8 Prädikatenlogische Analyse und Repräsentierung

8.1 Vorbereitung

8.1.1 Das logische Quadrat

Die Übung 8.2 wird leichter, wenn wir die logische Form der kategorischen Sätze verstehen:

A**:** alle S sind P (universell affirmativ);

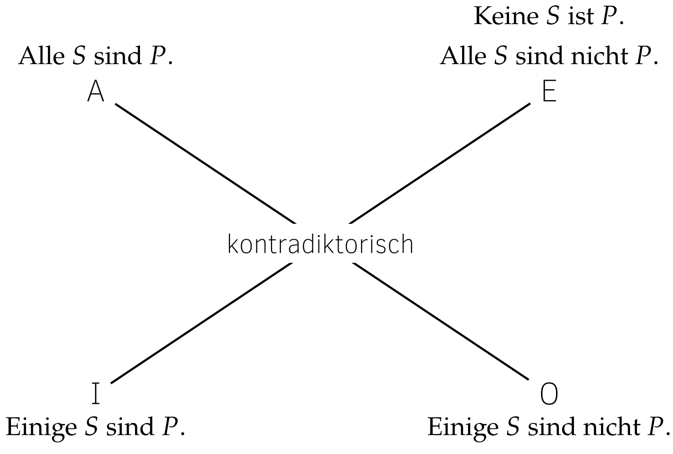
E**:** keine S ist P oder alle S sind nicht P (universell negativ);

I**:** einige S sind P (partikulär affirmativ); und

O**:** einige S sind nicht P (partikulär negativ).

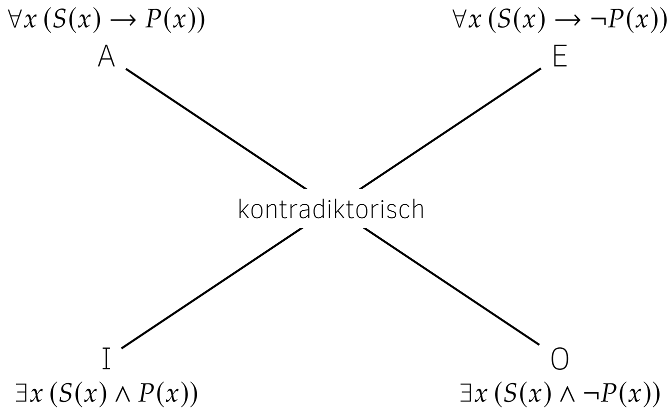
Sätze des Typs A und O sind gegenseitig kontradiktorisch, was bedeutet, dass ein Satz vom Typ A logisch äquivalent zur Negation eines Satzes vom Typ O ist – vorausgesetzt, S und P bezeichnen in den obigen Formeln die gleiche Eigenschaften. Dasselbe gilt für Sätze des Typs E und I.

Diese Beziehungen werden im folgenden logischen Quadrat dargestellt:



Bemerkung: Man kann andere Beziehungen (Kontrarität, Subkontrarität, Subalternität, usw.) zwischen den anderen Typen kategorischer Sätze herstellen, allerdings unter der Annahme, dass es mindestens ein x gibt, sodass $S(x)$. Das könnte jedoch zu Verwirrung führen, weshalb werden diese Beziehungen hier nicht erklärt.

In der Prädikatenlogik werden die Sätze dieses Quadrats wie folgt repräsentiert:



Frage: Warum wird ‚einige S sind P' als ‚$\exists x\,(S(x) \land P(x))$' und nicht als ‚$\exists x\,(S(x) \to P(x))$' repräsentiert?

Antwort

‚Einige S sind P' wird als ‚$\exists x\,(S(x) \land P(x))$' und nicht als ‚$\exists x\,(S(x) \to P(x))$' repräsentiert, weil ‚$S(a) \to P(a)$' logisch ‚$\neg S(a) \lor P(a)$' bedeutet.

Diese letzte Ausdruck ist wahr, wenn $\neg S(a)$ oder $P(a)$ (oder beide). Folglich kann ‚$\exists x\,(S(x) \land P(x))$' wahr sein, wenn es ein x gibt (z.B. a), das nicht S ist.

Die Bedeutung von ‚einige S sind P' ist jedoch, dass es mindestens ein x gibt, das sowohl S als auch P ist. Daher ist die richtige Darstellung ‚$\exists x\,(S(x) \land P(x))$', da diese ausdrückt, dass es mindestens ein x gibt, das beide Eigenschaften erfüllt.

Frage an Sie: Warum wird ‚alle S sind P' als ‚$\forall x\,(S(x) \to P(x))$' und nicht als ‚$\forall x\,(S(x) \land P(x))$' repräsentiert?

8.1.2 Aktivierungselemente (aus den Kapiteln 1-3)

Schauen wir uns noch einmal einige Sätze aus den Kapiteln 1 bis 3 an, die in der Prädikatenlogik komplexer repräsentiert werden können als in der Aussagenlogik.

Aktivierungselement 8.1 (Aus Übung 1.4)**.** Repräsentieren Sie die folgenden natürsprachlichen Aussagesatze in der prädikatenlogischen Sprache:

1. Herbert und Heidi sind befreundet.
2. Herbert und Heidi sind beliebt.
3. Herbert und Heidi sind beide nicht glücklich.
4. Herbert und Heidi lieben sich.
5. Herbert und Heidi lieben einander.
6. Es ist nicht der Fall, dass Herbert und Heidi beide nicht glücklich sind.
8. Wenn Herbert in die Stadt gefahren ist, so sitzt er sicherlich bereits in seinem Büro.
13. Thales von Milet, ein ionischer Naturphilosoph, sagte die Sonnenfinsternis vom 28. März 585 v. Chr. voraus.
21. Kleine Lügen und auch kleine
Kinder haben kurze Beine.
(Ringelnatz)[1]
23. Wer in Wasser badet, kann nass werden.
24. Der April macht, was er will.
28. Dieses Lied gefällt mir besonders gut.
29. ’s echt cool, eh?

1: Falls der Satz wörtlich interpretiert wird.

Aktivierungselement 8.2 (aus Übung 2.4)**.** Repräsentieren Sie die folgenden natürsprachlichen Aussagesatze in der prädikatenlogischen Sprache:

1. Heute regnet es in Salzburg.
3. Wenn es in Salzburg nicht regnet, dann hagelt's, stürmt's oder schneit's.
5. Das englische Wort ‚mind' kann nicht ins Deutsche übersetzt werden.
9. Der Österreicher ist eigentlich ein Freund fremder Kulturen, auch wenn er nicht zu viele Ausländer in seiner Heimat sehen möchte.
10. Sir Karl Popper und Theodor W. Adorno sind beide Philosophen, aber sie können einander nicht besonders gut leiden.
11. Zum Mittagessen gibt es Wiener Schnitzel mit Salat, Schweinsbraten mit Knödel oder Kasnocken.
12. Einige bedeutende Österreicher stammen aus Böhmen oder Mähren.
13. Nächstes Jahr kommt der Präsident der USA nach Österreich.
15. Tirol ist in einen nördlichen, einen südlichen und einen östlichen Teil aufgeteilt.
16. Jeder Junggeselle ist männlich und unverheiratet, ohne dabei gleich ein Priester zu sein.
17. Alle Studenten lernen Logik, obgleich nicht alle Studenten dies mit Begeisterung tun.
18. Wenn das mit der Politik so weiter geht, dann werden sich Situationen wiederholen, die wir uns alle nicht wünschen.

Aktivierungselement 8.3 (aus Übung 2.5)**.** Repräsentieren Sie die folgenden Argumente in der prädikatenlogischen Sprache:

1. Wenn Fips eine Katze ist, dann jagt Fips gerne Mause. Fips jagt aber nicht gerne Mause. Somit ist Fips keine Katze.
2. Wenn Fips eine Katze ist, dann trinkt Fips gerne Milch. Fips ist eine Katze. Folglich trinkt Fips gerne Milch.
3. Wenn Fips eine Katze ist, dann trinkt Fips gerne Milch. Fips trinkt gerne Milch. Folglich ist Fips eine Katze.
4. Fips ist eine Katze. Denn: Wenn Fips eine Katze ist, dann trinkt Fips gerne Milch. Fips trinkt gerne Milch.
5. Also ist Fips eine Katze oder er ist keine Katze.
6. Sokrates ist Philosoph und Grieche. Platon ist Philosoph und Grieche. Aristoteles ist Philosoph und Grieche. Daher sind alle Philosophen Griechen.

8.1.3 Lösungen

Im Folgenden bezeichnet ‚h_1' Herbert und ‚h_2' Heidi. Die Bedeutungen der anderen Buchstaben werden mit Bemerkungen erklärt oder im Kontext verstanden.

Lösung zu Aktivierungselement 8.1.

1. Herbert und Heidi sind befreundet.

Antwort 1: aussagenlogisch unzerlegbar, einfach

Zwischenformalisation: Befreundet(Herbert, Heidi)

Aussagenlogische Formalisation: p

Prädikatlogische Formalisation: $B(h_1, h_2)$

‚$B(x_1, x_2)$' bedeutet x_1 befreundet x_2.

Antwort 2: aus. zerlegbar, komplex

Zwisch. Freund(Herbert, Heidi) ∧ Freund(Heidi, Herbert)

Aus. Repr. $p \wedge q$

Präd. Repr. $F(h_1, h_2) \wedge F(h_2, h_1)$

‚$F(x_1, x_2)$' bedeutet x_1 ist Freund von x_2.

2. Herbert und Heidi sind beliebt.

Antwort: aus. zerlegbar, komplex

Zwisch. Beliebt(Herbert) ∧ Beliebt(Heidi)

Aus. Repr. $p \wedge q$

Präd. Repr. $B(h_1) \wedge B(h_2)$

‚$B(x)$' bedeutet x ist beliebt.

3. Herbert und Heidi sind beide nicht glücklich.

Antwort 1: aus. zerlegbar, komplex

Falls ‚beide' als ‚zusammen' verstanden wird.

Zwisch. ¬Glücklich(Herbert, Heidi)

Aus. Repr. $\neg p$

Präd. Repr. $\neg G(h_1, h_2)$

‚$G(x, y)$' bedeutet x und y sind glücklich zusammen.

Antwort 2: aus. zerlegbar, komplex

Falls ‚beide' nicht als ‚zusammen' verstanden wird.

Zwisch. ¬(Glücklich(Herbert) ∧ Glücklich(Heidi))

Aus. Repr. $\neg(p \wedge q)$

Präd. Repr. $\neg(G(h_1) \wedge G(h_2))$

‚$G(x)$' bedeutet x ist glücklich.

4. Herbert und Heidi lieben sich.

Antwort 1: aus. zerlegbar, komplex

Falls ‚sich' eine reflexive Bedeutung hat.

Zwisch. Liebt(Herbert, Herbert) ∧ Liebt(Heidi, Heidi)

Aus. Repr. $p \wedge q$

Präd. Repr. $L(h_1, h_1) \wedge L(h_2, h_2)$

‚$L(x, y)$' bedeutet x liebt y. Daher bedeutet $L(x, x)$: ‚x liebt sich selbst'.

Antwort 2: aus. zerlegbar, komplex

Falls ‚sich' eine nicht-reflexive Bedeutung hat: wie Satz 5.

5. Herbert und Heidi lieben einander.

Antwort: aus. zerlegbar, komplex

Falls wir das Prädikat ‚L' aus der letzten Übung verwenden wollen.

Zwisch. Liebt(Herbert, Heidi) ∧ Liebt(Heidi, Herbert)

Aus. Repr. $p \wedge q$

Präd. Repr. $L(h_1, h_2) \wedge L(h_2, h_1)$

Antwort: aus. unzerlegbar, einfach

Falls wir ein Prädikat für ‚einander lieben' einführen wollen.

Zwisch. Einander_Lieben(Herbert,Heidi)

Aus. Repr. p

Präd. Repr. $E(h_1, h_2)$

‚$E(x, y)$' bedeutet x und y lieben einander.

6. Es ist nicht der Fall, dass Herbert und Heidi beide nicht glücklich sind.

Antwort: aus. zerlegbar, komplex

Falls ‚beide' als ‚zusammen' verstanden wird.

Zwisch. ¬¬Glücklich(Herbert, Heidi)

Aus. Repr. $\neg\neg p$

Präd. Repr. $\neg\neg G(h_1, h_2)$

Antwort: aus. zerlegbar, komplex

Falls ‚beide' nicht als ‚zusammen' verstanden wird.

Zwisch. ¬¬(Glücklich(Herbert) ∧ Glücklich(Heidi))

Aus. Repr. $\neg\neg(p \wedge q)$

Präd. Repr. $\neg\neg(G(h_1) \wedge G(h_2))$

8. Wenn Herbert in die Stadt gefahren ist, so sitzt er sicherlich bereits in seinem Büro.

Antwort: aus. zerlegbar, komplex

Zwisch. Gefahren(Herbert, die Stadt) ⟶ Sitzt(Herbert, Büro)

Aus. Repr. $p \longrightarrow q$

Präd. Repr. $G(h_1, s) \longrightarrow S(h_1, b)$

‚$G(x, y)$' bedeutet x ist in y gefahren. ‚$S(x, y)$' bedeutet x sitzt in y.

13. Thales von Milet, ein ionischer Naturphilosoph, sagte die Sonnenfinsternis vom 28. März 585 v. Chr. voraus.

Antwort: aus. zerlegbar, komplex

Zwisch. Ionischer(Thales) ∧ Naturphilosoph(Thales) ∧ Voraussagte(Thales, die Sonnenfinsternis vom 28. März 585 v. Chr.)

Aus. Repr. $p \wedge q \wedge r$ – d.h., $(p \wedge q) \wedge r$ und $p \wedge (q \wedge r)$

Präd. Repr. $I(t) \wedge N(t) \wedge V(t, s)$

‚$I(x)$' bedeutet x ist ionischer. ‚$N(x)$' bedeutet x ist ein Naturphilosoph. ‚$V(x, y)$' bedeutet x sagte y voraus.

21. Kleine Lügen und auch kleine
Kinder haben kurze Beine.
(Ringelnatz)

Antwort 1: aus. zerlegbar, komplex

Zwisch. Für alle x (Klein_Kind(x) ⟶ Kleine_Beine(x)) ∧ Für alle x (Kleine_Lüge(x) ⟶ Kleine_Beine(x))

Aus. Repr. $p \wedge q$

Präd. Repr. $\forall x\,(J(x) \longrightarrow B(x)) \wedge \forall x\,(L(x) \longrightarrow B(x))$

Antwort 2: aus. zerlegbar, komplex

Zwisch. Für alle x (Klein_Kind(x) $\vee$ Kleine_Lüge(x) $\rightarrow$ Kleine_Beine(x))

Aus. Repr. $p \wedge q$

Präd. Repr. $\forall x\,(J(x) \vee L(x) \rightarrow B(x))$

‚$J(x)$ bedeutet x ist ein klein Kind.‘ ‚$B(x)$‘ bedeutet x hat kleine Beine. ‚$L(x)$ bedeutet x ist eine kleine Lüge.‘

Antwort 3: aus. unzerlegbar, komplex

Zwisch. Für alle x (Klein(x) $\wedge$ (Kind(x) $\vee$ Lüge(x)) $\rightarrow$ für alle y (Beine_von(y, x) $\rightarrow$ Klein(y)))

Aus. Repr. p

Präd. Repr. $\forall x\,(K(x) \wedge (J(x) \vee L(x)) \rightarrow \forall y\,(B(y,x) \rightarrow K(y)))$

‚$K(x)$‘ bedeutet x ist klein. ‚$J(x)$‘ bedeutet x ist ein Kind. ‚$L(x)$‘ bedeutet x ist eine Lüge. ‚$B(x,y)$‘ bedeutet x ist Bein von y.

23. Wer in Wasser badet, kann nass werden.

Antwort: aus. unzerlegbar, komplex

Zwisch. Für alle x (Badet(x, Wasser) $\rightarrow$ $\Diamond$Nass_Werden(x))

Aus. Repr. p

Präd. Repr. $\forall x\,(B(x,w) \rightarrow M(x))$

‚$B(x,y)$‘ bedeutet x badet in y. ‚$M(x)$‘ bedeutet x kann nass werden. ‚w‘ bezeichnet Wasser.

24. Der April macht, was er will.

Antwort: aus. unzerlegbar, komplex

Falls der Satz in dem Sinne interpretiert wird, dass sich das Klima im April unvorhersehbar verhält.

Zwisch. Für alle x (Klima_von(x, April) $\rightarrow$ Unvorhersehbar(x))

Aus. Repr. p

Präd. Repr. $\forall x\,(K(x,a) \rightarrow U(x))$

‚$K(x,y)$‘ bedeutet x ist das Klima von y. ‚$U(x)$‘ bedeutet x ist unvorhersehbar. ‚a‘ bezeichnet April.

28. Dieses Lied gefällt mir besonders gut.

Antwort: aus. unzerlegbar, einfach

Zwisch. Gefällt(mir, dieses Lied)

Aus. Repr. p

Präd. Repr. $G(m, l)$

‚$G(x,y)$‘ bedeutet x mag y. ‚m‘ bezeichnet den Sprecher. ‚m‘ bezeichnet ein Lied (auf das im Kontext Bezug genommen wird)

29. ’s echt cool, eh?

Antwort 1: aus. unzerlegbar, einfach

Zwisch. Echt_Cool(es)

Aus. Repr. p

Präd. Repr. $C(e)$

‚$C(x)$‘ bedeutet x ist cool. ‚e‘ bezeichnet das, worüber wir im Kontext sprechen.

Antwort 2: kein Aussagesatz

Falls es im Kontext nicht klar ist, was ‚es‘ ist.

Zwisch. Echt_Cool(es)

Aus. Repr. p

Präd. Repr. $C(x)$

Erklärung

Im natürlichen Sprachgebrauch entsprechen Sätze wie diese – vorausgesetzt, wir wissen nicht, worauf sich ‚es‘ im Kontext bezieht – am ehesten der Bedeutung einer offenen Formel.

Lösung zu Aktivierungselement 8.2.

1. Heute regnet es in Salzburg.

Antwort: aus. unzerlegbar, einfach

Zwisch. Regnet(Salzburg, heute)

Auss. Repr. p

Präd. Repr. $R(s, h)$

‚$R(x, y)$‘ bedeutet es regnet an Ort x zum Zeitpunkt y. ‚s‘ und ‚h‘ bezeichnen Salzburg bzw. heute.

3. Wenn es in Salzburg nicht regnet, dann hagelt’s, stürmt’s oder schneit’s.

Antwort: aus. unzerlegbar, komplex

Zwisch. Für alle y (¬Regnet(Salzburg, y) $\rightarrow$ Hagelt(Salzburg, y) $\vee$ Stürmt(Salzburg, y) $\vee$ Schneit(Salzburg, y))

Auss. Repr. p

Präd. Repr. $\forall y\, (\neg R(s, y) \rightarrow H(s, y) \vee S(s, y) \vee C(s, y))$

‚$H(x, y)$‘, ‚$S(x, y)$‘ und ‚$C(x, y)$‘ bedeuten, dass es am Ort x zur Zeit y hagelt bzw. stürmt bzw. schneit.

5. Das englische Wort ‚mind' kann nicht ins Deutsche übersetzt werden.

Antwort 1: aus. zerlegbar, komplex

Zwisch. ¬Übersetzbar_aus_ins(‚mind', Englisch, Deutsch)

Auss. Repr. $\neg p$

Präd. Repr. $\neg B(m, e, d)$

Antwort 2: aus. zerlegbar, komplex

Zwisch. ¬(Es gibt ein x Übersetzung_aus_von_ins(x, ‚mind', Englisch, Deutsch))

Auss. Repr. $\neg p$

Präd. Repr. $\neg \exists x\, U(x, m, e, d)$

‚$B(x, y, z)$' bedeutet x ist übersetzbar von y ins z. ‚$U(x_1, x_2, x_3, x_4)$' bedeutet, dass x_1 eine Übersetzung des Wortes x_2 aus dem x_3 ins x_4 ist. ‚m' bezeichnet das Wort ‚mind', während ‚e' und ‚d' die englische und die deutsche Sprache bezeichnen.

9. Der Österreicher ist eigentlich ein Freund fremder Kulturen, auch wenn er nicht zu viele Ausländer in seiner Heimat sehen möchte.

Antwort: aus. unzerlegbar, einfach

Zwisch. Für alle x (Österreicher(x) $\rightarrow$ für alle y (Kultur(y) $\wedge$ Fremd (y) $\rightarrow$ Freund_von(x, y)) $\wedge$ für die meisten y (Ausländer(y) $\wedge$ ¬Möchte_in(x, y, Heimat)))

Auss. Repr. p

Präd. Repr. $\forall x\, (O(x) \rightarrow \forall y\, (K(y) \wedge R(y) \rightarrow F(x, y)) \wedge \exists y\, (A(y) \wedge \neg M(x, y, h)))$

Bemerkung

Anstatt ‚$\exists y\, (A(y) \wedge \neg M(x, y, h))$' wäre es korrekter gewesen,

$$‚\mathbb{W} y\, (A(y) \wedge \neg M(x, y, h))‘$$

zu sagen, wobei ‚$\mathbb{W}$' ein Quantor ist, dessen Bedeutung ‚für die meisten y' lautet. In der Prädikatenlogik gibt es diesen Quantor jedoch nicht.

10. Sir Karl Popper und Theodor W. Adorno sind beide Philosophen, aber sie können einander nicht besonders gut leiden.

Antwort: aus. zerlegbar, komplex

Zwisch. Philosoph(Popper) ∧ Philosoph(Adorno) ∧¬Leiden_besonders_gut(Popper, Adorno)

Auss. Repr. $p \wedge q \wedge \neg r$ – d.h., $(p \wedge q \wedge)\neg r$ oder $p \wedge (q \wedge \neg r)$

Präd. Repr. $P(p) \wedge P(a) \wedge \neg L(p, a)$

11. Zum Mittagessen gibt es Wiener Schnitzel mit Salat, Schweinsbraten mit Knödel oder Kasnocken.

Antwort: aus. zerlegbar, komplex

Zwisch. Zum_Mittagessen(Wiener Schnitzel mit Salat) ∨ Zum_Mittagessen(Schweinsbraten mit Knödel) ∨ Zum_Mittagessen(Kasnocken)

Auss. Repr. $p \vee q \vee r$ – d.h., $(p \vee q) \vee r$ oder $p \vee (q \vee r)$

Präd. Repr. $M(w) \vee M(s) \vee M(k)$

12. Einige bedeutende Österreicher stammen aus Böhmen oder Mähren.

Antwort: aus. unzerlegbar, komplex

Zwisch. Es gibt zumindest ein x, sodass (Österreicher(x) ∧ Bedeutender(x) ∧ (Stammt_aus(x, Böhmen) ∨ Stammt_aus(x, Mähren)))

Auss. Repr. p

Präd. Repr. $\exists x\,(O(x) \wedge B(x) \wedge (S(x, b) \vee S(x, m)))$

13. Nächstes Jahr kommt der Präsident der USA nach Österreich.

Antwort: aus. unzerlegbar, einfach

Zwisch. Kommt_nach(Präsident der USA, Österreich, nächstes Jahr)

Auss. Repr. p

Präd. Repr. $K(p, o, n)$

15. Tirol ist in einen nördlichen, einen südlichen und einen östlichen Teil aufgeteilt.

Antwort: aus. unzerlegbar, einfach

Zwisch. Aufgeteilt_in(Tirol, nördlichen Teil, südlichen Teil, östlichen Teil)

Auss. Repr. p

Präd. Repr. $A(t, n, s, o)$

16. Jeder Junggeselle ist männlich und unverheiratet, ohne dabei gleich ein Priester zu sein.

Antwort: aus. unzerlegbar, komplex

Zwisch. Für alle x (Junggeselle(x) $\rightarrow$ Männlich(x) $\wedge\neg$Verheiratet(x) $\wedge$ $\neg$Priester(x))

Auss. Repr. p

Präd. Repr. $\forall x\ (J(x) \rightarrow M(x) \wedge \neg V(x) \wedge \neg P(x))$

17. Alle Studenten lernen Logik, obgleich nicht alle Studenten dies mit Begeisterung tun.

Antwort: aus. zerlegbar, komplex

Zwisch. Für alle x (Student(x) $\rightarrow$ Lernt(x, Logik)) $\wedge$ $\neg$(Für alle x (Student(x) $\rightarrow$ Lernt_mit(x, Logik, Begeisterung)))

Auss. Repr. $p \wedge \neg q$

Präd. Repr. $\forall x\ (S(x) \rightarrow L(x, l)) \wedge \neg\forall x\ (S(x) \rightarrow M(x, l, b))$

18. Wenn das mit der Politik so weiter geht, dann werden sich Situationen wiederholen, die wir uns alle nicht wünschen.

Antwort: aus. zerlegbar, komplex

Zwisch. Weiter_gehen(Politik) $\rightarrow$ Es gibt zumindest ein x, sodass (Situation(x) $\wedge$ Wiederholt(x) $\wedge$ $\neg$Für alle y Wünscht(y, x))

Auss. Repr. $p \rightarrow q$

Präd. Repr. $G(p) \rightarrow \exists x\,(S(x) \wedge W(x) \wedge \neg\forall y\, H(y, x))$

Lösung zu Aktivierungselement 8.3. Im Folgenden bedeutet ‚$K(x)$', dass x eine Katze ist, ‚$J(x, y)$', dass x gerne y jagt, und ‚$T(x, y)$', dass x gerne y trinkt. ‚m' bezeichnet Mäuse oder Milch, entsprechend ‚f' bezeichnet Fips und ‚m' bezeichnet Milch.

1. Wenn Fips eine Katze ist, dann jagt Fips gerne Mause. Fips jagt aber nicht gerne Mause. Somit ist Fips keine Katze.

Bem.: Dies entspricht der Regel des Modus Tollens.

Antwort: $K(f) \rightarrow J(f, m), \neg J(f, m) \therefore \neg K(f)$

2. Wenn Fips eine Katze ist, dann trinkt Fips gerne Milch. Fips ist eine Katze. Folglich trinkt Fips gerne Milch.

Bem.: Dies entspricht der Regel des Modus Ponens.

Antwort: $K(f) \rightarrow T(f, m), K(f) \therefore T(f, m)$

3. Wenn Fips eine Katze ist, dann trinkt Fips gerne Milch. Fips trinkt gerne Milch. Folglich ist Fips eine Katze.

Bem.: Dies ist die (ungültige) Argumentform des Modus Morons.

Antwort: $K(f) \rightarrow T(f, m), T(f, m) \therefore K(f)$

4. Fips ist eine Katze. Denn: Wenn Fips eine Katze ist, dann trinkt Fips gerne Milch. Fips trinkt gerne Milch.

Bem.: Die Konklusion des Arguments wird gleich zu Beginn genannt.

Antwort: Wie im Satz 3.

5. Also ist Fips eine Katze oder er ist keine Katze.

Bem.: Dies ist ein Argument ohne Prämissen.

Antwort: $\therefore K(f) \vee \neg K(f)$

6. Sokrates ist Philosoph und Grieche. Platon ist Philosoph und Grieche. Aristoteles ist Philosoph und Grieche. Daher sind alle Philosophen Griechen.

Bem.: Dies könnte ein induktiv gültiges Argument sein, wenn es viel mehr Prämissen in der Form von ‚$P(x) \wedge G(x)$' hätte.

Antwort: $P(s) \wedge G(s), P(p) \wedge G(p), P(a) \wedge G(a)$
$\therefore \forall x\, (P(x) \rightarrow G(x))$

8.2 Übungen

Übung 8.1.1. Erklären Sie, was eine atomare Formel der prädikatenlogischen Sprache ist!

Übung 8.1.2. Repräsentieren Sie die folgenden natürsprachlichen Aussagesatze in der prädikatenlogischen Sprache:

1. Anatol ist Gerber.
2. Anatol liebt Barbara.
3. Anatol geht mit Barbara von Drösselkirchen nach Cronberg.
4. Anatol und Barbara gehen von Cronberg nach Drösselkirchen.
5. Anatol arbeitet mit Barbara in Cronberg.

Übung 8.2.1. Welche Quantoren gibt es in der prädikatenlogischen Sprache, und was bedeuten sie?

Übung 8.2.2. Wie werden im allgemeinen Existenzsatze, welche mehr als einen generellen Term enthalten, repräsentiert?

Übung 8.2.3. Wie werden im allgemeinen Allsätze, welche mehr als einen generellen Term enthalten, repräsentiert?

Übung 8.2.4. Repräsentieren Sie die folgenden natürsprachlichen Aussagesatze in der prädikatenlogischen Sprache:

1. Es gibt keinen Gerber in Cronberg.
2. Alle Bürger in Drösselkirchen sind unzufrieden.
3. Alle Bürger in Drösselkirchen jubeln, aber manche Bürger in Cronberg sind verärgert.
4. Alle Österreicher sind keine Philosophen.
5. Alle Österreicher sind nicht keine Philosophen.
6. Nicht alle Österreicher sind keine Philosophen.
7. Es gibt Österreicher, die Philosophen sind.
8. Es gibt Österreicher, die keine Philosophen sind.
9. Es ist nicht der Fall, da es Österreicher gibt, die Philosophen sind.
10. Es ist keineswegs so, da manche Österreicher keine Philosophen sind.

11. Alle Salzbürger sind Österreicher und Europäer.
12. So mancher Oberösterreicher lebt in Salzburg.
13. Jeder Mensch hat eine Mutter und einen Vater, aber nicht jeder Mensch hat Kinder.
14. Es gibt ein Wesen, welches alle Dinge erschaffen hat.
15. Manche Menschen besitzen ein Auto.
16. Alle Deutschen beneiden sämtliche Bundestagsabgeordnete.

8.2.1 Lösungen

Lösung zu Übung 8.1.1. Erklären Sie, was eine atomare Formel der prädikatenlogischen Sprache ist!

Antwort: Siehe S. 198.

Lösung zu Übung 8.1.2. Repräsentieren Sie die folgenden natürsprachlichen Aussagesatze in der prädikatenlogischen Sprache:

1. Anatol ist Gerber.

Antwort: $G^1(a)$

‚$G^1(x)$' bedeutet x ist Gerber.

2. Anatol liebt Barbara.

Antwort: $L^2(a, b)$

‚$L^2(x, y)$' bedeutet x liebt y.

3. Anatol geht mit Barbara von Drösselkirchen nach Cronberg.

Antwort: $G^4(a, b, d, c)$

‚$G^4(x_1, x_2, x_3, x_4)$' bedeutet x_1 geht mit x_2 von x_3 nach x_4.

4. Anatol und Barbara gehen von Cronberg nach Drösselkirchen.

Antwort 1

Falls ‚x und y gehen' als ‚x und y zusammengehen' verstanden wird: wie im 3. Falls nicht, siehe Antwort 2.

Antwort 2: $G^3(a, d, c) \land G^3(b, d, c)$

‚$G^3(x, y, z)$' bedeutet x geht von y nach z.

5. Anatol arbeitet mit Barbara in Cronberg.

Antwort: $A^3(a, b, c)$

‚$A^3(x, y, z)$' bedeutet x arbeitet mit y in z.

Bemerkung

Man kann die Superindizes auch weglassen.

Lösung zu Übung 8.2.1. Welche Quantoren gibt es in der prädikatenlogischen Sprache, und was bedeuten sie?

Antwort: Existenz- und Allquantoren, d.h., $\exists$ und $\forall$.

Lösung zu Übung 8.2.2. Wie werden im allgemeinen Existenzsatze, welche mehr als einen generellen Term enthalten, repräsentiert?

Antwort: Siehe SS. 201–2.

Lösung zu Übung 8.2.3. Wie werden im allgemeinen Allsätze, welche mehr als einen generellen Term enthalten, repräsentiert?

Antwort: Siehe SS. 204–6.

Lösung zu Übung 8.2.4. Repräsentieren Sie die folgenden natürsprachlichen Aussagesatze in der prädikatenlogischen Sprache:

1. Es gibt keinen Gerber in Cronberg.

Antwort: $\neg\exists x\,(G(x) \wedge C(x))$

Negierter I-Satz mit $S := G$ und $P := C$. Logisch äquivalent zu einem E-Satz – auch mit $S := G$ und $P := C$.

2. Alle Bürger in Drösselkirchen sind unzufrieden.

‚$B(x, y)$' bedeutet x ist Bürger in y.
‚$Z(x)$' bedeutet x ist zufrieden.

Antwort: $\forall x\,(B(x, d) \rightarrow \neg Z(x))$

E-Satz mit $S(x) := B(x, d)$ und $P := Z$.

3. Alle Bürger in Drösselkirchen jubeln, aber manche Bürger in Cronberg sind verärgert.

Antwort: $\forall x\,(B(x,d) \rightarrow J(x)) \wedge \exists x\,(B(x,c) \wedge V(x))$

Konjunktion eines A-Satz – mit $S(x) := B(x,d)$ und $P := J$ – und eines I-Satz – mit $S(x) := B(x,c)$ und $P := V$.

4. Alle Österreicher sind keine Philosophen.

Antwort: $\forall x\,(O(x) \rightarrow \neg P(x))$

E-Satz mit $S := O$ (und $P := P$).

5. Alle Österreicher sind nicht keine Philosophen.

Antwort: $\forall x\,(O(x) \rightarrow \neg\neg P(x))$

Wie ein E-Satz, aber mit $S := O$ und $P := \neg P$. Logisch äquivalent zu einem A-Satz mit $S := O$ und $P := P$.

6. Nicht alle Österreicher sind keine Philosophen.

Antwort: $\neg\forall x\,(O(x) \rightarrow \neg P(x))$

Negierter E-Satz mit $S := O$. Logisch äquivalent zu einem I-Satz.

7. Es gibt Österreicher, die Philosophen sind.

Antwort: $\exists x\,(O(x) \wedge P(x))$

I-Satz mit $S := O$.

8. Es gibt Österreicher, die keine Philosophen sind.

Antwort: $\exists x\,(O(x) \wedge \neg P(x))$

O-Satz mit $S := O$.

9. Es ist nicht der Fall, da es Österreicher gibt, die Philosophen sind.

Antwort: $\neg\exists x\,(O(x) \wedge P(x))$

Negierter I-Satz mit $S := O$. Logisch äquivalent zu einem E-Satz.

10. Es ist keineswegs so, da manche Österreicher keine Philosophen sind.

Antwort: $\neg\exists x\,(O(x) \wedge \neg P(x))$

Negierter O-Satz mit $S := O$. Logisch äquivalent zu einem A-Satz.

11. Alle Salzbürger sind Österreicher und Europäer.

Antwort: $\forall x\,(S(x) \longrightarrow O(x) \wedge E(x))$

A-Satz mit $P(x) := O(x) \wedge E(x)$.

12. So mancher Oberösterreicher lebt in Salzburg.

Antwort: $\exists x\,(O(x) \wedge L(x,s))$

I-Satz mit $S := O$ und $P(x) := L(x,s)$

13. Jeder Mensch hat eine Mutter und einen Vater, aber nicht jeder Mensch hat Kinder.

‚$S(x)$' bedeutet x ist ein Mensch.
‚$M(x,y)$' bedeutet x ist Mutter von y.
‚$V(x,y)$' bedeutet x ist Vater von y.
‚$K(x,y)$' bedeutet x ist Kinder von y.

Antwort: $\forall x\,(S(x) \longrightarrow \exists y\,\exists z\,(M(y,x) \wedge V(z,x)))$
$\wedge \neg\forall x\,(S(x) \longrightarrow \exists y\,K(y,x))$

Konjunktion eines A-Satzes – mit $P(x) := \exists y\,\exists z\,(M(y,x) \wedge V(z,x))$ – und eines quantifizierten Satzes – der nicht als A-, E-, I- oder O-Satz klassifiziert werden kann.

14. Es gibt ein Wesen, welches alle Dinge erschaffen hat.

Antwort 1: $\exists x\,(W(x) \land \forall y\,(D(y) \to E(x,y)))$

I-Satz mit $S := W$ und $P := \forall y\,(D(y) \to E(x,y))$.

Beachten Sie, dass P hier die Form eines A-Satzes hat – mit $S := D$ und $P(y) := E(x,y)$. Dies ist folglich ein A-Satz innerhalb eines I-Satzes.

‚$W(x)$' bedeutet x ist ein Wessen.
‚$D(x)$' bedeutet x ist ein Ding.
‚$E(x,y)$' bedeutet x hat y erschaffen.

Antwort 2: $\exists x\,\forall y\,E(x,y)$

‚D' und ‚W' bezeichnen Eigenschaften, die vermutlich alle Gegenstände haben.

15. Manche Menschen besitzen ein Auto.

‚$M(x)$' bedeutet x ist ein Mensch.
‚$A(x)$' bedeutet x ist ein Auto.
‚$B(x,y)$' bedeutet x besitzt y.

Antwort: $\exists x\,(M(x) \land \exists y\,(A(y) \land B(x,y)))$

I-Satz mit $S := M$ und $P := \exists y\,(A(y) \land B(x,y))$.

Beachten Sie, dass P hier die Form eines I-Satzes hat – mit $S := A$ und $P(y) := B(x,y)$. Dies ist folglich ein I-Satz innerhalb eines I-Satzes.

16. Alle Deutschen beneiden sämtliche Bundestagsabgeordnete.

‚$D(x)$' bedeutet x ist Deutsch.
‚$B(x)$' bedeutet x ist ein Bundestags-abgeordnete.
‚$E(x,y)$' bedeutet x beneidet y.

Antwort: $\forall x\,(D(x) \to \forall y\,(B(y) \to E(x,y)))$

A-Satz mit $S := D$ und $P := \forall y\,(B(y) \to E(x,y))$.

Beachten Sie, dass P hier die Form eines A-Satzes hat – mit $S := B$ und $P(y) := E(x,y)$. Dies ist folglich ein A-Satz innerhalb eines A-Satzes.