Erweiterungen der Prädikatenlogik 13

13.1 Vorbereitung

13.1.1 Äquivalenz- und Totalordnungsrelationen

Relationen können verschiedene Eigenschaften haben, von denen die folgenden besonders bemerkenswert sind:

Reflexivität: Für alle $t : R(t, t)$.

Symmetrie: Für alle $t_1, t_2 : R(t_1, t_2) \rightarrow R(t_2, t_1)$.

Transitivität: Für alle $t_1, t_2, t_3 : R(t_1, t_2) \wedge R(t_2, t_3) \rightarrow R(t_1, t_3)$.

Totalität: Für alle $t_1, t_2 : R(t_1, t_2) \vee R(t_2, t_1)$.

Es gibt zwei wichtige Arten von Relationen, die mehrere dieser Eigenschaften erfüllen:

Definition: Äquivalenzrelation

Eine Relation R ist eine *Äquivalenzrelation* gdw sie reflexiv, symmetrisch und transitiv ist.

Definition: Totalordnungsrelation

Eine Relation R ist eine *Totalordnungsrelation* gdw sie reflexiv, transitiv un total ist. D.h., die Inferenzregeln

Die folgenden Inferenzregeln sind für Relationen R angemessen, die reflexiv bzw. symmetrisch bzw. transitiv bzw. total sind.

Inferenzregeln für Reflexivität, Symmetrie, Transitivität und Totalität

$$\vdash \forall v\, R(v, v) \qquad (R\text{-REF1})$$

$$\vdash R(t, t) \qquad (R\text{-REF2})$$

$$\vdash \forall v_1 \forall v_2\, (R(v_1, v_2) \rightarrow R(v_2, v_1)) \qquad (R\text{-SYM1})$$

$$R(t_1, t_2) \vdash R(t_2, t_1) \qquad (R\text{-SYM2})$$

$$\vdash \forall v_1 \forall v_2 \forall v_3\, (R(v_1, v_2) \wedge R(v_2, v_3) \rightarrow R(v_1, v_3)) \qquad (R\text{-TRA1})$$

$$R(t_1, t_2), R(t_2, t_3) \vdash R(t_1, t_3) \qquad (R\text{-TRA2})$$

$$\vdash \forall v_1 \forall v_2\, (R(v_1, v_2) \vee R(v_2, v_1)) \qquad (R\text{-TOT1})$$

$$\neg R(t_1, t_2) \vdash R(t_2, t_1) \qquad (R\text{-TOT2})$$

Wie im Skript gesagt wurde, ist die Identitätsrelation eine Äquivalenzrelation.

Aktivierungselement 13.1. Formulieren Sie die Inferenzregeln, die der Relation der Identität (=) als Äquivalenzrelation entsprechen.

13.1.2 Präferenz und Indifferenz

Die Relationen der (schwacher) Präferenz ($\succcurlyeq$), strikten Präferenz ($\succ$) und Indifferenz ($\approx$) besitzen einige dieser Eigenschaften. Nun fügen wir sie zu unserer Sprache hinzu:

Formationsregel: Wenn t_1, t_2 singuläre Terme sind, dann sind $t_1 \succcurlyeq t_2$, $t_1 \succ t_2$ und $t_1 \approx t_2$ Formeln.

Die Relation $\succcurlyeq$ ist eine Totalordnungsrelation.

Aktivierungselement 13.2. Formulieren Sie die Inferenzregeln, die der Relation der (schwachen) Präferenz ($\succcurlyeq$) als Totalordnungsrelation entsprechen.

Die Relationen der strikten Präferenz ($\succ$) und der Indifferenz ($\approx$) können wie folgt aus der Relation der (schwachen) Präferenz definiert werden:

Definition: Strikte Präferenz ($\succ$) und Indifferenz ($\approx$)

$$t_1 \succ t_2 \overset{\text{def}}{=} (t_1 \succcurlyeq t_2 \land \neg t_2 \succcurlyeq t_1)$$
$$t_1 \approx t_2 \overset{\text{def}}{=} (t_1 \succcurlyeq t_2 \land t_2 \succcurlyeq t_1)$$

Falls zwei Ausdrücke definitionsäquivalent sind, können wir sie beliebig gegeneinander austauschen. Siehe hierzu exemplarisch die Herleitung der Reflexivität von $\approx$.

1.	$x \succcurlyeq x$	($\succcurlyeq$-REF1)
2.	$x \succcurlyeq x \land x \succcurlyeq x$	1., 1. (KON)
3.	$x \approx x$	2. (Def. $\approx$)
4.	$\forall x\, x \approx x$	3. (UE)[1]

1: UE ist hier zulässig, da x in keiner Prämisse frei vorkommt – x im 1. Schritt würde ohne Prämisse hergeleitet.

Die Indifferenzrelation ist nicht nur reflexiv, sondern besitzt darüber hinaus alle Eigenschaften, die sie zur Äquivalenzrelation qualifizieren.

Aktivierungselement 13.3. Beweisen Sie durch Herleitungen, dass die Relation $\approx$ eine Äquivalenzrelation ist.

13.1.3 Äquivalenz von Inferenzregelpaare

Jede der oben genannten Inferenzregeln besitzt zwei äquivalente Versionen (z.B. REF1 und REF2). Zur Veranschaulichung zeigen wir dies exemplarisch anhand eines Beweises für R-SYM.

Beweis. Zum Beweis führen wir zwei Herleitungen: zunächst leiten wir R-SYM2 aus R-SYM1 her und dann R-SYM1 aus R-SYM2.

($\Rightarrow$) Nehmen wir R-SYM1 an und führen eine Herleitung mit $R(x,y)$ als Prämisse durch. Dann haben wir:

1.	$\underline{R(x,y)}$	(P1)
2.	$\forall x \forall y\,(R(x,y) \to R(y,x))$	(R-SYM1)
3.	$\forall y\,(R(x,y) \to R(y,x))$	2. (UB)
4.	$R(x,y) \to R(y,x)$	3. (UB)
5.	$R(y,x)$	1., 4. (MP)

($\Leftarrow$) Nehmen wir nun R-SYM2 an. Dann haben wir:

1.	$\|\|\ R(x,y)$	(KBA)
2.	$\|\|\ R(y,x)$	1. (R-SYM2)
3.	$R(x,y) \to R(y,x)$	1.–2. (KB)
4.	$\forall y\,(R(x,y) \to R(y,x))$	3. (UE)
5.	$\forall x \forall y\,(R(x,y) \to R(y,x))$	4. (UE)

Beide Herleitungen zeigen, dass man die eine Inferenzregel aus der anderen gewinnen kann – und umgekehrt. □

Aktivierungselement 13.4. Zeigen Sie, dass die Inferenzregelpaare R-REF1 / R-REF2, R-TRA1 / R-TRA2 und R-TOT1 / R-TOT2.

13.1.4 Andere Eigenschaften von Relationen

Neben den bisher behandelten gibt es weitere wichtige Eigenschaften von einer Relation R mit jeweils zugehörigen Inferenzregeln, wie im Folgenden dargestellt:

Reflexivität: Für alle $t : R(t, t)$.

Symmetrie: Für alle $t_1, t_2 : R(t_1, t_2) \rightarrow R(t_2, t_1)$.

Transitivität: Für alle $t_1, t_2, t_3 : R(t_1, t_2) \wedge R(t_2, t_3) \rightarrow R(t_1, t_3)$.

Totalität: Für alle $t_1, t_2 : R(t_1, t_2) \vee R(t_2, t_1)$.

Irreflexivität: Für alle $t : \neg R(t, t)$.

Asymmetrie: Für alle $t_1, t_2 : R(t_1, t_2) \rightarrow \neg R(t_2, t_1)$.

Antisymmetrie: Für alle $t_1, t_2 : R(t_1, t_2) \wedge R(t_2, t_1) \rightarrow t_1 = t_2$.

Negative Transitivität: Für alle t_1, t_2, t_3 :
$$\neg R(t_1, t_2) \wedge \neg R(t_2, t_3) \rightarrow \neg R(t_1, t_3).$$

Trichotomie: Für alle $t_1, t_2 : R(t_1, t_2) \vee t_1 = t_2 \vee R(t_2, t_1)$.

Inferenzregeln für Reflexivität, Symmetrie, Transitivität und Totalität

	$\vdash \forall v\, R(v, v)$	(R-REF1)
	$\vdash R(t, t)$	(R-REF2)
	$\vdash \forall v_1 \forall v_2\, (R(v_1, v_2) \rightarrow R(v_2, v_1))$	(R-SYM1)
$R(t_1, t_2)$	$\vdash R(t_2, t_1)$	(R-SYM2)
	$\vdash \forall v_1 \forall v_2 \forall v_3\, (R(v_1, v_2) \wedge R(v_2, v_3) \rightarrow R(v_1, v_3))$	(R-TRA1)
$R(t_1, t_2), R(t_2, t_3)$	$\vdash R(t_1, t_3)$	(R-TRA2)
	$\vdash \forall v_1 \forall v_2\, (R(v_1, v_2) \vee R(v_2, v_1))$	(R-TOT1)
$\neg R(t_1, t_2)$	$\vdash R(t_2, t_1)$	(R-TOT2)

13.1.5 Lösungen

Lösung zu Aktivierungselement 13.1 Formulieren Sie die Inferenzregeln, die der Relation der Identität (=) als Äquivalenzrelation entsprechen.

Antwort

Die folgende sind Inferenzregeln, die = entsprechen:

$$\vdash \forall v\, v = v \qquad \text{(=-REF1)}$$
$$\vdash t = t \qquad \text{(=-REF2)}$$
$$\vdash \forall v_1 \forall v_2\, (v_1 = v_2) \longrightarrow v_2 = v_1 \qquad \text{(=-SYM1)}$$
$$t_1 = t_2 \vdash t_2 = t_1 \qquad \text{(=-SYM2)}$$
$$\vdash \forall v_1 \forall v_2 \forall v_3\, (v_1 = v_2 \wedge v_2 = v_3 \longrightarrow v_1 = v_3) \qquad \text{(=-TRA1)}$$
$$t_1 = t_2, t_2 = t_3 \vdash t_1 = t_3 \qquad \text{(=-TRA2)}$$

Zusätzlich haben wir die folgende Substitutionsregeln:

$$\vdash \forall v_1 \forall v_2\, (v_1 = v_2 \wedge A[v_1/v_3] \longrightarrow A[v_2/v_3]) \qquad \text{(=-SUB1)}$$
$$t_1 = t_2, A[t_1/t_3] \vdash A[t_2/t_3] \qquad \text{(=-SUB2)}$$

Lösung zu Aktivierungselement 13.2. Formulieren Sie die Inferenzregeln, die der Relation der (schwachen) Präferenz ($\succcurlyeq$) als Totalordnungsrelation entsprechen.

Antwort

Die folgende sind Inferenzregeln, die $\succcurlyeq$ entsprechen:

$$\vdash \forall v\, v \succcurlyeq v \qquad (\succcurlyeq\text{-REF1})$$
$$\vdash t \succcurlyeq t \qquad (\succcurlyeq\text{-REF2})$$
$$\vdash \forall v_1 \forall v_2 \forall v_3\, (v_1 \succcurlyeq v_2 \wedge v_2 \succcurlyeq v_3 \longrightarrow v_1 \succcurlyeq v_3) \qquad (\succcurlyeq\text{-TRA1})$$
$$t_1 \succcurlyeq t_2, t_2 \succcurlyeq t_3 \vdash t_1 \succcurlyeq t_3 \qquad (\succcurlyeq\text{-TRA2})$$
$$\vdash \forall v_1 \forall v_2\, (v_1 \succcurlyeq v_2 \vee v_2 \succcurlyeq v_1) \qquad (\succcurlyeq\text{-TOT1})$$
$$\neg t_1 \succcurlyeq t_2 \vdash t_2 \succcurlyeq t_1 \qquad (\succcurlyeq\text{-TOT2})$$

Lösung zu Aktivierungselement 13.3. Beweisen Sie durch Herleitungen, dass die Relation $\approx$ eine Äquivalenzrelation ist.

Beweis. Um zu beweisen, dass $\approx$ eine Äquivalenzrelation ist, müssen wir zeigen, dass sie reflexiv, symmetrisch und transitiv ist. Dies werden wir durch die folgenden Herleitungen tun.

Herleitung der Reflexivität: Siehe Seite 248.

Herleitung der Symmetrie

1.	$\|\| \; x \approx y$	(KB Annahme)
2.	$\|\| \; x \succcurlyeq y \wedge y \succcurlyeq x$	1. (Def. $\approx$)
3.	$\|\| \; x \succcurlyeq y$	2. (SIMP1)
4.	$\|\| \; y \succcurlyeq x$	2. (SIMP2)
5.	$\|\| \; y \succcurlyeq x \wedge x \succcurlyeq y$	3., 4. (KON)
6.	$\|\| \; y \approx x$	5. (Def. $\approx$)
7.	$x \approx y \rightarrow y \approx x$	1.–5. (KB)
8.	$\forall y\,(x \approx y \rightarrow y \approx x)$	7. (UE)
9.	$\forall x \forall y\,(x \approx y \rightarrow y \approx x)$	8.(UE)

Herleitung der Transitivität

1.	$\|\| \; x \approx y \wedge y \approx z$	(KBA)
2.	$\|\| \; x \approx y$	(SIMP1)
3.	$\|\| \; y \approx z$	(SIMP2)
4.	$\|\| \; x \succcurlyeq y \wedge y \succcurlyeq x$	2. (Def. $\approx$)
5.	$\|\| \; y \succcurlyeq z \wedge z \succcurlyeq y$	3. (Def. $\approx$)
6.	$\|\| \; x \succcurlyeq y$	4. (SIMP1)
7.	$\|\| \; y \succcurlyeq z$	5. (SIMP2)
8.	$\|\| \; x \succcurlyeq z$	6., 7. ($\succcurlyeq$-TRA2)
9.	$x \succcurlyeq y \wedge y \succcurlyeq z \rightarrow x \succcurlyeq z$	1.–8. (KB)
10.	$\forall y\,(x \succcurlyeq y \wedge y \succcurlyeq z \rightarrow x \succcurlyeq z)$	9. (UE)
11.	$\forall x \forall y\,(x \succcurlyeq y \wedge y \succcurlyeq z \rightarrow x \succcurlyeq z)$	10. (UE)

Da $\approx$ alle drei Eigenschaften erfüllt, können wir schließen, dass es sich um eine Äquivalenzrelation handelt. $\square$

Lösung zu Aktivierungselement 13.4. Zeigen Sie, dass die Inferenzregelpaare R-REF1 / R-REF2, R-TRA1 / R-TRA2 und R-TOT1 / R-TOT2.

Antwort 1 (REF)

Satz. Die Inferenzregeln R-REF1 und R-REF2 sind äquivalent.

Beweis. Zum Beweis führen wir zwei Herleitungen: zunächst leiten wir R-REF2 aus R-REF1 her und dann R-REF1 aus R-REF2.

($\Rightarrow$) Nehmen wir R-REF1 an. Dann haben wir:

1. $\forall x\, R(x, x)$ (R-REF1)
2. $R(x, x)$ 1. (UB)

($\Leftarrow$) Nehmen wir nun R-REF2 an. Dann haben wir:

1. $R(x, x)$ (R-REF2)
2. $\forall x\, R(x, x)$ 1. (UB)[2]

Beide Herleitungen zeigen, dass man die eine Inferenzregel aus der anderen gewinnen kann – und umgekehrt. □

2: Zulässiger Schritt, da $R(x, x)$ ohne Prämissen hergeleitet wurde – somit ist x in keiner Annahme frei.

Antwort 2 (TRA)

Satz. Die Inferenzregeln R-TRA1 und R-TRA2 sind äquivalent.

Beweis. Zum Beweis führen wir zwei Herleitungen: zunächst leiten wir R-TRA2 aus R-TRA1 her und dann R-TRA1 aus R-TRA2.

($\Rightarrow$) Nehmen wir R-TRA1 an und führen eine Herleitung mit $R(x,y)$ und $R(y,z)$ als Prämissen durch. Dann haben wir:

1.	$R(x,y)$	(P1)
2.	$\underline{R(y,z)}$	(P2)
3.	$R(x,y) \wedge R(y,x)$	1., 2. (KON)
4.	$\forall x \forall y \forall z\,(R(x,y) \wedge R(y,z) \rightarrow R(x,z))$	3. (R-TRA1)
5.	$\forall y \forall z\,(R(x,y) \wedge R(y,z) \rightarrow R(x,z))$	4. (UB)
6.	$\forall z\,(R(x,y) \wedge R(y,z) \rightarrow R(x,z))$	5. (UB)
7.	$R(x,y) \wedge R(y,z) \rightarrow R(x,z)$	6. (UB)
8.	$R(x,z)$	3., 7. (MP)

($\Leftarrow$) Nehmen wir nun R-TRA2 an. Dann haben wir:

1.	$\|\ R(x,y) \wedge R(y,z)$	(KBA)
2.	$\|\ R(x,y)$	1. (SIMP1)
3.	$\|\ R(y,z)$	1. (SIMP2)
4.	$\|\ R(x,z)$	2., 3. (R-TRA)
5.	$R(x,y) \wedge R(y,z) \rightarrow R(x,z)$	1., 4. (KB)
6.	$\forall z\,(R(x,y) \wedge R(y,z) \rightarrow R(x,z))$	5. (UE)
7.	$\forall y \forall z\,(R(x,y) \wedge R(y,z) \rightarrow R(x,z))$	6. (UE)
8.	$\forall x \forall y \forall z\,(R(x,y) \wedge R(y,z) \rightarrow R(x,z))$	7. (UE)

Beide Herleitungen zeigen, dass man die eine Inferenzregel aus der anderen gewinnen kann – und umgekehrt. □

Antwort 3 (TOT)

Satz. Die Inferenzregeln R-TOT1 und R-TOT2 sind äquivalent.

Beweis. Zum Beweis führen wir zwei Herleitungen: zunächst leiten wir R-TOT2 aus R-TOT1 her und dann R-TOT1 aus R-TOT2.

($\Rightarrow$) Nehmen wir R-TOT1 an und führen eine Herleitung mit $\neg R(x, y)$ als Prämisse durch. Dann haben wir:

1.	$\neg R(x, y)$	(P1)
2.	$\forall x \forall y\, (R(x, y) \vee R(y, x))$	(R-TOT1)
3.	$\forall y\, (R(x, y) \vee R(y, x))$	2. (UB)
4.	$R(x, y) \vee R(y, x)$	3. (UB)
5.	$R(y, x)$	1., 4. (DS1)

($\Leftarrow$) Nehmen wir nun R-TOT2 an. Dann haben wir:

1.	$\|\| \; R(x, y)$	(FU-Annahme 1)
2.	$\|\| \; R(x, y) \vee R(y, x)$	(ADD1)
3.	$\|\| \; \neg R(x, y)$	(FU-Annahme 2)
4.	$\|\| \; R(y, x)$	3. (R-TOT2)
5.	$\|\| \; R(x, y) \vee R(y, x)$	4. (ADD2)
6.	$R(x, y) \vee R(y, x)$	1.–5. (FU)
7.	$\forall y\, (R(x, y) \vee R(y, x))$	6. (UE)
8.	$\forall x \forall y\, (R(x, y) \vee R(y, x))$	7. (UE)

Beide Herleitungen zeigen, dass man die eine Inferenzregel aus der anderen gewinnen kann – und umgekehrt. □

13.2 Zusatzübungen

Zusatzübung 13.1. Sei die Relation A symmetrisch und transitiv, und sei die Relation E definiert durch:

$$E(t_1, t_2) \stackrel{\text{def}}{=} \exists v\,((A(t_1, v) \lor t_1 = v) \land (A(t_2, v) \lor t_2 = v)).$$

Beweisen Sie durch Herleitungen, dass die Relation E eine Äquivalenzrelation ist.

Zusatzübung 13.2. Sei die Relation A symmetrisch und nicht transitiv, und sei die Relation E definiert durch:

$$E(t_1, t_2) \stackrel{\text{def}}{=} \exists v\,((A(t_1, v) \lor t_1 = v) \land (A(t_2, v) \lor t_2 = v)).$$

Zeigen Sie mit einer Interpretation, dass die Relation E nicht transitiv ist.[3]

3: **Hinweis:** Geben Sie eine Interpretation an, in der ein Argument der Form $E(a, b), E(b, c) \therefore E(a, c)$ nicht gültig ist.

13.2.1 Lösungen

Lösung zu Zusatzübung 13.1. Sei die Relation A symmetrisch und transitiv, und sei die Relation E definiert durch:

$$E(t_1, t_2) \stackrel{\text{def}}{=} \exists v\,((A(t_1, v) \lor t_1 = v) \land (A(t_2, v) \lor t_2 = v)).$$

Beweisen Sie durch Herleitungen, dass die Relation E eine Äquivalenzrelation ist.

Beweis. Um zu beweisen, dass E eine Äquivalenzrelation ist, müssen wir zeigen, dass sie drei Eigenschaften erfüllt: Reflexivität, Symmetrie und Transitivität. Dies werden wir durch die folgenden Herleitungen tun.

Herleitung der Reflexivität

1.	$x = x$	(=-REF2)
2.	$A(x, x) \lor x = x$	1. (ADD2)
3.	$(A(x, x) \lor x = x) \land (A(x, x) \lor x = x)$	2., 2. (EE)
4.	$\exists z\,((A(x, z) \lor x = z) \land (A(x, z) \lor x = z))$	3. (EE)
5.	$E(x, x)$	4. (Def. E)
6.	$\forall x\, E(x, x)$	5. (UE)

Herleitung der Symmetrie

1.	$\| \quad E(x, y)$	(KB-Annahme)
2.	$\| \quad \exists z\,((A(x, z) \lor x = z) \land (A(y, z) \lor y = z))$	1. (Def. E)
3.	$\| \ \| \quad (A(x, z) \lor x = z) \land (A(y, z) \lor y = z)$	(EB-Annahme)
4.	$\| \ \| \quad (A(x, z) \lor x = z)$	3. (SIMP1)
5.	$\| \ \| \quad (A(y, z) \lor y = z)$	3. (SIMP2)
6.	$\| \ \| \quad (A(y, z) \lor y = z) \land (A(x, z) \lor x = z)$	4., 5. (KON)
7.	$\| \ \| \quad \exists z\,((A(y, z) \lor y = z) \land (A(x, z) \lor x = z))$	6. (EE)
8.	$\| \quad \exists z\,((A(y, z) \lor y = z) \land (A(x, z) \lor x = z))$	3.–7. (EB)
9.	$\| \quad E(y, x)$	8. (Def. E)
10.	$E(x, y) \rightarrow E(y, x)$	1.–9. (KB)
11.	$\forall y\,(E(x, y) \rightarrow E(y, x))$	10. (UE)
12.	$\forall x \forall y\,(E(x, y) \rightarrow E(y, x))$	11.(UE)

Herleitung der Transitivität

1.	$\parallel\ E(x_1,x_2) \wedge E(x_2,x_3)$	(KB-Annahme)
2.	$\parallel\ E(x_1,x_2)$	1. (SIMP1)
3.	$\parallel\ E(x_2,x_3)$	1. (SIMP2)
4.	$\parallel\ \exists x\,((A(x_1,x) \vee x_1 = x) \wedge (A(x_2,x) \vee x_2 = x))$	2. (Def. E)
5.	$\parallel\ \parallel\ (A(x_1,x_4) \vee x_1 = x_4) \wedge (A(x_2,x_4) \vee x_2 = x_4)$	(EB-Annahme)
6.	$\parallel\ \parallel\ A(x_1,x_4) \vee x_1 = x_4$	5. (SIMP1)
7.	$\parallel\ \parallel\ A(x_2,x_4) \vee x_2 = x_4$	5. (SIMP2)
8.	$\parallel\ \parallel\ \parallel\ A(x_1,x_4)$	(FU-Annahme 1)
9.	$\parallel\ \parallel\ \parallel\ \parallel\ A(x_2,x_4)$	(FU-Annahme 1.1)
10.	$\parallel\ \parallel\ \parallel\ \parallel\ A(x_4,x_2)$	9. (A-SIM2)
11.	$\parallel\ \parallel\ \parallel\ \parallel\ A(x_1,x_2)$	8., 10. (A-TRA)
12.	$\parallel\ \parallel\ \parallel\ \parallel\ \neg A(x_2,x_4)$	(FU-Annahme 1.2)
13.	$\parallel\ \parallel\ \parallel\ \parallel\ x_2 = x_4$	7., 12. (DS1)
14.	$\parallel\ \parallel\ \parallel\ \parallel\ A(x_1,x_2)$	8., 13. (=-SUB2)
15.	$\parallel\ \parallel\ \parallel\ A(x_1,x_2)$	9.–14. (FU)
16.	$\parallel\ \parallel\ \parallel\ A(x_1,x_2) \vee x_1 = x_2$	15. (ADD2)
17.	$\parallel\ \parallel\ \parallel\ \neg A(x_1,x_4)$	(FU-Annahme 2)
18.	$\parallel\ \parallel\ \parallel\ x_1 = x_4$	6., 17. (DS1)
19.	$\parallel\ \parallel\ \parallel\ \parallel\ A(x_2,x_4)$	(FU-Annahme 2.1)
20.	$\parallel\ \parallel\ \parallel\ \parallel\ A(x_4,x_2)$	19. (A-SIM2)
21.	$\parallel\ \parallel\ \parallel\ \parallel\ A(x_1,x_2)$	18., 20. (=-SUB2)
22.	$\parallel\ \parallel\ \parallel\ \parallel\ A(x_1,x_2) \vee x_1 = x_2$	21. (ADD1)
23.	$\parallel\ \parallel\ \parallel\ \parallel\ \neg A(x_2,x_4)$	(FU-Annahme 2.2)
24.	$\parallel\ \parallel\ \parallel\ \parallel\ x_2 = x_4$	7., 23. (DS1)
25.	$\parallel\ \parallel\ \parallel\ \parallel\ x_1 = x_2$	18., 24. (=-SUB2)
26.	$\parallel\ \parallel\ \parallel\ \parallel\ A(x_1,x_2) \vee x_1 = x_2$	25. (ADD2)
27.	$\parallel\ \parallel\ \parallel\ A(x_1,x_2) \vee x_1 = x_2$	19.–26. (FU)
28.	$\parallel\ \parallel\ A(x_1,x_2) \vee x_1 = x_2$	8.–27. (FU)
29.	$\parallel\ A(x_1,x_2) \vee x_1 = x_2$	5.–28. (EB)
30.	$\parallel\ \exists x\,((A(x_1,x) \vee x_2 = x) \wedge (A(x_3,x) \vee x_3 = x))$	3. (Def. E)
31.	$\parallel\ \parallel\ (A(x_{2,5}) \vee x_2 = x_5) \wedge (A(x_3,x_5) \vee x_3 = x_5)$	(EB-Annahme)
⋮	*Mit einer Herleitung ähnlich der von 28. erhalten wir:*	
53.	$\parallel\ \parallel\ A(x_3,x_2) \vee x_3 = x_2$	33.–55. (FU)
54.	$\parallel\ A(x_3,x_2) \vee x_3 = x_2$	31.–53. (EB)
55.	$\parallel\ (A(x_1,x_2) \vee x_1 = x_2) \wedge (A(x_3,x_2) \vee x_3 = x_2)$	29., 54. (KON)
56.	$\parallel\ \exists x\,((A(x_1,x) \vee x_1 = x) \wedge (A(x_3,x) \vee x_3 = x))$	55. (EE)
57.	$\parallel\ E(x_1,x_3)$	56. (Def. E)
58.	$E(x_1,x_2) \wedge E(x_2,x_3) \longrightarrow E(x_1,x_3)$	1.–57. (KB)
59.	$\forall z\,(E(x_1,x_2) \wedge E(x_2,z) \longrightarrow E(x_1,z))$	58. (UE)
60.	$\forall y \forall z\,(E(x_1,y) \wedge E(y,z) \longrightarrow E(x_1,z))$	59. (UE)
61.	$\forall x \forall y \forall z\,(E(x,y) \wedge E(y,z) \longrightarrow E(x,z))$	60. (UE)

Da E alle drei Eigenschaften erfüllt, können wir schließen, dass es sich um eine Äquivalenzrelation handelt. □

Lösung zu Zusatzübung 13.2. Sei die Relation A symmetrisch und nicht transitiv, und sei die Relation E definiert durch:

$$E(t_1, t_2) \overset{\text{def}}{=} \exists v\, ((A(t_1, v) \lor t_1 = v) \land (A(t_2, v) \lor t_2 = v)).$$

Zeigen Sie mit einer Interpretation, dass die Relation E nicht transitiv ist.

Beweis. Um zu zeigen, dass E nicht transitiv ist, genügt es, ein Gegenbeispiel für das folgende Argument zu finden:

$$E(a, b),\ E(b, c) \therefore E(a, c).$$

Das bedeutet, wir müssen eine Interpretation finden, in der $E(a, b)$ und $E(b, c)$ wahr sind, $E(a, c)$ jedoch falsch ist.

Die folgende Interpretation ist ein solches Gegenbeispiel:

Definition: Interpretation $\mathfrak{I} = \{D, \varphi\}$

$$\begin{aligned}
D &= \{1, 2, 3, 4, 5\},\\
\varphi(A) &= \{\langle 1,4\rangle, \langle 4,1\rangle, \langle 2,4\rangle, \langle 4,2\rangle,\\
&\quad \langle 2,5\rangle, \langle 5,2\rangle, \langle 3,5\rangle, \langle 5,3\rangle\},\\
\varphi(a) &= 1,\\
\varphi(b) &= 2,\\
\varphi(c) &= 3.\\
\sigma &= 4, 5, \ldots.
\end{aligned}$$

Erstens haben wir, dass:

$$\begin{aligned}
\varphi_\sigma(E(a, b)) &= \varphi_\sigma(\exists x\, (A(a, x) \lor a = x) \land (A(b, x) \lor b = x))\\
&= \mathtt{w},
\end{aligned}$$

denn σ ist eine x-Variante von σ und:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\langle 1,4\rangle \in \varphi(A)}{\varphi_\sigma(A(a,x)) = \mathtt{w}} \quad \dfrac{1 \neq 4}{\varphi_\sigma(a = x) = \mathtt{f}}}{\varphi_\sigma(A(a,x) \lor a = x) = \mathtt{w}} \quad \dfrac{\dfrac{\langle 2,4\rangle \in \varphi(A)}{\varphi_\sigma(A(b,x)) = \mathtt{w}} \quad \dfrac{2 \neq 4}{\varphi_\sigma(b = x) = \mathtt{f}}}{\varphi_\sigma(A(b,x) \lor b = x) = \mathtt{w}}}{\varphi_\sigma((A(a,x) \lor a = x) \land (A(b,x) \lor b = x)) = \mathtt{w}}}{\varphi_\sigma(\exists x\, ((A(a,x) \lor a = x) \land (A(b,x) \lor b = x))) = \mathtt{w}}$$

Erinnern Sie sich daran:

$$\begin{aligned} \varphi_\sigma(b) &= \varphi(b) = 2, \\ \varphi_\sigma(c) &= \varphi(c) = 3, \\ \varphi_\sigma(y) &= 5. \end{aligned}$$

Zweitens haben wir, dass:

$$\begin{aligned} \varphi_\sigma(E(b,c)) &= \varphi_\sigma(\exists y\,((A(b,y) \lor b = y) \land (A(c,y) \lor c = y))) \\ &= \mathtt{w}, \end{aligned}$$

denn σ ist eine y-Variante von σ, so dass $\varphi_\sigma(y) = 5$, und:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\langle 2,5\rangle \in \varphi(A)}{\varphi_\sigma(A(b,y)) = \mathtt{w}} \quad \dfrac{2 \neq 5}{\varphi_\sigma(b = y) = \mathtt{f}}}{\varphi_\sigma(A(b,y) \lor b = y) = \mathtt{w}} \quad \dfrac{\dfrac{\langle 3,5\rangle \in \varphi(A)}{\varphi_\sigma(A(c,y)) = \mathtt{w}} \quad \dfrac{3 \neq 5}{\varphi_\sigma(c = y) = \mathtt{f}}}{\varphi_\sigma(A(c,y) \lor c = y) = \mathtt{w}}}{\varphi_\sigma((A(b,y) \lor b = y) \land (A(c,y) \lor c = y)) = \mathtt{w}}}{\varphi_\sigma(\exists y\,((A(b,y) \lor b = y) \land (A(c,y) \lor c = y))) = \mathtt{w}}$$

Drittens haben wir, dass:

$$\begin{aligned} \varphi_\sigma(E(a,c)) &= \varphi_\sigma(\exists z\,((A(a,z) \lor a = z) \land (A(c,z) \lor c = z))) \\ &= \mathtt{f}, \end{aligned}$$

Erinnern Sie sich daran:

$$\begin{aligned} \varphi(a) &= \varphi_{\sigma'}(a) = 1, \\ \varphi(b) &= \varphi_{\sigma'}(b) = 2, \\ \varphi(c) &= \varphi_{\sigma'}(c) = 3, \\ \varphi_\sigma(x) &= \varphi_{\sigma'}(x) = 4, \\ \varphi_\sigma(y) &= \varphi_{\sigma'}(y) = 5. \end{aligned}$$

denn kein σ', das eine z-Variante von σ ist, erfüllt:

$$\begin{aligned} \varphi_\sigma(E(a,c)) &= \varphi_\sigma((A(a,z) \lor a = z) \land (A(c,z) \lor c = z)) \\ &= \mathtt{w}. \end{aligned}$$

Die folgenden Diagramme zeigen dies für jedes mögliche z-Variante σ' von σ.

Fall 1: Sei $\varphi_{\sigma'}(z) := 1$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\langle 1,1\rangle \notin \varphi(A)}{\varphi_{\sigma'}(A(a,z)) = \mathtt{f}} \quad \dfrac{1 = 1}{\varphi_{\sigma'}(a = z) = \mathtt{w}}}{\varphi_{\sigma'}(A(a,z) \lor a = z) = \mathtt{w}} \quad \dfrac{\dfrac{\langle 3,1\rangle \notin \varphi(A)}{\varphi_{\sigma'}(A(c,z)) = \mathtt{f}} \quad \dfrac{3 \neq 1}{\varphi_{\sigma'}(c = z) = \mathtt{f}}}{\varphi_{\sigma'}(A(c,z) \lor c = z) = \mathtt{f}}}{\varphi_{\sigma'}((A(a,z) \lor a = z) \land (A(c,z) \lor c = z)) = \mathtt{f}}$$

Fall 2: Sei $\varphi_{\sigma'}(z) := 2$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\langle 1,2\rangle \notin \varphi(A)}{\varphi_{\sigma'}(A(a,z)) = \mathtt{f}} \quad \dfrac{1 \neq 2}{\varphi_{\sigma'}(a = z) = \mathtt{f}}}{\varphi_{\sigma'}(A(a,z) \lor a = z) = \mathtt{f}} \quad \dfrac{\dfrac{\langle 3,2\rangle \notin \varphi(A)}{\varphi_{\sigma'}(A(c,z)) = \mathtt{f}} \quad \dfrac{3 \neq 2}{\varphi_{\sigma'}(c = z) = \mathtt{f}}}{\varphi_{\sigma'}(A(c,z) \lor c = z) = \mathtt{f}}}{\varphi_{\sigma'}((A(a,z) \lor a = z) \land (A(c,z) \lor c = z)) = \mathtt{f}}$$

Fall 3: Sei $\varphi_{\sigma'}(z) := 3$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\langle 1,3\rangle \notin \varphi(A)}{\varphi_{\sigma'}(A(a,z)) = \mathtt{f}} \quad \dfrac{1 \neq 3}{\varphi_{\sigma'}(a = z) = \mathtt{f}}}{\varphi_{\sigma'}(A(a,z) \lor a = z) = \mathtt{f}} \quad \dfrac{\dfrac{\langle 3,3\rangle \notin \varphi(A)}{\varphi_{\sigma'}(A(c,z)) = \mathtt{f}} \quad \dfrac{3 = 3}{\varphi_{\sigma'}(c = z) = \mathtt{w}}}{\varphi_{\sigma'}(A(c,z) \lor c = z) = \mathtt{w}}}{\varphi_{\sigma'}((A(a,z) \lor a = z) \land (A(c,z) \lor c = z)) = \mathtt{f}}$$

Fall 4: Sei $\varphi_{\sigma'}(z) := 4$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\langle 1,4\rangle \in \varphi(A)}{\varphi_{\sigma'}(A(a,z)) = \mathtt{w}} \quad \dfrac{1 \neq 4}{\varphi_{\sigma'}(a = z) = \mathtt{f}}}{\varphi_{\sigma'}(A(a,z) \vee a = z) = \mathtt{w}} \quad \dfrac{\dfrac{\langle 3,4\rangle \notin \varphi(A)}{\varphi_{\sigma'}(A(c,z)) = \mathtt{f}} \quad \dfrac{3 \neq 4}{\varphi_{\sigma'}(c = z) = \mathtt{f}}}{\varphi_{\sigma'}(A(c,z) \vee c = z) = \mathtt{f}}}{\varphi_{\sigma'}((A(a,z) \vee a = z) \wedge (A(c,z) \vee c = z)) = \mathtt{f}}$$

Fall 5: Sei $\varphi_{\sigma'}(z) := 5$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\langle 1,5\rangle \notin \varphi(A)}{\varphi_{\sigma'}(A(a,z)) = \mathtt{f}} \quad \dfrac{1 \neq 5}{\varphi_{\sigma'}(a = z) = \mathtt{f}}}{\varphi_{\sigma'}(A(a,z) \vee a = z) = \mathtt{f}} \quad \dfrac{\dfrac{\langle 3,5\rangle \in \varphi(A)}{\varphi_{\sigma'}(A(c,z)) = \mathtt{w}} \quad \dfrac{3 \neq 5}{\varphi_{\sigma'}(c = z) = \mathtt{f}}}{\varphi_{\sigma'}(A(c,z) \vee c = z) = \mathtt{w}}}{\varphi_{\sigma'}((A(a,z) \vee a = z) \wedge (A(c,z) \vee c = z)) = \mathtt{f}}$$

Wir haben also eine Interpretation $\mathfrak{I} = \{D, \varphi\}$, in der A symmetrisch ist, sodass $\varphi(E(a,b)) = \varphi(E(b,c)) = \mathtt{w}$, aber $\varphi(E(a,c)) = \mathtt{f}$. Das zeigt, dass E nicht transitiv ist und daher auch keine Äquivalenzrelation darstellt. □

Erinnern Sie sich daran:

$$\begin{aligned}
\varphi_\sigma(a) &= \varphi_{\sigma'}(a) = 1, \\
\varphi_\sigma(b) &= \varphi_{\sigma'}(b) = 2, \\
\varphi_\sigma(c) &= \varphi_{\sigma'}(c) = 3, \\
\varphi_\sigma(x) &= \varphi_{\sigma'}(x) = 4, \\
\varphi_\sigma(y) &= \varphi_{\sigma'}(y) = 5.
\end{aligned}$$