

6

Aussagenlogisches Herleiten

6.1 Vorbereitung

In Übung 6.3 wird folgendes gefragt:

Hier sind in der Prämisse Klammern verloren gegangen. Was könnte gemeint sein?

Also, es kann sinnvoll sein, die Formel $,p \wedge q \wedge r'$ entweder als $,(p \wedge q) \wedge r'$ oder als $,p \wedge (q \wedge r)'$ zu interpretieren. Beide Formeln sind jedoch logisch äquivalent (dies kann durch eine Wahrheitstabelle oder eine Herleitung bestätigt werden). Daher ist es problemlos möglich, die Klammern wegzulassen. Die Herleitungen der Formeln erfolgen jedoch nicht auf exakt dieselbe Weise. Die Formel $,(p \wedge q) \wedge r'$ kann wie in der letzten Übung bewiesen werden. Jetzt verwenden wir die Formel $,p \wedge (q \wedge r)'$ als Prämisse.

Aktivierungselement 6.1. Beweisen Sie die folgende Schlüsse mit Hilfe einer Herleitung:

1. $(p \wedge q) \wedge r \vdash p \wedge (q \wedge r)$
2. $p \wedge (q \wedge r) \vdash (p \wedge q) \wedge r$
3. $\vdash ((p \wedge q) \wedge r) \leftrightarrow (p \wedge (q \wedge r))$

6.1 Vorbereitung	89
6.2 Übungen	90
6.2.1 Lösungen	91
6.3 Zusatzübungen	98
6.3.1 Lösungen	99

6.2 Übungen

Übung 6. Führen Sie die Herleitungen zu folgenden deduktiv gültigen Schlüssen durch.

1. $p \rightarrow q \vee (r \wedge s), t \rightarrow q \vee (r \wedge s) \vdash p \vee t \rightarrow q \vee (r \wedge s)$
2. $(p \wedge q) \wedge r \vdash r \vee s$
3. $p \wedge q \wedge r \vdash r \vee s$
4. $p \vee q, p \rightarrow r, \neg r \vdash q \vee s$
5. $(p \wedge q) \vee r, r \rightarrow \neg q, \neg\neg(q \wedge r) \vdash p$
6. $(p \wedge q) \wedge r, p \rightarrow \neg s, q \rightarrow \neg t \vdash \neg s \wedge \neg t$
7. $\neg p \wedge q, p \vee (r \rightarrow \neg q), \neg r \rightarrow \neg\neg(s \wedge t), \neg\neg t \vee r \vdash s \wedge t$
8. $p \vee (q \wedge \neg q) \vdash p$
9. $p \vee q, p \vee \neg q \vdash p$
10. $p \rightarrow q, p \rightarrow \neg q \vdash \neg p$
11. $p \rightarrow q \vdash \neg(p \wedge \neg q)$
12. $\neg p \vee \neg q \vdash \neg(p \wedge q)$
13. $p \rightarrow (q \rightarrow r) \vdash p \wedge q \rightarrow r$
14. $p \rightarrow q \vdash p \wedge r \rightarrow q \wedge r$
15. $p \rightarrow q, p \vee r \vdash q \vee r$
16. $p \rightarrow \neg p \vdash \neg p$
17. $p \wedge (q \vee r) \vdash (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
18. $\neg(p \vee q) \vee (s \rightarrow t), p \wedge s, t \rightarrow r \vdash r$

6.2.1 Lösungen

Lösung zu Übung 6. Führen Sie die Herleitungen zu folgenden deduktiv gültigen Schlüssen durch.

$$1. \ p \rightarrow q \vee (r \wedge s), t \rightarrow q \vee (r \wedge s) \vdash p \vee t \rightarrow q \vee (r \wedge s)$$

Antwort

- | | |
|--|----------------|
| 1. $p \rightarrow q \vee (r \wedge s)$ | (P1) |
| 2. $t \rightarrow q \vee (r \wedge s)$ | (P2) |
| 3. $\parallel p \vee t$ | (KB-Annahme) |
| 4. $\parallel \parallel p$ | (FU-Annahme 1) |
| 5. $\parallel \parallel q \vee (r \wedge s)$ | 1., 4. (MP) |
| 6. $\parallel \parallel \neg p$ | (FU-Annahme 2) |
| 7. $\parallel \parallel t$ | 3., 6. (DS1) |
| 8. $\parallel \parallel q \vee (r \wedge s)$ | 2., 7. (MP) |
| 9. $\parallel q \vee (r \wedge s)$ | 4.–6. (FU) |
| 10. $p \vee t \rightarrow q \vee (r \wedge s)$ | 3.–9. (KB) |

$$2. \ (p \wedge q) \wedge r \vdash r \vee s$$

Antwort

- | | |
|--|------------|
| 1. $\underline{(p \wedge q) \wedge r}$ | (P1) |
| 2. r | 1. (SIMP2) |
| 3. $r \vee s$ | 2. (ADD1) |

$$3. \ p \wedge q \wedge r \vdash r \vee s$$

Antwort

- | | |
|--|------------|
| 1. $\underline{p \wedge (q \wedge r)}$ | (P1) |
| 2. $q \wedge r$ | 1. (SIMP2) |
| 3. r | 2. (SIMP2) |
| 4. $r \vee s$ | 3. (ADD1) |

$$4. \ p \vee q, p \rightarrow r, \neg r \vdash q \vee s$$

Antwort	
1.	$p \vee q$ (P1)
2.	$p \rightarrow r$ (P2)
3.	$\neg r$ _____ (P3)
4.	$\neg p$ 2., 3. (MT)
5.	q 1., 4. (DS1)
6.	$q \vee s$ 5. (ADD1)

$$5. \ (p \wedge q) \vee r, r \rightarrow \neg q, \neg\neg(q \wedge r) \vdash p$$

Antwort	
1.	$(p \wedge q) \vee r$ (P1)
2.	$r \rightarrow \neg q$ (P2)
3.	$\neg\neg(q \wedge r)$ _____ (P3)
4.	$q \wedge r$ 3. (DN2)
5.	r 4. (SIMP2)
6.	$\neg q$ 2., 5. (MP)
7.	q 4. (SIMP1)
8.	p 6., 7. (ECQ)

$$6. \ (p \wedge q) \wedge r, p \rightarrow \neg s, q \rightarrow \neg t \vdash \neg s \wedge \neg t$$

Antwort	
1.	$(p \wedge q) \wedge r$ (P1)
2.	$p \rightarrow \neg s$ (P2)
3.	$q \rightarrow \neg t$ _____ (P3)
4.	$p \wedge q$ 1. (SIMP1)
5.	p 4. (SIMP1)
6.	$\neg s$ 2., 5. (MP)
7.	q 4. (SIMP2)
8.	$\neg t$ 3., 7. (MPP)
9.	$\neg s \wedge \neg t$ 6., 8. (KON)

7. $\neg p \wedge q, p \vee (r \rightarrow \neg q), \neg r \rightarrow \neg\neg(s \wedge t), \neg\neg t \vee r \vdash s \wedge t$

Antwort

- | | |
|--|--------------------------|
| 1. $\neg p \wedge q$ | (P1) |
| 2. $p \vee (r \rightarrow \neg q)$ | (P2) |
| 3. $\neg r \rightarrow \neg\neg(s \wedge t)$ | (P3) |
| 4. $\neg\neg t \vee r$
_____ | (P4) |
| 5. $\neg p$ | 1. (SIMP1) |
| 6. $r \rightarrow \neg q$ | 2., 5. (DS1) |
| 7. q | 1. (SIMP2) |
| 8. $\neg\neg q$ | 7. (DN1) |
| 9. $\neg r$ | 6., 8. (MT) ¹ |
| 10. $\neg\neg(s \wedge t)$ | 3., 9. (MP) |
| 11. $s \wedge t$ | 10. (DN2) |

Frage: Mindestens eine Prämisse war in dieser Herleitung nicht notwendig. Welche?

8. $p \vee (q \wedge \neg q) \vdash p$

Antwort

- | | |
|-------------------------------|--------------|
| 1. $p \vee (q \wedge \neg q)$ | (P1) |
| 2. $\neg p$ | (IB-Annahme) |
| 3. $q \wedge \neg q$ | 1., 2. (DS1) |
| 4. p | 2.–3. (IB) |

9. $p \vee q, p \vee \neg q \vdash p$

Antwort

- | | |
|-----------------------------|--------------|
| 1. $p \vee q$ | (P1) |
| 2. $p \vee \neg q$
_____ | (P2) |
| 3. $\neg p$ | (IB-Annahme) |
| 4. q | 1., 3. (DS1) |
| 5. $\neg q$ | 2., 3. (DS1) |
| 6. $q \wedge \neg q$ | 4., 5. (KON) |
| 7. p | 3.–6. (IB) |

10. $p \rightarrow q, p \rightarrow \neg q \vdash \neg p$

Antwort	
1.	$p \rightarrow q$ (P1)
2.	$\underline{p \rightarrow \neg q}$ (P2)
3.	$\parallel \neg \neg p$ (IB-Annahme)
4.	$\parallel p$ 3. (DN)
5.	$\parallel q$ 1., 4. (MP)
6.	$\parallel \neg q$ 2., 4. (MP)
7.	$\parallel q \wedge \neg q$ 5., 6. (KON)
8.	$\neg p$ 3.–7. (IB)

Inkorrekte Lösung

2: Eine IB-Annahme ist eine negierte Formel. Man kann jedoch eine zusätzliche Regel definieren, die durch IB ersetzt wird, um diese Herleitung gültig zu machen. Können Sie versuchen, diese Regel zu definieren?

1.	$p \rightarrow q$ (P1)
2.	$\underline{p \rightarrow \neg q}$ (P2)
3.	$\parallel p$ (IB-Annahme) ²
4.	$\parallel q$ 1., 3. (MP)
5.	$\parallel \neg q$ 2., 3. (MP)
6.	$\parallel q \wedge \neg q$ 4., 5. (KON)
7.	$\neg p$ 3.–6. (IB)

11. $p \rightarrow q \vdash \neg(p \wedge \neg q)$

Antwort	
1.	$\underline{p \rightarrow q}$ (P1)
2.	$\parallel \neg(p \wedge \neg q)$ (IB-Annahme)
3.	$\parallel p \wedge \neg q$ 2. (DN2)
4.	$\parallel p$ 3. (SIMP1)
5.	$\parallel q$ 1., 4. (MP)
6.	$\parallel \neg q$ 3. (SIMP2)
7.	$\parallel q \wedge \neg q$ 5., 6. (KON)
8.	$\neg(p \wedge \neg q)$ 2.–7. (IB)

12. $\neg p \vee \neg q \vdash \neg(p \wedge q)$

Antwort

- | | |
|------------------------------|---------------------------|
| 1. $\neg p \vee \neg q$ | (P1) |
| 2. $\neg\neg(p \wedge q)$ | (IB-Annahme) |
| 3. $p \wedge q$ | 2. (DN2) |
| 4. p | 3. (SIMP1) |
| 5. $\neg\neg p$ | 4. (DN1) |
| 6. $\neg q$ | 1., 5. (DS1) ³ |
| 7. q | 3. (SIMP2) |
| 8. $q \wedge \neg q$ | 6., 7. (KON) |
| 9. $\neg(p \wedge q)$ | 2.–8. (IB) |

3: Dieser Schritt ist nicht direkt von 1., 4. erhältlich.

13. $p \rightarrow (q \rightarrow r) \vdash p \wedge q \rightarrow r$

Antwort

- | | |
|--------------------------------------|--------------|
| 1. $p \rightarrow (q \rightarrow r)$ | (P1) |
| 2. $p \wedge q$ | (KB-Annahme) |
| 3. p | 2. (SIMP1) |
| 4. $q \rightarrow r$ | 1., 3. (MP) |
| 5. q | 2. (SIMP2) |
| 6. r | 4., 5. (MP) |
| 7. $p \wedge q \rightarrow r$ | 2.–6. (KB) |

14. $p \rightarrow q \vdash p \wedge r \rightarrow q \wedge r$

Antwort

- | | |
|--|--------------|
| 1. $p \rightarrow q$ | (P1) |
| 2. $p \wedge r$ | (KB-Annahme) |
| 3. p | 2. (SIMP1) |
| 4. q | 1., 3. (MP) |
| 5. r | 2. (SIMP2) |
| 6. $q \wedge r$ | 4., 5. (KON) |
| 7. $p \wedge r \rightarrow q \wedge r$ | 2.–5. (KB) |

15. $p \rightarrow q, p \vee r \vdash q \vee r$

Antwort	
1.	$p \rightarrow q$ (P1)
2.	$\underline{p \vee r}$ (P2)
3.	$\parallel r$ (FU-Annahme 1)
4.	$\parallel q \vee r$ 3. (ADD2)
5.	$\parallel \neg r$ (FU-Annahme 2)
6.	$\parallel p$ 2., 5. (DS2)
7.	$\parallel q$ 1., 6. (MP)
8.	$\parallel q \vee r$ 7. (ADD1)
9.	$q \vee r$ 3.–8. (FU)

16. $p \rightarrow \neg p \vdash \neg p$

Antwort	
1.	$\underline{p \rightarrow \neg p}$ (P1)
2.	$\parallel \neg \neg p$ (IB-Annahme)
3.	$\parallel p$ 2. (DN2)
4.	$\parallel \neg p$ 1., 3. (MP)
5.	$\parallel p \wedge \neg p$ 3., 4. (KON)
6.	$\neg p$ 2.–5. (IB)

17. $p \wedge (q \vee r) \vdash (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

Antwort

- | | |
|--|----------------|
| 1. $\underline{p \wedge (q \vee r)}$ | (P1) |
| 2. p | 1. (SIMP1) |
| 3. $q \vee r$ | 1. (SIMP2) |
| 4. $\parallel q$ | (FU-Annahme 1) |
| 5. $\parallel p \wedge q$ | 2., 4. (KONJ) |
| 6. $\parallel (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ | 5. (ADD1) |
| 7. $\parallel \neg q$ | (FU-Annahme 2) |
| 8. $\parallel r$ | 3., 7. (DS1) |
| 9. $\parallel p \wedge r$ | 2., 8. (KON) |
| 10. $\parallel (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ | 9. (ADD2) |
| 11. $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ | 4.–10. (FU) |

18. $\neg(p \vee q) \vee (s \rightarrow t), p \wedge s, t \rightarrow r \vdash r$

Antwort

- | | |
|---|--------------|
| 1. $\neg(p \vee q) \vee (s \rightarrow t)$ | (P1) |
| 2. $p \wedge s$ | (P2) |
| 3. $t \rightarrow r$
$\underline{\quad}$ | (P3) |
| 4. p | 2. (SIMP1) |
| 5. $p \vee q$ | 4. (ADD1) |
| 6. $\neg\neg(p \vee q)$ | 5. (DN1) |
| 7. $s \rightarrow t$ | 1., 6. (DS1) |
| 8. s | 2. (SIMP2) |
| 9. t | 7., 8. (MP) |
| 10. r | 3., 9. (MP) |

6.3 Zusatzübungen

Zusatzübung 6.1. Versuchen Sie, alternative Herleitungen für die folgenden Schlüsse zu finden, die den unten stehenden Hinweisen folgen.

$$10. p \rightarrow q, p \rightarrow \neg q \vdash \neg p$$

Hinweis: Mit FU in 7 Schritten herleiten.

$$12. \neg p \vee \neg q \vdash \neg(p \wedge q)$$

Hinweis: Mit FU in 9 Schritten herleiten.

$$15. p \rightarrow q, p \vee r \vdash q \vee r$$

Hinweis: Mit FU auf p in 9 Schritten herleiten.

$$16. p \rightarrow \neg p \vdash \neg p$$

Hinweis: Mit IB in 5 Schritten herleiten.

$$17. p \wedge (q \vee r) \vdash (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

Hinweis: Mit FU auf r in 11 Schritten herleiten.

$$18. \neg(p \vee q) \vee (s \rightarrow t), p \wedge s, t \rightarrow r \vdash r$$

Hinweis: Mit IB auf r in XX Schritten herleiten.

Zusatzübung 6.2. Führen Sie die Herleitungen zu folgenden deduktiv gültigen Schlüssen durch.

$$1. p \rightarrow \neg q, q \vdash \neg p$$

$$2. p \vdash (q \rightarrow p)$$

$$3. \vdash p \rightarrow (q \rightarrow p)$$

$$4. p \vdash (q \vee \neg q)$$

$$5. \vdash p \rightarrow (q \vee \neg q)$$

$$6. \neg p \vdash (p \rightarrow q)$$

$$7. (p \wedge \neg p) \vdash q$$

$$8. \vdash (p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow r)$$

$$9. \vdash (p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow p)$$

$$10. \vdash ((p \wedge q) \rightarrow r) \leftrightarrow (p \rightarrow (q \rightarrow r))$$

6.3.1 Lösungen

Lösung zu Zusatziübung 6.1. Versuchen Sie, alternative Herleitungen für die folgenden Schlüsse zu finden, die den unten stehenden Hinweisen folgen.

$$10. \ p \rightarrow q, p \rightarrow \neg q \vdash \neg p$$

Antwort

- | | |
|---------------------------|-----------------------------|
| 1. $p \rightarrow q$ | (P1) |
| 2. $p \rightarrow \neg q$ | (P2) |
| 3. $\parallel p$ | (FU-Annahme 1) |
| 4. $\parallel \neg q$ | 2., 3. (MP) |
| 5. $\parallel \neg p$ | 1., 4. (MT) |
| 6. $\parallel \neg p$ | (FU-Annahme 2) ⁴ |
| 7. $\neg p$ | 3.–6. (FU) |

4: Die Annahme ist bereits das Ziel!

$$12. \ \neg p \vee \neg q \vdash \neg(p \wedge q)$$

Antwort

- | | |
|---------------------------------|-----------------------------|
| 1. $\neg p \vee \neg q$ | (P1) |
| 2. $\parallel p \wedge q$ | (FU-Annahme 1) |
| 3. $\parallel p$ | 2. (SIMP1) |
| 4. $\parallel \neg\neg p$ | 3. (DN1) |
| 5. $\parallel \neg q$ | 1., 4. (MT) ⁵ |
| 6. $\parallel q$ | 2. (SIMP2) |
| 7. $\parallel \neg(p \wedge q)$ | 5., 6. (ECQ) |
| 8. $\parallel \neg(p \wedge q)$ | (FU-Annahme 2) ⁶ |
| 9. $\neg(p \wedge q)$ | 2.–8. (IB) |

5: Dieser Schritt ist nicht direkt von 1., 4. erhältlich.

6: Die Annahme ist bereits das Ziel!

15. $p \rightarrow q, p \vee r \vdash q \vee r$

Antwort	
1.	$p \rightarrow q$ (P1)
2.	$\underline{p \vee r}$ (P2)
3.	$\parallel p$ (FU-Annahme 1)
4.	$\parallel q$ 1., 3. (MP)
5.	$\parallel q \vee r$ 4. (ADD1)
6.	$\parallel \neg p$ (FU-Annahme 2)
7.	$\parallel r$ 2., 6. (DS1)
8.	$\parallel q \vee r$ 7. (ADD2)
9.	$q \vee r$ 3.–8. (FU)

16. $p \rightarrow \neg p \vdash \neg p$

7: $A \wedge \neg A$ wird hergeleitet, mit $A := \neg p$.

Antwort	
1.	$\underline{p \rightarrow \neg p}$ (P1)
2.	$\parallel \neg \neg p$ (IB-Annahme)
3.	$\parallel \neg p$ 1., 2. (MT)
4.	$\parallel \neg p \wedge \neg \neg p$ 2., 3. (KON) ⁷
5.	$\neg p$ 2.–4. (IB)

17. $p \wedge (q \vee r) \vdash (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

Antwort

- | | |
|--|----------------|
| 1. $\underline{p \wedge (q \vee r)}$ | (P1) |
| 2. p | 1. (SIMP1) |
| 3. $q \vee r$ | 1. (SIMP2) |
| 4. $\parallel r$ | (FU-Annahme 1) |
| 5. $\parallel p \wedge r$ | 2., 4. (KON) |
| 6. $\parallel (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ | 5. (ADD2) |
| 7. $\parallel \neg r$ | (FU-Annahme 2) |
| 8. $\parallel q$ | 3., 7. (DS2) |
| 9. $\parallel p \wedge q$ | 2., 8. (KONJ) |
| 10. $\parallel (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ | 9. (ADD1) |
| 11. $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ | 4.–10. (FU) |

18. $\neg(p \vee q) \vee (s \rightarrow t), p \wedge s, t \rightarrow r \vdash r$

Ausstehend