 2 hat 23 Zeichen.

Erklärung: Solche Zeichen sind: ‚D', ‚i', ..., ‚e' und ‚n'.

3. ‚Dieser Satz' hat 10 Zeichen.

Antwort: (Der Ausdruck) ‚Dieser Satz' hat 10 Zeichen.

Erklärung: Solche Zeichen sind: ‚D', ‚i', ..., ‚t' und ‚z'.

Bemerkung: Im Folgenden präsentiere ich eigene Lösungsversuche zu den Aufgaben. Danach werde ich jeweils prüfen, ob diese Vorschläge korrekt sind. Einige der Antworten basieren auf Lösungen von Studierenden aus früheren Kursen.

Lösung zu Übung 1.3. Geben Sie für jedes der folgenden Beispiele an, an welcher Stelle ein Ausdruck erwähnt bzw. verwendet wird, und wer oder was dabei jeweils erwähnt oder verwendet wird!

1. Aristoteles ist lang.

Lösungsversuch

Der Ausdruck Aristoteles wird erwähnt und der Ausdruck ‘Aristoteles’ wird verwendet.

Erklärung: Nicht völlig korrekt. Die Antwort ist korrekt in Bezug auf die Anführungszeichen. Aristoteles ist jedoch keine Ausdruck, sondern eine Person, deren Name ‚Aristoteles‘ ist.

2. ‚Aristoteles‘ ist lang.

Lösungsversuch

(Der Ausdruck) ‚Aristoteles‘ wird erwähnt und (der Ausdruck) ‚‚Aristoteles‘‘ wird verwendet.

Erklärung: Korrekt!

3. Aristoteles ist länger als ‚Aristoteles‘.

Lösungsversuch

(Der Philosoph) Aristoteles und (sein Name) ‚Aristoteles‘ werden erwähnt. Ihre jeweiligen Namen, ‚Aristoteles‘ und ‚‚Aristoteles‘‘, werden verwendet.

Erklärung: Korrekt! Andere Lösung wäre: ‚Aristoteles‘ wird links verwendet und rechts erwähnt.

4. ‚‚Aristoteles‘‘ ist länger als ‚Aristoteles‘.

Lösungsversuch

Aristoteles, ‚Aristoteles‘ und ‚‚Aristoteles‘‘ werden erwähnt. ‚Aristoteles‘ und ‚‚Aristoteles‘‘ werden verwendet.

Erklärung: Nicht korrekt! Der Satz handelt nicht von dem Philosophen.

5. ‚Aristoteles' bezeichnet nicht ‚Aristoteles', sondern Aristoteles. ‚‚Aristoteles'' hingegen bezeichnet nicht Aristoteles, sondern ‚Aristoteles'.

Lösungsversuch

Die Ausdrücke ‚Aristoteles' und ‚‚Aristoteles'', sowie die Person Aristoteles werden erwähnt. Die Ausdrücke ‚Aristoteles', ‚‚Aristoteles'' und ‚‚‚Aristoteles''' werden verwendet.

Erklärung: Korrekt! Außerdem ist der Satz wahr.

6. ‚Schnee ist weiß' ist wahr genau dann, wenn Schnee weiß ist.

Lösungsversuch

Korrekt! Der Satz ‚Schnee ist weiß' ist links erwähnt und rechts verwendet.

Erklärung: Korrekt! Man kann auch sagen: Es wurde erwähnt, dass Schnee weiß ist.

7′. Die Verwendung von ‚Verwendung' und von ‚Erwähnung' hilft, Verwendung von Erwähnung zu unterscheiden.

Bemerkung: Wir könnten 7′ wie folgt umformulieren:

> Wenn wir ‚Verwendung' und ‚Erwähnung' verwenden, ist es einfacher zwischen Verwendung und Erwähnung zu unterscheiden.

7. Die Verwendung von ‚Verwendung' und von ‚Erwähnung' hilft, Verwendung von Erwähnung zu unterscheiden. Das ist der Grund meiner Erwähnung von ‚Die Verwendung von ‚Verwendung' und von ‚Erwähnung' hilft, Verwendung von Erwähnung zu unterscheiden.'

Lösungsversuch 1

Verwendet werden ‚Verwendung', ‚Erwähnung', ‚‚Verwendung'', ‚‚Erwähnung'', sowie der Satz 7′.

Erklärung: Nicht völlig korrekt! Alles stimmt, bis auf den letzten Punkt. Es ist nicht ganz korrekt zu sagen, dass der Satz 7′ tatsächlich verwendet wurde.

Angenommen, ich habe Folgendes gesagt:

(a) Ich bin Luis.

(b) Ich sagte: ‚Ich bin Luis.'

Im Satz (a) habe ich den Satz ‚Ich bin Luis' verwendet (und erwähnt, dass ich Luis bin).

Im Satz (b) habe ich ‚Ich bin Luis' erwähnt, und zugleich ‚‚Ich bin Luis'' verwendet. Aber ‚‚Ich bin Luis'' ist kein Satz, sondern der Name des Satzes ‚Ich bin Luis'.

Lösungsversuch 2

Erwähnt werden Verwendung, Erwähnung, ‚Verwendung', ‚Erwähnung', und der Satz 7′.

Erklärung: Korrekt! Wie im 6, kann man auch antworten: Es wurde erwähnt, dass die Verwendung von ‚Verwendung' und von ‚Erwähnung' hilft, Verwendung von Erwähnung zu unterscheiden.

8. ‚Das Spielen mit der Unterscheidung von Verwendung und Erwähnung' ist nicht ‚alles im Leben, weißt du?'.

Lösungsversuch

Erwähnt ist, dass das Spielen mit der Unterscheidung von Verwendung und Erwähnung nicht alles im Leben ist, oder?

Erklärung: Nicht korrekt. Erwähnt werden die Ausdrücke, mit denen wir das erwähnen könnten.

Bemerkung: Betrachten Sie die folgenden zwei Sätze:

(a) Aristoteles ist der Stagirit.

(b) ‚Aristoteles' ist ‚der Stagirit'.

(c) Aristoteles und der Stagirit bedeuten dasselbe.

(d) ‚Aristoteles' und ‚der Stagirit' bedeuten dasselbe.

Der Satz (a) ist wahr, aber der Satz (b) ist falsch. Beachten Sie aber, dass (c) zwar keinen Sinn ergibt, aber (d) wahr ist. Sie sind ein und dieselbe Person, und Personen haben keine sprachliche Bedeutung.

9. Dies ist ein Satz mit ‚Zwiebelringen', ‚Salatblättern', ‚Tomatenscheiben' und ‚Pommes Frites als Beilage'.

Lösungsversuch

Erwähnt werden ‚Zwiebelringen', ‚Salatblättern', ‚Tomatenscheiben' und ‚Pommes Frites als Beilage'. Verwendet werden Zwiebelringen, Salatblättern, Tomatenscheiben und Pommes Frites als Beilage.

Erklärung: Korrekt hinsichtlich Erwähnung, aber nicht korrekt hinsichtlich Verwendung. Ein Satz ist keine Zubereitung von Nahrung.

Frage: Ist dieser Satz wahr oder falsch?

Lösung zu Übung 1.4. Welche der folgenden Zeichenfolgen sind Aussagesätze? Begründen Sie jeweils Ihre Antworten. [Antwort]

1. Herbert und Heidi sind befreundet. ja
2. Herbert und Heidi sind beliebt. ja
3. Herbert und Heidi sind beide nicht glücklich. ja
4. Herbert und Heidi lieben sich. ja
5. Herbert und Heidi lieben einander. ja
6. Es ist nicht der Fall, dass Herbert und Heidi beide nicht glücklich sind. ja
7. Oh nein, oh nein, oh nein! Das darf doch wohl nicht wahr sein! nein
8. Wenn Herbert in die Stadt gefahren ist, so sitzt er sicherlich bereits in seinem Büro. ja
9. An der Liebe Niederlagen
   läßt der Dichter Lieder nagen.
   (Mühsam) vielleicht
10. Die Quadratwurzel aus Zwiebelsuppe und rechtwinkligem Lebertran ist mit Goethes Wanderjahren verheiratet und liebt Chopin mehr als die Kniekehlen ihrer Mutter. nein
11. Mein Bart ist genau dann rosarot, wenn ich mich weniger langeweile als die Fleischstrudelsuppe meiner Großmutter.
    nein
12. Ich weiß, dass $7 + 5 = 11$. ja
13. Thales von Milet, ein ionischer Naturphilosoph, sagte die Sonnenfinsternis vom 28. März 585 v. Chr. voraus. ja
14. Der Räuber sagte: ‚Geld oder Leben!‘, und er nahm beides.
    vielleicht

15. Das Wetter ist heute grauenhaft, nicht wahr? vielleicht

> **Erklärung:** Dieser Satz zeigt, wie schwer es manchmal ist zu bestimmen, ob ein Satz ein Aussagesatz ist.
>
> **Fragesatz:** Wegen ‚nicht wahr?' wirkt er wie eine Frage.
>
> **Rhetorische Frage:** Als rhetorische Frage könnte er eine Aussage implizieren.
>
> **Ästhetisches Urteil:** Er enthält ein subjektives Urteil mit dem Wort ‚grauenhaft'.
>
> **Aussagesatz mit Wertung:** Wenn ästhetische Urteile wahr oder falsch sein könnten, wäre es ein Aussagesatz.

16. Wer andern eine Grube gräbt, fällt selbst hinein. vielleicht

17. Zwei Trichter wandeln durch die Nacht.
 Durch ihres Rumpfs verengten Schacht
 fließt weißes Mondlicht
 still und heiter
 auf ihren
 Waldweg
 usw.
 (Morgenstern) vermutlich nein

18. Du sollst nicht töten. nein

19. balzerig würmelte es im mannechensee
 und den weibern ward so pngstig ums heil
 zumahn: wenn ein knie-ender sie hirschelte.
 (Jandl) nein

20. Schweig, Elender! nein

21. Kleine Lügen und auch kleine
 Kinder haben kurze Beine.
 (Ringelnatz) vielleicht

22. Die Eins sind nicht nur, sondern sie erhalten sich durch ihr gegenseitiges Ausschließen. (Hegel)

 dafür werde ich nicht bezahlt!

23. Wer in Wasser badet, kann nass werden. ja

24. Der April macht, was er will. vielleicht

25. Dornröschen wurde von einem wunderschönen Prinzen durch einen zärtlichen Kuss aus einem tiefen Schlaf erweckt.

 vielleicht

26. Österreich hat sich nach dem Staatsvertrag im Jahre 1955 durch ein Verfassungsgesetz zur Neutralität verpflichtet. ja

27. Dieses Verfassungsgesetz muss abgeschafft werden.

    vielleicht

28. Dieses Lied gefällt mir besonders gut. ja

29. ’s echt cool, eh? ja

30. Der Satz mit der Nummer 30 auf dieser Seite ist falsch.

    dafür werde ich bezahlt!

Erklärung: Wenn Satz 30 ein Aussagesatz ist, müsste er entweder wahr oder falsch sein. Nehmen wir an, er ist wahr: Dann behauptet er seine eigene Falschheit, was zu einem Widerspruch führt. Nehmen wir an, er ist falsch: Dann wäre die Aussage, dass er falsch ist, wahr. In beiden Fällen ergibt sich ein Widerspruch.

Dies wirft die Frage auf, ob Satz 30 wirklich ein Aussagesatz ist. Die meisten philosophischen Positionen schließen die Möglichkeit aus, dass ein Satz sowohl wahr als auch falsch sein kann, aber einige Positionen wie der Dialetheismus lassen dies zu. Somit bleibt es eine philosophische Frage, wie wir Satz 30 letztlich verstehen.

1.3 Zusatzübungen

Zusatzübung 1.1. Sind diese Sätze wahr oder falsch?

1. ‚Allianz Arena' ist eine Arena in München. [ ]
2. Allianz Arena ist keine Arena. [ ]
3. Allianz Arena und ‚Allianz Arena' bedeuten das Gleiche. [ ]
4. Allianz Arena und der Name von Allianz Arena bedeuten das Gleiche. [ ]
5. ‚Allianz Arena' und der Name von Allianz Arena bedeuten das Gleiche. [ ]
6. Allianz Arena und Allianz Arena bedeuten das Gleiche. [ ]
7. Allianz Arena und der Name von ‚Allianz Arena' bedeuten das Gleiche. [ ]
8. Allianz Arena und Allianz Arena haben die gleichen Zeichen. [ ]
9. ‚Allianz Arena' und ‚Allianz Arena' haben die gleichen Zeichen. [ ]
10. ‚Allianz Arena' ist der Name von Allianz Arena. [ ]
11. ‚Allianz Arena' ist ‚Allianz Arena'. [ ]
12. Satz 10 und Satz 11 sind äquivalent. [ ]
13. Satz 10 und Satz 11 haben die gleiche Zeichenanzahl. [ ]
14. ‚Satz 10' und ‚Satz 11' sind äquivalent. [ ]
15. ‚Satz 10' und ‚Satz 11' haben die gleiche Zeichenanzahl. [ ]

1.3.1 Lösungen

Lösung zu Zusatzübung 1.1.

1. ‚Allianz Arena' ist eine Arena in München. falsch
2. Allianz Arena ist keine Arena. falsch
3. Allianz Arena und ‚Allianz Arena' bedeuten das Gleiche. falsch
4. Allianz Arena und der Name von Allianz Arena bedeuten das Gleiche. falsch
5. ‚Allianz Arena' und der Name von Allianz Arena bedeuten das Gleiche. wahr
6. Allianz Arena und Allianz Arena bedeuten das Gleiche. falsch
7. Allianz Arena und der Name von ‚Allianz Arena' bedeuten das Gleiche. falsch
8. Allianz Arena und Allianz Arena haben die gleichen Zeichen. falsch
9. ‚Allianz Arena' und ‚Allianz Arena' haben die gleichen Zeichen. wahr
10. ‚Allianz Arena' ist der Name von Allianz Arena. wahr
11. ‚Allianz Arena' ist ‚Allianz Arena'. wahr
12. Satz 10 und Satz 11 sind äquivalent. wahr
13. Satz 10 und Satz 11 haben die gleiche Zeichenanzahl. falsch
14. ‚Satz 10' und ‚Satz 11' sind äquivalent. falsch
15. ‚Satz 10' und ‚Satz 11' haben die gleiche Zeichenanzahl. wahr

Erklärung

- Sätze 1–4 sind falsch: ‚Allianz Arena' ist keine Arena, sondern ein Ausdruck, der der Name der Allianz Arena ist.
- Sätze 6–8 sind falsch: Die Allianz Arena hat keine Bedeutung, da es sich nicht um einen Ausdruck handelt.

Aussagenlogische Analyse und Repräsentierung | 2-3

2-3.1 Vorbereitung

Einfache vs. komplexe (nicht einfache) Aussagesätze

Definition: Einfacher Aussagesatz

Enthält keinerlei logische Begriffe, weder aussagenlogische- (z.B. Konjunktion, Disjunktion, Verneinung, usw.) noch prädikatlogische- noch Modalbegriffe (z. B. Notwendigkeit, Möglichkeit) oder andere logische Begriffe wie Kausalität, Wissen oder Glauben (siehe Seiten 66–73 des Kursskripts).

Beispiel

- Peter ist müde.

  Logische und Aussagenlogische Repräsentation. p

  (Enthält überhaupt keinen logischen Begriff.)

Definition: Komplexer (oder nicht einfacher) Aussagesatz

Enthält mindestens einen logischen Begriff, sei es ein aussagenlogische- (z. B. Konjunktion, Disjunktion, Verneinung, usw.) oder andere logische Begriffe.

Beispiele

- Peter ist <u>nicht</u> müde.

  Aus. Repr.: $\neg p$

- Peter ist müde <u>oder</u> Peter ist <u>nicht</u> müde.

  Aus. Repr.: $p \vee \neg p$

- Jemand ist müde.

  Prädikatenlogische Repr.: $\exists x\, M(x)$

- <u>Möglicherweise</u> ist Peter müde.

  Modallogische Repr.: $\Diamond p$

Aussagenlogisch unzerlegbare vs. zerlegbare Aussagesätze

Definition: Aussagenlogisch unzerlegbarer Aussagesatz

Kann *nicht* mit den Operatoren der klassischen Aussagenlogik (Konjunktion, Disjunktion, Verneinung, usw.) in kleinere Teilaussagen analysiert werden.

Beispiele

- Peter ist müde.

  Logische Repr.: p

  (Enthält überhaupt keinen logischen Begriff.)

- Möglicherweise ist Peter müde.

  Mod. Repr.: $\Diamond p$

  Aus. Repr.: p

  (‚Möglicherweise' ist kein aussagenlogischer Begriff.)

- Möglicherweise: Peter ist müde oder Peter ist nicht müde.

  Mod. Repr.: $\Diamond(p \vee \neg p)$

  Aus. Repr.: p

  ($\vee$ und $\neg$ liegen im Skopus von $\Diamond$.)

Definition: Aussagenlogisch zerlegbarer Aussagesatz

Kann mit Hilfe seiner aussagenlogischen Operationen weiter in kleinere Teilaussagen analysiert werden.

Beispiele

- Peter ist müde <u>oder</u> Peter ist <u>nicht</u> müde.

  Aus. Repr.: $p \vee \neg p$

- Es ist <u>nicht</u> möglich, dass Peter müde ist.

  Mod. Repr.: $\neg\Diamond p$

  Aus. Repr.: $\neg p$

- Möglicherweise ist Peter müde oder möglicherweise ist Peter nicht müde.

  Mod. Repr.: $\Diamond p \vee \Diamond\neg p$

  Aus. Repr.: $p \vee q$

  ($\vee$ liegt außerhalb, aber $\neg$ liegt im Skopus von $\Diamond$.)

Beispiele für alle möglichen Kombinationen

Beispiel: Einfach und aussagenlogisch unzerlegbar

- Otto ist ein Musiker.

  Logische. Repr.: p

Erklärung

Tatsächlich ist jeder einfache Aussagesatz auch aussagenlogisch unzerlegbar.

Einfach und aussagenlogisch zerlegbar?

Unmöglich, da einfache Aussagesätze keine logischen Konnektoren enthalten, einschließlich aussagenlogischer Konnektoren.

Beispiele: Komplex und aussagenlogisch unzerlegbar.

- Möglicherweise ist Otto ein Musiker.

  Mod. Repr.: $\Diamond p$

  Aus. Repr.: p

- Möglicherweise: ist Otto ein Musiker oder auch nicht.

  Mod. Repr.: $\Diamond(p \vee \neg p)$

  Aus. Repr.: p

Beispiele: Komplex und aussagenlogisch zerlegbar

- Es ist nicht möglich, dass Otto ein Musiker ist.

  Mod. Repr.: $\neg\Diamond p$

  Aus. Repr.: $\neg p$

- Möglicherweise ist Otto ein Musiker oder möglicherweise ist er es nicht.

  Mod. Repr.: $\Diamond p \vee \Diamond\neg p$

  Aus. Repr.: $p \vee q$

Erklärung

Tatsächlich ist jede aussagenlogisch zerlegbare Aussagesätze auch komplex.

2-3.2 Übungen

2-3.2.1 Übungen zu Kapitel 2

Übung 2.1. Welche Aussagesätze in Übung 1.4 sind einfach?

Übung 2.2. Beantworten Sie die folgenden Fragen:

1. Ist in Übung 1.4 der Satz 6 die Negation des Satzes 3?

2. Ist in Übung 1.4 der Satz 3 die Negation des Satzes ‚Herbert ist nicht glücklich und Heidi ist nicht glücklich.'?

3. Welcher der Sätze 1–6 in Übung 1.4 ist ein Konjunktionssatz?

4. Was ist die Disjunktion der Aussagesätze ‚Heute schneit es nicht.' und ‚Die Straßen sind glatt.'?

5. Was ist die Implikation der Aussagesatze ‚Herbert ist glücklich.' und ‚Heidi ist glücklich'?

6. Geben Sie die Negation dieses Satzes an!

7. Ist der Satz ‚Wenn Dieter Bohlen österreichischer Bundeskanzler ist, dann ist der Papst österreichischer Bundeskanzler' wahr oder falsch?

Übung 2.3. Welche Aussagesätze in Übung 1.4 sind unzerlegbar aber nicht einfach?

Übung 2.4. Welche der folgenden Aussagesätze sind aussagenlogisch unzerlegbar? Welche der aussagenlogisch unzerlegbaren Aussagesätze sind einfach?

Übung 2.5. Bringen Sie die folgenden Argumente in Standardform.

1. Wenn Fips eine Katze ist, dann jagt Fips gerne Mause. Fips jagt aber nicht gerne Mause. Somit ist Fips keine Katze.

2. Wenn Fips eine Katze ist, dann trinkt Fips gerne Milch. Fips ist eine Katze. Folglich trinkt Fips gerne Milch.

3. Wenn Fips eine Katze ist, dann trinkt Fips gerne Milch. Fips trinkt gerne Milch. Folglich ist Fips eine Katze.

4. Fips ist eine Katze. Denn: Wenn Fips eine Katze ist, dann trinkt Fips gerne Milch. Fips trinkt gerne Milch.

5. Also ist Fips eine Katze oder er ist keine Katze.

6. Sokrates ist Philosoph und Grieche. Platon ist Philosoph und Grieche. Aristoteles ist Philosoph und Grieche. Daher sind alle Philosophen Griechen.

2-3.2.2 Übungen zu Kapitel 3

Übung 3.1. Repräsentieren Sie die folgenden Aussagesatze:

1. Wenn Dieter Bohlen 2013 Bundeskanzler wird, dann werden die Konservativen, aber nicht die Grünen in die Regierung gehen.

2. Wenn der Täter mit dem gestohlenen Auto flüchtete, so kann er, sofern die Zollbeamten nicht wachsam waren, schon über die Grenze sein, doch wenn er nicht mit dem gestohlenen Auto flüchtete, sondern zu Fuß ging, so kann er nicht weit gekommen sein.

Übung 3.2.1. Repräsentieren die Aussagesätze aus Übung 1.4.

Übung 3.2.2. Repräsentieren die Aussagesätze aus Übung 2.4.

Übung 3.3. Repräsentieren Sie die Argumente aus Übung 2.5.

Übung 3.4. Repräsentieren Sie die folgenden Argumente:

1. Der Papst ist Deutscher. Daher tritt Osterreich 2011 genau dann aus der EU aus, wenn Osterreich dies tut.

2. Bad Goisern ist die Hauptstadt von Oberosterreich und Bad Goisern ist nicht die Hauptstadt von Oberosterreich. Daher existiert Gott.

2-3.2.3 Lösungen

Bem.: Bedenken Sie, dass Formalisierung keine exakte Wissenschaft ist. Aus diesem Grund sind einige der folgenden Lösungen nur eine von vielen denkbaren Möglichkeiten

Lösung zu Übungen 2.1, 2.3 und 3.2.1. **(2.1)** Welche Aussagesätze in Übung 1.4 sind einfach? **(2.3)** Welche Aussagesätze in Übung 1.4 sind unzerlegbar aber nicht einfach? **(3.2.1)** Repräsentieren die Aussagesätze aus Übung 1.4.

1. Herbert und Heidi sind befreundet.

Antwort 1: aussagenlogisch unzerlegbar, einfach **Repr.:** p

Zwischenformalisation: Befreundet(Herbert, Heidi)

Antwort 2: aus. zerlegbar, komplex **Repr.:** $p \wedge q$

Zwisch.: Freund(Herbert, Heidi) ∧ Freund(Heidi, Herbert)

2. Herbert und Heidi sind beliebt.

Antwort: aus. zerlegbar, komplex **Repr.:** $p \wedge q$

Zwisch.: Beliebt(Herbert) ∧ Beliebt(Heidi)

3. Herbert und Heidi sind beide nicht glücklich.

Antwort 1: aus. zerlegbar, komplex **Repr.:** $\neg p$

Falls ‚beide' als ‚zusammen' verstanden wird.

Zwisch.: ¬Glücklich(Herbert, Heidi)

Bem.: Die ‚¬' macht diese Formalisierung aus. zerlegbar.

Antwort 2: aus. zerlegbar, komplex **Repr.:** $\neg(p \wedge q)$

Falls ‚beide' nicht als ‚zusammen' verstanden wird.

Zwisch.: ¬Glücklich(Herbert) ∧¬Glücklich(Heidi)

4. Herbert und Heidi lieben sich.

Antwort 1: aus. zerlegbar, komplex **Repr.:** $p \wedge q$

Falls ‚sich' eine reflexive Bedeutung hat.

Zwisch.: Liebt(Herbert, Herbert) ∧ Liebt(Heidi, Heidi)

Antwort 2

Falls ‚sich' eine nicht-reflexive Bedeutung hat, ist die Antwort wie im Satz 5.

5. Herbert und Heidi lieben einander.

Antwort 1: aus. zerlegbar, komplex **Repr.:** $p \wedge q$

Falls wir das Prädikat ‚Liebt' benutzen möchten.

Zwisch.: Liebt(Herbert, Heidi) ∧ Liebt(Heidi, Herbert)

Antwort 2: aus. unzerlegbar, einfach **Repr.:** p

Falls wir das Prädikat ‚Einander_Lieben' einführen möchten.

Zwisch.: Einander_Lieben(Herbert,Heidi)

6. Es ist nicht der Fall, dass Herbert und Heidi beide nicht glücklich sind.

Antwort 1: aus. zerlegbar, komplex **Repr.:** $\neg\neg p$

Falls ‚beide' als ‚zusammen' verstanden wird.

Zwisch.: ¬¬Glücklich(Herbert, Heidi)

Bem.: ‚$\neg\neg p$' ist logisch äquivalent zu der Formel ‚p', die einfach ist. ‚$\neg\neg p$' selbst ist jedoch komplex.

Antwort 2: aus. zerlegbar, komplex **Repr.:** $\neg\neg(p \wedge q)$

Falls ‚beide' nicht als ‚zusammen' verstanden wird.

Zwisch.: ¬(¬Glücklich(Herbert) ∧¬Glücklich(Heidi))

8. Wenn Herbert in die Stadt gefahren ist, so sitzt er sicherlich bereits in seinem Büro.

Antwort: aus. zerlegbar, komplex **Repr.:** $p \rightarrow q$

Zwisch.: Gefahren(Herbert, die Stadt) ⟶ Sitzt(Herbert, Büro)

12. Ich weiß, dass 7 + 5 = 11.

Bem.: ‚K_x' bezeichnet den epistemisch-logischen Operator ‚x weiß'.

Antwort: aus. unzerlegbar, komplex **Repr.:** p

Zwisch.: $\mathsf{K}_{ich}(7 + 5 = 11)$

13. Thales von Milet, ein ionischer Naturphilosoph, sagte die Sonnenfinsternis vom 28. März 585 v. Chr. voraus.

Antwort: aus. zerlegbar, komplex

Zwisch.: Ionischer(Thales) ∧ Naturphilosoph(Thales) ∧ Voraussagte(Thales, die Sonnenfinsternis vom 28. März 585 v. Chr.)

Repr. 1: $(p \wedge q) \wedge r$ **Repr. 2:** $p \wedge (q \wedge r)$

14. Der Räuber sagte: ‚Geld oder Leben!', und er nahm beides.

Antwort: aus. zerlegbar, komplex

Zwisch.: Sagte(Rauber, ‚Geld oder Leben!') ∧ Nahm(Räuber, Geld) ∧ Nahm(Räuber, Leben)

Repr. 1: $(p \wedge q) \wedge r$ **Repr. 2:** $p \wedge (q \wedge r)$

18. Du sollst nicht töten.

Antwort: aus. unzerlegbar, komplex **Repr.:** p

Zwisch.: O¬(Du tötest)

Bem. 1: ‚O' bezeichnet den Modaloperator ‚sollte'.
Bem. 2: Beachten Sie, dass beide Antworten zwei möglichen Interpretationen dieses Satzes entsprechen. Welche wäre die beste Interpretation in der Alltagssprache?

Antwort: aus. zerlegbar, komplex **Repr.:** $\neg p$

Zwisch.: ¬O(Du tötest)

21. Kleine Lügen und auch kleine
Kinder haben kurze Beine.
(Ringelnatz)

Antwort: aus. zerlegbar, komplex **Repr.:** $p \wedge q$

Falls der Satz wörtlich interpretiert wird.

Zwisch.: Für alle x (Klein_Kind(x) ⟶ Kleine_Beine(x)) ∧ Für alle x (Kleine_Lüge(x) ⟶ Kleine_Beine(x))

23. Wer in Wasser badet, kann nass werden.

Antwort: aus. unzerlegbar, komplex **Repr.:** p

Zwisch.: Für alle x (Badet(x, Wasser) ⟶ ◇Nass_Werden(x))

24. Der April macht, was er will.

Antwort: aus. unzerlegbar, komplex **Repr.:** p

Falls der Satz in dem Sinne interpretiert wird, dass sich das Klima im April unvorhersehbar verhält.

Zwisch.: Für alle x (Klima_von(x, April) $\rightarrow$ Unvorhersehbar(x))

Bem.: ‚Klima_von(x, y)' bedeutet x ist das Klima von y.

25. Dornröschen wurde von einem wunderschönen Prinzen durch einen zärtlichen Kuss aus einem tiefen Schlaf erweckt.

Antwort: aus. unzerlegbar, komplex **Repr.:** p

Zwisch.: Erweckt_aus(Dornröschen, tiefer Schlaf), weil Geküsst_von(Dornröschen, Prinz)

26. Österreich hat sich nach dem Staatsvertrag im Jahre 1955 durch ein Verfassungsgesetz zur Neutralität verpflichtet.

Antwort: aus. unzerlegbar, einfach **Repr.:** p

Zwisch.: Verpflichtet_zu_durch_nacht(Östereich, Neutralität, Verfassungsgesetz, Staatsvertrag im Jahre 1955)

27. Dieses Verfassungsgesetz muss abgeschafft werden.

Bem.: ‚O' bezeichnet den Modaloperator ‚sollen'.

Antwort: aus. unzerlegbar, komplex **Repr.:** p

Zwisch. 1: $\Box$Abschaffen(dieses Verfassungsgesetz)

Zwisch. 2: OAbschaffen(dieses Verfassungsgesetz)

28. Dieses Lied gefällt mir besonders gut.

Antwort: aus. unzerlegbar, einfach **Repr.:** p

Zwisch.: Gefällt(mir, dieses Lied)

29. 's echt cool, eh?

Antwort: aus. unzerlegbar, einfach **Repr.:** p

Zwisch.: Echt_Cool(es)

Bem.: Falls es im Kontext klar ist, was ‚es' ist.

30. Der Satz mit der Nummer 30 auf dieser Seite ist falsch.

Antwort: aus. unzerlegbar?, komplex?

Zwisch.: Falsch(Falsch(Falsch(...Falsch(...)...)))

Repr.: Gibt es nicht.

Erklärung

Unmöglich in der Aussagenlogik zu formalisieren. Das Naheliegendste, was wir tun können, ist das Folgende:

$$p \leftrightarrow \neg p.$$

Da diese Formel aber keine hinreichende Formalisierung des Satzes 30 ist, können wir nicht sagen, dass Satz 30 aussagenlogisch zerlegbar ist. Man könnte argumentieren, dass er komplex ist, da das Falschheitsprädikat angeblich ein logischer Begriff ist. Diese Überlegung wäre zu beachten, wenn wir davon ausgehen, dass Satz 30 ein Aussagesatz ist.

Lösung zu Übung 2.2. Beantworten Sie die folgenden Fragen:

1. Ist in Übung 1.4 der Satz 6 die Negation des Satzes 3? ja

Bemerkung

Es ist jedoch zu beachten, dass die Sätze 3 und 6 zwei mögliche Formalisierungen haben. Die entsprechenden Formalisierungen dieser Sätze sind Negationen des jeweils anderen.

2. Ist in Übung 1.4 der Satz 3 die Negation des Satzes ‚Herbert ist nicht glücklich und Heidi ist nicht glücklich.'? nein

Bemerkung

Die Formalisierung von ‚Herbert ist nicht glücklich und Heidi ist nicht glücklich' ist ‚$\neg p \wedge \neg q$', was mit keiner der möglichen Formalisierungen von Satz 3 äquivalent ist.

3. Welcher der Sätze 1 bis 6 in Übung 1.4 ist ein Konjunktionssatz?

Antwort: 2, 3 und 5 (in einer Deutung).

Bemerkung

Eine Interpretation von 6, d.h. ‚$\neg\neg(p \wedge q)$' ist äquivalent zu einem Konjunktionssatz, aber selbst bei dieser Interpretation ist Satz 6 kein Konjunktionssatz.

4. Was ist die Disjunktion der Aussagesätze ‚Heute schneit es nicht.' und ‚Die Straßen sind glatt.'?

Antwort: Heute schneit es nicht oder die Straßen sind glatt.

5. Was ist die Implikation der Aussagesatze ‚Herbert ist glücklich.' und ‚Heidi ist glücklich'?

Antwort: Wenn Herber glücklich ist, ist Heidi glücklich.

6. Geben Sie die Negation dieses Satzes an!

Antwort: Geben Sie nicht die Negation dieses Satzes an!

7. Ist der Satz ‚Wenn Dieter Bohlen österreichischer Bundeskanzler ist, dann ist der Papst österreichischer Bundeskanzler' wahr oder falsch? falsch

Erklärung

Die Formalisierung dieses Satzes ist ‚$p \rightarrow q$', was keine Tautologie ist.

Lösung zu Übungen 2.4 und 3.2.2. **(2.4)** Welche der folgenden Aussagesätze sind aussagenlogisch unzerlegbar? Welche der aussagenlogisch unzerlegbaren Aussagesätze sind einfach? **(3.2.2)** Repräsentieren Sei die Argumente aus Übung 2.4

1. Heute regnet es in Salzburg.

Antwort: aus. unzerlegbar, einfach **Repr.:** p

Zwisch.: Regnet(Salzburg, heute)

2. In Salzburg regnet es fast immer.

Antwort: aus. unzerlegbar, komplex **Repr.:** p

Zwisch.: Für fast alle x Regnet(Salzburg, x)

Erklärung

‚Regnet(x, y)' bedeutet es regnet am Ort x zur Zeit y.

3. Wenn es in Salzburg nicht regnet, dann hagelt's, stürmt's oder schneit's.

Antwort: aus. unzerlegbar, komplex **Repr.:** p

Zwisch.: Für alle y ($\neg$Regnet(Salzburg, y) $\rightarrow$ Hagelt(Salzburg, y) $\vee$ Stürmt(Salzburg, y) $\vee$ Schneit(Salzburg, y))

Erklärung

Die Prädikate ‚Hagelt(x, y)', ‚Stürmt(x, y)' und ‚Schneit(x, y)' haben analoge Bedeutungen wie ‚Regnet(x, y)'.

4. Dieter Bohlen soll Absichten haben, in absehbarer Zeit Bundeskanzler zu werden.

Antwort: aus. unzerlegbar, komplex **Repr.:** p

Zwisch.: S(Absicht(Dieter Bohlen, Bundeskanzler, absehbar))

Erklärung

- ‚Absicht(x, y, z)' bedeutet x hat Absichten y zu werden zur Zeit z.
- ‚S' bezeichnet den Modaloperator ‚sollen'.

5. Das englische Wort ‚mind' kann nicht ins Deutsche übersetzt werden.

Antwort: aus. zerlegbar, komplex **Repr.:** $\neg p$

Zwisch. 1: ¬Übersetzbar_aus_ins(‚mind', Englisch, Deutsch)

Zwisch. 2: ¬(Es gibt ein x Übersetzung_aus_von_ins(x, ‚mind', Englisch, Deutsch))

Zwisch. 3: ¬◇Übersetzen_aus_ins(‚mind', Englisch, Deutsch)

6. Wenn ich mir morgen mein linkes Schuhband zuerst zubinde, dann wird Hermann Maier der nächste Bundespräsident von Österreich.

Antwort: aus. zerlegbar, komplex **Repr.:** $p \longrightarrow q$

Zwisch.: Zubinden(ich, linkes Schuband, zuerst, morgen) ⟶ Nächster_Bundespräsident(Hermann Maier, Österreich)

7. Mit dem Beitritt zur EU hat es in Österreich einen gewaltigen wirtschaftlichen Aufschwung gegeben.

Antwort 1: aus. unzerlegbar, komplex **Repr.:** p

Wenn als Kausalsatz interpretiert wird.

Zwisch.: Wirtschaftliche_Aufschwung(Österreich, t), weil Beitreten(Österreich, EU, t)

Antwort 2: aus. zerlegbar, komplex **Repr.:** $p \wedge q$

Wenn nicht als Kausalsatz interpretiert wird.

Zwisch.: Beitreten(Österreich, EU, t) ∧ Wirtschaftliche_Aufschwung(Österreich, t)

Erklärung

‚t' ist eine Konstante, die ein bestimmter Zeitpunkt bezeichnet.

8. Wäre Österreich nicht der EU beigetreten, hätten wir wohl weniger Sorgen mit dem Euro.

Antwort: aus. unzerlegbar, komplex **Repr.:** p

Zwisch.: ¬Beitreten(Österreich, EU) > Sorgen_haben_-mit(weniger, Euro)

Erklärung

- ‚>' bezeichnet die kontrafaktische Implikation.
- Die Negation ‚¬' betrifft nur ‚Beitreten(Österreich, EU)' und nicht den gesamten kontrafaktischen Satz.

9. Der Österreicher ist eigentlich ein Freund fremder Kulturen, auch wenn er nicht zu viele Ausländer in seiner Heimat sehen möchte.

Antwort: aus. unzerlegbar, einfach **Repr.:** p

Zwisch.: Für alle x (Österreicher(x) $\rightarrow$ für alle y (Kultur(y) $\wedge$ Fremd (y) $\rightarrow$ Freund_von(x, y)) $\wedge$ es gibt ein y (Ausländer(y) $\wedge$ ¬Möchte_in(x, y, Heimat)))

Erklärung: Siehe Abschnitt 3.1, Beispiel 3 im Kursskript.

10. Sir Karl Popper und Theodor W. Adorno sind beide Philosophen, aber sie können einander nicht besonders gut leiden.

Antwort: aus. zerlegbar, komplex

Zwisch.: Philosoph(Popper) ∧ Philosoph(Adorno) ∧¬Leiden_-besonders_gut(Popper, Adorno)

Repr.: $p \wedge q \wedge \neg r$ – d.h., $(p \wedge q \wedge)\neg r$ oder $p \wedge (q \wedge \neg r)$

11. Zum Mittagessen gibt es Wiener Schnitzel mit Salat, Schweinsbraten mit Knödel oder Kasnocken.

Antwort: aus. zerlegbar, komplex

Zwisch.: Zum_Mittagessen(Wiener Schnitzel mit Salat) ∨ Zum_Mittagessen(Schweinsbraten mit Knödel) ∨ Zum_-Mittagessen(Kasnocken)

Repr.: $p \vee q \vee r$ – d.h., $(p \vee q) \vee r$ oder $p \vee (q \vee r)$

12. Einige bedeutende Österreicher stammen aus Böhmen oder Mähren.

Antwort: aus. unzerlegbar, komplex **Repr.:** p

Zwisch.: Es gibt zumindest ein x, sodass (Österreicher(x) $\wedge$ Bedeutender(x) $\wedge$ (Stammt_aus(x, Böhmen) $\vee$ Stammt_aus(x, Mähren)))

13. Nächstes Jahr kommt der Präsident der USA nach Österreich.

Antwort: aus. unzerlegbar, einfach **Repr.:** p

Zwisch.: Kommt_nach(Präsident der USA, Österreich, nächstes Jahr)

14. Silber glänzt, Gold erst recht.

Antwort: aus. zerlegbar, komplex **Repr.:** $p \wedge q$

Zwisch.: glänzen(Silber) $>$ 0 $\wedge$ (glänzen(Gold) $>$ glänzen(Silber))

Erklärung

- ‚>' bezeichnet ‚größer als', und ‚glanz(x)' ist eine Funktion, die den Glanzwert eines Metalls angibt, z. B. als Zahlenwert. Beachten Sie, dass ‚glänzen(Gold) > glänzen(Silber)' nicht ausreichen würde, um diesen Satz auszudrücken, da es möglich ist, dass glänzen(Silber) = 0.
- Nach Gottlob Frege waren Funktionen und Ordnung (d.h. $>, <, \geq, \leq$) logische Begriffe.

15. Tirol ist in einen nördlichen, einen südlichen und einen östlichen Teil aufgeteilt.

Antwort: aus. unzerlegbar, einfach **Repr.:** p

Zwisch.: Aufgeteilt_in(Tirol, nördlichen Teil, südlichen Teil, östlichen Teil)

16. Jeder Junggeselle ist männlich und unverheiratet, ohne dabei gleich ein Priester zu sein.

Antwort: aus. unzerlegbar, komplex **Repr.:** p

Zwisch.: Für alle x (Junggeselle(x) $\rightarrow$ Männlich(x) $\wedge\neg$Verheiratet(x) $\wedge$ $\neg$Priester(x))

17. Alle Studenten lernen Logik, obgleich nicht alle Studenten dies mit Begeisterung tun.

Antwort: aus. zerlegbar, komplex **Repr.:** $p \wedge \neg q$

Zwisch.: Für alle x (Student(x) $\rightarrow$ Lernt(x, Logik)) $\wedge$ $\neg$(Für alle x (Student(x) $\rightarrow$ Lernt_mit(x, Logik, Begeisterung)))

18. Wenn das mit der Politik so weiter geht, dann werden sich Situationen wiederholen, die wir uns alle nicht wünschen.

Antwort: aus. zerlegbar, komplex **Repr.:** $p \rightarrow q$

Zwisch.: Weiter_gehen(Politik) $\rightarrow$ Es gibt zumindest ein x, sodass (Situation(x) $\wedge$ Wiederholt(x) $\wedge$ $\neg$Für alle y Wünscht(y, x))

Lösung zu Übung 3.1 Repräsentieren Sie die folgenden Aussagesatze:

1. Wenn Dieter Bohlen 2013 Bundeskanzler wird, dann werden die Konservativen, aber nicht die Grünen in die Regierung gehen.

   Antwort: $p \longrightarrow (q \wedge \neg r)$

   - ‚p' bezeichnet ‚Dieter Bohlen wird 2013 Bundeskanzler.'
   - ‚q' bezeichnet ‚Die Konservativen werden in die Regierung gehen.'
   - ‚r' bezeichnet ‚Die Grünen werden in die Regierung gehen.'

2. Wenn der Täter mit dem gestohlenen Auto flüchtete, so kann er, sofern die Zollbeamten nicht wachsam waren, schon über die Grenze sein, doch wenn er nicht mit dem gestohlenen Auto flüchtete, sondern zu Fuß ging, so kann er nicht weit gekommen sein.

   Antwort 1: $(p \longrightarrow (\neg q \longrightarrow r)) \wedge ((\neg p \wedge s) \longrightarrow \neg t)$

   - ‚p' bezeichnet ‚Der Täter mit dem gestohlenen Auto flüchtete.'
   - ‚q' bezeichnet ‚Die Zollbeamten waren wachsam.'
   - ‚r' bezeichnet ‚Der Täter kann schon über die Grenze sein.'
   - ‚s' bezeichnet ‚Der Täter ging zu Fuß.'
   - ‚t' bezeichnet ‚Der Täter kann weit gekommen sein.'

   Antwort 2: $(p \longrightarrow q) \wedge ((\neg p \wedge s) \longrightarrow \neg t)$

   - ‚p' bezeichnet ‚Der Täter mit dem gestohlenen Auto flüchtete.'
   - ‚q' bezeichnet ‚Es ist möglich, dass: wenn die Zollbeamten nicht wachsam waren, dann ist der Täter schon über der Grenze.'
   - ‚s' bezeichnet ‚Der Täter ging zu Fuß.'
   - ‚t' bezeichnet ‚Der Täter kann weit gekommen sein.'

Lösung zu Übungen 2.5 und 3.3 **(2.5)** Bringen Sie die folgenden Argumente in Standardform. **(3.3)** Repräsentieren Sie die Argumente aus Übung 2.5.

1. Wenn Fips eine Katze ist, dann jagt Fips gerne Mause. Fips jagt aber nicht gerne Mause. Somit ist Fips keine Katze.

Antwort

Standardform.

Wenn Fips eine Katze ist, dann jagt Fips gerne Mause.

Fips jagt aber nicht gerne Mause.

Daher: Fips ist keine Katze.

Repr. $p \rightarrow q, \neg q \therefore \neg p$

Bemerkung

Dies entspricht der Regel des Modus Tollens.

2. Wenn Fips eine Katze ist, dann trinkt Fips gerne Milch. Fips ist eine Katze. Folglich trinkt Fips gerne Milch.

Antwort

Stand.

Wenn Fips eine Katze ist, dann trinkt Fips gerne Milch.

Fips ist eine Katze.

Daher: Fips trinkt gerne Milch.

Repr. $p \rightarrow q, p \therefore q$

Bemerkung

Dies entspricht der Regel des Modus Ponens.

3. Wenn Fips eine Katze ist, dann trinkt Fips gerne Milch. Fips trinkt gerne Milch. Folglich ist Fips eine Katze.

Antwort

Stand.

Wenn Fips eine Katze ist, dann trinkt Fips gerne Milch.

Fips trinkt gerne Milch.

Daher: Fips ist eine Katze.

Repr. $p \rightarrow q, q \therefore p$

Bemerkung

Dies ist die (ungültige) Argumentform des Modus Morons.

4. Fips ist eine Katze. Denn: Wenn Fips eine Katze ist, dann trinkt Fips gerne Milch. Fips trinkt gerne Milch.

Antwort: Wie im Argument 3.

Bemerkung

Die Konklusion des Arguments wird gleich zu Beginn genannt.

5. Also ist Fips eine Katze oder er ist keine Katze.

Antwort

Stand.

Daher: Fips ist eine Katze oder er ist keine Katze.

Repr. $\therefore p \vee \neg p$

Bemerkung

Dies ist ein Argument ohne Prämissen.

6. Sokrates ist Philosoph und Grieche. Platon ist Philosoph und Grieche. Aristoteles ist Philosoph und Grieche. Daher sind alle Philosophen Griechen.

Antwort

Stand.

Sokrates ist Philosoph und Grieche.

Platon ist Philosoph und Grieche.

Aristoteles ist Philosoph und Grieche.

Daher: Alle Philosophen sind Griechen.

Repr. $p_1 \land p_2, q_1 \land q_2, r_1 \land r_2 \therefore s$

Lösung zu Übung 3.4 Repräsentieren Sie die folgenden Argumente:

1. Der Papst ist Deutscher. Daher tritt Osterreich 2011 genau dann aus der EU aus, wenn Osterreich dies tut.

Antwort: $p \therefore q \leftrightarrow q$

2. Bad Goisern ist die Hauptstadt von Oberosterreich und Bad Goisern ist nicht die Hauptstadt von Oberosterreich. Daher existiert Gott.

Antwort 1: $p \land \neg p \therefore q$

Antwort 2: $p, \neg p \therefore q$

Erklärung

Da die Prämisse als Konjunktion und nicht als zwei separate Prämissen erscheint, ist die alternative Antwort nicht so gut wie die erste.

Die aussagenlogische Sprache 4

4.1 Übungen

Übung 4.1. Welche der folgenden Zeichenfolgen sind aussagenlogische Formeln? Beachten Sie dabei, daß wir in dieser Übung keine Klammerersparnisregeln gelten lassen wollen. Genaue Klammersetzung ist also wichtig.

1. $p \wedge q \vee r$
2. $((p \wedge q) \vee r))$
3. $((p \wedge q) \vee r)$
4. $(\neg(p \vee q) \to r)$
5. $\neg((p \vee q) \to r)$
6. $((p \vee q) \Rightarrow p)$
7. $((\neg p \vee q) \to r)$
8. $\neg((P \vee Q) \to R)$
9. $((p \to \neg p) \to \neg p)$
10. $(\neg\neg\neg\neg\neg\neg r \to (p \vee q))$
11. $p \leftrightarrow q$
12. $((p \to q) \wedge \neg(\neg q \to \neg p))$
13. $((p \to (q \to r) \to p))$
14. $(p \to (q \to (r \to (s \to t))))$
15. $((p \to (q \to r)) \to ((p \to q) \to (p \to r)))$
16. $\neg(\neg\neg((\neg((p_{12} \vee \neg p_9) \wedge p_8) \vee p_7) \to p_6) \leftrightarrow (p_5 \vee \neg\neg p_{13}))$
17. $((p \wedge q) \to \neg(s))$

Übung 4.2. Welche der folgenden Zeichenfolgen sind aussagenlogische Argumentformen?

1. $p, (p \to q) \therefore p, q$
2. $\therefore (p \lor \neg p)$
3. $(q \land r \lor s), (r) \therefore \neg(\neg(q))$
4. $(q \to r), \neg r \therefore (\neg q \lor s)$
5. $p, p, p, p, p \therefore p$
6. $(q \land \neg q) \therefore$
7. $p\neg q \therefore r$

Übung 4.3. Wenden Sie die beiden Klammerersparnisregeln auf die Formeln aus der Übung 4.1 an.

Übung 4.4. Setzen Sie in den folgenden Zeichenfolgen die Klammern, die den beiden Klammerersparnisregeln zum Opfer gefallen sind (kehren Sie also die Anwendung der Klammerersparnisregeln um).

1. $p \lor q$
2. $p \land q \to r$
3. $p \to q \lor r$
4. $p \lor q \to (p \land r) \lor \neg s$
5. $\neg p \lor (q \land \neg r) \to \neg(p \lor \neg s) \lor \neg(q \to s)$

Übung 4.5. In welchen der folgenden Zeichenreihen wurden die beiden Klammerersparnisregeln korrekt angewendet?

1. $p \to q \to r$
2. $p \lor q \to r \land s$
3. $p \land q \land r \to s$
4. $p \lor q \to r \lor q \land p$
5. $p \to (q \to r) \lor s \to q$

4.2 Lösungen

Lösung zu Übungen 4.1 und 4.3. **(4.1)** Welche der folgenden Zeichenfolgen sind aussagenlogische Formeln? Beachten Sie dabei, daß wir in dieser Übung keine Klammerersparnisregeln gelten lassen wollen. Genaue Klammersetzung ist also wichtig. **(4.3)** Wenden Sie die beiden Klammerersparnisregeln auf die Formeln aus der Übung 4.1 an.

1. $p \wedge q \vee r$ — keine aussagenlogische Formel

   Erklärung

   Nicht klar, ob ‚$(p \wedge q) \vee r$' oder ‚$p \wedge (q \vee r)$' gemeint wird.

2. $((p \wedge q) \vee r))$ — keine aus. Formel
3. $((p \wedge q) \vee r)$ — aus. Formel

   Entklammerte Formel: $(p \wedge q) \vee r$

4. $(\neg(p \vee q) \rightarrow r)$ — aus. Formel

   Entklammerte Formel: $\neg(p \vee q) \rightarrow r$

5. $\neg((p \vee q) \rightarrow r)$ — aus. Formel

   Entklammerte Formel: Wie das Original.

6. $((p \vee q) \Rightarrow p)$ — keine aus. Formel
7. $((\neg p \vee q) \rightarrow r)$ — aus. Formel

   Entklammerte Formel: $\neg p \vee q \rightarrow r$

8. $\neg((P \vee Q) \rightarrow R)$ — keine aus. Formel

   Erklärung

   Großbuchstaben sind Metavariablen, aber keine Aussagenvariablen unserer Objektsprache.

9. $((p \rightarrow \neg p) \rightarrow \neg p)$ — aus. Formel

   Entklammerte Formel: $(p \rightarrow \neg p) \rightarrow \neg p$

10. $(\neg\neg\neg\neg\neg\neg r \rightarrow (p \vee q))$ aus. Formel

Entklammerte Formel: $\neg\neg\neg\neg\neg\neg r \rightarrow p \vee q$

11. $p \leftrightarrow q$ keine aus. Formel

Erklärung

In dieser Formel fehlen die äußeren Klammern. Die korrekte Formel wäre ‚$(p \leftrightarrow q)$', deren entklammerte Version die fragliche Formel wäre.

12. $((p \rightarrow q) \wedge \neg(\neg q \rightarrow \neg p))$ aus. Formel

Entklammerte Formel: $(p \rightarrow q) \wedge \neg(\neg q \rightarrow \neg p)$

13. $((p \rightarrow (q \rightarrow r) \rightarrow p))$ keine aus. Formel

14. $(p \rightarrow (q \rightarrow (r \rightarrow (s \rightarrow t))))$ aus. Formel

Entklammerte Formel: $p \rightarrow (q \rightarrow (r \rightarrow (s \rightarrow t)))$

15. $((p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r)))$ aus. Formel

Entklammerte Formel:

$((p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r)))$

16. $\neg(\neg\neg((\neg((p_{12} \vee \neg p_9) \wedge p_8) \vee p_7) \rightarrow p_6) \leftrightarrow (p_5 \vee \neg\neg p_{13}))$ aus. Formel

Entklammerte Formel:

$\neg(\neg\neg(\neg((p_{12} \vee \neg p_9) \wedge p_8) \vee p_7 \rightarrow p_6) \leftrightarrow p_5 \vee \neg\neg p_{13})$

17. $((p \wedge q) \rightarrow \neg(s))$ keine aus. Formel

Erklärung

Aussagenvariablen stehen nie zwischen Klammern.

Lösung zu Übung 4.2. Welche der folgenden Zeichenfolgen sind aussagenlogische Argumentformen?

1. $p, (p \rightarrow q) \therefore p, q$ — keine aus. Argumentform

Erklärung

Argumente haben mindestens und höchstens eine Konklusion.

2. $\therefore (p \vee \neg p)$ — aus. Argumentform
3. $(q \wedge r \vee s), (r) \therefore \neg(\neg(q))$ — keine aus. Argumentform
4. $(q \rightarrow r), \neg r \therefore (\neg q \vee s)$ — aus. Argumentform
5. $p, p, p, p, p \therefore p$ — aus. Argumentform

Erklärung

Ein Argument, selbst ein gültiges, kann überflüssige Prämissen haben.

6. $(q \wedge \neg q) \therefore$ — keine aus. Argumentform

Erklärung: Wie in 1.

7. $p \neg q \therefore r$ — keine aus. Argumentform

Erklärung

‚$p \neg q$' ist keine aussagenlogische Formel. Was wurde gemeint? ‚$p, \neg q \therefore r$', ‚$p \wedge \neg q \therefore r$', ‚$p \vee \neg q \therefore r$', ...?

Lösung zu Übung 4.4 Setzen Sie in den folgenden Zeichenfolgen die Klammern, die den beiden Klammerersparnisregeln zum Opfer gefallen sind (kehren Sie also die Anwendung der Klammerersparnisregeln um).

1. $p \vee q$

   Antwort: $(p \vee q)$

2. $p \wedge q \rightarrow r$

   Antwort: $((p \wedge q) \rightarrow r)$

3. $p \rightarrow q \vee r$

   Antwort: $(p \rightarrow (q \vee r))$

4. $p \vee q \rightarrow (p \wedge r) \vee \neg s$

   Antwort: $((p \vee q) \rightarrow ((p \wedge r) \vee \neg s))$

5. $\neg p \vee (q \wedge \neg r) \rightarrow \neg(p \vee \neg s) \vee \neg(q \rightarrow s)$

   Antwort: $((\neg p \vee (q \wedge \neg r)) \rightarrow (\neg(p \vee \neg s) \vee \neg(q \rightarrow s)))$

Lösung zu Übung 4.5 In welchen der folgenden Zeichenreihen wurden die beiden Klammerersparnisregeln korrekt angewendet?

1. $p \rightarrow q \rightarrow r$ — nicht korrekt
2. $p \vee q \rightarrow r \wedge s$ — korrekt

   Ursprüngliche Formel: $((p \vee q) \rightarrow (r \wedge s))$

3. $p \wedge q \wedge r \rightarrow s$ — nicht korrekt [1]
4. $p \vee q \rightarrow r \vee q \wedge p$ — nicht korrekt
5. $p \rightarrow (q \rightarrow r) \vee s \rightarrow q$ — nicht korrekt

1: Es wäre jedoch kein Problem, eine Regel für das Weglassen von Klammern zwischen Konjunktionssätzen einzufügen. Dasselbe gilt für Disjunktions- und Äquivalenzsätzen.

Die aussagenlogische Semantik 5

5.1 Vorbereitung

5.1.1 Erstellung einer Wahrheitstafel

Lass uns erinnern, die im Skript beschriebenen Regeln zur Erstellung einer Wahrheitstafel für eine beliebige Formel A.

Schritt 1: *Man stelle fest, welche verschiedenen Aussagenvariablen in A vorkommen, und schreibe diese Aussagenvariablen in der Reihenfolge ihres Vorkommens im Alphabet in eine Reihe.*

Schritt 2: *Daneben schreibe man die zu bewertende Formel an.*

Schritt 3: Handelt es sich um n verschiedene Aussagenvariablen, so gibt es 2^n verschiedene Möglichkeiten, die Wahrheitswerte auf die Aussagenvariablen von A zu verteilen. *Man schreibe also in 2^n Zeilen die möglichen Wahrheitswerte unter die Aussagenvariablen, und zwar so:*

(a) *In der Spalte unter der ersten Aussagenvariable alternieren Folgen von* `w`s *und* `f`s*, wobei jede dieser Folgen die Länge $\frac{2^n}{2}$ hat.*

(b) *In der Spalte unter der zweiten Aussagenvariable alternieren wiederum Folgen von* `w`s *und* `f`s*, wobei jede dieser Folgen die Länge $\frac{2^n}{4}$ hat.*

(c) *Allgemein stehen in der Spalte unter der k-ten Aussagenvariable alternierend Folgen von* `w`s *und* `f`s*, wobei jede dieser Folgen die Länge $\frac{2^n}{2^k}$ besitzt.*

Schritt 4: *Man berechne von innen nach außen die Wahrheitswerte für die Teilformeln von A und schließlich für die gesamte Formel A selbst. Unter dem Hauptjunktor von A lässt sich die Bewertung von A ablesen.*

Beispiel: $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$ kontingent

Schritt 1:

p	q

Schritt 2:

p	q	$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$

Schritt 3:

p	q	$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$
w	w	
w	f	
f	w	
f	f	

Schritt 4: ①

p	q	$(p \rightarrow q)$	$\wedge$	$(q \rightarrow p)$
w	w	w		w
w	f	f		w
f	w	w		f
f	f	w		w

❷

p	q	$(p \rightarrow q)$	$\wedge$	$(q \rightarrow p)$
w	w	w	w	w
w	f	f	f	w
f	w	w	f	f
f	f	w	w	w

Zusammenfassung: Die Pfeile zeigen die Spalten an, deren Wahrheitswerte in der Zielspalte ausgewertet werden. ‚①', ‚②', ... geben an, in welchem Teilschritt (von Schritt 4) die jeweilige Spalte ausgefüllt wurde. ‚❶', ‚❷', ... geben an, die letzte Teilschritt.

p	q	$(p \rightarrow q)$	$\wedge$	$(q \rightarrow p)$
w	w	w	w	w
w	f	f	f	w
f	w	w	f	f
f	f	w	w	w
		①	❷	①

Aktivierungselement 5.1. Stellen Sie mit Hilfe von Wahrheitstafeln fest, welche der folgenden Formeln tautologisch, kontradiktorisch bzw. kontingent sind.

1. $p \wedge \neg p$
2. $p \wedge \neg p \rightarrow q$
3. $q \rightarrow p \wedge \neg p$
4. $p \vee \neg p$
5. $p \vee \neg p \rightarrow q$
6. $q \rightarrow p \vee \neg p$

Lösungen auf Seite 64.

5.1.2 Gültigkeit von Argumenten mit Wahrheitstabellen

Die Vorgehensweise zum Beweis der Gültigkeit von Argumenten mit Wahrheitstabellen besteht aus folgenden Schritten:

Schritt 1: *Erstellen Sie eine Wahrheitstabelle für jede Prämisse sowie für die Konklusion. Konstruieren Sie jede Tabelle so, als ob alle Aussagenvariablen in jeder Formel vorhanden wären.*[1]

1: Siehe z.B. Prämisse 1 im Argument 1.

Schritt 2: *Prüfen Sie, ob:*

(a) *die Prämisse inkonsistent sind* (d.h. in jeder Zeile gibt es mindestens eine Prämisse, die den Wert `f` hat);

(b) *die Konklusion tautologisch ist.*

Schritt 3: *Wenn mindestens eine der Bedingungen (2.a) oder (2.b) erfüllt ist, schließen Sie, dass das Argument gültig ist, und hören Sie auf. Andernfalls gehen Sie zum nächsten Schritt.*[2]

2: Wenn es offensichtlich ist, dass eine der Bedingungen (2.a) oder (2.b) erfüllt ist, dann kann man die entsprechende Tatsache direkt beweisen und daraus schließen, dass das Argument gültig ist.

Schritt 4: *Prüfen Sie, ob in den Zeilen, in denen alle Prämissen den Wert* `w` *haben, die Konklusion auch den Wert* `w` *hat.*

Schritt 5: *Wenn die Antwort auf Schritt 4 ‚ja' lautet, schließen Sie, dass das Argument gültig ist. Andernfalls schließen Sie, dass es ungültig ist.*

Beispiel. Wir werden diese Vorgehensweise Schritt für Schritt mit dem folgenden Argument durchgehen. Wir heben alle Zeilen grün hervor, in denen sowohl die Prämissen als auch die Konklusion wahr sind. Zeilen, in denen alle Prämissen wahr sind, die Konklusion jedoch falsch ist, heben wir rot hervor.

$p \therefore p$ gültig

Schritt 1: Erstellung der Wahrheitstabellen.

Prämisse

p	p
w	w
f	f
	❶

Konklusion

p	p
w	w
f	f
	❶

Schritt 2: Überprüfung der Bedingungen (2.a) und (2.b).

(a) Nicht erfüllt: Die Prämissen sind konsistent (der Wert f kommt in Zeile 1 nicht vor).

(b) Nicht erfüllt: Die Konklusion ist nicht tautologisch.

	Prämisse	Konklusion
p	p	p
w	w	w
f	f	f

Schritt 3: Da die Bedingungen (2.a) und (2.b) nicht erfüllt sind, gehen wir zum nächsten Schritt.

Schritt 4: Vergleich der Zeilen.

	Prämisse	Konklusion
p	p	p
w	w	w
f	f	f

Schritt 5: Zeile 1 ist die einzige Zeile, in der die einzige Prämisse wahr ist. Da dort auch die Konklusion wahr ist, ist das Argument gültig.

Aktivierungselement 5.2. Überprüfen Sie die folgenden Argumentformen auf ihre Gültigkeit unter Verwendung der Wahrheitstafelmethode:

1. $p, p \rightarrow q \therefore q$
2. $q, p \rightarrow q \therefore p$
3. $\neg p \vee (q \vee p), \neg(p \vee q) \rightarrow (p \wedge q) \therefore p$
4. $p, \neg(p \vee q) \rightarrow (p \wedge q) \therefore \neg p \vee (q \vee p)$
5. $p, \neg p \therefore q$
6. $\therefore p$

Lösungen auf Seite 65.

5.1.3 Vorgehensweise für einen informellen Beweis

Um einen informellen Beweis zu führen, müssen wir ein Argument in der Metasprache – also auf Deutsch oder in einer anderen natürlichen Sprache – begründen. Dabei kann man wie folgt vorgehen:

Schritt 1: *Schreiben Sie den zu beweisenden Satz auf und heben Sie die Schlüsselbegriffe hervor.*

Schritt 2: *Schauen Sie sich die Definitionen zu diesen Schlüsselbegriffen an.*

Schritt 3: *Notieren Sie einige Merkmale dieser Definitionen, die für Ihren Beweis nützlich sein könnten.*

Schritt 4: *Bestimmen Sie, was genau zu beweisen ist – z.B. eine Implikation, eine Äquivalenz, eine Existenzsatz usw.*

Schritt 5: *Identifizieren Sie eine mögliche Strategie, um den Satz zu beweisen.* Z.B., um eine Implikation zu beweisen, könnte man die Antezedenz annehmen und versuchen, die Konsequenz zu schließen.

Schritt 6: *Entwerfen Sie eine Beweisskizze, um zu prüfen, ob die Strategie praktikabel ist.*

Schritt 7: *Schreiben Sie Ihre Beweise klar auf und begründen Sie jeden logischen Schritt, den Sie machen.* (Sie können logische Regeln verwenden, die analog zu denen der Objektsprache sind. Denken Sie jedoch daran, dass Sie in der Metasprache arbeiten.)

Es reicht aus, nur den letzten Schritt in einer Klausur zu schreiben, da er dem eigentlichen Beweis entspricht. Gehen wir jeden dieser Schritte für das nächste Beispiel durch.

Beispiel. Beweisen Sie:

‚A' ist eine kontradiktorisch gdw ‚$\neg A$' eine tautologisch ist.

Schritt 1: *Schreiben Sie den zu beweisenden Satz auf und heben Sie die Schlüsselbegriffe hervor.*

Zu zeigen: A ist eine kontradiktorisch gdw $\neg A$ eine tautologisch ist.

Schritt 2: *Schauen Sie sich die Definitionen zu diesen Schlüsselbegriffen an.*

Die verwendeten Begriffe sind ‚kontradiktorisch', ‚tautologisch' und ‚¬'. Alle diese Begriffe werden durch das Konzept der aussagenlogischen Bewertung definiert. Die Definitionen lauten wie folgt:

Definition 7 (Aussagenlogische Bewertung)**.** Eine aussagenlogische Bewertung (relativ zur Interpretation $\mathfrak{I}$) ist eine Funktion $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}} : \mathscr{F} \longrightarrow \{\mathtt{w}, \mathtt{f}\}$, sodass gilt: ...
2. $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(\neg A) = \mathtt{w}$ gdw $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(A) = \mathtt{f}$, ...

Definition 9 (Tautologie)**.** Eine Formel A aus $\mathscr{F}$ ist tautologisch gdw für alle Interpretationen $\mathfrak{I}$ gilt: $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(A) = \mathtt{w}$.

Definition 10 (Kontradiktion)**.** Eine Formel A aus $\mathscr{F}$ ist kontradiktorisch gdw für alle Interpretationen $\mathfrak{I}$ gilt: $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(A) = \mathtt{f}$.

Schritt 3: *Notieren Sie einige Merkmale dieser Definitionen, die für Ihren Beweis nützlich sein könnten.*

Folgendes ist bemerkenswert:

- Aus Definition 7 folgt aber, dass dies der Fall ist gdw $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(A) = \mathtt{f}$ oder $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(B) = \mathtt{w}$.
- Wendet man Definition 9 auf negierte Formeln an, so folgt, dass eine Formel $\neg A$ tautologisch ist gdw für alle Interpretationen $\mathfrak{I}$ gilt: $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(\neg A) = \mathtt{w}$.
- Aus Definition 7.2 folgt aber, dass dies der Fall ist gdw $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(A) = \mathtt{f}$.

  Mit anderen Worten: für alle $\mathfrak{I}$, $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(A) \neq \mathtt{w}$.
- Nach Definition 9 ist eine Formel A tautologisch gdw für alle Interpretationen $\mathfrak{I}$ gilt: $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(A) = \mathtt{w}$.
- Nach Definition 10 ist eine Formel A kontradiktorisch gdw für alle Interpretationen $\mathfrak{I}$ gilt: $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(A) = \mathtt{f}$.

Schritt 4: *Bestimmen Sie, was genau zu beweisen ist.*

Der Ausdruck ‚gdw' (Abkürzung für ‚genau dann, wenn') weist darauf hin, dass es sich um einen Äquivalenzsatz (von der Metasprache) handelt. Das bedeutet, dass gezeigt werden muss, dass die linke Seite aus der rechten Seite folgt und umgekehrt, dass die rechte Seite aus der linken Seite folgt.

Schritt 5: *Identifizieren Sie eine mögliche Strategie, um den Satz zu beweisen.*

Wir zeigen direkt die Folge von Äquivalenzen, die den Übergang von ‚A ist kontradiktorisch' zu ‚$\neg A$ ist tautologisch' in mehreren, unmittelbar gerechtfertigten Schritten verbindet.

Schritt 7: *Entwerfen Sie eine Beweisskizze, um zu prüfen, ob die Strategie praktikabel ist.*

Hier ist eine informellere Skizze des Beweises:

Was wir beweisen wollen:
‚A' ist eine kontradiktorisch gdw ‚$\neg A$' eine tautologisch ist.

Was wir beweisen wollen anders formuliert:

$$\text{für alle } \mathfrak{I} : \mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(A) = \mathtt{f} \text{ (Def. 10)}$$

$$\text{gdw}$$

$$\text{für alle } \mathfrak{I} : \mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(\neg A) = \mathtt{w} \text{ (Def. 9)}$$

Methode des Beweises:
Wir wollen die folgende Kette beweisen und jeden Übergang durch die passende Definition rechtfertigen:

$$\begin{aligned} A \text{ ist kontradiktorisch gdw } & \text{für alle } \mathfrak{I} : \mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(A) = \mathtt{f} && \text{(Def. 10)} \\ \text{gdw } & \text{für alle } \mathfrak{I} : \mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(\neg A) = \mathtt{w} && \text{(Def. 7.2)} \\ \text{gdw } & \neg A \text{ ist tautologisch} && \text{(Def. 9)} \end{aligned}$$

Schätzung: Die Äquivalenzkette ist kurz und vollständig – jeder Schritt ist durch eine der angegebenen Definitionen gedeckt, die Strategie ist somit praktikabel und unmittelbar in einen formalen Beweis überführbar.

Schritt 8: *Schreiben Sie Ihre Beweise klar auf und begründen Sie jeden logischen Schritt.*

Satz: A ist kontradiktorisch gdw $\neg A$ tautologisch ist.

Beweis. Nach Definition 10 ist A kontradiktorisch gdw für alle Interpretationen $\mathfrak{I}$ gilt, dass $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(A) = \mathtt{f}$. Nach Definition 7.2 der Negation gilt für jede Interpretation $\mathfrak{I}$, dass $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(\neg A) = \mathtt{w}$ gdw $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(A) = \mathtt{f}$. Schließlich besagt Definition 9, dass $\neg A$ tautologisch ist gdw für alle Interpretationen $\mathfrak{I}$ gilt, dass $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(\neg A) = \mathtt{w}$. Kombiniert man diese drei Aussagen, so folgt unmittelbar, dass A kontradiktorisch ist gdw $\neg A$ tautologisch ist. □

Aktivierungselement 5.3. Beweisen Sie:

‚$A \vee \neg A$' ist eine Tautologie.

Lösung auf Seite 69 (ausstehend).

5.1.4 Lösungen

Lösung zu Aktivierungselement 5.1

1. $p \wedge \neg p$ — kontradiktorisch

p	p	$\wedge$	$\neg$	p
w		f	f	
f		f	w	
		❷	①	

2. $p \wedge \neg p \rightarrow q$ — tautologisch

p	q	p	$\wedge$	$\neg$	p	$\rightarrow$	q
w	w		f	f		w	
w	f		f	f		w	
f	w		f	w		w	
f	f		f	w		w	
			②	①		❸	

3. $q \rightarrow p \wedge \neg p$ — kontingent

p	q	q	$\rightarrow$	p	$\wedge$	$\neg$	p
w	w		f		f	f	
w	f		w		f	f	
f	w		f		f	w	
f	f		w		f	w	
			❸		②	①	

4. $p \vee \neg p$ — tautologisch

p	p	$\vee$	$\neg$	p
w		w	f	
f		w	w	
		❷	①	

5. $p \vee \neg p \rightarrow q$ — kontingent

p	q	p	$\vee$	$\neg$	p	$\rightarrow$	q
w	w		w	f		w	
w	f		w	f		f	
f	w		w	w		w	
f	f		w	w		f	
			②	①		❸	

6. $q \rightarrow p \vee \neg p$ — tautologisch

p	q	q	$\rightarrow$	p	$\vee$	$\neg$	p
w	w		w		w	f	
w	f		w		w	f	
f	w		w		w	w	
f	f		w		w	w	
			❸		②	①	

Lösung zu Aktivierungselement 5.2.

1. $p, p \rightarrow q \therefore q$ gültig

Schritt 1: Erstellung der Wahrheitstabellen.

Prämisse 1

p	q	p
w	w	w
w	f	w
f	w	f
f	f	f
		❶

Prämisse 2

p	q	$p \rightarrow q$
w	w	w
w	f	f
f	w	w
f	f	w
		❶

Konklusion

p	q	q
w	w	w
w	f	f
f	w	w
f	f	f
		❶

Schritt 2: Überprüfung der Bedingungen (2.a) und (2.b).

(a) Nicht erfüllt: Die Prämissen sind konsistent.

(b) Nicht erfüllt: Die Konklusion ist nicht tautologisch.

		Prämissen		Konklusion
p	q	p	$p \rightarrow q$	q
w	w	w	w	w
w	f	w	f	f
f	w	f	w	w
f	f	f	w	f

Schritt 3: Da die Bedingungen (2.a) und (2.b) nicht erfüllt sind, gehen wir zum nächsten Schritt.

Schritt 4: Vergleich der Zeilen.

		Prämissen		Konklusion
p	q	p	$p \rightarrow q$	q
w	w	w	w	w
w	f	w	f	f
f	w	f	w	w
f	f	f	w	f

Schritt 5: Die einzige Zeile, in der alle Prämissen wahr sind, ist Zeile 1. Da dort auch die Konklusion wahr ist, ist das Argument gültig.

2. $q, p \to q \therefore p$ ungültig

Schritt 1: Erstellung der Wahrheitstabellen.

Prämisse 1

p	q	q
w	w	w
w	f	f
f	w	w
f	f	f
		❶

Prämisse 2

p	q	$p \to q$
w	w	w
w	f	f
f	w	w
f	f	w
		❶

Konklusion

p	q	p
w	w	w
w	f	w
f	w	f
f	f	f
		❶

Schritt 2: Überprüfung der Bedingungen (2.a) und (2.b).

(a) Nicht erfüllt: Die Prämissen sind konsistent.

(b) Nicht erfüllt: Die Konklusion ist nicht tautologisch.

		Prämissen		Konklusion
p	q	q	$p \to q$	p
w	w	w	w	w
w	f	f	f	w
f	w	w	w	f
f	f	f	w	f

Schritt 3: Da die Bedingungen (2.a) und (2.b) nicht erfüllt sind, gehen wir zum nächsten Schritt.

Schritt 4: Vergleich der Zeilen.

		Prämissen		Konklusion
p	q	q	$p \to q$	p
w	w	w	w	w
w	f	f	f	w
f	w	w	w	f
f	f	f	w	f

Schritt 5: Es gibt genau zwei Zeilen, in denen alle Prämissen wahr sind: 1 und 3. Da die Konklusion in Zeile 3 falsch ist, ist das Argument ungültig.

3. $\neg p \vee (q \vee p), \neg(p \vee q) \rightarrow (p \wedge q) \therefore p$ ungültig

Schritt 1: Erstellung der Wahrheitstabellen.

Prämisse 1

p	q	$\neg$	$p \vee (q$	$\vee p)$
w	w	f	w	w
w	f	f	w	w
f	w	w	w	w
f	f	w	w	f
		①	❸	②

Prämisse 2

p	q	$\neg$	$(p \vee q)$	$\rightarrow$	$(p \wedge q)$
w	w	f	w	w	w
w	f	f	w	w	f
f	w	f	w	w	f
f	f	w	f	f	f
		②	①	❸	①

Konklusion

p	q	p
w	w	w
w	f	w
f	w	f
f	f	f
		❶

Schritt 2: Überprüfung der Bedingungen (2.a) und (2.b).

(a) Nicht erfüllt: Die Prämissen sind konsistent.

(b) Nicht erfüllt: Die Konklusion ist nicht tautologisch.

		Prämissen		Konklusion
p	q	$\neg p \vee (q \vee p)$	$\neg(p \vee q) \rightarrow (p \wedge q)$	p
w	w	w	w	w
w	f	w	w	w
f	w	w	w	f
f	f	w	f	f

Schritt 3: Da die Bedingungen (2.a) und (2.b) nicht erfüllt sind, gehen wir zum nächsten Schritt.

Schritt 4: Vergleich der Zeilen.

		Prämissen		Konklusion
p	q	$\neg p \vee (q \vee p)$	$\neg(p \vee q) \rightarrow (p \wedge q)$	p
w	w	w	w	w
w	f	w	w	w
f	w	w	w	f
f	f	w	f	f

Schritt 5: In Zeilen 1–3 sind alle Prämissen wahr sind. Da die Konklusion in Zeile 3 falsch ist, ist das Argument ungültig.

4. $p, \neg(p \vee q) \rightarrow (p \wedge q) \therefore \neg p \vee (q \vee p)$ gültig

Schritt 1: Erstellung der Wahrheitstabellen.

- Wahrheitstabelle für Prämisse 1: siehe Konklusion in Argument 3.
- Wahrheitstabelle für Prämisse 2: siehe Prämisse 2 in Argument 3.
- Wahrheitstabelle für die Konklusion: siehe Prämisse 1 in Argument 3.

Schritt 2: Überprüfung der Bedingungen (2.a) und (2.b).

(a) Nicht erfüllt: Die Prämissen sind konsistent.

(b) Erfüllt: Die Konklusion ist tautologisch.

			Prämissen	Konklusion
p	q	p	$\neg(p \vee q) \rightarrow (p \wedge q)$	$\neg p \vee (q \vee p)$
w	w	w	w	w
w	f	w	w	w
f	w	f	w	w
f	f	f	f	w

Schritt 3: Da die Bedingung (2.a) erfüllt ist, ist das Argument gültig.

5. $p, \neg p \therefore q$ gültig

Schritt 1: Erstellung der Wahrheitstabellen.

Prämisse 1

p	q	p
w	w	w
w	f	w
f	w	f
f	f	f
		❶

Prämisse 2

p	q	$\neg p$
w	w	f
w	f	f
f	w	w
f	f	w
		❶

Konklusion

p	q	q
w	w	w
w	f	f
f	w	w
f	f	f
		❶

Schritt 2: Überprüfung der Bedingungen (2.a) und (2.b).

(a) Erfüllt: Die Prämissen sind inkonsistent.

(b) Nicht erfüllt: Die Konklusion ist nicht tautologisch.

		Prämissen		Konklusion
p	q	p	$\neg p$	q
w	w	w	f	w
w	f	w	f	f
f	w	f	w	w
f	f	f	w	f

Schritt 3: Da die Bedingung (2.b) erfüllt ist, ist das Argument gültig.

Lösung zu Aktivierungselement 5.3. [Ausstehend.]

5.2 Übungen

Übung 5.1.

1. Was ist eine Wahrheitstafel für eine aussagenlogische Formel? Wie erstellt man eine Wahrheitstafel?
2. Erstellen Sie die Wahrheitstafeln zu allen aussagenlogischen Formeln in Übung 4.5 (4.1-4.5) mit weniger als 3 oder genau 3 Aussagenvariablen.

Übung 5.2. Stellen Sie mit Hilfe von Wahrheitstafeln fest, welche der folgenden Formeln tautologisch, kontradiktorisch bzw. kontingent sind.

1. $(p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow p)$
2. $\neg(p \rightarrow q) \vee (q \wedge \neg p)$
3. $\neg((p \rightarrow q) \wedge p) \rightarrow q$
4. $((p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow r)) \vee (r \rightarrow p)$
5. $(p \rightarrow q) \vee (\neg p \rightarrow q)$
6. $(p \rightarrow q) \rightarrow ((p \rightarrow r) \rightarrow (q \rightarrow r))$
7. $p \vee (\neg q \rightarrow r) \rightarrow q \vee (\neg p \rightarrow r)$
8. $\neg(p \wedge (q \rightarrow \neg r)) \rightarrow (p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)$
9. $\neg(\neg p \rightarrow q \vee r) \rightarrow \neg(p \vee q) \wedge r$
10. $(p \wedge q \rightarrow (r \wedge s) \vee t) \wedge (\neg(\neg p \vee \neg q) \wedge (\neg r \vee \neg s))$
11. $\neg((p \wedge q) \vee ((r \wedge s) \wedge t) \rightarrow q \vee t)$
12. $p \wedge (q \leftrightarrow r) \rightarrow (p \wedge q \leftrightarrow p \wedge r)$
13. $p \vee (\neg q \rightarrow r) \leftrightarrow q \vee (\neg p \rightarrow r)$
14. $\neg(p \wedge (q \rightarrow \neg r)) \leftrightarrow (p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)$

Übung 5.3.1.

1. Was ist eine aussagenlogische Interpretation?
2. Was ist eine aussagenlogische Bewertung?
3. Was ist eine Tautologie, was ist eine Kontradiktion, was ist eine kontingente Formel (gemäß exakter Definition über Interpretationen und aussagenlogische Bewertungen)?

Übung 5.3.2. Was kann gemeint sein, wenn man sagt ‚A impliziert B'?

Übung 5.3.3.

1. Was ist die logische Implikation (Äquivalenz): Ein zweistelliger Junktor oder eine zweistellige Relation?
2. Wie ist die logische Implikation (Äquivalenz) definiert?

Übung 5.3.4. Beweisen Sie:

A impliziert logisch B gdw ‚$A \rightarrow B$' eine Tautologie ist.

(Das ist übrigens ein metalogischer Satz, also ein Satz der über Formeln ‚spricht' und diesen Formeln gewisse logische Eigenschaften zuschreibt; ein Beweis dieses metalogischen Satz ist demnach ein metalogischer Beweis.)

Übung 5.4.1. Was ist eine gültige Argumentform? Was ist ein gültiges Argument?

Übung 5.4.2. Welche der folgenden Behauptungen sind wahr und welche sind falsch?

1. Ein Argument, das eine falsche Konklusion hat, ist ungültig.
2. Ein Argument, das falsche Prämissen und eine wahre Konklusion hat, ist ungültig.
3. Ein Argument, das wahre Prämissen und eine falsche Konklusion hat, ist ungültig.
4. Ein Argument, das lauter wahre Prämissen und eine wahre Konklusion hat, ist gültig.
5. Jemand, der behauptet, daß ein bestimmter Schluß korrekt ist, kann durch ein einziges Gegenbeispiel widerlegt werden.
6. Wenn ein gültiges Argument eine falsche Konklusion hat, dann sind alle seine Prämissen auch falsch.

Übung 5.4.3. Was ist die der Argumentform $A_1, \ldots, A_n \therefore B$ entsprechende Formel?

Übung 5.5.1. Überprüfen Sie die folgenden Argumentformen auf ihre Gültigkeit unter Verwendung der Wahrheitstafelmethode:

1. $p \wedge q \to r \wedge \neg s, r \to t, \neg t \wedge p \therefore \neg p$
2. $p \wedge q \to r \wedge \neg s, r \to t, \neg t \wedge q \therefore p \to r \wedge \neg r$
3. $p \to (q \to r), r \to \neg s \wedge \neg t, \neg t \to \neg s \therefore p \to t$
4. $\neg(q \vee (p \to r)), \neg r \to p \wedge \neg q \therefore \neg q \vee r \to s$
5. $\neg(\neg p \vee (q \to \neg r)), r \to s \wedge t \therefore t \vee \neg q$
6. $p \wedge q \to r, q \vee \neg r \therefore p \to (q \to r) \wedge (r \to q)$
7. $\neg(\neg p \vee \neg q) \to r, r \wedge (p \wedge q) \to p \wedge s \therefore \neg(p \wedge q) \vee s$
8. $p \vee \neg p \to q, \neg(\neg r \vee \neg s), t \to p \wedge \neg p \therefore (q \wedge s) \wedge \neg t$
9. $p \vee q \therefore ((p \to q) \to q) \wedge (\neg q \to p)$

Übung 5.5.2. Das folgende Argument war in Übung 3 bereits durch eine Argumentform zu repräsentieren.

> Der Papst ist Deutscher. Daher tritt Österreich am 1. Januar 2013 genau dann aus der EU aus, wenn Österreich dies tut.

(i) Überprüfen Sie, ob die nämliche Argumentform gültig ist.

(ii) Entspricht das Ergebnis aus (i) Ihrer Intuition?

Übung 5.5.3. Das folgende Argument war in Übung 3 bereits durch eine Argumentform zu repräsentieren.

> Bad Goisern ist die Hauptstadt von Oberösterreich und Bad Goisern ist nicht die Hauptstadt von Oberösterreich. Daher existiert Gott.

(i) Überprüfen Sie, ob die nämliche Argumentform gültig ist.

(ii) Ist dieses Argument ein Beweis für die Existenz Gottes?

5.2.1 Lösungen

Lösung zu Übung 5.1. 1. Was ist eine Wahrheitstafel für eine aussagenlogische Formel? Wie erstellt man eine Wahrheitstafel?

Antwort: Siehe Sektion 5.1.1.

2. Erstellen Sie die Wahrheitstafeln zu allen aussagenlogischen Formeln in Übung 4.5 (4.1-4.5) mit weniger als 3 oder genau 3 Aussagenvariablen.

Antwort: Hier nicht beantwortet.

Lösung zu Übung 5.2. Stellen Sie mit Hilfe von Wahrheitstafeln fest, welche der folgenden Formeln tautologisch, kontradiktorisch bzw. kontingent sind.

1. $(p \to q) \lor (q \to p)$ tautologisch

p	q	$(p \to q)$	$\lor$	$(q \to p)$
w	w	w	w	w
w	f	f	w	w
f	w	w	w	f
f	f	w	w	w
		①	❷	①

2. $\neg(p \to q) \lor (q \land \neg p)$ kontingent

p	q	$\neg$	$(p \to q)$	$\lor$	$(q \land$	$\neg p)$
w	w	f	w	f	f	f
w	f	w	f	w	f	f
f	w	f	w	w	w	w
f	f	f	w	f	f	w
		③	②	❹	②	①

3. $\neg((p \to q) \land p) \to q$ kontingent

p	q	$\neg($	$(p \to q)$	$\land p)$	$\to q$
w	w	f	w	w	w
w	f	w	f	f	w
f	w	w	w	f	f
f	f	w	w	f	w
		③	①	②	❹

4. $((p \to q) \vee (q \to r)) \vee (r \to p)$ — tautologisch

p	q	r	$((p \to q)$	$\vee$	$(q \to r))$	$\vee$	$(r \to p)$
w	w	w	w	w	w	w	w
w	w	f	w	w	f	w	w
w	f	w	f	w	w	w	w
w	f	f	f	w	w	w	w
f	w	w	w	w	w	w	f
f	w	f	w	w	f	w	w
f	f	w	w	w	w	w	f
f	f	f	w	w	w	w	w
			①	②	①	❸	①

5. $(p \to q) \vee (\neg p \to q)$ — tautologisch

p	q	$(p \to q)$	$\vee$	$(\neg p$	$\to q)$
w	w	w	w	f	w
w	f	f	w	f	w
f	w	w	w	w	w
f	f	w	w	w	f
		②	❸	①	②

6. $(p \to q) \to ((p \to r) \to (q \to r))$ — kontingent

7. $p \vee (\neg q \to r) \to q \vee (\neg p \to r)$ — tautologisch

8. $\neg(p \wedge (q \to \neg r)) \to (p \to q) \wedge (p \to r)$ — tautologisch

9. $\neg(\neg p \to q \vee r) \to \neg(p \vee q) \wedge r$ — kontingent

10. $(p \wedge q \to (r \wedge s) \vee t) \wedge (\neg(\neg p \vee \neg q) \wedge (\neg r \vee \neg s))$ — kontingent

11. $\neg((p \wedge q) \vee ((r \wedge s) \wedge t) \rightarrow q \vee t)$ kontradiktorisch

p	q	r	s	t	$\neg($	$(p \wedge q)$	$\vee$	$((r \wedge s)$	$\wedge\, t)$	$\rightarrow$	$q \vee t)$
w	w	w	w	w	f	w	w	w	w	w	w
w	w	w	w	f	f	w	w	w	f	w	w
w	w	w	f	w	f	w	w	f	f	w	w
w	w	w	f	f	f	w	w	f	f	w	w
w	w	f	w	w	f	w	w	f	f	w	w
w	w	f	w	f	f	w	w	f	f	w	w
w	w	f	f	w	f	w	w	f	f	w	w
w	w	f	f	f	f	w	w	f	f	w	w
w	f	w	w	w	f	f	w	w	w	w	w
w	f	w	w	f	f	f	f	w	f	w	f
w	f	w	f	w	f	f	f	f	f	w	w
w	f	w	f	f	f	f	f	f	f	w	f
w	f	f	w	w	f	f	f	f	f	w	w
w	f	f	w	f	f	f	f	f	f	w	f
w	f	f	f	w	f	f	f	f	f	w	w
w	f	f	f	f	f	f	f	f	f	w	f
f	w	w	w	w	f	f	w	w	w	w	w
f	w	w	w	f	f	f	f	w	f	w	w
f	w	w	f	w	f	f	f	f	f	w	w
f	w	w	f	f	f	f	f	f	f	w	w
f	w	f	w	w	f	f	f	f	f	w	w
f	w	f	w	f	f	f	f	f	f	w	w
f	w	f	f	w	f	f	f	f	f	w	w
f	w	f	f	f	f	f	f	f	f	w	w
f	f	w	w	w	f	f	w	w	w	w	w
f	f	w	w	f	f	f	f	w	f	w	f
f	f	w	f	w	f	f	f	f	f	w	w
f	f	w	f	f	f	f	f	f	f	w	f
f	f	f	w	w	f	f	f	f	f	w	w
f	f	f	w	f	f	f	f	f	f	w	f
f	f	f	f	w	f	f	f	f	f	w	w
f	f	f	f	f	f	f	f	f	f	w	f
					❺	①	③	①	②	④	①

Bemerkung: Die eingeklammerte Formel innerhalb der Negation ist tautologisch. Andernfalls wäre die negierte Formel nicht kontradiktorisch.

12. $p \wedge (q \leftrightarrow r) \rightarrow (p \wedge q \leftrightarrow p \wedge r)$ tautologisch

13. $p \vee (\neg q \rightarrow r) \leftrightarrow q \vee (\neg p \rightarrow r)$ tautologisch

14. $\neg(p \wedge (q \rightarrow \neg r)) \leftrightarrow (p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)$ tautologisch

p	q	r	$\neg$	$(p \wedge$	$(q \rightarrow$	$\neg\, r))$	$\leftrightarrow$	$(p \rightarrow q)$	$\wedge$	$(q \rightarrow t)$
w	w	w	w	f	f	f	w	w	w	w
w	w	f	f	w	w	w	w	w	f	f
w	f	w	f	w	w	f	w	f	f	w
w	f	f	f	w	w	w	w	f	f	f
f	w	w	w	f	f	f	w	w	w	w
f	w	f	w	f	w	w	w	w	w	w
f	f	w	w	f	w	f	w	w	w	w
f	f	f	w	f	w	w	w	w	w	w
			④	③	②	①	❺	①	②	①

Lösung zu Übung 5.3.1.

1. Was ist eine aussagenlogische Interpretation?

Antwort: Siehe Definition 6 auf S. 129.

2. Was ist eine aussagenlogische Bewertung?

Antwort: Siehe Definition 7 auf SS. 130–1.

3. Was ist eine Tautologie, was ist eine Kontradiktion, was ist eine kontingente Formel (gemäß exakter Definition über Interpretationen und aussagenlogische Bewertungen)?

Antwort: Siehe Definitionen 8–10 auf SS. 133–4.

Lösung zu Übung 5.3.2. Was kann gemeint sein, wenn man sagt ‚A impliziert B'?

Antwort

Wenn wir die Alltagssprache ‚A impliziert B' interpretieren, kann dies zumindest zwei verschiedene Bedeutungen haben, die mit logischen Begriffen interpretiert werden können:

(a) ‚$A \rightarrow B$', oder

(b) ‚A impliziert (aussagen-)logisch B' (siehe Definition 11 auf S. 137).

Es könnte auch eine kausale Interpretation geben, die aber mit den in diesem Kapitel gelernten logischen Konzepten nicht formalisiert werden kann.

Lösung zu Übung 5.3.3.

1. Was ist die logische Implikation (Äquivalenz): Ein zweistelliger Junktor oder eine zweistellige Relation?

Antwort

Die logische Implikation und die logische Äquivalenz sind zweistellige Relationen (siehe S. 140–141). Zweistellige Junktoren sind ‚$\rightarrow$' und ‚$\leftrightarrow$', ebenso wie ‚$\wedge$' und ‚$\vee$'.

2. Wie ist die logische Implikation (Äquivalenz) definiert?

Antwort: Siehe Definition 11.

Lösung zu Übung 5.3.4. Beweisen Sie:

A impliziert logisch B gdw ‚$A \rightarrow B$' eine Tautologie ist.

Hinweis: Es geht hier nicht darum, diese Aussage mit einer Herleitung in unserem System des natürlichen Schließens zu beweisen oder eine Wahrheitstabelle zu erstellen. Wir müssen stattdessen einen informellen Beweis führen. Gehen wir jeden der in Abschnitt 5.1.3 dafür vorgeschlagenen Schritte für den erforderlichen Beweis durch.

Schritt 1: *Schreiben Sie den zu beweisenden Satz auf und heben Sie die Schlüsselbegriffe hervor.*

Zu zeigen: A impliziert logisch B gdw $(A \rightarrow B)$ eine Tautologie ist.

Schritt 2: *Schauen Sie sich die Definitionen zu diesen Schlüsselbegriffen an.*

Die verwendeten Begriffe sind ‚Tautologie', ‚logisch impliziert' und ‚$\rightarrow$'. Alle diese Begriffe werden durch das Konzept der aussagenlogischen Bewertung definiert. Die Definitionen lauten wie folgt:

Definition 7 (Aussagenlogische Bewertung)**.** Eine aussagenlogische Bewertung (relativ zur Interpretation $\mathfrak{I}$) ist eine Funktion $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}} : \mathcal{F} \rightarrow \{\mathtt{w}, \mathtt{f}\}$, sodass gilt: ...
5. $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}((A \rightarrow B)) = \mathtt{w}$ gdw $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(A) = \mathtt{f}$ oder $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(B) = \mathtt{w}$, ...

Definition 9 (Tautologie)**.** Eine Formel A aus $\mathcal{F}$ ist tautologisch gdw für alle Interpretationen $\mathfrak{I}$ gilt: $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(A) = \mathtt{w}$.

Definition 12 (Aussagenlogische Implikation)**.** Für alle Formeln $A_1, \ldots, A_n$ und B aus $\mathcal{F}$: $A_1, \ldots, A_n$ implizieren (aussagen-)logisch B (bzw. B folgt logisch aus $A_1, \ldots, A_n$) gdw für alle Interpretationen $\mathfrak{I}$ gilt: Wenn $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(A_1) = \mathtt{w}, \ldots, \mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(A_n) = \mathtt{w}$, dann $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(B) = \mathtt{w}$.

Schritt 3: *Notieren Sie einige Merkmale dieser Definitionen, die für Ihren Beweis nützlich sein könnten.*

Folgendes ist bemerkenswert:

- Definition 7 besagt, dass die Funktion $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}} : \mathcal{F} \rightarrow \{\mathtt{w}, \mathtt{f}\}$ zwei mögliche Werte hat, nämlich $\mathtt{w}$ und $\mathtt{f}$.
- Folglich, wenn $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(A) \neq \mathtt{w}$ (d.h. wenn $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(A) = \mathtt{w}$ nicht der Fall ist), dann gilt $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(A) = \mathtt{f}$.
- Dies folgt auch umgekehrt, da $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}$ eine Funktion ist. Das bedeutet, es gibt kein A, für das $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(A) = \mathtt{w} = \mathtt{f}$ gilt. Folglich, $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(A) = \mathtt{f}$ gdw $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(A) \neq \mathtt{w}$.
- Wendet man Definition 9 auf Implikationssätze an, so folgt, dass eine Formel $(A \rightarrow B)$ tautologisch ist gdw für alle Interpretationen $\mathfrak{I}$ gilt: $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}((A \rightarrow B)) = \mathtt{w}$.
- Aus Definition 7.5 folgt aber, dass dies der Fall ist gdw $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(A) = \mathtt{f}$ oder $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(B) = \mathtt{w}$.

  Mit anderen Worten: für alle $\mathfrak{I}$, $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}((A \rightarrow B)) = \mathtt{w}$ gdw $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(A) \neq \mathtt{w}$ oder $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(B) = \mathtt{w}$.
- Aus Definition 12 folgt: A logisch impliziert B gdw für alle $\mathfrak{I}$, wenn $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(A) = \mathtt{w}$, dann $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(B) = \mathtt{w}$.

Schritt 4: *Bestimmen Sie, was genau zu beweisen ist – z.B. eine Implikation, eine Äquivalenz, eine Existenzsatz usw.*

Der Ausdruck ‚gdw' (Abkürzung für ‚genau dann, wenn') weist darauf hin, dass es sich um einen Äquivalenzsatz (von der Metasprache) handelt. Das bedeutet, dass gezeigt werden muss, dass die linke Seite aus der rechten Seite folgt und umgekehrt, dass die rechte Seite aus der linken Seite folgt.

Schritt 5: *Identifizieren Sie eine mögliche Strategie, um den Satz zu beweisen.*

Wir könnten die folgende Strategie verfolgen: Wir zeigen eine Äquivalenz zwischen der Definition der logischen Implikation und der Wahrheitstabelle einer Tautologie. Dafür gehen wir in zwei Richtungen vor:

($\Rightarrow$) Wir nehmen an, dass A logisch B impliziert, und überprüfen, dass $(A \to B)$ für alle Interpretationen $\mathfrak{I}$ gilt, indem wir die Fälle $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(A) = \mathtt{w}$ und $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(A) \neq \mathtt{w}$ getrennt betrachten.

($\Leftarrow$) Wir nehmen an, dass $(A \to B)$ eine Tautologie ist, und zeigen, dass daraus folgt, dass wenn $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(A) = \mathtt{w}$, dann $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(B) = \mathtt{w}$.

Damit schließen wir die Äquivalenz.

Schritt 6: *Entwerfen Sie eine Beweisskizze, um zu prüfen, ob die Strategie praktikabel ist.*

Hier ist eine informellere Skizze des Beweises:

Was wir beweisen wollen:

A impliziert logisch B gdw $(A \to B)$ eine Tautologie ist.

Was wir beweisen wollen anders formuliert:

$$\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(A) = \mathtt{w} \text{ (für alle } \mathfrak{I}\text{), dann } \mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(B) = \mathtt{w} \quad \text{(Def. 12)}$$

gdw

$$\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}((A \to B)) = \mathtt{w} \quad \text{(Def. 9).}$$

Methode des Beweises:
Wir führen für jede Richtung einen konditionalen Beweis an.

($\Rightarrow$) **Annahme:** $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(A) = \mathtt{w}$, dann $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(B) = \mathtt{w}$.

Ziel: $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}((A \to B)) = \mathtt{w}$.

Verfahren: Wir betrachten zwei mögliche Fälle:

(i) Wenn $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(A) = \mathtt{w}$, dann folgt aus der Annahme, dass auch $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(B) = \mathtt{w}$. Daher $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}((A \to B)) = \mathtt{w}$ (Def. 7).

(ii) Wenn $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(A) \neq \mathtt{w}$, dann gilt $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(A) = \mathtt{f}$ (Def. 7). Folglich: $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(A \to B) = \mathtt{w}$ (auch Def. 7).

($\Leftarrow$) **Annahmen:** $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}((A \to B)) = \mathtt{w}$, $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(A) = \mathtt{w}$.

Ziel: $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(B) = \mathtt{w}$.

Verfahren: $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}((A \to B)) = \mathtt{w}$ bedeutet, dass, wenn $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(A) = \mathtt{w}$, dann muss entweder $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(A) = \mathtt{f}$ oder $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(B) = \mathtt{w}$ gelten. Da jedoch die Annahme $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(A) = \mathtt{w}$ im Widerspruch zu $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(A) = \mathtt{f}$ steht (Def. 7), bleibt nur die Möglichkeit, dass $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(B) = \mathtt{w}$ (unser Ziel).

Schätzung: Die Beweisstrategie scheint praktikabel zu sein.

Schritt 7: *Schreiben Sie Ihre Beweise klar auf und begründen Sie jeden logischen Schritt, den Sie machen.*

Hinweis: Eine viel kürzere Version des Beweises folgt unten. Es kann aus pädagogischen Gründen hilfreich sein, diese zuerst durchzugehen oder beide Versionen miteinander zu vergleichen.

Satz: A impliziert logisch B gdw $(A \to B)$ eine Tautologie ist.

Beweis. Nach den Def. 12 und 9 ist Folgendes zu zeigen:

$$\text{(a) für alle } \mathfrak{I}\text{: wenn } \mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(A) = \mathtt{w}\text{, dann } \mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(B) = \mathtt{w}$$

$$\text{gdw}$$

$$\text{(b) für alle } \mathfrak{I}\text{: } \mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}((A \to B)) = \mathtt{w}.$$

Aus Def. 7 wissen wir, dass $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}$ eine Funktion ist, die nur zwei Werte annehmen kann: $\mathtt{w}$ oder $\mathtt{f}$. Insbesondere gilt:

$$\text{(c) } \mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(A) = \mathtt{f} \quad \text{gdw} \quad \mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(A) \neq \mathtt{w}.$$

Nun beweisen wir die beiden Richtungen separat:

($\Rightarrow$) Angenommen, A impliziert logisch B. Das bedeutet:

$$\text{(a) für alle } \mathfrak{I}\text{: wenn } \mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(A) = \mathtt{w}\text{, dann } \mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(B) = \mathtt{w}.$$

Zu zeigen ist, dass $(A \to B)$ eine Tautologie ist, also:

$$\text{(b) für alle } \mathfrak{I}\text{: } \mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}((A \to B)) = \mathtt{w}.$$

Sei $\mathfrak{I}$ eine beliebige Interpretation. Aus (a) folgt unmittelbar:

$$\text{(a') wenn } \mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(A) = \mathtt{w}\text{, dann } \mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(B) = \mathtt{w}.$$

Wir unterscheiden zwei Fälle: (i) $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(A) = \mathtt{w}$, (ii) $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(A) \neq \mathtt{w}$.

(i) Angenommen, $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(A) = \mathtt{w}$. In Kombination mit (a') folgt daraus, dass $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(B) = \mathtt{w}$. Damit ist nach Def. 7 gezeigt, dass $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}((A \to B)) = \mathtt{w}$.

(ii) Angenommen, $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(A) \neq \mathtt{w}$. In Kombination mit (c) folgt daraus, dass $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(B) = \mathtt{f}$. Damit ist nach Def. 7 gezeigt, dass $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}((A \to B)) = \mathtt{w}$.

Da die Fälle (i) und (ii) erschöpfend und disjunkt sind, gilt $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}((A \to B)) = \mathtt{w}$. Da $\mathfrak{I}$ beliebig gewählt war, gilt für diese Bedingung jede $\mathfrak{I}$. Das war zu zeigen.

($\Leftarrow$) Angenommen, $(A \to B)$ ist eine Tautologie. Das bedeutet:

$$\text{(b) für alle } \mathfrak{I} \text{ gilt: } \mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}((A \to B)) = \mathtt{w}.$$

Zu zeigen ist, dass A logisch B impliziert, also:

$$\text{(a) für alle } \mathfrak{I}\text{: wenn } \mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(A) = \mathtt{w}\text{, dann } \mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(B) = \mathtt{w}.$$

Sei $\mathfrak{I}$ eine beliebige Interpretation. Aus (b) folgt unmittelbar:

$$\text{(b) } \mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}((A \to B)) = \mathtt{w}.$$

Nehmen wir nun an, dass:

$$\text{(a.1) } \mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(A) = \mathtt{w}.$$

Zu zeigen bleibt: $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(B) = \mathtt{w}$.

Man beachte, dass nach Def. 7 aus (a) folgt, dass:

$$\text{(i) } \mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(A) = \mathtt{f} \text{ oder (ii) } \mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(B) = \mathtt{w},$$

$$\text{d.h. (siehe (c))}$$

$$\text{(i) } \mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(A) \neq \mathtt{w} \text{ oder (ii) } \mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(B) = \mathtt{w}.$$

Fall (i) ist ausgeschlossen, da angenommen wurde, dass $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(A) = \mathtt{w}$ (siehe (a.1)). Es muss also Fall (ii) gelten, also $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(B) = \mathtt{w}$.

Dann gilt: wenn $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(A) = \mathtt{w}$, dann$\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(B) = \mathtt{w}$.

Da $\mathfrak{I}$ beliebig gewählt war, folgt:

$$\text{(a) für alle } \mathfrak{I}\text{: wenn } \mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(A) = \mathtt{w}, \text{ dann } \mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(B) = \mathtt{w}.$$

Das war zu zeigen.

Da wir gezeigt haben, dass (a) aus (b) folgt und (b) aus (a) folgt, gilt: A impliziert logisch B gdw $(A \rightarrow B)$ eine Tautologie ist. □

Bemerkung

Normalerweise würde ein Beweis einige Schritte auslassen, die als trivial betrachtet werden. Ich habe es hier jedoch vermieden, solche triviale Schritte auszulassen.

Nachstehend finden Sie einen kürzeren, aber ebenfalls akzeptabler Beweis. (In einer wissenschaftlichen Arbeit akzeptabel, aber vielleicht nicht in der Klausur.)

Satz: A impliziert logisch B gdw $(A \rightarrow B)$ eine Tautologie ist.

Beweis. Wir beweisen beide Seiten der Äquivalenz.

($\Rightarrow$) Angenommen, A impliziert logisch B. Das heißt, für alle $\mathfrak{I}$ gilt: Wenn $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(A) = \mathtt{w}$, dann $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(B) = \mathtt{w}$. In beiden Fällen (ob $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(A) = \mathtt{w}$ oder nicht) ist $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(A \rightarrow B) = \mathtt{w}$, also eine Tautologie.

($\Leftarrow$) Angenommen, $(A \rightarrow B)$ ist eine Tautologie, das heißt, dass $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(A) = \mathtt{f}$ oder $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(B) = \mathtt{w}$, für alle $\mathfrak{I}$ gilt. Folglich, wenn $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(A) = \mathtt{w}$ gilt, dann muss auch $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(B) = \mathtt{w}$ gelten. □

Lösung zu Übung 5.4.1. Was ist eine gültige Argumentform? Was ist ein gültiges Argument?

Antwort: Siehe Definition 13.

Lösung zu Übung 5.4.2. Welche der folgenden Behauptungen sind wahr und welche sind falsch?

1. Ein Argument, das eine falsche Konklusion hat, ist ungültig. falsch

Erklärung

‚$p \therefore p$' ist gültig auch wenn ‚p' falsch ist.

2. Ein Argument, das falsche Prämissen und eine wahre Konklusion hat, ist ungültig. falsch

Erklärung

‚$p \wedge \neg p \therefore p$' ist gültig auch wenn p wahr ist.

3. Ein Argument, das wahre Prämissen und eine falsche Konklusion hat, ist ungültig. wahr

Erklärung

Erinnern Sie sich, dass ein Argument ‚$A_1, ..., A_n \therefore B$' genau dann gültig ist, wenn der Implikationssatz ‚$A_1 \wedge ... \wedge A_n \rightarrow B$' eine Tautologie ist. Allerdings ist ‚$A_1 \wedge ... \wedge A_n \rightarrow B$' falsch, wenn ‚$A_1, ..., A_n$' wahr sind und B falsch.

4. Ein Argument, das lauter wahre Prämissen und eine wahre Konklusion hat, ist gültig. falsch

Erklärung

Das Argument ‚$p, q \therefore r$' ist ungültig, selbst wenn p, q und r alle wahr sind. Beispiel davon:

- Alle Menschen sind sterblich.
- Alle Tiere sind sterblich.

- $\therefore$ Hannes Leitgeb ist ein Logiker.

5. Jemand, der behauptet, daß ein bestimmter Schluß korrekt ist, kann durch ein einziges Gegenbeispiel widerlegt werden.

wahr

Erklärung

Das haben wir in den Fragen 5.4.1 und 5.4.2 gemacht. Machen wir es noch einmal:

Wenn jemand behauptet, dass das Argument ‚$p \rightarrow q, q \therefore p$' gültig ist, könnten wir das folgende Gegenbeispiel geben:

p: Es regnet.

q: Die Straße ist nass.

Obwohl es wahr ist, dass, wenn es regnet, die Straße nass ist (also ist ‚$p \rightarrow q$' wahr), ist manchmal die Straße nass (also ist ‚q' wahr), aber es hat nicht geregnet (also ist ‚p' falsch). Zum Beispiel könnte die Straße durch einen Wasserschlauch nass geworden sein.

6. Wenn ein gültiges Argument eine falsche Konklusion hat, dann sind alle seine Prämissen auch falsch. falsch

Erklärung

‚$p, q \therefore p$' ist gültig auch wenn p und q falsch sind.

Lösung zu Übung 5.4.3. Was ist die der Argumentform $A_1, ..., A_n \therefore B$ entsprechende Formel?

Antwort: $A_1 \wedge ... \wedge A_n \rightarrow B$

Beachten Sie, dass ‚$A_1, ..., A_n$' und ‚$A_1, ..., A_n \therefore B$' keine aussagenlogischen Formeln sind, sondern metasprachliche Ausdrücke. Aussagenlogische Formeln sind hingegen ‚$A_1 \wedge ... \wedge A_n$' und ‚$A_1 \wedge ... \wedge A_n \rightarrow B$'.

Bemerkung: Wir sagen hier nur, ob die Argumente gültig oder ungültig sind.

Lösung zu Übung 5.5.1. Überprüfen Sie die folgenden Argumentformen auf ihre Gültigkeit unter Verwendung der Wahrheitstafelmethode:

1. $p \wedge q \to r \wedge \neg s, r \to t, \neg t \wedge p \therefore \neg p$ ungültig
2. $p \wedge q \to r \wedge \neg s, r \to t, \neg t \wedge q \therefore p \to r \wedge \neg r$ gültig
3. $p \to (q \to r), r \to \neg s \wedge \neg t, \neg t \to \neg s \therefore p \to t$ ungültig
4. $\neg(q \vee (p \to r)), \neg r \to p \wedge \neg q \therefore \neg q \vee r \to s$ ungültig
5. $\neg(\neg p \vee (q \to \neg r)), r \to s \wedge t \therefore t \vee \neg q$ gültig
6. $p \wedge q \to r, q \vee \neg r \therefore p \to (q \to r) \wedge (r \to q)$ gültig
7. $\neg(\neg p \vee \neg q) \to r, r \wedge (p \wedge q) \to p \wedge s \therefore \neg(p \wedge q) \vee s$ gültig
8. $p \vee \neg p \to q, \neg(\neg r \vee \neg s), t \to p \wedge \neg p \therefore (q \wedge s) \wedge \neg t$ gültig
9. $p \vee q \therefore ((p \to q) \to q) \wedge (\neg q \to p)$ gültig

3: **Repräsentation:** $p \therefore q \leftrightarrow q$.

Lösung zu Übung 5.5.2. Das folgende Argument war in Übung 3.4.1 bereits durch eine Argumentform zu repräsentieren.[3]

> Der Papst ist Deutscher. Daher tritt Österreich am 1. Januar 2013 genau dann aus der EU aus, wenn Österreich dies tut.

(i) Überprüfen Sie, ob die nämliche Argumentform gültig ist.

Antwort: Sie ist gültig.

(ii) Entspricht das Ergebnis aus (i) Ihrer Intuition?

Bemerkung: Diese Antwort müssen Sie selbst überlegen.

Lösung zu Übung 5.5.3. Das folgende Argument war in Übung 3.4.2 bereits durch eine Argumentform zu repräsentieren.

> Bad Goisern ist die Hauptstadt von Oberösterreich und Bad Goisern ist nicht die Hauptstadt von Oberösterreich. Daher existiert Gott.

Repräsentation: $p \wedge \neg p \therefore q$.

(i) Überprüfen Sie, ob die nämliche Argumentform gültig ist.

Antwort: Sie ist gültig.

(ii) Ist dieses Argument ein Beweis für die Existenz Gottes?

Antwort: Nein, denn die Prämissen können nicht wahr sein.

5.3 Zusatzübungen

Zusatzübung 5.1. Stellen Sie mit Hilfe von Wahrheitstafeln fest, welche der folgenden Formeln tautologisch, kontradiktorisch bzw. kontingent sind.

1. $\neg((p \to q) \land p) \to \neg q$
2. $p \to (q \to p)$
3. $p \to (q \lor \neg q)$
4. $p \to \neg p$
5. $\neg p \to (p \to q)$
6. $(p \land \neg p) \to q$
7. $(p \to q) \lor (q \to r)$
8. $\neg(p \to \neg p)$
9. $p \leftrightarrow \neg p$
10. $(p \to q) \lor (q \to p)$

Zusatzübung 5.2. Stellen Sie mit Hilfe von Wahrheitstafeln fest, welche der folgenden Argumenten gültig sind.

1. $\neg((p \to q) \land p) \therefore \neg q$
2. $p \therefore (q \to p)$
3. $p \therefore (q \lor \neg q)$
4. $p \therefore \neg p$
5. $\neg p \therefore (p \to q)$
6. $(p \land \neg p) \therefore q$
7. $\therefore (p \to q) \lor (q \to r)$
8. $\therefore \neg(p \to \neg p)$
9. $\therefore p \leftrightarrow \neg p$
10. $\therefore (p \to q) \lor (q \to p)$

5.3.1 Lösungen

Lösung zu Zusatzübung 5.1.

1. $\neg((p \rightarrow q) \wedge p) \rightarrow \neg q$ — kontingent

p	q	$\neg$	$((p \rightarrow q)$	$\wedge\ p)$	$\rightarrow$	$\neg\ q$
w	w	f	w	w	w	f
w	f	w	f	f	w	w
f	w	w	w	f	f	f
f	f	w	w	f	w	w
		④	②	③	❺	①

2. $p \rightarrow (q \rightarrow p)$ — tautologisch
3. $p \rightarrow (q \vee \neg q)$ — tautologisch
4. $p \rightarrow \neg p$ — kontingent
5. $\neg p \rightarrow (p \rightarrow q)$ — tautologisch
6. $(p \wedge \neg p) \rightarrow q$ — tautologisch
7. $(p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow r)$ — tautologisch
8. $\neg(p \rightarrow \neg p)$ — kontingent
9. $p \leftrightarrow \neg p$ — kontradiktorisch
10. $(p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow p)$ — tautologisch

Lösung zu Zusatzübung 5.2.

1. $\neg((p \rightarrow q) \wedge p) \therefore \neg q$ — nicht gültig
2. $p \therefore (q \rightarrow p)$ — gültig
3. $p \therefore (q \vee \neg q)$ — gültig
4. $p \therefore \neg p$ — nicht gültig
5. $\neg p \therefore (p \rightarrow q)$ — gültig
6. $(p \wedge \neg p) \therefore q$ — gültig
7. $\therefore (p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow r)$ — gültig
8. $\therefore \neg(p \rightarrow \neg p)$ — nicht gültig
9. $\therefore p \leftrightarrow \neg p$ — nicht gültig
10. $\therefore (p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow p)$ — gültig

Aussagenlogisches Herleiten 6

6.1 Vorbereitung

In Übung 6.3 wird folgendes gefragt:

> Hier sind in der Prämisse Klammern verloren gegangen. Was könnte gemeint sein?

Also, es kann sinnvoll sein, die Formel ‚$p \wedge q \wedge r$' entweder als ‚$(p \wedge q) \wedge r$' oder als ‚$p \wedge (q \wedge r)$' zu interpretieren. Beide Formeln sind jedoch logisch äquivalent (dies kann durch eine Wahrheitstabelle oder eine Herleitung bestätigt werden). Daher ist es problemlos möglich, die Klammern wegzulassen. Die Herleitungen der Formeln erfolgen jedoch nicht auf exakt dieselbe Weise. Die Formel ‚$(p \wedge q) \wedge r$' kann wie in der letzten Übung bewiesen werden. Jetzt verwenden wir die Formel ‚$p \wedge (q \wedge r)$' als Prämisse.

Aktivierungselement 6.1. Beweisen Sie die folgende Schlüsse mit Hilfe einer Herleitung:

1. $(p \wedge q) \wedge r \vdash p \wedge (q \wedge r)$
2. $p \wedge (q \wedge r) \vdash (p \wedge q) \wedge r$
3. $\vdash ((p \wedge q) \wedge r) \leftrightarrow (p \wedge (q \wedge r))$

6.2 Übungen

Übung 6. Führen Sie die Herleitungen zu folgenden deduktiv gültigen Schlüssen durch.

1. $p \rightarrow q \vee (r \wedge s),\ t \rightarrow q \vee (r \wedge s) \vdash p \vee t \rightarrow q \vee (r \wedge s)$
2. $(p \wedge q) \wedge r \vdash r \vee s$
3. $p \wedge q \wedge r \vdash r \vee s$
4. $p \vee q,\ p \rightarrow r,\ \neg r \vdash q \vee s$
5. $(p \wedge q) \vee r,\ r \rightarrow \neg q,\ \neg\neg(q \wedge r) \vdash p$
6. $(p \wedge q) \wedge r,\ p \rightarrow \neg s,\ q \rightarrow \neg t \vdash \neg s \wedge \neg t$
7. $\neg p \wedge q,\ p \vee (r \rightarrow \neg q),\ \neg r \rightarrow \neg\neg(s \wedge t),\ \neg\neg t \vee r \vdash s \wedge t$
8. $p \vee (q \wedge \neg q) \vdash p$
9. $p \vee q,\ p \vee \neg q \vdash p$
10. $p \rightarrow q,\ p \rightarrow \neg q \vdash \neg p$
11. $p \rightarrow q \vdash \neg(p \wedge \neg q)$
12. $\neg p \vee \neg q \vdash \neg(p \wedge q)$
13. $p \rightarrow (q \rightarrow r) \vdash p \wedge q \rightarrow r$
14. $p \rightarrow q \vdash p \wedge r \rightarrow q \wedge r$
15. $p \rightarrow q,\ p \vee r \vdash q \vee r$
16. $p \rightarrow \neg p \vdash \neg p$
17. $p \wedge (q \vee r) \vdash (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
18. $\neg(p \vee q) \vee (s \rightarrow t),\ p \wedge s,\ t \rightarrow r \vdash r$

6.2.1 Lösungen

Lösung zu Übung 6. Führen Sie die Herleitungen zu folgenden deduktiv gültigen Schlüssen durch.

1. $p \rightarrow q \vee (r \wedge s), t \rightarrow q \vee (r \wedge s) \vdash p \vee t \rightarrow q \vee (r \wedge s)$

Antwort

1.	$p \rightarrow q \vee (r \wedge s)$	(P1)
2.	$t \rightarrow q \vee (r \wedge s)$	(P2)
3.	$\|\ p \vee t$	(KB-Annahme)
4.	$\|\ \|\ p$	(FU-Annahme 1)
5.	$\|\ \|\ q \vee (r \wedge s)$	1., 4. (MP)
6.	$\|\ \|\ \neg p$	(FU-Annahme 2)
7.	$\|\ \|\ t$	3., 6. (DS1)
8.	$\|\ \|\ q \vee (r \wedge s)$	2., 7. (MP)
9.	$\|\ q \vee (r \wedge s)$	4.–6. (FU)
10.	$p \vee t \rightarrow q \vee (r \wedge s)$	3.–9. (KB)

2. $(p \wedge q) \wedge r \vdash r \vee s$

Antwort

1.	$(p \wedge q) \wedge r$	(P1)
2.	r	1. (SIMP2)
3.	$r \vee s$	2. (ADD1)

3. $p \wedge q \wedge r \vdash r \vee s$

Antwort

1.	$p \wedge (q \wedge r)$	(P1)
2.	$q \wedge r$	1. (SIMP2)
3.	r	2. (SIMP2)
4.	$r \vee s$	3. (ADD1)

4. $p \vee q,\ p \rightarrow r,\ \neg r \vdash q \vee s$

Antwort

1.	$p \vee q$	(P1)
2.	$p \rightarrow r$	(P2)
3.	$\neg r$	(P3)
4.	$\neg p$	2., 3. (MT)
5.	q	1., 4. (DS1)
6.	$q \vee s$	5. (ADD1)

5. $(p \wedge q) \vee r,\ r \rightarrow \neg q,\ \neg\neg(q \wedge r) \vdash p$

Antwort

1.	$(p \wedge q) \vee r$	(P1)
2.	$r \rightarrow \neg q$	(P2)
3.	$\neg\neg(q \wedge r)$	(P3)
4.	$q \wedge r$	3. (DN2)
5.	r	4. (SIMP2)
6.	$\neg q$	2., 5. (MP)
7.	q	4. (SIMP1)
8.	p	6., 7. (ECQ)

6. $(p \wedge q) \wedge r,\ p \rightarrow \neg s,\ q \rightarrow \neg t \vdash \neg s \wedge \neg t$

Antwort

1.	$(p \wedge q) \wedge r$	(P1)
2.	$p \rightarrow \neg s$	(P2)
3.	$q \rightarrow \neg t$	(P3)
4.	$p \wedge q$	1. (SIMP1)
5.	p	4. (SIMP1)
6.	$\neg s$	2., 5. (MP)
7.	q	4. (SIMP2)
8.	$\neg t$	3., 7. (MPP)
9.	$\neg s \wedge \neg t$	6., 8. (KON)

7. $\neg p \wedge q,\ p \vee (r \rightarrow \neg q),\ \neg r \rightarrow \neg\neg(s \wedge t),\ \neg\neg t \vee r \vdash s \wedge t$

Frage: Mindestens eine Prämisse war in dieser Herleitung nicht notwendig. Welche?

Antwort

1.	$\neg p \wedge q$	(P1)
2.	$p \vee (r \rightarrow \neg q)$	(P2)
3.	$\neg r \rightarrow \neg\neg(s \wedge t)$	(P3)
4.	$\neg\neg t \vee r$	(P4)
5.	$\neg p$	1. (SIMP1)
6.	$r \rightarrow \neg q$	2., 5. (DS1)
7.	q	1. (SIMP2)
8.	$\neg\neg q$	7. (DN1)
9.	$\neg r$	6., 8. (MT)[1]
10.	$\neg\neg(s \wedge t)$	3., 9. (MP)
11.	$s \wedge t$	10. (DN2)

1: Dieser Schritt ist nicht direkt von 6., 7. erhältlich. Mann kann jedoch beweisen, dass $A \rightarrow \neg B, B \vdash \neg A$ für alle A und B gilt.

8. $p \vee (q \wedge \neg q) \vdash p$

Antwort

1.	$p \vee (q \wedge \neg q)$	(P1)
2.	$\|\|\ \neg p$	(IB-Annahme)
3.	$\|\|\ q \wedge \neg q$	1., 2. (DS1)
4.	p	2.–3. (IB)

9. $p \vee q,\ p \vee \neg q \vdash p$

Antwort

1.	$p \vee q$	(P1)
2.	$p \vee \neg q$	(P2)
3.	$\|\|\ \neg p$	(IB-Annahme)
4.	$\|\|\ q$	1., 3. (DS1)
5.	$\|\|\ \neg q$	2., 3. (DS1)
6.	$\|\|\ q \wedge \neg q$	4., 5. (KON)
7.	p	3.–6. (IB)

10. $p \rightarrow q, p \rightarrow \neg q \vdash \neg p$

Antwort

1.	$p \rightarrow q$	(P1)
2.	$p \rightarrow \neg q$	(P2)
3.	$\|\| \quad \neg\neg p$	(IB-Annahme)
4.	$\|\| \quad p$	3. (DN)
5.	$\|\| \quad q$	1., 4. (MP)
6.	$\|\| \quad \neg q$	2., 4. (MP)
7.	$\|\| \quad q \wedge \neg q$	5., 6. (KON)
8.	$\neg p$	3.–7. (IB)

Inkorrekte Lösung

1.	$p \rightarrow q$	(P1)
2.	$p \rightarrow \neg q$	(P2)
3.	$\|\| \quad p$	(IB-Annahme)[2]
4.	$\|\| \quad q$	1., 3. (MP)
5.	$\|\| \quad \neg q$	2., 3. (MP)
6.	$\|\| \quad q \wedge \neg q$	4., 5. (KON)
7.	$\neg p$	3.–6. (IB)

2: Eine IB-Annahme ist eine negierte Formel. Man kann jedoch eine zusätzliche Regel definieren, die durch IB ersetzt wird, um diese Herleitung gültig zu machen. Können Sie versuchen, diese Regel zu definieren?

11. $p \rightarrow q \vdash \neg(p \wedge \neg q)$

Antwort

1.	$p \rightarrow q$	(P1)
2.	$\|\| \quad \neg\neg(p \wedge \neg q)$	(IB-Annahme)
3.	$\|\| \quad p \wedge \neg q$	2. (DN2)
4.	$\|\| \quad p$	3. (SIMP1)
5.	$\|\| \quad q$	1., 4. (MP)
6.	$\|\| \quad \neg q$	3. (SIMP2)
7.	$\|\| \quad q \wedge \neg q$	5., 6. (KON)
8.	$\neg(p \wedge \neg q)$	2.–7. (IB)

12. $\neg p \vee \neg q \vdash \neg(p \wedge q)$

Antwort

1.	$\neg p \vee \neg q$	(P1)
2.	$\|\| \; \neg\neg(p \wedge q)$	(IB-Annahme)
3.	$\|\| \; p \wedge q$	2. (DN2)
4.	$\|\| \; p$	3. (SIMP1)
5.	$\|\| \; \neg\neg p$	4. (DN1)
6.	$\|\| \; \neg q$	1., 5. (DS1)[3]
7.	$\|\| \; q$	3. (SIMP2)
8.	$\|\| \; q \wedge \neg q$	6., 7. (KON)
9.	$\neg(p \wedge q)$	2.–8. (IB)

3: Dieser Schritt ist nicht direkt von 1., 4. erhältlich.

13. $p \to (q \to r) \vdash p \wedge q \to r$

Antwort

1.	$p \to (q \to r)$	(P1)
2.	$\|\| \; p \wedge q$	(KB-Annahme)
3.	$\|\| \; p$	2. (SIMP1)
4.	$\|\| \; q \to r$	1., 3. (MP)
5.	$\|\| \; q$	2. (SIMP2)
6.	$\|\| \; r$	4., 5. (MP)
7.	$p \wedge q \to r$	2.–6. (KB)

14. $p \to q \vdash p \wedge r \to q \wedge r$

Antwort

1.	$p \to q$	(P1)
2.	$\|\| \; p \wedge r$	(KB-Annahme)
3.	$\|\| \; p$	2. (SIMP1)
4.	$\|\| \; q$	1., 3. (MP)
5.	$\|\| \; r$	2. (SIMP2)
6.	$\|\| \; q \wedge r$	4., 5. (KON)
7.	$p \wedge r \to q \wedge r$	2.–5. (KB)

15. $p \rightarrow q,\ p \vee r \vdash q \vee r$

Antwort

1.	$p \rightarrow q$	(P1)
2.	$p \vee r$	(P2)
3.	$\|\|\ r$	(FU-Annahme 1)
4.	$\|\|\ q \vee r$	3. (ADD2)
5.	$\|\|\ \neg r$	(FU-Annahme 2)
6.	$\|\|\ p$	2., 5. (DS2)
7.	$\|\|\ q$	1., 6. (MP)
8.	$\|\|\ q \vee r$	7. (ADD1)
9.	$q \vee r$	3.–8. (FU)

16. $p \rightarrow \neg p \vdash \neg p$

Antwort

1.	$p \rightarrow \neg p$	(P1)
2.	$\|\|\ \neg\neg p$	(IB-Annahme)
3.	$\|\|\ p$	2. (DN2)
4.	$\|\|\ \neg p$	1., 3. (MP)
5.	$\|\|\ p \wedge \neg p$	3., 4. (KON)
6.	$\neg p$	2.–5. (IB)

17. $p \wedge (q \vee r) \vdash (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

Antwort

1.	$\underline{p \wedge (q \vee r)}$	(P1)
2.	p	1. (SIMP1)
3.	$q \vee r$	1. (SIMP2)
4.	$\|\|\ q$	(FU-Annahme 1)
5.	$\|\|\ p \wedge q$	2., 4. (KONJ)
6.	$\|\|\ (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	5. (ADD1)
7.	$\|\|\ \neg q$	(FU-Annahme 2)
8.	$\|\|\ r$	3., 7. (DS1)
9.	$\|\|\ p \wedge r$	2., 8. (KON)
10.	$\|\|\ (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	9. (ADD2)
11.	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	4.–10. (FU)

18. $\neg(p \vee q) \vee (s \rightarrow t), p \wedge s, t \rightarrow r \vdash r$

Antwort

1.	$\neg(p \vee q) \vee (s \rightarrow t)$	(P1)
2.	$p \wedge s$	(P2)
3.	$\underline{t \rightarrow r}$	(P3)
4.	p	2. (SIMP1)
5.	$p \vee q$	4. (ADD1)
6.	$\neg\neg(p \vee q)$	5. (DN1)
7.	$s \rightarrow t$	1., 6. (DS1)
8.	s	2. (SIMP2)
9.	t	7., 8. (MP)
10.	r	3., 9. (MP)

6.3 Zusatzübungen

Zusatzübung 6.1. Versuchen Sie, alternative Herleitungen für die folgenden Schlüsse zu finden, die den unten stehenden Hinweisen folgen.

10. $p \to q, p \to \neg q \vdash \neg p$

    Hinweis: Mit FU in 7 Schritten herleiten.

12. $\neg p \lor \neg q \vdash \neg(p \land q)$

    Hinweis: Mit FU in 9 Schritten herleiten.

15. $p \to q,\ p \lor r \vdash q \lor r$

    Hinweis: Mit FU auf p in 9 Schritten herleiten.

16. $p \to \neg p \vdash \neg p$

    Hinweis: Mit IB in 5 Schritten herleiten.

17. $p \land (q \lor r) \vdash (p \land q) \lor (p \land r)$

    Hinweis: Mit FU auf r in 11 Schritten herleiten.

18. $\neg(p \lor q) \lor (s \to t),\ p \land s,\ t \to r \vdash r$

    Hinweis: Mit IB auf r in XX Schritten herleiten.

Zusatzübung 6.2. Führen Sie die Herleitungen zu folgenden deduktiv gültigen Schlüssen durch.

1. $p \to \neg q, q \vdash \neg p$
2. $p \vdash (q \to p)$
3. $\vdash p \to (q \to p)$
4. $p \vdash (q \lor \neg q)$
5. $\vdash p \to (q \lor \neg q)$
6. $\neg p \vdash (p \to q)$
7. $(p \land \neg p) \vdash q$
8. $\vdash (p \to q) \lor (q \to r)$
9. $\vdash (p \to q) \lor (q \to p)$
10. $\vdash ((p \land q) \to r) \leftrightarrow (p \to (q \to r))$

6.3.1 Lösungen

Lösung zu Zusatzübung 6.1. Versuchen Sie, alternative Herleitungen für die folgenden Schlüsse zu finden, die den unten stehenden Hinweisen folgen.

10. $p \rightarrow q, p \rightarrow \neg q \vdash \neg p$

Antwort

1.	$p \rightarrow q$	(P1)
2.	$p \rightarrow \neg q$	(P2)
3.	$\|\| \quad p$	(FU-Annahme 1)
4.	$\|\| \quad \neg q$	2., 3. (MP)
5.	$\|\| \quad \neg p$	1., 4. (MT)
6.	$\|\| \quad \neg p$	(FU-Annahme 2)[4]
7.	$\neg p$	3.–6. (FU)

4: Die Annahme ist bereits das Ziel!

12. $\neg p \vee \neg q \vdash \neg(p \wedge q)$

Antwort

1.	$\neg p \vee \neg q$	(P1)
2.	$\|\| \quad p \wedge q$	(FU-Annahme 1)
3.	$\|\| \quad p$	2. (SIMP1)
4.	$\|\| \quad \neg\neg p$	3. (DN1)
5.	$\|\| \quad \neg q$	1., 4. (MT)[5]
6.	$\|\| \quad q$	2. (SIMP2)
7.	$\|\| \quad \neg(p \wedge q)$	5., 6. (ECQ)
8.	$\|\| \quad \neg(p \wedge q)$	(FU-Annahme 2)[6]
9.	$\neg(p \wedge q)$	2.–8. (IB)

5: Dieser Schritt ist nicht direkt von 1., 4. erhältlich.

6: Die Annahme ist bereits das Ziel!

15. $p \rightarrow q,\ p \vee r \vdash q \vee r$

Antwort

1.	$p \rightarrow q$	(P1)
2.	$p \vee r$	(P2)
3.	$\|\|\ p$	(FU-Annahme 1)
4.	$\|\|\ q$	1., 3. (MP)
5.	$\|\|\ q \vee r$	4. (ADD1)
6.	$\|\|\ \neg p$	(FU-Annahme 2)
7.	$\|\|\ r$	2., 6. (DS1)
8.	$\|\|\ q \vee r$	7. (ADD2)
9.	$q \vee r$	3.–8. (FU)

16. $p \rightarrow \neg p \vdash \neg p$

Antwort

1.	$p \rightarrow \neg p$	(P1)
2.	$\|\|\ \neg\neg p$	(IB-Annahme)
3.	$\|\|\ \neg p$	1., 2. (MT)
4.	$\|\|\ \neg p \wedge \neg\neg p$	2., 3. (KON)[7]
5.	$\neg p$	2.–4. (IB)

7: $A \wedge \neg A$ wird hergeleitet, mit $A := \neg p$.

17. $p \wedge (q \vee r) \vdash (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

Antwort

1.	$\underline{p \wedge (q \vee r)}$	(P1)
2.	p	1. (SIMP1)
3.	$q \vee r$	1. (SIMP2)
4.	$\|\|\ r$	(FU-Annahme 1)
5.	$\|\|\ p \wedge r$	2., 4. (KON)
6.	$\|\|\ (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	5. (ADD2)
7.	$\|\|\ \neg r$	(FU-Annahme 2)
8.	$\|\|\ q$	3., 7. (DS2)
9.	$\|\|\ p \wedge q$	2., 8. (KONJ)
10.	$\|\|\ (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	9. (ADD1)
11.	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	4.–10. (FU)

18. $\neg(p \vee q) \vee (s \rightarrow t),\ p \wedge s,\ t \rightarrow r \vdash r$

Ausstehend

Lösung zu Zusatzübung 6.2. Führen Sie die Herleitungen zu folgenden deduktiv gültigen Schlüssen durch.

[Ausstehend.]

1. $p \rightarrow \neg q, q \vdash \neg p$

Ausstehend

2. $p \vdash (q \rightarrow p)$

Ausstehend

3. $\vdash p \rightarrow (q \rightarrow p)$

Ausstehend

4. $p \vdash (q \vee \neg q)$

Ausstehend

5. $\vdash p \rightarrow (q \vee \neg q)$

Ausstehend

6. $\neg p \vdash (p \rightarrow q)$

Ausstehend

7. $(p \wedge \neg p) \vdash q$

Ausstehend

8. $\vdash (p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow r)$

Ausstehend

9. $\vdash (p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow p)$

Ausstehend

10. $\vdash ((p \wedge q) \rightarrow r) \leftrightarrow (p \rightarrow (q \rightarrow r))$

Ausstehend

Prädikatenlogische Analyse und Repräsentierung

8

8.1 Vorbereitung

8.1.1 Wiederholung von Sätzen aus den Kapiteln 1-3

Schauen wir uns noch einmal einige Sätze aus den Kapiteln 1 bis 3 an, die in der Prädikatenlogik komplexer repräsentiert werden können als in der Aussagenlogik.

Aktivierungselement 8.1 (Aus Übung 1.4)**.** Repräsentieren Sie die folgenden natürsprachlichen Aussagesatze in der prädikatenlogischen Sprache:

1. Herbert und Heidi sind befreundet.
2. Herbert und Heidi sind beliebt.
3. Herbert und Heidi sind beide nicht glücklich.
4. Herbert und Heidi lieben sich.
5. Herbert und Heidi lieben einander.
6. Es ist nicht der Fall, dass Herbert und Heidi beide nicht glücklich sind.
8. Wenn Herbert in die Stadt gefahren ist, so sitzt er sicherlich bereits in seinem Büro.
13. Thales von Milet, ein ionischer Naturphilosoph, sagte die Sonnenfinsternis vom 28. März 585 v. Chr. voraus.
21. Kleine Lügen und auch kleine
Kinder haben kurze Beine.
(Ringelnatz)[1]
23. Wer in Wasser badet, kann nass werden.
24. Der April macht, was er will.
28. Dieses Lied gefällt mir besonders gut.
29. ’s echt cool, eh?

1: Falls der Satz wörtlich interpretiert wird.

Aktivierungselement 8.2 (aus Übung 2.4)**.** Repräsentieren Sie die folgenden natürsprachlichen Aussagesatze in der prädikatenlogischen Sprache:

1. Heute regnet es in Salzburg.
3. Wenn es in Salzburg nicht regnet, dann hagelt's, stürmt's oder schneit's.
5. Das englische Wort ‚mind' kann nicht ins Deutsche übersetzt werden.
9. Der Österreicher ist eigentlich ein Freund fremder Kulturen, auch wenn er nicht zu viele Ausländer in seiner Heimat sehen möchte.
10. Sir Karl Popper und Theodor W. Adorno sind beide Philosophen, aber sie können einander nicht besonders gut leiden.
11. Zum Mittagessen gibt es Wiener Schnitzel mit Salat, Schweinsbraten mit Knödel oder Kasnocken.
12. Einige bedeutende Österreicher stammen aus Böhmen oder Mähren.
13. Nächstes Jahr kommt der Präsident der USA nach Österreich.
15. Tirol ist in einen nördlichen, einen südlichen und einen östlichen Teil aufgeteilt.
16. Jeder Junggeselle ist männlich und unverheiratet, ohne dabei gleich ein Priester zu sein.
17. Alle Studenten lernen Logik, obgleich nicht alle Studenten dies mit Begeisterung tun.
18. Wenn das mit der Politik so weiter geht, dann werden sich Situationen wiederholen, die wir uns alle nicht wünschen.

Aktivierungselement 8.3 (aus Übung 2.5)**.** Repräsentieren Sie die folgenden Argumente in der prädikatenlogischen Sprache:

1. Wenn Fips eine Katze ist, dann jagt Fips gerne Mause. Fips jagt aber nicht gerne Mause. Somit ist Fips keine Katze.
2. Wenn Fips eine Katze ist, dann trinkt Fips gerne Milch. Fips ist eine Katze. Folglich trinkt Fips gerne Milch.
3. Wenn Fips eine Katze ist, dann trinkt Fips gerne Milch. Fips trinkt gerne Milch. Folglich ist Fips eine Katze.
4. Fips ist eine Katze. Denn: Wenn Fips eine Katze ist, dann trinkt Fips gerne Milch. Fips trinkt gerne Milch.
5. Also ist Fips eine Katze oder er ist keine Katze.
6. Sokrates ist Philosoph und Grieche. Platon ist Philosoph und Grieche. Aristoteles ist Philosoph und Grieche. Daher sind alle Philosophen Griechen.

8.1.2 Das logische Quadrat

Die Übung 8.2 wird leichter, wenn wir die logische Form der kategorischen Sätze verstehen:

A**:** alle S sind P (universell affirmativ);

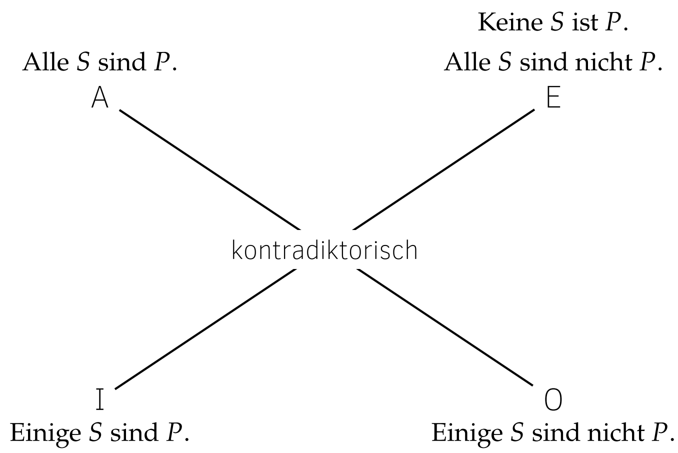
E**:** keine S ist P oder alle S sind nicht P (universell negativ);

I**:** einige S sind P (partikulär affirmativ); und

O**:** einige S sind nicht P (partikulär negativ).

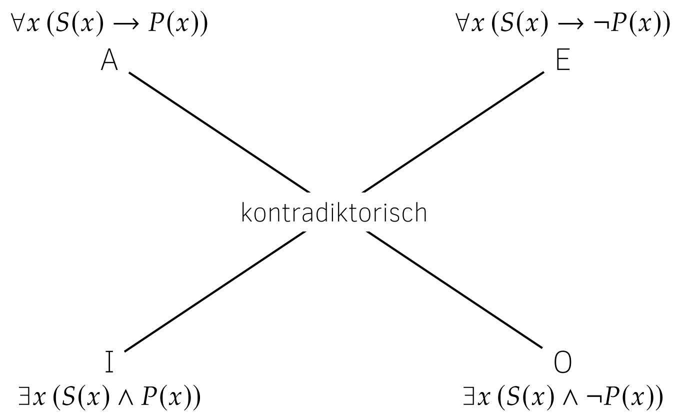
Sätze des Typs A und O sind gegenseitig kontradiktorisch, was bedeutet, dass ein Satz vom Typ A logisch äquivalent zur Negation eines Satzes vom Typ O ist – vorausgesetzt, S und P bezeichnen in den obigen Formeln die gleiche Eigenschaften. Dasselbe gilt für Sätze des Typs E und I.

Diese Beziehungen werden im folgenden logischen Quadrat dargestellt:



In der Prädikatenlogik werden die Sätze dieses Quadrats wie folgt repräsentiert:

Bemerkung: Man kann andere Beziehungen (Kontrarität, Subkontrarität, Subalternität, usw.) zwischen den anderen Typen kategorischer Sätze herstellen, allerdings unter der Annahme, dass es mindestens ein x gibt, sodass $S(x)$. Das könnte jedoch zu Verwirrung führen, weshalb werden diese Beziehungen hier nicht erklärt.



Frage: Warum wird ‚einige S sind P' als ‚$\exists x\,(S(x) \wedge P(x))$' und nicht als ‚$\exists x\,(S(x) \rightarrow P(x))$' repräsentiert?

Antwort

‚Einige S sind P' wird als ‚$\exists x\,(S(x) \wedge P(x))$' und nicht als ‚$\exists x\,(S(x) \rightarrow P(x))$' repräsentiert, weil ‚$S(a) \rightarrow P(a)$' logisch ‚$\neg S(a) \vee P(a)$' bedeutet.

Diese letzte Ausdruck ist wahr, wenn $\neg S(a)$ oder $P(a)$ (oder beide). Folglich kann ‚$\exists x\,(S(x) \wedge P(x))$' wahr sein, wenn es ein x gibt (z.B. a), das nicht S ist.

Die Bedeutung von ‚einige S sind P' ist jedoch, dass es mindestens ein x gibt, das sowohl S als auch P ist. Daher ist die richtige Darstellung ‚$\exists x\,(S(x) \wedge P(x))$', da diese ausdrückt, dass es mindestens ein x gibt, das beide Eigenschaften erfüllt.

Frage an Sie: Warum wird ‚alle S sind P' als ‚$\forall x\,(S(x) \rightarrow P(x))$' und nicht als ‚$\forall x\,(S(x) \wedge P(x))$' repräsentiert?

8.1.3 Lösungen

Im Folgenden bezeichnet ‚h_1' Herbert und ‚h_2' Heidi. Die Bedeutungen der anderen Buchstaben werden mit Bemerkungen erklärt oder im Kontext verstanden.

Lösung zu Aktivierungselement 8.1.

1. Herbert und Heidi sind befreundet.

Antwort 1: aussagenlogisch unzerlegbar, einfach

Zwischenformalisation: Befreundet(Herbert, Heidi)

Aussagenlogische Formalisation: p

Prädikatlogische Formalisation: $B(h_1, h_2)$

‚$B(x_1, x_2)$' bedeutet x_1 befreundet x_2.

Antwort 2: aus. zerlegbar, komplex

Zwisch. Freund(Herbert, Heidi) ∧ Freund(Heidi, Herbert)

Aus. Repr. $p \wedge q$

Präd. Repr. $F(h_1, h_2) \wedge F(h_2, h_1)$

‚$F(x_1, x_2)$' bedeutet x_1 ist Freund von x_2.

2. Herbert und Heidi sind beliebt.

Antwort: aus. zerlegbar, komplex

Zwisch. Beliebt(Herbert) ∧ Beliebt(Heidi)

Aus. Repr. $p \wedge q$

Präd. Repr. $B(h_1) \wedge B(h_2)$

‚$B(x)$' bedeutet x ist beliebt.

3. Herbert und Heidi sind beide nicht glücklich.

Antwort 1: aus. zerlegbar, komplex

Falls ‚beide' als ‚zusammen' verstanden wird.

Zwisch. ¬Glücklich(Herbert, Heidi)

Aus. Repr. $\neg p$

Präd. Repr. $\neg G(h_1, h_2)$

‚$G(x, y)$' bedeutet x und y sind glücklich zusammen.

Antwort 2: aus. zerlegbar, komplex

Falls ‚beide' nicht als ‚zusammen' verstanden wird.

Zwisch. ¬(Glücklich(Herbert) ∧ Glücklich(Heidi))

Aus. Repr. $\neg(p \wedge q)$

Präd. Repr. $\neg(G(h_1) \wedge G(h_2))$

‚$G(x)$' bedeutet x ist glücklich.

4. Herbert und Heidi lieben sich.

Antwort 1: aus. zerlegbar, komplex

Falls ‚sich' eine reflexive Bedeutung hat.

Zwisch. Liebt(Herbert, Herbert) ∧ Liebt(Heidi, Heidi)

Aus. Repr. $p \wedge q$

Präd. Repr. $L(h_1, h_1) \wedge L(h_2, h_2)$

‚$L(x, y)$' bedeutet x liebt y. Daher bedeutet $L(x, x)$: ‚x liebt sich selbst'.

Antwort 2: aus. zerlegbar, komplex

Falls ‚sich' eine nicht-reflexive Bedeutung hat: wie Satz 5.

5. Herbert und Heidi lieben einander.

Antwort: aus. zerlegbar, komplex

Falls wir das Prädikat ‚L' aus der letzten Übung verwenden wollen.

Zwisch. Liebt(Herbert, Heidi) ∧ Liebt(Heidi, Herbert)

Aus. Repr. $p \wedge q$

Präd. Repr. $L(h_1, h_2) \wedge L(h_2, h_1)$

Antwort: aus. unzerlegbar, einfach

Falls wir ein Prädikat für ‚einander lieben' einführen wollen.

Zwisch. Einander_Lieben(Herbert,Heidi)

Aus. Repr. p

Präd. Repr. $E(h_1, h_2)$

‚$E(x, y)$' bedeutet x und y lieben einander.

6. Es ist nicht der Fall, dass Herbert und Heidi beide nicht glücklich sind.

Antwort: aus. zerlegbar, komplex

Falls ‚beide' als ‚zusammen' verstanden wird.

Zwisch. ¬¬Glücklich(Herbert, Heidi)

Aus. Repr. $\neg\neg p$

Präd. Repr. $\neg\neg G(h_1, h_2)$

Antwort: aus. zerlegbar, komplex

Falls ‚beide' nicht als ‚zusammen' verstanden wird.

Zwisch. ¬¬(Glücklich(Herbert) ∧ Glücklich(Heidi))

Aus. Repr. $\neg\neg(p \wedge q)$

Präd. Repr. $\neg\neg(G(h_1) \wedge G(h_2))$

8. Wenn Herbert in die Stadt gefahren ist, so sitzt er sicherlich bereits in seinem Büro.

Antwort: aus. zerlegbar, komplex

Zwisch. Gefahren(Herbert, die Stadt) ⟶ Sitzt(Herbert, Büro)

Aus. Repr. $p \longrightarrow q$

Präd. Repr. $G(h_1, s) \longrightarrow S(h_1, b)$

‚$G(x, y)$' bedeutet x ist in y gefahren. ‚$S(x, y)$' bedeutet x sitzt in y.

13. Thales von Milet, ein ionischer Naturphilosoph, sagte die Sonnenfinsternis vom 28. März 585 v. Chr. voraus.

Antwort: aus. zerlegbar, komplex

Zwisch. Ionischer(Thales) ∧ Naturphilosoph(Thales) ∧ Voraussagte(Thales, die Sonnenfinsternis vom 28. März 585 v. Chr.)

Aus. Repr. $p \wedge q \wedge r$ – d.h., $(p \wedge q) \wedge r$ und $p \wedge (q \wedge r)$

Präd. Repr. $I(t) \wedge N(t) \wedge V(t, s)$

‚$I(x)$' bedeutet x ist ionischer. ‚$N(x)$' bedeutet x ist ein Naturphilosoph. ‚$V(x, y)$' bedeutet x sagte y voraus.

21. Kleine Lügen und auch kleine
Kinder haben kurze Beine.
(Ringelnatz)

Antwort 1: aus. zerlegbar, komplex

Zwisch. Für alle x (Klein_Kind(x) ⟶ Kleine_Beine(x)) ∧ Für alle x (Kleine_Lüge(x) ⟶ Kleine_Beine(x))

Aus. Repr. $p \wedge q$

Präd. Repr. $\forall x\,(J(x) \longrightarrow B(x)) \wedge \forall x\,(L(x) \longrightarrow B(x))$

Antwort 2: aus. zerlegbar, komplex

Zwisch. Für alle x (Klein_Kind(x) $\vee$ Kleine_Lüge(x) $\rightarrow$ Kleine_Beine(x))

Aus. Repr. $p \wedge q$

Präd. Repr. $\forall x\,(J(x) \vee L(x) \rightarrow B(x))$

‚$J(x)$ bedeutet x ist ein klein Kind.‘ ‚$B(x)$‘ bedeutet x hat kleine Beine. ‚$L(x)$ bedeutet x ist eine kleine Lüge.‘

Antwort 3: aus. unzerlegbar, komplex

Zwisch. Für alle x (Klein(x) $\wedge$ (Kind(x) $\vee$ Lüge(x)) $\rightarrow$ für alle y (Beine_von(y, x) $\rightarrow$ Klein(y)))

Aus. Repr. p

Präd. Repr. $\forall x\,(K(x) \wedge (J(x) \vee L(x)) \rightarrow \forall y\,(B(y,x) \rightarrow K(y)))$

‚$K(x)$‘ bedeutet x ist klein. ‚$J(x)$‘ bedeutet x ist ein Kind. ‚$L(x)$‘ bedeutet x ist eine Lüge. ‚$B(x,y)$‘ bedeutet x ist Bein von y.

23. Wer in Wasser badet, kann nass werden.

Antwort: aus. unzerlegbar, komplex

Zwisch. Für alle x (Badet(x, Wasser) $\rightarrow$ $\Diamond$Nass_-Werden(x))

Aus. Repr. p

Präd. Repr. $\forall x\,(B(x,w) \rightarrow M(x))$

‚$B(x,y)$‘ bedeutet x badet in y. ‚$M(x)$‘ bedeutet x kann nass werden. ‚w‘ bezeichnet Wasser.

24. Der April macht, was er will.

Antwort: aus. unzerlegbar, komplex

Falls der Satz in dem Sinne interpretiert wird, dass sich das Klima im April unvorhersehbar verhält.

Zwisch. Für alle x (Klima_von(x, April) $\rightarrow$ Unvorhersehbar(x))

Aus. Repr. p

Präd. Repr. $\forall x\,(K(x,a) \rightarrow U(x))$

‚$K(x,y)$‘ bedeutet x ist das Klima von y. ‚$U(x)$‘ bedeutet x ist unvorhersehbar. ‚a‘ bezeichnet April.

28. Dieses Lied gefällt mir besonders gut.

Antwort: aus. unzerlegbar, einfach

Zwisch. Gefällt(mir, dieses Lied)

Aus. Repr. p

Präd. Repr. $G(m,l)$

‚$G(x,y)$‘ bedeutet x mag y. ‚m‘ bezeichnet den Sprecher. ‚m‘ bezeichnet ein Lied (auf das im Kontext Bezug genommen wird)

29. ’s echt cool, eh?

Antwort 1: aus. unzerlegbar, einfach

Zwisch. Echt_Cool(es)

Aus. Repr. p

Präd. Repr. $C(e)$

‚$C(x)$‘ bedeutet x ist cool. ‚e‘ bezeichnet das, worüber wir im Kontext sprechen.

Antwort 2: kein Aussagesatz

Falls es im Kontext nicht klar ist, was ‚es‘ ist.

Zwisch. Echt_Cool(es)

Aus. Repr. p

Präd. Repr. $C(x)$

Erklärung

Im natürlichen Sprachgebrauch entsprechen Sätze wie diese – vorausgesetzt, wir wissen nicht, worauf sich ‚es‘ im Kontext bezieht – am ehesten der Bedeutung einer offenen Formel.

Lösung zu Aktivierungselement 8.2.

1. Heute regnet es in Salzburg.

Antwort: aus. unzerlegbar, einfach

Zwisch. Regnet(Salzburg, heute)

Auss. Repr. p

Präd. Repr. $R(s,h)$

‚$R(x,y)$‘ bedeutet es regnet an Ort x zum Zeitpunkt y. ‚s‘ und ‚h‘ bezeichnen Salzburg bzw. heute.

3. Wenn es in Salzburg nicht regnet, dann hagelt’s, stürmt’s oder schneit’s.

Antwort: aus. unzerlegbar, komplex

Zwisch. Für alle y (¬Regnet(Salzburg, y) → Hagelt(Salzburg, y) ∨ Stürmt(Salzburg, y) ∨ Schneit(Salzburg, y))

Auss. Repr. p

Präd. Repr. $\forall y\, (\neg R(s,y) \rightarrow H(s,y) \vee S(s,y) \vee C(s,y))$

‚$H(x,y)$‘, ‚$S(x,y)$‘ und ‚$C(x,y)$‘ bedeuten, dass es am Ort x zur Zeit y hagelt bzw. stürmt bzw. schneit.

5. Das englische Wort ‚mind' kann nicht ins Deutsche übersetzt werden.

Antwort 1: aus. zerlegbar, komplex

Zwisch. ¬Übersetzbar_aus_ins(‚mind', Englisch, Deutsch)

Auss. Repr. $\neg p$

Präd. Repr. $\neg B(m, e, d)$

Antwort 2: aus. zerlegbar, komplex

Zwisch. ¬(Es gibt ein x Übersetzung_aus_von_ins(x, ‚mind', Englisch, Deutsch))

Auss. Repr. $\neg p$

Präd. Repr. $\neg\exists x\, U(x, m, e, d)$

‚$B(x, y, z)$' bedeutet x ist übersetzbar von y ins z. ‚$U(x_1, x_2, x_3, x_4)$' bedeutet, dass x_1 eine Übersetzung des Wortes x_2 aus dem x_3 ins x_4 ist. ‚m' bezeichnet das Wort ‚mind', während ‚e' und ‚d' die englische und die deutsche Sprache bezeichnen.

9. Der Österreicher ist eigentlich ein Freund fremder Kulturen, auch wenn er nicht zu viele Ausländer in seiner Heimat sehen möchte.

Antwort: aus. unzerlegbar, einfach

Zwisch. Für alle x (Österreicher(x) $\rightarrow$ für alle y (Kultur(y) $\wedge$ Fremd (y) $\rightarrow$ Freund_von(x, y)) $\wedge$ für die meisten y (Ausländer(y) $\wedge\neg$Möchte_in(x, y, Heimat)))

Auss. Repr. p

Präd. Repr. $\forall x\,(O(x) \rightarrow \forall y\,(K(y) \wedge R(y) \rightarrow F(x, y)) \wedge \exists y\,(A(y) \wedge \neg M(x, y, h)))$

Bemerkung

Anstatt ‚$\exists y\,(A(y) \wedge \neg M(x, y, h))$' wäre es korrekter gewesen,

$$‚\mathbb{W} y\,(A(y) \wedge \neg M(x, y, h))‘$$

zu sagen, wobei ‚$\mathbb{W}$' ein Quantor ist, dessen Bedeutung ‚für die meisten y' lautet. In der Prädikatenlogik gibt es diesen Quantor jedoch nicht.

10. Sir Karl Popper und Theodor W. Adorno sind beide Philosophen, aber sie können einander nicht besonders gut leiden.

Antwort: aus. zerlegbar, komplex

Zwisch. Philosoph(Popper) ∧ Philosoph(Adorno) ∧¬Leiden_besonders_gut(Popper, Adorno)

Auss. Repr. $p \wedge q \wedge \neg r$ – d.h., $(p \wedge q \wedge) \neg r$ oder $p \wedge (q \wedge \neg r)$

Präd. Repr. $P(p) \wedge P(a) \wedge \neg L(p, a)$

11. Zum Mittagessen gibt es Wiener Schnitzel mit Salat, Schweinsbraten mit Knödel oder Kasnocken.

Antwort: aus. zerlegbar, komplex

Zwisch. Zum_Mittagessen(Wiener Schnitzel mit Salat) ∨ Zum_Mittagessen(Schweinsbraten mit Knödel) ∨ Zum_Mittagessen(Kasnocken)

Auss. Repr. $p \vee q \vee r$ – d.h., $(p \vee q) \vee r$ oder $p \vee (q \vee r)$

Präd. Repr. $M(w) \vee M(s) \vee M(k)$

12. Einige bedeutende Österreicher stammen aus Böhmen oder Mähren.

Antwort: aus. unzerlegbar, komplex

Zwisch. Es gibt zumindest ein x, sodass (Österreicher(x) ∧ Bedeutender(x) ∧ (Stammt_aus(x, Böhmen) ∨ Stammt_aus(x, Mähren)))

Auss. Repr. p

Präd. Repr. $\exists x\, (O(x) \wedge B(x) \wedge (S(x, b) \vee S(x, m)))$

13. Nächstes Jahr kommt der Präsident der USA nach Österreich.

Antwort: aus. unzerlegbar, einfach

Zwisch. Kommt_nach(Präsident der USA, Österreich, nächstes Jahr)

Auss. Repr. p

Präd. Repr. $K(p, o, n)$

15. Tirol ist in einen nördlichen, einen südlichen und einen östlichen Teil aufgeteilt.

Antwort: aus. unzerlegbar, einfach

Zwisch. Aufgeteilt_in(Tirol, nördlichen Teil, südlichen Teil, östlichen Teil)

Auss. Repr. p

Präd. Repr. $A(t, n, s, o)$

16. Jeder Junggeselle ist männlich und unverheiratet, ohne dabei gleich ein Priester zu sein.

Antwort: aus. unzerlegbar, komplex

Zwisch. Für alle x (Junggeselle(x) $\rightarrow$ Männlich(x) $\wedge\neg$Verheiratet(x) $\wedge$ $\neg$Priester(x))

Auss. Repr. p

Präd. Repr. $\forall x\ (J(x) \rightarrow M(x) \wedge \neg V(x) \wedge \neg P(x))$

17. Alle Studenten lernen Logik, obgleich nicht alle Studenten dies mit Begeisterung tun.

Antwort: aus. zerlegbar, komplex

Zwisch. Für alle x (Student(x) $\rightarrow$ Lernt(x, Logik)) $\wedge$ $\neg$(Für alle x (Student(x) $\rightarrow$ Lernt_mit(x, Logik, Begeisterung)))

Auss. Repr. $p \wedge \neg q$

Präd. Repr. $\forall x\ (S(x) \rightarrow L(x, l)) \wedge \neg\forall x\ (S(x) \rightarrow M(x, l, b))$

18. Wenn das mit der Politik so weiter geht, dann werden sich Situationen wiederholen, die wir uns alle nicht wünschen.

Antwort: aus. zerlegbar, komplex

Zwisch. Weiter_gehen(Politik) $\rightarrow$ Es gibt zumindest ein x, sodass (Situation(x) $\wedge$ Wiederholt(x) $\wedge$ $\neg$Für alle y Wünscht(y, x))

Auss. Repr. $p \rightarrow q$

Präd. Repr. $G(p) \rightarrow \exists x\ (S(x) \wedge W(x) \wedge \neg\forall y\ H(y, x))$

Lösung zu Aktivierungselement 8.3. Im Folgenden bedeutet ‚$K(x)$', dass x eine Katze ist, ‚$J(x, y)$', dass x gerne y jagt, und ‚$T(x, y)$', dass x gerne y trinkt. ‚m' bezeichnet Mäuse oder Milch, entsprechend ‚f' bezeichnet Fips und ‚m' bezeichnet Milch.

1. Wenn Fips eine Katze ist, dann jagt Fips gerne Mause. Fips jagt aber nicht gerne Mause. Somit ist Fips keine Katze.

Bem.: Dies entspricht der Regel des Modus Tollens.

Antwort: $K(f) \to J(f, m), \neg J(f, m) \therefore \neg K(f)$

2. Wenn Fips eine Katze ist, dann trinkt Fips gerne Milch. Fips ist eine Katze. Folglich trinkt Fips gerne Milch.

Bem.: Dies entspricht der Regel des Modus Ponens.

Antwort: $K(f) \to T(f, m), K(f) \therefore T(f, m)$

3. Wenn Fips eine Katze ist, dann trinkt Fips gerne Milch. Fips trinkt gerne Milch. Folglich ist Fips eine Katze.

Bem.: Dies ist die (ungültige) Argumentform des Modus Morons.

Antwort: $K(f) \to T(f, m), T(f, m) \therefore K(f)$

4. Fips ist eine Katze. Denn: Wenn Fips eine Katze ist, dann trinkt Fips gerne Milch. Fips trinkt gerne Milch.

Bem.: Die Konklusion des Arguments wird gleich zu Beginn genannt.

Antwort: Wie im Satz 3.

5. Also ist Fips eine Katze oder er ist keine Katze.

Bem.: Dies ist ein Argument ohne Prämissen.

Antwort: $\therefore K(f) \lor \neg K(f)$

6. Sokrates ist Philosoph und Grieche. Platon ist Philosoph und Grieche. Aristoteles ist Philosoph und Grieche. Daher sind alle Philosophen Griechen.

Bem.: Dies könnte ein induktiv gültiges Argument sein, wenn es viel mehr Prämissen in der Form von ‚$P(x) \land G(x)$' hätte.

Antwort: $P(s) \land G(s), P(p) \land G(p), P(a) \land G(a)$
$\therefore \forall x\,(P(x) \to G(x))$

8.2 Übungen

Übung 8.1.1. Erklären Sie, was eine atomare Formel der prädikatenlogischen Sprache ist!

Übung 8.1.2. Repräsentieren Sie die folgenden natürsprachlichen Aussagesatze in der prädikatenlogischen Sprache:

1. Anatol ist Gerber.
2. Anatol liebt Barbara.
3. Anatol geht mit Barbara von Drösselkirchen nach Cronberg.
4. Anatol und Barbara gehen von Cronberg nach Drösselkirchen.
5. Anatol arbeitet mit Barbara in Cronberg.

Übung 8.2.1. Welche Quantoren gibt es in der prädikatenlogischen Sprache, und was bedeuten sie?

Übung 8.2.2. Wie werden im allgemeinen Existenzsatze, welche mehr als einen generellen Term enthalten, repräsentiert?

Übung 8.2.3. Wie werden im allgemeinen Allsätze, welche mehr als einen generellen Term enthalten, repräsentiert?

Übung 8.2.4. Repräsentieren Sie die folgenden natürsprachlichen Aussagesatze in der prädikatenlogischen Sprache:

1. Es gibt keinen Gerber in Cronberg.
2. Alle Bürger in Drösselkirchen sind unzufrieden.
3. Alle Bürger in Drösselkirchen jubeln, aber manche Bürger in Cronberg sind verärgert.
4. Alle Österreicher sind keine Philosophen.
5. Alle Österreicher sind nicht keine Philosophen.
6. Nicht alle Österreicher sind keine Philosophen.
7. Es gibt Österreicher, die Philosophen sind.
8. Es gibt Österreicher, die keine Philosophen sind.
9. Es ist nicht der Fall, da es Österreicher gibt, die Philosophen sind.
10. Es ist keineswegs so, da manche Österreicher keine Philosophen sind.

11. Alle Salzbürger sind Österreicher und Europäer.
12. So mancher Oberösterreicher lebt in Salzburg.
13. Jeder Mensch hat eine Mutter und einen Vater, aber nicht jeder Mensch hat Kinder.
14. Es gibt ein Wesen, welches alle Dinge erschaffen hat.
15. Manche Menschen besitzen ein Auto.
16. Alle Deutschen beneiden sämtliche Bundestagsabgeordnete.

8.2.1 Lösungen

Lösung zu Übung 8.1.1. Erklären Sie, was eine atomare Formel der prädikatenlogischen Sprache ist!

Antwort: Siehe S. 198.

Lösung zu Übung 8.1.2. Repräsentieren Sie die folgenden natürsprachlichen Aussagesatze in der prädikatenlogischen Sprache:

1. Anatol ist Gerber.

Antwort: $G^1(a)$

‚$G^1(x)$' bedeutet x ist Gerber.

2. Anatol liebt Barbara.

Antwort: $L^2(a, b)$

‚$L^2(x, y)$' bedeutet x liebt y.

3. Anatol geht mit Barbara von Drösselkirchen nach Cronberg.

Antwort: $G^4(a, b, d, c)$

‚$G^4(x_1, x_2, x_3, x_4)$' bedeutet x_1 geht mit x_2 von x_3 nach x_4.

4. Anatol und Barbara gehen von Cronberg nach Drösselkirchen.

Antwort 1

Falls ‚x und y gehen' als ‚x und y zusammengehen' verstanden wird: wie im 3. Falls nicht, siehe Antwort 2.

Antwort 2: $G^3(a, d, c) \wedge G^3(b, d, c)$

‚$G^3(x, y, z)$' bedeutet x geht von y nach z.

5. Anatol arbeitet mit Barbara in Cronberg.

Antwort: $A^3(a, b, c)$

‚$A^3(x, y, z)$' bedeutet x arbeitet mit y in z.

Bemerkung

Man kann die Superindizes auch weglassen.

Lösung zu Übung 8.2.1. Welche Quantoren gibt es in der prädikatenlogischen Sprache, und was bedeuten sie?

Antwort: Existenz- und Allquantoren, d.h., $\exists$ und $\forall$.

Lösung zu Übung 8.2.2. Wie werden im allgemeinen Existenzsatze, welche mehr als einen generellen Term enthalten, repräsentiert?

Antwort: Siehe SS. 201–2.

Lösung zu Übung 8.2.3. Wie werden im allgemeinen Allsätze, welche mehr als einen generellen Term enthalten, repräsentiert?

Antwort: Siehe SS. 204–6.

Lösung zu Übung 8.2.4. Repräsentieren Sie die folgenden natürsprachlichen Aussagesatze in der prädikatenlogischen Sprache:

1. Es gibt keinen Gerber in Cronberg.

Antwort: $\neg\exists x\,(G(x) \wedge C(x))$

Negierter I-Satz mit $S := G$ und $P := C$. Logisch äquivalent zu einem E-Satz – auch mit $S := G$ und $P := C$.

‚$B(x, y)$' bedeutet x ist Bürger in y.
‚$Z(x)$' bedeutet x ist zufrieden.

2. Alle Bürger in Drösselkirchen sind unzufrieden.

Antwort: $\forall x\,(B(x, d) \rightarrow \neg Z(x))$

E-Satz mit $S(x) := B(x, d)$ und $P := Z$.

3. Alle Bürger in Drösselkirchen jubeln, aber manche Bürger in Cronberg sind verärgert.

Antwort: $\forall x\,(B(x,d) \rightarrow J(x)) \land \exists x\,(B(x,c) \land V(x))$

Konjunktion eines A-Satz – mit $S(x) := B(x,d)$ und $P := J$ – und eines I-Satz – mit $S(x) := B(x,c)$ und $P := V$.

4. Alle Österreicher sind keine Philosophen.

Antwort: $\forall x\,(O(x) \rightarrow \neg P(x))$

E-Satz mit $S := O$ (und $P := P$).

5. Alle Österreicher sind nicht keine Philosophen.

Antwort: $\forall x\,(O(x) \rightarrow \neg\neg P(x))$

Wie ein E-Satz, aber mit $S := O$ und $P := \neg P$. Logisch äquivalent zu einem A-Satz mit $S := O$ und $P := P$.

6. Nicht alle Österreicher sind keine Philosophen.

Antwort: $\neg\forall x\,(O(x) \rightarrow \neg P(x))$

Negierter E-Satz mit $S := O$. Logisch äquivalent zu einem I-Satz.

7. Es gibt Österreicher, die Philosophen sind.

Antwort: $\exists x\,(O(x) \land P(x))$

I-Satz mit $S := O$.

8. Es gibt Österreicher, die keine Philosophen sind.

Antwort: $\exists x\,(O(x) \land \neg P(x))$

O-Satz mit $S := O$.

9. Es ist nicht der Fall, da es Österreicher gibt, die Philosophen sind.

Antwort: $\neg\exists x\,(O(x) \wedge P(x))$

Negierter I-Satz mit $S := O$. Logisch äquivalent zu einem E-Satz.

10. Es ist keineswegs so, da manche Österreicher keine Philosophen sind.

Antwort: $\neg\exists x\,(O(x) \wedge \neg P(x))$

Negierter O-Satz mit $S := O$. Logisch äquivalent zu einem A-Satz.

11. Alle Salzbürger sind Österreicher und Europäer.

Antwort: $\forall x\,(S(x) \rightarrow O(x) \wedge E(x))$

A-Satz mit $P(x) := O(x) \wedge E(x)$.

12. So mancher Oberösterreicher lebt in Salzburg.

Antwort: $\exists x\,(O(x) \wedge L(x,s))$

I-Satz mit $S := O$ und $P(x) := L(x,s)$

13. Jeder Mensch hat eine Mutter und einen Vater, aber nicht jeder Mensch hat Kinder.

,$S(x)$‘ bedeutet x ist ein Mensch.
,$M(x,y)$‘ bedeutet x ist Mutter von y.
,$V(x,y)$‘ bedeutet x ist Vater von y.
,$K(x,y)$‘ bedeutet x ist Kinder von y.

Antwort: $\forall x\,(S(x) \rightarrow \exists y\,\exists z\,(M(y,x) \wedge V(z,x))) \wedge \neg\forall x\,\exists y\,K(y,x)$

Konjunktion eines I-Satzes – mit $P(x) := \exists y\,\exists z\,(M(y,x) \wedge V(z,x))$ – und eines quantifizierten Satzes – der nicht als A-, E-, I- oder O-Satz klassifiziert werden kann.

14. Es gibt ein Wesen, welches alle Dinge erschaffen hat.

Antwort 1: $\exists x\,(W(x) \land \forall y\,(D(y) \rightarrow E(x,y)))$

I-Satz mit $S := W$ und $P := \forall y\,(D(y) \rightarrow E(x,y))$.

Beachten Sie, dass P hier die Form eines A-Satzes hat – mit $S := D$ und $P(y) := E(x,y)$. Dies ist folglich ein A-Satz innerhalb eines I-Satzes.

‚$W(x)$' bedeutet x ist ein Wessen.
‚$D(x)$' bedeutet x ist ein Ding.
‚$E(x,y)$' bedeutet x hat y erschaffen.

Antwort 2: $\exists x\,\forall y\,E(x,y)$

‚D' und ‚W' bezeichnen Eigenschaften, die vermutlich alle Gegenstände haben.

15. Manche Menschen besitzen ein Auto.

‚$M(x)$' bedeutet x ist ein Mensch.
‚$A(x)$' bedeutet x ist ein Auto.
‚$B(x,y)$' bedeutet x besitzt y.

Antwort: $\exists x\,(M(x) \land \exists y\,(A(y) \land B(x,y)))$

I-Satz mit $S := M$ und $P := \exists y\,(A(y) \land B(x,y))$.

Beachten Sie, dass P hier die Form eines I-Satzes hat – mit $S := A$ und $P(y) := B(x,y)$. Dies ist folglich ein I-Satz innerhalb eines I-Satzes.

16. Alle Deutschen beneiden sämtliche Bundestagsabgeordnete.

‚$D(x)$' bedeutet x ist Deutsch.
‚$B(x)$' bedeutet x ist ein Bundestags-abgeordnete.
‚$E(x,y)$' bedeutet x beneidet y.

Antwort: $\forall x\,(D(x) \rightarrow \forall y\,(B(y) \rightarrow E(x,y)))$

A-Satz mit $S := D$ und $P := \forall y\,(B(y) \rightarrow E(x,y))$.

Beachten Sie, dass P hier die Form eines A-Satzes hat – mit $S := B$ und $P(y) := E(x,y)$. Dies ist folglich ein A-Satz innerhalb eines A-Satzes.

Die prädikatenlogische Sprache 9

9.1 Übungen

Übung 9.1.1. Beschreiben Sie das Alphabet der prädikatenlogischen Sprache!

Übung 9.1.2. Was ist ein singulärer Term?

Übung 9.1.3. Was ist eine prädikatenlogische Formel?

Übung 9.1.4. Was heißt es, daß eine Individuenvariable in einer Formel frei vorkommt, und was heißt es, daß eine Individuenvariable in einer Formel gebunden vorkommt?

Übung 9.1.5. Was ist die Reichweite oder der Bereich eines Vorkommnisses eines Quantorausdrucks?

Übung 9.1.6. Welche Vorkommnisse von Individuenvariablen in den folgenden Formeln sind frei, welche Vorkommnisse sind gebunden?

Übung 9.2.1. Was heißt es, daß eine Formel offen ist, und was heißt es, daß eine Formel geschlossen ist?

Übung 9.2.2. Welche der folgenden Zeichenreihen sind prädikatenlogische Formeln, welche der Formeln sind offen und welche sind geschlossen?

Übung 9.3. Die folgenden Formeln sind etwas *ungeschickte* Formulierungen: ihre syntaktische Form suggeriert bestimmte inhaltliche Zusammenhänge, die, wenn man die Formeln genau unter die Lupe nimmt, gar nicht bestehen.

Z.B. sind $M(x)$ und $\exists x\, V(x,x)$ in der ersten Formel durch einen Implikationspfeil verbunden, obwohl sie gar nicht inhaltlich zusammenhängen (der Allquantor bindet zwar x in $M(x)$, aber nicht in $\exists x\, V(x,x)$).

Versuchen Sie den intuitiven Gehalt der folgenden Formeln syntaktisch besser, d.h. transparenter, auszudrücken, ohne dabei gleichzeitig den Inhalt der Formeln zu verändern!

1. $\forall x\, (M(x) \to \exists x\, V(x,x))$
2. $\forall x\, P(a)$
3. $\exists x\, (Q(x) \wedge \forall x\, R(x,a))$
4. $\forall y\, \forall x\, (\forall y\, P(x) \to \forall x\, P(y))$

Übung 9.4. (a) Führen Sie die folgenden Substitutionen durch und (b) stellen Sie fest, bei welchen dieser Substitutionen der singuläre Term t für eine nämliche Variable in einer Formel eingesetzt wird, sodass t frei für diese Variable in dieser Formel ist:

1. $A[x_1] : \exists x_1\, (R(x_1, a_3) \wedge P(x_1))$, $\quad t : x_2$
2. $A[x_1] : \exists x_1\, (R(x_1, a_3) \wedge P(x_1))$, $\quad t : a_1$
3. $A[x_1] : \exists x_1\, (R(x_1, a_3) \wedge P(x_1))$, $\quad t : x_1$
4. $A[x_1] : \exists x_1\, R(x_1, a_3) \wedge P(x_1)$, $\quad t : x_2$
5. $A[x_1] : \exists x_1\, R(x_1, a_3) \wedge P(x_1)$, $\quad t : a_1$
6. $A[x_1] : \exists x_1\, R(x_1, a_3) \wedge P(x_1)$, $\quad t : x_1$
7. $A[x_1] : \exists x_1\, \exists x_4\, (R(x_4, x_2) \vee P(x_1))$, $\quad t : x_2$
8. $A[x_2] : \exists x_1\, \exists x_4\, (R(x_4, x_2) \vee P(x_1))$, $\quad t : x_1$
9. $A[x_2] : \exists x_1\, \exists x_4\, (R(x_4, x_2) \vee P(x_1))$, $\quad t : x_4$
10. $A[x_2] : \exists x_1\, \exists x_4\, (R(x_4, x_2) \vee P(x_1))$, $\quad t : x_3$

9.1.1 Lösungen

Lösung zu Übung 9.1.1. Beschreiben Sie das Alphabet der prädikatenlogischen Sprache!

Hinweis: Siehe Anfang von Abschnitt 9.1.

Lösung zu Übung 9.1.2. Was ist ein singulärer Term?

Hinweis: Siehe S. 224 und Übung 9.1.6.

Lösung zu Übung 9.1.3. Was ist eine prädikatenlogische Formel?

Hinweis: Siehe Def. 16.

Lösung zu Übung 9.1.4. Was heißt es, daß eine Individuenvariable in einer Formel frei vorkommt, und was heißt es, daß eine Individuenvariable in einer Formel gebunden vorkommt?

Hinweis: Siehe S. 231.

Lösung zu Übung 9.1.5. Was ist die Reichweite oder der Bereich eines Vorkommnisses eines Quantorausdrucks?

Antwort: Die Definition im Skript lautet:

Die Reichweite (bzw. der Bereich oder Skopus) eines Vorkommnisses eines Quantorausdrucks $\exists v$ oder $\forall v$ in einer prädikatenlogischen Formel A ist dasjenige Vorkommnis einer Teilformel von A, das auf das Quantorausdruckvorkommnis folgt. (S. 232.)

$$\forall x\, \overbrace{(P(x) \wedge Q(y))}^{\text{Reichweite}} \wedge \underbrace{S(x,b)}_{\text{keine Reichweite}} \tag{9.1}$$

$$\forall x\, \exists y\, \overbrace{\underbrace{(P(x,y) \rightarrow Q(y))}}\tag{9.2}$$

Lösung zu Übung 9.1.6. Welche Vorkommnisse von Individuenvariablen in den folgenden Formeln sind frei, welche Vorkommnisse sind gebunden?

Antwort: Wir färben die freien Vorkommnisse einer Variablen rot ein. Wir färben die gebundenen Vorkommnisse einer Variablen zusammen mit ihrem verbindenden Quantor in anderen Farben ein.

1. $P(a_2)$

   Erklärung: Keine Individuenvariablen in dieser Formel.

2. $\forall x_1 \, (R(x_1, a_1) \rightarrow P(x_1))$

   Erklärung: Beide Vorkommnisse von ‚x_1' sind gebunden.

3. $\forall x_1 \, (R(x_1, x_3) \rightarrow P(x_1))$
4. $\exists x_3 \, (P(x_1) \land \forall x_2 \, R(x_3, x_2))$
5. $\forall x_5 \, (P(x_5) \rightarrow \exists x_2 \, (R(x_2, x_5) \land \forall x_1 \, S(x_2, x_1)))$
6. $\exists x_1 \, (P(x_1) \land R(a_7, x_1)) \land S(a_8, x_1)$

   Erklärung: Die erste und zweite Vorkommnisse von ‚x_1' sind durch das einzige Vorkommnis von ‚$\exists x_1$' gebunden. Das dritte Vorkommnis hingegen ist frei – es liegt nicht in der Reichweite des einzigen Vorkommnisses von ‚$\exists x_1$'.

Lösung zu Übung 9.2.1. Was heißt es, daß eine Formel offen ist, und was heißt es, daß eine Formel geschlossen ist?

Hinweis: Siehe S. 232.

Lösung zu Übung 9.2.2. Welche der folgenden Zeichenreihen sind prädikatenlogische Formeln, welche der Formeln sind offen und welche sind geschlossen?

1. $(R(a_1, a_3) \land \exists x_1\, P(x_1))$

   Antwort: geschlossene prädikatenlogische Formel

2. $\exists x_1\, (R(x_1, a_3) \land P(x_1))$

   Antwort: geschlossene präd. Formel

3. $\exists x_1\, (R(x_1, a_3) \land P(x_2))$

   Antwort: offene präd. Formel

4. $\exists x_1\, (R(x_1, a_3) \land \forall x_2\, P(x_2))$

   Antwort: geschlossene präd. Formel

5. $\exists x_1\, \forall x_2\, \exists x_4\, (R(x_4, x_2) \lor P(x_1))$

   Antwort: geschlossene präd. Formel

6. $\forall x_5\, R(a_1, a_5)$

   Antwort: geschlossene präd. Formel

   Bem.: Keine Individuenvariablen in dieser Formel.

7. $\forall x_5\, R(a_1, x_5)$

   Antwort: geschlossene präd. Formel

8. $\forall x_5\, (R(a_1, x_5) \to \exists x_3\, P(x_3))$

   Antwort: geschlossene präd. Formel

9. $P(x_1) \land p$

   Antwort: keine präd. Formel

   Bem.: Da ‚p' eine aussagenlogische Variable ist, handelt es sich bei dieser Formel weder um eine prädikatenlogische noch um eine aussagenlogische Formel.

10. $P(x_1) \land \forall x_1\, P(x_1)$

Antwort: offene präd. Formel

Bem.: Ein Quantor muss von einer Variablen gefolgt werden.

11. $\exists\, \forall x_2\, R(x_2, a_{47355})$

Antwort: keine präd. Formel

12. $\forall x_{18}\, P^7(x_{18}, x_{18}, x_{18}, x_{18}, x_{18}, x_{18}, x_{18})$

Antwort: geschlossene präd. Formel

Bem.: ‚P^9' ist ein 9-stelliger Prädikat, aber die Formel hat nur 8 Terme.

13. $\forall x_{24}\, P^9(x_{24}, x_{24}, x_{24}, x_{24}, x_{24}, x_{24}, x_{24}, x_{24})$

Antwort: keine präd. Formel

14. $\exists x_1 \neg\forall x_2\, (P(x_1) \to Q(x_2))$

Antwort: geschlossene präd. Formel

15. $\exists x_1 \neg\neg(\forall x_2\, (P(x_1) \to Q(x_2)))$

Antwort: keine präd. Formel

16. $\forall x_3\, \exists x_3\, R(x_3, x_4)$

Antwort: offene präd. Formel

17. $\neg\forall x_1\, (P(x_1))$

Antwort: arg2

Antwort: keine präd. Formel

Bem.: Es gibt keine Regeln für die Klammerung von atomaren Formeln.

18. $\exists x_5\, (P(x_5) \land \forall x_2\, (Q(x_2 \to P(a_8)))$

Antwort: keine präd. Formel

Bem.: Man braucht eine schließende Klammer zwischen dem zweiten Vorkommnis von ‚x_2‘ und dem einzigen Vorkommnis von ‚$\rightarrow$‘.

Lösung zu Übung 9.3. Versuchen Sie den intuitiven Gehalt der folgenden Formeln syntaktisch besser, d.h. transparenter, auszudrücken, ohne dabei gleichzeitig den Inhalt der Formeln zu verändern!

1. $\forall x\,(M(x) \rightarrow \exists x\, V(x, x))$

   Antwort: $\exists x\, M(x) \rightarrow \exists x\, V(x, x)$

   Bem.: Man kann die logische Äquivalenz der beiden Sätze beweisen.

2. $\forall x\, P(a)$

   Antwort: $P(a)$

3. $\exists x\,(Q(x) \wedge \forall x\, R(x, a))$

   Antwort: $\exists x\, Q(x) \wedge \forall x\, R(x, a)$

4. $\forall y \, \forall x \, (\forall y \, P(x) \rightarrow \forall x \, P(y))$

Antwort: Es gibt einige interessante Optionen.

- $\forall y \, \forall x \, (P(x) \rightarrow P(y))$
- $\exists x \, P(x) \rightarrow \forall y \, P(y)$
- $\neg\exists x \, P(x) \vee \forall y \, P(y)$
- $\forall x \, \neg P(x) \vee \forall y \, P(y)$
- $\forall x \, \neg P(x) \vee \forall x \, P(x)$

Erklärung

Bezüglich der Formeln 1 und 4: Um die Äquivalenzen zwischen den ursprünglichen Formeln und den entsprechenden Lösungsformeln zu beweisen, benötigen wir die Äquivalenz zwischen $A \rightarrow B$ und $\neg A \vee B$ sowie die Äquivalenz zwischen $\forall x \, \neg A$ und $\neg\exists x \, A$, die wir später noch lernen werden.

Lösung zu Übung 9.4. (a) Führen Sie die folgenden Substitutionen durch und (b) stellen Sie fest, bei welchen dieser Substitutionen der singuläre Term t für eine nämliche Variable in einer Formel eingesetzt wird, sodass t frei für diese Variable in dieser Formel ist:

1. $A[x_1] : \exists x_1 \, (R(x_1, a_3) \wedge P(x_1))$, $\quad t : x_2$

Antwort

a) $A[x_2/x_1] : A[x_1]$

Erkl. Es ist keine Substitution möglich, da alle Vorkommnisse von ‚x_1' gebunden sind.

b) x_2 ist frei für x_1 in $A[x_1]$

Erkl. Wenn ein Term t nicht in der Formel A vorkommt, dann ist t für alle v in A frei.

2. $A[x_1] : \exists x_1 \, (R(x_1, a_3) \wedge P(x_1))$, $\quad t : a_1$

Antwort

a) $A[a_1/x_1] : A[x_1]$

Erkl. Wie in 1a.

b) a_2 ist frei für x_1 in $A[x_1]$ – da a_2 eine Individuenkonstante ist.

3. $A[x_1] : \exists x_1 \, (R(x_1, a_3) \land P(x_1))$, $\quad t : x_1$

Antwort

a) $A[x_1/x_1] : A[x_1]$

Erkl. Wie in 1a, aber auch, weil $A[x/x] = A[x]$ für alle x gilt.

b) x_1 ist frei für x_1 in $A[x_1]$.

4. $A[x_1] : \exists x_1 \, R(x_1, a_3) \land P(x_1)$, $\quad t : x_2$

Antwort

a) $A[x_2/x_1] : \exists x_1 \, R(x_1, a_3) \land P(x_2)$

Erkl. Nur das zweite Vorkommnis von ‚x_1' kann substituiert werden, da das erste gebunden ist.

b) x_2 ist frei für x_1 in $A[x_1]$.

5. $A[x_1] : \exists x_1 \, R(x_1, a_3) \land P(x_1)$, $\quad t : a_1$

Antwort

a) $A[a_1/x_1] : \exists x_1 \, R(x_1, a_3) \land P(a_1)$

b) a_1 ist frei für x_1 in $A[x_1]$.

6. $A[x_1] : \exists x_1 \, R(x_1, a_3) \land P(x_1)$, $\quad t : x_1$

Antwort

a) $A[x_1/x_1] : A[x_1]$

b) x_1 ist frei für x_1 in $A[x_1]$.

7. $A[x_1] : \exists x_1 \, \exists x_4 \, (R(x_4, x_2) \lor P(x_1))$, $\quad t : x_2$

Antwort

a) $A[x_2/x_1] : A[x_1]$

Erkl. Wie in 1a.

b) x_2 ist frei für x_1 in $A[x_1]$.

8. $A[x_2] : \exists x_1\, \exists x_4\, (R(x_4, x_2) \vee P(x_1))$, $t : x_1$

Antwort

a) $A[x_1/x_2] : \exists x_1\, \exists x_4\, (R(x_4, x_1) \vee P(x_1))$

Bem.: Durch die Substitution wurde x_2 zu x_1 und ist daher gebunden.

b) x_1 ist <u>nicht</u> frei für x_2 in $A[x_2]$.

Bem.: Daher ist diese Substitution keine *gute Substitution* (siehe S. 237).

9. $A[x_2] : \exists x_1\, \exists x_4\, (R(x_4, x_2) \vee P(x_1))$, $t : x_4$

Antwort

a) $A[x_4/x_2] : \exists x_1\, \exists x_4\, (R(x_4, x_4) \vee P(x_1))$

Bem.: Durch die Substitution wurde x_2 zu x_4 und ist daher gebunden.

b) x_4 ist <u>nicht</u> frei für x_2 in $A[x_2]$.

Bem.: Daher ist diese Substitution keine *gute Substitution* (siehe S. 237).

10. $A[x_2] : \exists x_1\, \exists x_4\, (R(x_4, x_2) \vee P(x_1))$, $t : x_3$

Antwort

a) $A[x_3/x_2] : \exists x_1\, \exists x_4\, (R(x_4, x_3) \vee P(x_1))$

b) x_3 ist frei für x_2 in $A[x_2]$.