Ausdrücke und Definitionen 1

1.1 Typen und Token

Begriff 1.1 (Ausdruck)**.** Ein **Ausdruck** ist ein reproduzierbares Muster von Symbolen, das geschrieben, gedruckt, angezeigt oder geäußert werden kann.

Buchstaben, Numerale (Namen für Zahlen), Ziffern (einzeichenige Numerale), Wörter, Sätze, Absätze zählen beispielsweise als Ausdrücke, und ebenso erfundene Symbole oder jede andere Kombination ohne festgelegte Bedeutung.

Begriff 1.2 (Token)**.** Ein **Ausdruckstoken** ist eine physische Instanz eines Ausdrucks, z. B. ein Druck des Ausdrucks auf einer Seite.

Begriff 1.3 (Typ)**.** Ein **Ausdruckstyp** ist die abstrakte Entität, die durch Ausdruckstoken instanziiert wird.

Beispielsweise zeigen jede der folgenden drei Zeilen unterschiedliche Token desselben Ausdruckstyps:

bacaba
bacaba
bacaba

Sofern nicht anders angegeben, werden wir, wenn wir von einem Ausdruck sprechen, auf seinen Typ und nicht auf ein Token Bezug nehmen.

Historical note: Typen und Token in der Typographie

In der Typographie sind *Typen* die grundlegenden Formen, aus denen Text abgedruckt wird (siehe Abbildung). Demgegenüber ist ein *Token* ein bestimmtes, konkretes Zeichen, das aus dieser Form gedruckt wird.

Eine verbreitete, aber höchst irreführende Vermengung ist die zwischen einem Ausdruckstoken und einem *Ausdrucksvorkommen*.

Begriff 1.4 (Vorkommen)**.** Ein **Ausdrucksvorkommen** ist das Auftreten eines Ausdruckstyps innerhalb eines Ausdruckstokens oder innerhalb eines Ausdruckstyps.

Beispielsweise gibt es im Ausdruck ‚bacaba' (gleichgültig, ob er als dieses konkrete Token oder als der Typ betrachtet wird, den dieses Token instanziiert) ein Vorkommen des Buchstabens (Typs) ‚c', zwei Vorkommen des Buchstabens ‚b' und drei Vorkommen des Buchstabens ‚a'. Mit anderen Worten: Die Buchstaben ‚a', ‚b' und ‚c' kommen im Wort ‚bacaba' jeweils drei-, zwei- beziehungsweise einmal vor.

Historischer Hinweis: Typ-Token-Unterscheidung in der Logik

Charles S. Peirce (1839–1914)

Die Unterscheidung zwischen Token und Typ wurde erstmals von Charles Sanders Peirce in einem Aufsatz mit dem Titel ‚Prolegomena to an apology for pragmaticism' (1906, S. 505–6) eingeführt:

> There will ordinarily be about twenty *thes* on a page, and of course they count as twenty words. In another sense of the word "word", however, there is but one word "the" in the English language; and it is impossible that this word should lie visibly on a page. ... Such a definitely significant Form, I propose to term a *Type*. A Single event which happens once and whose identity is limited to that one happening ... I will venture to call a *Token*.

1.2 Bedeutung und Anführungszeichen

Es gibt viele unterschiedliche Theorien darüber, was ist die Bedeutung eines Ausdrucks. Einige Theorien verbinden Bedeutung mit mentalen Vorstellungen, andere mit dem Gebrauch in der Sprache, und wieder andere mit Wahrheitsbedingungen.

Wir können diese Fragen hier nicht entscheiden. Stattdessen werden wir uns auf eine einfachere Idee konzentrieren: *wenn ein Ausdruck bedeutungsvoller ist, steht er für etwas*. Dasjenige, wofür ein bedeutungsvoller Ausdruck steht, ist seine *Referenz*.

Begriff 1.5 (Bedeutungsvoller Ausdruck)**.** Ein **bedeutungsvoller Ausdruck** steht für etwas, das seine **Referenz** ist.

Die Referenz eines Ausdrucks kann ein physisches Objekt sein, etwa ein Planet oder eine Person; er kann ein mathematisches Objekt sein, etwa eine Zahl oder eine Menge. Einige haben sogar vorgeschlagen, dass Ausdrücke auf fiktive Entitäten Bezug nehmen

können, etwa auf eine Figur in einer Geschichte, oder sogar auf unmögliche Entitäten, etwa auf ein rundes Quadrat.

Wir haben beschlossen, so zu sprechen, als hätte jeder bedeutungsvollere Ausdruck genau eine Referenz. Es gibt dennoch eine bemerkenswerte Ausnahme, die wir von dieser Regel machen wollen.

Begriff 1.6 (Verwendung)**.** Ein bedeutungsvoller Ausdruck wird innerhalb eines anderen **verwendet**, wenn der erstere innerhalb des letzteren vorkommt und dabei für seine Referenz steht.

Begriff 1.7 (Erwähnung)**.** Etwas wird innerhalb eines bedeutungsvolleren Ausdrucks **erwähnt**, wenn ein Ausdruck innerhalb des letzteren vorkommt und dabei für das erstere steht.

Beachte, dass der Begriff der *Erwähnung* auf beliebige Objekte angewendet werden kann, einschließlich beispielsweise Objekten in der realen Welt und Ausdrücken. Demgegenüber gilt der Begriff der *Verwendung* nur für bedeutungsvollere Ausdrücke. Daher können wir in diesem Sinn kein Objekt verwenden, da Objekte keinen Referenten haben.

Alice ist eine großartige Musikerin. (♈)

Alice besteht aus fünf Buchstaben. (♉)

Im Satz (♈) wird der Name ‚Alice' verwendet, um über Alice, die Person, zu sprechen. Im Satz (♉) hingegen wird der Name ‚Alice' erwähnt: Wir sprechen über das Wort selbst, anstatt es zu verwenden, um über seinen Referenten (die Person) Alice zu

Historischer Hinweis: Die Suppositionstheorie

Es ist schwierig, die Einführung der Begriffe *use*, *mention*, *standing for* und *reference*, so wie wir sie heute verstehen, einer bestimmten Quelle zuzuschreiben. Vielmehr scheinen sie sich allmählich herausgebildet zu haben, mit Vorläufern, die bis auf Aristoteles zurückverfolgt werden können. Ein Meilenstein in ihrer Entwicklung wurde in William von Ockhams *Suppositionstheorie* erreicht, die er in seiner *Summa Logicae* (*Summe der Logik*, ca. 1323) formulierte. Das Folgende ist ein Auszug:

> Personale Supposition tritt im Allgemeinen dann auf, wenn ein Term für das Ding steht, das er bezeichnet...
>
> Materielle Supposition liegt vor, wenn ein Term nicht bedeutungshaft steht, sondern stattdessen entweder für etwas Gesprochenes oder Geschriebenes steht. Dies wird deutlich in „man is a name", wo der Term „man" für sich selbst steht und sich dennoch nicht selbst bezeichnet. (I.64)

William of Ockham
(ca. 1287–1347)

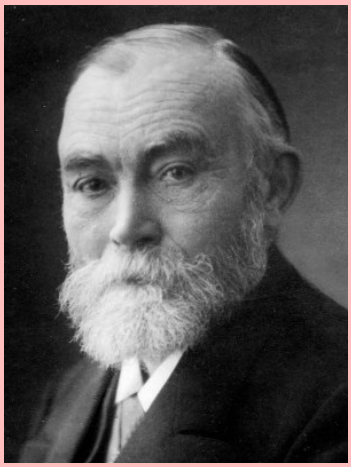
sprechen. Alice selbst wird nur in (♈) erwähnt. Tatsächlich kann sie im Sinn von Begriff 1.7 nicht verwendet werden, da Alice kein Ausdruck ist — ihr Name ist es.

Ausdrücke in natürlichen Sprachen können entweder verwendet werden, um ihre üblichen Bedeutungen zu vermitteln, oder um sich selbst als sprachliche Ausdrücke zu bezeichnen. Von nun an werden wir ausdrücklich die Notation der *Anführungszeichen* übernehmen.

Notation 1.8 (Anführungszeichen)**.** Ein Ausdruck kann durch einen anderen Ausdruck erwähnt werden, der wie folgt gebildet wird: zuerst ein linkes Anführungszeichen, dann der ursprüngliche Ausdruck und schließlich ein rechtes Anführungszeichen.

‚Queen sind legendär' erwähnt Queen und verwendet ‚Queen'. „Queen' besteht aus fünf Buchstaben' erwähnt ‚Queen' und verwendet „Queen". Um Queen zu erwähnen, verwenden wir ‚Queen'; um ‚Queen' zu erwähnen, verwenden wir „Queen"; und um „Queen" zu erwähnen, verwenden wir „„Queen"". ‚Queen' hat fünf Buchstaben. „Queen" hat sieben Zeichen: ein linkes Anführungszeichen, fünf Buchstaben und ein rechtes Anführungszeichen. Schließlich beachte, dass ‚Queen' Queen benennt und erwähnt, eine legendäre britische Rockband.

Historischer Hinweis: Anführungszeichen



Gottlob Frege (1848–1925)

Der moderne Gebrauch von Anführungszeichen in der Logik scheint erstmals klar von Gottlob Frege in seinem Aufsatz ‚Über Sinn und Bedeutung' (1892, S. 23) formuliert worden zu sein:

> Wenn man in der gewöhnlichen Weise Worte gebraucht, so ist das, wovon man sprechen will, deren Bedeutung. Es kann aber auch vorkommen, daß man von den Worten selbst oder von ihrem Sinne reden will... Wir haben dann Zeichen von Zeichen. In der Schrift schließt man in diesem Falle die Wortbilder in Anführungszeichen ein. Es darf also ein in Anführungszeichen stehendes Wortbild nicht in der gewöhnlichen Bedeutung genommen werden.
>
> Wenn man von dem Sinne eines Ausdrucks ‚A' reden will, so kann man dies einfach durch die Wendung ‚der Sinn des Ausdrucks ‚A".

Anführungszeichen ermöglichen es uns, den leeren Ausdruck leicht zu referenzieren.

Begriff 1.9 (Leerer Ausdruck)**.** Der **leere Ausdruck** ist der Ausdruck, der keine Symbole enthält.

Notation 1.10 (Leerer Ausdruck)**.** Den leeren Ausdruck bezeichnen wir mit „“. Somit ist ‚‘ (d. h. das Nichts zwischen den Anführungszeichen) der leere Ausdruck.

Der leere Ausdruck darf nicht mit dem Leerzeichen verwechselt werden, also ‚ ‘.

1.3 Sätze und Propositionen

Wir haben bisher bereits mehrere Sätze verwendet und erwähnt, aber wir haben noch nicht erklärt, was ein Satz ist.

Begriff 1.11 (Satz)**.** Ein **Satz** ist ein Ausdruck, der insofern vollständig ist, als er eine Aussage ausdrückt.

Die folgenden Ausdrücke sind alles Beispiele für Sätze:

‚Die Tür ist geschlossen.‘ (♈)
‚Ist die Tür geschlossen?‘ (♉)
‚Schließ die Tür!‘ (♊)

Jeder dieser Ausdrücke ist insofern vollständig, als er (in geeigneten Kontexten) ausreicht, um einen vollständigen kommunikativen Akt zu vollziehen.

Satz (♈) ist ein *Aussagesatz*, da er aussagt, dass die Tür geschlossen ist, was wahr oder falsch sein kann. Satz (♉) ist ein *Fragesatz*, da er die Frage stellt, ob die Tür geschlossen ist, die eine bestimmte wahre Antwort hat. Schließlich ist Satz (♊) ein *Imperativsatz*, da er befiehlt, dass die Tür geschlossen werden soll, was ausgeführt werden kann oder nicht.

Historischer Hinweis: Urteil und die Bewegungen der Seele

Die Klassifikation von Satztypen in Aussagesatz, Fragesatz und Imperativsatz hat einen Vorläufer in der *Grammaire générale et raisonnée* der Port-Royal (*Allgemeine und rationale Grammatik*, 1660, S. 19) von Antoine Arnauld und Claude Lancelot:

> Und so besteht die wichtigste Unterscheidung dessen, was in unserem Geist geschieht, darin, dass wir dort den Gegenstand unseres Denkens und die Form oder Weise unseres Denkens betrachten können, von denen die wichtigste das Urteil ist. Aber wir müssen auch Konjunktionen, Disjunktionen und andere ähnliche Operationen unseres Geistes sowie alle anderen Bewegungen unserer Seele einbeziehen, wie Wünsche, Befehle, Fragen usw.

A. Arnauld (1612–1694)

Wir werden uns auf Aussagesätze konzentrieren. Allerdings werden wir nicht alle Sätze betrachten, die eine Aussagesatzform haben, sondern nur diejenigen, die etwas ausdrücken, das wahr oder falsch sein kann — das heißt, diejenigen, die *Propositionen* ausdrücken.

Begriff 1.12 (Proposition)**.** Eine **Proposition** ist etwas, das wahr oder falsch sein kann.

Begriff 1.13 (Aussagesatz)**.** Ein **Aussagesatz** ist ein Satz, dessen Referenz eine Proposition ist.

Erinnere dich daran, dass zwei Ausdrücke, die aus unterschiedlichen Symbolen gebildet sind, verschieden sind, selbst wenn sie dieselbe Bedeutung haben. Daher können zwei Sätze verschieden sein, selbst wenn sie dieselbe Proposition ausdrücken. Betrachte zum Beispiel die folgenden drei verschiedenen Aussagesätze, die alle ein und dieselbe Proposition ausdrücken:

‚Hamlet wurde von William Shakespeare geschrieben.'

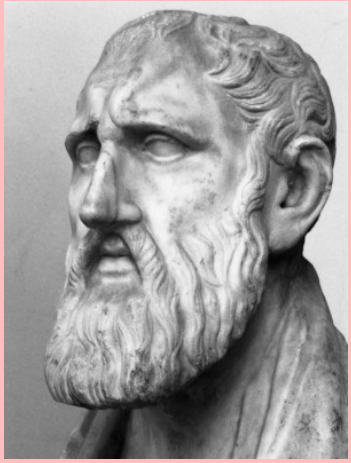
‚William Shakespeare ist der Autor von Hamlet.'

‚Hamlet ist ein Werk von William Shakespeare.'

Propositionen kann man als die Beschreibung von Sachverhalten auffassen. Diese Sachverhalte müssen jedoch nicht notwendigerweise bestimmte Tatsachen über die Welt betreffen, in der wir leben. Sie können auch etwa allgemeine Gesetze über sie oder sogar mathematische Thesen über jede mögliche Welt betreffen.*

*: Einige argumentieren sogar, dass es Propositionen über fiktionale Objekte gibt, aber wir lassen diese hier außer Betracht.

Historischer Hinweis: Die Sagbaren



Zeno von Kition (ca. 334–ca. 262 v. Chr.), Begründer des Stoizismus

Die stoische Vorstellung des *Sagbaren* (λεκτόν) ist vermutlich der früheste Vorläufer unseres modernen Begriffs der Proposition. Sextus Empiricus (ca. 160–ca. 210) berichtet darüber in seinen Πρὸς λογικούς (*Gegen die Logiker*, 170–ca. 190, VII, 11–12):

> Einige verorteten das Wahre und Falsche im Bereich des Bezeichneten, andere im Bereich der Äußerung, wieder andere im Bereich der Gedankenbewegung. Die Stoiker vertraten die erste Ansicht, und sagten, dass drei Dinge miteinander verbunden seien: das Bezeichnete, das Bezeichnende und das Objekt. Von diesen ist das Bezeichnende die Äußerung (z. B. „Dion"); das Bezeichnete ist der durch sie offenbarte Sachverhalt, den wir erfassen, wie er in unserem Denken besteht, ... und das Objekt ist das äußerlich existierende Ding (z. B. Dion selbst). Und von diesen sind zwei Körper, nämlich die Äußerung und das Objekt, während eines unkörperlich ist, nämlich der bezeichnete und sagbare Sachverhalt, der wahr oder falsch ist.

Der Einfachheit halber werden wir außerdem sagen, dass ein Satz wahr oder falsch sein kann unter den unten angegebenen Bedingungen.

Begriff 1.14 (Wahre und falsche Sätze)**.** Ein Aussagesatz ist wahr, wenn die Proposition, die er vertritt, wahr ist. Ein Aussagesatz ist falsch, wenn die Proposition, die er vertritt, falsch ist.

Beachte, dass die Aussage von Begriff 1.14 damit vereinbar ist, dass es einen Aussagesatz gibt, der weder wahr noch falsch ist, da er keine Proposition ausdrückt.

1.4 Platzhalter und Eckmarkierungen

Anführungszeichen erlauben es uns, über bestimmte Ausdrücke zu sprechen, aber nicht über *unspezifizierte Ausdrücke*. So möchten wir etwa über einen Ausdruck `e` sprechen, der fünf Buchstaben und drei Ziffern hat, oder über ein Wort `w` mit zwei Konsonanten und drei Silben, ohne einen konkreten Ausdruck oder ein konkretes Wort mit diesen Eigenschaften festzulegen.

In beiden Fällen dienen ‚`e`‘ und ‚`w`‘ als *Platzhalter für Ausdrücke* — oder kurz als *Platzhalter*.

Begriff 1.15 (Platzhalter)**.** Ein **Platzhalter für Ausdrücke** ist ein Ausdruck, der für einen unspezifizierten Ausdruck steht.

Wenn wir also einen Platzhalter wie ‚`w`‘ oben verwenden, um über ein unspezifiziertes Wort zu sprechen, sagen wir, dass ‚`w`‘ für ein Wort steht, oder dass `w` ein Wort ist — im letzteren Fall verwenden wir keine Anführungszeichen.

Wir werden eine bestimmte Auswahl von Symbolen als Platzhalter verwenden.* Zunächst führen wir eine spezielle Art von Platzhaltern ein.

*: Die meisten Autoren verwenden je nach Art des Ausdrucks eine Auswahl kursiv gesetzter lateinischer oder griechischer Buchstaben, etwa: ‚A‘, ‚v‘, ‚φ‘, ‚ψ‘, ‚μ‘. Siehe etwa die historische Bemerkung auf Seite 9. In diesem Fall nennt man diese Ausdrücke meist *Meta-Variablen*.

Notation 1.16 (Basisplatzhalter)**.** Die Schriftmaschinenschrift-Buchstaben:

‚`A`‘, ‚`B`‘, ‚`C`‘, ‚`D`‘, ‚`E`‘, ‚`F`‘, ‚`G`‘, ‚`H`‘, ‚`I`‘, ‚`J`‘, ‚`K`‘, ‚`L`‘, ‚`M`‘,
‚`N`‘, ‚`O`‘, ‚`P`‘, ‚`Q`‘, ‚`R`‘, ‚`S`‘, ‚`T`‘, ‚`U`‘, ‚`V`‘, ‚`W`‘, ‚`X`‘, ‚`Y`‘, ‚`Z`‘,
‚`a`‘, ‚`b`‘, ‚`c`‘, ‚`d`‘, ‚`e`‘, ‚`f`‘, ‚`g`‘, ‚`h`‘, ‚`i`‘, ‚`j`‘, ‚`k`‘, ‚`l`‘, ‚`m`‘,
‚`n`‘, ‚`o`‘, ‚`p`‘, ‚`q`‘, ‚`r`‘, ‚`s`‘, ‚`t`‘, ‚`u`‘, ‚`v`‘, ‚`w`‘, ‚`x`‘, ‚`y`‘, ‚`z`‘,

sowie:

dienen als **Basisplatzhalter** und damit als **Platzhalter**.†

†: Stelle sicher, dass du verstehst, dass es die Symbole innerhalb der Anführungszeichen sind — und nicht diese Symbole zusammen mit den Anführungszeichen — die als Platzhalter fungieren, und warum.

Mit bereits vorhandenen Platzhaltern können wir die Aussage von Notation 1.8 knapper und eleganter wie folgt umformulieren:

Fakt 1.17. e kann durch einen Ausdruck erwähnt werden, der gebildet wird durch: zuerst ein linkes Anführungszeichen, dann e, und schließlich ein rechtes Anführungszeichen.

Es wäre jedoch ein Fehler, dies wie folgt umzuformulieren:

Fehler 1.18. Ein Ausdruck e kann durch ‚e' erwähnt werden.

In Fehler 1.18 fungiert das erste Vorkommen von ‚e' als Platzhalter für einen unspezifizierten Ausdruck. Sein zweites Vorkommen jedoch steht innerhalb von Anführungszeichen in „e" und erwähnt den Platzhalter ‚e' selbst, statt einen unspezifizierten Ausdruck in Anführungszeichen.

Angenommen, wir möchten über einen unspezifizierten Buchstaben sprechen, der in geschweifte Klammern eingeschlossen ist, wie ‚{A}', ‚{a}', ‚{B}', ‚{b}' usw. Wir könnten erneut versuchen, unseren Ausdruck als von der folgenden Form zu beschreiben:

‚{L}', wobei L ein Buchstabe ist.

Dies funktioniert jedoch nicht, da „{L}" einen bestimmten Ausdruck erwähnt — der das konkrete Symbol ‚L' enthält. Er bezeichnet keinen unspezifizierten Buchstaben, der zwischen geschweiften Klammern vorkommt. Um dies zu bezeichnen, benötigen wir eine flexiblere Form der Anführungszeichen.

Notation 1.19 (Eckmarkierungen)**.** Ein Ausdruck, der gebildet wird durch:

zuerst ‚⌜', dann e und schließlich ‚⌝'

funktioniert als der Ausdruck, der entsteht, wenn man e in einfache Anführungszeichen setzt, jedoch mit der Einschränkung, dass jedes in e vorkommende Platzhaltersymbol weiterhin als Platzhalter fungiert.

Mit anderen Worten: *Eckmarkierungen* verhalten sich wie Anführungszeichen, außer dass Vorkommen von Platzhaltern innerhalb davon nicht als Erwähnung des Platzhalters selbst verstanden werden, sondern ihren Status als Platzhalter beibehalten.

Insbesondere gilt: Wenn ein Platzhalter allein innerhalb einer Quasi-Zitierung vorkommt, wie in ‚⌜e⌝', dann ist der Effekt genau derselbe wie die Verwendung des Platzhalters ‚e' selbst. In einem solchen Fall fügt die Quasi-Zitierung nichts hinzu: sie steht einfach für das, wofür ‚e' steht.

Mit dieser Notation können wir unseren unspezifizierten Buchstaben, der in geschweifte Klammern eingeschlossen ist, als einen

Historischer Hinweis: Eckmarkierungen

Eckmarkierungen wurden von Willard Van Orman Quine in seinem Buch *Mathematical Logic* (1940, S. 35–6) eingeführt:

> There is need also of a convenient way of speaking of specific contexts of unspecified expressions: speaking, e.g., of the result of enclosing the unspecified expression μ in parentheses... Note that quotation is not available here. The quotation... ‚(μ)' designate[s] only the specific expression[] therein depicted, containing the specific Greek letter[] ‚μ'... Reference to the intended contexts of the unspecified expressions ... will be accomplished by a new notation of *corners*, thus $\ulcorner(\mu)\urcorner$. Because of the close relationship which it bears to quotation, this device may be called *quasi-quotation*. It amounts to quoting the constant contextual background[], ‚( )' ... and imagining the unspecified expression[] μ ... written in the blanks.

W. V. O. Quine (1908–2000)

Ausdruck der folgenden Form bezeichnen:

$$\ulcorner\{\mathtt{L}\}\urcorner, \text{ wobei } \mathtt{L} \text{ ein Buchstabe ist.} \qquad (\Upsilon)$$

Damit ist in ‚$\ulcorner\{\mathtt{L}\}\urcorner$' das Symbol ‚$\mathtt{L}$' nicht etwas, das erwähnt wird – vielmehr markieren wir eine Position, an der ein Ausdruck auftreten kann – wenn überhaupt, dann erwähnen wir einen beliebigen Buchstaben $\mathtt{L}$. Daher gelingt es unserer Quasi-Zitierung ‚$\ulcorner\{\mathtt{L}\}\urcorner$', einen unspezifizierten Ausdruck zu erwähnen, der in geschweifte Klammern eingeschlossen ist $\ulcorner\{\mathtt{L}\}\urcorner$. Die zusätzliche Bedingung, dass $\mathtt{L}$ ein Buchstabe ist, macht (Υ) zu einer Erwähnung eines beliebigen Buchstabens in geschweiften Klammern.

1.5 Schema und Instanz

Ein Ausdruck mit Platzhaltern ist kein *bestimmter Ausdruck*. Er ist vielmehr eine Art Vorlage oder *Schema*, aus dem bestimmte Ausdrücke gewonnen werden können.

Begriff 1.20 (Bestimmter Ausdruck)**.** Ein **bestimmter Ausdruck** ist ein Ausdruck, in dem kein Platzhalter vorkommt.

Begriff 1.21 (Schematischer Ausdruck)**.** Ein **schematischer Ausdruck** oder **Schema** ist ein Ausdruck, in dem mindestens ein Platzhalter vorkommt, der auf eine bestimmte Klasse von Ausdrücken eingeschränkt sein kann.

Betrachte beispielsweise das Schema:

der Vater von n (♈)

Daraus können wir bestimmte Ausdrücke erhalten wie:

der Vater von Plato (♉)
der Vater von Aristoteles (♊)
der Vater von des Mondes (♋)
der Vater von fo rehtaf eht. (♌)

Jeder dieser Ausdrücke ist eine *Instanz* des Schemas (♈).*

*: Außerdem sind ‚{A}', ‚{a}' usw. *Instanzen* des Schemas (♈) auf S. 9.

Begriff 1.22 (Instanz)**.** Ein bestimmter Ausdruck, der dadurch entsteht, dass alle Platzhalter in einem Schema durch geeignete bestimmte Ausdrücke ersetzt werden, wobei jedes Vorkommen desselben Platzhalters durch denselben Ausdruck ersetzt wird, ist eine **Instanz** dieses Schemas.

Unsere Formulierung von Begriff 1.22 verhindert, dass ein Schema eine Instanz eines anderen ist. Wenn wir die Platzhalter eines Schemas konsistent durch geeignete bestimmte Ausdrücke oder Schemata ersetzen, nennen wir das entstehende Schema ein *Unterschema* des ursprünglichen.

Begriff 1.23 (Unterschema)**.** Ein Schema ist ein **Unterschema** eines anderen Schemas, wenn alle Instanzen des ersteren auch Instanzen des letzteren sind. Zudem ist es ein **echtes Unterschema**, wenn das letztere mindestens eine Instanz besitzt, die keine Instanz des ersteren ist.

Es folgt trivialerweise, dass alle Schemata† Unterschemata von sich selbst sind, aber keine echten Unterschemata von sich selbst.

†: Plural von ‚Schema'.

Fakt 1.24. Jedes Schema ist ein Unterschema von sich selbst.

Fakt 1.25. Kein Schema ist ein echtes Unterschema von sich selbst.

Betrachte die folgende Variation des Schemas (♈):

⌜der Vater von n⌝, wobei n der Name einer Person ist. (♈′)

Beachte, dass (♊) und (♉) ebenso Instanzen des Schemas (♈) wie auch von (♈′) sind. Die Ausdrücke (♋) und (♌) hingegen zählen nicht als Instanzen von (♈′), da „der Mond" und „fo rehtaf eht" keine Namen von Personen sind. Beachte außerdem, dass das Schema (♈′) ein Unterschema von (♈) ist.

Um Schemata leichter angeben zu können, fixieren wir die folgende Notation.

Notation 1.26. ⌜E : c⌝ drückt ein Schema aus, dessen Instanzen genau diejenigen Ausdrücke sind, die dadurch entstehen, dass die Platzhalter in ⌜E⌝ durch Ausdrücke ersetzt werden, die die in ⌜c⌝ angegebenen Bedingungen erfüllen.

Daher können wir das Schema (♈′) äquivalent wie folgt umschreiben:

der Vater von n : n ist der Name einer Person (♈′′)

Beachte, dass wir den Ausdruck links von „:‘ nicht in Eckklammern einschließen, da eine solche Quasi-Zitierung hier implizit ist.

Es besteht ein wichtiger Unterschied zwischen bestimmten Ausdrücken und Schemata hinsichtlich ihrer Bedeutung.

Ein bestimmter Ausdruck ist entweder bedeutungsvoll oder nicht. Ist er bedeutungsvoll, so kann er für eine bestimmte Referenz stehen. Somit gilt: Ein bestimmter Ausdruck ist entweder bedeutungsvoll und hat eine Referenz oder er ist bedeutungslos und steht für nichts.

Zur Veranschaulichung betrachte erneut die folgenden Ausdrücke:

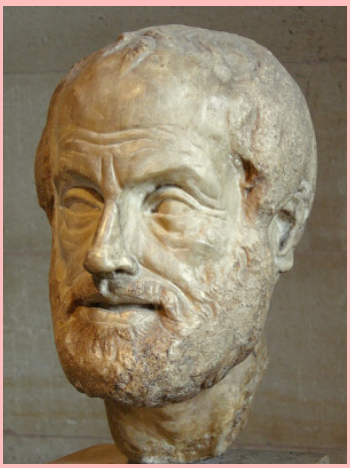
der Vater von Plato (♉)
der Vater von Aristoteles (♊)
der Vater von des Mondes (♋)
der Vater von fo rehtaf eht (♌)

Die Ausdrücke (♊) und (♉) stehen für etwas, nämlich Aristoteles’ Vater (Nikomachos) bzw. Platons Vater (Ariston). Die Ausdrücke (♋) und (♌) hingegen sind zumindest im wörtlichen Sinn im Englischen bedeutungslos und haben daher keine Referenz.

Historischer Hinweis: Schematische Buchstaben

Platzhalter und Schemata gehen auf schematische Buchstaben zurück, die in ähnlicher Weise wie unsere Platzhalter funktionieren. Der früheste belegte Gebrauch solcher Hilfsmittel findet sich in den logischen Schriften des Aristoteles. Siehe etwa die folgende Passage aus seinen Ἀναλυτικὰ Πρότερα (*Analytica Priora*, ca. 351 BCE, I 2, 25a20–26):

> wenn A einigen B zukommt, dann muss notwendig auch B einigen A zukommen. (Denn wenn es keinem zukommt, dann wird auch A keinem der B zukommen.)



Aristoteles (384–322 v. Chr.)

Ein Schema hingegen kann zwar in einem gewissen Sinn als bedeutungsvoll gelten, kann aber nicht in derselben Weise für eine bestimmte Referenz stehen wie ein bestimmter Ausdruck. Wie oben gesehen, kann ein Schema jedoch immer weiter spezifiziert werden, je mehr Einschränkungen wir seinen Platzhaltern auferlegen, wie in (♈′′).

der Vater von n : n ist der Name einer Person (♈′′)

Doch auch mit diesen Einschränkungen steht Schema (♈′′) nicht für eine bestimmte Referenz.

Betrachte jedoch das folgende Schema:

der Vater von n ist ein Verwandter von n
: n ist der Name einer Person. (♍)

Dieses Schema ist in einem gewissen Sinn bedeutungsvoll, und es scheint sogar einen Wahrheitswert zu haben: Es drückt aus, dass der Vater einer Person (mit Namen) ein Verwandter dieser Person ist, was wahr ist.

Schema (♍) sagt, dass jede Instanz von ⌜der Vater von n ist ein Verwandter von n⌝, die durch Einsetzen eines Eigennamens für ‚n' entsteht, wahr ist. Mit anderen Worten: Das Schema drückt etwas Wahres aus, insofern alle seine Instanzen wahre Sätze sind. Dies kann wie folgt verallgemeinert werden.

Begriff 1.27 (Ausdruck eines Schemas)**.** Ein **Schema auszudrücken** funktioniert wie das Ausdrücken jeder seiner Instanzen.

Mit anderen Worten: Die Angabe eines Schemas ermöglicht es, viele – oft unendlich viele – Dinge auf einmal auszudrücken.

Offene Ausdrücke. Betrachte das folgende Schema:

$$\mathrm{n} \times \mathrm{n} = 2 \times \mathrm{n} : \mathrm{n} \text{ steht für eine Zahl.} \qquad (\text{♎})$$

Da ‚n' für eine Zahl steht, funktioniert das Schema (♎) so, dass es für jede Zahl ausdrückt, dass ihre Multiplikation mit sich selbst gleich dem Doppelten dieser Zahl ist – was im Allgemeinen nicht zutrifft. Ein Mathematiker würde dies jedoch nicht auf diese Weise ausdrücken, sondern vielmehr wie folgt:

$$x \times x = 2x, \text{ wobei } x \text{ eine Zahl ist.} \qquad (\text{♏})$$

Beachte, dass im Schema (♎) ‚n' ein Platzhalter ist, der für einen Zahlausdruck steht. In (♏) hingegen ist ‚x' eine Zahlenvariable, d. h. sie steht für eine Zahl. Daher ist (♎) im Sinne von Begriff 1.21 schematisch, während der Ausdruck (♏) kein Schema ist, sondern ein spezifischer Ausdruck.

Allerdings kann (♏) in einem anderen Sinne als schematisch bezeichnet werden. Zunächst ist zu beachten, dass ‚x' ein Ausdruck ist, der für eine nicht spezifizierte Zahl steht, also eine Zahlenvariable ist.

Begriff 1.28 (Variable)**.** Eine **Variable** ist ein Symbol, das als Platzhalter für beliebige Elemente eines gegebenen Bereichs dient.

Nun sollten die Regeln des mathematischen Systems, in dem (♏) formuliert werden kann, es erlauben, ‚x' durch jeden Ausdruck zu ersetzen, der für eine Zahl steht. Spezifische Ausdrücke, die Variablen enthalten, sind in der natürlichen Sprache nicht sehr gebräuchlich, sondern eher typisch für die Mathematik.

Manchmal machen wir die Variablen hinreichend spezifisch, sodass der Ausdruck eine bestimmte Bedeutung erhält, etwa wenn wir sagen:

$$\text{Für alle Zahlen } x, x \times x = 2x. \qquad (\nearrow)$$

$$\text{Für eine Zahl } x, x \times x = 2x. \qquad (\overline{\circ})$$

So ist (↗) falsch, da 3 eine Zahl ist und es nicht gilt, dass $3 \times 3 = 2 \times 3$. Andererseits ist (⊙) wahr, da 0 eine Zahl ist und gilt, dass $0 \times 0 = 2 \times 0$.

Was ist nun mit (♏)? Können wir von diesem Ausdruck sagen, dass er wahr oder falsch ist? Nicht wirklich, denn obwohl (♏) ein spezifischer Ausdruck ist, steht er nicht für eine bestimmte Proposition, sondern für eine beliebige Proposition einer bestimmten Form. Ausdrücke dieser Art heißen *offene Ausdrücke*.

Begriff 1.29 (Offener Ausdruck)**.** Ein **offener Ausdruck** ist ein spezifischer Ausdruck, der keinen bestimmten Referenten hat, sondern einen beliebigen innerhalb gewisser Einschränkungen.

Somit ist (♏) ein offener Ausdruck, dessen Referent eine beliebige Proposition der Form $\ulcorner \mathtt{n} \times \mathtt{n} = 2\mathtt{n} \urcorner$ ist, wobei $\mathtt{n}$ für eine Zahl steht.

Dies zeigt den Sinn, in dem (♏) und offene Ausdrücke im Allgemeinen ebenfalls als Schemata aufgefasst werden können. Aus diesem Grund werden wir auch Notation 1.26 zur Darstellung offener Ausdrücke verwenden.

Notation 1.30. $\ulcorner \mathtt{E} : \mathtt{c} \urcorner$ drückt einen offenen Ausdruck aus, dessen Variablen durch die in $\ulcorner \mathtt{c} \urcorner$ angegebenen Bedingungen eingeschränkt sind.

Somit kann (♏) äquivalent wie folgt dargestellt werden:

$$x \times x = 2x : x \text{ ist eine Zahl.}$$

1.6 Definiendum und Definiens

Definitionen. Um Begriffe und Notationen auf eine strengere Weise einzuführen, werden wir *Definitionen* verwenden.

Begriff 1.31 (Definition)**.** Eine **Definition** ist ein Ausdruck, der festlegt, dass die Bedeutung eines bislang bedeutungslosen Terms, so wie er innerhalb eines Ausdrucks verwendet wird — des **Definiendums** — gleich der Bedeutung eines bereits bedeutungsvollen Ausdrucks, des **Definiens**, ist.

Beachte, dass der definierte Term nicht notwendigerweise mit dem Definiendum identisch ist, wie wir später sehen werden. Definitionen werden stets in ihrer Standardnotation eingeführt.

Notation 1.32 (Standardform von Definitionen)**.** $\ulcorner \mathtt{U} \overset{\text{DF}}{=} \mathtt{M} \urcorner$ drückt eine Definition aus, deren Definiendum $\mathtt{U}$ und deren Definiens $\mathtt{M}$ ist.*

*: Wie bei Notation 1.26 müssen wir das Definiendum oder das Definiens nicht in Eck- oder Anführungszeichen einschließen.

Angenommen etwa, dass wir die Bedeutung von ‚Aristoteles', nicht jedoch die von ‚der Stagirit', kennen, könnten wir die Bedeutung des Letzteren wie folgt festlegen:

$$\text{der Stagirit} \overset{\text{DF}}{=} \text{Aristoteles} \qquad (\Upsilon)$$

Definition (Υ) besagt nicht einfach, dass Aristoteles dieselbe Person wie der Stagirit ist. Sie legt vielmehr fest, dass die Bedeutung von ‚der Stagirit' dieselbe ist wie die Bedeutung von ‚Aristoteles'. Mit anderen Worten legt Definition (Υ) fest, dass wir durch die Verwendung von ‚der Stagirit' dieselbe Person bezeichnen wie durch die Verwendung von ‚Aristoteles', nämlich Aristoteles.

Fakt 1.33. Das Definiens einer Definition wird nicht dazu festgelegt, die Bedeutung des Definiendums zu sein, sondern vielmehr dazu, dieselbe Bedeutung auszudrücken wie das Definiendum.

Sobald eine Definition festgelegt ist, werden Definiendum und Definiens unter bestimmten Bedingungen austauschbar.

Fakt 1.34 (Einführung des Definiendums)**.** Sei $\ulcorner \mathtt{U} \overset{\text{DF}}{=} \mathtt{M} \urcorner$ eine festgelegte Definition und $\mathtt{e}$ ein Ausdruck, in dem $\mathtt{M}$ verwendet wird. Ist $\mathtt{i}$ ein Ausdruck, der aus $\mathtt{e}$ entsteht, indem eine oder mehrere Vorkommen von $\mathtt{M}$ unter jenen Vorkommen, in denen $\mathtt{M}$ verwendet (und nicht erwähnt) wird, durch entsprechende Vorkommen von $\mathtt{U}$ ersetzt werden, dann haben $\mathtt{e}$ und $\mathtt{i}$ dieselbe Bedeutung.

Fakt 1.35 (Elimination des Definiendums)**.** Sei $\ulcorner \mathtt{U} \overset{\text{DF}}{=} \mathtt{M} \urcorner$ eine festgelegte Definition und `e` ein Ausdruck, in dem `U` verwendet wird. Ist `i` ein Ausdruck, der aus `e` entsteht, indem eine oder mehrere Vorkommen von `U` unter jenen Vorkommen, in denen `U` verwendet (und nicht erwähnt) wird, durch entsprechende Vorkommen von `M` ersetzt werden, dann haben `e` und `i` dieselbe Bedeutung.

Die Bedingung, dass das Vorkommen von `M` verwendet und nicht erwähnt sein muss, verhindert, dass wir Ausdrücke innerhalb von Anführungszeichen ersetzen. Dies ist wesentlich, da solche Ersetzungen zu Ausdrücken mit unterschiedlicher Bedeutung führen könnten.

So haben etwa die folgenden beiden Sätze exakt dieselbe Bedeutung kraft der Definition (♈).

Platon war der Lehrer des Stagiriten. (♉)

Platon war der Lehrer des Aristoteles. (♊)

Beachte jedoch, dass die folgenden beiden Ausdrücke selbst nach der Festlegung von Definition (♈) nicht dieselbe Bedeutung haben.

Das Wort ‚der Stagirit' hat neun Buchstaben. (♋)

Das Wort ‚Aristoteles' hat neun Buchstaben. (♌)

Der Grund ist, dass die Ausdrücke im Definiendum und Definiens von (♈) in (♉) bzw. (♊) verwendet werden, während sie in (♋) und (♌) nicht verwendet, sondern lediglich erwähnt werden. Eine Tatsache, die bestätigt, dass die beiden letzteren Sätze nicht dieselbe Bedeutung haben, ist, dass (♋) falsch ist, während (♌) wahr ist.

Zum Abschluss beachte, dass eine bereits festgelegte Definition die Bedeutung ihres Definiendums bereits festgelegt hat. Daher kann es nicht erneut definiert werden.

Fakt 1.36. Sobald eine Definition festgelegt wurde, kann ihr Definiendum nicht als Definiendum einer neuen Definition verwendet werden.

Schematische Definitionen. Wir möchten möglicherweise nicht nur einen bestimmten Ausdruck definieren, sondern viele Ausdrücke derselben Form. Angenommen etwa, wir möchten ‚komplex' als ‚nicht einfach' definieren. Nach dem Muster von (♈) könnten wir versuchen:

$$\text{komplex} \overset{\text{DF}}{=} \text{nicht einfach} \qquad (\text{♍})$$

Dann hätten die folgenden Ausdrücke dieselbe Bedeutung:

Logik ist komplex.
Logik ist nicht einfach.

Aber ebenso die folgenden Ausdrücke, was wir nicht beabsichtigten :

$2i$ ist komplex.
$2i$ ist nicht einfach.

Offensichtlich unterscheiden sich diese beiden Sätze in ihrer Bedeutung, weil ‚komplex' einen anderen Sinn hat, wenn es mit Numeralen kombiniert wird, als wenn es mit Namen von Gegenständen kombiniert wird. Dieser letztere Sinn ist derjenige, den wir mit (♍) erfassen wollten, und er kann nur festgelegt werden, wenn wir die Ausdrücke, mit denen es kombiniert werden darf, irgendwie einschränken.

Um dies zu tun, müssen wir eine besondere Art von Definition verwenden.

Begriff 1.37 (Schematische Definition)**.** Eine **schematische Definition** ist ein Schema, dessen sämtliche Instanzen Definitionen sind.

Folgend Begriff 1.27 funktioniert das Angeben eines Definitionsschemas so, als würde man alle Definitionen angeben, die seine Instanzen sind.

Somit können wir mit einer schematischen Definition festlegen, dass Ausdrücke der Form ⌜s ist komplex⌝ dieselbe Bedeutung haben wie ⌜s ist nicht einfach⌝, wobei s für einen Fachbereich steht. Wir tun dies wie folgt:

$$\mathsf{s} \text{ ist komplex} \overset{\text{DF}}{=} \mathsf{s} \text{ ist nicht einfach} \quad : \mathsf{s} \text{ steht für einen Fachbereich} \qquad (\underline{\frown})$$

Die folgenden sind Instanzen des Definitionsschemas (⌒):

$$\text{Informatik ist komplex} \overset{\text{DF}}{=} \text{Informatik ist nicht einfach}$$
$$\text{Linguistik ist komplex} \overset{\text{DF}}{=} \text{Linguistik ist nicht einfach}$$
$$\text{Mathematik ist komplex} \overset{\text{DF}}{=} \text{Mathematik ist nicht einfach}$$

Tatsächlich führt das Definitionsschema (⌒) dazu, dass für jeden Ausdruck s, der einen Fachbereich bezeichnet, eine Definition der Form ⌜s ist komplex $\overset{\text{DF}}{=}$ s ist nicht einfach⌝ festgelegt wird. Dies entspricht der Definition von ‚komplex' als ‚nicht einfach', jedoch nur dann, wenn es mit Namen von Gegenständen in bestimmten Arten von Ausdrücken kombiniert wird.

Wir können schematische Definitionen verwenden, in denen mehr als ein Platzhalter vorkommt. Insbesondere wird es hilfreich sein,

einige Abkürzungen für die gängigsten logischen Ausdrücke einzuführen.

Notation 1.38 (Abkürzungen für logische Ausdrücke)**.**

$$\begin{aligned}
\neg \mathtt{A} &\overset{\text{DF}}{=} \text{Es ist nicht der Fall, dass } \mathtt{A}.\\
\mathtt{A} \mathbin{\curlywedge} \mathtt{B} &\overset{\text{DF}}{=} \mathtt{A} \text{ und } \mathtt{B}.\\
\mathtt{A} \mathbin{\curlyvee} \mathtt{B} &\overset{\text{DF}}{=} \mathtt{A} \text{ oder } \mathtt{B} \text{ oder sowohl } \mathtt{A} \mathbin{\curlywedge} \mathtt{B}.\\
\mathtt{A} \Rightarrow \mathtt{B} &\overset{\text{DF}}{=} \text{Wenn } \mathtt{A}, \text{ dann } \mathtt{B}.\\
\mathtt{A} \Leftrightarrow \mathtt{B} &\overset{\text{DF}}{=} \mathtt{A} \text{ genau dann, wenn } \mathtt{B}.\\
\forall \mathtt{v}\, \mathtt{A} &\overset{\text{DF}}{=} \text{Für alle } \mathtt{v}, \text{ gilt: } \mathtt{A}.\\
\exists \mathtt{v}\, \mathtt{A} &\overset{\text{DF}}{=} \text{Für ein } \mathtt{v}, \text{ gilt: } \mathtt{A}.\\
\exists! \mathtt{v}\, \mathtt{A} &\overset{\text{DF}}{=} \text{Für genau ein } \mathtt{v}, \text{ gilt: } \mathtt{A}.\\
&: \mathtt{A}, \mathtt{B} \text{ sind Sätze oder offene Sätze,}\\
&\quad \mathtt{v} \text{ ist eine Variable.}
\end{aligned}$$

Somit sind die folgenden Ausdrücke nun bedeutungsvoll†:

†: Das heißt, vorausgesetzt, die darin enthaltenen Ausdrücke und offenen Ausdrücke sind bedeutungsvoll.

$\neg$Hank ist ein Verbrecher.
Gus ist ein Vater $\curlyvee$ Mike ist ein Großvater.
Walter ist ein Lehrer $\curlywedge$ Jesse ist ein Schüler.
Lalo ist der Boss $\Rightarrow$ $\neg$Nacho ist der Boss.
Walter ist ein Verbrecher $\Leftrightarrow$ Jesse ist ein Verbrecher.
$\exists x$ Hank hat x gefangen.
$\forall x$ x kennt Gus.

Es ist hier wichtig zu beachten, dass die in Notation 1.38 eingeführten Symbole ‚$\neg$', ‚$\curlywedge$', ‚$\curlyvee$', ‚$\Rightarrow$', ‚$\Leftrightarrow$', ‚$\forall$' und ‚$\exists$' nicht die Definienda‡ der dort festgelegten Definitionen sind, sondern die definierten Terme.

‡: Plural von ‚Definiendum'.

Ihre Bedeutungen werden selbstverständlich durch diese Definition festgelegt, jedoch durch das Definieren von Ausdrücken bestimmter Form, in denen sie vorkommen. Daher legt Notation 1.38 nicht die Bedeutung irgendeines der folgenden Ausdrücke fest:

Der Lehrer ist entweder Ana $\curlyvee$ Bruce.
Jimmy $\curlywedge$ Chuck sind Brüder.

Eine weitere nützliche Abkürzung ist die folgende:

Notation 1.39 (Abkürzung für Identität)**.**

$$\begin{aligned}
\mathtt{A} = \mathtt{B} &\overset{\text{DF}}{=} \mathtt{A} \text{ ist identisch mit } \mathtt{B}\\
\mathtt{A} \neq \mathtt{B} &\overset{\text{DF}}{=} \neg \mathtt{A} = \mathtt{B}\\
&: \mathtt{A}, \mathtt{B} \text{ sind bedeutungsvolle Ausdrücke.}
\end{aligned}$$

Dies bedeutet, dass ‚=' so verstanden wird, dass es ausdrückt, dass die Referenten zweier gegebener bedeutungsvoller Ausdrücke identisch oder gleich sind.

Somit sind die folgenden Ausdrücke nun bedeutungsvoll:

$$\text{Walter} = \text{Heisenberg}.$$
$$\text{der Autor von Demian} = \text{der Autor von Der Steppenwolf}.$$
$$1 + 2 = 4.$$

Alle obigen Ausdrücke sind spezifische Sätze, von denen der letzte falsch ist.

Andere Ausdrücke, die in manchen Kontexten äquivalent zu ⌜$\mathtt{A} = \mathtt{B}$⌝ sind, umfassen: ⌜$\mathtt{A}$ ist gleich $\mathtt{B}$⌝, ⌜$\mathtt{A}$ ist dasselbe wie $\mathtt{B}$⌝, ⌜$\mathtt{A}$ und $\mathtt{B}$ sind dasselbe⌝, ⌜$\mathtt{A}$ ist $\mathtt{B}$⌝ (eine Ausnahme liegt vor, wenn $\mathtt{A}$ ein Subjektterm und $\mathtt{B}$ ein Prädikatterm ist), unter anderem.

Ferner gilt: Wenn zwei Ausdrücke per Definition als gleich festgelegt werden, dann sind ihre Referenten identisch.

Fakt 1.40. $\mathtt{A} \overset{\text{DF}}{=} \mathtt{B}$ ist eine festgelegte Definition $\Rightarrow \mathtt{A} = \mathtt{B}$.

§: Plural von ‚Definiens'.

Stückweise Definitionen. Schematische Definitionen erlauben Definitionen, die für einen gegebenen Term unterschiedliche Definientia§ festlegen, abhängig von den Ausdrücken, die ihn im Definiendum begleiten. Diese nennen wir *stückweise Definitionen*.

Begriff 1.41 (Stückweise Definition)**.** Eine **stückweise Definition** definiert einen Term, indem sie verschiedene Bedingungen angibt, unter denen unterschiedliche Definientia gelten.

Zum Beispiel möchten wir vielleicht den Ausdruck ⌜$\mathtt{n}$ ist ein Elternteil⌝ so definieren, dass ⌜$\mathtt{n}$ ist ein Vater⌝ gilt, wenn $\mathtt{n}$ für einen Mann steht, und dass er ⌜$\mathtt{n}$ ist eine Mutter⌝ bedeutet, wenn $\mathtt{n}$ für eine Frau steht. Wir können dies tun, indem wir zwei getrennte Definitionen angeben:

$$\mathtt{n} \text{ ist ein Elternteil} \overset{\text{DF}}{=} \mathtt{n} \text{ ist ein Vater} : \mathtt{n} \text{ steht für einen Mann} \tag{$\mathfrak{M}_1$}$$

$$\mathtt{n} \text{ ist ein Elternteil} \overset{\text{DF}}{=} \mathtt{n} \text{ ist eine Mutter} : \mathtt{n} \text{ steht für eine Frau} \tag{$\mathfrak{M}_2$}$$

Die parallele Angabe der Definitionen ($\mathfrak{M}_1$) und ($\mathfrak{M}_2$) widerspricht Fakt 1.36 in keiner Weise. Beachte, dass ($\mathfrak{M}_1$) und ($\mathfrak{M}_2$) keine gemeinsame Instanz haben, sodass sie nicht verschiedenen Definientia demselben Definiendum zuweisen.

Stückweise Funktionen sind auch nützlich, um einige bekannte mathematische Funktionen zu definieren. Zum Beispiel definiert

das Folgende den Betragsfunktor:

$$|\mathrm{n}| \overset{\text{DF}}{=} \mathrm{n} : \mathrm{n} \text{ steht für eine Zahl, die größer oder gleich 0 ist,} \qquad (\nearrow_1)$$

$$|\mathrm{n}| \overset{\text{DF}}{=} -\mathrm{n} : \mathrm{n} \text{ steht für eine Zahl, die kleiner als 0 ist.} \qquad (\nearrow_2)$$

Beachte erneut, dass die Definitionen ($\nearrow_1$) und ($\nearrow_2$) keine gemeinsamen Instanzen haben, sodass kein Konflikt mit Fakt 1.36 entsteht.

Zum Abschluss beachte, dass unsere stückweise Definition ($\nearrow$) nicht so formuliert ist, wie mathematische Definitionen gewöhnlich angegeben werden. In einer normalen mathematischen Definition würden wir offene Ausdrücke wie die folgenden verwenden:

$$|x| \overset{\text{DF}}{=} x \qquad : x \geq 0, \qquad (\overline{\circ}_1)$$

$$|x| \overset{\text{DF}}{=} -x \qquad : x < 0. \qquad (\overline{\circ}_2)$$

Da ‚x' eine Zahlenvariable ist, sollten die Regeln des mathematischen Systems, für das dieser Ausdruck definiert ist, erlauben, ‚x' durch jeden Ausdruck zu ersetzen, der für eine Zahl steht und die nach ‚:' angegebenen Bedingungen erfüllt.

Explizite und rekursive Definitionen. In allen bisher dargestellten Definitionen wird ein neuer Term im Definiendum verwendet, dessen Bedeutung als gleich der Bedeutung des Definiens festgelegt wird. Das zugewiesene Definiens enthält nur schon bekannte Terme. Insbesondere wird der definierte Term nicht im Definiens verwendet.

Definitionen dieser Art nennt man *explizite Definitionen*.

Begriff 1.42 (Explizite Definition)**.** Eine **explizite Definition** ist eine, in der der zu definierende Term (im Definiendum) nicht im Definiens verwendet wird.

Die Einschränkung, dass der zu definierende Term nicht im Definiens verwendet wird, soll verhindern, dass Folgendes als korrekte Definition betrachtet wird.

$$\mathrm{n} \text{ ist plok} \overset{\text{DF}}{=} \mathrm{n} \text{ ist plok} \qquad (\approx)$$

Das Problem mit ($\approx$) ist, dass sie als Definition nutzlos ist. Die Bedeutung des definierten Terms ‚plok' wird nicht festgelegt, weil das Definiens überhaupt kein sinnvoller Ausdruck ist.

Nicht alle Definitionen müssen jedoch explizit sein. Es gibt Fälle, in denen es nützlich ist, dass der definierte Term im Definiens erscheint. Betrachte zum Beispiel die folgende Definition, die der mathematischen Definition der Fakultät entspricht[¶]:

¶: Beachte, dass nach der üblichen Konvention 0 keine natürliche Zahl ist.

$$0! \overset{\text{DF}}{=} 1 \qquad (\mathrm{H}_1)$$

$$(n)! \overset{\text{DF}}{=} (n-1)! \times (n)$$

$$: n \text{ steht für eine natürliche Zahl.} \qquad (\mathrm{H}_2)$$

Beachte, dass wir in (H_2) zwar den definierten Term ‚!' verwenden, dies jedoch kein Problem wie in (≈) erzeugt. Der Grund ist, dass wir in (H) nicht einfach den definierten Term wiederholen, sondern eine Methode angeben, jeden neuen Fall auf zuvor definierte Fälle zurückzuführen.

Zuerst wird die Bedeutung von ‚0!' durch (H_1) festgelegt. Zweitens hängt nach (H_2) die Bedeutung von ‚1!' von der Bedeutung von ‚$(1-1)!$', also von ‚0!', ab. Als Nächstes hängt die Bedeutung von ‚2!' von der von ‚1!' ab und so weiter. Somit wird die Bedeutung jedes Ausdrucks der Form $\ulcorner n! \urcorner$, wobei n für 0 oder eine natürliche Zahl steht, bestimmt, indem man auf frühere Zahlen zurückgeht und schließlich den Basisfall ‚0!' erreicht.

Obwohl das definierte Symbol in jedem Definiens einer Instanz von (H_2) vorkommt, ist Definition (H) daher nicht problematisch, weil die Bedeutung jeder Instanz auf Ausdrücke zurückgeführt werden kann, deren Bedeutungen bereits festgelegt sind. Definitionen dieser Art nennt man *rekursive* oder *induktive Definitionen*.

Begriff 1.43 (Rekursive Definition)**.** Eine **rekursive** bzw. **induktive Definition** legt die Bedeutung eines Terms fest, indem sie mit **Basisfällen** beginnt und anschließend **induktive Fälle** definiert, die von diesen Basisfällen und den anderen induktiven Fällen abhängen.

So entspricht in der obigen Definition der Fakultät (H_1) dem Basisfall, während (H_2) dem induktiven Fall entspricht.

Rekursive Definitionen durch Bildungsregeln. Nicht alle rekursiven Definitionen lassen sich leicht in der Form von (H) angeben. Angenommen, wir möchten den Term ‚Vorfahre' so definieren, dass x ein Vorfahre von y ist, falls x ein Elternteil von y ist oder x ein Großelternteil von y ist oder x ein Urgroßelternteil von y ist oder x ein Ururgroßelternteil von y ist usw.

Hier haben wir keinen einzelnen spezifischen Fall, von dem aus wir beginnen können. In Definition (H) betraf unser Basisfall ‚0', hier jedoch betrifft der Basisfall alle Ausdrücke, die eine Elternbeziehung ausdrücken. Typischerweise verwendet man eine induktive Definition durch Bildungsregeln, die wie folgt beschrieben werden kann.

Begriff 1.44. Eine **rekursive Definition durch Bildungsregeln** besteht aus:

1. Einer oder mehreren *Basisregel*, die die einfachsten Instanzen des definierten Ausdrucks einführen.
2. Einer oder mehreren *induktiven Regeln*, die festlegen, wie neue Instanzen aus bereits festgelegten entstehen.
3. Einer *Abschlussregel*, die festlegt, dass alle Fälle des definierten Terms durch endlich viele Anwendungen der induktiven Regeln auf die Basisregeln entstehen.

Sehen wir uns an, wie eine rekursive Definition von ‚Vorfahre' gegeben werden kann.

Definition ☿. Wenn ‚x' und ‚y' Variablen sind, die für Lebewesen stehen, wird der Term ‚Vorfahre' rekursiv durch die folgenden Regeln definiert:

1. x ist ein Elternteil von $y \Rightarrow x$ ist ein Vorfahre von y. (*Basisregel*)
2. x ist ein Vorfahre von z und z ist ein Vorfahre von $y \Rightarrow x$ ist ein Vorfahre von y. (*induktive Regel*)
3. Kein x ist ein Vorfahre von y, es sei denn, dies kann durch endlich viele Anwendungen von 1 und 2 erhalten werden. (*Abschlussregel*)

Die Basisregel führt den unmittelbarsten Fall der Abstammung ein, nämlich den der Elternschaft. Die induktive Regel erweitert dann die Beziehung schrittweise: zu den Eltern von x, zu den Eltern der Eltern von x, zu den Eltern der Eltern der Eltern von x[♩]. Die Abschlussregel stellt sicher, dass keine weiteren Fälle als Vorfahren zugelassen werden.

♩: Und zu den Eltern der Eltern der Eltern der Eltern von x.

Rekursive Definitionen und Definientia. Beachte, dass Definition (☿) im Sinne von Begriff 1.37 nicht strikt schematisch ist, da sie keine Platzhalter enthält.

Außerdem besitzt Definition (☿) nicht die typische Definiendum-Definiens-Struktur. Offensichtlich ist der Ausdruck ‚x ist ein Vorfahre von y' das Definiendum. Aber wo ist sein Definiens? Um dies klarer zu sehen, können wir (☿) wie folgt umformulieren:

$$\begin{aligned}\mathsf{a} \text{ ist ein Vorfahre von } \mathsf{b} \overset{\text{DF}}{=} {} & \mathsf{a} \text{ ist ein Elternteil von } \mathsf{b} \vee \\ & \exists x\,(\mathsf{a} \text{ ist ein Vorfahre von } x \wedge \\ & \quad x \text{ ist ein Vorfahre von } \mathsf{b}) \\ & : \mathsf{a}, \mathsf{b} \text{ stehen für Lebewesen.} \qquad (☿')\end{aligned}$$

1.7 Übungen

Aufgabe 1.1 (Token und Typen)**.** Betrachten Sie den Satz:

Aristoteles war ein Philosoph, der im antiken Griechenland lebte.

Beantworten Sie die folgenden Fragen:

1. Welche Buchstabentypen kommen im Satz vor?
2. Wie viele Buchstabentypen enthält er?
3. Wie viele Token entsprechen jeweils jedem Buchstabentyp?
4. Wie viele Buchstaben-Token enthält er insgesamt?

Behandeln Sie jedes Buchstabendesign als einen eigenen Ausdruckstyp — so dass z. B. die Ausdrücke ‚a' und ‚A' als verschiedene Typen zählen.

Aufgabe 1.2. Bestimmen Sie den Referenten jedes der folgenden Ausdrücke:

1. der natürliche Satellit der Erde
2. 2^3
3. Sherlock Holmes' Mitbewohner
4. die größte Primzahl
5. der Gefrierpunkt von Wasser
6. der gegenwärtige König von Frankreich
7. das erste Album der Beatles
8. die Anzahl der Buchstaben im Wort ‚logic'

Falls ein Ausdruck keinen Referenten hat, geben Sie dies an.

Aufgabe 1.3 (Verwendung und Erwähnung)**.** Bestimmen Sie für den folgenden Satz, ob der unterstrichene Ausdruck an der betreffenden Stelle verwendet oder erwähnt wird.

1. Sokrates ist sterblich.
2. Sokrates hat drei Silben.
3. Hunde ist der Plural von Hund.
4. Hunde bellen.
5. Athen beginnt mit dem Buchstaben A.
6. Athen ist der Name einer griechischen Stadt.
7. Aristoteles ist nicht klein.
8. Der Name von Aristoteles ist nicht klein.

Aufgabe 1.4. Schreiben Sie die Sätze aus Aufgabe 1.3 unter Verwendung von Anführungszeichen um. (Beachten Sie auch die nicht unterstrichenen Ausdrücke.)

Aufgabe 1.5 (Deskriptive Sätze)**.** Bestimmen Sie, welche der folgenden Sätze deskriptiv sind (d. h. Propositionen ausdrücken).

1. Der Mond umkreist die Erde.
2. Wird es heute regnen?
3. Alle Quadrate haben vier Seiten.
4. Bitte reichen Sie das Salz.
5. Der gegenwärtige König von Frankreich ist kahl.
6. Wenn es geregnet hat, dann ist der Boden nass.
7. München ist die Hauptstadt von Deutschland.
8. Dieser Satz hat fünf Wörter.

Aufgabe 1.6. Sei `i` ein nicht näher bestimmtes Adjektiv, das mindestens einen Vokal und höchstens drei Konsonanten enthält.

Was von den folgenden Aussagen ist wahr, falsch oder unbestimmt bezüglich a und ‚a'?

1. a ist ein Wort.
2. ‚a' ist ein Wort.
3. a ist ein langes Wort.
4. ‚a' ist ein langes Wort.
5. a ist ein kurzes Wort.
6. ‚a' ist ein kurzes Wort.
7. a hat mindestens einen Vokal.
8. ‚a' hat mindestens einen Vokal.
9. a hat mindestens zwei Vokale.
10. ‚a' hat mindestens zwei Vokale.
11. a hat vier Konsonanten.
12. ‚a' hat vier Konsonanten.
13. a steht für ein Wort.
14. ‚a' steht für ein Wort.
15. a steht für ein langes Wort.
16. ‚a' steht für ein kurzes Wort.
17. a ist eine Zahl.
18. ‚a' ist eine Zahl.
19. a steht für eine Zahl.
20. ‚a' steht für eine Zahl.
21. a ist ein Platzhalter.
22. ‚a' ist ein Platzhalter.
23. a steht für einen Platzhalter.
24. ‚a' steht für einen Platzhalter.
25. „a" steht für einen Platzhalter.
26. „a" steht für einen Ausdruck, der für einen Platzhalter steht.

Aufgabe 1.7. Schreiben Sie die durch jeden der folgenden Punkte beschriebene Ausdrucksform mithilfe von Platzhaltern und Quasi-Anführungen um.

1. Zwei Buchstaben, verbunden durch einen Bindestrich, d. h. durch ‚-'.
2. Eine Zahl und ein Buchstabe, in dieser Reihenfolge.
3. Ein Kleinbuchstabe, zwei Großbuchstaben und ein Sternchen, in dieser Reihenfolge.
4. Ein Kleinbuchstabe, zwei Großbuchstaben und ein beliebiger Ausdruck, in dieser Reihenfolge.
5. Ausdrücke, die grundlegende arithmetische Operationen (Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division) zwischen natürlichen Zahlen darstellen.
6. Ausdrücke, die beliebige mathematische Operationen zwischen den Zahlen 1 und 2, in dieser Reihenfolge, darstellen.
7. Ausdrücke, die grundlegende Addition und Multiplikation zwischen den Zahlen 1 oder 2 darstellen.
8. Kategorische Aussagen, d. h. Ausdrücke der Form: Kategorie-Term Kopula Kategorie-Term, wie etwa ‚Der Mensch ist sterblich'.

Geben Sie für jeden verwendeten Platzhalter an, ob er für einen Buchstaben, eine Zahl, eine Ziffer, einen Kategorie-Term, einen Operator usw. steht.

Aufgabe 1.8 (Schemata)**.** Betrachten Sie die folgenden Schemata:

`e` liebt `f`.	: `e` und `f` sind beliebige Ausdrücke	(a)
`e` liebt `f`.	: `e` und `f` sind Eigennamen	(b)
`e` liebt `f`.	: `e` ist ein Menschenname, `f` ist ein Göttername	(c)
`e` liebt `e`.	: `e` ist ein beliebiger Ausdruck	(d)
`e` liebt `e`.	: `e` ist ein Eigenname	(e)
`e` liebt `e`.	: `e` ist ein Menschenname oder ein Göttername	(f)

Für jedes der obigen Schemata bestimmen Sie:
(i) ob es ein Unterschema von (a)–(f) ist; und
(ii) ob einer der folgenden Ausdrücke eine Instanz davon ist.[a]

1. Peter liebt Laura
2. Peter liebt Peter
3. Horus liebt Horus
4. Heute liebt gestern
5. Horus liebt Anna
6. Sie liebt dich
7. Odin liebt Musik
8. Musik liebt Musik
9. Und ich liebe sie
10. Sie liebt sich selbst

[a] Alle Menschennamen und Götternamen sind Eigennamen. Außerdem werden wir, obwohl einige Götternamen wie ‚Zeus' manchmal als Menschennamen verwendet werden können, sie so behandeln, als wären sie keine Menschennamen.

1.8 Lösungen

Lösung zu Aufgabe 1.1.

1. Die verschiedenen Buchstabentypen im Satz sind: ‚A', ‚G', ‚P', ‚a', ‚b', ‚c', ‚d', ‚e', ‚h', ‚i', ‚k', ‚l', ‚m', ‚n', ‚o', ‚p', ‚r', ‚s', ‚t', ‚w'.
2. Insgesamt gibt es 20 Buchstabentypen: 3 Großbuchstaben und 17 Kleinbuchstaben.
3. Die Anzahl der Token, die jedem Buchstabentyp entsprechen, ist in der Tabelle angegeben.

Typen	Token
e	9
i	6
n	5
l, r, t	4
a, h, o, s	3
d	2
A, G, P, b, c, k, m, p, w	1

4. Die Gesamtzahl der Buchstaben-Token beträgt 55.

Lösung zu Aufgabe 1.2.

1. der Mond
2. 8
3. John H. Watson, oder kein Referent
4. kein Referent
5. 0° Celsius
6. kein Referent
7. das Album *Please Please Me* aus dem Jahr 1963
8. 5

Lösung zu Aufgabe 1.3.

Verwendet: 1, 4, 6, 8.

Erwähnt: 2, 3, 5.

Nicht klar: 7.

Lösung zu Aufgabe 1.4.

1. Sokrates ist sterblich.
2. ‚Sokrates' hat drei Silben.
3. ‚Hunde' ist der Plural von ‚Hund'.
4. Hunde bellen.
5. ‚Athen' beginnt mit dem Buchstaben ‚A'.
6. ‚Athen' ist der Name einer griechischen Stadt.
7. Aristoteles ist nicht klein.

   ‚Aristoteles' ist nicht klein.
8. Der Name von Aristoteles ist nicht klein.

Lösung zu Aufgabe 1.5.

1. Propositioneller Satz (Proposition über das Sonnensystem)
2. Fragesatz
3. Propositioneller Satz (Proposition über Geometrie)
4. Imperativsatz
5. Satz in deklarativer Form, der je nach Interpretation eine Proposition ausdrücken kann.
6. Propositioneller Satz (konditionale Proposition)
7. Propositioneller Satz (falsche Proposition über die Welt)
8. Satz in deklarativer Form, der je nachdem, wie wir Wahrheit verstehen, eine Proposition ausdrücken kann.

Lösung zu Aufgabe 1.6.

Wahr: 1, 7, 8, 14, 22, 25.

Falsch: 2, 4, 5, 10, 11–15, 17–21, 23, 24, 26.

Unbestimmt: 3, 6, 9, 16.

Lösung zu Aufgabe 1.7.

Die Form des Ausdrucks in jeder der obigen Teilaufgaben ist:

1. ⌜`l-m`⌝, wobei `l` und `m` Buchstaben sind.
2. ⌜`nl`⌝, wobei `n` eine Zahlwort und `l` ein Buchstabe ist.
3. ⌜`aAB*`⌝, wobei `a` ein Kleinbuchstabe ist und `A`, `B`, `C` Großbuchstaben sind.
4. ⌜`aAB`💣⌝, wobei `a` ein Kleinbuchstabe ist und `A`, `B` Großbuchstaben sind.
5. ⌜`a` ❤ `b`⌝, wobei `a`, `b` Zahlwörter sind, die für natürliche Zahlen stehen, und ❤ ‚+‘, ‚−‘, ‚×‘ oder ‚÷‘ ist.
6. ⌜`a` ❤ `b`⌝, wobei ❤ ein mathematischer Operator ist, `a` das Zahlwort ‚1‘ und `b` das Zahlwort ‚2‘ ist; oder ⌜`1` ❤ `2`⌝, wobei ❤ ein mathematischer Operator ist.
7. ⌜`a` ❤ `b`⌝, wobei `a`, `b` entweder ‚1‘ oder ‚2‘ sind und ❤ entweder ‚+‘ oder ‚×‘ ist.
8. ⌜`s` ♡ `p`⌝, wobei `s`, `p` Terme sind und ♡ eine Kopula ist ().

Beachten Sie die schmalen Leerzeichen in 5–7 sowie die Leerzeichen in 8.

Lösung zu Aufgabe 1.8.

(i) Jede Zelle zeigt an, ob das in der ersten Spalte seiner Zeile aufgeführte Schema ein Unterschema des in der obersten Zeile seiner Spalte aufgeführten Schemas ist.

	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)	(f)
(a)	Ja	Nein	Nein	Nein	Nein	Nein
(b)	Ja	Ja	Nein	Nein	Nein	Nein
(c)	Ja	Ja	Ja	Nein	Nein	Nein
(d)	Ja	Nein	Nein	Ja	Nein	Nein
(e)	Ja	Ja	Nein	Ja	Ja	Nein
(f)	Ja	Ja	Nein	Ja	Ja	Ja

Ein oben als Unterschema eines *anderen* Schemas gekennzeichnetes Schema ist auch dessen echtes Unterschema.

(ii) Jede Zelle zeigt an, ob ein nummerierter Ausdruck eine Instanz eines Schemas ist.

	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)	(f)
1	Ja	Ja	Nein	Nein	Nein	Nein
2	Ja	Ja	Nein	Ja	Ja	Ja
3	Ja	Ja	Nein	Ja	Ja	Ja
4	Ja	Nein	Nein	Nein	Nein	Nein
5	Ja	Ja	Nein	Nein	Nein	Nein
6	Ja	Nein	Nein	Nein	Nein	Nein
7	Ja	Nein	Nein	Nein	Nein	Nein
8	Ja	Nein	Nein	Ja	Nein	Nein
9	Nein	Nein	Nein	Nein	Nein	Nein
10	Ja	Nein	Nein	Nein	Nein	Nein

Sammlungen und Relationen 2

Ein *Objekt* ist etwas, das ein bedeutungsvoller Ausdruck bezeichnen kann. Eine *Sammlung* ist eine Menge von Objekte, ihre *Elemente*.

Kollektionen werden typischerweise durch Ausdrücke der Form $\mathbf{A}$ bezeichnet (fette Grossbuchstaben als Notationskonvention), mit Ausnahmen wie $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{R}$ für Zahlmengen.

Eine *Menge* ist eine Kollektion ohne Ordnung und ohne Wiederholung. Die *Mitgliedschaft* und *nicht-Mitgliedschaft* wird durch $\ulcorner \mathtt{x} \in \mathtt{M} \urcorner$ bzw. $\ulcorner \mathtt{x} \notin \mathtt{M} \urcorner$ ausgedrückt.

Mengen können durch *Aufzählung* ($\{1, 2, 3\}$) oder durch *Mengenbauer-Notation* (z.B. $\{x : A(x)\}$ bzw. $\{x \in \mathbf{M} : A(x)\}$) beschrieben werden. Die *leere Menge* ist $\{\}$.

Wichtige *Mengenoperationen* sind Vereinigung ($\cup$), Durchschnitt ($\cap$) und Differenz ($\setminus$). Wichtige *Mengenrelationen* sind Teilmenge ($\subseteq$), echte Teilmenge ($\subset$), Obermenge sowie Disjunktheit ($\pitchfork$)*.

*: Beispielsweise bedeutet ‚$\mathbf{A} \pitchfork \mathbf{B}$', dass $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$ keine gemeinsamen Elemente haben.

Numerale sind Ausdrücke, die *Zahlen* bezeichnen. Die Menge $\mathbb{N}$ enthält die natürlichen Zahlen (1, 2 usw.) und $\mathbb{W}$ enthält die nichtnegativen ganzen Zahlen (0, 1 usw.). Die Menge $\mathbf{Num}_{\mathbb{N}}$ enthält die Numerale der natürlichen Zahlen (‚1', ‚2' usw.) und $\mathbf{Num}_{\mathbb{W}}$ enthält die der nichtnegativen ganzen Zahlen (‚0', ‚1' usw.).

Arithmetische Operationen sind rekursiv definiert. Die *Ordnungsrelationen* $>, \leq, >, \geq$ sind für beide Zahlen und Numerale definiert.

Die *Kardinalität* $|\mathbf{A}|$ misst die Anzahl der Elemente; für endliche Mengen entspricht sie deren Größe, und $|\mathbb{N}| = \aleph_0$ ist die kleinste unendliche Kardinalität.

Weitere Notationsmittel sind: (i) *subindizierte Platzhalter*, wie ‚$\mathtt{p}_1$', ‚$\mathtt{p}_2$', etc.; (ii) *komplexe Platzhalter*, wie ‚$\mathtt{P}[\mathtt{l}]$', wobei ‚$\mathtt{l}$' eine durch Kommas getrennte Liste von Ausdrücken ist, die in $\mathtt{P}$ vorkommen können. (iii) die *Ellipse* ‚...'.

Die *Potenzmenge* von $\mathbf{A}$ ist $\wp\mathbf{A} = \{\mathbf{X} : \mathbf{X} \subseteq A\}$.

Tupel sind geordnete Kollektionen mit möglicher Wiederholung, z.B. $\langle a_1, \ldots, a_n \rangle$, mit Projektion $\mathbf{T}[i] = a_i$.

Das *Kartesische Produkt* von $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$ in dieser Reihenfolge ist

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \{\langle x, y \rangle : x \in \mathbf{A} \pitchfork y \in \}.$$

Eine *Relation* von $\mathbf{A}$ zu $\mathbf{B}$ ist eine Teilmenge von $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$.

Eine *Funktion* $\mathbf{f} : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ ist eine Relation mit eindeutiger Zuordnung, wobei $\mathbf{f}(x) = y \stackrel{\text{DF}}{=} \langle a, b \rangle \in \mathbf{f}$.

Vernunft und Logik 3

3.1 Argumente und Gültigkeit

Argument und Argumentationen. Die Logik untersucht die Prinzipien korrekten Argumentierens. Dabei ist zwischen *Argumenten* und *Argumentationen* (oder *Argument-Texten*) zu unterscheiden. Ein Argument ist keine sprachliche Entität, sondern eine geordnete Struktur von Propositionen: Einige Propositionen fungieren als *Prämissen*, aus denen eine weitere Proposition, die *Konklusion*, folgen soll. Eine Argumentation dagegen ist der sprachliche Ausdruck eines solchen Arguments, typischerweise durch eine Folge von Sätzen.

Wie Sätze Propositionen ausdrücken, drücken Argumentationen Argumente aus. Daher kann man eine Argumentation als Artikulation mehrerer Sätze auffassen, wobei bestimmte Sätze die Prämissen und ein anderer die Konklusion ausdrücken. In natürlichen Sprachen wird die Konklusion häufig durch einen *Konklusionsmarker* angezeigt, etwa ‚Foglich' oder ‚Daher'. Auch ohne expliziten Marker kann die Reihenfolge der Sätze genügen, damit Sprecher eine Argumentation erkennen.

Im weiteren Verlauf wird die Unterscheidung zwischen Argument und Argumentation teilweise vereinfacht behandelt: Spricht man etwa von den *Prämissen* und *Konklusion einer Argumentation*.

Standardform. Da in natürlicher Sprache oft unklar ist, welche Sätze Prämissen und welche die Konklusion ausdrücken, verwendet man eine *Standardform*. Dabei werden die Prämissen und die Konklusion explizit durch Konklusionsmarker getrennt:

$$\ulcorner P_1 \ldots P_n :\cdot C \urcorner \qquad \text{oder} \qquad \ulcorner C \cdot: P_1 \ldots P_n \urcorner.$$

‚$:\cdot$' ist ein *Rechts-Konklusionsmarker*, weil die Konklusion rechts davon steht; ‚$\cdot:$' ist ein *Links-Konklusionsmarker*. Die Standardform dient nicht dazu, die ursprüngliche sprachliche Gestalt exakt zu bewahren, sondern die argumentative Struktur klar sichtbar zu machen.

Daher können unterschiedliche Argumentationen dieselbe argumentative Struktur ausdrücken. Zwei Texte können sich sprachlich unterscheiden, aber dennoch dieselben Propositionen ausdrücken und somit dasselbe Argument repräsentieren. Beim Umschreiben in Standardform darf man deshalb Formulierungen vereinheitlichen oder sprachlich präzisieren, sofern die ausgedrückten Propositionen erhalten bleiben.

Gültigkeit und Schlüssigkeit. Argumentationen ähneln Sätzen insofern, als sie vollständige Informationseinheiten darstellen. Dennoch sind Argumente keine Propositionen und daher weder wahr noch falsch. Wahr oder falsch sind nur die einzelnen Propositionen, aus denen ein Argument besteht. Stattdessen bewertet man Argumente danach, ob sie *gut* sind. Dabei werden zwei zentrale Begriffe unterschieden:

- Ein Argument ist *gültig* (*valid*), wenn seine Konklusion aus den Prämissen folgt.
- Ein Argument ist *schlüssig* (*sound*), wenn es gültig ist und seine Prämissen wahr sind.

Diese Begriffe werden auch auf Argumentationen übertragen: Eine gültige Argumentation drückt ein gültiges Argument aus; eine schlüssige Argumentation drückt ein schlüssiges Argument aus.

Wichtig ist, dass etwas bereits dann ein Argument ist, wenn es eine Konklusion und beliebig viele Prämissen besitzt. Daraus folgt noch nicht, dass zwischen ihnen tatsächlich eine logische Verbindung besteht.

Logische Gültigkeit. Nicht alle gültigen Argumente sind aus denselben Gründen gültig. Manche Argumente sind aufgrund der Bedeutung bestimmter nicht-logischer Begriffe gültig, andere allein aufgrund ihrer logischen Form.

Das Argument:

Alle Menschen sind sterblich.

Alle Griechen sind Menschen.

∴ Alle Griechen sind sterblich.

ist nicht nur gültig, sondern seine Gültigkeit hängt allein von seiner Struktur ab. Es instanziiert ein allgemeines Schema:

Alle `h` sind `m`.

Alle `g` sind `h`.

∴ Alle `g` sind `m`.

Dagegen ist ein Argument wie

Alle Schwäne sind weiß. ∴ Kein Schwan ist schwarz.

nur deshalb gültig, weil ‚weiß' und ‚schwarz' inhaltlich inkompatibel sind. Seine Gültigkeit beruht also nicht bloß auf der logischen Form.

Ein Argument oder eine Argumentation ist daher genau dann *logisch gültig*, wenn jedes Argument bzw. jede Argumentation derselben logischen Form gültig ist.

Damit entsteht das zentrale Problem der Logik: zu bestimmen, wann ein Argument gültig ist. Unterschiedliche Antworten auf diese Frage führen zu unterschiedlichen logischen Systemen.

3.2 Logische Systeme

Ein logisches System ist eine mathematische Struktur, die erfassen soll, wann bestimmte Ausdrücke andere logisch nach sich ziehen. Formal besteht ein logisches System typischerweise aus zwei Komponenten:

- einer *formalen Sprache* $\mathbf{Fo}_{\mathsf{S}}$, welche die logische Form von Aussagen repräsentiert,
- einer *Konsequenzrelation* $\mathbf{Cn}_{\mathsf{S}}$, welche angibt, welche Inferenzen als logisch korrekt gelten.

Ein logisches System wird gewöhnlich mit Großbuchstaben in einer serifenlosen Schriftart bezeichnet, etwa $\mathsf{S0}$ oder $\mathsf{S1}$.

Die formale Definition beschreibt ein System als Paar

$$\mathsf{S} = \langle \mathbf{Fo}_{\mathsf{S}}, \mathbf{Cn}_{\mathsf{S}} \rangle ,$$

wobei $\mathbf{Fo}_{\mathsf{S}}$ eine Menge von Formeln und $\mathbf{Cn}_{\mathsf{S}}$ eine Relation zwischen Sammlungen von Formeln ist.

Wir werden diese Struktur unter Berücksichtigung der folgenden zusätzlichen Elemente, die für ein logisches System relevant sind, weiter analysieren:

- das *Vokabular* $\mathbf{Vo}_{\mathsf{S}}$,
- die *Inferenzrelation* $\mathbf{In}_{\mathsf{S}}$,

Das Vokabular $\mathbf{Vo}_{\mathsf{S}}$ enthält die verwendeten Symbole. Daraus wird die Sprache $\mathbf{Fo}_{\mathsf{S}}$ konstruiert. Die Inferenzrelation $\mathbf{In}_{\mathsf{S}}$ umfasst alle formal möglichen Inferenzen des Systems, unabhängig davon, ob sie korrekt sind. Die Konsequenzrelation $\mathbf{Cn}_{\mathsf{S}}$ ist dann eine Teilmenge davon und enthält genau die gültigen Inferenzen.

Zusätzlich werden zwei weitere Arten von Systemen eingeführt:

- ein *Kalkül* oder *Herleitungssystem*, das Regeln zum Herleiten von Formeln bereitstellt,
- eine *Semantik* oder ein *Interpretationssystem*, das den Symbolen Bedeutungen oder Referenzen zuordnet.

3.3 Vokabular

Das Vokabular eines logischen Systems besteht typischerweise aus drei Teilen:

$$\mathbf{Vo}_{\mathsf{S}} = \langle \mathbf{Log}_{\mathsf{S}}, \mathbf{Non}_{\mathsf{S}}, \mathbf{Aux}_{\mathsf{S}} \rangle .$$

- $\mathbf{Log}_{\mathsf{S}}$: logische Symbole,
- $\mathbf{Non}_{\mathsf{S}}$: nicht-logische Symbole,
- $\mathbf{Aux}_{\mathsf{S}}$: Hilfssymbole wie Klammern.

Die logischen Symbole bestimmen die logische Struktur; die nicht-logischen Symbole liefern den inhaltlichen Gehalt; die Hilfssymbole dienen der formalen Reglementierung von Ausdrücken.

Viele der Systeme, die wir besprechen werden, verwenden einige der folgenden Alphabete:

$$\begin{aligned}
\mathbf{Abc} &\stackrel{\text{DF}}{=} \{,a`,,b`,,c`\}, & \mathbf{ABC} &\stackrel{\text{DF}}{=} \{,A`,,B`,,C`\},\\
\mathbf{Pqr} &\stackrel{\text{DF}}{=} \{,p`,,q`,,r`\}, & \mathbf{PQR} &\stackrel{\text{DF}}{=} \{,P`,,Q`,,R`\},\\
\mathbf{Xyz} &\stackrel{\text{DF}}{=} \{,x`,,y`,,z`\}, & \mathbf{XYZ} &\stackrel{\text{DF}}{=} \{,X`,,Y`,,X`\},\\
\mathbf{Con} &\stackrel{\text{DF}}{=} \{,\neg`,,\vee`,,\wedge`,,\rightarrow`,,\leftrightarrow`\}, & \mathbf{Par} &\stackrel{\text{DF}}{=} \{,(`,,)`\}.
\end{aligned}$$

Ein wichtiger Unterschied besteht darin, dass logische Symbole meist endlich viele sind, während man von nicht-logischen Symbolen typischerweise unendlich viele benötigt.

Die Aussagenlogik S0 verwendet als logische Symbole die klassischen Junktoren: ,¬‘, ,∨‘, ,∧‘, ,→‘, ,↔‘. Dabei wird zwischen einstelligen und zweistelligen Junktoren unterschieden:

$$\mathbf{Log}_{\mathsf{S0}}[1] = \{,\neg`\}, \qquad \mathbf{Log}_{\mathsf{S0}}[2] = \mathbf{Con} - \{,\neg`\}.$$

Die nicht-logischen Symbole sind Aussagenvariablen wie

$$,p`,,q`,,r`,,p_1`,,\ldots`,,r_1`,,\ldots`,\ldots$$

Zusammen mit den Klammern bilden sie das Vokabular von S0.

3.4 Formeln

Die formale Sprache eines logischen Systems besteht aus seinen *Formeln*. Diese werden aus dem Vokabular des Systems nach einer Definition oder präzisen Bildungsregeln konstruiert.

Die Formeln der Aussagenlogik werden rekursiv erzeugt.

Ausgangspunkt sind die Aussagenvariablen, die als atomare Formeln fungieren. Aus ihnen werden mittels Junktoren komplexere Formeln gebildet.

Die rekursive Definition legt fest:

1. Jede Aussagenvariable ist eine Formel.
2. Ist $\mathtt{F}$ eine Formel, dann auch $\ulcorner\neg\mathtt{A}\urcorner$.
3. Sind $\mathtt{A}$ und $\mathtt{B}$ Formeln, dann auch sind $\ulcorner\mathtt{A} \wedge \mathtt{B}\urcorner$, $\ulcorner\mathtt{A} \vee \mathtt{B}\urcorner$, $\ulcorner\mathtt{A} \rightarrow \mathtt{B}\urcorner$, $\ulcorner\mathtt{A} \leftrightarrow \mathtt{B}\urcorner$.
4. Nur Ausdrücke, die durch endlich viele Anwendungen dieser Regeln entstehen, sind Formeln.

Die Sprache wird also schrittweise aus einfacheren Bestandteilen aufgebaut.

3.5 Inferenzrelationen

Eine Inferenzrelation $\mathbf{In}_{\mathsf{S}}$ ist eine Menge von Inferenzen. Eine Inferenz ist das formale Gegenstück zu einem Argument: Eine Menge von Formeln repräsentiert die Prämissen, eine weitere Menge die Konklusionen.

Die Inferenzrelation beschreibt alle formalen Arten, wie Formeln in einem System als Prämissen und Konklusionen angeordnet werden können, unabhängig davon, ob die entsprechende Inferenz gültig ist.

Zur Darstellung verwendet man die *Inferenzstrichnotation*:

$$\ulcorner\mathtt{A}_1, \ldots, \mathtt{A}_m \ / \ \mathtt{B}_1, \ldots, \mathtt{B}_n\urcorner.$$

Oberhalb des Strichs stehen die Prämissen, darunter die Konklusionen. Formal kann diese Notation verschiedene Typen von Tupeln oder Mengen repräsentieren; welche genaue Form gemeint ist, ergibt sich aus dem Kontext.

Obwohl viele logische Systeme nur eine Konklusion zulassen, wird die allgemeine Definition so formuliert, dass auch Systeme mit mehreren Konklusionen möglich sind.

Für moderne logische Systeme wie $\mathsf{S0}$ und $\mathsf{S1}$ gilt typischerweise:

$$\mathbf{In}_{\mathsf{M}} = \wp\mathbf{Fo}_{\mathsf{M}} \times \{\mathtt{F} : \mathtt{F} \in \mathbf{Fo}_{\mathsf{M}}\}.$$

Eine Inferenz besteht dort also aus:

- einer beliebigen Menge von Formeln als Prämissen,
- genau einer Formel als Konklusion.

Die Inferenzrelation erfasst damit die gesamte formale Struktur möglicher Schlüsse innerhalb eines logischen Systems.

3.6 Konsequenzrelation

Eine Konsequenzrelation $\mathbf{Cn}_{\mathsf{S}}$ ist stets eine Teilmenge der Menge $\mathbf{In}_{\mathsf{S}}$ aller Inferenzen, welche genau die in S gültigen Inferenzen enthält – also diejenigen Inferenzen, die logisch gültig in S sind:

$$\mathbf{Cn}_{\mathsf{S}} \subseteq \mathbf{In}_{\mathsf{S}} : \mathsf{S} \text{ ist ein logisches System.}$$

Der Inhalt von $\mathbf{Cn}_{\mathsf{S}}$ muss dabei nicht notwendigerweise durch eine bestimmte Semantik oder einen Kalkül festgelegt werden. Man kann ihn auch explizit bestimmen, indem man genau angibt, welche Inferenzen in S gültig sind, wie später bei A.

In den meisten Fällen – insbesondere bei $\mathsf{S0}$ und $\mathsf{S1}$ – erfolgt die Spezifikation jedoch mittels einer Semantik oder eines Kalküls.

Da es unendlich viele $\mathsf{S0}$-gültige Inferenzen gibt, können wir sie nicht vollständig aufzählen. Dennoch haben wir eine klare Vorstellung davon, welche Inferenzen gültig sein sollen.

Zu den gewünschten gültigen Schlussformen gehören insbesondere klassische Regeln wie: *Modus ponendo ponens*, *Modus tollendo tollens*, disjunktiver Syllogismus, Gesetz des ausgeschlossenen Dritten, Gesetz des Widerspruchs, De-Morgan-Gesetze, doppelte Negation, Konjunktion und Vereinfachung, Addition, Explosion, sowie Kommutativität, Idempotenz, unter anderen.

Die bloße Aufzählung solcher Regeln ist jedoch keine besonders effektive Methode zur Festlegung von $\mathbf{Cn}_{\mathsf{S0}}$. Stattdessen ist es meist sinnvoller, eine Semantik oder einen Kalkül zu definieren, über den sich $\mathbf{Cn}_{\mathsf{S0}}$ charakterisieren lässt.

3.7 Interpretationssystem

Die Formeln einer formalen Sprache $\mathbf{Fo}_{\mathsf{S}}$ stehen normalerweise nicht unmittelbar für Propositionen. In der Formel ‚P^1a‘ etwa stehen ‚P^1‘ und ‚a‘ lediglich für nichtlogische Symbole ohne festgelegte Bedeutung. Wir wissen nur, dass ‚P^1‘ ein einstelliges Prädikat bezeichnet und ‚a‘ ein bestimmtes Objekt im Bereich.

Daher können wir sagen, dass Formeln in $\mathbf{Fo}_{\mathsf{S}}$ zunächst weder wahr noch falsch sind. Erst wenn zusätzliche Informationen über ihre nichtlogischen Symbole gegeben werden, können Formeln als wahr oder falsch *interpretiert* werden.

Wenn wir beispielsweise ‚P^1‘ als das Prädikat ‚ist in Philosoph‘ und ‚a‘ als Aristoteles interpretieren, dann steht ‚P^1a‘ für die Proposition, dass Aristoteles Philosoph ist; die Formel wäre unter dieser Interpretation wahr.

Allgemein liefert eine Interpretation $\mathfrak{I}$ einer formalen Sprache $\mathbf{Fo}_{\mathsf{S}}$ eine Zuordnung der nichtlogischen Symbole $\mathbf{Non}_{\mathsf{S}}$ von S zu einem Bereich oder Domäne:

$$\begin{aligned}\mathfrak{I} \text{ ist eine Interpretation auf } \mathbf{Fo}_{\mathsf{S}} &\overset{\text{DF}}{=} \mathfrak{I} = \langle \mathbf{D}, \iota \rangle \\ &: \iota \subseteq \mathbf{Non}_{\mathsf{S}} \times \mathbf{D}.\end{aligned}$$

Die nichtlogischen Symbole eines aussagenlogischen Systems S sind Aussagenvariablen, die durch eine Interpretation auf Wahrheitswerte abgebildet werden. In der Prädikatenlogik erster Stufe werden individuelle Terme und Prädikate auf Objekte bzw. Mengen im Bereich abgebildet.

In beiden Fällen erweitern wir die Interpretation zu einer *Bewertung* aller Formeln von $\mathbf{Fo}_{\mathsf{S}}$ auf logische Werte:

$$\begin{aligned}\hat{\mathfrak{I}} \text{ ist eine Bewertung auf } \mathbf{Fo}_{\mathsf{S}} &\overset{\text{DF}}{=} \hat{\mathfrak{I}} = \langle \mathbf{LV}, \hat{\iota} \rangle \\ &: \hat{\iota} \subseteq \mathbf{Fo}_{\mathsf{S}} \times \mathbf{LV} \wedge \\ &\quad \mathbf{LV} \text{ ist eine Menge logischer Werte.}\end{aligned}$$

Ein *Interpretationssystem* oder eine *Semantik* $\mathbf{Int}_{\mathsf{S}}$ auf einem logischen System S besteht aus: einer Menge $\mathbf{Int}_{\mathsf{S}}$ von Interpretationen auf $\mathbf{Fo}_{\mathsf{S}}$, einer Menge $\mathbf{LV}_{\mathsf{S}}$ logischer Werte, einer Teilmenge $\mathbf{Des}^{+}_{\mathsf{S}}$ bezeichneter Werte, einer Teilmenge $\mathbf{Des}^{-}_{\mathsf{S}}$ anti-bezeichneter Werte, einer Menge $\mathbf{Val}_{\mathsf{S}}$ von Bewertungen auf $\mathbf{Fo}_{\mathsf{S}}$, sowie einer semantischen Konsequenzrelation $\vDash_{\mathsf{S}}$. Formal:

$$\begin{aligned}&\mathbf{Sem}_{\mathsf{S}} \text{ ist eine Semantik auf } \mathsf{S} \\ &\quad \overset{\text{DF}}{=} \mathbf{Sem}_{\mathsf{S}} = \langle \mathbf{Int}_{\mathsf{S}}, \mathbf{LV}_{\mathsf{S}}, \mathbf{Val}_{\mathsf{S}}, \mathbf{Des}^{+}_{\mathsf{S}}, \mathbf{Des}^{-}_{\mathsf{S}}, \vDash_{\mathsf{S}} \rangle \\ &\quad : \mathbf{Int}_{\mathsf{S}} \text{ ist eine Menge von Interpretationen auf } \mathbf{Fo}_{\mathsf{S}} \wedge \\ &\qquad \mathbf{LV}_{\mathsf{S}} \text{ ist eine Menge logischer Werte } \wedge \\ &\qquad \mathbf{Des}^{+}_{\mathsf{S}} \subseteq \mathbf{LV}_{\mathsf{S}} \wedge \\ &\qquad \mathbf{Des}^{-}_{\mathsf{S}} \subseteq \mathbf{LV}_{\mathsf{S}} \wedge \\ &\qquad \mathbf{Val}_{\mathsf{S}} \text{ ist eine Menge von Bewertungen auf } \mathbf{Fo}_{\mathsf{S}} \wedge \\ &\qquad \vDash_{\mathsf{S}} \subseteq \mathbf{In}_{\mathsf{S}}.\end{aligned}$$

Intuitiv enthält $\mathbf{Des}^{+}_{\mathsf{S}}$ jene Werte, die mit Wahrheit bzw. Akzeptierbarkeit verbunden sind, während $\mathbf{Des}^{-}_{\mathsf{S}}$ jene Werte enthält, die mit Falschheit bzw. Zurückweisung verbunden sind.

Semantik für $\mathsf{S0}$**.** In einem klassischen aussagenlogischen System $\mathsf{S0}$ sind die nichtlogischen Symbole Aussagenvariablen. Eine klassische aussagenlogische Interpretation (kaI) ordnet jeder Aussagenvariablen genau einen der beiden klassischen Wahrheitswerte $\mathbf{1}$ oder $\mathbf{0}$ zu. Formal gilt:

$$\langle \mathbf{D}, \iota \rangle \text{ ist eine } \mathbf{kaI} \text{ auf } \mathbf{Fo}_{\mathsf{S}} \overset{\text{DF}}{=} \mathbf{D} = \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\} \wedge \iota : \mathbf{Pro}_{\mathsf{S}} \longrightarrow \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}.$$

Eine solche Interpretation wird anschließend auf alle Formeln erweitert. Dies geschieht durch eine Bewertung $\hat{\mathfrak{I}}$, die den Wahrheits-

wert zusammengesetzter Formeln rekursiv anhand der üblichen Wahrheitstabellen bestimmt.

Eine Bewertung $\hat{\mathfrak{I}}$ ist dann eine klassische Aussagenlogisch Erweiterung (kaE) des kaI $\mathfrak{I}$ auf $\mathbf{Fo}_S$ gdw

$$
\begin{aligned}
&\overset{\text{DF}}{=} \hat{\iota}(\mathtt{A}) = \iota(\mathtt{A}) && \bigwedge\!\!\!\bigwedge \\
&\hat{\iota}(\ulcorner\neg\mathtt{F}\urcorner) = \mathbf{1} \Leftrightarrow \hat{\iota}(\mathtt{F}) = \mathbf{0} && \bigwedge\!\!\!\bigwedge \\
&\hat{\iota}(\ulcorner(\mathtt{F} \wedge \mathtt{G})\urcorner) = \mathbf{1} \Leftrightarrow \hat{\iota}(\mathtt{F}) = \mathbf{1} \bigwedge\!\!\!\bigwedge \hat{\iota}(\mathtt{G}) = \mathbf{1} && \bigwedge\!\!\!\bigwedge \\
&\hat{\iota}(\ulcorner(\mathtt{F} \vee \mathtt{G})\urcorner) = \mathbf{1} \Leftrightarrow \hat{\iota}(\mathtt{F}) = \mathbf{1} \bigvee\!\!\!\bigvee \hat{\iota}(\mathtt{G}) = \mathbf{1} && \bigwedge\!\!\!\bigwedge \\
&\hat{\iota}(\ulcorner(\mathtt{F} \rightarrow \mathtt{G})\urcorner) = \mathbf{1} \Leftrightarrow \hat{\iota}(\mathtt{F}) = \mathbf{0} \bigvee\!\!\!\bigvee \hat{\iota}(\mathtt{G}) = \mathbf{1} && \bigwedge\!\!\!\bigwedge \\
&\hat{\iota}(\ulcorner(\mathtt{F} \leftrightarrow \mathtt{G})\urcorner) = \mathbf{1} \Leftrightarrow \hat{\iota}(\mathtt{F}) = \hat{\iota}(\mathtt{G}) \\
&: \mathtt{A} \in \mathbf{Pro}_S \bigwedge\!\!\!\bigwedge \mathtt{F}, \mathtt{G} \in \mathbf{Fo}_S.
\end{aligned}
$$

Anhand von Wahrheitstabellen könnten wir dies wie folgt umformulieren: Eine Bewertung $\hat{\mathfrak{I}}$ ist dann eine klassische Aussagenlogisch Erweiterung (kaE) des kaI $\mathfrak{I}$ auf $\mathbf{Fo}_S$ gdw $\hat{\iota}(\mathtt{A}) = \iota(\mathtt{A}) \bigwedge\!\!\!\bigwedge$

F	¬F
0	**1**
1	**0**

∧	**0**	**1**
0	**0**	**0**
1	**0**	**1**

∨	**0**	**1**
0	**0**	**1**
1	**1**	**1**

→	**0**	**1**
0	**1**	**1**
1	**0**	**1**

↔	**0**	**1**
0	**1**	**0**
1	**0**	**1**

$: \mathtt{A} \in \mathbf{Pro}_S \bigwedge\!\!\!\bigwedge \mathtt{F} \in \mathbf{Fo}_S.$

Die standard semantische Konsequenzrelation besagt dann:

$$
\begin{aligned}
\langle \mathbf{A}, \{\mathtt{B}\}\rangle \in \vDash_S \Leftrightarrow \neg\exists\mathfrak{I}\,(&\mathfrak{I} \text{ ist eine kaI} \bigwedge\!\!\!\bigwedge \\
&\bigvee\!\!\!\bigvee \mathtt{A} \in \mathbf{A}\,(\hat{\iota}(\mathtt{A}) \in \mathbf{Des}_S^+ \bigwedge\!\!\!\bigwedge \hat{\iota}(\mathtt{B}) \in \mathbf{Des}_S^-)).
\end{aligned}
$$

Das heißt, eine Formel $\mathtt{B}$ folgt semantisch aus einer Menge von Formeln $\mathbf{A}$ genau dann, wenn es keine Interpretation gibt, unter der alle Formeln aus $\mathbf{A}$ bezeichnet (klassisch, wahr sind) sind, während $\mathtt{B}$ anti-bezeichnet ist (klassisch, falsch sind).

Wir werden die folgenden üblichen Konventionen anwenden:

$$
\begin{aligned}
\mathtt{A} \vDash_S \mathtt{B} &\overset{\text{DF}}{=} \ulcorner\langle \mathtt{A}, \mathtt{B}\rangle \in \vDash_S\urcorner \\
\mathtt{A} \nvDash_S \mathtt{B} &\overset{\text{DF}}{=} \ulcorner\langle \mathtt{A}, \mathtt{B}\rangle \notin \vDash_S\urcorner
\end{aligned}
$$

Daraus ergibt sich die klassische Semantik von S0:

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{Sem}_{\mathsf{S0}} \text{ ist eine Semantik auf } \mathsf{S0} \\
&\quad \stackrel{\text{DF}}{=} \mathbf{Int}_{\mathsf{S0}} = \{\mathfrak{I} : \mathfrak{I} \text{ ist eine kaI auf } \mathbf{Fo}_{\mathsf{S0}}\} && \wedge\!\!\!\wedge \\
&\quad\ \ \mathbf{LV}_{\mathsf{S0}} = \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\} && \wedge\!\!\!\wedge \\
&\quad\ \ \mathbf{Des}^{+}_{\mathsf{S0}} = \{\mathbf{1}\} && \wedge\!\!\!\wedge \\
&\quad\ \ \mathbf{Des}^{-}_{\mathsf{S0}} = \{\mathbf{0}\} && \wedge\!\!\!\wedge \\
&\quad\ \ \mathbf{Val}_{\mathsf{S0}} = \{\hat{\mathfrak{I}} : \exists \mathfrak{I} \in \mathbf{Int}_{\mathsf{S0}}\, (\hat{\mathfrak{I}} \text{ is eine kaE von } \mathfrak{I})\} && \wedge\!\!\!\wedge \\
&\quad\ \ \vDash_{\mathsf{S0}} \subseteq \mathbf{In}_{\mathsf{S0}} \wedge\!\!\!\wedge \vDash_{\mathsf{S0}} \text{ is classical.}
\end{aligned}
$$

3.8 Herleitungssystem

Während ein Interpretationssystem eine semantische Beschreibung logischer Konsequenz liefert, bietet ein *Herleitungssystem* oder *Kalkül* eine syntaktische Beschreibung. Anstatt Formeln Bedeutungen zuzuordnen, legen wir fest, wie Formeln aus anderen Formeln mittels Herleitungsregeln gewonnen werden dürfen.

Eine *Herleitungsregel* ist dabei eine Regel, die erlaubt, einen Ausdruck $\mathtt{E}$ niederzuschreiben, sofern bestimmte andere Ausdrücke $\mathtt{E}_1, \ldots, \mathtt{E}_m$ bereits vorhanden sind.

Eine Menge solcher Regeln heißt *deduktive Basis*:

$$\mathbf{DBas}_{\mathsf{S}} \subseteq \{\mathsf{R} : \mathsf{R} \text{ ist eine Herleitungsregel}\}.$$

Auf Grundlage einer deduktiven Basis können Herleitungen konstruiert werden. Eine Herleitung besteht aus einer Folge von Ausdrücken

$$\mathtt{E}_1, \ldots, \mathtt{E}_n,$$

wobei jeder Ausdruck entweder eine Annahme ist oder aus früheren Ausdrücken mittels einer Herleitungsregel gewonnen wird.

Üblicherweise schreibt man Herleitungen als nummerierte Listen von Formeln, wobei rechts jeweils angegeben wird, ob eine Formel eine Annahme ist oder durch Anwendung einer Regel aus früheren Zeilen folgt.

Zur Darstellung solcher Herleitungen verwenden wir die Fitch-Notation. Sie erlaubt nicht nur die Darstellung konkreter Herleitungen, sondern auch die Formulierung von Herleitungsregeln selbst.

Eine Fitch-Herleitung besteht aus einer Folge von Schritten, in denen Formeln entweder vorausgesetzt oder durch Regeln aus früheren Schritten abgeleitet werden. Dabei können auch Unter-Herleitungen eingebettet werden, etwa um Annahmen temporär einzuführen und später wieder zu entladen.

Ein *Herleitungssystem* oder *Kalkül* $\mathbf{Cal}_{\mathsf{S}}$ auf einem logischen System S besteht aus: einer deduktiven Basis $\mathbf{DBas}_{\mathsf{S}}$, einer Menge $\mathbf{Der}_{\mathsf{S}}$ von Herleitungen, einer Funktion $\mathbf{Prem}_{\mathsf{S}}$ zur Bestimmung der Prämissen, einer Funktion $\mathbf{Conc}_{\mathsf{S}}$ zur Bestimmung der Konklusionen, sowie einer syntaktischen Konsequenzrelation $\vdash_{\mathsf{S}}$. Formal:

$\mathbf{Cal}_{\mathsf{S}}$ ist ein Kalkül auf S

$$\begin{aligned}
&\overset{\text{DF}}{=} \mathbf{Cal}_{\mathsf{S}} = \langle \mathbf{DBas}_{\mathsf{S}}, \mathbf{Der}_{\mathsf{S}}, \mathbf{Prem}_{\mathsf{S}}, \mathbf{Conc}_{\mathsf{S}}, \vdash_{\mathsf{S}} \rangle \\
&: \mathbf{DBas}_{\mathsf{S}} \text{ ist eine deduktive Basis auf } \mathbf{Fo}_{\mathsf{S}} \wedge\!\!\!\wedge \\
&\quad \mathbf{Der}_{\mathsf{S}} = \{\mathbf{D} : \mathbf{D} \text{ ist eine Herleitung auf } \mathbf{Fo}_{\mathsf{S}}\} \wedge\!\!\!\wedge \\
&\quad \mathbf{Prem}_{\mathsf{S}} : \mathbf{Der}_{\mathsf{S}} \to \wp\mathbf{Fo}_{\mathsf{S}} \wedge\!\!\!\wedge \\
&\quad \mathbf{Conc}_{\mathsf{S}} : \mathbf{Der}_{\mathsf{S}} \to \wp\mathbf{Fo}_{\mathsf{S}} \wedge\!\!\!\wedge \\
&\quad \vdash_{\mathsf{S}} = \{\langle \mathbf{A}, \mathbf{B} \rangle : \exists \mathbf{X} \in \mathbf{Der}_{\mathsf{S0}} (\mathbf{Prem}_{\mathsf{S0}}(\mathbf{X}) = \mathbf{A} \wedge\!\!\!\wedge \mathbf{Conc}_{\mathsf{S0}}(\mathbf{X}) = \mathbf{B})\}.
\end{aligned}$$

Kalkül für $\mathsf{S0}$. Die deduktive Basis von $\mathsf{S0}$ besteht aus Regeln für den Umgang mit den logischen Junktoren.

Traditionell unterscheidet man dabei zwischen Einführungs- und Eliminationsregeln. Einführungs- oder $^{+}$-regeln legen fest, unter welchen Bedingungen eine Formel mit einem bestimmten Junktor abgeleitet werden darf. Eliminations- oder $^{-}$-regeln beschreiben dagegen, wie Informationen aus solchen Formeln gewonnen werden können. Diese Regeln sind:

Reiteration.

$$\begin{array}{r|ll}
a & \mathtt{A} & \\
 & \vdots & \\
 & \ldots \mid \mathtt{A} & \text{Reit}, a
\end{array}$$

Negation.

$$\begin{array}{r||ll}
a & \neg\mathtt{A} & \\
 & \vdots & \\
 & \mathtt{B} & \\
 & \vdots & \\
b & \neg\mathtt{B} & \\
 & \vdots & \\
 & \mathtt{A} & \neg^{-}, a\text{–}b
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r||ll}
a & \mathtt{A} & \\
 & \vdots & \\
 & \mathtt{B} & \\
 & \vdots & \\
b & \neg\mathtt{B} & \\
 & \vdots & \\
 & \neg\mathtt{A} & \neg^{+}, a\text{–}b
\end{array}$$

Konjunktion.

$$\begin{array}{l|ll} a & (\mathtt{A} \wedge \mathtt{B}) & \\ & \vdots & \\ & \mathtt{A} & \wedge_1^-, a \end{array} \qquad \begin{array}{l|ll} a & (\mathtt{A} \wedge \mathtt{B}) & \\ & \vdots & \\ & \mathtt{B} & \wedge_2^-, a \end{array} \qquad \begin{array}{l|ll} a & \mathtt{A} & \\ & \vdots & \\ b & \mathtt{B} & \\ & \vdots & \\ & (\mathtt{A} \wedge \mathtt{B}) & \wedge^+, a, b \end{array}$$

Disjunktion.

$$\begin{array}{l|ll} a & (\mathtt{A} \vee \mathtt{B}) & \\ & \vdots & \\ b & \begin{array}{|l} \mathtt{A} \\ \hline \vdots \\ \mathtt{C} \end{array} & \\ c & & \\ & \vdots & \\ d & \begin{array}{|l} \mathtt{B} \\ \hline \vdots \\ \mathtt{C} \end{array} & \\ e & & \\ & \vdots & \\ & \mathtt{C} & \vee^-, a, b\text{–}c, d\text{–}e \end{array} \qquad \begin{array}{l|ll} a & \mathtt{A} & \\ & \vdots & \\ & (\mathtt{A} \vee \mathtt{B}) & \vee_1^+, a \end{array} \qquad \begin{array}{l|ll} a & \mathtt{B} & \\ & \vdots & \\ & (\mathtt{A} \vee \mathtt{B}) & \vee_2^+, a \end{array}$$

Implikation.

$$\begin{array}{l|ll} a & (\mathtt{A} \to \mathtt{B}) & \\ & \vdots & \\ b & \mathtt{A} & \\ & \vdots & \\ & \mathtt{B} & \to^-, a, b \end{array} \qquad \begin{array}{l|ll} a & \begin{array}{|l} \mathtt{A} \\ \hline \vdots \\ \mathtt{B} \end{array} & \\ b & & \\ & \vdots & \\ & (\mathtt{A} \to \mathtt{B}) & \to^+, a\text{–}b \end{array}$$

Äquivalenz.

$$\begin{array}{l|ll}
a & (\mathtt{A} \leftrightarrow \mathtt{B}) & \\
 & \vdots & \\
b & \mathtt{A} & \\
 & \vdots & \\
 & \mathtt{B} & \leftrightarrow_1^-, a, b
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l|l}
a & \mathtt{A} \\ \hline
 & \vdots \\
b & \mathtt{B} \\
 & \vdots \\
c & \mathtt{B} \\ \hline
 & \vdots \\
d & \mathtt{A} \\
 & \vdots \\
 & (\mathtt{A} \leftrightarrow \mathtt{B}) \quad \leftrightarrow^+, a\text{–}b, c\text{–}d
\end{array}$$

$$\begin{array}{l|ll}
a & (\mathtt{A} \leftrightarrow \mathtt{B}) & \\
 & \vdots & \\
b & \mathtt{B} & \\
 & \vdots & \\
 & \mathtt{A} & \leftrightarrow_2^-, a, b
\end{array}$$

Somit könnten wir die deduktive Basis $\mathbf{DBas}_{\mathsf{S}}$ wie folgt definieren:

$$\mathbf{DBas}_{\mathsf{S}} \stackrel{\text{DF}}{=} \{\mathsf{Reit}, \neg^+, \neg^-, \wedge^+, \wedge_1^-, \wedge_2^-, \vee_1^+, \vee_2^+, \vee^-, \rightarrow^+, \rightarrow^-, \leftrightarrow^+, \leftrightarrow^-\}.$$

Das resultierende Kalkül $\mathbf{Cal}_{\mathsf{S0}}$ basiert auf Fitch-Herleitungen aus dieser deduktiven Basis. Die Funktionen $\mathbf{Prem}_{\mathsf{S0}}$ und $\mathbf{Conc}_{\mathsf{S0}}$ ordnen jeder Fitch-Herleitung ihre Prämissen bzw. ihre Konklusion zu.

$\mathbf{Cal}_{\mathsf{S0}}$ ist eine Kalkül auf $\mathsf{S0}$

$$\begin{aligned}
&\stackrel{\text{DF}}{=} \mathbf{Cal}_{\mathsf{S0}} = \langle \mathbf{DBas}_{\mathsf{S0}}, \mathbf{Der}_{\mathsf{S0}}, \mathbf{Prem}_{\mathsf{S0}}, \mathbf{Conc}_{\mathsf{S0}}, \vdash_{\mathsf{S0}} \rangle \\
&: \mathbf{DBas}_{\mathsf{S0}} \text{ ist eine deduktive Basis } \mathbf{Fo}_{\mathsf{S0}} \mathbin{/\!\!\wedge\!\!\backslash} \\
&\quad \mathbf{Der}_{\mathsf{S0}} = \{\mathbf{D} : \mathbf{D} \text{ ist eine Fitch Herleitung auf } \mathbf{Fo}_{\mathsf{S0}} \text{ aus } \mathbf{DBas}_{\mathsf{S0}}\} \mathbin{/\!\!\wedge\!\!\backslash} \\
&\quad \mathbf{Prem}_{\mathsf{S0}} : \mathbf{Der}_{\mathsf{S0}} \rightarrow \wp\mathbf{Fo}_{\mathsf{S0}} \mathbin{/\!\!\wedge\!\!\backslash} \\
&\quad \mathbf{Conc}_{\mathsf{S0}} : \mathbf{Der}_{\mathsf{S0}} \rightarrow \wp\mathbf{Fo}_{\mathsf{S0}} \mathbin{/\!\!\wedge\!\!\backslash} \\
&\quad \vdash_{\mathsf{S}} = \{\langle \mathbf{A}, \mathbf{B} \rangle : \exists \mathbf{X} \in \mathbf{Der}_{\mathsf{S0}} (\mathbf{Prem}_{\mathsf{S0}}(\mathbf{X}) = \mathbf{A} \mathbin{/\!\!\wedge\!\!\backslash} \mathbf{Conc}_{\mathsf{S0}}(\mathbf{X}) = \mathbf{B})\}.
\end{aligned}$$

Mit Hilfe solcher Herleitungen lassen sich klassische Schlussformen syntaktisch beweisen. So kann etwa Modus tollendo tollens durch eine Fitch-Herleitung gezeigt werden, ebenso Importation oder andere klassische Regeln.

3.9 Übungen

Für die folgenden Inferenzen, die Instanzen der in Klammern genannten Inferenzformen sind:

$$
\begin{array}{rl}
(p \to q), p \;/\; q & \text{(MPP)} \\
(p \to q), \neg q \;/\; \neg p & \text{(MTT)} \\
p \;/\; p & \text{(Reit.)} \\
(p \vee q), \neg p \;/\; q & \text{(DS1)} \\
(p \vee q), \neg q \;/\; p & \text{(DS2)} \\
/\; (p \vee \neg p) & \text{(LEM)} \\
/\; \neg(p \wedge \neg p) & \text{(LNC)} \\
/\; (p \to p) & \text{(Refl. }\to\text{)} \\
((p \wedge q) \to r) \;/\; (p \to (q \to r)) & \text{(Exp.)} \\
(p \to (q \to r)) \;/\; ((p \wedge q) \to r) & \text{(Imp.)} \\
\neg(p \wedge q) \;/\!\!/\; (\neg p \vee \neg q) & \text{(DM1)} \\
\neg(p \vee q) \;/\!\!/\; (\neg p \wedge \neg q) & \text{(DM2)} \\
p \;/\; \neg\neg p & \text{(DN1)} \\
\neg\neg p \;/\; p & \text{(DN2)} \\
p \;/\!\!/\; (p \vee p) & \text{(Idem. }\vee\text{)} \\
p \;/\!\!/\; (p \wedge p) & \text{(Idem. }\wedge\text{)} \\
(p \wedge q) \;/\; p & \text{(Simp. 1)} \\
(p \wedge q) \;/\; q & \text{(Simp. 2)} \\
p \;/\; (p \vee q) & \text{(Add. 1)} \\
q \;/\; (p \vee q) & \text{(Add. 2)} \\
p, q \;/\; (p \wedge q) & \text{(Conj.)} \\
(p \wedge \neg p) \;/\; q & \text{(ECQ)} \\
(p \wedge q) \;/\; (q \wedge p) & \text{(Comm. }\wedge\text{)} \\
(q \vee p) \;/\; (p \vee q) & \text{(Comm. }\vee\text{)}
\end{array}
$$

Aufgabe 3.1. Geben Sie für jede der oben genannten Inferenzen die Herleitung an, die zeigt, dass sie ein Element von $\vdash_{\mathsf{S0}}$ ist.

Hinweis: Bei Ausdrücken der Form $\ulcorner \mathtt{A} \;/\!\!/\; \mathtt{B} \urcorner$ müssen Sie die Herleitungen sowohl für $\mathtt{A} \vdash_{\mathsf{S0}} \mathtt{B}$ als auch für $\mathtt{B} \vdash_{\mathsf{S0}} \mathtt{A}$ durchführen.

Aufgabe 3.2. Zeige für jede der oben genannten Inferenzen anhand einer Wahrheitstabelle, dass sie zu $\vDash_{\mathsf{S0}}$ gehört.

Hinweis: Bei Ausdrücken der Form $\ulcorner \mathtt{A} \;/\!\!/\; \mathtt{B} \urcorner$ müssen Sie die sowohl $\mathtt{A} \vDash_{\mathsf{S0}} \mathtt{B}$ und $\mathtt{B} \vDash_{\mathsf{S0}} \mathtt{A}$ beweisen.

Aufgabe 3.3. Zeige für jede der folgenden Inferenzen anhand einer Wahrheitstabelle, ob sie nicht zu $\vDash_{S0}$ gehört.

1. $/ \neg(\neg p \to p)$
2. $/ \neg(p \to \neg p)$
3. $(p \to q) / \neg(p \to \neg q)$
4. $\neg(p \to \neg q) / (p \to q)$
5. $(p \to \neg q) / \neg(p \to q)$
6. $\neg(p \to q) / (p \to \neg q)$

3.10 Lösungen

Lösung zu Aufgabe 3.1.

Als Beispiel werden wir nur DS1 und Exp herleiten.

DS1. Diese Herleitung zeigt, dass $(p \vee q), \neg p \vdash_{\mathsf{S0}} q$.

1	$(p \vee q)$	
2	$\neg p$	
3	$\quad p$	
4	$\quad\quad \neg q$	
5	$\quad\quad p$	Reit, 3
6	$\quad\quad \neg p$	Reit, 2
7	$\quad q$	$\neg^-$, 4–6
8	$\quad q$	
9	$\quad q$	Reit, 8
10	q	$\vee^-$, 1, 3–7, 8–9

Exp. Diese Herleitung zeigt, dass $((p \wedge q) \to r) \vdash_{\mathsf{S0}} (p \to (q \to r))$.

1	$((p \wedge q) \to r)$	
2	$\quad p$	
3	$\quad\quad q$	
4	$\quad\quad (p \wedge q)$	$\wedge^+$, 2, 3
5	$\quad\quad r$	$\to^-$, 1, 4
6	$\quad (q \to r)$	$\to^+$, 3–5
7	$(p \to (q \to r))$	$\to^+$, 1–6

Lösung zu Aufgabe 3.2.

Als Beispiel werden wir nur Imp. und DM1 zeigen.

Imp. $(p \to (q \to r)) \vDash_{S0} ((p \wedge q) \to r)$.

Beweis. Betrachten Sie die folgende Wahrheitstabelle:

p	q	r	$(p$	$\to (q \to r))$	$((p \wedge q)$	$\to r)$
0	0	0	1	1	0	1
0	0	1	1	1	0	1
0	1	0	1	0	0	1
0	1	1	1	1	0	1
1	0	0	1	1	0	1
1	0	1	1	1	0	1
1	1	0	0	0	1	0
1	1	1	1	1	1	1

Diese Wahrheitstabelle zeigt, dass in allen kaI (klassischen aussagenlogischen Interpretationen) $\mathfrak{I} = \langle \{0, 1\}, \iota \rangle$, wo die kaE (die klassische aussagenlogische Erweiterung) $\hat{\mathfrak{I}}$ von $\mathfrak{I}$ so ist, dass $\hat{\iota}(`(p \to (q \to r))`) = 1$ (der bezeichnete Wahrheitswert) gilt (alle Zeilen außer 7), auch $\hat{\iota}(`((p \wedge q) \to r)`) = 1$ (ebenfalls der bezeichnete Wahrheitswert) gilt.

Daher gilt (nach der Definition von '$\vDash_{S0}$'), dass $(p \to (q \to r)) \vDash_{S0} ((p \wedge q) \to r)$. □

(Exp. – die Konverse von Imp. – lässt sich ähnlich begründen.)

DM1. $\neg(p \wedge q) \vDash_{S0} (\neg p \vee \neg q) \mathrel{\mathrel{/\!\!/\!\!\backslash}} (\neg p \vee \neg q) \vDash_{S0} \neg(p \wedge q)$.

Beweis. Betrachten Sie die folgende Wahrheitstabelle:

p	q	$\neg$	$(p \wedge q)$	$(\neg p$	$\vee$	$\neg q)$
0	0	1	0	1	1	1
0	1	1	0	1	1	0
1	0	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	0	0

Diese Wahrheitstabelle zeigt, dass, für allen kaI $\mathfrak{I} = \langle \{0, 1\}, \iota \rangle$ (also, alle Zeilen), die kaE $\hat{\mathfrak{I}}$ von $\mathfrak{I}$ so ist, dass $\hat{\iota}(`\neg(p \wedge q)`) = \hat{\iota}(`(\neg p \vee \neg q)`)$.

Daher gelten beide $\neg(p \wedge q) \vDash_{S0} (\neg p \vee \neg q)$ und $(\neg p \vee \neg q) \vDash_{S0} \neg(p \wedge q)$. □

Lösung zu Aufgabe 3.3.

Unten zeigen wir anhand von Wahrheitstabellen, ob die oben genannten Inferenzen zu $\vDash_{\mathsf{S0}}$ gehören.

1. $\nvDash_{\mathsf{S0}} \neg(\neg p \to p)$.

Beweis. Betrachten Sie die folgende Wahrheitstabelle:

p	$\neg$	$(\neg p$	$\to p)$
0	1	1	0
1	0	0	1

Diese Wahrheitstabelle zeigt, dass es eine kaI $\mathfrak{I} = \langle\{0,1\},\iota\rangle$ (entsprechend Zeile 2) gibt, wo die kaE $\hat{\mathfrak{I}}$ von $\mathfrak{I}$ so ist, dass $\hat{\iota}(`\neg(\neg p \to p)') = 0$ (der gegen-bezeichnete Wahrheitswert).

Daher gilt, dass $\nvDash_{\mathsf{S0}} \neg(\neg p \to p)$. □

2. $\nvDash_{\mathsf{S0}} \neg(p \to \neg p)$.

Beweis. Betrachten Sie die folgende Wahrheitstabelle:

p	$\neg$	$(p \to$	$\neg p)$
0	0	1	1
1	1	0	0

Diese Wahrheitstabelle zeigt, dass es eine kaI $\mathfrak{I} = \langle\{0,1\},\iota\rangle$ (entsprechend Zeile 1) gibt, wo die kaE $\hat{\mathfrak{I}}$ von $\mathfrak{I}$ so ist, dass $\hat{\iota}(`\neg(p \to \neg p)') = 0$ (der gegen-bezeichnete Wahrheitswert).

Daher gilt, dass $\nvDash_{\mathsf{S0}} \neg(p \to \neg p)$. □

3. $(p \to q) \nvDash_{\mathsf{S0}} \neg(p \to \neg q)$.

Beweis. Betrachten Sie die folgende Wahrheitstabelle:

p	q	$(p \to q)$	$\neg$	$(p \to$	$\neg q)$
0	0	1	0	1	1
0	1	1	0	1	0
1	0	0	0	1	1
1	1	1	1	0	0

Diese Wahrheitstabelle zeigt, dass es mindestens eine kaI $\mathfrak{I} = \langle\{0,1\},\iota\rangle$ (entsprechend Zeile 1 und 2) gibt, wo die kaE $\hat{\mathfrak{I}}$ von $\mathfrak{I}$ so ist, dass $\hat{\iota}(`(p \to q)') = 1$ (der bezeichnete Wahrheitswert) aber $\hat{\iota}(`\neg(p \to \neg q)') = 0$ (der gegen-bezeichnete Wahrheitswert).

Daher gilt, dass $(p \to q) \nvDash_{\mathsf{S0}} \neg(p \to \neg q)$. □

4. $(p \to \neg q) \nvDash_{S0} \neg(p \to q)$.

Beweis. Betrachten Sie die folgende Wahrheitstabelle:

p	q	$(p \to$	$\neg q)$	$\neg$	$(p \to q)$
0	0	1	1	0	1
0	1	1	0	0	1
1	0	1	1	1	0
1	1	0	0	0	1

Diese Wahrheitstabelle zeigt, dass es mindestens eine kaI $\Im = \langle\{0,1\}, \iota\rangle$ (entsprechend Zeile 1 und 2) gibt, wo die kaE $\hat{\Im}$ von $\Im$ so ist, dass $\hat{\iota}(`(p \to \neg q)`) = 1$ (der bezeichnete Wahrheitswert) aber $\hat{\iota}(`\neg(p \to q)`) = 0$ (der gegen-bezeichnete Wahrheitswert).

Daher gilt, dass $(p \to \neg q) \nvDash_{S0} \neg(p \to q)$. □

5. $\neg(p \to \neg q) \vDash_{S0} (p \to q)$.

Beweis. Betrachten Sie die folgende Wahrheitstabelle:

p	q	$\neg$	$(p \to$	$\neg q)$	$(p \to q)$
0	0	0	1	1	1
0	1	0	1	0	1
1	0	0	1	1	0
1	1	1	0	0	1

Diese Wahrheitstabelle zeigt, dass in allen kaI $\Im = \langle\{0,1\}, \iota\rangle$, wo die kaE (die klassische aussagenlogische Erweiterung) $\hat{\Im}$ von $\Im$ so ist, dass $\hat{\iota}(`\neg(p \to \neg q)`) = 1$ (der bezeichnete Wahrheitswert) gilt (nur Zeile 4), auch $\hat{\iota}(`(p \to q)`) = 1$ (ebenfalls der bezeichnete Wahrheitswert) gilt.

Daher gilt, dass $\neg(p \to \neg q) \vDash_{S0} (p \to q)$. □

6. $(p \to \neg q) \vDash_{S0} \neg(p \to q)$.

Beweis. Betrachten Sie die folgende Wahrheitstabelle:

p	q	$\neg$	$(p \to q)$	$(p \to$	$\neg q)$
0	0	0	1	1	1
0	1	0	1	1	0
1	0	1	0	1	1
1	1	0	1	0	0

Diese Wahrheitstabelle zeigt, dass in allen kaI $\Im = \langle\{0,1\}, \iota\rangle$, wo die kaE (die klassische aussagenlogische Erweiterung) $\hat{\Im}$ von $\Im$ so ist, dass $\hat{\iota}(`\neg(p \to q)`) = 1$ (der bezeichnete Wahrheitswert) gilt (nur Zeile 3), auch $\hat{\iota}(`(p \to \neg q)`) = 1$ (ebenfalls der bezeichnete Wahrheitswert) gilt.

Daher gilt, dass $\neg(p \to q) \vDash_{S0} (p \to \neg q)$. □

Kanonische Syllogistik A | 4

Die kanonische Syllogistik bei Aristoteles, oder A, ist eines der einflussreichsten logischen Systeme überhaupt. Moderne klassische Logik steht historisch gesehen in einer langen Tradition, die hier ihren Ursprung hat.

Das Ziel der Formalisierung dieses Systems ist es, alle in A zulässigen Inferenzformen zu erfassen, insbesondere die 192 möglichen Modi der drei aristotelischen Figuren, von denen genau 14 als eigentliche kanonische Syllogismen (d.h., A-gültige Inferenzen) gelten.

4.1 Vokabular von A.

Die Sprache der Syllogistik besteht aus zwei Arten von Symbolen: den logischen Symbolen, die die Art der Aussage (Aussageform) bestimmen, und den nicht-logischen Symbolen, die die Terme repräsentieren.

Die logischen Symbole sind die vier Quantoren der traditionellen Logik: ‚A', ‚E', ‚I' und ‚O'. Die nicht-logischen Symbole bestehen aus drei Termen ‚a', ‚b', ‚c'. Weitere Hilfssymbole werden hier nicht benötigt.

Das Vokabular wird daher als Paar aus logischen und nicht-logischen Symbolen verstanden, wobei beide Komponenten zusammen die formale Sprache bestimmen.

$$\begin{aligned}
\mathbf{Non}_{\mathsf{A}} &\overset{\text{DF}}{=} \{\text{‚A'}, \text{‚E'}, \text{‚I'}, \text{‚O'}\}, \\
\mathbf{Log}_{\mathsf{A}} &\overset{\text{DF}}{=} \mathbf{Abc}, \\
\mathbf{Vo}_{\mathsf{A}} &\overset{\text{DF}}{=} \left\langle \mathbf{Log}_{\mathsf{A}}, \mathbf{Non}_{\mathsf{A}} \right\rangle .
\end{aligned}$$

4.2 Formeln von A.

Die aristotelische Syllogistik behandelt sogenannte kategorische Sätze, also Aussagen der Form Subjekt–Prädikat, die durch eine Kopula verbunden sind. Dabei wird ausgedrückt, ob ein Begriff vollständig oder teilweise unter einen anderen fällt oder davon ausgeschlossen ist.

In der formalen Darstellung bestehen solche Sätze aus einem Quantor (A-, E-, I- oder O-Form) sowie zwei verschiedenen Termen. Dadurch entstehen Ausdrücke wie ‚Aab' oder ‚Ocb'.

Ein wichtiger syntaktischer Einschränkungspunkt ist, dass keine Formel erlaubt ist, in der derselbe Term zweimal vorkommt. Ausdrücke wie ‚A*bb*' sind daher ausgeschlossen. Die Sprache ist also bewusst restriktiv gehalten, um genau die klassischen syllogistischen Strukturen abzubilden.

$$\mathbf{Fo}_{\mathsf{A}} \stackrel{\text{DF}}{=} \{\mathtt{Qxy} : \mathtt{Q} \in \mathbf{Log}_{\mathsf{A}} \bigwedge \mathtt{x}, \mathtt{y} \in \mathbf{Non}_{\mathsf{A}} \bigwedge \mathtt{x} \neq \mathtt{y}\}.$$

Die Menge $\mathbf{Fo}_{\mathsf{A}}$ umfasst entsprechend alle wohlgeformten Ausdrücke der Form $\clubsuit\mathtt{xy}$, wobei $\clubsuit$ ein Quantor ist und $\mathtt{x}$ und $\mathtt{y}$ zwei verschiedene Terme sind. Daraus folgt unmittelbar, dass alle Ausdrücke mit identischen Termen ausgeschlossen sind.

Diese Einschränkung macht die Sprache endlich. Da es vier Quantoren und drei Terme gibt, lassen sich alle möglichen Kombinationen vollständig aufzählen, solange die Terme verschieden sind. Insgesamt ergeben sich dadurch genau 24 Formeln.

4.3 Inferenzrelation von A.

In A werden Inferenzstrukturen nicht beliebig gebildet, sondern folgen strikt den drei aristotelischen Figuren. Jede gültige Argumentform besteht aus genau zwei Prämissen und einer Konklusion, wobei ein sogenannter Mittelterm in den Prämissen vorkommt, jedoch nicht in der Konklusion erscheinen darf.

Die Struktur einer Inferenz ist daher immer von der Form eines geordneten Paares von Prämissen zusammen mit einer Schlussfolgerung. Die drei Figuren unterscheiden sich durch die Position des Mittelterms:

- In der ersten Figur tritt der Mittelterm $\mathtt{m}$ als Prädikat in der Majorprämisse und als Subjekt in der Minorprämisse auf:

$$\clubsuit_1\mathtt{xm}, \clubsuit_2\mathtt{my} \;/\; \clubsuit_3\mathtt{xy}.$$

- In der zweiten Figur erscheint $\mathtt{m}$ in beiden Prämissen als Prädikat:

$$\clubsuit_1\mathtt{mx}, \clubsuit_2\mathtt{my} \;/\; \clubsuit_3\mathtt{xy}.$$

- In der dritten Figur erscheint $\mathtt{m}$ in beiden Prämissen als Subjekt:

$$\clubsuit_1\mathtt{xm}, \clubsuit_2\mathtt{ym} \;/\; \clubsuit_3\mathtt{xy}.$$

Zur Vereinfachung wird eine feste Terminologie verwendet, bei der ‚*a*' der Subjektterm der Konklusion ist, ‚*b*' der Prädikatterm und ‚*c*' der Mittelterm.

$$\begin{aligned}\mathbf{In}_{\mathsf{A}} \stackrel{\text{DF}}{=} \{&\clock_1 ac, \clock_2 cb \;/\; \clock_3 ab : \clock_1, \clock_2, \clock_3 \in \mathbf{Log}_{\mathsf{A}}\} \cup \\ \{&\clock_1 ca, \clock_2 cb \;/\; \clock_3 ab : \clock_1, \clock_2, \clock_3 \in \mathbf{Log}_{\mathsf{A}}\} \cup \\ \{&\clock_1 ac, \clock_2 bc \;/\; \clock_3 ab : \clock_1, \clock_2, \clock_3 \in \mathbf{Log}_{\mathsf{A}}\}.\end{aligned}$$

Die Menge $\mathbf{In}_{\mathsf{A}}$ umfasst alle Inferenzinstanzen, die durch diese drei Figuren erzeugt werden. Jede Kombination entsteht durch Einsetzen von Quantoren und Termen entsprechend der jeweiligen Figurstruktur. Damit wird die gesamte aristotelische Inferenzlandschaft auf eine endliche, vollständig beschreibbare Menge reduziert.

Die Anzahl dieser möglichen Inferenzformen ist ebenfalls endlich und beträgt 192. Dies ergibt sich daraus, dass jede Figur 64 Kombinationen zulässt und es drei Figuren gibt.

4.4 Konsequenzrelation von A.

Aus den 192 möglichen Inferenzformen werden in der aristotelischen Logik genau 14 als gültige Syllogismen anerkannt. Diese bilden die eigentliche Konsequenzrelation $\mathbf{Con}_{\mathsf{A}}$.

$$\begin{aligned}\mathbf{Con}_{\mathsf{A}} \stackrel{\text{DF}}{=} \{&\langle\langle \mathsf{A}ac, \mathsf{A}cb\rangle, \{\mathsf{A}ab\}\rangle, \langle\langle \mathsf{E}ac, \mathsf{A}cb\rangle, \{\mathsf{E}ab\}\rangle, \\ &\langle\langle \mathsf{A}ac, \mathsf{I}cb\rangle, \{\mathsf{I}ab\}\rangle, \langle\langle \mathsf{E}ac, \mathsf{I}cb\rangle, \{\mathsf{O}ab\}\rangle, \\ &\langle\langle \mathsf{E}ca, \mathsf{A}cb\rangle, \{\mathsf{E}ab\}\rangle, \langle\langle \mathsf{A}ca, \mathsf{E}cb\rangle, \{\mathsf{E}ab\}\rangle, \\ &\langle\langle \mathsf{E}ca, \mathsf{I}cb\rangle, \{\mathsf{O}ab\}\rangle, \langle\langle \mathsf{A}ca, \mathsf{O}cb\rangle, \{\mathsf{O}ab\}\rangle, \\ &\langle\langle \mathsf{A}ac, \mathsf{A}bc\rangle, \{\mathsf{I}ab\}\rangle, \langle\langle \mathsf{E}ac, \mathsf{A}bc\rangle, \{\mathsf{O}ab\}\rangle, \\ &\langle\langle \mathsf{I}ac, \mathsf{A}bc\rangle, \{\mathsf{I}ab\}\rangle, \langle\langle \mathsf{A}ac, \mathsf{I}bc\rangle, \{\mathsf{I}ab\}\rangle, \\ &\langle\langle \mathsf{O}ac, \mathsf{A}bc\rangle, \{\mathsf{O}ab\}\rangle, \langle\langle \mathsf{E}ac, \mathsf{I}bc\rangle, \{\mathsf{O}ab\}\rangle\}.\end{aligned}$$

Die Konsequenzrelation $\mathbf{Con}_{\mathsf{A}}$ wird daher explizit als Menge genau dieser 14 gültigen Inferenzmuster festgelegt. Sie enthält sowohl klassische gültige Schlussformen der ersten Figur als auch entsprechende Varianten der zweiten und dritten Figur, jeweils unter Berücksichtigung der Position des Mittelterms und der zugrunde liegenden Quantorenstruktur.

4.5 Interpretations- und Herleitungssysteme für A.

Obwohl $\mathbf{Con}_{\mathsf{A}}$ vollständig explizit angegeben werden kann, ist es dennoch sinnvoll, A auch semantisch und syntaktisch zu rekonstruieren. Ein Interpretationssystem würde die Bedeutung der kategorischen Aussagen über Domänen und Mengen erklären,

während ein Herleitungssystem zeigen würde, wie die gültigen Schlüsse rein syntaktisch erzeugt werden können.

Ein solches Vorgehen ist insbesondere relevant, wenn man A erweitern möchte, etwa auf Schlussformen mit mehr als zwei Prämissen. Auch wenn Aristoteles selbst kein vollständig systematisches Mehrprämissenkalkül entwickelt hat, finden sich in seinen Texten bereits Ketten von Syllogismen, die genau in diese Richtung weisen.

Für die weitere Darstellung wird jedoch auf eine vollständige Ausarbeitung dieser Erweiterungen verzichtet.

Dreiwertige Logiken 5

5.1 Philosophische Motivation

Die klassische Logik beruht auf der Annahme, dass jede Aussage genau einen von zwei Wahrheitswerten hat: wahr oder falsch. Viele Situationen motivieren jedoch eine Abweichung von dieser Zweiteilung, etwa Aussagen mit unbekanntem Wahrheitswert, zukünftige kontingente Ereignisse, unvollständige Information oder nicht terminierende Berechnungen.

Solche Fälle motivierten dreiwertige Logiken, in denen ein dritter Wahrheitswert die klassische Dichotomie erweitert.

Eine frühe systematische Ausarbeitung findet sich bei Jan Łukasiewicz. Ausgangspunkt war unter anderem das Problem zukünftiger kontingenter Aussagen, das bereits Aristoteles in *De Interpretatione* (Buch 9) diskutiert: Aussagen über zukünftige Ereignisse, wie eine morgige Seeschlacht, scheinen entweder schon wahr oder falsch sein zu müssen, was zu einer fatalistischen Lesart der Zukunft führt. Łukasiewicz bestritt, dass solche Aussagen bereits bestimmt sein müssen, und führte einen dritten Wahrheitswert ein, meist als *Unbestimmtheit* oder *Möglichkeit* verstanden.

Eine andere Begründung liefert Stephen Cole Kleene im Kontext partiell berechenbarer Funktionen und nicht terminierender Prozesse. Hier steht der dritte Wahrheitswert für *Undefiniertheit* (*undefinedness*) (Kleene 1971, §64). Kleene unterschied dabei zwei Varianten der Junktorsemantik, bekannt als schwache Kleene-Logik WK und starke Kleene-Logik SK.

5.2 Vokabularien und Sprachen

Die Vokabulare und formalen Sprachen $\mathbf{Fo}_{\mathsf{WK}}$, $\mathbf{Fo}_{\mathsf{SK}}$ und $\mathbf{Fo}_{\mathsf{L3}}$ sind alle gleich deren von $\mathsf{S0}$.

Eine alternative Vorgehensweise wäre, die Sprache um zusätzliche Junktoren zu erweitern. Hier wird jedoch der Standardansatz gewählt, bei dem die Syntax konstant bleibt und nur die Semantik variiert.

5.3 Inferenz- und Konsequenzrelationen

Die Inferenzrelationen von WK, SK und $\mathsf{L3}$ sind Spezialfälle des modernes Konzept von Inferenzbegriffe. Also:

$$\mathbf{In}_{\mathsf{M}} = \wp\mathbf{Fo}_{\mathsf{M}} \times \{\mathsf{F} : \mathsf{F} \in \mathbf{Fo}_{\mathsf{M}}\}.$$

Ein zentrales Merkmal dieser Systeme ist, dass das Gesetz vom ausgeschlossenen Dritten im Allgemeinen nicht gilt. Insbesondere muss die Inferenz

$$/\ (\mathtt{A} \vee \neg\mathtt{A})$$

in allen drei Systemen nicht gültig sein.

5.4 Interpretationssysteme

In allen drei Systemen werden aussagenlogische Variablen durch dreiwertige Belegungen interpretiert. Eine dreiwertige aussagenlogische Interpretation, kurz 3aI, ordnet jeder Aussagenvariablen einen logischen Wahrheitswert aus der Menge **1** (Wahrheit), $\frac{1}{2}$ (der dritte Wert) und **0** (Falschheit) zu.

$$\begin{aligned}&\langle \mathbf{D}, \iota\rangle \text{ ist eine } \textbf{3aI} \text{ auf } \mathbf{Fo_S}\\ &\quad \stackrel{\text{DF}}{=} \mathbf{D} = \{\mathbf{0}, \tfrac{1}{2}, \mathbf{1}\} \mathbin{\wedge\!\!\!\wedge} \iota : \mathbf{Pro_S} \longrightarrow \{\mathbf{0}, \tfrac{1}{2}, \mathbf{1}\}.\end{aligned}$$

Eine solche Interpretation wird durch eine passende Wahrheitswertfunktion auf alle Formeln erweitert. Diese hängt vom jeweiligen System ab.

5.5 Schwache Kleene-Logik WK

Eine Bewertung $\hat{\mathfrak{I}}$ ist eine schwache Kleene-Erweiterung (w3E) des 3pi $\mathfrak{I}$ auf $\mathbf{Fo_S}$ gdw $\hat{\iota}(\mathtt{A}) = \iota(\mathtt{A})$ und die Junktoren gemäß den folgenden Wahrheitstabellen auswertet:

F	¬F
0	1
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
1	0

∧	0	$\frac{1}{2}$	1
0	0	$\frac{1}{2}$	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
1	0	$\frac{1}{2}$	1

∨	0	$\frac{1}{2}$	1
0	0	$\frac{1}{2}$	1
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
1	1	$\frac{1}{2}$	1

→	0	$\frac{1}{2}$	1
0	1	$\frac{1}{2}$	1
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
1	0	$\frac{1}{2}$	1

↔	0	$\frac{1}{2}$	1
0	1	$\frac{1}{2}$	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
1	0	$\frac{1}{2}$	1

$: \mathtt{A} \in \mathbf{Pro_S} \mathbin{\wedge\!\!\!\wedge} \mathtt{F} \in \mathbf{Fo_S}$.

Charakteristisch für die schwache Kleene-Logik ist die strikte Ausbreitung des unbestimmten Wahrheitswertes: sobald ein Teilausdruck unbestimmt ist, wird auch der zusammengesetzte Ausdruck typischerweise unbestimmt.

$\mathbf{Sem}_{\mathsf{WK}}$ wird wie folgt definiert:

$\mathbf{Sem}_{\mathsf{WK}}$ ist eine Semantik auf $\mathbf{Fo}_{\mathsf{WK}}$

$\stackrel{\text{DF}}{=} \mathbf{Int}_{\mathsf{WK}} = \{\mathfrak{I} : \mathfrak{I}$ ist eine 3pI auf $\mathbf{Fo}_{\mathsf{WK}}\}$ ⋏

$\mathbf{LV}_{\mathsf{WK}} = \{\mathbf{0}, \frac{1}{2}, \mathbf{1}\}$ ⋏

$\mathbf{Des}^{+}_{\mathsf{WK}} = \{\mathbf{1}\}$ ⋏

$\mathbf{Des}^{-}_{\mathsf{WK}} = \{\frac{1}{2}, \mathbf{0}\}$ ⋏

$\mathbf{Val}_{\mathsf{WK}} = \{\hat{\mathfrak{I}} : \exists \mathfrak{I} \in \mathbf{Int}_{\mathsf{WK}}\ (\hat{\mathfrak{I}}$ ist eine w3E von $\mathfrak{I})\}$ ⋏

$\vDash_{\mathsf{WK}} \subseteq \mathbf{In}_{\mathsf{WK}}$ ⋏ $\vDash_{\mathsf{WK}}$ is classical.

5.6 Starke Kleene-Logik SK

Eine Bewertung $\hat{\mathfrak{I}}$ ist eine starke Kleene-Erweiterung (s3E) des 3pi $\mathfrak{I}$ auf $\mathbf{Fo}_{\mathsf{S}}$ gdw $\hat{\iota}(\mathtt{A}) = \iota(\mathtt{A})$ und die Junktoren gemäß den folgenden Wahrheitstabellen auswertet:

F	¬F
0	1
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
1	0

∧	0	$\frac{1}{2}$	1
0	0	0	0
$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
1	0	$\frac{1}{2}$	1

∨	0	$\frac{1}{2}$	1
0	0	$\frac{1}{2}$	1
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1
1	1	1	1

→	0	$\frac{1}{2}$	1
0	1	1	1
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1
1	0	$\frac{1}{2}$	1

↔	0	$\frac{1}{2}$	1
0	1	$\frac{1}{2}$	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
1	0	$\frac{1}{2}$	1

: $\mathtt{A} \in \mathbf{Pro}_{\mathsf{S}}$ ⋏ $\mathtt{F} \in \mathbf{Fo}_{\mathsf{S}}$.

Starke Erweiterungen unterscheiden sich von schwachen Erweiterungen hinsichtlich der Werte, die Formeln mit , ∧ ‘, , ∨ ‘, , → ‘ zugewiesen werden. Die Wahrheitstabellen solcher Formeln ergeben sich, indem die zusätzlichen Felder der Tabellen nach folgenden Kriterien ausgefüllt werden:

- Es gilt eine Ordnung $\mathbf{0} < \frac{1}{2} < \mathbf{1}$.
- Eine Disjunktion übernimmt den höheren Wahrheitswert ihrer Disjunkte.
- Eine Konjunktion übernimmt den niedrigeren Wahrheitswert ihrer Konjunkte.
- Ein Konditional wird als **1** bewertet, wenn der Antezedens **0** ist oder der Konsequens **1** ist; er wird als **0** bewertet, wenn der Antezedens **1** ist und der Konsequens **0** ist; andernfalls wird er als $\frac{1}{2}$ bewertet.

$\mathbf{Sem}_{\mathsf{SK}}$ wird wie folgt definiert:

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{Sem}_{\mathsf{SK}} \text{ is a semantics on } \mathbf{Fo}_{\mathsf{SK}} \\
&\quad \stackrel{\text{DF}}{=} \mathbf{Int}_{\mathsf{SK}} = \{\mathfrak{I} : \mathfrak{I} \text{ is a 3pi on } \mathbf{Fo}_{\mathsf{SK}}\} && \bigwedge\!\!\!\bigwedge \\
&\quad\ \ \mathbf{LV}_{\mathsf{SK}} = \{\mathbf{0}, \tfrac{1}{2}, \mathbf{1}\} && \bigwedge\!\!\!\bigwedge \\
&\quad\ \ \mathbf{Des}^{+}_{\mathsf{SK}} = \{\mathbf{1}\} && \bigwedge\!\!\!\bigwedge \\
&\quad\ \ \mathbf{Des}^{-}_{\mathsf{SK}} = \{\tfrac{1}{2}, \mathbf{0}\} && \bigwedge\!\!\!\bigwedge \\
&\quad\ \ \mathbf{Val}_{\mathsf{SK}} = \{\hat{\mathfrak{I}} : \exists \mathfrak{I} \in \mathbf{Int}_{\mathsf{SK}} (\hat{\mathfrak{I}} \text{ is a s3e of } \mathfrak{I})\} && \bigwedge\!\!\!\bigwedge \\
&\quad\ \ \vDash_{\mathsf{SK}} \subseteq \mathbf{In}_{\mathsf{SK}} \bigwedge\!\!\!\bigwedge \vDash_{\mathsf{SK}} \text{ is classical.}
\end{aligned}
$$

5.7 Łukasiewicz-3wertige Logik L3

Eine Bewertung $\hat{\mathfrak{I}}$ ist eine Łukasiewicz-Erweiterung (Ł3E) des 3pi $\mathfrak{I}$ auf $\mathbf{Fo}_{\mathsf{S}}$ gdw $\hat{\iota}(\mathtt{A}) = \iota(\mathtt{A})$ und die Junktoren gemäß den folgenden Wahrheitstabellen auswertet:

F	¬F
0	1
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
1	0

∧	0	$\frac{1}{2}$	1
0	0	0	0
$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
1	0	$\frac{1}{2}$	1

∨	0	$\frac{1}{2}$	1
0	0	$\frac{1}{2}$	1
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1
1	1	1	1

→	0	$\frac{1}{2}$	1
0	1	1	1
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	1
1	0	$\frac{1}{2}$	1

↔	0	$\frac{1}{2}$	1
0	1	$\frac{1}{2}$	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$
1	0	$\frac{1}{2}$	1

: $\mathtt{A} \in \mathbf{Pro}_{\mathsf{S}} \bigwedge\!\!\!\bigwedge \mathtt{F} \in \mathbf{Fo}_{\mathsf{S}}$.

Łukasiewicz-Erweiterungen unterscheiden sich von schwachen Erweiterungen hinsichtlich der Werte, die Formeln mit ‚→', ‚↔' zugewiesen werden. In diesen Wahrheitstabellen wird der Eintrag $\frac{1}{2}$ in der Zelle $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ durch 1 ersetzt.*

Die Begründung für diese Entscheidung beruht wiederum auf der Ordnung $\mathbf{0} < \frac{1}{2} < \mathbf{1}$. Ein Konditional wird genau dann als 1 interpretiert, wenn der Antezedens und der Konsequens Wahrheitswerte **v** bzw. **w** erhalten, so dass $\mathbf{v} \leq \mathbf{w}$ gilt.

*: Eine weitere Version des Systems von Łukasiewicz enthält zusätzliche Operatoren zur Darstellung modaler Begriffe wie Möglichkeit, Notwendigkeit und Kontingenz, deren Semantik sich deutlich von modernen modallogischen Ansätzen unterscheidet.

$\mathbf{Sem}_{\mathsf{L3}}$ wird wie folgt definiert:

$\mathbf{Sem}_{\mathsf{L3}}$ ist eine Semantik auf $\mathbf{Fo}_{\mathsf{L3}}$

$$\begin{aligned}
&\overset{\text{DF}}{=} \mathbf{Int}_{\mathsf{L3}} = \{\mathfrak{I} : \mathfrak{I} \text{ ist eine 3aI auf } \mathbf{Fo}_{\mathsf{L3}}\} && \curlywedge \\
&\mathbf{LV}_{\mathsf{L3}} = \{\mathbf{0}, \tfrac{1}{2}, \mathbf{1}\} && \curlywedge \\
&\mathbf{Des}^{+}_{\mathsf{L3}} = \{\mathbf{1}\} && \curlywedge \\
&\mathbf{Des}^{-}_{\mathsf{L3}} = \{\tfrac{1}{2}, \mathbf{0}\} && \curlywedge \\
&\mathbf{Val}_{\mathsf{L3}} = \{\hat{\mathfrak{I}} : \exists \mathfrak{I} \in \mathbf{Int}_{\mathsf{L3}} (\hat{\mathfrak{I}} \text{ ist eine Ł3E von } \mathfrak{I})\} && \curlywedge \\
&\vDash_{\mathsf{L3}} \subseteq \mathbf{In}_{\mathsf{L3}} \curlywedge \vDash_{\mathsf{L3}} \text{ is classical.}
\end{aligned}$$

5.8 Resultate

Wie gewünscht gilt das Gesetz vom ausgeschlossenen Dritten in keinem der Systeme:

Theorem 5.1.

$$\nvDash_{\mathsf{WK}} (p \vee \neg p) \quad \nvDash_{\mathsf{SK}} (p \vee \neg p) \quad \nvDash_{\mathsf{L3}} (p \vee \neg p).$$

Beweis. Betrachte die folgende Wahrheitstafel:

p	$(p$	$\vee$	$\neg p)$
$\mathbf{0}$		$\mathbf{1}$	$\mathbf{1}$
$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\mathbf{1}$		$\mathbf{1}$	$\mathbf{0}$

Beachte, dass die zweite Zeile dieser Tabelle einer 3pi $\langle \{\mathbf{0}, \frac{1}{2}, \mathbf{1}\}, \iota \rangle$ mit einer 3pe $\hat{\mathfrak{I}}$ entspricht, so dass $\hat{\iota}(`(p \vee \neg p)') = \frac{1}{2}$ gilt. Da jedoch $\frac{1}{2}$ in $\mathbf{Des}^{-}_{\mathsf{WK}}$, $\mathbf{Des}^{-}_{\mathsf{SK}}$ und $\mathbf{Des}^{-}_{\mathsf{L3}}$ enthalten ist, folgt, dass $\nvDash_{\mathsf{WK}} (p \vee \neg p)$, $\nvDash_{\mathsf{SK}} (p \vee \neg p)$ und $\nvDash_{\mathsf{L3}} (p \vee \neg p)$. □

5.9 Herleitungssysteme

Für alle drei Logiken lassen sich Herleitungssysteme angeben, jedoch erfassen die Semantiken bereits vollständig ihr intendiertes Verhalten, weshalb wir darauf verzichten.

5.10 Übungen

Aufgabe 5.1. Zeigen Sie, ob die folgenden Inferenzen Mitglieder von $\vDash_{\mathsf{WK}}$, $\vDash_{\mathsf{SK}}$ und $\vDash_{\mathsf{L3}}$ sind.

1. $q \;/\; (p \to q)$
2. $\neg p \;/\; (p \to q)$
3. $(p \to q) \;/\; (\neg q \to \neg p)$
4. $((p \wedge q) \to r) \;/\; ((p \to r) \vee (q \to r))$
5. $((p \to q) \wedge (r \to s)) \;/\; ((p \to s) \vee (r \to q))$
6. $\neg(p \to q) \;/\; p$
7. $(p \to r) \;/\; ((p \wedge q) \to r)$
8. $(p \to q), (q \to r) \;/\; (p \to r)$
9. $p \;/\; (q \vee \neg q)$
10. $/\; (p \to (q \vee \neg q))$
11. $p, \neg p \;/\; q$
12. $(p \wedge \neg p) \;/\; q$
13. $/\; ((p \wedge \neg p) \to q)$
14. $(p \to q), p \;/\; q$
15. $(p \vee q), \neg p \;/\; q$
16. $/\; (p \vee \neg p)$
17. $/\; \neg\neg(p \vee \neg p)$
18. $\neg\neg p \;/\; p$
19. $p \;/\; \neg\neg p$
20. $\neg\neg\neg p \;/\; \neg p$
21. $p \wedge q \;/\; p$
22. $p \;/\; p \vee q$
23. $p \;/\; p \wedge p$
24. $p \;/\; p \vee p$
25. $p \;/\; p$

5.11 Lösungen

Lösung zu Aufgabe 5.1.

Die folgende Tabelle fasst zusammen, ob die aufgeführte Inferenz zu den semantischen Konsequenzrelationen $\vDash_{\mathsf{WK}}, \vDash_{\mathsf{SK}}, \vDash_{\mathsf{L3}}$ gehört oder nicht.

	Inferenz	$\vDash_{\mathsf{WK}}$	$\vDash_{\mathsf{SK}}$	$\vDash_{\mathsf{L3}}$
1.	$q \;/\; (p \to q)$	$\notin$	$\in$	$\in$
2.	$\neg p \;/\; (p \to q)$	$\notin$	$\in$	$\in$
3.	$(p \to q) \;/\; (\neg q \to \neg p)$	$\in$	$\in$	$\in$
4.	$\dfrac{((p \wedge q) \to r)}{((p \to r) \vee (q \to r))}$	$\in$	$\in$	$\in$
5.	$\dfrac{((p \to q) \wedge (r \to s))}{((p \to s) \vee (r \to q))}$	$\in$	$\in$	$\in$
6.	$\neg(p \to q) \;/\; p$	$\in$	$\in$	$\in$
7.	$(p \to r) \;/\; ((p \wedge q) \to r)$	$\notin$	$\in$	$\in$
8.	$(p \to q), (q \to r) \;/\; (p \to r)$	$\in$	$\in$	$\in$
9.	$p \;/\; (q \vee \neg q)$	$\notin$	$\notin$	$\notin$
10.	$/\; (p \to (q \vee \neg q))$	$\notin$	$\notin$	$\notin$
11.	$p, \neg p \;/\; q$	$\in$	$\in$	$\in$
12.	$(p \wedge \neg p) \;/\; q$	$\in$	$\in$	$\in$
13.	$/\; ((p \wedge \neg p) \to q)$	$\notin$	$\notin$	$\notin$
14.	$(p \to q), p \;/\; q$	$\in$	$\in$	$\in$
15.	$(p \vee q), \neg p \;/\; q$	$\in$	$\in$	$\in$
16.	$/\; (p \vee \neg p)$	$\notin$	$\notin$	$\notin$
17.	$/\; \neg\neg(p \vee \neg p)$	$\notin$	$\notin$	$\notin$
18.	$\neg\neg p \;/\; p$	$\in$	$\in$	$\in$
19.	$p \;/\; \neg\neg p$	$\in$	$\in$	$\in$
20.	$\neg\neg\neg p \;/\; \neg p$	$\in$	$\in$	$\in$
21.	$p \wedge q \;/\; p$	$\in$	$\in$	$\in$
22.	$p \;/\; p \vee q$	$\in$	$\in$	$\in$
23.	$p \;/\; p \wedge p$	$\in$	$\in$	$\in$
24.	$p \;/\; p \vee p$	$\in$	$\in$	$\in$
25.	$/\; (p \to p)$	$\notin$	$\notin$	$\in$

Beachte, dass $\vDash_{\mathsf{WK}}$ und $\vDash_{\mathsf{SK}}$ im Allgemeinen keine Tautologien enthalten – das heißt, es gibt keine Formeln $\mathtt{A}$, für die $\vDash_{\mathsf{WK}} \mathtt{A}$ oder $\vDash_{\mathsf{SK}} \mathtt{A}$ gilt.

Im Folgenden begründen wir einige dieser Antworten.

Beachte, dass in allen Systemen $\mathbf{Sem}_{\mathsf{WK}}, \mathbf{Sem}_{\mathsf{SK}}, \mathbf{Sem}_{\mathsf{L3}}$ der einzige bezeichnete Wert $\mathbf{1}$ ist, während sowohl $\frac{1}{2}$ als auch $\mathbf{0}$ gegenbezeichnet sind. Dies sollte man bei der Betrachtung der oben genannten Inferenzen berücksichtigen.

1. Da $q \;/\; (p \to q)$ nur zwei Aussagenvariablen enthält, ist es praktikabel, dafür Wahrheitstabellen zu erstellen.

1a. $q \nvDash_{\mathsf{WK}} (p \to q)$.

Beweis. Betrachten Sie die folgende Wahrheitstabelle:

p	q	q	$(p \to q)$
0	**0**	**0**	**1**
0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
0	**1**	**1**	**1**
$\frac{1}{2}$	**0**	**0**	$\frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}$	**1**	**1**	$\frac{1}{2}$
1	**0**	**0**	**0**
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
1	**1**	**1**	**1**

Diese Wahrheitstabelle zeigt, dass eine 3aI (dreiwertige aussagenlogische Interpretation) $\mathfrak{I} = \langle \{\mathbf{0}, \frac{1}{2}, \mathbf{1}\}, \iota \rangle$ gibt (entsprechend Zeile 6), deren w3E (schwache Kleene-Erweiterung) $\hat{\mathfrak{I}}$ so ist, dass $\hat{\iota}(‚q‘) = \mathbf{1}$ (der bezeichnete Wahrheitswert) aber $\hat{\iota}(‚(p \to q)‘) = \frac{1}{2}$ (eine gegen-bezeichnete Wahrheitswert).

Daher ist (nach der Definition von ‚$\vDash_{\mathsf{WK}}$‘) $q \nvDash_{\mathsf{WK}} (p \to q)$. □

1b. $q \vDash_{\mathsf{SK}} (p \to q)$.

Beweis. Betrachten Sie die folgende Wahrheitstabelle:

p	q	q	$(p \to q)$
0	**0**	**0**	**1**
0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	**1**
0	**1**	**1**	**1**
$\frac{1}{2}$	**0**	**0**	$\frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}$	**1**	**1**	**1**
1	**0**	**0**	**0**
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
1	**1**	**1**	**1**

Diese Wahrheitstabelle zeigt, dass in allen 3aI $\mathfrak{I} = \langle \{\mathbf{0}, \frac{1}{2}, \mathbf{1}\}, \iota \rangle$, wo die s3E (starke Kleene-Erweiterung) $\hat{\mathfrak{I}}$ von $\mathfrak{I}$ so ist, dass $\hat{\iota}(‚q‘) = \mathbf{1}$ (der bezeichnete Wahrheitswert) gilt (entsprechend den Zeilen 3, 6, 9), auch $\hat{\iota}(‚(p \to q)‘) = \mathbf{1}$ (ebenfalls der bezeichnete Wahrheitswert) gilt. Daher ist $q \vDash_{\mathsf{SK}} (p \to q)$. □

1c. $q \vDash_{\mathsf{L3}} (p \to q)$.

Beweis. Betrachten Sie die folgende Wahrheitstabelle:

p	q	q	$(p \to q)$
0	**0**	**0**	**1**
0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	**1**
0	**1**	**1**	**1**
$\frac{1}{2}$	**0**	**0**	$\frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	**1**
$\frac{1}{2}$	**1**	**1**	**1**
1	**0**	**0**	**0**
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
1	**1**	**1**	**1**

Diese Wahrheitstabelle zeigt, dass in allen 3aI $\mathfrak{I} = \langle \{\mathbf{0}, \frac{1}{2}, \mathbf{1}\}, \iota \rangle$, wo die Ł3E (starke Łukasiewicz-Erweiterung) $\hat{\mathfrak{I}}$ von $\mathfrak{I}$ so ist, dass $\hat{\iota}(\text{‚}q\text{‘}) = \mathbf{1}$ (der bezeichnete Wahrheitswert) gilt (entsprechend den Zeilen 3, 6, 9), auch $\hat{\iota}(\text{‚}(p \to q)\text{‘}) = \mathbf{1}$ (ebenfalls der bezeichnete Wahrheitswert) gilt. Daher ist $q \vDash_{\mathsf{L3}} (p \to q)$. □

2a. $q \nvDash_{\mathsf{WK}} (p \to q)$.

Beweis. Betrachten Sie die folgende Wahrheitstabelle:

p	q	$\neg p$	$(p \to q)$
0	**0**	**1**	**1**
0	$\frac{1}{2}$	**1**	$\frac{1}{2}$
0	**1**	**1**	**1**
$\frac{1}{2}$	**0**	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}$	**1**	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
1	**0**	**0**	**0**
1	$\frac{1}{2}$	**0**	$\frac{1}{2}$
1	**1**	**0**	**1**

Diese Wahrheitstabelle zeigt, dass eine 3aI $\mathfrak{I} = \langle \{\mathbf{0}, \frac{1}{2}, \mathbf{1}\}, \iota \rangle$ gibt (entsprechend Zeile 2), deren w3E $\hat{\mathfrak{I}}$ so ist, dass $\hat{\iota}(\text{‚}\neg p\text{‘}) = \mathbf{1}$ (der bezeichnete Wahrheitswert) aber $\hat{\iota}(\text{‚}(p \to q)\text{‘}) = \frac{1}{2}$ (eine gegenbezeichnete Wahrheitswert). Daher ist $\neg p \nvDash_{\mathsf{WK}} (p \to q)$. □

2b. $q \vDash_{\mathsf{SK}} (p \to q)$.

Beweis. Betrachten Sie die folgende Wahrheitstabelle:

p	q	$\neg p$	$(p \to q)$
$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{1}$	$\mathbf{1}$
$\mathbf{0}$	$\frac{1}{2}$	$\mathbf{1}$	$\mathbf{1}$
$\mathbf{0}$	$\mathbf{1}$	$\mathbf{1}$	$\mathbf{1}$
$\frac{1}{2}$	$\mathbf{0}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}$	$\mathbf{1}$	$\frac{1}{2}$	$\mathbf{1}$
$\mathbf{1}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$
$\mathbf{1}$	$\frac{1}{2}$	$\mathbf{0}$	$\frac{1}{2}$
$\mathbf{1}$	$\mathbf{1}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{1}$

Diese Wahrheitstabelle zeigt, dass in allen 3aI $\mathfrak{I} = \langle \{\mathbf{0}, \frac{1}{2}, \mathbf{1}\}, \iota \rangle$, wo die s3E $\hat{\mathfrak{I}}$ von $\mathfrak{I}$ so ist, dass $\hat{\iota}(,\neg p`) = \mathbf{1}$ (der bezeichnete Wahrheitswert) gilt (entsprechend den Zeilen 1–3), auch $\hat{\iota}(,(p \to q)`) = \mathbf{1}$ (ebenfalls der bezeichnete Wahrheitswert) gilt. Daher ist $\neg p \vDash_{\mathsf{SK}} (p \to q)$. □

2c. $q \vDash_{\mathsf{L3}} (p \to q)$.

Beweis. Betrachten Sie die folgende Wahrheitstabelle:

p	q	$\neg p$	$(p \to q)$
$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{1}$	$\mathbf{1}$
$\mathbf{0}$	$\frac{1}{2}$	$\mathbf{1}$	$\mathbf{1}$
$\mathbf{0}$	$\mathbf{1}$	$\mathbf{1}$	$\mathbf{1}$
$\frac{1}{2}$	$\mathbf{0}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\mathbf{1}$
$\frac{1}{2}$	$\mathbf{1}$	$\frac{1}{2}$	$\mathbf{1}$
$\mathbf{1}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$
$\mathbf{1}$	$\frac{1}{2}$	$\mathbf{0}$	$\frac{1}{2}$
$\mathbf{1}$	$\mathbf{1}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{1}$

Diese Wahrheitstabelle zeigt, dass in allen 3aI $\mathfrak{I} = \langle \{\mathbf{0}, \frac{1}{2}, \mathbf{1}\}, \iota \rangle$, wo die Ł3E $\hat{\mathfrak{I}}$ von $\mathfrak{I}$ so ist, dass $\hat{\iota}(,\neg p`) = \mathbf{1}$ (der bezeichnete Wahrheitswert) gilt (entsprechend den Zeilen 1–3), auch $\hat{\iota}(,(p \to q)`) = \mathbf{1}$ (ebenfalls der bezeichnete Wahrheitswert) gilt. Daher ist $\neg p \vDash_{\mathsf{L3}} (p \to q)$. □

3a. $(p \to q) \vDash_{\mathsf{WK}} (\neg q \to \neg p)$.

Beweis. Betrachten Sie die folgende Wahrheitstabelle:

p	q	$(p \to q)$	$(\neg q$	$\to$	$\neg p)$
0	0	1	1	1	1
0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1
0	1	1	0	1	1
$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
1	0	0	1	0	0
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
1	1	1	0	1	0

Diese Wahrheitstabelle zeigt, dass in allen 3aI (dreiwertigen aussagenlogischen Interpretationen) $\mathfrak{I} = \langle \{0, \frac{1}{2}, 1\}, \iota \rangle$, wo die w3E (schwache Kleene-Erweiterung) $\hat{\mathfrak{I}}$ von $\mathfrak{I}$ so ist, dass $\hat{\iota}(`(p \to q)`) = 1$ (der bezeichnete Wahrheitswert) gilt (entsprechend den Zeilen 1, 3, 9), auch $\hat{\iota}(`(\neg q \to \neg p)`) = 1$ (ebenfalls der bezeichnete Wahrheitswert) gilt.

Daher gilt (nach der Definition von '$\vDash_{\mathsf{WK}}$'), dass $(p \to q) \vDash_{\mathsf{WK}} (\neg q \to \neg p)$. □

Die Umkehrung lässt sich ähnlich beweisen.

3b. $(p \to q) \vDash_{\mathsf{SK}} (\neg q \to \neg p)$.

Beweis. Betrachten Sie die folgende Wahrheitstabelle:

p	q	$(p \to q)$	$(\neg q$	$\to$	$\neg p)$
0	0	1	1	1	1
0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	1	1
0	1	1	0	1	1
$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}$	1	1	0	1	$\frac{1}{2}$
1	0	0	1	0	0
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
1	1	1	0	1	0

Diese Wahrheitstabelle zeigt, dass in allen 3aI $\mathfrak{I} = \langle \{0, \frac{1}{2}, 1\}, \iota \rangle$, wo die s3E (starke Kleene-Erweiterung) $\hat{\mathfrak{I}}$ von $\mathfrak{I}$ so ist, dass $\hat{\iota}(`(p \to q)`) = 1$ (der bezeichnete Wahrheitswert) gilt (entsprechend den Zeilen 1–3, 6, 9), auch $\hat{\iota}(`(\neg q \to \neg p)`) = 1$ (ebenfalls der bezeichnete Wahrheitswert) gilt.

Daher gilt, dass $(p \to q) \vDash_{\mathsf{SK}} (\neg q \to \neg p)$. □

Die Umkehrung lässt sich ähnlich beweisen.

3c. $(p \to q) \vDash_{\mathsf{L3}} (\neg q \to \neg p)$.

Beweis. Betrachten Sie die folgende Wahrheitstabelle:

p	q	$(p \to q)$	$(\neg q$	$\to$	$\neg p)$
0	0	1	1	1	1
0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	1	1
0	1	1	0	1	1
$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}$	1	1	0	1	$\frac{1}{2}$
1	0	0	1	0	0
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
1	1	1	0	1	0

Diese Wahrheitstabelle zeigt, dass in allen 3aI $\mathfrak{I} = \langle\{0, \frac{1}{2}, 1\}, \iota\rangle$, wo die Ł3E (Łukasiewicz-Erweiterung) $\hat{\mathfrak{I}}$ von $\mathfrak{I}$ so ist, dass $\hat{\iota}(\text{‚}(p \to q)\text{‘}) = 1$ (der bezeichnete Wahrheitswert) gilt (entsprechend den Zeilen 1–3, 6, 7, 9), auch $\hat{\iota}(\text{‚}(\neg q \to \neg p)\text{‘}) = 1$ (ebenfalls der bezeichnete Wahrheitswert) gilt.

Daher gilt, dass $(p \to q) \vDash_{\mathsf{L3}} (\neg q \to \neg p)$. □

Die Umkehrung lässt sich ähnlich beweisen.

*: Und nein, in der Endprüfung wird es keine Wahrheitstabellen mit mehr als zwei Variablen geben.

7. Bei dreiwertigen Logiken ist es unpraktisch, Wahrheitstabellen auf Inferenzen (oder Formeln) anzuwenden, die mehr als zwei Aussagenvariablen enthalten. In diesem Fall ist es ratsamer, einen informellen Beweis ohne Wahrheitstabellen durchzuführen.*

7a. $(p \to r) \nvDash_{\mathsf{WK}} ((p \wedge q) \to r)$.

Beweis. Betrachten Sie die folgenden 3aI:

- $\mathfrak{I}_1 = \langle\{0, \frac{1}{2}, 1\}, \iota_1\rangle$, wobei $\iota_1(\text{‚}p\text{‘}) = 0$, $\iota_1(\text{‚}q\text{‘}) = \frac{1}{2}$, $\iota_1(\text{‚}r\text{‘}) = 0$.
- $\mathfrak{I}_2 = \langle\{0, \frac{1}{2}, 1\}, \iota_2\rangle$, wobei $\iota_2(\text{‚}p\text{‘}) = 0$, $\iota_2(\text{‚}q\text{‘}) = \frac{1}{2}$, $\iota_2(\text{‚}r\text{‘}) = 1$.
- $\mathfrak{I}_3 = \langle\{0, \frac{1}{2}, 1\}, \iota_3\rangle$, wobei $\iota_3(\text{‚}p\text{‘}) = 1$, $\iota_3(\text{‚}q\text{‘}) = \frac{1}{2}$, $\iota_3(\text{‚}r\text{‘}) = 1$.

Man kann zeigen, dass die w3E $\hat{\mathfrak{I}}_3$ und $\hat{\mathfrak{I}}_2$ von $\mathfrak{I}_3$ und $\mathfrak{I}_2$ weisen der Prämisse einen bezeichneten Wert, der Konklusion hingegen einen anti-bezeichneten Wert zu. Wir werden zeigen, dass dies für $\hat{\mathfrak{I}}_3$ gilt (was ausreichen wird).

Zunächst folgt aus $\iota_3(\text{‚}p\text{‘}) = 1$ und $\iota_3(\text{‚}r\text{‘}) = 1$, dass $\hat{\iota}_3(\text{‚}(p \to r)\text{‘}) = 1$ (der bezeichnete Wert). Aus $\iota_3(\text{‚}q\text{‘}) = \frac{1}{2}$ folgt jedoch, dass $\hat{\iota}_3(\text{‚}(p \wedge q)\text{‘}) = \frac{1}{2}$, was impliziert, dass $\hat{\iota}_3(\text{‚}((p \wedge q) \to r)\text{‘}) = \frac{1}{2}$ (ein anti-bezeichneter Wert).

Daraus folgt, dass $(p \to r) \nvDash_{\mathsf{WK}} ((p \wedge q) \to r)$. □

8a. $(p \to q), (q \to r) \vDash_{\mathsf{WK}} (p \to r)$.

Beweis. Wir müssen zeigen, dass für alle 3aI $\mathfrak{I} = \langle \{\mathbf{0}, \frac{1}{2}, \mathbf{1}\}, \iota \rangle$ (wobei $\hat{\mathfrak{I}}$ seine w3E ist) gilt: Wenn $\hat{\iota}(`(p \to q)`) = \hat{\iota}(`(q \to r)`) = \mathbf{1}$ (also, der bezeichnete Wert), dann ist auch $\hat{\iota}(`(p \to r)`) = \mathbf{1}$.

Sei also $\mathfrak{I} = \langle \{\mathbf{0}, \frac{1}{2}, \mathbf{1}\}, \iota \rangle$ eine w3E, unter der $\hat{\iota}(`(p \to q)`) = \mathbf{1} = \hat{\iota}(`(q \to r)`)$. Beachte, dass in einer eine w3E $\hat{\mathfrak{I}}$ eine Implikationformel $\hat{\iota}(\ulcorner(\mathtt{A} \to \mathtt{B})\urcorner) = \mathbf{1}$ (der bezeichnete Wert) gdw $\hat{\iota}(\mathtt{A}), \hat{\iota}(\mathtt{B}) \in \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$.

Daher müssen wir nur diejenigen Interpretationen betrachten, unter denen $\hat{\iota}(`p`), \hat{\iota}(`q`) \in \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$. Unter all diesen Interpretationen werden die Formel jedoch klassisch bewertet. Das bedeutet, dass auch $\hat{\iota}(`(p \to r)`) = \mathbf{1}$ (also, der bezeichnete Wert).

Daraus folgt, dass $(p \to q), (q \to r) \vDash_{\mathsf{WK}} (p \to r)$. □

8b. $(p \to q), (q \to r) \vDash_{\mathsf{SK}} (p \to r)$.

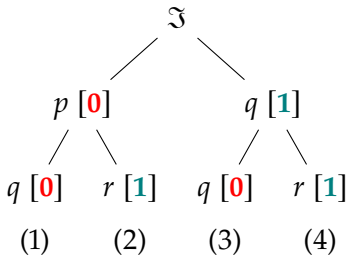
Beweis. Wir müssen zeigen, dass für alle 3aI $\mathfrak{I} = \langle \{\mathbf{0}, \frac{1}{2}, \mathbf{1}\}, \iota \rangle$ (wobei $\hat{\mathfrak{I}}$ seine s3E ist) gilt: Wenn $\hat{\iota}(,(p \to q)') = \hat{\iota}(,(q \to r)') = \mathbf{1}$ (also, der bezeichnete Wert), dann ist auch $\hat{\iota}(,(p \to r)') = \mathbf{1}$.

Sei also $\mathfrak{I} = \langle \{\mathbf{0}, \frac{1}{2}, \mathbf{1}\}, \iota \rangle$ eine s3E, unter der $\hat{\iota}(,(p \to q)') = \mathbf{1} = \hat{\iota}(,(q \to r)')$. Beachte, dass in einer eine s3E $\hat{\mathfrak{I}}$ eine Implikationformel $\hat{\iota}(\ulcorner(\mathtt{A} \to \mathtt{B})\urcorner) = \mathbf{1}$ (der bezeichnete Wert) gdw $\hat{\iota}(\mathtt{A}) = \mathbf{0}$ oder $\hat{\iota}(\mathtt{B}) = \mathbf{1}$. Daher gibt es im Prinzip nur vier Fälle für $\mathfrak{I}^{\dagger}$:

†: In den folgenden Diagrammen verwenden wir die folgenden Konventionen:

1. Der Name der untersuchten Interpretation $\mathfrak{I}$ erscheint ganz oben im Baum.
2. Links neben jeder Formel geben wir den Wert an, den $\mathfrak{I}$ ihr im jeweiligen Fall zuweist.
3. Eine Verzweigung nach unten steht für den Übergang zu alternativen Fälle.
4. Ein Ausdruck, der unmittelbar unter einem anderen steht, wird gemeinsam mit diesem betrachtet, also konjunktiv.
5. Entsprechend repräsentiert jeder Pfad von der Spitze des Baums zu einem seiner Endknoten eine Fall, in der $\mathfrak{I}$ den betreffenden Formeln Werte zuweisen kann.

Diese Konventionen orientieren sich an der üblichen Darstellung semantischer Bäume. Wir werden sie hier jedoch informell verwenden.

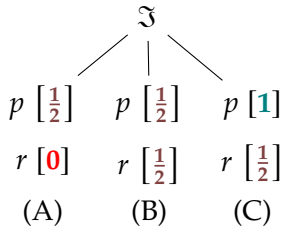


Beachte jedoch, dass Fall (3) unmöglich ist, da dies impliziert, dass $\mathbf{0} = \mathbf{1}$. Wir bleiben, dann, mit (1), (2) und (4).

Was nun $,(p \to r)'$ betrifft, so wissen wir, dass entweder $\hat{\iota}(,(p \to r)') = \mathbf{0}$ oder $\hat{\iota}(,(p \to r)') = \frac{1}{2}$ oder $\hat{\iota}(,(p \to r)') = \mathbf{1}$. Wir zeigen, dass die erstgenannten Fälle unmöglich sind.

Falls $\hat{\iota}(,(p \to r)') = \mathbf{0}$, gilt es, dass $\iota(,p') = \mathbf{1}$ und $\iota(,r') = \mathbf{0}$. Beachte jedoch, dass $\iota(,p') = \mathbf{1}$ mit (1) und (2) inkompatibel ist, während $\iota(,r') = \mathbf{0}$ mit (2) und (4) inkompatibel ist. Dann ist $\hat{\iota}(,(p \to r)') \neq \mathbf{0}$.

Beachten Sie nun, dass $\hat{\iota}(,(p \to r)') = \frac{1}{2}$ drei Fälle beinhaltet:



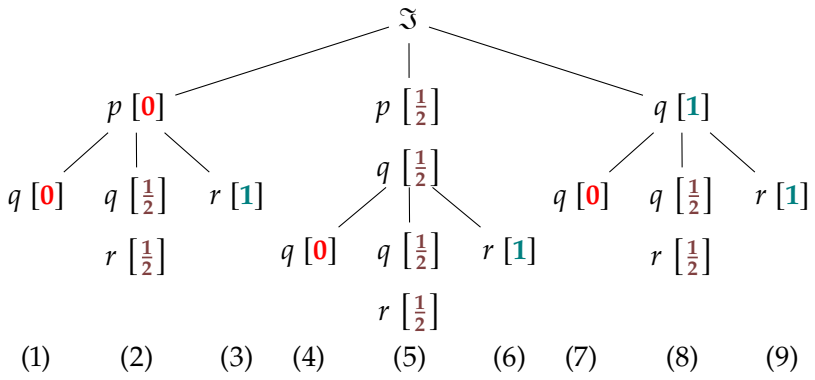
Die Fälle (A), (B) und (C) sind jedoch alle mit alle den Fällen (1), (2) und (4) inkompatibel. (A), (B) und (C) sind alle mit alle (1) und (2) inkompatibel, da es immer impliziert wird, dass $\iota(,p') \neq \mathbf{0}$. Ebenso sind sie mit (2) und (4) inkompatibel, da es immer impliziert wird, dass $\iota(,r') \neq \mathbf{1}$. Dann ist $\hat{\iota}(,(p \to r)') \neq \frac{1}{2}$.

Daraus folgt durch Ausschluss, dass $\hat{\iota}(,(p \to r)') = \mathbf{1}$. Daher gilt, dass $(p \to q), (q \to r) \vDash_{\mathsf{SK}} (p \to r)$. □

8c. $(p \to q), (q \to r) \vDash_{\mathsf{L3}} (p \to r)$.

Beweis. Wir müssen zeigen, dass für alle 3aI $\mathfrak{I} = \langle \{\mathbf{0}, \frac{1}{2}, \mathbf{1}\}, \iota \rangle$ (wobei $\hat{\mathfrak{I}}$ seine Ł3E ist) gilt: Wenn $\hat{\iota}(‚(p \to q)‘) = \hat{\iota}(‚(q \to r)‘) = \mathbf{1}$ (also, der bezeichnete Wert), dann ist auch $\hat{\iota}(‚(p \to r)‘) = \mathbf{1}$.

Sei also $\mathfrak{I} = \langle \{\mathbf{0}, \frac{1}{2}, \mathbf{1}\}, \iota \rangle$ eine Ł3E, unter der $\hat{\iota}(‚(p \to q)‘) = \mathbf{1} = \hat{\iota}(‚(q \to r)‘)$. Beachte, dass in einer eine Ł3E $\hat{\mathfrak{I}}$ eine Implikationformel $\hat{\iota}(\ulcorner(\mathtt{A} \to \mathtt{B})\urcorner) = \mathbf{1}$ (der bezeichnete Wert) gdw $\hat{\iota}(\mathtt{A}) = \mathbf{0}$ oder $\hat{\iota}(\mathtt{A}) = \frac{1}{2} = \hat{\iota}(\mathtt{B})$ oder $\hat{\iota}(\mathtt{B}) = \mathbf{1}$. Daher gibt es im Prinzip nur neun Fälle für $\mathfrak{I}$:

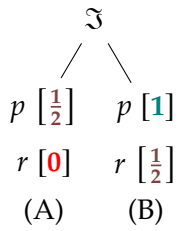


Beachte jedoch, dass Fälle (4), (7) und (8) unmöglich sind, da sie ‚q‘ unterschiedliche Wahrheitswerte zuweisen. Wir bleiben, dann, mit (1), (2), (3), (5), (6) und (9).

Was nun $‚(p \to r)‘$ betrifft, so wissen wir, dass entweder $\hat{\iota}(‚(p \to r)‘) = \mathbf{0}$ oder $\hat{\iota}(‚(p \to r)‘) = \frac{1}{2}$ oder $\hat{\iota}(‚(p \to r)‘) = \mathbf{1}$. Wir zeigen, dass die erstgenannten Fälle unmöglich sind.

Falls $\hat{\iota}(‚(p \to r)‘) = \mathbf{0}$, gilt es, dass $\iota(‚p‘) = \mathbf{1}$ und $\iota(‚r‘) = \mathbf{0}$. Beachte jedoch, dass $\iota(‚p‘) = \mathbf{1}$ mit (1), (2), (3), (5) und (6) inkompatibel ist, während $\iota(‚r‘) = \mathbf{0}$ mit (2), (3), (5), (6) und (9) inkompatibel ist. Dann ist $\hat{\iota}(‚(p \to r)‘) \neq \mathbf{0}$.

Falls $\hat{\iota}(‚(p \to r)‘) = \frac{1}{2}$, gibt es zwei Fälle:



Der Fall (A) ist jedoch mit den Fällen (1), (2), (3), (5), (6) und (9) inkompatibel, da ‚p‘ und ‚r‘ dort unterschiedliche Werte zugewiesen werden. Insbesondere ist $\iota(‚p‘) = \frac{1}{2}$ mit den Fällen (1), (2) und (3) inkompatibel, während $\iota(‚p‘) = \mathbf{0}$ mit den Fällen (2), (5), (6) und (9) inkompatibel ist.

Der Fall (B) ist auch mit den Fällen (1), (2), (3), (5), (6) und (9) inkompatibel. Insbesondere ist $\iota(,p`) = \mathbf{1}$ mit den Fällen (1), (2), (3), (5) und (6) inkompatibel, während $\iota(,p`) = \frac{1}{2}$ mit den Fällen (3), (6) und (9) inkompatibel ist.

Dann gilt $\hat{\iota}(,(p \to r)`) \neq \frac{1}{2}$.

Da $\hat{\iota}(,(p \to r)`) \neq \mathbf{0}$ und $\hat{\iota}(,(p \to r)`) \neq \frac{1}{2}$, folgt es sich durch Ausschluss, dass $\hat{\iota}(,(p \to r)`) = \mathbf{1}$. Daher gilt, dass $(p \to q), (q \to r) \vDash_{\mathsf{L3}} (p \to r)$. □

25ab. $\nvDash_{\mathsf{WK}} (p \to p) \mathrel{\mathbin{\wedge\!\!\!\wedge}} \nvDash_{\mathsf{WK}} (p \to p)$.

Beweis. Betrachten Sie die folgende Wahrheitstabelle, was sowohl für w3E als auch für s3E zutrifft:

p	$(p \to p)$
$\mathbf{0}$	$\mathbf{1}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\mathbf{1}$	$\mathbf{1}$

Diese Wahrheitstabelle zeigt, dass eine 3aI $\mathfrak{I} = \langle \{\mathbf{0}, \frac{1}{2}, \mathbf{1}\}, \iota \rangle$ gibt (entsprechend Zeile 6), deren w3E und s3E $\hat{\mathfrak{I}}$ so ist, dass $\hat{\iota}(,(p \to p)`) = \frac{1}{2}$ (eine gegen-bezeichnete Wahrheitswert). Daher sind $\nvDash_{\mathsf{WK}} (p \to p)$ und $\nvDash_{\mathsf{SK}} (p \to p)$. □

25c. $\vDash_{\mathsf{L3}} (p \to p)$.

Beweis. Betrachten Sie die folgende Wahrheitstabelle:

p	$(p \to p)$
$\mathbf{0}$	$\mathbf{1}$
$\frac{1}{2}$	$\mathbf{1}$
$\mathbf{1}$	$\mathbf{1}$

Diese Wahrheitstabelle zeigt, dass in allen 3aI $\mathfrak{I} = \langle \{\mathbf{0}, \frac{1}{2}, \mathbf{1}\}, \iota \rangle$, wo die Ł3E (starke Łukasiewicz-Erweiterung) $\hat{\mathfrak{I}}$ von $\mathfrak{I}$ so ist, dass $\hat{\iota}(,q`) = \mathbf{1}$ (der bezeichnete Wahrheitswert) gilt (entsprechend den Zeilen 3, 6, 9), auch $\hat{\iota}(,(p \to p)`) = \mathbf{1}$ (ebenfalls der bezeichnete Wahrheitswert) gilt. Daher ist $\vDash_{\mathsf{L3}} (p \to p)$. □

Intuitionistische Logiken 6

6.1 Philosophische Motivationen

Die intuitionistische Logik entstand zu Beginn des 20. Jahrhunderts als Alternative zur klassischen Logik und ist eng mit Grundlagenfragen der Mathematik verbunden, insbesondere zu Wahrheit, Existenz und Beweisbarkeit. Ähnlich wie viele dreiwertige Logiken verwirft sie die uneingeschränkte Gültigkeit des Satzes vom ausgeschlossenen Dritten: $(\mathtt{A} \vee \neg\mathtt{A})$.

Ihre philosophischen Wurzeln liegen im Werk von L. E. J. Brouwer, der die Mathematik konstruktiv neu begründen wollte. Arend Heyting formalisierte diese Ideen später zu dem heute bekannten System der intuitionistischen Logik.

Für Brouwer ist Mathematik keine Entdeckung objektiver, unabhängig existierender Wahrheiten, sondern eine geistige Konstruktion. Sie entspringt der Zeitintuition, also dem Bewusstsein des Übergangs von einem Moment zum nächsten. Daraus entstehen die natürlichen Zahlen und alle weiteren Konstruktionen.

Mathematische Objekte existieren daher nur insofern, als sie konstruierbar sind. Existenz bedeutet, eine Methode zur expliziten Konstruktion zu besitzen. Entsprechend bedeutet eine wahre Aussage, dass ein Beweis konstruiert werden kann.

Brouwer unterscheidet zwischen:

- dem Beweis der Wahrheit einer Aussage,
- dem Beweis ihrer Falschheit,
- und dem Fehlen beider Beweise.

Eine Aussage gilt nur als wahr, wenn eine entsprechende Konstruktion existiert.

Beispiele für möglicherweise unentscheidbare Aussagen sind (cf. Brouwer 2017, S. 44):

1. Eine Ziffer in der Dezimalentwicklung von π kommt dauerhaft häufiger vor als alle anderen.
2. In der Dezimalentwicklung von π treten unendlich viele gleiche aufeinanderfolgende Ziffernpaare auf.

Zusammenfassend versteht die klassische Logik Wahrheit semantisch (Modellwahrheit), während der Intuitionismus Wahrheit mit Beweisbarkeit gleichsetzt.

In diesem Abschnitt stellen wir drei Systeme vor, die mit der intuitionistischen Logik in Zusammenhang stehen: Hilberts positive

Aussagenlogik P0, Ingebrigt Johanssons minimale Aussagenlogik M0 und Heytings intuitionistische Aussagenlogik I0.

Das erste dieser Systeme ist ein Logiksystem ohne Negation, auf dessen Grundlage viele andere Logiksysteme konstruiert werden können. Das zweite fügt die Negation hinzu, ohne jedoch weder das *ex contradictione quodlibet* noch das *tertium non datur* zu validieren. Schließlich erweitert Heytings intuitionistische Logik die minimale Logik durch Einbeziehung dieses Prinzips und liefert damit das Standard-Aussagensystem, das mit Brouwers intuitionistischer Konzeption der Mathematik verbunden ist.

6.2 Vokabularien und Sprachen

Die Vokabularien und formalen Sprachen $\mathbf{Fo}_{\mathsf{M0}}$ und $\mathbf{Fo}_{\mathsf{I0}}$ werden wie die von S0 definiert.

$$\mathbf{Vo}_{\mathsf{M0}} \stackrel{\text{DF}}{=} \mathbf{Vo}_{\mathsf{S0}}, \qquad \mathbf{Vo}_{\mathsf{I0}} \stackrel{\text{DF}}{=} \mathbf{Vo}_{\mathsf{S0}},$$
$$\mathbf{Fo}_{\mathsf{M0}} \stackrel{\text{DF}}{=} \mathbf{Fo}_{\mathsf{S0}}, \qquad \mathbf{Fo}_{\mathsf{I0}} \stackrel{\text{DF}}{=} \mathbf{Fo}_{\mathsf{S0}}.$$

Das Vokabular und die Sprache von P0 müssen jedoch abweichen, da dieses System kein Negationszeichen enthält.

$$\begin{aligned}
\mathbf{Log}_{\mathsf{P0}} &\stackrel{\text{DF}}{=} \mathbf{Con} - \{\neg\},\\
\mathbf{Non}_{\mathsf{P0}} &\stackrel{\text{DF}}{=} \mathbf{Non}_{\mathsf{S0}},\\
\mathbf{Aux}_{\mathsf{P0}} &\stackrel{\text{DF}}{=} \mathbf{Par},\\
\mathbf{Vo}_{\mathsf{P0}} &\stackrel{\text{DF}}{=} \langle \mathbf{Log}_{\mathsf{P0}}, \mathbf{Non}_{\mathsf{P0}}, \mathbf{Aux}_{\mathsf{P0}} \rangle\\
\mathbf{Fo}_{\mathsf{P0}} &\stackrel{\text{DF}}{=} \mathbf{Non}_{\mathsf{P0}} \cup \left\{ \ulcorner (\mathtt{p} \heartsuit \mathtt{q}) \urcorner \mid p, q \in \mathbf{Fo}_{\mathsf{P0}},\ \heartsuit \in \mathbf{Log}_{\mathsf{P0}} \right\}.
\end{aligned}$$

6.3 Inferenzs- und Konsequenzrelationen

P0, M0 und I0 gehören zu den modernen Systemen. Daher sind Inferenzen in diesen Systemen alle Kombinationen von Formeln als Prämissen und Konklusionen.

Bezüglich ihrer Konsequenzrelationen wollen wir nicht, dass das Gesetz vom ausgeschlossenen Dritten

1. $/ (\mathtt{A} \vee \neg\mathtt{A})$

allgemein gültig ist.

2. $/ \neg(\mathtt{A} \wedge \neg\mathtt{A})$
3. $(\mathtt{A} \rightarrow \mathtt{B}), (\mathtt{B} \rightarrow \mathtt{C}) / (\mathtt{A} \rightarrow \mathtt{C})$

Außerdem wollen wir, anders als in der dreiwertigen Logik, dass:

4. $/ \neg\neg(\mathtt{A} \vee \neg\mathtt{A})$

Dieses Gesetz ergibt im Rahmen der intuitionistischen Logik Sinn, da es so interpretiert werden kann, dass es keine Konstruktion gibt, die einen Beweis für $\ulcorner(\mathtt{A} \vee \neg\mathtt{A})\urcorner$ in einen Widerspruch verwandelt, oder dass es unmöglich ist, $\ulcorner(\mathtt{A} \vee \neg\mathtt{A})\urcorner$ zu widerlegen.

Außerdem sollen alle diese Systeme echte Teillogiken von $\mathsf{S0}$ sein:

$$\mathbf{Con}_{\mathsf{P0}}, \mathbf{Con}_{\mathsf{M0}}, \mathbf{Con}_{\mathsf{I0}} \subset \mathbf{Con}_{\mathsf{S0}}.$$

Und außerdem:

$$\mathbf{Con}_{\mathsf{P0}} \subset \mathbf{Con}_{\mathsf{M0}} \subset \mathbf{Con}_{\mathsf{I0}} \subset \mathbf{Con}_{\mathsf{S0}}.$$

6.4 Interpretationssysteme

Es gib mehrere Interpretationssysteme für intuitionistische Logiken. Viele davon verwenden mögliche Welten und Kripke-Semantik, was jedoch einen erheblichen technischen Aufwand erfordert. Da diese Struktur mehrere Vorlesungseinheiten voraussetzen würde, beschränken wir uns hier auf Herleitungssysteme.

6.5 Herleitungssysteme

Es existieren verschiedene formale Systeme für intuitionistische Logiken. Wir beginnen mit axiomatischen Systemen in Form schematischer Inferenzregeln.

Diesen Regeln werden für die Systeme $\mathsf{P0}$, $\mathsf{M0}$, $\mathsf{I0}$ verwendet.

$$
\begin{array}{lll}
(\mathtt{A} \wedge \mathtt{B}), \mathtt{A} & / \ \mathtt{B} & \text{(MPP)} \\
 & / \ (\mathtt{A} \to (\mathtt{B} \to \mathtt{A})) & \text{(P1)} \\
 & / \ ((\mathtt{A} \to \mathtt{B}) \to ((\mathtt{A} \to (\mathtt{B} \to \mathtt{C})) \to (\mathtt{A} \to \mathtt{C}))) & \text{(P2)} \\
 & / \ (\mathtt{A} \to (\mathtt{B} \to (\mathtt{A} \wedge \mathtt{B}))) & \text{(P3)} \\
 & / \ ((\mathtt{A} \wedge \mathtt{B}) \to \mathtt{A}) & \text{(P4)} \\
 & / \ ((\mathtt{A} \wedge \mathtt{B}) \to \mathtt{B}) & \text{(P5)} \\
 & / \ (\mathtt{A} \to (\mathtt{A} \vee \mathtt{B})) & \text{(P6)} \\
 & / \ (\mathtt{B} \to (\mathtt{A} \vee \mathtt{B})) & \text{(P7)} \\
 & / \ ((\mathtt{A} \to \mathtt{C}) \to ((\mathtt{B} \to \mathtt{C}) \to ((\mathtt{A} \vee \mathtt{B}) \to \mathtt{C}))) & \text{(P8)} \\
 & / \ ((\mathtt{A} \to \mathtt{B}) \to ((\mathtt{A} \to \neg\mathtt{B}) \to \neg\mathtt{A})) & \text{(M1)} \\
 & / \ (\neg\mathtt{A} \to (\mathtt{A} \to \mathtt{B})) & \text{(I1)} \\
 & / \ (\neg\neg\mathtt{A} \to \mathtt{A}) & \text{(S1)}
\end{array}
$$

Im Rahmen dieser Regeln nehmen wir an, dass $\ulcorner(\mathtt{A} \leftrightarrow \mathtt{B})\urcorner$ eine Abkürzung für $\ulcorner((\mathtt{A} \to \mathtt{B}) \wedge (\mathtt{B} \to \mathtt{A}))\urcorner$ ist.

Aus bestimmten Kombinationen dieser Inferenzformen lassen sich axiomatische deduktive Basen für $\mathsf{P0}, \mathsf{M0}, \mathsf{I0}$ und sogar für $\mathsf{S0}$ konstruieren.

Die axiomatische deduktive Basis für P0 würde aus (MPP) sowie (P1)–(P8) bestehen. Dies ist die Grundlage für viele deduktive Basen.

Somit besteht die axiomatische deduktive Basis für M0 aus P0 plus (M1). Die axiomatische deduktive Basis für I0 besteht aus M0 plus (I1). Schließlich besteht die axiomatische Deduktionsbasis für S0 aus I0 plus (S1).

Dies ist eine ausreichende Definition der Deduktionsbasen dieser Systeme. Wir wollen jedoch Fitch-Herleitungssysteme konstruieren, da diese eine adäquatere Darstellung davon liefern, wie logisches Denken in diesen Systemen funktioniert.

6.6 Herleitungssystem für P0.

Die deduktive Basis der aussagenlogischen positiven Logik P0 lässt sich im Fitch-Stil wie folgt darstellen.

Reiteration.

$$\begin{array}{l|ll} a & \mathtt{A} & \\ & \vdots & \\ & \mid \ldots \mid \mathtt{A} & \text{Reit}, a \end{array}$$

Konjunktion.

$$\begin{array}{l|ll} a & (\mathtt{A} \wedge \mathtt{B}) & \\ & \vdots & \\ & \mathtt{A} & \wedge_1^-, a \end{array} \qquad \begin{array}{l|ll} a & (\mathtt{A} \wedge \mathtt{B}) & \\ & \vdots & \\ & \mathtt{B} & \wedge_2^-, a \end{array} \qquad \begin{array}{l|ll} a & \mathtt{A} & \\ & \vdots & \\ b & \mathtt{B} & \\ & \vdots & \\ & (\mathtt{A} \wedge \mathtt{B}) & \wedge^+, a, b \end{array}$$

Disjunktion.

$$
\begin{array}{ll|l}
a & & (\mathtt{A} \vee \mathtt{B}) \\
 & & \vdots \\
b & & \begin{array}{|l} \mathtt{A} \\ \hline \vdots \\ \mathtt{C} \end{array} \\
 & & \vdots \\
d & & \begin{array}{|l} \mathtt{B} \\ \hline \vdots \\ \mathtt{C} \end{array} \\
 & & \vdots \\
e & & \\
 & & \mathtt{C} \qquad \vee^{-}, a, b\text{–}c, d\text{–}e
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ll|l}
a & & \mathtt{A} \\
 & & \vdots \\
 & & (\mathtt{A} \vee \mathtt{B}) \quad \vee_1^{+}, a
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ll|l}
a & & \mathtt{B} \\
 & & \vdots \\
 & & (\mathtt{A} \vee \mathtt{B}) \quad \vee_2^{+}, a
\end{array}
$$

Implikation.

$$
\begin{array}{ll|l}
a & & (\mathtt{A} \rightarrow \mathtt{B}) \\
 & & \vdots \\
b & & \mathtt{A} \\
 & & \vdots \\
 & & \mathtt{B} \qquad \rightarrow^{-}, a, b
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ll|l}
a & & \begin{array}{|l} \mathtt{A} \\ \hline \vdots \\ \mathtt{B} \end{array} \\
 & & \vdots \\
 & & (\mathtt{A} \rightarrow \mathtt{B}) \quad \rightarrow^{+}, a\text{–}b
\end{array}
$$

Äquivalenz.

$$
\begin{array}{ll|l}
a & & (\mathtt{A} \leftrightarrow \mathtt{B}) \\
 & & \vdots \\
b & & \mathtt{A} \\
 & & \vdots \\
 & & \mathtt{B} \qquad \leftrightarrow_1^{-}, a, b
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ll|l}
a & & (\mathtt{A} \leftrightarrow \mathtt{B}) \\
 & & \vdots \\
b & & \mathtt{B} \\
 & & \vdots \\
 & & \mathtt{A} \qquad \leftrightarrow_2^{-}, a, b
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ll|l}
a & & \begin{array}{|l} \mathtt{A} \\ \hline \vdots \\ \mathtt{B} \end{array} \\
 & & \vdots \\
c & & \begin{array}{|l} \mathtt{B} \\ \hline \vdots \\ \mathtt{A} \end{array} \\
 & & \vdots \\
 & & (\mathtt{A} \leftrightarrow \mathtt{B}) \quad \leftrightarrow^{+}, a\text{–}b, c\text{–}d
\end{array}
$$

Somit könnten wir eine deduktive Basis $\mathbf{DBas}_{\mathsf{P0}}$ für $\mathsf{P0}$ wie folgt definieren:

$$\mathbf{DBas}_{\mathsf{P0}} \overset{\text{DF}}{=} \{\mathsf{Reit}, \wedge^{+}, \wedge_{1}^{-}, \wedge_{2}^{-}, \vee_{1}^{+}, \vee_{2}^{+}, \vee^{-}, \rightarrow^{+}, \rightarrow^{-}, \leftrightarrow^{+}, \leftrightarrow_{1}^{-}, \leftrightarrow_{2}^{-}\}.$$

Was das Herleitungssystem $\mathbf{Cal}_{\mathsf{P0}}$ betrifft, so nehmen wir an, dass die Funktionen $\mathbf{Prem}_{\mathsf{P0}}$ und $\mathbf{Conc}_{\mathsf{P0}}$ jede Fitch-Herleitung auf ihre Prämissen bzw. ihre Konklusionen abbilden. Somit erhalten wir Diese Definition.

$\mathbf{Cal}_{\mathsf{P0}}$ ist ein Kalkül auf $\mathsf{P0}$

$$\begin{aligned}
&\overset{\text{DF}}{=} \mathbf{Cal}_{\mathsf{P0}} = \langle \mathbf{DBas}_{\mathsf{P0}}, \mathbf{Der}_{\mathsf{P0}}, \mathbf{Prem}_{\mathsf{P0}}, \mathbf{Conc}_{\mathsf{P0}}, \vdash_{\mathsf{P0}} \rangle \\
&: \mathbf{DBas}_{\mathsf{P0}} \text{ ist eine deduktive Basis für } \mathbf{Fo}_{\mathsf{P0}} \mathbin{\wedge\!\!\!\wedge} \\
&\quad \mathbf{Der}_{\mathsf{P0}} = \{\mathbf{D} : \mathbf{D} \text{ ist eine Fitch-Herleitung auf } \mathbf{Fo}_{\mathsf{P0}} \text{ aus } \mathbf{DBas}_{\mathsf{P0}}\} \mathbin{\wedge\!\!\!\wedge} \\
&\quad \mathbf{Prem}_{\mathsf{P0}} : \mathbf{Der}_{\mathsf{P0}} \rightarrow \wp\mathbf{Fo}_{\mathsf{P0}} \mathbin{\wedge\!\!\!\wedge} \\
&\quad \mathbf{Conc}_{\mathsf{P0}} : \mathbf{Der}_{\mathsf{P0}} \rightarrow \wp\mathbf{Fo}_{\mathsf{P0}} \mathbin{\wedge\!\!\!\wedge} \\
&\quad \vdash_{\mathsf{S}} = \{\langle \mathbf{A}, \mathbf{B} \rangle : \exists \mathbf{X} \in \mathbf{Der}_{\mathsf{P0}} (\mathbf{Prem}_{\mathsf{P0}}(\mathbf{X}) = \mathbf{A} \mathbin{\wedge\!\!\!\wedge} \mathbf{Conc}_{\mathsf{P0}}(\mathbf{X}) = \mathbf{B})\}.
\end{aligned}$$

Theorem 6.1. $\vdash_{\mathsf{P0}} ((\mathtt{A} \rightarrow \mathtt{B}) \rightarrow ((\mathtt{A} \rightarrow (\mathtt{B} \rightarrow \mathtt{C})) \rightarrow (\mathtt{A} \rightarrow \mathtt{C})))$.

Beweis. Seien $\mathtt{A}, \mathtt{B}, \mathtt{C} \in \mathbf{Fo}_{\mathsf{P0}}$ und betrachten wir die schematische Herleitung:

1	$(\mathtt{A} \rightarrow \mathtt{B})$	
2	$(\mathtt{A} \rightarrow (\mathtt{B} \rightarrow \mathtt{C}))$	
3	$\mathtt{A}$	
4	$(\mathtt{B} \rightarrow \mathtt{C})$	$\rightarrow^{-}, 2, 3$
5	$\mathtt{B}$	$\rightarrow^{-}, 1, 3$
6	$\mathtt{C}$	$\rightarrow^{-}, 4, 5$
7	$(\mathtt{A} \rightarrow \mathtt{C})$	$\rightarrow^{+}, 3\text{–}6$
8	$((\mathtt{A} \rightarrow (\mathtt{B} \rightarrow \mathtt{C})) \rightarrow (\mathtt{A} \rightarrow \mathtt{C}))$	$\rightarrow^{+}, 2\text{–}7$
9	$((\mathtt{A} \rightarrow \mathtt{B}) \rightarrow ((\mathtt{A} \rightarrow (\mathtt{B} \rightarrow \mathtt{C})) \rightarrow (\mathtt{A} \rightarrow \mathtt{C})))$	$\rightarrow^{+}, 1\text{–}8$

Nennen wir diese schematische Herleitung ‚**D**‘. Es ist klar, dass für alle $\mathtt{A}, \mathtt{B}, \mathtt{C} \in \mathbf{Fo}_{\mathsf{P0}}$ gilt, dass $\mathbf{D}$ eine Fitch-Herleitung auf $\mathbf{Fo}_{\mathsf{P0}}$ aus $\mathbf{DBas}_{\mathsf{P0}}$ ist. Das bedeutet, dass es eine Herleitung $\mathbf{D} \in \mathbf{Der}_{\mathsf{P0}}$ gibt, für die $\{\} \subseteq \mathbf{Prem}_{\mathsf{P0}}(\mathbf{D})$ gilt und $\ulcorner((\mathtt{A} \rightarrow \mathtt{B}) \rightarrow ((\mathtt{A} \rightarrow (\mathtt{B} \rightarrow \mathtt{C})) \rightarrow (\mathtt{A} \rightarrow \mathtt{C})))\urcorner \in \mathbf{Conc}_{\mathsf{P0}}(\mathbf{D})$. Daher muss $\vdash_{\mathsf{P0}} ((\mathtt{A} \rightarrow \mathtt{B}) \rightarrow ((\mathtt{A} \rightarrow (\mathtt{B} \rightarrow \mathtt{C})) \rightarrow (\mathtt{A} \rightarrow \mathtt{C})))$ gemäß die Definition von , $\vdash_{\mathsf{P0}}$ ‘ gelten. □

Herleitungssystem für M0**.** Wir möchten die deduktive Basis für die minimale Aussagenlogik M0 im Fitch-Stil vorstellen.

Zu diesem Zweck ist es zweckmäßig (wenn auch nicht zwingend erforderlich), das Symbol ‚$\perp$' einzuführen, das als ‚das Falsum' bezeichnet wird. Dies ist kein Symbol der Sprache von M0 (obwohl es als solches hätte eingeführt werden können). Wir werden jedoch Regeln mit diesem Symbol assoziieren, die es uns ermöglichen, Formeln von $\mathbf{Fo}_{\mathsf{M0}}$ zu erhalten. Diese Regeln lauten wie folgt:

Falsum.

$$\begin{array}{r|ll} a & \perp & \\ & \vdots & \\ & \mathtt{B} & \perp^{-}, a \end{array} \qquad \begin{array}{r|ll} a & \mathtt{A} & \\ & \vdots & \\ b & \neg\mathtt{A} & \\ & \vdots & \\ & \perp & \perp^{+}, a, b \end{array}$$

Darüber hinaus formulieren wir die Regeln für die Negation wie folgt um:

Negation.

$$\begin{array}{r|l|ll} a & \neg\mathtt{A} & & \\ \cline{2-2} & \vdots & & \\ b & \perp & & \\ & \vdots & & \\ & \mathtt{A} & \neg^{-}, a\text{–}b & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l|ll} a & \mathtt{A} & & \\ \cline{2-2} & \vdots & & \\ b & \perp & & \\ & \vdots & & \\ & \neg\mathtt{A} & \neg^{+}, a\text{–}b & \end{array}$$

Wir werden jedoch weder für M1 noch für I1 alle diese Regeln verwenden. Wir möchten sowohl in M1 als auch in I1 negierte Sätze haben, daher scheint $\neg^{+}$ in beiden Systemen akzeptabel zu sein. Um jedoch in diesen Herleitungssystemen eine negierte Formel zu erhalten, benötigen wir auch eine Möglichkeit, das Falsum einzuführen, sodass $\perp^{+}$ ebenfalls in beiden Systemen akzeptabel ist.

Wir wollen jedoch keine *reductio ad absurdum*, also keine indirekten Beweise, durchführen, sodass wir in beiden Systemen auf $\neg^{-}$ verzichten müssen. Im speziellen Fall der Minimal-Logik wollen wir zudem nicht, dass sich irgendetwas aus Widersprüchen herleiten lässt, daher wollen wir auch auf $\perp^{-}$ verzichten.

Somit könnten wir die deduktive Basis $\mathbf{DBas}_{\mathsf{M0}}$ von M0 wie folgt definieren:

$$\mathbf{DBas}_{\mathsf{M0}} \overset{\text{DF}}{=} \mathbf{DBas}_{\mathsf{P0}} \cup \{\neg^{+}, \perp^{+}\}.$$

Was das Herleitungssystem $\mathbf{Cal}_{\mathsf{M0}}$ betrifft, so nehmen wir erneut an, dass die Funktionen $\mathbf{Prem}_{\mathsf{M0}}$ und $\mathbf{Conc}_{\mathsf{M0}}$ jede Fitch-Herleitung auf ihre Prämissen bzw. ihre Konklusionen abbilden. Somit erhalten wir Diese Definition.

$\mathbf{Cal}_{\mathsf{M0}}$ ist ein Kalkül auf $\mathsf{M0}$

$$\begin{aligned}
&\overset{\text{DF}}{=} \mathbf{Cal}_{\mathsf{M0}} = \langle \mathbf{DBas}_{\mathsf{M0}}, \mathbf{Der}_{\mathsf{M0}}, \mathbf{Prem}_{\mathsf{M0}}, \mathbf{Conc}_{\mathsf{M0}}, \vdash_{\mathsf{M0}} \rangle \\
&: \mathbf{DBas}_{\mathsf{M0}} \text{ ist eine deduktive Basis auf } \mathbf{Fo}_{\mathsf{M0}} \wedge \\
&\quad \mathbf{Der}_{\mathsf{M0}} = \{\mathbf{D} : \mathbf{D} \text{ ist eine Fitch-Herleitung auf } \mathbf{Fo}_{\mathsf{M0}} \text{ aus } \mathbf{DBas}_{\mathsf{M0}}\} \wedge \\
&\quad \mathbf{Prem}_{\mathsf{M0}} : \mathbf{Der}_{\mathsf{M0}} \longrightarrow \wp\mathbf{Fo}_{\mathsf{M0}} \wedge \\
&\quad \mathbf{Conc}_{\mathsf{M0}} : \mathbf{Der}_{\mathsf{M0}} \longrightarrow \wp\mathbf{Fo}_{\mathsf{M0}} \wedge \\
&\quad \vdash_{\mathsf{S}} = \{\langle \mathbf{A}, \mathbf{B} \rangle : \exists \mathbf{X} \in \mathbf{Der}_{\mathsf{M0}} (\mathbf{Prem}_{\mathsf{M0}}(\mathbf{X}) = \mathbf{A} \wedge \mathbf{Conc}_{\mathsf{M0}}(\mathbf{X}) = \mathbf{B})\}.
\end{aligned}$$

Es ist klar, dass alle Inferenzen der Formen (P1)–(P8) zu $\vdash_{\mathsf{M0}}$ gehören, da $\vdash_{\mathsf{M0}}$ eine Erweiterung von $\vdash_{\mathsf{P0}}$ ist. Beweisen wir also den Fall der Inferenzen der für $\mathsf{M0}$ charakteristischen Inferenzsform, d. h. (M1).

Theorem 6.2. $\vdash_{\mathsf{M0}} ((\mathtt{A} \longrightarrow \mathtt{B}) \longrightarrow ((\mathtt{A} \longrightarrow \neg\mathtt{B}) \longrightarrow \neg\mathtt{A}))$.

Beweis. Seien $\mathtt{A}, \mathtt{B} \in \mathbf{Fo}_{\mathsf{M0}}$ und betrachten wir die schematische Herleitung:

1	$(\mathtt{A} \longrightarrow \mathtt{B})$	
2	$(\mathtt{A} \longrightarrow \neg\mathtt{B})$	
3	$\mathtt{A}$	
4	$\mathtt{B}$	$\longrightarrow^{-}, 1, 3$
5	$\neg\mathtt{B}$	$\longrightarrow^{-}, 2, 3$
6	$\bot$	$\bot^{+}, 4, 5$
7	$\neg\mathtt{A}$	$\neg^{+}, 3\text{–}6$
8	$((\mathtt{A} \longrightarrow \neg\mathtt{B}) \longrightarrow \neg\mathtt{A})$	$\longrightarrow^{+}, 2\text{–}7$
9	$((\mathtt{A} \longrightarrow \mathtt{B}) \longrightarrow ((\mathtt{A} \longrightarrow \neg\mathtt{B}) \longrightarrow \neg\mathtt{A}))$	$\longrightarrow^{+}, 1\text{–}8$

Nennen wir diese schematische Herleitung ‚**D**'. Es ist klar, dass für alle $\mathtt{A}, \mathtt{B} \in \mathbf{Fo}_{\mathsf{M0}}$ gilt, dass $\mathbf{D}$ eine Fitch-Herleitung auf $\mathbf{Fo}_{\mathsf{M0}}$ aus $\mathbf{DBas}_{\mathsf{M0}}$ ist. Das bedeutet, dass es eine Herleitung $\mathbf{D} \in \mathbf{Der}_{\mathsf{M0}}$ gibt mit $\{\} \subseteq \mathbf{Prem}_{\mathsf{M0}}(\mathbf{D})$ und $\ulcorner((\mathtt{A} \longrightarrow \mathtt{B}) \longrightarrow ((\mathtt{A} \longrightarrow \neg\mathtt{B}) \longrightarrow \neg\mathtt{A}))\urcorner \in \mathbf{Conc}_{\mathsf{M0}}(\mathbf{D})$. Daher gilt gemäß Definition, dass

$\vdash_{\mathsf{M0}} ((\mathtt{A} \longrightarrow \mathtt{B}) \longrightarrow ((\mathtt{A} \longrightarrow \neg\mathtt{B}) \longrightarrow \neg\mathtt{A}))$. □

Derivation System for I0. Um die deduktive Basis $\mathbf{Cal}_{\mathsf{I0}}$ für die intuitionistische Aussagenlogik I0 im Fitch-Stil darzustellen, gehen wir von $\mathbf{Cal}_{\mathsf{M0}}$ aus und fügen lediglich $\bot^-$ hinzu. Wie wir jedoch oben dargelegt haben, sollten wir $\neg^-$ nicht hinzufügen, um *reductio ad absurdum*-Beweise zu vermeiden. Daher könnten wir die deduktive Basis $\mathbf{DBas}_{\mathsf{I0}}$ von I0 wie folgt definieren:

$$\mathbf{DBas}_{\mathsf{I0}} \overset{\text{DF}}{=} \mathbf{DBas}_{\mathsf{M0}} \cup \{\bot^-\}.$$

Was das Herleitungssystem $\mathbf{Cal}_{\mathsf{I0}}$ betrifft, so nehmen wir erneut an, dass die Funktionen $\mathbf{Prem}_{\mathsf{I0}}$ und $\mathbf{Conc}_{\mathsf{I0}}$ jede Fitch-Herleitung auf ihre Prämissen bzw. ihre Konklusionen abbilden. Somit erhalten wir Diese Definition.

$\mathbf{Cal}_{\mathsf{I0}}$ ist eine Kalkül auf I0

$\overset{\text{DF}}{=} \mathbf{Cal}_{\mathsf{I0}} = \langle \mathbf{DBas}_{\mathsf{I0}}, \mathbf{Der}_{\mathsf{I0}}, \mathbf{Prem}_{\mathsf{I0}}, \mathbf{Conc}_{\mathsf{I0}}, \vdash_{\mathsf{I0}} \rangle$

: $\mathbf{DBas}_{\mathsf{I0}}$ ist eine deduktive Basis auf $\mathbf{Fo}_{\mathsf{I0}}$ $\wedge\!\!\!\wedge$

$\mathbf{Der}_{\mathsf{I0}} = \{\mathbf{D} : \mathbf{D}$ ist eine Fitch-Herleitung auf $\mathbf{Fo}_{\mathsf{I0}}$ aus $\mathbf{DBas}_{\mathsf{I0}}\}$ $\wedge\!\!\!\wedge$

$\mathbf{Prem}_{\mathsf{I0}} : \mathbf{Der}_{\mathsf{I0}} \longrightarrow \wp\mathbf{Fo}_{\mathsf{I0}}$ $\wedge\!\!\!\wedge$

$\mathbf{Conc}_{\mathsf{I0}} : \mathbf{Der}_{\mathsf{I0}} \longrightarrow \wp\mathbf{Fo}_{\mathsf{I0}}$ $\wedge\!\!\!\wedge$

$\vdash_{\mathsf{S}} = \{\langle \mathbf{A}, \mathbf{B} \rangle : \exists \mathbf{X} \in \mathbf{Der}_{\mathsf{I0}} (\mathbf{Prem}_{\mathsf{I0}}(\mathbf{X}) = \mathbf{A} \wedge\!\!\!\wedge \mathbf{Conc}_{\mathsf{I0}}(\mathbf{X}) = \mathbf{B})\}.$

Es ist klar, dass alle Inferenzen der Formen (P1)–(P8) und (M1) zu $\vdash_{\mathsf{I0}}$ gehören, da $\vdash_{\mathsf{I0}}$ eine Erweiterung von $\vdash_{\mathsf{M0}}$ ist. Beweisen wir also den Fall der Inferenzen der für I0 charakteristischen Inferenzsform, d. h. (I1).

Theorem 6.3. $\vdash_{\mathsf{I0}} (\neg \mathtt{A} \longrightarrow (\mathtt{A} \longrightarrow \mathtt{B}))$.

Beweis. Seien $\mathtt{A}, \mathtt{B} \in \mathbf{Fo}_{\mathsf{I0}}$ und betrachten wir die schematische Herleitung:

1	$\neg \mathtt{A}$	
2	$\quad \mathtt{A}$	
3	$\quad \bot$	$\bot^+, 2, 1$
4	$\quad \mathtt{B}$	$\bot^-, 3$
5	$(\mathtt{A} \longrightarrow \mathtt{B})$	$\longrightarrow^+, 2\text{–}4$
6	$(\neg \mathtt{A} \longrightarrow (\mathtt{A} \longrightarrow \mathtt{B}))$	$\longrightarrow^+, 1\text{–}5$

Nennen wir diese schematische Herleitung ‚**D**'. Es ist klar, dass für alle $\mathtt{A}, \mathtt{B} \in \mathbf{Fo}_{\mathsf{I0}}$ gilt, dass $\mathbf{D}$ eine Fitch-Herleitung auf $\mathbf{Fo}_{\mathsf{I0}}$ aus $\mathbf{DBas}_{\mathsf{I0}}$ ist. Das bedeutet, dass es eine Herleitung $\mathbf{D} \in \mathbf{Der}_{\mathsf{I0}}$ gibt mit $\{\} \subseteq \mathbf{Prem}_{\mathsf{I0}}(\mathbf{D})$ und $\ulcorner(\neg \mathtt{A} \longrightarrow (\mathtt{A} \longrightarrow \mathtt{B}))\urcorner \in \mathbf{Conc}_{\mathsf{I0}}(\mathbf{D})$. Daher gilt gemäß Definition, dass $\vdash_{\mathsf{I0}} (\neg \mathtt{A} \longrightarrow (\mathtt{A} \longrightarrow \mathtt{B}))$. □

Eine interessante Tatsache bezüglich I0 ist, dass wir zwar im All-

gemeinen nicht $\mathtt{A} \mathrel{/\!\!/} \neg\mathtt{A}$ haben können, aber sehr wohl $\neg\mathtt{A} \mathrel{/\!\!/} \neg\neg\neg\mathtt{A}$. Wir beweisen beide Richtungen.

Theorem 6.4. $\neg\mathtt{A} \vdash_{\mathsf{I0}} \neg\neg\neg\mathtt{A}$

Beweis. Sei $\mathtt{A} \in \mathbf{Fo}_{\mathsf{I0}}$ und betrachten wir die schematische Herleitung:

1	$\neg\mathtt{A}$	
2	$\quad\neg\neg\mathtt{A}$	
3	$\quad\bot$	$\bot^{+}, 1, 2$
4	$\neg\neg\neg\mathtt{A}$	$\neg^{+}, 2\text{–}3$

Nennen wir diese schematische Herleitung ‚**D**'. Es ist klar, dass für alle $\mathtt{A} \in \mathbf{Fo}_{\mathsf{I0}}$ gilt, dass **D** eine Fitch-Herleitung auf $\mathbf{Fo}_{\mathsf{I0}}$ aus $\mathbf{DBas}_{\mathsf{I0}}$ ist. Das bedeutet, dass es eine Herleitung $\mathbf{D} \in \mathbf{Der}_{\mathsf{I0}}$ gibt mit $\{\ulcorner\neg\mathtt{A}\urcorner\} \subseteq \mathbf{Prem}_{\mathsf{I0}}(\mathbf{D})$ und $\ulcorner\neg\neg\neg\mathtt{A}\urcorner \in \mathbf{Conc}_{\mathsf{I0}}(\mathbf{D})$. Daher gilt gemäß Definition, $\neg\mathtt{A} \vdash_{\mathsf{I0}} \neg\neg\neg\mathtt{A}$. □

Theorem 6.5. $\neg\neg\neg\mathtt{A} \vdash_{\mathsf{I0}} \neg\mathtt{A}$

Beweis. Sei $\mathtt{A} \in \mathbf{Fo}_{\mathsf{I0}}$ und betrachten wir die schematische Herleitung:

1	$\neg\neg\neg\mathtt{A}$	
2	$\quad\mathtt{A}$	
3	$\quad\quad\neg\mathtt{A}$	
4	$\quad\quad\bot$	$\bot^{+}, 2, 3$
5	$\quad\neg\neg\mathtt{A}$	$\neg^{+}, 3\text{–}4$
6	$\quad\bot$	$\bot^{+}, 5, 1$
7	$\neg\mathtt{A}$	$\neg^{+}, 2\text{–}6$

Nennen wir diese schematische Herleitung ‚**D**'. Es ist klar, dass für alle $\mathtt{A} \in \mathbf{Fo}_{\mathsf{I0}}$ gilt, dass **D** eine Fitch-Herleitung auf $\mathbf{Fo}_{\mathsf{I0}}$ aus $\mathbf{DBas}_{\mathsf{I0}}$ ist. Das bedeutet, dass es eine Herleitung $\mathbf{D} \in \mathbf{Der}_{\mathsf{I0}}$ gibt mit $\{\ulcorner\neg\neg\neg\mathtt{A}\urcorner\} \subseteq \mathbf{Prem}_{\mathsf{I0}}(\mathbf{D})$ und $\ulcorner\neg\mathtt{A}\urcorner \in \mathbf{Conc}_{\mathsf{I0}}(\mathbf{D})$. Daher gilt gemäß Definition, $\neg\neg\neg\mathtt{A} \vdash_{\mathsf{I0}} \neg\mathtt{A}$. □

Wir können, wie gewünscht, auch die doppelt verneinte Variante des *tertium non datur* beweisen.

Theorem 6.6. $\vdash_{\mathsf{I0}} \neg\neg(\mathtt{A} \vee \neg\mathtt{A})$

Beweis. Sei $\mathtt{A} \in \mathbf{Fo}_{\mathsf{I0}}$ und betrachten wir die schematische Herleitung:

1	$\neg(\mathtt{A} \vee \neg\mathtt{A})$	
2	$\quad \mathtt{A}$	
3	$\quad (\mathtt{A} \vee \neg\mathtt{A})$	$\vee_1^+, 2$
4	$\quad \bot$	$\bot^+, 3, 1$
5	$\neg\mathtt{A}$	$\neg^+, 2\text{–}4$
6	$(\mathtt{A} \vee \neg\mathtt{A})$	$\vee_2^+, 5$
7	$\bot$	$\bot^+, 1, 6$
8	$\neg\neg(\mathtt{A} \vee \neg\mathtt{A})$	$\neg^+, 1\text{–}7$

Nennen wir diese schematische Herleitung ‚**D**'. Es ist klar, dass für alle $\mathtt{A} \in \mathbf{Fo}_{\mathsf{I0}}$ gilt, dass **D** eine Fitch-Herleitung auf $\mathbf{Fo}_{\mathsf{I0}}$ aus $\mathbf{DBas}_{\mathsf{I0}}$ ist. Das bedeutet, dass es eine Herleitung $\mathbf{D} \in \mathbf{Der}_{\mathsf{I0}}$ gibt mit $\{\} \subseteq \mathbf{Prem}_{\mathsf{I0}}(\mathbf{D})$ und $\ulcorner\neg(\mathtt{A} \vee \neg\mathtt{A})\urcorner \in \mathbf{Conc}_{\mathsf{I0}}(\mathbf{D})$. Daher gilt gemäß Definition, $\vdash_{\mathsf{I0}} \neg(\mathtt{A} \vee \neg\mathtt{A})$. □

6.7 Übungen

Für die folgenden Übungen sind keine weiteren Erläuterungen erforderlich. Die Herleitungen reichen als Antwort aus.

Aufgabe 6.1. Führen Sie für jede der folgenden Inferenzen eine Fitch-Herleitung durch, die zeigt, dass sie in $\vdash_{\mathsf{P0}}$ enthalten ist.

1. $/ \ (p \to (q \to p))$
2. $/ \ ((p \to q) \to ((p \to (q \to r)) \to (p \to r)))$
3. $/ \ (p \to (q \to (p \wedge q)))$
4. $/ \ ((p \to r) \to ((q \to r) \to ((p \vee q) \to r)))$
5. $(p \to (q \to r)) \ / \ ((p \to q) \to (p \to r))$
6. $((p \to q) \vee (p \to r)) \ / \ (p \to (q \vee r))$
7. $((p \vee q) \to r) \ / \ ((p \to r) \wedge (q \to r))$
8. $((p \to r) \wedge (q \to r)) \ / \ ((p \vee q) \to r)$
9. $(p \to q), (q \to r) \ / \ (p \to r)$
10. $(p \to r) \ / \ ((p \wedge q) \to r)$

Aufgabe 6.2. Führen Sie für jede der folgenden Inferenzen eine Fitch-Herleitung durch, die zeigt, dass sie in $\vdash_{\mathsf{M0}}$ enthalten ist.

1. $/ \ ((p \to q) \to ((p \to \neg q) \to \neg p))$
2. $(p \to q) \ / \ (\neg q \to \neg p)$
3. $\neg(p \to q) \ / \ \neg q$
4. $\neg\neg(p \to q) \ / \ (\neg\neg p \to \neg\neg q)$
5. $/ \ \neg(p \wedge \neg p)$
6. $(p \wedge \neg p) \ / \ \neg q$
7. $\neg(p \vee q) \ / \ (\neg p \wedge \neg q)$
8. $(\neg p \wedge \neg q) \ / \ \neg(p \vee q)$
9. $(\neg p \vee \neg q) \ / \ \neg(p \wedge q)$
10. $(p \to (p \to q)) \ / \ (p \to q)$

Aufgabe 6.3. Führen Sie für jede der folgenden Inferenzen eine Fitch-Herleitung durch, die zeigt, dass sie in $\vdash_{I0}$ enthalten ist.

1. $/ (\neg p \to (p \to q))$
2. $/ \neg\neg(p \vee \neg p)$
3. $/ (\neg p \leftrightarrow \neg\neg\neg p)$
4. $(\neg\neg p \to \neg\neg q) / \neg\neg(p \to q)$
5. $(\neg p \vee q) / (p \to q)$
6. $\neg p / (p \to q)$
7. $(p \to q) / ((p \to \neg q) \to \neg p)$
8. $\neg\neg(p \wedge q) / (\neg\neg p \wedge \neg\neg q)$
9. $(\neg\neg p \wedge \neg\neg q) / \neg\neg(p \wedge q)$
10. $\neg\neg(p \wedge q) / (\neg\neg p \wedge \neg\neg q)$

6.8 Lösungen

Lösung zu Aufgabe 6.1.

Die folgenden Fitch-Herleitungen zeigen, dass diese Inferenzen zu $\vdash_{\mathsf{P0}}$ gehören.

1. Diese Herleitung zeigt, dass $\vdash_{\mathsf{P0}} (p \to (q \to p))$.

1	$\quad p$	
2	$\quad\quad q$	
3	$\quad\quad p$	Reit, 1
4	$\quad (p \to q)$	$\to^-, 2, 3$
5	$(p \to (q \to p))$	$\to^-, 1, 4$

2. Diese Herleitung zeigt, dass $\vdash_{\mathsf{P0}} ((p \to q) \to ((p \to (q \to r)) \to (p \to r)))$.

1	$\quad (p \to q)$	
2	$\quad\quad (p \to (q \to r))$	
3	$\quad\quad\quad p$	
4	$\quad\quad\quad (q \to r)$	$\to^-, 2, 3$
5	$\quad\quad\quad q$	$\to^-, 1, 3$
6	$\quad\quad\quad r$	$\to^-, 4, 5$
7	$\quad\quad (p \to r)$	$\to^+, 3$–6
8	$\quad ((p \to (q \to r)) \to (p \to r))$	$\to^+, 2$–7
9	$((p \to q) \to ((p \to (q \to r)) \to (p \to r)))$	$\to^+, 1$–8

3. Diese Herleitung zeigt, dass $\vdash_{\mathsf{P0}} (p \to (q \to (p \wedge q)))$.

1	$\quad p$	
2	$\quad\quad q$	
3	$\quad\quad (p \wedge q)$	$\wedge^+, 1, 2$
4	$\quad (q \to (p \wedge q))$	$\to^+, 2$–3
5	$(p \to (q \to (p \wedge q)))$	$\to^+, 1, 4$

4. Diese Herleitung zeigt, dass $\vdash_{\mathsf{P0}} ((p \to r) \to ((q \to r) \to ((p \vee q) \to r)))$.

1	$(p \to r)$	
2	$(q \to r)$	
3	$(p \vee q)$	
4	p	
5	r	$\to^-, 1, 4$
6	q	
7	r	$\to^-, 2, 6$
8	r	$\vee^-, 3, 4\text{–}5, 6\text{–}7$
9	$((p \vee q) \to r)$	$\to^+, 3\text{–}8$
10	$((q \to r) \to ((p \vee q) \to r))$	$\to^+, 2\text{–}9$
11	$((p \to r) \to ((q \to r) \to ((p \vee q) \to r)))$	$\to^+, 1\text{–}10$

5. Diese Herleitung zeigt, dass $(p \to (q \to r)) \vdash_{\mathsf{P0}} ((p \to q) \to (p \to r))$.

1	$(p \to (q \to r))$	
2	$(p \to q)$	
3	p	
4	$(q \to r)$	$\to^-, 1, 3$
5	q	$\to^-, 2, 3$
6	r	$\to^-, 4, 5$
7	$(p \to r)$	$\to^+, 3\text{–}6$
8	$((p \to q) \to (p \to r))$	$\to^+, 2\text{–}7$

6. Diese Herleitung zeigt, dass $((p \to q) \lor (p \to r)) \vdash_{\mathsf{P0}} (p \to (q \lor r))$.

1	$((p \to q) \lor (q \to r))$	
2	$\quad p$	
3	$\quad\quad (p \to q)$	
4	$\quad\quad q$	$\to^-, 3, 2$
5	$\quad\quad (q \lor r)$	$\lor_1^+, 4$
6	$\quad\quad (p \to r)$	
7	$\quad\quad r$	$\to^-, 6, 2$
8	$\quad\quad (q \lor r)$	$\lor_2^+, 7$
9	$\quad (q \lor r)$	$\lor^-, 1, 3\text{–}5, 6\text{–}8$
10	$(p \to (q \lor r))$	$\to^+, 2\text{–}9$

7. Diese Herleitung zeigt, dass $((p \lor q) \to r) \vdash_{\mathsf{P0}} ((p \to r) \land (q \to r))$.

1	$((p \lor q) \to r)$	
2	$\quad p$	
3	$\quad (p \lor q)$	$\lor_1^+, 2$
4	$\quad r$	$\to^-, 1, 3$
5	$(p \to r)$	$\to^+, 2\text{–}4$
6	$\quad q$	
7	$\quad (p \lor q)$	$\lor_2^+, 1, 2$
8	$\quad r$	$\to^-, 1, 7$
9	$(q \to r)$	$\to^+, 6\text{–}8$
10	$((p \to r) \land (q \to r))$	$\land^+, 5, 9$

8. Diese Herleitung zeigt, dass $((p \to r) \wedge (q \to r)) \vdash_{\mathsf{P0}} ((p \vee q) \to r)$.

1	$((p \to r) \wedge (q \to r))$	
2	$(p \to r)$	$\wedge_1^-, 1$
3	$(q \to r)$	$\wedge_2^-, 1$
4	$\quad (p \vee q)$	
5	$\quad\quad p$	
6	$\quad\quad r$	$\to^-, 2, 5$
7	$\quad\quad q$	
8	$\quad\quad r$	$\to^-, 3, 7$
9	$\quad r$	$\vee^-, 4, 5\text{–}7, 7\text{–}9$
10	$((p \vee q) \to r)$	$\to^+, 4\text{–}9$

9. Diese Herleitung zeigt, dass $(p \to q), (q \to r) \vdash_{\mathsf{P0}} (p \to r)$.

1	$(p \to q)$	
2	$(q \to r)$	
3	$\quad p$	
4	$\quad q$	$\to^-, 1, 3$
5	$\quad r$	$\to^-, 2, 4$
6	$(p \to r)$	$\to^+, 3\text{–}5$

10. Diese Herleitung zeigt, dass $(p \to r) \vdash_{\mathsf{P0}} ((p \wedge q) \to r)$.

1	$(p \to r)$	
2	$\quad (p \wedge q)$	
3	$\quad p$	$\wedge_1^-, 2$
4	$\quad r$	$\to^-, 1, 3$
5	$((p \wedge q) \to r)$	$\to^+, 2\text{–}4$

Lösung zu Aufgabe 6.2.

Die folgenden Fitch-Herleitungen zeigen, dass diese Inferenzen zu $\vdash_{\mathsf{M0}}$ gehören.

1. Diese Herleitung zeigt, dass $\vdash_{\mathsf{M0}} ((p \to q) \to ((p \to \neg q) \to \neg p))$.

1	$\quad (p \to q)$	
2	$\quad\quad (p \to \neg q)$	
3	$\quad\quad\quad p$	
4	$\quad\quad\quad q$	$\to^-, 1, 3$
5	$\quad\quad\quad \neg q$	$\to^-, 2, 3$
6	$\quad\quad\quad \bot$	$\bot^+, 4, 5$
7	$\quad\quad \neg p$	$\neg^+, 3\text{–}6$
8	$\quad ((p \to \neg q) \to \neg p)$	$\to^+, 2\text{–}7$
9	$((p \to q) \to ((p \to \neg q) \to \neg p))$	$\to^+, 1\text{–}8$

2. Diese Herleitung zeigt, dass $(p \to q) \vdash_{\mathsf{M0}} (\neg q \to \neg p)$.

1	$(p \to q)$	
2	$\quad \neg q$	
3	$\quad\quad p$	
4	$\quad\quad q$	$\to^-, 1, 3$
5	$\quad\quad \bot$	$\bot^+, 4, 2$
6	$\quad \neg p$	$\neg^+, 3\text{–}5$
7	$(\neg q \to \neg p)$	$\to^+, 2\text{–}6$

3. Diese Herleitung zeigt, dass $\neg(p \to q) \vdash_{\mathsf{M0}} \neg q$.

1	$\neg(p \to q)$	
2	$\quad q$	
3	$\quad\quad p$	
4	$\quad\quad q$	Reit, 2
5	$\quad (p \to q)$	$\to^+$, 3–4
6	$\quad \bot$	$\bot^+$, 5, 1
7	$\neg q$	$\to^+$, 2–6

4. Diese Herleitung zeigt, dass $\neg\neg(p \to q) \vdash_{\mathsf{M0}} (\neg\neg p \to \neg\neg q)$.

1	$\neg\neg(p \to q)$	
2	$\quad \neg\neg p$	
3	$\quad\quad \neg q$	
4	$\quad\quad\quad (p \to q)$	
5	$\quad\quad\quad\quad p$	
6	$\quad\quad\quad\quad q$	$\to^-$, 4, 5
7	$\quad\quad\quad\quad \bot$	$\bot^+$, 6, 3
8	$\quad\quad\quad \neg p$	$\to^+$, 5–7
9	$\quad\quad\quad \bot$	$\bot^+$, 8, 2
10	$\quad\quad \neg(p \to q)$	$\to^+$, 4–9
11	$\quad\quad \bot$	$\bot^+$, 10, 1
12	$\quad \neg\neg q$	$\to^+$, 3–11
13	$(\neg\neg p \to \neg\neg q)$	$\to^+$, 2–12

5. Diese Herleitung zeigt, dass $\vdash_{\mathsf{M0}} \neg(p \wedge \neg p)$.

1	$\quad (p \wedge \neg p)$	
2	$\quad p$	$\wedge_1^-$, 1
3	$\quad \neg p$	$\wedge_2^-$, 1
4	$\quad \bot$	$\bot^+$, 2, 3
5	$\neg(p \wedge \neg p)$	$\neg^+$, 1, 4

6. Diese Herleitung zeigt, dass $(p \wedge \neg p) \vdash_{\mathsf{M0}} \neg q$.

1	$(p \wedge \neg p)$	
2	p	$\wedge_1^-, 1$
3	$\neg p$	$\wedge_2^-, 1$
4	$\quad q$	
5	$\quad \bot$	$\bot^+, 2, 3$
6	$\neg q$	$\neg^+, 4\text{–}5$

7. Diese Herleitung zeigt, dass $\neg(p \vee q) \vdash_{\mathsf{M0}} (\neg p \wedge \neg q)$.

1	$\neg(p \vee q)$	
2	$\quad p$	
3	$\quad (p \vee q)$	$\vee_1^+, 2$
4	$\quad \bot$	$\bot^+, 3, 1$
5	$\neg p$	$\neg^+, 2\text{–}4$
6	$\quad q$	
7	$\quad (p \vee q)$	$\vee_2^+, 6$
8	$\quad \bot$	$\bot^+, 7, 1$
9	$\neg q$	$\neg^+, 6\text{–}8$
10	$(\neg p \wedge \neg q)$	$\wedge^+, 5, 9$

8. Diese Herleitung zeigt, dass $(\neg p \wedge \neg q) \vdash_{\mathsf{M0}} \neg(p \vee q)$.

1	$(\neg p \wedge \neg q)$	
2	$\neg p$	$\wedge_1^-, 1$
3	$\neg q$	$\wedge_2^-, 1$
4	$\quad (p \vee q)$	
5	$\quad\quad p$	
6	$\quad\quad \bot$	$\bot^+, 5, 2$
7	$\quad\quad q$	
8	$\quad\quad \bot$	$\bot^+, 7, 3$
9	$\quad \bot$	$\vee^-, 4, 5\text{–}6, 7\text{–}8$
10	$\neg(p \vee q)$	$\neg^+, 4\text{–}9$

9. Diese Herleitung zeigt, dass $(\neg p \vee \neg q) \vdash_{\mathsf{M0}} \neg(p \wedge q)$.

1	$(\neg p \vee \neg q)$	
2	$\quad (p \wedge q)$	
3	$\quad p$	$\wedge_1^-, 2$
4	$\quad q$	$\wedge_2^-, 2$
5	$\quad\quad \neg p$	
6	$\quad\quad \bot$	$\bot^+, 3, 5$
7	$\quad\quad \neg q$	
8	$\quad\quad \bot$	$\bot^+, 4, 7$
9	$\quad \bot$	$\vee^-, 1, 5\text{–}6, 7\text{–}8$
10	$\neg(p \wedge q)$	$\neg^+, 2\text{–}9$

10. Diese Herleitung zeigt, dass $(p \to (p \to q)) \vdash_{\mathsf{M0}} (p \to q)$.

1	$(p \to (p \to q))$	
2	$\quad p$	
3	$\quad (p \to q)$	$\to^-, 1, 2$
4	$\quad q$	$\to^-, 3, 2$
5	$(p \to q)$	$\to^+, 2\text{–}4$

Lösung zu Aufgabe 6.3.

Die folgenden Fitch-Herleitungen zeigen, dass diese Inferenzen zu $\vdash_{I0}$ gehören.

1. Diese Herleitung zeigt, dass $\vdash_{I0} (\neg p \to (p \to q))$.

1	$\quad \neg p$	
2	$\quad\quad p$	
3	$\quad\quad \bot$	$\bot^+, 2, 1$
4	$\quad\quad q$	$\bot^-, 3$
5	$\quad (p \to q)$	$\to^+, 2\text{–}4$
6	$(\neg p \to (p \to q))$	$\to^+, 1\text{–}5$

2. Diese Herleitung zeigt, dass $\vdash_{I0} \neg\neg(p \vee \neg p)$.

1	$\quad \neg(p \vee \neg p)$	
2	$\quad\quad p$	
3	$\quad\quad (p \vee \neg p)$	$\vee_1^+, 2$
4	$\quad\quad \bot$	$\bot^+, 3, 1$
5	$\quad \neg p$	$\neg^+, 2\text{–}4$
6	$\quad (p \vee \neg p)$	$\vee_2^+, 5$
7	$\quad \bot$	$\bot^+, 6, 1$
8	$\neg\neg(p \vee \neg p)$	$\neg^+, 1\text{–}7$

3. Diese Herleitung zeigt, dass $\vdash_{I0} (\neg p \leftrightarrow \neg\neg\neg p)$.

1	$\quad \neg p$	
2	$\quad\quad \neg\neg p$	
3	$\quad\quad \bot$	$\bot^+, 1, 2$
4	$\quad \neg\neg\neg p$	$\neg^+, 2\text{–}3$
5	$\quad \neg\neg\neg p$	
6	$\quad\quad p$	
7	$\quad\quad\quad \neg p$	
8	$\quad\quad\quad \bot$	$\bot^+, 6, 7$
9	$\quad\quad \neg\neg p$	$\neg^+, 7\text{–}8$
10	$\quad\quad \bot$	$\bot^+, 9, 5$
11	$\quad \neg p$	$\rightarrow^+, 6\text{–}10$
12	$(\neg p \leftrightarrow \neg\neg\neg p)$	$\leftrightarrow^+, 1\text{–}4, 5\text{–}11$

4. Diese Herleitung zeigt, dass $(\neg\neg p \to \neg\neg q) \vdash_{I0} \neg\neg(p \to q)$.

1	$(\neg\neg p \to \neg\neg q)$	
2	$\quad \neg(p \to q)$	
3	$\quad\quad \neg p$	
4	$\quad\quad\quad p$	
5	$\quad\quad\quad \bot$	$\bot^+$, 4, 3
6	$\quad\quad\quad q$	$\bot^-$, 5
7	$\quad\quad (p \to q)$	$\to^+$, 4–6
8	$\quad\quad \bot$	$\bot^+$, 7, 2
9	$\quad \neg\neg p$	$\neg^+$, 3–8
10	$\quad \neg\neg q$	$\to^-$, 1, 9
11	$\quad\quad q$	
12	$\quad\quad\quad p$	
13	$\quad\quad\quad q$	Reit, 11
14	$\quad\quad (p \to q)$	$\to^+$, 12–13
15	$\quad\quad \bot$	$\bot^+$, 14, 2
16	$\quad \neg q$	$\neg^+$, 11–15
17	$\quad \bot$	$\bot^+$, 16, 10
18	$\neg\neg(p \to q)$	$\to^+$, 2–17

5. Diese Herleitung zeigt, dass $(\neg p \vee q) \vdash_{I0} (p \to q)$.

1	$(\neg p \vee q)$	
2	$\quad p$	
3	$\quad\quad \neg p$	
4	$\quad\quad \bot$	$\bot^+$, 2, 3
5	$\quad\quad q$	$\bot^-$, 4
6	$\quad\quad q$	
7	$\quad\quad q$	Reit, 6
8	$\quad q$	$\vee^-$, 1, 3–5, 6–7
9	$(p \to q)$	$\to^+$, 2–8

6. Diese Herleitung zeigt, dass $\neg p \vdash_{\mathsf{I0}} (p \to q)$.

1	$\neg p$	
2	$\quad p$	
3	$\quad \bot$	$\bot^+, 2, 1$
4	$\quad q$	$\bot^-, 3$
5	$(p \to q)$	$\to^+, 2\text{–}4$

7. Diese Herleitung zeigt, dass $(p \to q) \vdash_{\mathsf{I0}} ((p \to \neg q) \to \neg p)$.

1	$(p \to q)$	
2	$\quad (p \to \neg q)$	
3	$\quad\quad p$	
4	$\quad\quad q$	$\to^-, 1, 3$
5	$\quad\quad \neg q$	$\to^-, 2, 3$
6	$\quad\quad \bot$	$\bot^+, 4, 5$
7	$\quad \neg p$	$\neg^+, 3\text{–}6$
8	$((p \to \neg q) \to \neg p)$	$\to^+, 2\text{–}7$

8. Diese Herleitung zeigt, dass $\neg\neg(p \wedge q) \vdash_{I0} (\neg\neg p \wedge \neg\neg q)$.

1	$\neg\neg(p \wedge q)$	
2	$\quad \neg p$	
3	$\quad\quad (p \wedge q)$	
4	$\quad\quad p$	$\wedge_1^-$, 3
5	$\quad\quad \bot$	$\bot^+$, 4, 2
6	$\quad \neg(p \wedge q)$	$\neg^+$, 3–5
7	$\quad \bot$	$\bot^+$, 3, 1
8	$\neg\neg p$	$\neg^+$, 2–4
9	$\quad \neg q$	
10	$\quad\quad (p \wedge q)$	
11	$\quad\quad q$	$\wedge_2^-$, 10
12	$\quad\quad \bot$	$\bot^+$, 11, 9
13	$\quad \neg(p \wedge q)$	$\neg^+$, 10–12
14	$\quad \bot$	$\bot^+$, 13, 1
15	$\neg\neg q$	$\neg^+$, 9–14
16	$(\neg\neg p \wedge \neg\neg q)$	$\wedge^+$, 8, 15

9. Diese Herleitung zeigt, dass $(\neg\neg p \wedge \neg\neg q) \vdash_{I0} \neg\neg(p \wedge q)$.

1	$(\neg\neg p \wedge \neg\neg q)$	
2	$\neg\neg p$	$\wedge_1^-, 1$
3	$\neg\neg q$	$\wedge_2^-, 1$
4	$\quad \neg(p \wedge q)$	
5	$\quad\quad p$	
6	$\quad\quad\quad q$	
7	$\quad\quad\quad (p \wedge q)$	$\wedge^+, 5, 6$
8	$\quad\quad\quad \bot$	$\bot^+, 7, 4$
9	$\quad\quad \neg q$	$\neg^+, 6\text{–}8$
10	$\quad\quad \bot$	$\bot^+, 9, 3$
11	$\quad \neg p$	$\rightarrow^+, 5\text{–}10$
12	$\quad \bot$	$\rightarrow^+, 11, 2$
13	$\neg\neg(p \wedge q)$	$\neg^+, 4\text{–}12$

10. Diese Herleitung zeigt, dass $\neg\neg(p \wedge q) \vdash_{I0} (\neg\neg p \wedge \neg\neg q)$.

1	$\neg\neg(p \wedge q)$	
2	$\quad \neg p$	
3	$\quad\quad (p \wedge q)$	
4	$\quad\quad p$	$\wedge_1^-$, 3
5	$\quad\quad \bot$	$\bot^+$, 4, 2
6	$\quad \neg(p \wedge q)$	$\neg^+$, 3–5
7	$\quad \bot$	$\bot^+$, 6, 1
8	$\neg\neg p$	$\neg^+$, 2–7
9	$\quad \neg p$	
10	$\quad\quad (p \wedge q)$	
11	$\quad\quad q$	$\wedge_2^-$, 10
12	$\quad\quad \bot$	$\bot^+$, 11, 9
13	$\quad \neg(p \wedge q)$	$\neg^+$, 10–12
14	$\quad \bot$	$\bot^+$, 13, 1
15	$\neg\neg q$	$\neg^+$, 9–14
16	$(\neg\neg p \wedge \neg\neg q)$	$\wedge^+$, 8, 15

Parakonsistente Logiken 7

7.1 Philosophische Motivationen

Eine der charakteristischsten Eigenschaften von S0 ist ihr Umgang mit Widersprüchen. Sobald sowohl eine Formel A als auch ihre Negation ⌜¬A⌝ akzeptiert werden, kann daraus jede beliebige Formel B abgeleitet werden. Dieses Prinzip wird als *ex contradictione quodlibet* (ECQ) oder *Explosionsprinzip* bezeichnet:

$$\mathtt{A}, \neg\mathtt{A} \;/\; \mathtt{B}. \tag{ECQ}$$

Dadurch wird jedes widersprüchliche System trivial, in Sinne dass aus ihm jede beliebige Formel folgt.

Die Auffassung, dass Widersprüche zwangsläufig zur Trivialität führen, wurde lange Zeit genutzt, um inkonsistente Theorien oder Wissensbestände abzulehnen. Diese Sichtweise wurde jedoch sowohl aus philosophischen als auch aus praktischen Gründen infrage gestellt.

Ein wichtiger Beweggrund ergibt sich aus semantischen Paradoxien, etwa dem Lügner-Paradoxon. Ein Satz wie (♈) führt zu einem Widerspruch.

Der Satz (♈) ist falsch. (♈)

In der klassischen Logik würde dies aufgrund des Explosionsprinzips zur Trivialität führen, obwohl der Satz grammatikalisch und etwa sinnvoll erscheint.

Ähnliche Probleme treten in der Mengenlehre auf. Die naive Mengenlehre mit uneingeschränkter Komprehension erzeugt Russells Paradoxon und weitere Antinomien. Solche Beispiele zeigen, dass Widersprüche auf natürliche Weise innerhalb formaler Systeme entstehen können, ohne dass deshalb jede sinnvolle Schlussfolgerung unmöglich wird.

Ein weiterer wichtiger Anwendungsbereich sind inkonsistente Informationsbestände. Datenbanken, Rechtssysteme, Vorschriften oder große Wissenssammlungen enthalten häufig widersprüchliche Informationen, die durch Fehler, zeitliche Veränderungen oder die Zusammenführung verschiedener Quellen entstehen können. Nach klassischer Logik wären solche Systeme trivial, in der Praxis gelingt es Menschen jedoch, trotz der Widersprüche vernünftig zu argumentieren.

Auch die Wissenschaftsgeschichte liefert Beispiele. Wissenschaftliche Theorien enthielten oft Spannungen oder sogar offene Widersprüche. Dennoch konnten Forschende mit solchen Theorien

erfolgreich arbeiten und nützliche Vorhersagen sowie Erklärungen gewinnen. Dies legt nahe, dass Rationalität und Inkonsistenz miteinander vereinbar sein können.

Diese Überlegungen führten zur Entwicklung *parakonsistenter Logiken*. Eine Logik heißt parakonsistent (bezüglich des Negationsoperators ‚¬'), wenn (ECQ) nicht allgemein gilt. Solche Logiken ermöglichen die formale Untersuchung widersprüchlicher, aber nicht-trivialer Systeme, beispielsweise von Theorien oder Datenbanken.

Zu den einflussreichsten parakonsistenten Systemen gehören die von Newton da Costa (1963) entwickelten Kalküle. Seine Kalkuli, die wir als $\ulcorner \mathsf{C0}_{\mathtt{n}} \urcorner$ (wobei $\mathtt{n} \in \mathbf{Num}_{\mathbb{N}}$) bezeichnen werden*, bildeten die erste systematische Familie parakonsistenter Aussagenlogiken. Ihr Ziel war insbesondere die Behandlung semantischer Paradoxien durch die kontrollierte Akzeptanz von Widersprüchen, ohne dass daraus Beliebiges folgt.

*: Ursprünglich als $\ulcorner \mathsf{C}_{\mathtt{n}} \urcorner$ bezeichnet, wobei $\mathtt{n} \in \mathbf{Num}_{\mathbb{N}} \cup \{,\omega'\}$.

7.2 Vokabularien und Sprachen

Die Vokabularien und formalen Sprachen $\mathbf{Vo}_{\mathsf{C0}_1}, \ldots$ und $\mathbf{Fo}_{\mathsf{C0}_1}, \ldots$ werden wie die von $\mathsf{S0}$ definiert.

Definition 7.1.

$$\mathbf{Fo}_{\mathsf{C0}_{\mathtt{n}}} \stackrel{\text{DF}}{=} \mathbf{Fo}_{\mathsf{S0}}. \qquad \mathbf{Fo}_{\mathsf{C0}_{\mathtt{n}}} \stackrel{\text{DF}}{=} \mathbf{Fo}_{\mathsf{S0}}.$$

Um einige Grundsätze dieser Systeme besser zu verdeutlichen, verwenden wir Diesen Verkürzungen:

Definition 7.2 (Verkürzungen für $\mathbf{Fo}_{\mathsf{C0}_1}, \ldots$)**.**

$$\begin{aligned}
(\mathtt{A})^1 &\stackrel{\text{DF}}{=} \neg(\mathtt{A} \wedge \neg\mathtt{A}) \\
(\mathtt{A})^{\mathsf{N}(\mathtt{m})} &\stackrel{\text{DF}}{=} ((\mathtt{A})^{\mathtt{m}})^1 \\
\mathtt{A}^{(1)} &\stackrel{\text{DF}}{=} \mathtt{A}^1 \\
(\mathtt{A})^{(\mathsf{N}(\mathtt{m}))} &\stackrel{\text{DF}}{=} ((\mathtt{A})^{(\mathtt{m})} \wedge (\mathtt{A})^{\mathsf{N}(\mathtt{m})}) \\
\overset{(\mathtt{m})}{\neg}\mathtt{A} &\stackrel{\text{DF}}{=} (\neg\mathtt{A} \wedge (\mathtt{A})^{(\mathtt{m})})
\end{aligned}$$

Die oben definierten Ausdrücke sind keine Formeln von $\mathbf{Fo}_{\mathsf{C0}_1}, \ldots,$ sondern Verkürzungen für Formeln dieser Systeme. Diese Verkürzungen werden in der Metasprache verwendet, um die Eigenschaften der von da Costa entwickelten Systeme $\mathsf{C0}_1, \ldots$ einfacher beschreiben zu können. Klammern werden weggelassen, sofern dadurch keine Mehrdeutigkeit entsteht.

Der Ausdruck ‚p^1', der die Formel ‚$\neg(p \wedge \neg p)$' verkürzt, soll intuitiv ausdrücken, dass ‚p' *wohlverhalten* (*well-behaved*) ist. Man kann dies

auch als die Aussage verstehen, dass ‚p' konsistent ist, also dass nicht sowohl ‚p' als auch ‚$\neg p$' gelten. Eine Formel ist wohlverhalten, wenn sie nicht zugleich mit ihrer Negation wahr ist oder behauptet wird.

Der Ausdruck ‚p^2', der den Ausdruck ‚$\neg(p^1 \wedge \neg p^1)$' verkürzt, welcher wiederum die Formel ‚$\neg(\neg(p \wedge \neg p) \wedge \neg\neg(p \wedge \neg p))$' verkürzt, soll ausdrücken, dass ‚$\neg(p \wedge \neg p)$' selbst wohlverhalten ist, wenn auch nicht notwendigerweise ‚p' wohlverhalten sei.

Ein Ausdruck der Form $\ulcorner p^{(\mathtt{m})} \urcorner$ ist eine Verkürzung für eine Formel der Form $\ulcorner p^1 \wedge \ldots \wedge p^{\mathtt{m}} \urcorner$ (wir lassen die Klammern weg). Intuitiv bedeutet dies, dass ‚p' bis zur Stufe m wohlverhalten ist. Mit anderen Worten sind nicht nur ‚p', sondern auch ‚p^1', ‚p^2' usw. bis einschließlich ‚p^m' wohlverhalten.

Schließlich bezeichnet der Ausdruck ‚$\overset{(1)}{\neg} p$', der ‚$(\neg p \wedge p^{(1)})$' verkürzt, die starke Negation im System $\mathtt{C0}_1$. Sie heißt stark, weil ‚$(\neg p \wedge p^{(1)})$' zwar nicht zur Explosion in $\mathtt{C0}_1$ führt, die durch ‚$(p \wedge \overset{(1)}{\neg} p)$' abgekürzte Formel jedoch schon. Während gewöhnliche Widersprüche kontrolliert behandelt werden, verhält sich die starke Negation in dieser Hinsicht ähnlich wie die klassische Negation.

Allgemeiner drückt für jedes $\mathtt{n} \in \mathbf{Num}$ das Symbol $\ulcorner \overset{(\mathtt{n})}{\neg} \urcorner$ die Operation der starken Negation im System $\ulcorner \mathtt{C0}_{\mathtt{n}} \urcorner$ aus.

7.3 Inferenzs- und Konsequenzrelationen

Alle Systeme $\mathtt{C0}_1, \ldots$ gehören zu den modernen Systemen. Daher sind Inferenzen in diesen Systemen alle Kombinationen von Formeln als Prämissen und Konklusionen.

Was den Inhalt ihrer Konsequenzrelationen betrifft, so sind zwei Prinzipien von Bedeutung: das Gesetz der Nichtwidersprüchlichkeit (LNC) und *ex contradictione sequitur quodlibet* (ECQ):

$$/\ \neg(\mathtt{A} \wedge \neg\mathtt{A}) \qquad \text{(LNC)}$$

$$\mathtt{A}, \neg\mathtt{A}\ /\ \mathtt{B} \qquad \text{(ECQ)}$$

Während ECQ in allen Systemen der parakonsistenten Logik eingeschränkt ist, gilt dies für LNC in einigen von ihnen nicht.

Im Übrigen möchten wir so viele Prinzipien der Standardlogik wie möglich einbeziehen, ohne diese Prinzipien selbst einbeziehen zu müssen.

Einige problematische Prinzipien in diesem Zusammenhang sind das Additionsprinzip ($\vee_1^+$ und $\vee_2^+$) und der disjunktive Syllogismus (DS1 und DS2).

a	$(\mathtt{A} \vee \mathtt{B})$	
	$\vdots$	
b	$\neg\mathtt{A}$	
	$\vdots$	
	$\mathtt{B}$	DS1, a, b

a	$(\mathtt{A} \vee \mathtt{B})$	
	$\vdots$	
b	$\neg\mathtt{B}$	
	$\vdots$	
	$\mathtt{A}$	DS2, a, b

Diese Prinzipien lassen sich in S0 herleiten und haben in der westlichen Logik eine lange Tradition. Der Grund, warum diese Prinzipien in parakonsistenten Logiken problematisch sind, liegt darin, dass sie leicht dazu führen, dass ECQ als abgeleitete Regel entsteht.

Theorem 7.3. $\mathbf{DBas}_{\mathsf{S}} = \{\vee_1^+, \vee_2^+, \mathsf{DS1}, \mathsf{DS2}\} \Rightarrow \exists \mathbf{D} : \mathbf{D}$ is a Fitch derivation on $\mathbf{Fo}_{\mathsf{S}}$ from $\mathbf{DBas}_{\mathsf{S}}$ with $\mathtt{A}, \ulcorner\neg\mathtt{A}\urcorner \in \mathbf{Prem}_{\mathsf{S}}(\mathbf{D})$ and $\mathtt{B} \in \mathbf{Conc}_{\mathsf{S}}(\mathbf{D})$.

Beweis. Seien $\mathtt{A}, \mathtt{B} \in \mathbf{Fo}_{\mathsf{S}}$ und $\mathbf{DBas}_{\mathsf{S}} = \{\vee_1^+, \vee_2^+, \mathsf{DS1}, \mathsf{DS2}\}$. Betrachten wir die schematische Herleitung:

1	$\mathtt{A}$	
2	$\neg\mathtt{A}$	
3	$(\mathtt{A} \vee \mathtt{B})$	$\vee_1^+$, 1
4	$\mathtt{B}$	DS2, 3, 2

Bezeichnen wir diese schematische Herleitung als ‚**D**'. Es ist klar, dass für alle $\mathtt{A}, \mathtt{B} \in \mathbf{Fo}_{\mathsf{S}}$ gilt, dass **D** eine Fitch-Herleitung auf $\mathbf{Fo}_{\mathsf{S}}$ aus $\mathbf{DBas}_{\mathsf{S}}$ ist. Das bedeutet, dass es eine Herleitung $\mathbf{D} \in \mathbf{Der}_{\mathsf{S}}$ gibt mit $\mathtt{A}, \ulcorner\neg\mathtt{A}\urcorner \in \mathbf{Prem}_{\mathsf{S}}(\mathbf{D})$ und $\mathtt{B} \in \mathbf{Conc}_{\mathsf{S}}(\mathbf{D})$.

Call this schematic derivation ‚**D**'. It is clear, for all $\mathtt{A}, \mathtt{B} \in \mathbf{Fo}_{\mathsf{S}}$, that **D** is a Fitch derivation on $\mathbf{Fo}_{\mathsf{S}}$ from $\mathbf{DBas}_{\mathsf{S}}$. This means that there is a derivation $\mathbf{D} \in \mathbf{Der}_{\mathsf{S}}$ with $\mathtt{A}, \ulcorner\neg\mathtt{A}\urcorner \in \mathbf{Prem}_{\mathsf{S}}(\mathbf{D})$ and $\mathtt{B} \in \mathbf{Conc}_{\mathsf{S}}(\mathbf{D})$. □

Wir haben nur $\vee_1^+$ und DS2 verwendet, hätten aber alternativ auch $\vee_2^+$ und DS1 verwenden können. Daher muss ein parakonsistentes System in der Regel einige der Prinzipien $\vee_1^+, \vee_2^+, \mathsf{DS1}, \mathsf{DS2}$ einschränken.

7.4 Interpretationssysteme

Die Semantik für da Costas $\mathsf{C0}_1$-Systeme verwendet kaI (klassische aussagenlogische Interpretationen) und ordnet somit jeder

Aussagenvariablen einen klassischen Wahrheitswert zu, entweder **1** (wahr) oder **0** (falsch).

Ein kaI $\Im$ wird mittels einer Bewertung $\hat{\Im}$ – die seine $\mathsf{C0}_1$-Erweiterung ist, kurz $\mathsf{C0}_1\mathsf{E}$ – auf alle Formeln von $\mathbf{Fo}_{\mathsf{C0}_1}$ erweitert.

Definition 7.4 ($\mathsf{C0}_1$-Bewertung)**.** A valuation $\hat{\Im} = \langle\{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}, \hat{\imath}\rangle$ is a **dCe** of the cpi $\Im$ on $\mathbf{Fo}_{\mathsf{S}}$

$$
\begin{aligned}
&\overset{\text{DF}}{=} \hat{\imath}(\ulcorner\neg\mathtt{A}\urcorner) = \mathbf{0} \Rightarrow \hat{\imath}(\ulcorner\mathtt{A}\urcorner) = \mathbf{1} && \bigwedge\!\!\!\bigwedge \\
&\hat{\imath}(\ulcorner\neg\neg\mathtt{A}\urcorner) = \mathbf{1} \Rightarrow \hat{\imath}(\ulcorner\mathtt{A}\urcorner) = \mathbf{1} && \bigwedge\!\!\!\bigwedge \\
&\hat{\imath}(\ulcorner\mathtt{B}^{1\urcorner}) = \hat{\imath}(\ulcorner(\mathtt{A} \rightarrow \mathtt{B})\urcorner) = \hat{\imath}(\ulcorner(\mathtt{A} \rightarrow \neg\mathtt{B})\urcorner) = \mathbf{1} \Rightarrow \hat{\imath}(\ulcorner\neg\mathtt{A}\urcorner) = \mathbf{0} && \bigwedge\!\!\!\bigwedge \\
&\hat{\imath}(\ulcorner(\mathtt{A} \wedge \mathtt{B})\urcorner) = \mathbf{1} \Leftrightarrow \hat{\imath}(\mathtt{A}) = \mathbf{1} = \hat{\imath}(\mathtt{B}) && \bigwedge\!\!\!\bigwedge \\
&\hat{\imath}(\ulcorner(\mathtt{A} \vee \mathtt{B})\urcorner) = \mathbf{1} \Leftrightarrow \hat{\imath}(\mathtt{A}) = \mathbf{1} \mathbin{\mathbin{\vee\!\!\!\vee}} \hat{\imath}(\mathtt{B}) = \mathbf{1} && \bigwedge\!\!\!\bigwedge \\
&\hat{\imath}(\ulcorner(\mathtt{A} \rightarrow \mathtt{B})\urcorner) = \mathbf{1} \Leftrightarrow \hat{\imath}(\mathtt{A}) = \mathbf{0} \mathbin{\mathbin{\vee\!\!\!\vee}} \hat{\imath}(\mathtt{B}) = \mathbf{1} && \bigwedge\!\!\!\bigwedge \\
&\hat{\imath}(\ulcorner(\mathtt{A} \heartsuit \mathtt{B})^{1\urcorner}) = \mathbf{0} \Rightarrow \hat{\imath}(\mathtt{A}^1) = \mathbf{0} \mathbin{\mathbin{\vee\!\!\!\vee}} \hat{\imath}(\mathtt{B}^1) = \mathbf{0} \\
&: \heartsuit \in \{,\wedge`, ,\vee`, ,\rightarrow`\} \bigwedge\!\!\!\bigwedge \mathtt{A}, \mathtt{B} \in \mathbf{Fo}_{\mathsf{S}}
\end{aligned}
$$

7.5 Herleitungssysteme

Wie bei den intuitionistischen Logiken ist es ratsam, mit Axiomensystemen zu beginnen. Insbesondere lässt sich ein axiomatisches Herleitungssystem für $\mathsf{C0}_1$ definieren, indem man Diesen Inferenzformen als Regeln seiner deduktiven Basis verwendet:

$$
\begin{array}{lll}
(\mathtt{A} \rightarrow \mathtt{B}), \mathtt{A} & / \mathtt{B} & \text{(MPP)} \\
& / (\mathtt{A} \rightarrow (\mathtt{B} \rightarrow \mathtt{A})) & \text{(P1)} \\
& / ((\mathtt{A} \rightarrow \mathtt{B}) \rightarrow ((\mathtt{A} \rightarrow (\mathtt{B} \rightarrow \mathtt{C})) \rightarrow (\mathtt{A} \rightarrow \mathtt{C}))) & \text{(P2)} \\
& / (\mathtt{A} \rightarrow (\mathtt{B} \rightarrow (\mathtt{A} \wedge \mathtt{B}))) & \text{(P3)} \\
& / ((\mathtt{A} \wedge \mathtt{B}) \rightarrow \mathtt{A}) & \text{(P4)} \\
& / ((\mathtt{A} \wedge \mathtt{B}) \rightarrow \mathtt{B}) & \text{(P5)} \\
& / (\mathtt{A} \rightarrow (\mathtt{A} \vee \mathtt{B})) & \text{(P6)} \\
& / (\mathtt{B} \rightarrow (\mathtt{A} \vee \mathtt{B})) & \text{(P7)} \\
& / ((\mathtt{A} \rightarrow \mathtt{C}) \rightarrow ((\mathtt{B} \rightarrow \mathtt{C}) \rightarrow ((\mathtt{A} \vee \mathtt{B}) \rightarrow \mathtt{C}))) & \text{(P8)} \\
& / (\mathtt{A} \vee \neg\mathtt{A}) & \text{(Tertium)} \\
& / (\neg\neg\mathtt{A} \rightarrow \mathtt{A}) & \text{(DN2)} \\
& / (\mathtt{B}^1 \rightarrow ((\mathtt{A} \rightarrow \mathtt{B}) \rightarrow ((\mathtt{A} \rightarrow \neg\mathtt{B}) \rightarrow \neg\mathtt{A}))) & (\mathsf{C0}_1 1) \\
& / (\mathtt{A}^1 \rightarrow \neg\mathtt{A}^1) & (\mathsf{C0}_1 2) \\
& / ((\mathtt{A}^1 \wedge \mathtt{B}^1) \rightarrow (\mathtt{A} \wedge \mathtt{B})^1) & (\mathsf{C0}_1 2) \\
& / ((\mathtt{A}^1 \wedge \mathtt{B}^1) \rightarrow (\mathtt{A} \vee \mathtt{B})^1) & (\mathsf{C0}_1 4) \\
& / ((\mathtt{A}^1 \wedge \mathtt{B}^1) \rightarrow (\mathtt{A} \rightarrow \mathtt{B})^1) & (\mathsf{C0}_1 5)
\end{array}
$$

Wie zuvor gehen wir im Rahmen dieser Regeln davon aus, dass $\ulcorner(\mathtt{A} \leftrightarrow \mathtt{B})\urcorner$ eine Verkürzung für $\ulcorner((\mathtt{A} \rightarrow \mathtt{B}) \wedge (\mathtt{B} \rightarrow \mathtt{A}))\urcorner$ ist.

Beachte, dass wir alle Axiome der positiven Logik haben, sowie zwei Axiome, die von S0 erfüllt werden, von I0 jedoch nicht: (Tertium) und (DN2).

Was die übrigen $\mathtt{C0}_n$-Systeme betrifft, so sind ihre Axiome sehr ähnlich. Wir ersetzen einfach die letzten vier durch ihre entsprechenden $\mathtt{C0}_n$-Versionen, die wie folgt lauten:

$$/\ (\mathtt{B}^n \rightarrow ((\mathtt{A} \rightarrow \mathtt{B}) \rightarrow ((\mathtt{A} \rightarrow \neg\mathtt{B}) \rightarrow \neg\mathtt{A}))) \qquad (\mathrm{C0_n1})$$
$$/\ (\mathtt{A}^n \rightarrow \neg\mathtt{A}^n) \qquad (\mathrm{C0_n2})$$
$$/\ ((\mathtt{A}^n \wedge \mathtt{B}^n) \rightarrow (\mathtt{A} \wedge \mathtt{B})^n) \qquad (\mathrm{C0_n2})$$
$$/\ ((\mathtt{A}^n \wedge \mathtt{B}^n) \rightarrow (\mathtt{A} \vee \mathtt{B})^n) \qquad (\mathrm{C0_n3})$$
$$/\ ((\mathtt{A}^n \wedge \mathtt{B}^n) \rightarrow (\mathtt{A} \rightarrow \mathtt{B})^n) \qquad (\mathrm{C0_n4})$$

Die Konstruktion natürlicher Herleitungssysteme für $\mathtt{C0}_n$ ist etwas komplizierter als bei den vorherigen Systemen. Dazu gehen wir erneut von den Regeln in $\mathbf{DBas}_{\mathsf{P0}}$ aus und fügen einige hinzu, die es uns ermöglichen, die zusätzlichen Ergebnisse zu erhalten.

Wie die Axiome zeigen, funktionieren sowohl *tertium non datur* als auch die doppelte Negation, was bedeutet, dass wir viele der Einschränkungen der intuitionistischen Logik nicht benötigen. Insbesondere werden $\neg^+$ und $\neg^-$ in allen $\mathtt{C0}_n$-Systemen Regeln sein. Wir wollen auch $\bot^-$ zulassen, da wir den ECQ auf eine bestimmte eingeschränkte Menge von Formeln anwenden wollen.

Wir wollen jedoch $\bot^+$ einschränken. Insbesondere wird ‚$\bot$' nicht aus beliebigen Widersprüchen gewonnen werden können, sondern nur aus Widersprüchen, die aus wohlverhaltenen Formeln gewonnen wurden. Daher soll Diese Regel für ein System namens $\ulcorner\mathtt{C0}_n\urcorner$ gelten.

Falsum-Einführung.

$$\begin{array}{c|ll}
a & \mathtt{A}^n & \\
 & \vdots & \\
b & \mathtt{A} & \\
 & \vdots & \\
c & \neg\mathtt{A} & \\
 & \vdots & \\
 & \bot & \bot^{n+}, a, b, c
\end{array}$$

Darüber hinaus führen wir Diesen *Propagationsregeln* ein, die es uns ermöglichen, zu folgern, dass Formeln, die aus wohlverhaltensfä-

higen Formeln zusammengesetzt sind, selbst wohlverhaltensfähig sind.

Propagationsregeln.

$$\begin{array}{l|ll} a & \mathtt{A}^{\mathtt{n}} & \\ & \vdots & \\ b & \mathtt{B}^{\mathtt{n}} & \\ & \vdots & \\ & (\mathtt{A} \heartsuit \mathtt{B})^{\mathtt{n}} & \heartsuit^{\mathtt{n}+}, a, b \end{array} \qquad \begin{array}{l|ll} a & \mathtt{A}^{\mathtt{n}} & \\ & \vdots & \\ & (\neg\mathtt{A})^{\mathtt{n}} & \neg^{\mathtt{n}+}, a \end{array}$$

$: \heartsuit \in \{,\wedge`,,\vee`,,\rightarrow`,,\leftrightarrow`\}$

Die hier definierten Regeln $\wedge^{\mathtt{n}+}, \vee^{\mathtt{n}+}, \rightarrow^{\mathtt{n}+}, \leftrightarrow^{\mathtt{n}+}$ sind intuitiv wie folgt zu verstehen: Wenn $\mathtt{A}$ sich gut verhält und $\mathtt{B}$ sich gut verhält, dann gilt dies auch für $\ulcorner(\mathtt{A} \wedge \mathtt{B})\urcorner, \ulcorner(\mathtt{A} \vee \mathtt{B})\urcorner, \ulcorner(\mathtt{A} \rightarrow \mathtt{B})\urcorner, \ulcorner(\mathtt{A} \leftrightarrow \mathtt{B})\urcorner$. Beachte jedoch, dass $\mathtt{A}, \mathtt{B}, \ulcorner(\mathtt{A} \wedge \mathtt{B})\urcorner, \ulcorner(\mathtt{A} \vee \mathtt{B})\urcorner, \ulcorner(\mathtt{A} \rightarrow \mathtt{B})\urcorner, \ulcorner(\mathtt{A} \leftrightarrow \mathtt{B})\urcorner$ selbst nicht durch diese Regel ableitbar sind.

Schließlich müssen wir die Regeln für den Beweis durch Fälle hinzufügen, was dem Axiom (Tertium) entspricht.

Fallunterscheidung Regeln.

$$\begin{array}{l|ll} a & \mathtt{A} & \\ & \vdots & \\ b & \mathtt{B} & \\ & \vdots & \\ c & \neg\mathtt{A} & \\ & \vdots & \\ d & \mathtt{B} & \\ & \vdots & \\ & \mathtt{B} & \mathsf{PC}, a\text{–}b, c\text{–}d \end{array}$$

Das obige System reicht aus, um alle Systeme $\mathbf{Cn}_{\mathsf{C0}_n}$ zu charakterisieren. Daher könnten wir $\mathbf{DBas}_{\mathsf{C0}_\mathtt{n}}$ wie folgt definieren:

Definition 7.5 (Deduktive Basis für $\mathsf{C0}_\mathtt{n}$)**.**

$$\mathbf{DBas}_{\mathsf{C0}_\mathtt{n}} \stackrel{\text{DF}}{=} \mathbf{DBas}_{\mathsf{P0}} \cup \{\neg^-, \neg^+, \bot^-, \bot^{\mathtt{n}+}, \neg^{\mathtt{n}+}, \wedge^{\mathtt{n}+}, \vee^{\mathtt{n}+}, \rightarrow^{\mathtt{n}+}, \leftrightarrow^{\mathtt{n}+}, \mathsf{PC}\}.$$

Was das Herleitungssystem $\mathbf{Cal}_{\mathsf{C0}_\mathtt{n}}$ betrifft, so nehmen wir an, dass die Funktionen $\mathbf{Prem}_{\mathsf{C0}_\mathtt{n}}$ und $\mathbf{Conc}_{\mathsf{C0}_\mathtt{n}}$ jede Fitch-Herleitung auf ihre Prämissen bzw. ihre Schlussfolgerungen abbilden. Somit erhalten wir Diese Definition.

Definition 7.6 ($\mathbf{Cal}_{\mathsf{C0_n}}$).

$\mathbf{Cal}_{\mathsf{C0_n}}$ is ein Kalkül auf $\mathsf{C0_n}$

$\overset{\text{DF}}{=} \mathbf{Cal}_{\mathsf{C0_n}} = \langle \mathbf{DBas}_{\mathsf{C0_n}}, \mathbf{Der}_{\mathsf{C0_n}}, \mathbf{Prem}_{\mathsf{C0_n}}, \mathbf{Conc}_{\mathsf{C0_n}}, \vdash_{\mathsf{C0_n}} \rangle$

$: \mathbf{DBas}_{\mathsf{C0_n}}$ ist eine deduktive Basis auf $\mathbf{Fo}_{\mathsf{C0_n}}$ $\wedge\!\!\!\wedge$

$\mathbf{Der}_{\mathsf{C0_n}} = \{\mathbf{D} : \mathbf{D}$ ist eine Fitch-Herleitung auf $\mathbf{Fo}_{\mathsf{C0_n}}$ aus $\mathbf{DBas}_{\mathsf{C0_n}}\}$ $\wedge\!\!\!\wedge$

$\mathbf{Prem}_{\mathsf{C0_n}} : \mathbf{Der}_{\mathsf{C0_n}} \longrightarrow \wp\mathbf{Fo}_{\mathsf{C0_n}}$ $\wedge\!\!\!\wedge$

$\mathbf{Conc}_{\mathsf{C0_n}} : \mathbf{Der}_{\mathsf{C0_n}} \longrightarrow \wp\mathbf{Fo}_{\mathsf{C0_n}}$ $\wedge\!\!\!\wedge$

$\vdash_{\mathsf{C0_n}} = \{\langle \mathbf{A}, \mathbf{B} \rangle : \exists \mathbf{X} \in \mathbf{Der}_{\mathsf{C0_n}} (\mathbf{Prem}_{\mathsf{C0_n}}(\mathbf{X}) = \mathbf{A} \wedge\!\!\!\wedge \mathbf{Conc}_{\mathsf{C0_n}}(\mathbf{X}) = \mathbf{B})\}$.

Aufgabe 7.1. Zeige, dass alle Inferenzen der Formen (Tertium), (DN2), ($\mathsf{C0_n}1$)–($\mathsf{C0_n}4$) zu $\vdash_{\mathsf{C0_n}}$.

Theorem 7.7. $\vdash_{\mathsf{C0_n}} (\neg\neg \mathtt{A} \longrightarrow \mathtt{A})$.

Beweis. Sei $\mathtt{A} \in \mathbf{Fo}_{\mathsf{C0_n}}$ und betrachten wir die schematische Herleitung:

1	$\neg\neg\mathtt{A}$	
2	$(\mathtt{A} \wedge \neg\mathtt{A})$	
3	$\mathtt{A}$	$\wedge_1^-$, 2
4	$\neg(\mathtt{A} \wedge \neg\mathtt{A})$	
	$\mathtt{A}^n$	Abbr., 4
5	$(\neg\mathtt{A})^n$	$\neg^{n+}$, 4
6	$\neg\mathtt{A}$	
7	$\bot$	$\bot^{n+}$, 5, 6, 1
8	$\mathtt{A}$	$\neg^-$, 6–7
9	$\mathtt{A}$	PC, 2–3, 4–8
10	$(\neg\neg\mathtt{A} \longrightarrow \mathtt{A})$	$\longrightarrow^+$, 1–9

Bezeichnen wir diese schematische Herleitung als ‚**D**'. Es ist klar, dass für alle $\mathtt{A} \in \mathbf{Fo}_{\mathsf{C0_n}}$ gilt, dass **D** eine Fitch-Herleitung auf $\mathbf{Fo}_{\mathsf{C0_n}}$ von $\mathbf{DBas}_{\mathsf{C0_n}}$ ist. Das bedeutet, dass es eine Herleitung $\mathbf{D} \in \mathbf{Der}_{\mathsf{C0_n}}$ gibt, mit $\{\} \subseteq \mathbf{Prem}_{\mathsf{C0_n}}(\mathbf{D})$ und $\ulcorner(\neg\neg\mathtt{A} \longrightarrow \mathtt{A})\urcorner \in \mathbf{Conc}_{\mathsf{C0_n}}(\mathbf{D})$. Daher muss $\vdash_{\mathsf{C0_n}} (\neg\neg\mathtt{A} \longrightarrow \mathtt{A})$ gemäß Definition 7.6 gelten. □

Theorem 7.8. $\vdash_{\mathsf{C0_n}} (\mathtt{B}^{\mathtt{n}} \to ((\mathtt{A} \to \mathtt{B}) \to ((\mathtt{A} \to \neg\mathtt{B}) \to \neg\mathtt{A})))$.

Beweis. Seien $\mathtt{A}, \mathtt{B} \in \mathbf{Fo}_{\mathsf{C0_n}}$ und betrachten wir die schematische Herleitung:

1	$\mathtt{B}^{\mathtt{n}}$	
2	$(\mathtt{A} \to \mathtt{B})$	
3	$(\mathtt{A} \to \neg\mathtt{B})$	
4	$\mathtt{A}$	
5	$\mathtt{B}$	$\to^-$, 2, 4
6	$\neg\mathtt{B}$	$\to^-$, 3, 4
7	$\bot$	$\bot^{\mathtt{n}+}$, 1, 5, 6
8	$\neg\mathtt{A}$	$\neg^+$, 4–7
9	$((\mathtt{A} \to \neg\mathtt{B}) \to \neg\mathtt{A})$	$\to^+$, 3–8
10	$((\mathtt{A} \to \mathtt{B}) \to ((\mathtt{A} \to \neg\mathtt{B}) \to \neg\mathtt{A}))$	$\to^+$, 2–9
11	$(\mathtt{B}^{\mathtt{n}} \to ((\mathtt{A} \to \mathtt{B}) \to ((\mathtt{A} \to \neg\mathtt{B}) \to \neg\mathtt{A})))$	$\to^+$, 1–11

Bezeichnen wir diese schematische Herleitung als ‚**D**'. Es ist klar, dass für alle $\mathtt{A}, \mathtt{B} \in \mathbf{Fo}_{\mathsf{C0_n}}$ gilt, dass **D** eine Fitch-Herleitung auf $\mathbf{Fo}_{\mathsf{C0_n}}$ von $\mathbf{DBas}_{\mathsf{C0_n}}$ ist. Das bedeutet, dass es eine Herleitung $\mathbf{D} \in \mathbf{Der}_{\mathsf{C0_n}}$ gibt, mit $\{\} \subseteq \mathbf{Prem}_{\mathsf{C0_n}}(\mathbf{D})$ und $\ulcorner(\mathtt{B}^{\mathtt{n}} \to ((\mathtt{A} \to \mathtt{B}) \to ((\mathtt{A} \to \neg\mathtt{B}) \to \neg\mathtt{A})))\urcorner \in \mathbf{Conc}_{\mathsf{C0_n}}(\mathbf{D})$. Daher muss $\vdash_{\mathsf{C0_n}} ((\mathtt{A} \to \mathtt{B}) \to ((\mathtt{A} \to (\mathtt{B} \to \mathtt{C})) \to (\mathtt{A} \to \mathtt{C})))$ gemäß Definition 7.6 gelten. □

Beachte außerdem, dass in $\mathsf{C_n}$ die starke Negation ‚$\overset{(n)}{\neg}$' die Eigenschaften der klassischen Negation hat.

Aufgabe 7.2. Zeige, dass alle Inferenzen der folgenden Formen zu $\vdash_{\mathsf{C0_n}}$ gehören.

1. $/ \ (\mathtt{A} \vee \overset{(n)}{\neg}\mathtt{A})$
2. $/ \ \overset{(n)}{\neg}(\mathtt{A} \wedge \overset{(n)}{\neg}\mathtt{A})$
3. $(\mathtt{A} \to \mathtt{B}), (\mathtt{A} \to \overset{(n)}{\neg}\mathtt{B}) \ / \ \overset{(n)}{\neg}\mathtt{A}$
4. $\mathtt{A}, \overset{(n)}{\neg}\mathtt{A} \ / \ \mathtt{B}$
5. $\mathtt{A} \ / \ \overset{(n)}{\neg}\overset{(n)}{\neg}\mathtt{A}$
6. $(\mathtt{A} \leftrightarrow \overset{(n)}{\neg}\mathtt{A}) \ / \ \mathtt{B}$

Theorem 7.9. $\mathtt{A}, \overset{(n)}{\neg}\mathtt{A} \vdash_{C0_n} \mathtt{B}$.

Beweis. Sei $\mathtt{A} \in \mathbf{Fo}_{C0_n}$ und betrachten wir die schematische Herleitung*:

*: Beachten Sie in Schritt 5, dass $p^{(n)} = p^n \wedge p^{n-1} \wedge \ldots \wedge p^1$ gilt.

1	$\mathtt{A}$	
2	$\overset{(n)}{\neg}\mathtt{A}$	
	$(\neg\mathtt{A} \wedge \mathtt{A}^{(n)})$	Abbr., 2
3	$\neg\mathtt{A}$	$\wedge_1^-, 2$
4	$\mathtt{A}^{(n)}$	$\wedge_2^-, 2$
5	$\mathtt{A}^n$	$\wedge_2^-, 4$
6	$\bot$	$\bot^{n+}, 5, 1, 3$
7	$\mathtt{B}$	$\bot^-, 6$

Bezeichnen wir diese schematische Herleitung als ‚**D**'. Es ist klar, dass für alle $\mathtt{A}, \mathtt{B}, \mathtt{C} \in \mathbf{Fo}_{C0_n}$ gilt, dass **D** eine Fitch-Herleitung auf $\mathbf{Fo}_{C0_n}$ von $\mathbf{DBas}_{C0_n}$ ist. Das bedeutet, dass es eine Herleitung $\mathbf{D} \in \mathbf{Der}_{C0_n}$ gibt, mit $\mathtt{A}, \overset{(n)}{\neg}\mathtt{A} \in \mathbf{Prem}_{C0_n}(\mathbf{D})$ und $\mathtt{B} \in \mathbf{Conc}_{C0_n}(\mathbf{D})$.. Daher muss $\mathtt{A}, \overset{(n)}{\neg}\mathtt{A} \vdash_{C0_n} \mathtt{B}$ gemäß Definition 7.6 gelten. □

7.6 Übungen

Aufgabe 7.3. Bestimmen Sie die Formeln, die durch die folgenden Ausdrücke verkürzt werden:

1. p^2
2. $(p \wedge q)^1$
3. $(p \wedge q)^2$
4. $p^{(1)}$
5. $p^{(2)}$
6. $\overset{(1)}{\neg} p$
7. $\overset{(2)}{\neg} p$
8. $\overset{(1)}{\neg}(p \wedge \overset{(1)}{\neg} p)$

Für die folgenden Übungen sind keine weiteren Erläuterungen erforderlich. Die Herleitungen reichen als Antwort aus.

Aufgabe 7.4. Führen Sie für jede der folgenden Inferenzen eine Fitch-Herleitung durch, die zeigt, dass sie in $\vdash_{\mathsf{C0}_1}$ enthalten ist.

1. $\neg\neg p \;/\; p$
2. $\neg(p \vee \neg p) \;/\; (p \wedge \neg p)$
3. $p^1 \;/\; ((q \to p) \to ((q \to \neg p) \to \neg q))$
4. $p^1 \;/\; (p \to (\neg p \to q))$
5. $q^1, (p \to q) \;/\; (\neg q \to \neg p)$
6. $q^1, (p \to \neg q) \;/\; (q \to \neg p)$
7. $q^1, (\neg p \to q) \;/\; (\neg q \to p)$
8. $q^1, (\neg p \to \neg q) \;/\; (q \to p)$
9. $/\; (p \wedge \neg p)^1$
10. $(p \to \neg p) \;/\; \neg p$

Aufgabe 7.5. Führen Sie für jede der folgenden Inferenzen eine Fitch-Herleitung durch, die zeigt, dass sie in $\vdash_{\mathsf{C0}_1}$ enthalten ist.

1. $/ \ (p \vee \overset{(1)}{\neg} p)$
2. $/ \ \overset{(1)}{\neg}(p \wedge \overset{(1)}{\neg} p)$
3. $(p \rightarrow q), (p \rightarrow \overset{(1)}{\neg} q) \ / \ \overset{(1)}{\neg} p$
4. $p, \overset{(1)}{\neg} p \ / \ q$
5. $p \ / \ \overset{(1)}{\neg}\overset{(1)}{\neg} p$
6. $(p \leftrightarrow \overset{(1)}{\neg} p) \ / \ q$
7. $\overset{(1)}{\neg}(p \wedge q) \ /\!\!/ \ (\overset{(1)}{\neg} p \vee \overset{(1)}{\neg} q)$
8. $\overset{(1)}{\neg}(p \vee q) \ /\!\!/ \ (\overset{(1)}{\neg} p \wedge \overset{(1)}{\neg} q)$

7.7 Lösungen

Lösung zu Aufgabe 7.3.

1. $$\begin{aligned} p^2 &= (p^1)^1 \\ &= \neg(p^1 \wedge \neg p^1) \\ &= \neg(\neg(p \wedge \neg p) \wedge \neg\neg(p \wedge \neg p)) \end{aligned}$$

2. $$(p \wedge q)^1 = \neg((p \wedge q) \wedge \neg(p \wedge q))$$

3. $$\begin{aligned} (p \wedge q)^2 &= ((p \wedge q)^1)^1 \\ &= \neg((p \wedge q)^1 \wedge \neg(p \wedge q)^1) \\ &= \neg(\neg((p \wedge q) \wedge \neg(p \wedge q)) \wedge \neg\neg((p \wedge q) \wedge \neg(p \wedge q))) \end{aligned}$$

4. $$\begin{aligned} p^{(1)} &= p^1 \\ &= \neg(p \wedge \neg p) \end{aligned}$$

5. $$\begin{aligned} p^{(2)} &= (p^{(1)} \wedge p^2) \\ &= (p^1 \wedge p^2) \\ &= (\neg(p \wedge \neg p) \wedge \neg(\neg(p \wedge \neg p) \wedge \neg\neg(p \wedge \neg p))) \end{aligned}$$

6. $$\begin{aligned} \overset{(1)}{\neg} p &= (\neg p \wedge p^{(1)}) \\ &= (\neg p \wedge p^1) \\ &= (\neg p \wedge \neg(p \wedge \neg p)) \end{aligned}$$

7. $$\begin{aligned} \overset{(2)}{\neg} p &= (\neg p \wedge p^{(2)}) \\ &= (\neg p \wedge (p^1 \wedge p^2)) \\ &= (\neg p \wedge (\neg(p \wedge \neg p) \wedge \neg(\neg(p \wedge \neg p) \wedge \neg\neg(p \wedge \neg p)))) \end{aligned}$$

8. $$\begin{aligned} \overset{(1)}{\neg}(p \wedge \overset{(1)}{\neg} p) &= (\neg(p \wedge \overset{(1)}{\neg} p) \wedge (p \wedge \overset{(1)}{\neg} p)^{(1)}) \\ &= (\neg(p \wedge \overset{(1)}{\neg} p) \wedge (p \wedge \overset{(1)}{\neg} p)^{1}) \\ &= (\neg(p \wedge \overset{(1)}{\neg} p) \wedge \neg((p \wedge \overset{(1)}{\neg} p) \wedge \neg(p \wedge \overset{(1)}{\neg} p))) \\ &= (\neg(p \wedge (\neg p \wedge \neg(p \wedge \neg p))) \wedge \\ &\quad \neg((p \wedge (\neg p \wedge \neg(p \wedge \neg p))) \wedge \\ &\quad \neg(p \wedge (\neg p \wedge \neg(p \wedge \neg p))))) \end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 7.4.

Die folgenden Fitch-Herleitungen zeigen, dass diese Inferenzen zu $\vdash_{C0_1}$ gehören.

1. Diese Herleitung zeigt, dass $\neg\neg p \vdash_{C0_1} p$.

1	$\neg\neg p$	
2	$\quad (p \wedge \neg p)$	
3	$\quad p$	$\wedge_1^-$, 2
4	$\quad \neg(p \wedge \neg p)$	
	$\quad\quad p^1$	Abbr., 4
5	$\quad (\neg p)^1$	$\neg^{1+}$, 4
6	$\quad\quad \neg p$	
7	$\quad\quad \bot$	$\bot^{1+}$, 5, 6, 1
8	$\quad p$	$\neg^-$, 6–7
9	p	PC, 2–3, 4–8

2. Diese Herleitung zeigt, dass $\neg(p \vee \neg p) \vdash_{C0_1} (p \wedge \neg p)$.

1	$\neg(p \vee \neg p)$	
2	$\quad \neg(p \wedge \neg p)$	
	$\quad\quad p^1$	Abbr., 2
3	$\quad (\neg p)^1$	$\neg^{1+}$, 2
4	$\quad (p \vee \neg p)^1$	$\vee^{1+}$, 2, 3
5	$\quad\quad p$	
6	$\quad\quad (p \vee \neg p)$	$\vee_1^+$, 5
7	$\quad\quad \bot$	$\bot^{1+}$, 4, 6, 2
8	$\quad \neg p$	$\neg^+$, 5–7
9	$\quad (p \vee \neg p)$	$\vee_2^+$, 8
10	$\quad \bot$	$\bot^{1+}$, 4, 9, 2
11	$(p \wedge \neg p)$	$\neg^-$, 2–10

3. Diese Herleitung zeigt, dass $p^1 \vdash_{\mathsf{C0}_1} ((q \to p) \to ((q \to \neg p) \to \neg q))$.

1	p^1	
2	$\quad (q \to p)$	
3	$\quad\quad (q \to \neg p)$	
4	$\quad\quad\quad q$	
5	$\quad\quad\quad p$	$\to^-, 2, 4$
6	$\quad\quad\quad \neg p$	$\to^-, 3, 4$
7	$\quad\quad\quad \bot$	$\bot^{1+}, 1, 5, 6$
8	$\quad\quad \neg q$	$\neg^+, 4\text{–}7$
9	$\quad ((q \to \neg p) \to \neg q)$	$\to^+, 3\text{–}8$
10	$((q \to p) \to ((q \to \neg p) \to \neg q))$	$\to^+, 2\text{–}9$

4. Diese Herleitung zeigt, dass $p^1 \vdash_{\mathsf{C0}_1} (p \to (\neg p \to q))$.

1	p^1	
2	$\quad p$	
3	$\quad\quad \neg p$	
4	$\quad\quad \bot$	$\bot^{1+}, 1, 2, 3$
5	$\quad\quad q$	$\bot^-, 4$
6	$\quad (\neg p \to q)$	$\to^+, 3\text{–}5$
7	$(p \to (\neg p \to q))$	$\to^+, 2\text{–}6$

5. Diese Herleitung zeigt, dass $q^1, (p \to q) \vdash_{\mathsf{C0}_1} (\neg q \to \neg p)$.

1	q^1	
2	$(p \to q)$	
3	$\quad \neg q$	
4	$\quad\quad p$	
5	$\quad\quad q$	$\to^-, 2, 4$
6	$\quad\quad \bot$	$\bot^{1+}, 1, 5, 3$
7	$\quad \neg p$	$\neg^+, 4\text{–}6$
8	$(\neg q \to \neg p)$	$\to^+, 3\text{–}7$

6. Diese Herleitung zeigt, dass $q^1, (p \to \neg q) \vdash_{\mathsf{C0}_1} (q \to \neg p)$.

1	q^1	
2	$(p \to \neg q)$	
3	$\quad q$	
4	$\quad\quad p$	
5	$\quad\quad \neg q$	$\to^-, 2, 4$
6	$\quad\quad \bot$	$\bot^{1+}, 1, 3, 5$
7	$\quad \neg p$	$\neg^+, 4\text{–}6$
8	$(q \to \neg p)$	$\to^+, 3\text{–}7$

7. Diese Herleitung zeigt, dass $q^1, (\neg p \to q) \vdash_{\mathsf{C0}_1} (\neg q \to p)$.

1	q^1	
2	$(\neg p \to q)$	
3	$\quad \neg q$	
4	$\quad\quad \neg p$	
5	$\quad\quad q$	$\to^-, 2, 4$
6	$\quad\quad \bot$	$\bot^{1+}, 1, 3, 5$
7	$\quad p$	$\neg^-, 4\text{–}6$
8	$(\neg q \to p)$	$\to^+, 5\text{–}7$

8. Diese Herleitung zeigt, dass $q^1, (\neg p \to \neg q) \vdash_{\mathsf{C0}_1} (q \to p)$.

1	q^1	
2	$(\neg p \to \neg q)$	
3	$\quad q$	
4	$\quad\quad \neg p$	
5	$\quad\quad \neg q$	$\to^-, 2, 4$
6	$\quad\quad \bot$	$\bot^{1+}, 1, 3, 5$
7	$\quad p$	$\neg^-, 4\text{–}6$
8	$(q \to p)$	$\to^+, 3\text{–}7$

9. Diese Herleitung zeigt, dass $\vdash_{\mathsf{C0}_1} (p \wedge \neg p)^1$.

1	$((p \wedge \neg p) \wedge \neg(p \wedge \neg p))$	
2	$(p \wedge \neg p)$	$\wedge_1^-, 1$
3	$\neg(p \wedge \neg p)$	$\wedge_2^-, 1$
	$\quad p^1$	Abbr., 3
4	$(\neg p)^1$	$\neg^{1+}, 3$
5	p	$\wedge_1^-, 2$
6	$\neg p$	$\wedge_2^-, 2$
7	$\bot$	$\bot^{1+}, 3, 5, 6$
8	$\neg((p \wedge \neg p) \wedge \neg(p \wedge \neg p))$	$\neg^+, 1\text{–}6$
	$(p \wedge \neg p)^1$	Abbr., 8

10. Diese Herleitung zeigt, dass $(p \to \neg p) \vdash_{\mathsf{C0}_1} \neg p$.

1	$(p \to \neg p)$	
2	$\quad (p \wedge \neg p)$	
3	$\quad \neg p$	$\wedge_2^-$, 2
4	$\quad \neg(p \wedge \neg p)$	
	$\quad\quad p^1$	Abbr., 4
5	$\quad\quad p$	
6	$\quad\quad \neg p$	$\to^-$, 1, 5
7	$\quad\quad \bot$	$\bot^{1+}$, 4, 5, 6
8	$\quad \neg p$	$\neg^+$, 5–7
9	$\neg p$	PC, 2–3, 4–8

Lösung zu Aufgabe 7.5.

Diesen Fitch-Herleitungen zeigen, dass diese Inferenzen zu $\vdash_{\mathsf{C0}_1}$ gehören.

1. Diese Herleitung zeigt, dass $\vdash_{\mathsf{C0}_1} (p \vee \overset{(1)}{\neg} p)$.

1	$\quad (p \wedge \neg p)$	
2	$\quad p$	$\wedge_1^-$, 1
3	$\quad (p \vee \overset{(1)}{\neg} p)$	$\vee_1^+$, 2
4	$\quad \neg(p \wedge \neg p)$	
	$\quad\quad p^{(1)}$	Abbr., 4
5	$\quad\quad p$	
6	$\quad\quad (p \vee \overset{(1)}{\neg} p)$	$\vee_1^+$, 5
7	$\quad\quad \neg p$	
8	$\quad\quad (\neg p \wedge p^{(1)})$	$\wedge^+$, 5, 4
	$\quad\quad\quad \overset{(1)}{\neg} p$	Abbr., 8
9	$\quad\quad (p \vee \overset{(1)}{\neg} p)$	$\vee_2^+$, 8
10	$\quad (p \vee \overset{(1)}{\neg} p)$	PC, 5–6, 7–9
11	$(p \vee \overset{(1)}{\neg} p)$	PC, 1–3, 4–10

2. Diese Herleitung zeigt, dass $\vdash_{\mathsf{C0}_1} \overset{(1)}{\neg}(p \wedge \overset{(1)}{\neg} p)$.

1	$(p \wedge \overset{(1)}{\neg} p)$	
2	$\overset{(1)}{\neg} p$	$\wedge_2^-$, 1
	$(\neg p \wedge p^1)$	Abbr., 2
3	p^1	$\wedge_2^-$, 2
4	p	$\wedge_1^-$, 1
5	$\neg p$	$\wedge_1^-$, 2
6	$\bot$	$\bot^{1+}$, 3, 4, 5
7	$\neg(p \wedge \overset{(1)}{\neg} p)$	$\neg^+$, 1–6
8	$((p \wedge \overset{(1)}{\neg} p) \wedge \neg(p \wedge \overset{(1)}{\neg} p))$	
9	$(p \wedge \overset{(1)}{\neg} p)$	$\wedge_1^-$, 8
10	$\overset{(1)}{\neg} p$	$\wedge_2^-$, 9
	$(\neg p \wedge p^1)$	Abbr., 10
11	p^1	$\wedge_2^-$, 10
12	p	$\wedge_1^-$, 9
13	$\neg p$	$\wedge_1^-$, 10
14	$\bot$	$\bot^{1+}$, 11, 12, 13
15	$\neg((p \wedge \overset{(1)}{\neg} p) \wedge \neg(p \wedge \overset{(1)}{\neg} p))$	$\neg^+$, 8–14
	$(p \wedge \overset{(1)}{\neg} p)^{(1)}$	Abbr., 15
16	$(\neg(p \wedge \overset{(1)}{\neg} p) \wedge (p \wedge \overset{(1)}{\neg} p)^{(1)})$	$\wedge^+$, 7, 15
	$\overset{(1)}{\neg}(p \wedge \overset{(1)}{\neg} p)$	Abbr., 16

3. Diese Herleitung zeigt, dass $(p \to q), (p \to \overset{(1)}{\neg} q) \vdash_{\mathsf{C0}_1} \overset{(1)}{\neg} p$.

1	$(p \to q)$	
2	$(p \to \overset{(1)}{\neg} q)$	
3	$\quad p$	
4	$\quad \overset{(1)}{\neg} q$	$\to^-, 2, 3$
	$\quad\quad (\neg q \wedge q^1)$	Abbr., 4
5	$\quad q^1$	$\wedge_2^-, 4$
6	$\quad q$	$\to^-, 1, 3$
7	$\quad \neg q$	$\wedge_1^-, 4$
8	$\quad \bot$	$\bot^{1+}, 5, 6, 7$
9	$\neg p$	$\neg^+, 3\text{–}8$
10	$\quad (p \wedge \neg p)$	
11	$\quad p$	$\wedge_1^-, 10$
	$\quad \vdots$	(Wie 4–7)
16	$\quad \bot$	$\bot^+, 13, 14, 15$
17	$\neg(p \wedge \neg p)$	$\neg^+, 11\text{–}16$
	$p^{(1)}$	Abbr., 17
18	$(\neg p \wedge p^{(1)})$	$\wedge^+, 9, 17$
	$\overset{(1)}{\neg} p$	Abbr., 18

4. Diese Herleitung zeigt, dass $p, \overset{(1)}{\neg} p \vdash_{\mathsf{C0}_1} q$.

1	p	
2	$\overset{(1)}{\neg} p$	
	$\quad (\neg p \wedge p^1)$	Abbr., 2
3	p^1	$\wedge_2^-, 2$
4	$\neg p$	$\wedge_1^-, 2$
5	$\bot$	$\bot^{1+}, 3, 1, 4$
6	q	$\bot^-, 5$

5. Diese Herleitung zeigt, dass $p \vdash_{\mathsf{C0}_1} \overset{(1)}{\neg}\overset{(1)}{\neg} p$.

1	p	
2	$\overset{(1)}{\neg} p$	
	$(\neg p \wedge p^1)$	Abbr., 2
3	p^1	$\wedge_2^-$, 2
4	$\neg p$	$\wedge_1^-$, 2
5	$\bot$	$\bot^{1+}$, 3, 1, 4
6	$\neg \overset{(1)}{\neg} p$	$\neg^+$, 2–5
7	$((\neg p \wedge p^1) \wedge \neg(\neg p \wedge p^1))$	
8	$(\neg p \wedge p^1)$	$\wedge_1^-$, 7
9	p^1	$\wedge_2^-$, 8
10	$\neg p$	$\wedge_1^-$, 8
11	$\bot$	$\bot^{1+}$, 9, 1, 10
12	$\neg((\neg p \wedge p^1) \wedge \neg(\neg p \wedge p^1))$	$\neg^+$, 7–11
	$(\overset{(1)}{\neg} p)^{(1)}$	Abbr., 12
13	$(\neg \overset{(1)}{\neg} p \wedge (\overset{(1)}{\neg} p)^{(1)})$	$\wedge^+$, 6, 12
	$\overset{(1)}{\neg}\overset{(1)}{\neg} p$	Abbr., 13

6. Diese Herleitung zeigt, dass $(p \leftrightarrow \overset{(1)}{\neg} p) \vdash_{\mathsf{C0}_1} q$.

1	$(p \leftrightarrow \overset{(1)}{\neg} p)$	
	$\vdots$	(Wie 1–10, von Aufgabe 7.5.1)
12	$(p \vee \overset{(1)}{\neg} p)$	PC, 2–4, 5–11
13	$\quad p$	
14	$\quad \overset{(1)}{\neg} p$	$\leftrightarrow_1^-$, 1, 13
15	$\quad \overset{(1)}{\neg} p$	
16	$\quad \overset{(1)}{\neg} p$	Reit, 15
17	$\overset{(1)}{\neg} p$	$\vee^-$, 12, 13–14, 15–16
	$(\neg p \wedge p^1)$	Abbr., 17
18	p^1	$\wedge_2^-$, 17
19	p	$\leftrightarrow_2^-$, 1, 17
20	$\neg p$	$\wedge_1^-$, 17
21	$\bot$	$\bot^{1+}$, 18, 19, 20
22	q	$\bot^-$, 21

7a. Diese Herleitung zeigt, dass $\overset{(1)}{\neg}(p \wedge q) \vdash_{\mathsf{C0}_1} (\overset{(1)}{\neg} p \vee \overset{(1)}{\neg} q)$.

1	$\overset{(1)}{\neg}(p \wedge q)$	
	$(\neg(p \wedge q) \wedge (p \wedge q)^1)$	Abbr., 1
	$\vdots$	(Wie 1–10, von Auf. 7.5.1)
12	$(p \vee \overset{(1)}{\neg} p)$	PC, 2–4, 5–11
	$\vdots$	(Ähnlich wie 1–10, von Auf. 7.5.1)
23	$(q \vee \overset{(1)}{\neg} q)$	PC, 13–15, 16–22
24	$(p \wedge q)^1$	$\wedge_2^-$, 1
25	$\neg(p \wedge q)$	$\wedge_1^-$, 1
26	$\quad p$	
27	$\quad\quad q$	
28	$\quad\quad (p \wedge q)$	$\wedge^+$, 26, 27
29	$\quad\quad \bot$	$\bot^{1+}$, 24, 28, 25
30	$\quad\quad (\overset{(1)}{\neg} p \vee \overset{(1)}{\neg} q)$	$\bot^-$, 29
31	$\quad\quad \overset{(1)}{\neg} q$	
32	$\quad\quad (\overset{(1)}{\neg} p \vee \overset{(1)}{\neg} q)$	$\vee_2^+$, 31
33	$\quad (\overset{(1)}{\neg} p \vee \overset{(1)}{\neg} q)$	$\vee^-$, 23, 27–30, 31–32
34	$\quad \overset{(1)}{\neg} p$	
35	$\quad (\overset{(1)}{\neg} p \vee \overset{(1)}{\neg} q)$	$\vee_1^+$, 34
36	$(\overset{(1)}{\neg} p \vee \overset{(1)}{\neg} q)$	$\vee^-$, 12, 26–33, 34–35

7b. Diese Herleitung zeigt, dass $(\overset{(1)}{\neg} p \vee \overset{(1)}{\neg} q) \vdash_{\mathsf{C0}_1} \overset{(1)}{\neg}(p \wedge q)$.

1	$(\overset{(1)}{\neg} p \vee \overset{(1)}{\neg} q)$	
2	$\overset{(1)}{\neg} p$	
	$(\neg p \wedge p^1)$	Abbr., 2
3	p^1	$\wedge_2^-$, 2
4	$\neg p$	$\wedge_1^-$, 2
5	$(p \wedge q)$	
6	p	$\wedge_1^-$, 5
7	$\bot$	$\bot^{1+}$, 3, 6, 4
8	$\neg(p \wedge q)$	$\rightarrow^-$, 5, 7
9	$((p \wedge q) \wedge \neg(p \wedge q))$	
10	$(p \wedge q)$	$\wedge_1^-$, 9
11	p	$\wedge_1^-$, 10
12	$\bot$	$\bot^{1+}$, 3, 11, 4
13	$\neg((p \wedge q) \wedge \neg(p \wedge q))$	$\neg^+$, 9–12
	$(p \wedge q)^1$	Abbr., 13
14	$(\neg(p \wedge q) \wedge (p \wedge q)^1)$	$\wedge^+$, 8, 13
	$\overset{(1)}{\neg}(p \wedge q)$	Abbr., 14
15	$\overset{(1)}{\neg} q$	
	$\vdots$	(Ähnlich wie 3–4)
27	$\overset{(1)}{\neg}(p \wedge q)$	$\wedge^+$, 19, 26
28	$\overset{(1)}{\neg}(p \wedge q)$	$\vee^-$, 1, 2–14, 15–27

8a. Diese Herleitung zeigt, dass $\overset{(1)}{\neg}(p \vee q) \vdash_{\mathsf{C0}_1} (\overset{(1)}{\neg} p \wedge \overset{(1)}{\neg} q)$.

1	$\overset{(1)}{\neg}(p \vee q)$	
	$(\neg(p \vee q) \wedge (p \vee q)^{(1)})$	Abbr., 1
2	$(p \vee q)^1$	$\wedge_2^-$, 1
3	$\neg(p \vee q)$	$\wedge_1^-$, 1
4	$\quad p$	
5	$\quad (p \vee q)$	$\vee_1^+$, 4
6	$\quad \bot$	$\bot^{1+}$, 2, 5, 3
7	$\neg p$	$\neg^+$, 4–6
8	$\quad (p \wedge \neg p)$	
9	$\quad p$	$\wedge_1^-$, 8
10	$\quad (p \vee q)$	$\vee_1^+$, 9
11	$\quad \bot$	$\bot^{1+}$, 2, 10, 3
12	$\neg(p \wedge \neg p)$	$\neg^+$, 8–11
13	$(\neg p \wedge \neg(p \wedge \neg p))$	$\wedge^+$, 7, 12
	$\overset{(1)}{\neg} p$	Abbr., 13
	$\vdots$	(Ähnlich wie 4–12)
23	$\overset{(1)}{\neg} q$	$\wedge^+$, 17, 22
24	$(\overset{(1)}{\neg} p \wedge \overset{(1)}{\neg} q)$	$\wedge^+$, 13, 23

8b. Diese Herleitung zeigt, dass $(\overset{(1)}{\neg} p \wedge \overset{(1)}{\neg} q) \vdash_{\mathsf{C0}_1} \overset{(1)}{\neg}(p \vee q)$.

1	$(\overset{(1)}{\neg} p \wedge \overset{(1)}{\neg} q)$	
2	$\overset{(1)}{\neg} p$	$\wedge_1^-$, 1
	$(\neg p \wedge p^1)$	Abbr., 2
3	p^1	$\wedge_2^-$, 2
4	$\neg p$	$\wedge_1^-$, 2
5	$\overset{(1)}{\neg} q$	$\wedge_2^-$, 1
	$(\neg q \wedge q^1)$	Abbr., 5
6	q^1	$\wedge_2^-$, 5
7	$\neg q$	$\wedge_1^-$, 5
8	$(p \vee q)^1$	$\vee^{1+}$, 3, 6
9	$(p \vee q)$	
10	p	
11	$\bot$	$\bot^{1+}$, 3, 10, 4
12	q	
13	$\bot$	$\bot^{1+}$, 6, 12, 7
14	$\bot$	$\vee^-$, 9, 10–11, 12–13
15	$\neg(p \vee q)$	$\neg^+$, 9–14
16	$(\neg(p \vee q) \wedge (p \vee q)^1)$	$\wedge^+$, 15, 8
	$\overset{(1)}{\neg}(p \vee q)$	Abbr., 16

Konnexive Logiken 8

8.1 Philosophische Motivationen

Konnexive Logiken werden durch eine gewisse Unzufriedenheit mit Standardauffassungen der Implikation motiviert. Eine zentrale Intuition besteht darin, dass eine Proposition nicht ihre eigene Negation implizieren sollte, ebenso wenig wie ihre Negation die Proposition selbst implizieren sollte.

Mit anderen Worten möchten wir, dass Inferenzen der folgenden Form logisch gültig sind:

$$/\ \neg(\neg \mathtt{A} \longrightarrow \mathtt{A}) \tag{AT1}$$

Konnexive Logiken sind logische Systeme, in denen diese und andere ähnliche Inferenzformen logisch gültig sind.

Eine zweite wichtige Motivation ist historisch. Konnexive Thesen werden gewöhnlich mit den Thesen über das Konditional mehrerer Autoren wie Aristoteles, Chrysipp und Boethius in Verbindung gebracht. Viele Forschende betrachten die konnexive Logik als einen Weg, Ideen wiederzugewinnen und zu systematisieren, die bis auf antike und mittelalterliche Traditionen des logischen Denkens zurückverfolgt werden können.

Allgemeiner werden konnexive Logiken durch den Wunsch motiviert, einen anspruchsvolleren Begriff der Implikation bereitzustellen. Nach dieser Auffassung sollte eine echte Implikation irgendeine Form von Kohärenz oder Verträglichkeit zwischen Antezedens und Konsequens beinhalten.

8.2 Vokabulare und Sprachen

Das Vokabular und die formale Sprache $\mathbf{Fo}_{\mathsf{W0}}$ und $\mathbf{Fo}_{\mathsf{W0}}$ werden als diejenigen von $\mathsf{S0}$ definiert.

Definition 8.1.

$$\mathbf{Vo}_{\mathsf{W0}} \overset{\text{DF}}{=} \mathbf{Vo}_{\mathsf{S0}}. \qquad \mathbf{Fo}_{\mathsf{W0}} \overset{\text{DF}}{=} \mathbf{Fo}_{\mathsf{S0}}.$$

8.3 Inferenz- und Konsequenzrelationen

$\mathsf{W0}$ gehört zu den modernen Systemen. Daher sind Inferenzen in dieses Systems alle Kombinationen von Formeln als Prämissen und Konklusionen.

Hinsichtlich des Inhalts seiner Konsequenzrelationen möchten wir, dass alle Inferenzen der folgenden Formen gültig sind:

$$/\ \neg(\neg \mathtt{A} \rightarrow \mathtt{A}) \tag{AT1}$$

$$/\ \neg(\mathtt{A} \rightarrow \neg \mathtt{A}) \tag{AT2}$$

$$(\mathtt{A} \rightarrow \mathtt{B})\ /\ \neg(\mathtt{A} \rightarrow \neg \mathtt{B}) \tag{BT1}$$

$$(\mathtt{A} \rightarrow \neg \mathtt{B})\ /\ \neg(\mathtt{A} \rightarrow \mathtt{B}) \tag{BT2}$$

Da keine dieser Inferenzformen in S0, der klassischen Logik, gültig ist, sagen wir, dass W0 eine *kontra-klassische Logik* ist. Eine kontra-klassische Logik ist eine nichtklassische Logik, die nicht nur einige ihrer Thesen zurückweist oder einschränkt, sondern auch Thesen vorschlägt, die nicht Teil der klassischen Logik sind.

Außerdem wollen wir nach McCall (1966, S. 416) nicht, dass alle Inferenzen der folgenden Form in einer konnexiven Logik gültig sind:

$$/\ ((\mathtt{A} \rightarrow \mathtt{B}) \rightarrow (\mathtt{B} \rightarrow \mathtt{A})).$$

Diese Inferenzform ist bereits in S0 ungültig, daher müssen wir lediglich darauf achten, W0 nicht so zu definieren, dass sie gültig wird.

Im Übrigen soll W0 S0 sehr ähnlich sein, da dieses System schließlich durch viele der Intuitionen inspiriert ist, auf denen auch die klassische Logik beruht.

8.4 Interpretationssysteme

Die Semantik dieses Systems verwendet mögliche Welten, und wir werden sie nicht vollständig entwickeln.

Es ist jedoch wichtig anzumerken, dass diese Semantik Wahrheits- und Falschheitsbedingungen unabhängig voneinander behandelt.

8.5 Herleitungssysteme

Das ursprünglich für W0 vorgeschlagene Herleitungssystem ist ein axiomatisches, das ebenfalls auf der positiven Logik basiert. Ein solches System wird durch die folgenden Inferenzformen definiert:

$$
\begin{array}{lr}
(\mathtt{A} \to \mathtt{B}), \mathtt{A} \;/\; \mathtt{B} & \text{(MPP)} \\
\qquad\qquad / \; (\mathtt{A} \to (\mathtt{B} \to \mathtt{A})) & \text{(P1)} \\
\qquad\qquad / \; ((\mathtt{A} \to \mathtt{B}) \to ((\mathtt{A} \to (\mathtt{B} \to \mathtt{C})) \to (\mathtt{A} \to \mathtt{C}))) & \text{(P2)} \\
\qquad\qquad / \; (\mathtt{A} \to (\mathtt{B} \to (\mathtt{A} \wedge \mathtt{B}))) & \text{(P3)} \\
\qquad\qquad / \; ((\mathtt{A} \wedge \mathtt{B}) \to \mathtt{A}) & \text{(P4)} \\
\qquad\qquad / \; ((\mathtt{A} \wedge \mathtt{B}) \to \mathtt{B}) & \text{(P5)} \\
\qquad\qquad / \; (\mathtt{A} \to (\mathtt{A} \vee \mathtt{B})) & \text{(P6)} \\
\qquad\qquad / \; (\mathtt{B} \to (\mathtt{A} \vee \mathtt{B})) & \text{(P7)} \\
\qquad\qquad / \; ((\mathtt{A} \to \mathtt{C}) \to ((\mathtt{B} \to \mathtt{C}) \to ((\mathtt{A} \vee \mathtt{B}) \to \mathtt{C}))) & \text{(P8)} \\
\qquad\qquad / \; (\neg\neg\mathtt{A} \leftrightarrow \mathtt{A}) & \text{(DN)} \\
\qquad\qquad / \; (\neg(\mathtt{A} \vee \mathtt{B}) \leftrightarrow (\neg\mathtt{A} \wedge \neg\mathtt{B})) & \text{(DM1)} \\
\qquad\qquad / \; (\neg(\mathtt{A} \wedge \mathtt{B}) \leftrightarrow (\neg\mathtt{A} \vee \neg\mathtt{B})) & \text{(DM2)} \\
\qquad\qquad / \; (\neg(\mathtt{A} \to \mathtt{B}) \leftrightarrow (\mathtt{A} \to \neg\mathtt{B})) & \text{(W0)}
\end{array}
$$

Wie üblich ist $\ulcorner(\mathtt{A} \leftrightarrow \mathtt{B})\urcorner$ im Kontext dieser Axiome eine Verkürzung für $\ulcorner((\mathtt{A} \to \mathtt{B}) \wedge (\mathtt{B} \to \mathtt{A}))\urcorner$.

Beachte, dass die zu der positiven Logik hinzugefügten Axiome in diesem System von S0 erfüllt werden, mit Ausnahme von (W0), das W0s charakteristisches Axiom ist. Daher würde eine axiomatische deduktive Basis für W0 aus derjenigen von P0 zusammen mit (DN), (DM1), (DM2) und (W0) bestehen.

8.5.1 Fitch-Herleitungen für W0

Um die deduktive Basis $\mathbf{Cal}_{\mathsf{W0}}$ für die konnexive Aussagenlogik W0 im Ficht-Stil darzustellen, werden wir wiederum diejenige von $\mathbf{Cal}_{\mathsf{P0}}$ erweitern. Zunächst fügen wir Regeln hinzu, die den De-Morgan-Regeln und der doppelten Negation entsprechen:

Regeln der doppelten Negation.

$$
\begin{array}{c|ll}
a & \mathtt{A} & \\
 & \vdots & \\
 & \neg\neg\mathtt{A} & \neg\neg^{+}, a
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{c|ll}
a & \neg\neg\mathtt{A} & \\
 & \vdots & \\
 & \mathtt{A} & \neg\neg^{-}, a
\end{array}
$$

De-Morgan-Regeln.

$$\begin{array}{l|ll} a & \neg(\mathtt{A} \vee \mathtt{B}) & \\ & \vdots & \\ & (\neg\mathtt{A} \wedge \neg\mathtt{B}) & \mathsf{DM}_1^-, a \end{array} \qquad \begin{array}{l|ll} a & (\neg\mathtt{A} \wedge \neg\mathtt{B}) & \\ & \vdots & \\ & \neg(\mathtt{A} \vee \mathtt{B}) & \mathsf{DM}_1^+, a \end{array}$$

$$\begin{array}{l|ll} a & \neg(\mathtt{A} \wedge \mathtt{B}) & \\ & \vdots & \\ & (\neg\mathtt{A} \vee \neg\mathtt{B}) & \mathsf{DM}_2^-, a \end{array} \qquad \begin{array}{l|ll} a & (\neg\mathtt{A} \vee \neg\mathtt{B}) & \\ & \vdots & \\ & \neg(\mathtt{A} \wedge \mathtt{B}) & \mathsf{DM}_2^+, a \end{array}$$

Diese Regeln erlauben es uns ohne Weiteres, die Axiome (DN), (DM1) und (DM2) herzuleiten. Für das Axiom (W0) müssen wir die folgenden Regeln hinzufügen:

Konnexive Regeln.

$$\begin{array}{l||ll} a & \mathtt{A} & \\ \cline{2-2} & \vdots & \\ b & \neg\mathtt{B} & \\ & \vdots & \\ & \neg(\mathtt{A} \longrightarrow \mathtt{B}) & \not\rightarrow^+, a\text{–}b \end{array} \qquad \begin{array}{l|ll} a & \neg(\mathtt{A} \longrightarrow \mathtt{B}) & \\ & \vdots & \\ b & \mathtt{A} & \\ & \vdots & \\ & \neg\mathtt{B} & \not\rightarrow^-, a, b \end{array}$$

Daher können wir $\mathbf{DBas}_{\mathsf{W0}}$ wie folgt definieren:

Definition 8.2 (Deduktive Basis für W0)**.**

$$\mathbf{DBas}_{\mathsf{W0}} \stackrel{\text{DF}}{=} \mathbf{DBas}_{\mathsf{P0}} \cup \{\neg\neg^-, \neg\neg^+, \mathsf{DM}_1^-, \mathsf{DM}_2^-, \mathsf{DM}_1^+, \mathsf{DM}_2^+, \not\rightarrow^-, \not\rightarrow^+\}.$$

Beachte, dass keine speziellen Regeln für die Negation oder das Falsum hinzugefügt wurden.

Was das Herleitungssystem $\mathbf{Cal}_{\mathsf{W0}}$ betrifft, so werden wir erneut annehmen, dass die Funktionen $\mathbf{Prem}_{\mathsf{W0}}$ und $\mathbf{Conc}_{\mathsf{W0}}$ jeder Fitch-Herleitung ihre Prämissen bzw. Konklusionen zuordnen. Damit erhalten wir die folgende Definition.

Definition 8.3 ($\mathbf{Cal}_{\mathsf{W0}}$).

$\mathbf{Cal}_{\mathsf{W0}}$ ist ein Kalkül auf $\mathsf{W0}$

$\overset{\text{DF}}{=} \mathbf{Cal}_{\mathsf{W0}} = \langle \mathbf{DBas}_{\mathsf{W0}}, \mathbf{Der}_{\mathsf{W0}}, \mathbf{Prem}_{\mathsf{W0}}, \mathbf{Conc}_{\mathsf{W0}}, \vdash_{\mathsf{W0}} \rangle$

$: \mathbf{DBas}_{\mathsf{W0}}$ ist eine deduktive Basis auf $\mathbf{Fo}_{\mathsf{W0}}$ $\wedge\!\!\!\wedge$

$\mathbf{Der}_{\mathsf{W0}} = \{\mathbf{D} : \mathbf{D}$ ist eine Fitch-Herleitung auf $\mathbf{Fo}_{\mathsf{W0}}$ aus $\mathbf{DBas}_{\mathsf{W0}}\}$

$\mathbf{Prem}_{\mathsf{W0}} : \mathbf{Der}_{\mathsf{W0}} \longrightarrow \wp\mathbf{Fo}_{\mathsf{W0}}$

$\mathbf{Conc}_{\mathsf{W0}} : \mathbf{Der}_{\mathsf{W0}} \longrightarrow \wp\mathbf{Fo}_{\mathsf{W0}}$

$\vdash_{\mathsf{S}} = \{\langle \mathbf{A}, \mathbf{B} \rangle : \exists \mathbf{X} \in \mathbf{Der}_{\mathsf{W0}} \, (\mathbf{Prem}_{\mathsf{W0}}(\mathbf{X}) = \mathbf{A} \wedge\!\!\!\wedge \mathbf{Conc}_{\mathsf{W0}}(\mathbf{X}) = \mathbf{B})\}$.

Theorem 8.4. $\vdash_{\mathsf{W0}} (\neg(\mathtt{A} \longrightarrow \mathtt{B}) \leftrightarrow (\mathtt{A} \longrightarrow \neg\mathtt{B}))$.

Beweis. Seien $\mathtt{A}, \mathtt{B} \in \mathbf{Fo}_{\mathsf{W0}}$ und betrachte die schematische Herleitung:

1	$\neg(\mathtt{A} \longrightarrow \mathtt{B})$	
2	$\quad \mathtt{A}$	
3	$\quad \neg\mathtt{B}$	$\not\longrightarrow^{-}$, 1, 2
4	$(\mathtt{A} \longrightarrow \neg\mathtt{B})$	$\longrightarrow^{+}$, 2–3
5	$(\neg(\mathtt{A} \longrightarrow \mathtt{B}) \longrightarrow (\mathtt{A} \longrightarrow \neg\mathtt{B}))$	$\longrightarrow^{+}$, 2–4
6	$(\mathtt{A} \longrightarrow \neg\mathtt{B})$	
7	$\quad \mathtt{A}$	
8	$\quad \neg\mathtt{B}$	$\longrightarrow^{-}$, 6, 7
9	$\neg(\mathtt{A} \longrightarrow \mathtt{B})$	$\not\longrightarrow^{+}$, 7–8
10	$((\mathtt{A} \longrightarrow \neg\mathtt{B}) \longrightarrow \neg(\mathtt{A} \longrightarrow \mathtt{B}))$	$\longrightarrow^{+}$, 6–9
11	$(\neg(\mathtt{A} \longrightarrow \mathtt{B}) \leftrightarrow (\mathtt{A} \longrightarrow \neg\mathtt{B}))$	$\wedge^{+}$, 5, 10

Bezeichne diese schematische Herleitung mit ‚**D**‘. Für alle $\mathtt{A}, \mathtt{B} \in \mathbf{Fo}_{\mathsf{W0}}$ ist offensichtlich, dass **D** eine Fitch-Herleitung auf $\mathbf{Fo}_{\mathsf{W0}}$ aus $\mathbf{DBas}_{\mathsf{W0}}$ ist. Dies bedeutet, dass es eine Herleitung $\mathbf{D} \in \mathbf{Der}_{\mathsf{W0}}$ gibt mit $\{\} \subseteq \mathbf{Prem}_{\mathsf{W0}}(\mathbf{D})$ und $\ulcorner(\neg(\mathtt{A} \longrightarrow \mathtt{B}) \leftrightarrow (\mathtt{A} \longrightarrow \neg\mathtt{B}))\urcorner \in \mathbf{Conc}_{\mathsf{W0}}(\mathbf{D})$. Folglich gilt nach Definition 8.3, dass $\vdash_{\mathsf{W0}} (\neg(\mathtt{A} \longrightarrow \mathtt{B}) \leftrightarrow (\mathtt{A} \longrightarrow \neg\mathtt{B}))$.

□

Ähnlich sind alle Instanzen von (AT1), (AT2), (BT1) und (BT2) in diesem $\mathbf{Der}_{\mathsf{W0}}$ herleitbar.

Wir werden die Fälle von (AT1) und (BT1) beweisen.

Theorem 8.5. $\vdash_{\mathsf{W0}} \neg(\neg \mathtt{A} \longrightarrow \mathtt{A})$

Beweis. Sei $\mathtt{A} \in \mathbf{Fo}_{\mathsf{W0}}$ und betrachte die folgende schematische Herleitung:

1	$\quad \neg\mathtt{A}$	
2	$\quad \neg\mathtt{A}$	Reit, 1
3	$\neg(\neg\mathtt{A} \longrightarrow \mathtt{A})$	$\nrightarrow^{+}$, 1–2

Bezeichne diese schematische Herleitung mit ‚**D**'. Für alle $\mathtt{A} \in \mathbf{Fo}_{\mathsf{W0}}$ ist offensichtlich, dass **D** eine Fitch-Herleitung auf $\mathbf{Fo}_{\mathsf{W0}}$ aus $\mathbf{DBas}_{\mathsf{W0}}$ ist. Dies bedeutet, dass es eine Herleitung $\mathbf{D} \in \mathbf{Der}_{\mathsf{W0}}$ gibt mit $\{\} \subseteq \mathbf{Prem}_{\mathsf{W0}}(\mathbf{D})$ und $\ulcorner\neg(\neg\mathtt{A} \longrightarrow \mathtt{A})\urcorner \in \mathbf{Conc}_{\mathsf{W0}}(\mathbf{D})$. Folglich gilt nach Definition 8.3, $\vdash_{\mathsf{W0}} \neg(\neg\mathtt{A} \longrightarrow \mathtt{A})$. □

Theorem 8.6. $(\mathtt{A} \longrightarrow \mathtt{B}) \vdash_{\mathsf{W0}} \neg(\mathtt{A} \longrightarrow \neg\mathtt{B})$

Beweis. Seien $\mathtt{A}, \mathtt{B} \in \mathbf{Fo}_{\mathsf{W0}}$ und betrachte die folgende schematische Herleitung:

1	$(\mathtt{A} \longrightarrow \mathtt{B})$	
2	$\quad \mathtt{A}$	
3	$\quad \mathtt{B}$	$\longrightarrow^{-}$, 1, 2
4	$\quad \neg\neg\mathtt{B}$	$\neg\neg^{+}$, 3
5	$\neg(\mathtt{A} \longrightarrow \neg\mathtt{B})$	$\nrightarrow^{+}$, 2–4

Bezeichne diese schematische Herleitung mit ‚**D**'. Für alle $\mathtt{A}, \mathtt{B} \in \mathbf{Fo}_{\mathsf{W0}}$ ist offensichtlich, dass **D** eine Fitch-Herleitung auf $\mathbf{Fo}_{\mathsf{W0}}$ aus $\mathbf{DBas}_{\mathsf{W0}}$ ist. Dies bedeutet, dass es eine Herleitung $\mathbf{D} \in \mathbf{Der}_{\mathsf{W0}}$ gibt mit $\{\ulcorner(\mathtt{A} \longrightarrow \mathtt{B})\urcorner\} \subseteq \mathbf{Prem}_{\mathsf{W0}}(\mathbf{D})$ und $\ulcorner\neg(\mathtt{A} \longrightarrow \neg\mathtt{B})\urcorner \in \mathbf{Conc}_{\mathsf{W0}}(\mathbf{D})$. Folglich gilt nach Definition 8.3, dass $(\mathtt{A} \longrightarrow \neg\mathtt{B}) \vdash_{\mathsf{W0}} \neg(\mathtt{A} \longrightarrow \mathtt{B})$. □

Eine bemerkenswerte Eigenschaft von W0 ist, dass es eine *widersprüchliche Logik* ist, d. h. eine Logik, in der es mindestens eine Formel A gibt, sodass sowohl A als auch $\ulcorner\neg\mathtt{A}\urcorner$ Theoreme von W0 sind.

Theorem 8.7. $\vdash_{\mathsf{W0}}$ besitzt widersprüchliche Theoreme.

Beweis. Sei $\mathtt{A} \in \mathbf{Fo}_{\mathsf{W0}}$. Wir zeigen, dass die Formel $\ulcorner(\mathtt{A} \wedge \neg\mathtt{A})\urcorner$ und ihre Negation $\ulcorner\neg(\mathtt{A} \wedge \neg\mathtt{A})\urcorner$ in $\vdash_{\mathsf{W0}}$ herleitbar sind.

Für die erste betrachte die folgende schematische Herleitung:

1	$\quad\vert\ (\mathtt{A} \wedge \neg\mathtt{A})$	
2	$\quad\vert\ \mathtt{A}$	$\wedge_1^-, 1$
3	$((\mathtt{A} \wedge \neg\mathtt{A}) \longrightarrow \mathtt{A})$	$\longrightarrow^+, 1\text{–}2$

Bezeichne diese schematische Herleitung mit ‚**D1**‘. Für alle $\mathtt{A} \in \mathbf{Fo}_{\mathsf{W0}}$ ist offensichtlich, dass **D1** eine Fitch-Herleitung auf $\mathbf{Fo}_{\mathsf{W0}}$ aus $\mathbf{DBas}_{\mathsf{W0}}$ ist. Dies bedeutet, dass es eine Herleitung $\mathbf{D1} \in \mathbf{Der}_{\mathsf{W0}}$ gibt mit $\{\} \subseteq \mathbf{Prem}_{\mathsf{W0}}(\mathbf{D1})$ und $\ulcorner((\mathtt{A} \wedge \neg\mathtt{A}) \longrightarrow \mathtt{A})\urcorner \in \mathbf{Conc}_{\mathsf{W0}}(\mathbf{D1})$. Daher gilt nach Definition 8.3, $\vdash_{\mathsf{W0}} ((\mathtt{A} \wedge \neg\mathtt{A}) \longrightarrow \mathtt{A})$.

Für die widersprüchliche Aussage betrachte diese andere schematische Herleitung:

1	$\quad\vert\ (\mathtt{A} \wedge \neg\mathtt{A})$	
2	$\quad\vert\ \neg\mathtt{A}$	$\wedge_2^-, 1$
3	$\neg((\mathtt{A} \wedge \neg\mathtt{A}) \longrightarrow \mathtt{A})$	$\not\longrightarrow^+, 1\text{–}2$

Bezeichne diese schematische Herleitung mit ‚**D2**‘. Für alle $\mathtt{A} \in \mathbf{Fo}_{\mathsf{W0}}$ ist offensichtlich, dass **D2** eine Fitch-Herleitung auf $\mathbf{Fo}_{\mathsf{W0}}$ aus $\mathbf{DBas}_{\mathsf{W0}}$ ist. Dies bedeutet, dass es eine Herleitung $\mathbf{D2} \in \mathbf{Der}_{\mathsf{W0}}$ gibt mit $\{\} \subseteq \mathbf{Prem}_{\mathsf{W0}}(\mathbf{D2})$ und $\ulcorner((\mathtt{A} \wedge \neg\mathtt{A}) \longrightarrow \mathtt{A})\urcorner \in \mathbf{Conc}_{\mathsf{W0}}(\mathbf{D2})$. Daher gilt nach Definition 8.3, $\vdash_{\mathsf{W0}} \neg((\mathtt{A} \wedge \neg\mathtt{A}) \longrightarrow \mathtt{A})$.

Beachte, dass $\ulcorner((\mathtt{A} \wedge \neg\mathtt{A}) \longrightarrow \mathtt{A})\urcorner$ und $\ulcorner\neg((\mathtt{A} \wedge \neg\mathtt{A}) \longrightarrow \mathtt{A})\urcorner$, beide Elemente von W0, einander widersprechen. Folglich besitzt $\vdash_{\mathsf{W0}}$ widersprüchliche Theoreme. □

Trotz dieser Inkonsistenz ist das System nicht trivial.

8.6 Übungen

Für die folgenden Übungen sind keine weiteren Erläuterungen erforderlich. Die Herleitungen reichen als Antwort aus.

Aufgabe 8.1. Führen Sie für jede der folgenden Inferenzen eine Fitch-Herleitung durch, die zeigt, dass sie in $\vdash_{\mathsf{W0}}$ enthalten ist.

1. $\neg(p \wedge \neg p) \mathbin{/\!/} (p \vee \neg p)$
2. $(p \wedge \neg p) \mathbin{/\!/} \neg(p \vee \neg p)$
3. $/\ \neg(\neg p \rightarrow p)$
4. $/\ \neg(p \rightarrow \neg p)$
5. $\neg(p \rightarrow q) \mathbin{/\!/} (p \rightarrow \neg q)$
6. $\neg(p \rightarrow \neg q) \mathbin{/\!/} (p \rightarrow q)$
7. $(\neg\neg p \rightarrow q) \mathbin{/\!/} (p \rightarrow \neg\neg q)$
8. $(p \rightarrow q) \mathbin{/\!/} \neg(p \rightarrow \neg q)$
9. $(p \rightarrow \neg q) \mathbin{/\!/} \neg(p \rightarrow q)$
10. $\neg(p \rightarrow (q \rightarrow r)) \mathbin{/\!/} (p \rightarrow (q \rightarrow \neg r))$
11. $\neg(p \rightarrow (q \vee r)) \mathbin{/\!/} (p \rightarrow (\neg q \wedge \neg r))$
12. $(p \rightarrow \neg q), (p \rightarrow \neg r) \ /\ \neg(p \rightarrow (q \vee r))$
13. $\neg(p \rightarrow r), \neg(q \rightarrow r) \ /\ ((p \vee q) \rightarrow \neg r)$
14. $/\ ((p \wedge \neg p) \rightarrow p) \wedge \neg((p \wedge \neg p) \rightarrow p)$

8.7 Lösungen

Lösung zu Aufgabe 7.5.

Diesen Fitch-Herleitungen zeigen, dass diese Inferenzen zu $\vdash_{\mathsf{W0}}$ gehören.

1a. Diese Herleitung zeigt, dass $\neg(p \wedge \neg p) \vdash_{\mathsf{W0}} (p \vee \neg p)$.

1	$\neg(p \wedge \neg p)$	
2	$(\neg p \vee \neg\neg p)$	DM_2^-, 1
3	$\quad \neg p$	
4	$\quad (p \vee \neg p)$	$\vee_2^+$, 3
5	$\quad \neg\neg p$	
6	$\quad p$	$\neg\neg^-$, 6
7	$\quad (p \vee \neg p)$	$\vee_1^+$, 6
8	$(p \vee \neg p)$	$\vee^-$, 3–4, 5–7

1b. Diese Herleitung zeigt, dass $(p \vee \neg p) \vdash_{\mathsf{W0}} \neg(p \wedge \neg p)$.

1	$(p \vee \neg p)$	
2	$\quad p$	
3	$\quad \neg\neg p$	$\neg\neg^+$, 2
4	$\quad (\neg p \vee \neg\neg p)$	$\vee_2^+$, 3
5	$\quad \neg p$	
6	$\quad (\neg p \vee \neg\neg p)$	$\vee_1^+$, 5
7	$(\neg p \vee \neg\neg p)$	$\vee^-$, 2–4, 5–6
8	$\neg(p \wedge \neg p)$	DM_2^+, 7

2a. Diese Herleitung zeigt, dass $(p \wedge \neg p) \vdash_{\mathsf{W0}} \neg(p \vee \neg p)$.

1	$(p \wedge \neg p)$	
2	$\neg p$	$\wedge_2^-, 1$
3	p	$\wedge_1^-, 1$
4	$\neg\neg p$	$\neg\neg^+, 3$
5	$(\neg p \wedge \neg\neg p)$	$\wedge^+, 2, 4$
6	$\neg(p \vee \neg p)$	$\mathsf{DM}_1^+, 5$

2b. Diese Herleitung zeigt, dass $\neg(p \vee \neg p) \vdash_{\mathsf{W0}} (p \wedge \neg p)$.

1	$\neg(p \vee \neg p)$	
2	$(\neg p \wedge \neg\neg p)$	$\mathsf{DM}_1^-, 2$
3	$\neg\neg p$	$\wedge_2^-, 2$
4	p	$\neg\neg^-, 3$
5	$\neg p$	$\wedge_1^-, 2$
6	$(p \wedge \neg p)$	$\wedge^+, 4, 5$

3. Diese Herleitung zeigt, dass $\vdash_{\mathsf{W0}} \neg(\neg p \rightarrow p)$.

1	$\quad \mid \neg p$	
2	$\quad \mid \neg p$	Reit, 1
3	$\neg(\neg p \rightarrow p)$	$\nrightarrow^+, 1\text{–}2$

4. Diese Herleitung zeigt, dass $\vdash_{\mathsf{W0}} \neg(\neg p \rightarrow p)$.

1	$\quad \mid p$	
2	$\quad \mid \neg\neg p$	$\neg\neg^+, 1$
3	$\neg(p \rightarrow \neg p)$	$\nrightarrow^+, 1\text{–}2$

5a. Diese Herleitung zeigt, dass $\neg(p \to q) \vdash_{\mathsf{W0}} (p \to \neg q)$.

1	$\neg(p \to q)$	
2	$\quad p$	
3	$\quad \neg q$	$\not\to^-, 1, 2$
4	$(p \to \neg q)$	$\to^+, 2\text{–}3$

5b. Diese Herleitung zeigt, dass $(p \to \neg q) \vdash_{\mathsf{W0}} \neg(p \to q)$.

1	$(p \to \neg q)$	
2	$\quad p$	
3	$\quad \neg q$	$\to^-, 1, 2$
4	$\neg(p \to q)$	$\not\to^+, 2\text{–}3$

6a. Diese Herleitung zeigt, dass $\neg(p \to \neg q) \vdash_{\mathsf{W0}} (p \to q)$.

1	$\neg(p \to \neg q)$	
2	$\quad p$	
3	$\quad \neg\neg q$	$\not\to^-, 1, 2$
4	$\quad q$	$\neg\neg^-, 3$
5	$(p \to q)$	$\to^+, 2\text{–}4$

6b. Diese Herleitung zeigt, dass $(p \to q) \vdash_{\mathsf{W0}} \neg(p \to \neg q)$.

1	$(p \to q)$	
2	$\quad p$	
3	$\quad q$	$\to^-, 1, 2$
4	$\quad \neg\neg q$	$\neg\neg^+, 3$
5	$\neg(p \to \neg q)$	$\not\to^+, 2\text{–}4$

7a. Diese Herleitung zeigt, dass $(\neg\neg p \to q) \vdash_{\mathsf{W0}} (p \to \neg\neg q)$.

1	$(\neg\neg p \to q)$	
2	$\quad p$	
3	$\quad \neg\neg p$	$\neg\neg^{+}, 2$
4	$\quad q$	$\to^{-}, 1, 3$
5	$\quad \neg\neg q$	$\neg\neg^{+}, 4$
6	$(p \to \neg\neg q)$	$\to^{+}, 2\text{–}5$

7b. Diese Herleitung zeigt, dass $(p \to \neg\neg q) \vdash_{\mathsf{W0}} (\neg\neg p \to q)$.

1	$(p \to \neg\neg q)$	
2	$\quad \neg\neg p$	
3	$\quad p$	$\neg\neg^{-}, 2$
4	$\quad \neg\neg q$	$\to^{-}, 1, 3$
5	$\quad q$	$\neg\neg^{-}, 4$
6	$(\neg\neg p \to q)$	$\to^{+}, 2\text{–}5$

8a. Diese Herleitung zeigt, dass $(p \to q) \vdash_{\mathsf{W0}} \neg(p \to \neg q)$.

1	$(p \to q)$	
2	$\quad p$	
3	$\quad q$	$\to^{-}, 1, 2$
4	$\quad \neg\neg q$	$\neg\neg^{+}, 3$
5	$\neg(p \to \neg q)$	$\nrightarrow^{+}, 2\text{–}4$

8b. Diese Herleitung zeigt, dass $\neg(p \to \neg q) \vdash_{\mathsf{W0}} (p \to q)$.

1	$\neg(p \to \neg q)$	
2	$\quad p$	
3	$\quad \neg\neg q$	$\nrightarrow^{-}, 1, 2$
4	$\quad q$	$\neg\neg^{-}, 3$
5	$(p \to q)$	$\to^{+}, 2\text{–}4$

9a. Diese Herleitung zeigt, dass $(p \to \neg q) \vdash_{\mathsf{W0}} \neg(p \to q)$.

1	$(p \to \neg q)$	
2	$\quad p$	
3	$\quad \neg q$	$\to^-, 1, 2$
4	$\neg(p \to q)$	$\not\to^+, 2\text{–}3$

9b. Diese Herleitung zeigt, dass $\neg(p \to q) \vdash_{\mathsf{W0}} (p \to \neg q)$.

1	$\neg(p \to q)$	
2	$\quad p$	
3	$\quad \neg q$	$\not\to^-, 1, 2$
4	$(p \to \neg q)$	$\to^+, 2\text{–}3$

10a. Diese Herleitung zeigt, dass $\neg(p \to (q \to r)) \vdash_{\mathsf{W0}} (p \to (q \to \neg r))$.

1	$\neg(p \to (q \to r))$	
2	$\quad p$	
3	$\quad \neg(q \to r)$	$\not\to^-, 1, 2$
4	$\quad\quad q$	
5	$\quad\quad \neg r$	$\not\to^-, 3, 4$
6	$\quad (q \to \neg r)$	$\to^-, 4\text{–}5$
7	$(p \to (q \to \neg r))$	$\to^+, 2\text{–}6$

10b. Diese Herleitung zeigt, dass $(p \to (q \to \neg r)) \vdash_{\mathsf{W0}} \neg(p \to (q \to r))$.

1	$(p \to (q \to \neg r))$	
2	$\quad p$	
3	$\quad (q \to \neg r)$	$\to^-, 1, 2$
4	$\quad\quad q$	
5	$\quad\quad \neg r$	$\to^-, 3, 4$
6	$\quad \neg(q \to r)$	$\not\to^+, 4\text{–}5$
7	$\neg(p \to (q \to r))$	$\not\to^+, 2\text{–}6$

11a. Diese Herleitung zeigt, dass $\neg(p \to (q \vee r)) \vdash_{\mathsf{W0}} (p \to (\neg q \wedge \neg r))$.

1	$\neg(p \to (q \vee r))$	
2	$\quad p$	
3	$\quad \neg(q \vee r)$	$\not\to^-, 1, 2$
4	$\quad (\neg q \wedge \neg r)$	$\mathsf{DM}_1^+, 3, 4$
5	$(p \to (\neg q \wedge \neg r))$	$\to^+, 2\text{–}4$

11b. Diese Herleitung zeigt, dass $(p \to (\neg q \wedge \neg r)) \vdash_{\mathsf{W0}} \neg(p \to (q \vee r))$.

1	$(p \to (\neg q \wedge \neg r))$	
2	$\quad p$	
3	$\quad (\neg q \wedge \neg r)$	$\to^-, 1, 2$
4	$\quad \neg(q \vee r)$	$\mathsf{DM}_1^-, 3$
5	$\neg(p \to (q \vee r))$	$\not\to^+, 2\text{–}4$

12. Diese Herleitung zeigt, dass $(p \to \neg q), (p \to \neg r) \vdash_{\mathsf{W0}} \neg(p \to (q \vee r))$.

1	$(p \to \neg q)$	
2	$(p \to \neg r)$	
3	$\quad p$	
4	$\quad \neg q$	$\to^-, 1, 3$
5	$\quad \neg r$	$\to^-, 2, 3$
6	$\quad (\neg q \wedge \neg r)$	$\wedge^+, 4, 5$
7	$\quad \neg(q \vee r)$	$\mathsf{DM}_1^+, 7, 4$
8	$\neg(p \to (q \vee r))$	$\not\to^+, 3\text{–}6$

13. Diese Herleitung zeigt, dass $\neg(p \to r), \neg(q \to r) \vdash_{\mathsf{W0}} ((p \vee q) \to \neg r)$.

1	$\neg(p \to r)$	
2	$\neg(q \to r)$	
3	$\quad (p \vee q)$	
4	$\quad\quad p$	
5	$\quad\quad \neg r$	$\nrightarrow^{-}, 1, 4$
6	$\quad\quad q$	
7	$\quad\quad \neg r$	$\nrightarrow^{-}, 2, 4$
8	$\quad \neg q$	$\vee^{-}, 4\text{–}5, 6\text{–}7$
9	$((p \vee q) \to \neg r)$	$\to^{+}, 3\text{–}8$

14. Diese Herleitung zeigt, dass $\vdash_{\mathsf{W0}} ((p \wedge \neg p) \to p) \wedge \neg((p \wedge \neg p) \to p)$.

1	$\quad (p \wedge \neg p)$	
2	$\quad p$	$\wedge_1^{-}, 1$
3	$\quad \neg p$	$\wedge_2^{-}, 1$
4	$((p \wedge \neg p) \to p)$	$\to^{+}, 1\text{–}2$
5	$\neg((p \wedge \neg p) \to p)$	$\nrightarrow^{+}, 1\text{–}3$
6	$((p \wedge \neg p) \to p) \wedge \neg((p \wedge \neg p) \to p)$	$\wedge^{+}, 4, 5$

9 Art der Definition

Zunächst können wir zwischen Systemen unterscheiden, deren Sprachen (d. h. Mengen von Formeln) **rekursiv definiert** sind, und solchen, deren Sprachen **explizit definiert** sind.

Diese Unterscheidung ist nicht üblich, da formale Sprachen, die in der Logik verwendet werden, normalerweise rekursiv definiert sind.

Wie wir jedoch zuvor gesehen haben, lässt sich die formale Sprache des aristotelischen Syllogismus als endliche Menge kategorialer Aussagen definieren. Es handelt sich also im Grunde genommen um syllogistische Sprachen im Gegensatz zu modernen logischen Sprachen.

Nichtstandardmäßige logische Symbole 10

Betrachten wir nun einige nichtstandardmäßige logische Symbole. Darunter verstehen wir Symbole, die in formalen Sprachen der Logik verwendet werden, jedoch nicht zu den Standardsprachen gehören.

10.1 Konstanten für Wahrheitswerte

Einige Sprachen enthalten Konstanten für Wahrheitswerte. So ist es keineswegs ungewöhnlich, dass formale Sprachen ‚**1**' als aussagenlogische Konstante zur Repräsentation der *Wahrheit* und ‚**0**' zur Repräsentation der *Falschheit* enthalten.

Wir können eine solche Erweiterung S von $\mathsf{S0}$ wie folgt definieren:

Vorläufig 10.1 (Formeln mit Wahrheitswertkonstanten)**.** Die Menge $\mathbf{Fo}_{\mathsf{S}}$ wird rekursiv wie folgt definiert:

1. $\mathsf{p} \in \mathbf{Non}_{\mathsf{S}} \cup \{\text{‚}\mathbf{0}\text{'}, \text{‚}\mathbf{1}\text{'}\} \Rightarrow \mathsf{p} \in \mathbf{X}$.
2. $\mathsf{p} \in \mathbf{X} \Rightarrow \ulcorner\neg\mathsf{p}\urcorner \in \mathbf{X}$.
3. $\mathsf{p}, \mathsf{q} \in \mathbf{X} \Rightarrow \ulcorner(\mathsf{p} \vee \mathsf{q})\urcorner, \ulcorner(\mathsf{p} \wedge \mathsf{q})\urcorner, \ulcorner(\mathsf{p} \rightarrow \mathsf{q})\urcorner, \ulcorner(\mathsf{p} \leftrightarrow \mathsf{q})\urcorner \in \mathbf{X}$.
4. $\mathbf{Fo}_{\mathsf{S}}$ ist der Durchschnitt aller Mengen $\mathbf{X}$, welche 1–3 erfüllen.

Wir können ‚$\mathbf{Fo}_{\mathsf{S}}$' auch kürzer mithilfe von ‚$\overset{\text{DF}}{=}$' definieren.

Definition 10.2 (Formeln mit Wahrheitswertkonstanten)**.**

$$\begin{aligned}\mathbf{Fo}_{\mathsf{S}} \overset{\text{DF}}{=} \mathbf{Non}_{\mathsf{S}} \cup \{\text{‚}\mathbf{0}\text{'}, \text{‚}\mathbf{1}\text{'}\} \cup \\ \{\ulcorner\bullet\mathsf{p}\urcorner : \mathsf{p} \in \mathbf{Fo}_{\mathsf{S}} \bigwedge \bullet \in \text{‚}\neg\text{'}, \text{‚}\Box\text{'}, \text{‚}\Diamond\text{'}\} \cup \\ \{\ulcorner(\mathsf{p} \heartsuit \mathsf{q})\urcorner : \mathsf{p}, \mathsf{q} \in \mathbf{Fo}_{\mathsf{S}} \bigwedge \heartsuit \in \mathbf{Con}\}.\end{aligned}$$

Die Bedeutung eines Ausdrucks, der derartige logische Symbole enthält, lässt sich nur schwer in die natürliche Sprache übertragen. Die folgenden Beispiele veranschaulichen dies; zwei davon sind in einer Sprache formuliert, die sich von der in Definition 10.2 definierten unterscheidet.

1. Falls p, dann das Wahre.
   Repräsentation: ‚$(p \rightarrow \mathbf{1})$'.
2. Falls das Falsche, dann singe ich wie Freddie Mercury.
   Repr.: ‚$(\mathbf{0} \rightarrow q)$'.

3. Falls jede Aussage wahr ist, dann ist jede Aussage falsch.
   Repr. 1: ‚$((p \leftrightarrow \mathbf{0}) \rightarrow (p \leftrightarrow \mathbf{1}))$‘.
   Repr. 2: ‚$\forall p\,(p = \mathbf{0} \rightarrow p = \mathbf{1})$‘.
   Repr. 3: ‚$(\forall p\,(p = \mathbf{0}) \rightarrow \forall p\,(p = \mathbf{1}))$‘.

Dasselbe Verfahren lässt sich auch auf beliebige andere Wahrheitswerte anwenden, die beim Aufbau einer Interpretation für ein logisches System verwendet werden.

10.2 Modale Operatoren

Die Modallogik ist heute eine Standarderweiterung der klassischen Logik und stellt formale Werkzeuge bereit, um über Begriffe wie Notwendigkeit, Möglichkeit, Wissen, Zeit, Verpflichtung und Ort zu schließen.

Es gibt eine große Vielfalt modaler Systeme, die jeweils durch unterschiedliche Anwendungen motiviert sind und häufig verschiedene Symbolsysteme verwenden. Im Folgenden geben wir einen nicht erschöpfenden Überblick über einige der gebräuchlichsten modalen Operatoren und ihre beabsichtigten Lesarten.

10.2.1 Alethische Modalität

In modalen Sprachen können wir von Möglichkeiten, Kontingenzen, Notwendigkeiten, Unmöglichkeiten und Ähnlichem sprechen. Üblicherweise verwenden wir ‚$\Box$‘ zur Repräsentation von Notwendigkeit und ‚$\Diamond$‘ zur Repräsentation von Möglichkeit. Eine modale formale Sprache nullter Stufe $\mathbf{Fo_S}$ kann wie folgt konstruiert werden.

Vorläufig 10.3 (Formeln der aussagenlogischen Modallogik)**.** Die Menge $\mathbf{Fo_S}$ wird rekursiv wie folgt definiert:

1. $\mathtt{p} \in \mathbf{Non_S} \Rightarrow \mathtt{p} \in \mathbf{X}$.
2. $\mathtt{p} \in \mathbf{X} \Rightarrow \ulcorner\neg\mathtt{p}\urcorner, \ulcorner\Box\mathtt{p}\urcorner, \ulcorner\Diamond\mathtt{p}\urcorner \in \mathbf{X}$.
3. $\mathtt{p}, \mathtt{q} \in \mathbf{X} \Rightarrow \ulcorner(\mathtt{p} \vee \mathtt{q})\urcorner, \ulcorner(\mathtt{p} \wedge \mathtt{q})\urcorner, \ulcorner(\mathtt{p} \rightarrow \mathtt{q})\urcorner, \ulcorner(\mathtt{p} \leftrightarrow \mathtt{q})\urcorner \in \mathbf{X}$.
4. $\mathbf{Fo_S}$ ist der Durchschnitt aller Mengen $\mathbf{X}$, welche 1–3 erfüllen.

Wir können ‚$\mathbf{Fo_S}$‘ auch kürzer mithilfe von ‚$\overset{\text{DF}}{=}$‘ definieren.

Definition 10.4 (Formeln der aussagenlogischen Modallogik)**.**

$$\begin{aligned}\mathbf{Fo_S} \overset{\text{DF}}{=} \mathbf{Non_S} \cup\ & \\ & \{\ulcorner\bullet\mathtt{p}\urcorner : \mathtt{p} \in \mathbf{Fo_S} \bigwedge\!\!\!\bigwedge \bullet \in \text{‚}\neg\text{‘}, \text{‚}\Box\text{‘}, \text{‚}\Diamond\text{‘}\} \cup \\ & \{\ulcorner(\mathtt{p} \heartsuit \mathtt{q})\urcorner : \mathtt{p}, \mathtt{q} \in \mathbf{Fo_S} \bigwedge\!\!\!\bigwedge \heartsuit \in \mathbf{Con}\}.\end{aligned}$$

Tabelle 10.1: Alethische modale Formeln und ihre natürlichsprachlichen Interpretationen.

Typ	Formel	Natürlichsprachlicher Satz
Notwendigkeit	$\Box p$	Es ist notwendig, dass Peirce Logiker ist. Es gilt notwendigerweise, dass Peirce Logiker ist. In allen möglichen Welten ist Peirce Logiker.
Möglichkeit	$\Diamond p$	Es ist möglich, dass Peirce Logiker ist. Möglicherweise ist Peirce Logiker. In mindestens einer möglichen Welt ist Peirce Logiker.
Unmöglichkeit	$\neg\Diamond p$	Es ist nicht möglich, dass Peirce Logiker ist. Es ist unmöglich, dass Peirce Logiker ist.
Kontingenz	$(\Diamond p \wedge \Diamond\neg p)$	Es ist kontingent, dass Peirce Logiker ist.

Die informelle Bedeutung der gebräuchlichen modalen Ausdrücke wird in Table 10.1 zusammengefasst.

Aufgabe 10.1. Formalisieren Sie die folgenden modalen Ausdrücke.

1. Notwendigerweise regnet es oder es regnet nicht.
2. Entweder regnet es notwendigerweise oder es regnet notwendigerweise nicht.
3. Es ist notwendig, dass, wenn Sie Junggeselle sind, dann sind Sie unverheiratet.
4. Wenn Sie notwendigerweise ein Mensch sind, dann sind Sie möglicherweise ein Tier.

Lösung zu Aufgabe 10.1.

1. Notwendigerweise regnet es jetzt oder es regnet jetzt nicht.

   Repr.: ‚$\Box(r \vee \neg r)$'.
2. Entweder regnet es notwendigerweise oder es regnet notwendigerweise nicht.

   Repr.: ‚$(\Box r \vee \Box\neg r)$'.
3. Es ist notwendig, dass wenn Sie Junggeselle sind, dann sind Sie unverheiratet.

   Repr.: ‚$\Box(p \rightarrow q)$'.
4. Wenn Sie notwendigerweise ein Mensch sind, dann sind Sie möglicherweise ein Tier.

   Repr.: ‚$(\Box p \rightarrow \Diamond q)$'.

Es ist wichtig zu beachten, dass ‚$\Box$' und ‚$\Diamond$' auch in nicht-alethischen modalen Bedeutungen verwendet werden können, darunter epistemische, deontische und temporale Lesarten (siehe unten).

10.2.2 Epistemische Modalität

Epistemische Ausdrücke dienen dazu auszudrücken, dass ein bestimmter Akteur etwas weiß, glaubt oder eine andere epistemische Einstellung gegenüber einer Aussage einnimmt.

Eine epistemische Sprache kann einen epistemischen Modaloperator ‚K' verwenden, sodass eine modale epistemische Sprache nullter Stufe $\mathbf{Fo}_S$ wie folgt konstruiert werden kann.

Vorläufig 10.5 (Formeln der aussagenlogischen epistemischen Logik)**.** Die Menge $\mathbf{Fo}_S$ wird rekursiv wie folgt definiert:

1. $p \in \mathbf{Non}_S \Rightarrow p \in \mathbf{X}$.
2. $p \in \mathbf{X} \Rightarrow \ulcorner\neg p\urcorner, \ulcorner Kp\urcorner \in \mathbf{X}$.
3. $p, q \in \mathbf{X} \Rightarrow \ulcorner(p \vee q)\urcorner, \ulcorner(p \wedge q)\urcorner, \ulcorner(p \rightarrow q)\urcorner, \ulcorner(p \leftrightarrow q)\urcorner \in \mathbf{X}$.
4. $\mathbf{Fo}_S$ ist der Durchschnitt aller Mengen $\mathbf{X}$, welche 1–3 erfüllen.

Wir können ‚$\mathbf{Fo}_S$' wiederum kürzer mithilfe von ‚$\overset{\text{DF}}{=}$' definieren.

Definition 10.6 (Formeln der aussagenlogischen epistemischen Logik)**.**

$$\begin{aligned}\mathbf{Fo}_S \overset{\text{DF}}{=} \mathbf{Non}_S \cup & \\ & \{\ulcorner \bullet p\urcorner : p \in \mathbf{Fo}_S \mathbin{\wedge\!\!\!\wedge} \bullet \in \{,\neg', ,K'\}\} \cup \\ & \{\ulcorner(p \heartsuit q)\urcorner : p, q \in \mathbf{Fo}_S \mathbin{\wedge\!\!\!\wedge} \heartsuit \in \mathbf{Con}\}.\end{aligned}$$

Die informelle Bedeutung der gebräuchlichen epistemischen Ausdrücke wird in Table 10.2 zusammengefasst.

Aufgabe 10.2. Formalisieren Sie die folgenden epistemischen Ausdrücke.

1. Entweder wissen wir, dass es regnet, oder wir wissen nicht, dass es regnet.
2. Entweder wissen wir, dass es regnet, oder wir wissen, dass es nicht regnet.
3. Wir wissen, dass, falls bekannt ist, dass Gott existiert, dann hat das Leben einen göttlichen Ursprung.
4. Wir wissen, dass: falls bekannt ist, dass Gott existiert, dann wissen wir, dass das Leben einen göttlichen Ursprung hat.

Tabelle 10.2: Epistemische Formeln und ihre natürlichsprachlichen Interpretationen.

Typ	Formel	Natürlichsprachlicher Satz
Positives Wissen	$\mathsf{K}p$	Es ist bekannt, dass Peirce Logiker ist. Wir wissen, dass Peirce Logiker ist.
Negatives Wissen	$\mathsf{K}\neg p$	Es ist bekannt, dass Peirce kein Logiker ist. Wir wissen, dass Peirce kein Logiker ist.
Unwissenheit	$\neg\mathsf{K}p$	Es ist nicht bekannt, dass Peirce Logiker ist. Wir wissen nicht, ob Peirce Logiker ist (er mag einer sein oder auch nicht).

Lösung zu Aufgabe 10.2.

1. Entweder wissen wir, dass es regnet, oder wir wissen nicht, dass es regnet.

   Repr.: ‚$(\mathsf{K}r \vee \neg\mathsf{K}r)$'.

2. Entweder wissen wir, dass es regnet, oder wir wissen, dass es nicht regnet.

   Repr.: ‚$(\mathsf{K}r \vee \mathsf{K}\neg r)$'.

3. Wir wissen, dass, Falls bekannt ist, dass Gott existiert, dann hat das Leben einen göttlichen Ursprung.

   Repr.: ‚$\mathsf{K}(\mathsf{K}p \rightarrow q)$'.

4. Wir wissen, dass: falls bekannt ist, dass Gott existiert, dann wissen wir, dass das Leben einen göttlichen Ursprung hat.

   Repr.: ‚$\mathsf{K}(\mathsf{K}p \rightarrow \mathsf{K}q)$'.

Auch andere epistemische Einstellungen, etwa Glaube oder Für-wahrscheinlich-Halten, können mit ähnlichen Sprachen ausgedrückt werden.

Darüber hinaus können epistemische Operatoren indiziert werden, sodass beispielsweise ‚$\mathsf{K}_a p$' bedeutet, dass Akteur a weiß, dass p.

10.2.3 Deontische Modalität

Deontische Ausdrücke dienen dazu, Verpflichtungen oder Erlaubnisse in Bezug auf den durch eine Aussage beschriebenen Sachverhalt auszudrücken.

Eine deontische Sprache kann die deontischen Modaloperatoren ‚O', ‚P' verwenden, sodass eine modale deontische Sprache nullter Stufe $\mathbf{Fo}_S$ wie folgt konstruiert werden kann.

Vorläufig 10.7 (Formeln der aussagenlogischen deontischen Logik)**.** Die Menge $\mathbf{Fo}_S$ wird rekursiv wie folgt definiert:

1. $p \in \mathbf{Non}_S \Rightarrow p \in \mathbf{X}$.
2. $p \in \mathbf{X} \Rightarrow \ulcorner\neg p\urcorner, \ulcorner Op\urcorner, \ulcorner Pp\urcorner \in \mathbf{X}$.
3. $p, q \in \mathbf{X} \Rightarrow \ulcorner(p \vee q)\urcorner, \ulcorner(p \wedge q)\urcorner, \ulcorner(p \rightarrow q)\urcorner, \ulcorner(p \leftrightarrow q)\urcorner \in \mathbf{X}$.
4. $\mathbf{Fo}_S$ ist der Durchschnitt aller Mengen $\mathbf{X}$, welche 1–3 erfüllen.

Wir können ‚$\mathbf{Fo}_S$' wiederum kürzer mithilfe von ‚$\overset{\text{DF}}{=}$' definieren.

Definition 10.8 (Formeln der aussagenlogischen deontischen Logik)**.**

$$\begin{aligned}\mathbf{Fo}_S \overset{\text{DF}}{=} \mathbf{Non}_S \cup & \\ & \{\ulcorner \bullet p\urcorner : p \in \mathbf{Fo}_S \bigwedge \bullet \in \{\text{‚}\neg\text{'}, \text{‚O'}, \text{‚P'}\}\} \cup \\ & \{\ulcorner(p \heartsuit q)\urcorner : p, q \in \mathbf{Fo}_S \bigwedge \heartsuit \in \mathbf{Con}\}.\end{aligned}$$

Die informelle Bedeutung der gebräuchlichen deontischen Ausdrücke wird in Table 10.3 zusammengefasst.

Aufgabe 10.3. Formalisieren Sie die folgenden deontischen Ausdrücke.

1. Es ist erlaubt zu bleiben und es ist erlaubt, nicht zu bleiben.
2. Es ist verpflichtend, sowohl zu bleiben und nicht zu bleiben.
3. Falls es nicht verpflichtend ist zu bleiben, dann ist es erlaubt, nicht zu bleiben.
4. Es ist verpflichtend, dass es erlaubt ist, sowohl zu bleiben und zu bleiben.

Tabelle 10.3: Deontische Formeln und ihre natürlichsprachlichen Interpretationen.

Typ	Formel	Natürlichsprachlicher Satz
Verpflichtung	$\mathsf{O}p$	Es ist verpflichtend, dass die Tür offen ist.
		Es ist vorgeschrieben, dass die Tür offen ist.
	$\mathsf{O}\neg p$	Es ist verpflichtend, dass die Tür nicht offen ist.
	$\neg\mathsf{O}p$	Es ist nicht verpflichtend, dass die Tür offen ist.
Erlaubnis	$\mathsf{P}p$	Es ist erlaubt, dass die Tür offen ist.
	$\mathsf{P}\neg p$	Es ist erlaubt, dass die Tür nicht offen ist.
	$\neg\mathsf{P}p$	Es ist nicht erlaubt, dass die Tür offen ist.

Lösung zu Aufgabe 10.3.

1. Es ist erlaubt zu bleiben und es ist erlaubt, nicht zu bleiben.

   Repr.: ‚$(\mathsf{P}p \wedge \mathsf{P}\neg p)$‘.

2. Es ist verpflichtend, sowohl zu bleiben und nicht zu bleiben.

   Repr.: ‚$\mathsf{O}(p \wedge \neg p)$‘.

3. Falls es nicht verpflichtend ist zu bleiben, dann ist es erlaubt, nicht zu bleiben.

   Repr.: ‚$(\neg\mathsf{O}p \rightarrow \mathsf{P}\neg p)$‘.

4. Es ist verpflichtend, dass es erlaubt ist, sowohl zu bleiben und zu bleiben.

   Repr.: ‚$\mathsf{OP}(p \wedge \neg p)$‘.

10.2.4 Temporale Modalität

Temporale bzw. zeitbezogene Ausdrücke dienen dazu, Aussagen in Bezug auf Zeit auszudrücken.

Eine temporale bzw. zeitbezogene Sprache kann modale Zeitoperatoren ‚G', ‚H' verwenden, so dass eine modale nullter Stufe temporale Sprache $\mathbf{Fo}_S$ wie folgt konstruiert werden kann.

Vorläufig 10.9 (Formeln der aussagenlogischen Zeitlogik)**.** Die Menge $\mathbf{Fo}_S$ ist rekursiv wie folgt definiert:

1. $p \in \mathbf{Non}_S \Rightarrow p \in \mathbf{X}$.
2. $p \in \mathbf{X} \Rightarrow \ulcorner\neg p\urcorner, \ulcorner Gp\urcorner, \ulcorner Hp\urcorner \in \mathbf{X}$.
3. $p, q \in \mathbf{X} \Rightarrow \ulcorner(p \vee q)\urcorner, \ulcorner(p \wedge q)\urcorner, \ulcorner(p \rightarrow q)\urcorner, \ulcorner(p \leftrightarrow q)\urcorner \in \mathbf{X}$.
4. $\mathbf{Fo}_S$ ist der Schnitt aller Mengen $\mathbf{X}$, die 1–3 erfüllen.

Wir können ‚$\mathbf{Fo}_S$' kürzer mithilfe von ‚$\overset{\text{DF}}{=}$' definieren.

Definition 10.10 (Formeln der aussagenlogischen Zeitlogik)**.**

$$\begin{aligned}\mathbf{Fo}_S \overset{\text{DF}}{=} \mathbf{Non}_S \cup & \\ & \{\ulcorner \bullet p\urcorner : p \in \mathbf{Fo}_S \mathbin{\wedge\!\!\!\wedge} \bullet \in \{\neg, G, H\}\} \cup \\ & \{\ulcorner(p \heartsuit q)\urcorner : p, q \in \mathbf{Fo}_S \mathbin{\wedge\!\!\!\wedge} \heartsuit \in \mathbf{Con}\}.\end{aligned}$$

Die informelle Bedeutung der üblichen modalen Ausdrücke ist in Table 10.4 zusammengefasst.

Aufgabe 10.4. Formalisiere die folgenden temporalen Ausdrücke.

1. Peter war Deutscher und wird immer Deutscher sein.
2. Peter war Franzose, aber wird es nicht mehr sein.
3. Wenn du ein Komiker warst, wirst du immer ein Komiker sein.
4. Wenn George Franzose ist, dann wird er es immer sein.

Tabelle 10.4: Temporale Formeln und ihre Interpretationen in natürlicher Sprache.

Typ	Formel	Natürlicher Sprachsatz
Zukunft	$\mathsf{G}p$	Es wird immer der Fall sein, dass die Tür offen ist.
	$\neg\mathsf{G}\neg p$	Es ist nicht immer der Fall, dass die Tür nicht offen ist.
		Es wird der Fall sein, dass die Tür offen ist.
Vergangenheit	$\mathsf{H}p$	Es war immer der Fall, dass die Tür offen ist.
	$\neg\mathsf{H}\neg p$	Es war nicht immer der Fall, dass die Tür nicht offen ist.
		Es war der Fall, dass die Tür offen ist.

Lösung zu Aufgabe 10.4.

1. Peter war Deutscher und wird immer Deutscher sein.

   Repr.: ‚$(\neg\mathsf{H}\neg p \wedge \mathsf{G}p)$'.

2. Peter war Franzose, aber wird es nicht mehr sein.

   Repr.: ‚$(\neg\mathsf{H}\neg p \wedge \mathsf{G}\neg p)$'.

3. Wenn du immer ein Komiker warst, wirst du ein Komiker sein.

   Repr.: ‚$(\mathsf{H}p \rightarrow \neg\mathsf{G}\neg p)$'.

4. Wenn George Franzose ist, dann wird er es immer sein.

   Repr.: ‚$(p \rightarrow \mathsf{G}p)$'.

10.2.5 Bemerkung

Ein gegebener modaler Operator kann je nach zugrunde liegendem logischen Rahmen unterschiedliche semantische Interpretationen erhalten (z. B. Kripke-Semantik, Nachbarschaftssemantik, topologische Semantik), und verschiedene modale Logiken können unterschiedliche Prinzipien validieren.

Folglich sollten modale Operatoren stets relativ zu dem spezifischen System und der jeweiligen Anwendung verstanden werden.

10.3 Termbildende Symbole

In diese Kategorie fallen mehrere Symbole. Im Folgenden werden die gebräuchlichsten Beispiele vorgestellt.

10.3.1 Der definite Deskriptor

Eine bestimmte oder definite Kennzeichnung (‚*definite description*' auf English) ist ein Ausdruck, dessen intendierter Referent dasjenige eindeutige Individuum ist, das eine bestimmte Eigenschaft erfüllt. Wir führen dies im Kontext einer Prädikatenlogik erster Stufe ein und bilden singuläre Terme mit ‚ι' der Form $\ulcorner \iota \mathtt{x} \mathtt{F} \urcorner$.

Für unsere Vokabulare verwenden wir diejenigen von $\mathsf{S1}$. Damit kann eine Sprache erster Stufe $\mathbf{Fo}_{\mathsf{S}}$ mit einem definiten Kennzeichnungsoperator (oder ι-Operator) mittels ‚ι' wie folgt konstruiert werden.

Vorläufig 10.11 (Formeln mit definiten Kennzeichnungsoperatoren)**.** Wobei $\mathtt{n} \in \mathbf{Num}_{\mathbb{W}}$, ist die Menge $\mathbf{Fo}_{\mathsf{S}}$ rekursiv wie folgt definiert:

1. $\mathtt{t} \in \mathbf{ICon}_{\mathsf{S1}} \cup \mathbf{IVar}_{\mathsf{S1}} \Rightarrow \mathtt{t} \in \mathbf{Ter}_{\mathsf{S}}$.
2. $\mathtt{F} \in \mathbf{X} \Rightarrow \ulcorner \neg \mathtt{F} \urcorner \in \mathbf{X}$.
3. $\mathtt{F}, \mathtt{G} \in \mathbf{X} \Rightarrow \ulcorner (\mathtt{F} \vee \mathtt{G}) \urcorner, \ulcorner (\mathtt{F} \wedge \mathtt{G}) \urcorner, \ulcorner (\mathtt{F} \rightarrow \mathtt{G}) \urcorner, \ulcorner (\mathtt{F} \leftrightarrow \mathtt{G}) \urcorner \in \mathbf{X}$.
4. $\mathtt{F} \in \mathbf{X} \bigwedge \mathtt{x} \in \mathbf{IVar}_{\mathsf{S1}} \Rightarrow \ulcorner \iota \mathtt{x} \mathtt{F} \urcorner \in \mathbf{Ter}_{\mathsf{S}}$.
5. $\mathtt{P} \in \mathbf{Pre}_{\mathtt{n}} \bigwedge \mathtt{t}_1, \ldots, \mathtt{t}_n \in \mathbf{Ter}_{\mathsf{S}} \Rightarrow \mathtt{P}\mathtt{t}_1 \ldots \mathtt{t}_n \in \mathbf{X} : n \in \mathbb{N}$.
6. $\mathtt{F} \in \mathbf{X} \bigwedge \mathtt{x} \in \mathbf{IVar}_{\mathsf{S1}} \Rightarrow \ulcorner \exists \mathtt{x}\, \mathtt{F} \urcorner, \ulcorner \forall \mathtt{x}\, \mathtt{F} \urcorner \in \mathbf{X}$.
7. $\mathbf{Fo}_{\mathsf{S}}$ ist der Schnitt aller Mengen $\mathbf{X}$, die 1–6 erfüllen.

Wie bei ‚$\mathbf{Fo}_{\mathsf{S0}}$' könnten wir ‚$\mathbf{Fo}_{\mathsf{S}}$' mithilfe von ‚$\overset{\text{DF}}{=}$' kürzer definieren.

Definition 10.12 (Formeln mit definiten Kennzeichnungsoperatoren)**.**

$$\begin{aligned}
\mathbf{Ter}_{\mathsf{S}} &\overset{\text{DF}}{=} \mathbf{ICon}_{\mathsf{S1}} \cup \mathbf{IVar}_{\mathsf{S1}} \cup \{\ulcorner \iota \mathtt{x} \mathtt{F} \urcorner : \mathtt{F} \in \mathbf{Fo}_{\mathsf{S}} \bigwedge \mathtt{x} \in \mathbf{IVar}_{\mathsf{S1}}\} \\
\mathbf{Fo}_{\mathsf{S}} &\overset{\text{DF}}{=} \{\mathtt{P}\mathtt{t}_1 \ldots \mathtt{t}_n : \mathtt{P} \in \mathbf{Pre}_{\mathsf{S}}[\mathtt{n}] \bigwedge \mathtt{t}_1 \ldots \mathtt{t}_n \in \mathbf{Ter}_{\mathsf{S}}\} \cup \\
&\quad \{\ulcorner \neg \mathtt{F} \urcorner : \mathtt{F} \in \mathbf{Fo}_{\mathsf{S}}\} \cup \\
&\quad \{\ulcorner (\mathtt{F} \heartsuit \mathtt{G}) \urcorner : \mathtt{F}, \mathtt{G} \in \mathbf{Fo}_{\mathsf{S}} \bigwedge \heartsuit \in \mathbf{Con}_{\mathsf{S1}}[2]\} \cup \\
&\quad \{\clubsuit \mathtt{x} \mathtt{F} : \clubsuit \in \mathbf{Qua}_{\mathsf{S1}} \bigwedge \mathtt{x} \in \mathbf{IVar}_{\mathsf{S1}} \bigwedge \mathtt{F} \in \mathbf{Fo}_{\mathsf{S}}\} \\
&\quad : n \in \mathbb{N}
\end{aligned}$$

Ein Ausdruck wie ‚$\iota x A(x)$' bezeichnet das eindeutige x, für das ‚$A(x)$'. Dieser Ausdruck ist jedoch keine Formel: er kann nicht als wahr oder falsch interpretiert werden.

Aufgabe 10.5. Gib natürliche Sprachäußerungen an, die die Struktur der folgenden Formeln mit definiten Deskriptoren haben:

1. ‚$Q^1 \iota x P x$'. **Regimentiert:** ‚$Q^1(\iota x P(x))$'.
2. ‚$R^2 \iota x P^2 x a b$'. **Regimentiert:** ‚$R^2(\iota x P^2(x, a), b)$'.
3. ‚$\neg P^1 \iota x S^2 x b$'. **Regimentiert:** ‚$\neg P^1(\iota x S^2(x, b))$'.
4. ‚$R^2 a \iota x P^1 x$'. **Regimentiert:** ‚$R^2(a, \iota x P^1(x))$'.

Lösung zu Aufgabe 10.5.

1. ‚$Q^1 \iota x P x$'. **Regimentiert:** ‚$Q^1(\iota x P(x))$'.

   Natürlicher Sprachsatz:

   Der König von Frankreich ist kahl.
2. ‚$R^2 \iota x P^2 x a b$'. **Regimentiert:** ‚$R^2(\iota x P^2(x, a), b)$'.

   Natürlicher Sprachsatz:

   Der Herausgeber von *Mind* hat den Artikel abgelehnt.
3. ‚$\neg P^1 \iota x S^2 x b$'. **Regimentiert:** ‚$\neg P^1(\iota x S^2(x, b))$'.

   Natürlicher Sprachsatz:

   Berthas einzige Schwester ist nicht preußisch.
4. ‚$R^2 a \iota x P^1 x$'. **Regimentiert:** ‚$R^2(a, \iota x P^1(x))$'.

   Natürlicher Sprachsatz:

   Ana liebt den Autor von *Hamlet*.

10.3.2 Der indefinite Deskriptor

[Nicht klausurrelevant]

10.3.3 Der Lambda-Operator

Der Lambda-Operator ‚λ' ist ein Operator zur Bildung komplexer Prädikatsausdrücke aus Formeln. Intuitiv bilden die Operatoren ‚ι' und ‚ε' singuläre Terme, die Objekte bezeichnen sollen, während der Lambda-Operator ‚λ' Prädikatsterme bildet, die Eigenschaften oder Relationen bezeichnen.

Wir führen ihn in Form von Ausdrücken $\ulcorner\lambda \mathtt{x}\mathtt{F}\urcorner$ ein. Solche Ausdrücke werden als Prädikatsausdrücke behandelt, die wie gewöhnliche Prädikate auf Terme angewendet werden können.

Wie zuvor arbeiten wir im Vokabular von $\mathsf{S1}$. Damit erweitern wir die Sprache $\mathbf{Fo}_{\mathsf{S1}}$ zu einer Sprache $\mathbf{Fo}_{\mathsf{S}}$ mit dem Lambda-Operator wie folgt.

Vorläufig 10.13 (Formeln mit dem Lambda-Operator)**.** Wobei $\mathtt{n} \in \mathbf{Num}_{\mathbb{W}}$ gilt, ist die Menge $\mathbf{Fo}_{\mathsf{S1}}$ rekursiv wie folgt definiert:

1. $\mathtt{P} \in (\mathbf{Pre}_{\mathtt{n}} \cup \mathbf{Abs}_{\mathtt{n}}) \bigwedge \mathtt{t}_1, \ldots, \mathtt{t}_n \in \mathbf{ITer}_{\mathsf{S1}} \Rightarrow \mathtt{P}\mathtt{t}_1 \ldots \mathtt{t}_n \in \mathbf{X}$ $: n \in \mathbb{N}$.
2. $\mathtt{F} \in \mathbf{X} \Rightarrow \ulcorner\neg\mathtt{F}\urcorner \in \mathbf{X}$.
3. $\mathtt{F}, \mathtt{G} \in \mathbf{X} \Rightarrow \ulcorner(\mathtt{F} \vee \mathtt{G})\urcorner, \ulcorner(\mathtt{F} \wedge \mathtt{G})\urcorner, \ulcorner(\mathtt{F} \rightarrow \mathtt{G})\urcorner, \ulcorner(\mathtt{F} \leftrightarrow \mathtt{G})\urcorner \in \mathbf{X}$.
4. $\mathtt{F} \in \mathbf{X} \bigwedge \mathtt{x}_1, \ldots, \mathtt{x}_n \in \mathbf{IVar}_{\mathsf{S1}} \Rightarrow \ulcorner\lambda \mathtt{x}_1 \ldots \mathtt{x}_n \mathtt{F}\urcorner \in \mathbf{Abs}_{\mathtt{n}}$.
5. $\mathtt{F} \in \mathbf{X} \bigwedge \mathtt{x} \in \mathbf{IVar}_{\mathsf{S1}} \Rightarrow \ulcorner\exists \mathtt{x}\, \mathtt{F}\urcorner, \ulcorner\forall \mathtt{x}\, \mathtt{F}\urcorner \in \mathbf{X}$.
6. $\mathbf{Fo}_{\mathsf{S1}}$ ist der Schnitt aller Mengen $\mathbf{X}$, die 1–5 erfüllen.

Wie bei ι- und ε-Ausdrücken kann man auch hier eine kompaktere Definition angeben.

Definition 10.14 (Formeln mit dem Lambda-Operator)**.**

$$\begin{aligned}
\mathbf{Abs}_{\mathtt{n}} &\overset{\text{DF}}{=} \{\ulcorner\lambda \mathtt{x}_1 \ldots \mathtt{x}_n \mathtt{F}\urcorner : \mathtt{F} \in \mathbf{X} \bigwedge \mathtt{x}_1, \ldots, \mathtt{x}_n \in \mathbf{IVar}_{\mathsf{S1}}\} \\
\mathbf{Fo}_{\mathsf{S}} &\overset{\text{DF}}{=} \{\mathtt{P}\mathtt{t}_1 \ldots \mathtt{t}_n : \mathtt{P} \in (\mathbf{Pre}_{\mathtt{n}} \cup \mathbf{Abs}_{\mathtt{n}}) \bigwedge \mathtt{t}_1 \ldots \mathtt{t}_n \in \mathbf{ITer}_{\mathsf{S1}}\} \cup \\
&\quad \{\ulcorner\neg\mathtt{F}\urcorner : \mathtt{F} \in \mathbf{Fo}_{\mathsf{S}}\} \cup \\
&\quad \{\ulcorner(\mathtt{F} \heartsuit \mathtt{G})\urcorner : \mathtt{F}, \mathtt{G} \in \mathbf{Fo}_{\mathsf{S}} \bigwedge \heartsuit \in \mathbf{Con}_{\mathsf{S1}}[2]\} \cup \\
&\quad \{\clubsuit \mathtt{x}\mathtt{F} : \clubsuit \in \mathbf{Qua}_{\mathsf{S1}} \bigwedge \mathtt{x} \in \mathbf{IVar}_{\mathsf{S1}} \bigwedge \mathtt{F} \in \mathbf{Fo}_{\mathsf{S}}\} : n \in \mathbb{N}
\end{aligned}$$

Ein Lambda-Abstrakt ist ein Ausdruck der Form $\ulcorner\lambda \mathtt{x}\mathtt{F}\urcorner$, der die Eigenschaft bezeichnet, ein $\mathtt{x}$ zu sein, so dass $\mathtt{F}$ gilt.

Aufgabe 10.6. Gib natürliche Sprachäußerungen an, die die Form der folgenden Lambda-Abstrakten haben:

1. ‚$\lambda x P^1 x$'. **Regimentiert:** ‚$\lambda x P^1(x)$'.
2. ‚$\lambda x \neg P^1 x$'. **Regimentiert:** ‚$\lambda x \neg P^1(x)$'.
3. ‚$\lambda x Q^2 x a$'. **Regimentiert:** ‚$\lambda x Q^2(x, a)$'.
4. ‚$\lambda x Q^2 a x$'. **Regimentiert:** ‚$\lambda x Q^2(a, x)$'.
5. ‚$\lambda x (P^1 x \wedge Q^1 x)$'. **Regimentiert:** ‚$\lambda x (P^1(x) \wedge Q^1(x))$'.

Lösung zu Aufgabe 10.6.

1. ‚$\lambda x P^1 x$'. **Regimentiert:** ‚$\lambda x P^1(x)$'.

   Natürlicher Sprachsatz:

   Die Eigenschaft, Präsident zu sein.
2. ‚$\lambda x \neg P^1 x$'. **Regimentiert:** ‚$\lambda x \neg P^1(x)$'.

   Natürlicher Sprachsatz:

   Die Eigenschaft, kein Präsident zu sein.
3. ‚$\lambda x Q^2 x a$'. **Regimentiert:** ‚$\lambda x Q^2(x, a)$'.

   Natürlicher Sprachsatz:

   Die Eigenschaft, Andrew zu lieben.
4. ‚$\lambda x Q^2 a x$'. **Regimentiert:** ‚$\lambda x Q^2(a, x)$'.

   Natürlicher Sprachsatz:

   Die Eigenschaft, von Andrew geliebt zu werden.
5. ‚$\lambda x (P^1 x \wedge Q^1 x)$'. **Regimentiert:** ‚$\lambda x (P^1(x) \wedge Q^1(x))$'.

   Natürlicher Sprachsatz:

   Die Eigenschaft, sowohl Philosoph als auch Mathematiker zu sein.

Aufgabe 10.7. Formalisiere die folgenden natürlichen Sprachäußerungen mithilfe der entsprechenden Lambda-Abstrakten aus Aufgabe 10.6:

1. Andrew ist Präsident.
2. Andrew ist kein Präsident.
3. Bertha liebt Andrew.
4. Andrew liebt Bertha.
5. Bertha ist Philosophin und Mathematikerin.

Lösung zu Aufgabe 10.7.

1. Andrew ist Präsident.

   Darstellung: ‚$\lambda x P^1 x a$'.

   Regimentiert: ‚$(\lambda x P^1(x))(a)$'.

2. Andrew ist kein Präsident.

   Darstellung: ‚$\lambda x \neg P^1 x a$'.

   Regimentiert: ‚$(\lambda x \neg P^1(x))(a)$'.

3. Bertha liebt Andrew.

   Darstellung: ‚$\lambda x Q^2 x a b$'.

   Regimentiert: ‚$(\lambda x Q^2(x, a))(b)$'.

4. Andrew liebt Bertha.

   Darstellung: ‚$\lambda x Q^2 a x b$'.

   Regimentiert: ‚$(\lambda x Q^2(a, x))(b)$'.

5. Bertha ist Philosophin und Mathematikerin.

   Darstellung: ‚$\lambda x (P^1 x \wedge Q^1 x) b$'.

   Regimentiert: ‚$\lambda x (P^1(x) \wedge Q^1(x))(b)$'.

[Die Kapitel 11–12 sind nicht klausurrelevant.]

[Es lohnt sich, die Inhalte von Teil 4 des Kurses zur Vorbereitung auf die letzte Frage der Klausur noch einmal durchzugehen, allerdings ist keines der darin behandelten Konzepte für die Beantwortung dieser Frage erforderlich.]