Klausurvorbereitung 14

14.1 Hinweise für eine 90-minütige Klausur

14.1.1 Effektiver Start

Nutzen Sie die ersten **5 Minuten**, um alle Fragen kurz durchzulesen und einzuschätzen:

1. Welche Fragen können Sie sicher beantworten?
2. Welche Fragen sind schwieriger oder unklar?
3. Wie viel Zeit könnte jede Frage in Anspruch nehmen?

14.1.2 Zeiteinteilung

Um 3 einzuschätzen, gehen Sie wie folgt vor:

- Ziehen Sie von den 90 Minuten 5 Minuten für die Planung und zusätzlich 10–15 Minuten am Ende ein, um Ihre Antworten zu überprüfen.
- Teilen Sie die verbleibende Zeit auf die Fragen auf, die Sie beantworten könnten. Zum Beispiel: Teilen Sie dafür die verbleibenden 70–75 Minuten durch die Anzahl der Fragen, die Sie bearbeiten könnten.
- Schreiben Sie neben jede Frage die Uhrzeit, zu der Sie mit dieser Frage beginnen möchten. Sie können die Fragen in einer beliebigen Reihenfolge beantworten, je nachdem, welche Ihnen am sinnvollsten erscheint – nicht zwingend in der Reihenfolge, in der sie in der Klausur erscheinen.
- Bleiben Sie flexibel: Falls eine Frage mehr Zeit in Anspruch nimmt als geplant, passen Sie Ihren Zeitplan entsprechend an.

Viel Erfolg bei der Klausur!

14.2 Die Probeklausur

Klausurfrage 1. Definieren Sie, was ein *Aussagesatz* ist, wie auch was ein *Argument* ist. (5 Pkt.)

Klausurfrage 2. Welche der folgenden Zeichenreihen sind Aussagesätze? Welche der Aussagesätze sind einfach? Welche der Aussagesätze sind aussagenlogisch unzerlegbar? (10 Pkt.)

1. Es ist nicht möglich, dass 2 + 2 gleich 5 ist.
2. Der Eiffelturm ist höher als die Frauenkirche.
3. Logik macht Spaß, aber Logik ist auch anstrengend.
4. Wieso muss ich das beantworten?
5. Wenn alles raumzeitlich ist, dann bin auch ich raumzeitlich.
6. Es gibt Philosophen, die die Ideenlehre ablehnen.
7. Sonja ist im Wohnzimmer, oder Sonja ist in der Küche.
8. Das Fenster ist kaputt, weil er den Stein geworfen hat.
9. Es ist notwendig, dass 2 + 2 = 4 ist.
10. Da Da Da.

Klausurfrage 3. (3.1) Geben Sie die Wahrheitstafel für das einschließende und für das ausschließende 'oder' an! (3.2) Wie lässt sich das ausschließende 'oder' mittels des einschließenden 'oder' und der Negation definieren? (10 Pkt.)

Klausurfrage 4. Definieren Sie für aussagenlogische Formeln den Begriff der *logischen Folge*. (5 Pkt.)

Klausurfrage 5. Erstellen Sie die Wahrheitstafel für die folgenden beiden Formeln. Um welche Art von Formel handelt es sich jeweils (Tautologie, Kontradiktion, kontingente Formel)? (10 Pkt.)

1. $p \wedge (q \vee \neg r)$
2. $(p \wedge \neg q) \rightarrow (p \vee q)$

Klausurfrage 6. Führen Sie die Herleitungen zu folgenden deduktiv gültigen Schlüssen durch (im aussagenlogischen System des natürlichen Schließens): (10 Pkt.)

1. $s \rightarrow p, \neg s \rightarrow \neg r \vdash \neg p \rightarrow \neg r$
2. $p \vee (q \wedge r), r \rightarrow p \vdash p$

Klausurfrage 7. Repräsentieren Sie die folgenden Aussagesätze in der prädikatenlogischen Sprache: (10 Pkt.)

1. Alle Zahlen sind abstrakt, und es gibt Zahlen.
2. Zu allem gibt es etwas, das größer ist, aber nichts ist größer als alles.
3. Paul ist verheiratet mit Susanne.
4. Kein Planet ist kleiner als der Mond.
5. Wenn Pflanzen Lebewesen sind, dann sind Blumen Lebewesen.

Klausurfrage 8. Definieren Sie, worum es sich bei einer prädikatenlogischen Bewertung φ_σ handelt (relativ zu einer prädikatenlogischen Interpretation $\mathfrak{I} = \langle \mathbf{D}, \varphi \rangle$ und einer Variablenbelegung σ)! (10 Pkt.)

Hinweis: Überprüfen Sie SS 248–255, insbesondere die Definitionen 17–19.

Klausurfrage 9. Es sei folgende Interpretation $\mathfrak{I} = \langle \mathbf{D}, \varphi \rangle$ gegeben:

$$\begin{aligned}
\mathbf{D} &= \{1, 2, 3, 4\}. \\
\varphi(a) &= 1, \quad \varphi(b) = 2, \quad \varphi(c) = 3, \quad \varphi(d) = 4. \\
\varphi(G) &= \{2, 4\} = \{d \mid d \text{ ist eine gerade Zahl}\} \\
\varphi(K) &= \{\langle 1,2\rangle, \langle 1,3\rangle, \langle 1,4\rangle, \langle 2,3\rangle, \langle 2,4\rangle, \langle 3,4\rangle\} \\
&= \{\langle d_1, d_2\rangle \in \mathbf{D}^2 \mid d_1 < d_2\}.
\end{aligned}$$

Weiter seien die folgenden zwei Variablenbelegungen σ_1 und σ_2 unter $\mathfrak{I}$ gegeben:

$$\sigma_1 = 1, 2, \ldots \qquad \sigma_2 = 2, 1, \ldots$$

Geben Sie an, welche der folgenden Formeln wahr bzw. falsch sind (i) gemäß φ_{σ_1}, (ii) gemäß φ_{σ_2}! (Es ist keine weitere Begründung nötig.) (10 Pkt.)

1. $K(a, b)$
2. $\neg(K(b, c) \vee G(c))$
3. $K(x, y)$
4. $\exists x\, (K(x, d) \wedge G(x))$
5. $\forall x\, \exists y\, K(x, y)$

Klausurfrage 10. Führen Sie die Herleitungen zu folgenden deduktiv gültigen Schlüssen durch (im prädikatenlogischen System des natürlichen Schließens): (10 Pkt.)

1. $\forall x \, \neg P(x) \vdash \neg \exists x \, P(x)$
2. $\neg\neg\forall x \, (P(x) \rightarrow Q(x)), \neg \exists x \, Q(x) \vdash \neg P(a)$

Klausurbonusfrage. Wie lässt sich das Identitätsprädikat als logisches Zeichen in die Prädikatenlogik einführen (Formationsregel, semantische Regel, Herleitungsregeln)? (10 Pkt.)

Max. Punktezahl (exklusive Bonusfrage): 90 Pkt. Viel Glück!!

14.2.1 Lösungen

Klausurfrage 1. Definieren Sie, was ein *Aussagesatz* ist, wie auch was ein *Argument* ist. (5 Pkt.)

Definition 1: Aussagesatz

Ein Aussagesatz ist ein sprachlicher Ausdruck, der wahr oder falsch ist.

Definition 3: Argument

Ein Argument ist eine Folge von n (wobei $n > 0$) Aussagesätzen,

1. deren erster bis $n-1$-ter Aussagesatz Prämisse genannt werden, und
2. deren n-ter Satz durch einen Konklusionsindikator eingeleitet wird, welchem ein Aussagesatz folgt, der Konklusion genannt wird.

Alternative Definition 3a: Argument

Ein Argument ist eine Folge von Aussagesätzen $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}, A_n$ (mit $n > 0$), wobei $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$ als Prämissen bezeichnet werden und A_n durch einen Konklusionsindikator als Konklusion bezeichnet wird.

Alternative Definition 3b: Argument

Ein Argument ist eine *Folge von Aussagesätzen* (*mindestens einem*), wobei die letzte Aussage *durch einen Konklusionsindikator als Konklusion* bezeichnet wird und die vorherigen Aussagen als *Prämissen* bezeichnet werden.

Klausurfrage 2. Welche der folgenden Zeichenreihen sind Aussagesätze? Welche der Aussagesätze sind einfach? Welche der Aussagesätze sind aussagenlogisch unzerlegbar? (10 Pkt.)

1. Es ist nicht möglich, dass 2 + 2 gleich 5 ist.

Antwort: Aussagesatz, komplex, aus. zerlegbar.

Bemerkung: Die Details in den Erklärungskästen sind für die Beantwortung der Frage nicht notwendig, helfen jedoch, die vorgeschlagene Antwort zu verstehen.

Erklärung

Aus. Repräsentation: $\neg p$

Repr. in Modallogik und Arithmetik: $\neg\Diamond(2+2=5)$

2. Der Eiffelturm ist höher als die Frauenkirche.

Antwort: Aussagesatz, einfach, aus. unzerlegbar.

Erklärung

Aus. Repräsentation: p

3. Logik macht Spaß, aber Logik ist auch anstrengend.

Antwort: Aussagesatz, komplex, aus. zerlegbar.

$p :=$ Logik macht Spaß,
$q :=$ Logik ist anstrengend.

Erklärung

Aus. Repräsentation: $p \wedge q$

4. Wieso muss ich das beantworten?

Antwort: Kein Aussagesatz. (Es ist ein Fragesatz.)

5. Wenn alles raumzeitlich ist, dann bin auch ich raumzeitlich.

Antwort: Aussagesatz, komplex, aus. zerlegbar.

p := Alles ist raumzeitlich,
q := ich bin raumzeitlich,
a := ich,
$Z(x)$:= x ist zerlegbar.

Erklärung

Aus. Repräsentation: $p \rightarrow q$

Präd. Repräsentation: $\forall x\, Z(x) \rightarrow Z(a)$

6. Es gibt Philosophen, die die Ideenlehre ablehnen.

Antwort: Aussagesatz, komplex, aus. unzerlegbar.

i := die Ideenlehre
$P(x)$:= x ist Philosoph,
$A(x, y)$:= x lehnt y ab.

Erklärung

Aus. Repräsentation: p

Präd. Repräsentation: $\exists x\, (P(x) \wedge A(x, i))$

7. Sonja ist im Wohnzimmer, oder Sonja ist in der Küche.

Antwort: Aussagesatz, komplex, aus. zerlegbar.

p := Sonja ist im Wohnzimmer,
q := Sonja ist in der Küche.

Erklärung

Aus. Repräsentation: $p \vee q$

8. Das Fenster ist kaputt, weil er den Stein geworfen hat.

Antwort: Aussagesatz, komplex, aus. unzerlegbar.

q := Das Fenster ist kaputt,
r := Er hat den Stein geworfen.

Erklärung

Aus. Repräsentation: p

Repr. als Kausalsatz: q, weil r

9. Es ist notwendig, dass 2 + 2 = 4 ist.

Antwort: Aussagesatz, komplex, aus. unzerlegbar.

Erklärung

Aus. Repräsentation: p

Repr. in Modallogik und Arithmetik: $\Box(2 + 2 = 4)$

10. Da Da Da.

Antwort: Überhaupt kein Aussagesatz.

Erklärung

Dieser Ausdruck erscheint in dem Lied *De Do Do Do, De Da Da Da* von The Police, jedoch wird er auch dort nicht als Aussagesatz verwendet

Klausurfrage 3. (3.1) Geben Sie die Wahrheitstafel für das einschließende und für das ausschließende 'oder' an! (3.2) Wie lässt sich das ausschließende 'oder' mittels des einschließenden 'oder' und der Negation definieren? (10 Pkt.)

Antwort auf 3a

Nachfolgend sind die Wahrheitstabellen des einschließenden ‚or' ($\vee$) und des ausschließenden ‚or' ($\oplus$) aufgeführt:

p	q	$p \vee q$	$p \oplus q$
w	w	w	f
w	f	w	w
f	w	w	w
f	f	f	f

Antwort auf 3b

‚$p \oplus q$‘ lässt sich mithilfe von ‚$\vee$‘ und ‚$\neg$‘ durch die Formel ‚$\neg(\neg p \vee q) \vee \neg(\neg q \vee p)$‘ definiert werden.

Erklärung

Beachten Sie, dass die Wahrheitstabelle von ‚$p \oplus q$‘ dieselbe ist wie die Wahrheitstabelle ‚$\neg(p \leftrightarrow q)$‘:

p	q	$p \oplus q$	$\neg$	$(p \leftrightarrow q)$
w	w	f	f	w
w	f	w	w	f
f	w	w	w	f
f	f	f	f	w

Erinnern Sie sich nun an die folgenden Tautologien (siehe SS. 135–6):

(T29) $\neg(A \wedge B) \leftrightarrow \neg A \vee \neg B$ (De Morgansches Gesetz 1)

(T31) $(A \rightarrow B) \leftrightarrow \neg A \vee B$ (Definition von ‚$\rightarrow$‘)

(T33) $(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$ (Definition von ‚$\leftrightarrow$‘)

Dann ergibt sich die folgende Äquivalenzkette:

$$
\begin{aligned}
p \oplus q &\leftrightarrow \neg(p \leftrightarrow q) && \text{(Wahrheitstabelle oben)}\\
&\leftrightarrow \neg((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)) && \text{(T33)}\\
&\leftrightarrow \neg((\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p)) && \text{(T31)}\\
&\leftrightarrow \neg(\neg p \vee q) \vee \neg(\neg q \vee p) && \text{(T29)}
\end{aligned}
$$

Wir können diese Äquivalenzen mit der folgenden Wahrheitstabelle bestätigen:

p	q	$p \oplus q$	$\neg($	$\neg\, p$	$\vee\, q)$	$\vee$	$\neg\,($	$\neg\, q$	$\vee\, p)$
w	w	f	f	f	w	f	f	f	w
w	f	w	w	f	f	w	f	w	w
f	w	w	f	w	w	w	w	f	f
f	f	f	f	w	w	f	f	w	w
			③	①	②	❹	③	①	②

Bemerkung

Obwohl die Formel ‚$(p \vee q) \wedge \neg(p \wedge q)$‘ logisch äquivalent zu ‚$p \oplus q$‘ ist, ist sie keine passende Antwort auf Aufgabe 3b. Der Grund dafür ist, dass die Formel zwei Vorkommen von ‚$\wedge$‘ enthält, während in der Aufgabe gefordert wurde, ‚$p \oplus q$‘ ausschließlich mithilfe von ‚$\neg$‘ und ‚$\vee$‘ zu definieren.

Klausurfrage 4. Definieren Sie für aussagenlogische Formeln den Begriff der *logischen Folge*. (5 Pkt.)

Definition 12: aussagenlogische Folge

Für alle Formeln $A_1, \ldots, A_n, B \in \mathscr{F}$, B folgt aussagenlogisch aus $A_1, \ldots, A_n$ gdw für alle Interpretationen $\mathfrak{I}$:

$$\text{Wenn } \mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(A_1) = \mathtt{w}, \ldots, \mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(A_n) = \mathtt{w}, \text{ dann } \mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(B) = \mathtt{w}.$$

(Mit anderem Worten: Wenn die Bewertungen der Formeln $A_1, \ldots, A_n$ in $\mathfrak{I}$ wahr sind, dann muss auch die Bewertung von B in $\mathfrak{I}$ wahr sein.)

Alternative Definition im Skript: aussagenlogische Folge

Für alle Formeln $A_1, \ldots, A_n, B \in \mathscr{F}$, B folgt aussagenlogisch aus $A_1, \ldots, A_n$ gdw es keine Interpretation $\mathfrak{I}$ gibt, sodass:

$$\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(A_1) = \mathtt{w}, \ldots, \mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(A_n) = \mathtt{w} \text{ und } \mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(B) = \mathtt{f}.$$

(Mit anderem Worten: Es gibt keine Interpretation, bei der die Bewertungen der Formeln $A_1, \ldots, A_n$ in $\mathfrak{I}$ wahr sind, die Bewertung von B in $\mathfrak{I}$ jedoch falsch ist.)

Klausurfrage 5. Erstellen Sie die Wahrheitstafel für die folgenden beiden Formeln. Um welche Art von Formel handelt es sich jeweils (Tautologie, Kontradiktion, kontingente Formel)? (10 Pkt.)

1. $p \wedge (q \vee \neg r)$

Antwort

p	q	r	p	$\wedge$	$(q$	$\vee$	$\neg$	$r)$
w	w	w		w		w	f	
w	w	f		w		w	w	
w	f	w		f		f	f	
w	f	f		w		w	w	
f	w	w		f		w	f	
f	w	f		f		w	w	
f	f	w		f		f	f	
f	f	f		f		w	w	
				❸		②	①	

Diese Wahrheitstabelle zeigt, dass die Formel 1 kontingent ist.

2. $(p \wedge \neg q) \rightarrow (p \vee q)$

Antwort

p	q	$(p \wedge$	$\neg q)$	$\rightarrow$	$(p \vee q)$
w	w	f	f	w	w
w	f	w	w	w	w
f	w	f	f	w	w
f	f	f	w	w	f
		②	①	❸	②

Diese Wahrheitstabelle zeigt, dass die Formel 2 tautologisch ist.

Bemerkung

Die Wahrheitstabelle allein ist keine hinreichende Antwort, da explizit gefragt wird, ob die Formel tautologisch, kontingent oder kontradiktorisch ist.

Eine richtige Antwort auf diese Frage enthält eine der folgenden Behauptungen vor oder nach der Wahrheitstabelle:

- Diese Formel ist tautologisch (bzw. kontingent bzw. kontradiktorisch).
- Diese Formel ist eine Tautologie (bzw. Kontingenz bzw. Kontradiktion).
- Diese Wahrheitstabelle zeigt, dass diese Formel tautologisch (bzw. kontingent bzw. kontradiktorisch) ist. (bevorzugte Formulierung)

Eine Antwort, die lediglich ‚tautologisch' (bzw. ‚kontingent' bzw. ‚kontradiktorisch') erwähnt, könnte mit weniger Punkten bewertet werden, da sie nicht präzisiert, welche Formel diese Eigenschaft besitzt.

Klausurfrage 6. Führen Sie die Herleitungen zu folgenden deduktiv gültigen Schlüssen durch (im aussagenlogischen System des natürlichen Schließens): (10 Pkt.)

1. $s \to p, \neg s \to \neg r \vdash \neg p \to \neg r$

Antwort

1.	$s \to p$	(P1)
2.	$\neg s \to \neg r$	(P2)
3.	$\|\| \quad \neg p$	(KB-Annahme)
4.	$\|\| \quad \neg s$	1., 3. (MT)
5.	$\|\| \quad \neg r$	2., 4. (MP)
6.	$\neg p \to \neg r$	3.–5. (KB)

Hinweis

Falls die Konklusion ein Implikationssatz ist, versuchen Sie einen konditionalen Beweis.

2. $p \vee (q \wedge r), r \to p \vdash p$

Antwort

1.	$p \vee (q \wedge r)$	(P1)
2.	$r \to p$	(P2)
3.	$\|\| \quad \neg p$	(IB-Annahme)
4.	$\|\| \quad q \wedge r$	1., 3. (DS1)
5.	$\|\| \quad r$	4. (SIMP2)
6.	$\|\| \quad p$	5., 2. (MP)
7.	$\|\| \quad p \wedge \neg p$	3., 6. (KON)
8.	p	3.–7. (IB)

Hinweis

In dieser Fall ist vielleicht offensichtlich, dass eine indirekte Beweise zu tun ist. Aber wenn Sie nicht sicher sind, welche Typ von Beweise zu führen, versuchen Sie eine Indirekte Beweis.[1]

1: Nach den Intuitionisten sind indirekte Beweise nicht besonders elegant. Vielleicht, aber in der Klausur vergessen Sie die Intuitionisten und ihre Spitzfindigkeiten über indirekte Beweise und doppelte Negation!

Klausurfrage 7. Repräsentieren Sie die folgenden Aussagesätze in der prädikatenlogischen Sprache: (10 Pkt.)

Bemerkung: Die durch ‚wobei' eingeführten Angaben zur Bedeutung der Individuenkonstanten und der Prädikate müssen (im Prinzip) Teil der Antwort sein. Ansonsten ist nicht klar, wie die Repräsentationen zu verstehen sind.

1. Alle Zahlen sind abstrakt, und es gibt Zahlen.

Antwort: $\forall x\,(Z(x) \rightarrow A(x)) \wedge \exists x\, Z(x)$, wobei:

$$A(x) := x \text{ ist abstrakt,}$$
$$Z(x) := x \text{ ist eine Zahl.}$$

2. Zu allem gibt es etwas, das größer ist, aber nichts ist größer als alles.

Antwort: $\forall x\, \exists y\, G(y, x) \wedge \neg\exists x\, \forall y\, G(x, y)$, wobei:

$$G(x, y) := x \text{ ist größer als } y.$$

3. Paul ist verheiratet mit Susanne.

Antwort: $V(p, s)$, wobei:

$$p := \text{Paul,}$$
$$s := \text{Susanne,}$$
$$V(x, y) := x \text{ ist verheiratet mit } y.$$

4. Kein Planet ist kleiner als der Mond.

Antwort: $\neg\exists x\,(P(x) \wedge K(x, m))$, wobei:

$$m := \text{Der Mond,}$$
$$P(x) := x \text{ ist ein Planet,}$$
$$K(x, y) := x \text{ ist kleiner als } y.$$

5. Wenn Pflanzen Lebewesen sind, dann sind Blumen Lebewesen.

Antwort: $\forall x\,(P(x) \rightarrow L(x)) \rightarrow \forall x\,(B(x) \rightarrow L(x))$, wobei:

$$B(x) := x \text{ ist eine Blume,}$$
$$L(x) := x \text{ ist ein Lebewesen,}$$
$$P(x) := x \text{ ist eine Pflanze.}$$

Klausurfrage 8. Definieren Sie, worum es sich bei einer prädikatenlogischen Bewertung φ_σ handelt (relativ zu einer prädikatenlogischen Interpretation $\mathfrak{I} = \langle \mathbf{D}, \varphi \rangle$ und einer Variablenbelegung σ)! (10 Pkt.)

Definition: Prädikatenlogische Bewertung

Eine prädikatenlogische Bewertung φ_σ relativ zu einer Interpretation $\mathfrak{I} = \langle \mathbf{D}, \varphi \rangle$ und einer Variablenbelegung σ ist eine Funktion, die:

1. Terme auswertet: Sie ordnet jedem singulären Term t ein Element $d \in \mathbf{D}$ zu, basierend auf σ und der Interpretationsfunktion φ.

2. Formeln Wahrheitswerte zuweist: Sie weist jeder Formel A einen Wahrheitswert $\mathtt{w}$ (wahr) oder $\mathtt{f}$ (falsch) zu, gemäß den Regeln:

1. Atomare Formeln:

   $\varphi_\sigma(P^n(t_1, \dots, t_n)) = \mathtt{w}$ gdw $\langle \varphi_\sigma(t_1), \dots, \varphi_\sigma(t_n) \rangle \in \varphi(P^n)$.

2. Negation:

   $\varphi_\sigma(\neg A) = \mathtt{w}$ gdw $\varphi_\sigma(A) = \mathtt{f}$.

3. Konjunktion:

   $\varphi_\sigma(A \land B) = \mathtt{w}$ gdw $\varphi_\sigma(A) = \mathtt{w}$ und $\varphi_\sigma(B) = \mathtt{w}$.

4. Disjunktion:

   $\varphi_\sigma(A \lor B) = \mathtt{w}$ gdw $\varphi_\sigma(A) = \mathtt{w}$ oder $\varphi_\sigma(B) = \mathtt{w}$.

5. Implikation:

   $\varphi_\sigma(A \to B) = \mathtt{w}$ gdw $\varphi_\sigma(A) = \mathtt{f}$ oder $\varphi_\sigma(B) = \mathtt{w}$.

6. Äquivalenz:

   $\varphi_\sigma(A \leftrightarrow B) = \mathtt{w}$ gdw $\varphi_\sigma(A) = \varphi_\sigma(B)$.[2]

7. Allquantor:

   $\varphi_\sigma(\forall v\, A) = \mathtt{w}$ gdw für alle v-Varianten σ' von σ gilt $\varphi_{\sigma'}(A) = \mathtt{w}$.

8. Existenzquantor:

   $\varphi_\sigma(\exists v\, A) = \mathtt{w}$ gdw es eine v-Variante σ' von σ gibt, sodass $\varphi_{\sigma'}(A) = \mathtt{w}$.

Eine v-Variante σ' von σ ist eine Belegung, die für alle Variablen $v' \neq v$: $\varphi_{\sigma'}(v') = \varphi_\sigma(v')$.

2: Wenn Sie die genauen Definitionen von 2–6 vergessen haben oder nicht genug Zeit haben, siehe kürzere Definition unten.

Kürzere Definition: Prädikatenlogische Bewertung

Eine prädikatenlogische Bewertung φ_σ relativ zu einer Interpretation $\mathfrak{I} = \langle \mathbf{D}, \varphi \rangle$ und einer Variablenbelegung σ ist eine Funktion, die:

1. Terme auswertet Sie ordnet jedem singulären Term t ein Element $d \in \mathbf{D}$ zu, basierend auf σ und der Interpretationsfunktion φ.

2. Formeln Wahrheitswerte zuweist: Sie weist jeder Formel A einen Wahrheitswert `w` (wahr) oder `f` (falsch) zu, gemäß den Regeln:

1. Atomare Formeln:

   $\varphi_\sigma(P^n(t_1, \ldots, t_n)) = \mathtt{w}$ gdw $\langle \varphi_\sigma(t_1), \ldots, \varphi_\sigma(t_n) \rangle \in \varphi(P^n)$.

2. Negation, Konjunktion, Disjunktion, Implikation und Äquivalenz werden auf ähnliche Weise wie in der Aussagenlogik bewertet.

3. Allquantor:

   $\varphi_\sigma(\forall v\, A) = \mathtt{w}$ gdw für alle v-Varianten σ' von σ gilt $\varphi_{\sigma'}(A) = \mathtt{w}$.

4. Existenzquantor:

   $\varphi_\sigma(\exists v\, A) = \mathtt{w}$ gdw es eine v-Variante σ' von σ gibt, sodass $\varphi_{\sigma'}(A) = \mathtt{w}$.

Eine v-Variante σ' von σ ist eine Belegung, die σ für alle Variablen mit der möglichen Ausnahme von v entspricht.

Klausurfrage 9. Es sei folgende Interpretation $\mathfrak{I} = \langle \mathbf{D}, \varphi \rangle$ gegeben:

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \{1,2,3,4\}. \\ \varphi(a) = 1, \quad \varphi(b) &= 2, \quad \varphi(c) = 3, \quad \varphi(d) = 4. \\ \varphi(G) &= \{2,4\} = \{d \mid d \text{ ist eine gerade Zahl}\} \\ \varphi(K) &= \{\langle 1,2\rangle, \langle 1,3\rangle, \langle 1,4\rangle, \langle 2,3\rangle, \langle 2,4\rangle, \langle 3,4\rangle\} \\ &= \{\langle d_1, d_2\rangle \in \mathbf{D}^2 \mid d_1 < d_2\}. \end{aligned}$$

Weiter seien die folgenden zwei Variablenbelegungen σ_1 und σ_2 unter $\mathfrak{I}$ gegeben:

$$\sigma_1 = 1, 2, \ldots \qquad \sigma_2 = 2, 1, \ldots$$

Geben Sie an, welche der folgenden Formeln wahr bzw. falsch sind (i) gemäß φ_{σ_1}, (ii) gemäß φ_{σ_2}! (Es ist keine weitere Begründung nötig.) (10 Pkt.)

Vorbemerkung

$$\varphi_{\sigma_1}(x) = 1, \quad \varphi_{\sigma_1}(y) = 2, \quad \varphi_{\sigma_2}(x) = 2, \quad \varphi_{\sigma_2}(y) = 1.$$

1. $K(a, b)$

Antwort: $\varphi_{\sigma_i}(K(a,b)) = \mathtt{w}$ (für $i \in \{1,2\}$).

Informelle Erklärung

Unter dieser Interpretation ist die Formel ‚$K(a,b)$' in Sinne zu verstehen, dass 1 (d.h. $\varphi(a)$) kleiner als 2 (d.h. $\varphi(b)$) ist. Da dies der Fall ist, gilt $\varphi_\sigma(K(a,b)) = \mathtt{w}$ unabhängig von der σ.

Technische Erklärung

$\varphi(a) = 1$ ist kleiner als $\varphi(b) = 2$, d.h., $\langle 1,2\rangle \in \varphi(K)$.

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{1 < 2}{\langle 1,2\rangle \in \varphi(K)}}{\langle \varphi(a), \varphi(b)\rangle \in \varphi(K)}}{\varphi(K(a,b)) = \mathtt{w}}$$

Da die zu bewertende Formel $K(a,b)$ geschlossen ist, dann, für alle σ_i, gilt: $\varphi_{\sigma_i}(K(a,b)) = \varphi(K(a,b)) = \mathtt{w}$.

2. $\neg(K(b,c) \vee G(c))$

Antwort: $\varphi_{\sigma_i}(\neg(K(b,c) \vee G(c))) = \mathtt{f}$ (für $i \in \{1,2\}$).

Informelle Erklärung

Unter dieser Interpretation ist ‚$\neg(K(b,c) \vee G(c))$' in Sinne zu verstehen, dass es nicht der Fall ist, dass: 2 < 3 (d.h. $\varphi(b) < \varphi(c)$) oder 3 (d. h. $\varphi(c)$) gerade ist. Da jedoch 2 < 3 gilt, ist es der Fall, dass 2 < 3 oder 3 gerade ist. Folglich ist $\varphi_\sigma(K(b,c) \vee G(c)) = \mathtt{w}$ unabhängig von der σ, und damit ist $\varphi_\sigma(\neg(K(b,c) \vee G(c))) = \mathtt{f}$.

In wenigen Worten: Da $\varphi(b) = 2 < 3 = \varphi(c)$, gilt $\varphi_{\sigma_i}(K(b,c)) = \mathtt{w}$ und damit $\varphi_{\sigma_i}(K(b,c) \vee G(c)) = \mathtt{w}$ und $\varphi_\sigma(\neg(K(b,c) \vee G(c))) = \mathtt{f}$.

Technische Erklärung

$\varphi(b) = 2$ ist kleiner als $\varphi(c) = 3$. Folglich:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{2 < 3}{\langle 2,3\rangle \in \varphi(K)}}{\langle \varphi(b), \varphi(c)\rangle \in \varphi(K)}}{\varphi(K(b,c)) = \mathtt{w}} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\text{3 ist nicht gerade}}{3 \notin \varphi(G)}}{\varphi(c) \notin \varphi(G)}}{\varphi(G(c)) = \mathtt{f}}}{\varphi(K(b,c) \vee G(c)) = \mathtt{w}}}{\varphi(\neg(K(b,c) \vee G(c))) = \mathtt{f}}$$

Da die zu bewertende Formel $K(b,c) \vee G(c)$ geschlossen ist, dann, für alle σ_i, gilt: $\varphi_{\sigma_i}(K(b,c) \vee G(c) = \varphi(K(b,c) \vee G(c)) = \mathtt{f}$.

3. $K(x, y)$

Antwort: $\varphi_{\sigma_1}(K(x, y)) = \mathtt{w}$, $\varphi_{\sigma_2}(K(x, y)) = \mathtt{f}$.

Informelle Erklärung

Fall σ_1: Unter dieser Interpretation und bezüglich σ_1 ist ‚$K(x, y)$' in Sinne zu verstehen, dass $1 < 2$ (d.h. $\varphi_{\sigma_1}(x) < \varphi_{\sigma_1}(y)$). Da dies der Fall ist, ist $\varphi_{\sigma_1}(K(x, y)) = \mathtt{w}$.

Fall σ_2: Unter dieser Interpretation und bezüglich σ_2 ist ‚$K(x, y)$' in Sinne zu verstehen, dass $2 < 1$ (d.h. $\varphi_{\sigma_2}(x) < \varphi_{\sigma_2}(y)$). Da dies nicht der Fall ist, ist $\varphi_{\sigma_2}(K(x, y)) = \mathtt{f}$.

Technische Erklärung

$\varphi_{\sigma_1}(x) = 1$ ist kleiner als $\varphi_{\sigma_1}(y) = 2$. Folglich:

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{1 < 2}{\langle 1, 2\rangle \in \varphi(K)}}{\langle \varphi_{\sigma_1}(x), \varphi_{\sigma_1}(y)\rangle \in \varphi(K)}}{\varphi_{\sigma_1}(K(x, y)) = \mathtt{w}}$$

$\varphi_{\sigma_2}(x) = 2$ ist nicht kleiner als $\varphi_{\sigma_2}(y) = 1$. Folglich:

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{2 \not< 1}{\langle 2, 1\rangle \notin \varphi(K)}}{\langle \varphi_{\sigma_2}(x), \varphi_{\sigma_2}(y)\rangle \notin \varphi(K)}}{\varphi_{\sigma_2}(K(x, y)) = \mathtt{f}}$$

4. $\exists x\,(K(x,d) \wedge G(x))$

Antwort: $\varphi_{\sigma_i}(\exists x\, K(x,d) \wedge G(x)) = \mathtt{w}$ (für $i \in \{1,2\}$).

Informelle Erklärung

Unter dieser Interpretation ist die Formel ‚$\exists x\,(K(x,d) \wedge G(x))$' in Sinne zu verstehen, dass es eine Zahl $n \in \mathbf{D} = \{1,2,3,4\}$ gibt, sodass $n < 4 = \varphi(d)$ und n gerade ist. Dies ist genau der Fall, da $2 < 4$ und 2 gerade ist. Folglich ist $\varphi_\sigma(\exists x\,(K(x,d) \wedge G(x))) = \mathtt{w}$ unabhängig von der Variablenbelegung σ.

In wenigen Worten: Es gilt $\varphi_{\sigma_i'}(K(x,d) \wedge G(x)) = \mathtt{w}$, denn $2 < 4$ und 2 ist gerade.

Technische Erklärung

Sei σ_i' eine x-Variante von σ_i mit $\varphi_{\sigma_i'}(x) = 2$. Folglich:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{2 < 4}{\langle 2,4\rangle \in \varphi(K)}}{\langle \varphi_{\sigma_i'}(x), \varphi(d)\rangle \in \varphi(K)}}{\langle \varphi_{\sigma_i'}(x), \varphi_{\sigma_i'}(d)\rangle \in \varphi(K)}}{\varphi_{\sigma_i'}(K(x,d)) = \mathtt{w}} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{2 \text{ ist gerade}}{2 \in \varphi(G)}}{\varphi_{\sigma_i'}(x) \in \varphi(G)}}{\varphi_{\sigma_i'}(G(x)) = \mathtt{w}}}{\varphi_{\sigma_i'}(K(x,d) \wedge G(x)) = \mathtt{w}}}{\varphi_{\sigma_i}(\exists x\,(K(x,d) \wedge G(x))) = \mathtt{w}}$$

5. $\forall x\, \exists y\, K(x,y)$

Antwort: $\varphi_{\sigma_i}(\forall x\, \exists y\, K(x,y)) = \mathtt{f}$ (für $i \in \{1,2\}$).

Informelle Erklärung

Unter dieser Interpretation ist die Formel ‚$\forall x\, \exists y\, K(x,y)$' in Sinne zu verstehen, dass für alle Zahlen $n \in \mathbf{D} = \{1,2,3,4\}$ eine Zahl $m \in \mathbf{D} = \{1,2,3,4\}$ existiert, sodass $n < m$. Es gibt jedoch ein Gegenbeispiel hierzu: Für $n = 4$ gibt es keine Zahl $m \in \mathbf{D} = \{1,2,3,4\}$ mit $n < m$. Folglich ist $\varphi_\sigma(\forall x\, \exists y\, K(x,y)) = \mathtt{f}$ unabhängig von der Variablenbelegung σ.

In wenigen Worten: Die Bewertung kann nicht wahr sein, weil es kein $m \in \mathbf{D}$ gibt, so dass $4 < m$.

Technische Erklärung

Sei σ_i' eine x-Variante von σ_i mit $\sigma_i'(x) = 4$. Wir prüfen jede mögliche y-Variante σ_i'' von σ_i'.

Fall $\sigma_i''(y) = 1$:

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{4 \not< 1}{\langle 4, 1\rangle \notin \varphi(K)}}{\langle \varphi_{\sigma_i''}(x), \varphi_{\sigma_i''}(y)\rangle \notin \varphi(K)}}{\varphi_{\sigma_i''}(K(x,y)) = \mathtt{f}}$$

Fall $\sigma_i''(y) = 2$:

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{4 \not< 2}{\langle 4, 2\rangle \notin \varphi(K)}}{\langle \varphi_{\sigma_i''}(x), \varphi_{\sigma_i''}(y)\rangle \notin \varphi(K)}}{\varphi_{\sigma_i''}(K(x,y)) = \mathtt{f}}$$

Fall $\sigma_i''(y) = 3$:

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{4 \not< 3}{\langle 4, 3\rangle \notin \varphi(K)}}{\langle \varphi_{\sigma_i''}(x), \varphi_{\sigma_i''}(y)\rangle \notin \varphi(K)}}{\varphi_{\sigma_i''}(K(x,y)) = \mathtt{f}}$$

Fall $\sigma_i''(y) = 4$:

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{4 \not< 4}{\langle 4, 4\rangle \notin \varphi(K)}}{\langle \varphi_{\sigma_i''}(x), \varphi_{\sigma_i''}(y)\rangle \notin \varphi(K)}}{\varphi_{\sigma_i''}(K(x,y)) = \mathtt{f}}$$

Also für jede y-Variante σ_i'' von σ_i' ist $\varphi_{\sigma_i''}(K(x,y)) = \mathtt{f}$.

Daher folgt $\varphi_{\sigma_i'}(\exists y\, K(x,y)) = \mathtt{f}$.

Daraus wiederum ergibt sich $\varphi_{\sigma_i}(\forall x\, \exists y\, K(x,y)) = \mathtt{f}$.

Klausurfrage 10. Führen Sie die Herleitungen zu folgenden deduktiv gültigen Schlüssen durch: (10 Pkt.)

1. $\forall x \neg P(x) \vdash \neg\exists x\, P(x)$

Antwort

1.	$\underline{\forall x \neg P(x)}$	(P1)
2.	$\|\ \neg\neg\exists x\, P(x)$	(IB-Annahme)
3.	$\|\ \exists x\, P(x)$	2. (DN2)
4.	$\|\ \|\ P(y)$	(EB-Annahme)
5.	$\|\ \|\ \neg P(y)$	1. (UB)
6.	$\|\ \|\ Q(a) \wedge \neg Q(a)$	4., 5. (ECQ)
7.	$\|\ Q(a) \wedge \neg Q(a)$	4.–6. (EB)
8.	$\neg\exists x\, P(x)$	2.–7. (IB)

Erklärung

Da wir zwei sich gegenseitig widersprechende Formeln A und $\neg A$ – mit $A := P(y)$ – hergeleitet haben, dürfen wir nach der Regel ECQ jede beliebige Formel herleiten. In diesem Fall wählen wir eine widersprüchliche Formel $A \wedge \neg A$ – mit $A := Q(a)$ –, die wir aus dem EB-Teil mit EB herausnehmen wollen, um unseren IB-Teil zu vervollständigen.

Inkorrekte Antwort.

Es wäre aber inkorrekt gewesen, mit KON die $P(y) \wedge \neg P(y)$ herzuleiten, um sie dann aus dem EB-Teil mit EB herauszunehmen. Dies würde die Variablenbedingung VB′ nicht erfüllen (siehe SS. 289, 293, 295). Das Folgende ist also gar keine Herleitung:

1.	$\underline{\forall x \neg P(x)}$	(P1)
2.	$\|\ \neg\neg\exists x\, P(x)$	(IB-Annahme)
3.	$\|\ \exists x\, P(x)$	2. (DN2)
4.	$\|\ \|\ P(y)$	(EB-Annahme)
5.	$\|\ \|\ \neg P(y)$	1. (UB)
6.	$\|\ \|\ P(y) \wedge \neg P(y)$	4., 5. (KON)
7.	$\|\ P(y) \wedge \neg P(y)$	4.–6. (EB)[3]
8.	$\neg\exists x\, P(x)$	2.–7. (IB)

3: Falscher Schritt: y vorkommt frei.

Vergiss auch nicht, die Variablenbedingung VB für EU auf Seite 281 zu überprüfen,

2. $\neg\neg\forall x\,(P(x) \rightarrow Q(x)), \neg\exists x\,Q(x) \vdash \neg P(a)$

Antwort

1.	$\neg\neg\forall x\,(P(x) \rightarrow Q(x))$	(P1)
2.	$\neg\exists x\,Q(x)$	(P2)
3.	$\forall x\,(P(x) \rightarrow Q(x))$	1. (DN2)
4.	$\|\|$ $\neg\neg P(a)$	(IB-Annahme)
5.	$\|\|$ $P(a)$	4. (DN2)
6.	$\|\|$ $P(a) \rightarrow Q(a)$	3. (UB)
7.	$\|\|$ $Q(a)$	5., 6. (MP)
8.	$\|\|$ $\exists x\,Q(x)$	7. (EE)
9.	$\|\|$ $\exists x\,Q(x) \wedge \neg\exists x\,Q(x)$	2., 8. (KON)
10.	$\neg P(a)$	4.–9. (IB)

Erklärung

In diesen beiden Herleitungen können wir sehen, dass indirekte Beweise in einer Klausur sehr nützlich sein können!

Klausurbonusfrage (optional). Wie lässt sich das Identitätsprädikat als logisches Zeichen in die Prädikatenlogik einführen (Formationsregel, semantische Regel, Herleitungsregeln)? (10 Pkt.)

Antwort

Das Identitätsprädikat wird eingeführt durch:

Formationsregel: Wenn t_1, t_2 singuläre Terme sind, dann ist $t_1 = t_2$ eine Formel.

Semantische Regel: $\varphi_\sigma(t_1 = t_2) = \mathtt{w}$ gdw $\varphi_\sigma(t_1) = \varphi_\sigma(t_2)$.

Herleitungsregeln:

$\vdash \forall v\, v = v$ (Reflexivität)

$\vdash \forall v_1\, \forall v_2\, (v_1 = v_2 \wedge A[v_1/v_3] \rightarrow A[v_2/v_3])$ (Substitution)

14.3 Zusatzübungen

Zusatzübung 14.1 (Alternative zu 3)**.** (14.1.1) Geben Sie die Wahrheitstafel für das einschließende und für das ausschließende 'oder' an! (14.1.2) Wie lässt sich das ausschließende 'oder' mittels der Konjunktion/Implikation und der Negation definieren?

Zusatzübung 14.2 (Alternative zu 3)**.** (14.2.1) Erstellen Sie die Wahrheitstafel für den Ausdruck: ‚p, es sei denn, q'. (14.2.2) Wie lässt sich diese Operation mittels der Konjunktion/Disjunktion/Implikation und der Negation definieren?

Versuchen Sie, die Wahrheitstabelle für diesen und andere umgangssprachliche Ausdrücke zu erstellen, die eine aussagenlogische Bedeutung haben könnten.

Zusatzübung 14.3 (alternative Bonusfrage)**.** Definieren Sie, was eine Äquivalenzrelation ist, und erläutern Sie ihre Eigenschaften. Erklären Sie, warum die Identitätsrelation eine Äquivalenzrelation darstellt. (Oder: Beweisen Sie durch eine Herleitung die Gültigkeit von mindestens zwei der Eigenschaften von Äquivalenzrelationen für die Identitätsrelation.)

Zusatzübung 14.4 (alternative Bonusfrage)**.** Definieren Sie, was Kennzeichnungen (*definite descriptions*) sind, und geben Sie an, ob die folgenden Ausdrücke Kennzeichnungen sind:

1. die Mutter von Marie Curie
2. die Bundeskanzlerin von Deutschland im Jahr 2023
3. der Hauptsänger von Queen
4. der Hauptsänger von The Beatles
5. die Hauptstadt von Frankreich
6. der derzeitige König von Deutschland
7. der erste Mensch auf dem Mond
8. die jüngere Person im Raum
9. der Autor der logischen Abhandlung *Principia Mathematica*
10. die Menge der Autoren der logischen Abhandlung *Principia Mathematica*

Hinweis: Siehe S. 328 des Skripts.