Probabilidad - Capitulo 4

4.2 - De un lote que contiene 25 articulos, 5 de los cuales son defectuosos, se eligen 4 al azar. Sea X en nú-ero de artículos defectuosos encontrados, obtener la distribución de probabilidades de X si

a) los articulos se escogen con sustitucion
b) los articulos se escogen sin sustitución

La variable x está definida por

$x(S) =$ no. de articulos defectuosos

$R_x = [0, 1, 2, 3, 4]$

a) $P[D] = \frac{5}{25} = \frac{1}{5}$ (Articulos defectuosos)

$P[N] = \frac{20}{25} = \frac{4}{5}$ (Articulos No defectuosos)

$S = [NNNN, NNND, NNDD, NDDD, DDDD]$

$p(0) = P[x=0] = P[NNNN] = \left(\frac{4}{5}\right)^4 = \binom{4}{0}\left(\frac{1}{5}\right)^0\left(\frac{4}{5}\right)^3$

$p(1) = P[x=1] = P[NNND. u. u] = P_4^{3,1}\left(\frac{1}{5}\right)\left(\frac{4}{5}\right)^3$

$= \binom{4}{1}\left(\frac{1}{5}\right)\left(\frac{4}{5}\right)^3$

$p(2) = P[x=2] = P[NNDD. u. u] = P_4^{2,2}\left(\frac{1}{5}\right)^2\left(\frac{4}{5}\right)^2$

$= \binom{4}{2}\left(\frac{1}{5}\right)^2\left(\frac{4}{5}\right)^2$

$p(x) = \binom{4}{x}\left(\frac{1}{5}\right)^x\left(\frac{4}{5}\right)^{4-x}$ $\qquad x = 0, 1, 2, 3, 4$

b) $p(0) = P[x=0] = \dfrac{\binom{5}{0}\binom{20}{4}}{\binom{25}{4}} = \dfrac{\binom{5}{0}\binom{20}{4-0}}{\binom{25}{4}}$

$p(1) = P[X=1] = \dfrac{\binom{5}{1}\binom{20}{3}}{\binom{25}{4}} = \dfrac{\binom{5}{1}\binom{20}{4-1}}{\binom{25}{4}}$

$p(2) = P[x=2] = \dfrac{\binom{5}{2}\binom{20}{2}}{\binom{25}{4}} = \dfrac{\binom{5}{2}\binom{20}{4-2}}{\binom{25}{4}}$

$p(x) = \dfrac{\binom{5}{x}\binom{20}{4-x}}{\binom{25}{4}}$; $x = 0, 1, 2, 3, 4$

4.3- Supongase que la variable aleatoria X tiene valores posibles 1, 2, 3, ... y $P(X=j) = 1/2^j$, $j = 1, 2, \ldots$

a) Calcular P(X es par)
b) Calcular $P(X \geq 5)$
c) Calcular P(X es divisible a 3)

Tenemos

$P[X(S) \in A] = \sum_{x \in A} P[X=x]$

a) $P[X, \text{par}] = \sum_{j \text{ par}} \dfrac{1}{2^j}$

$P[X, \text{par}] = \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{2^4} + \dfrac{1}{2^6} + \ldots$

$= \dfrac{1}{2^2}\left[1 + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{2^4} + \ldots\right]$

$= \dfrac{1}{2^2}\left[\dfrac{1}{1 - 1/2^2}\right] = \dfrac{\cancel{4}}{\cancel{4} \times 3}$

$= \dfrac{1}{3}$

b) $P[x \geq 5] = \sum_{j=5}^{\infty} \frac{1}{2^j}$

$= \frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{2^7} + \dots$

$= \frac{1}{2^5}\left[1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots\right]$

$= \frac{1}{2^5}\left[\frac{1}{1-1/2}\right] = \frac{\cancel{2}}{\cancel{2}^5}$

$= \frac{1}{2^4}$

$= \frac{1}{16}$

c) $P = \sum_{j/3} \frac{1}{2^j}$

$= \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{2^9} + \dots$

$= \frac{1}{2^3}\left[1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^6} + \dots\right]$

$= \frac{1}{2^3}\left[\frac{1}{1-1/2^3}\right] = \cancel{\frac{2^3}{2^3 \times 7}}$

$= \frac{1}{7}$

4,8 - (Propiedades de las probabilidades binomiales) En la exposición del ejemplo, se sugirión un modelo general para las propiedades binomiales $\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ Indicar esta probabilidades por $p_n(k)$

a) Demostrar que para $0 \leq k < n$ tenemos

$p_n(k+1)/p_n(k) = [(n-k)/(k+1)][p/(1-p)]$

b) Usando a) demostrar que

i) $p_n(k+1) > p_n(k)$ si $k < np-(1-p)$

ii) $p_n(k+1) = p_n(k)$ si $k = np-(1-p)$

iii) $p_n(k+1) < p_n(k)$ si $k > np-(1-p)$

c) Demostrar que si $np-(1-p)$ es un entero, $p_n(k)$ toma su valor máximo para dos valores de k, llamados $k_0 = np-(1-p)$ y $k'_0 = np-(1-p)+1$

d) Demostrar que si $np-(1-p)$ no es un entero entonces $p_n(k)$ toma su valor max-oo cuando k es igual al entero mas pequeño mayor que k_0

e) Demostrar que si $np-(1-p) < 0$, $P_n(0) > P_n(1) > \ldots P_n(n)$ mientras que si $np-(1-p) = 0$, $P_n(0) = P_n(1) > P_n(2) > P_n(n)$

a) $$\frac{p_n(k+1)}{p_n(k)} = \frac{\binom{n}{k+1} p^{k+1}(1-p)^{n-k-1}}{\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}}$$

$$= \frac{\dfrac{n!}{(k+1)!\,(n-k-1)!}}{\dfrac{n!}{k!\,(n-k)!}(1-p)}$$

$$= \frac{n-k}{k+1} \times \frac{p}{1-p}$$

b) i) $\dfrac{n-k}{k+1} \times \dfrac{p}{1-p} > 1$

$(n-k)p > (k+1)(1-p)$

$p_n(k+1) > p_n(k)$ si $k < np-(1-p)$

ii) $$\frac{n-k}{k+1} \times \frac{p}{1-p} = 1$$

$$(n-k)p = (k+1)(1-p)$$

de donde obtenemos $k = np - (1-p)$

O sea $p_n(k+1) = p_n(k)$, si $k = np - (1-p)$

iii) $$p_n(k+1) < p_n(k) \longleftrightarrow \frac{n-k}{k+1} \times \frac{p}{1-p} < 1$$

$$k > np - (1-p)$$

$$\frac{P_n(k_0 - 1)}{P_n(k_0)} < 1 \quad y \quad \frac{P_n(k_0 + 1)}{P_n(k_0)} < 1$$

$$\frac{k_0}{n - k_0 + 1} \times \frac{1-p}{p} < 1 \quad y \quad \frac{n - k_0}{k_0 + 1} \times \frac{p}{1-p} < 1$$

$$np - (1-p) \quad y \quad np + p$$

$$(np + p) - (np - (1-p)) = 1$$

c) Si $np - (1-p)$ es un entero, $np + p$ también lo es. luego $p_n(k)$ tomará su valor máximo en ambos

d) Si $np - (1-p)$ no es entero, $np + p$ tampoco lo es, luego existirá entre dos extremos sólo un entero el cual será igual al menor entre el mayor que $np - (1-p)$

4.12- Supongamos que f y g son fdp en el mismo intervalo, $a \leq x \leq b$

a) Demostrar que $f+g$ no es una fdp en ese intervalo

b) Demostrar que para todo número β, $0 < \beta < 1$, $\beta f(x) + (1-\beta) g(x)$ es una fdp en ese intervalo.

a) Si $\int_a^b (f+g)(x)\,dx = 1$

$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$, $x \in [a,b]$

$\int_a^b (f+g)(x)\,dx$

$= \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$

$= 1 + 1 = 2 \neq 1$

$\therefore$ $(f+g)(x)$ con $x \in [a,b]$ no es una función de densidad

b) $\beta f(x) > 0$, $\forall x \in [a,b]$

$(1-\beta)\, g(x) > 0$ $\forall x \in [a,b]$

entonces $\beta f(x) + (1-\beta) g(x) > 0$

$\forall x \in [a,b]$

$$\int_a^b [B f(x) + (1-B)\, g(x)]\, dx$$

$$= B \int_a^b f(x)\, dx + (1-B)$$

$$= \int_a^b g(x)\, dx$$

$$= B + (1-B)$$

$$= 1$$

$\therefore$ función de densidad al intervalo.

4.16 – Se supone que el diámetro de un cable eléctrico, digamos X es una variable aleatoria continua con fdp $f(x) = 6x(1-x)$ $0 \leq x \leq 1$

a) Verificar que la anterior es una fdp y dibujarla

b) Obtener una expresión para la fda de x y dibujarla

c) Determinar un número b tal que $P(x<b) = 2P(x>b)$

d) Calcular $P(x \leq \frac{1}{2} \mid \frac{1}{3} < x < \frac{2}{3})$

a) Para que $f(x)$ sea función de densidad debe cumplir

$f(x) = 6x(1-x) \geq 0 \quad , \forall\, 0 \leq x \leq 1$

$$\int^1 6x(1-x)\, dx = (3x^2 - 2x^3)\Big|_0^1 = 3 - 2 = 1$$

b) $F(x) = \int_0^x h(t)\,dt = \int_0^x 6t(1-t)\,dt = 3x^2 - 2x^3$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ 3x^2 - 2x^3 & 0 < x < 1 \\ 1 & x \geq 1 \end{cases}$$

c) $P[X < b] = 2P[X > b]$

$= 2[1 - P[X \leq b]]$

$= 2 - 2P[X < b]$

$= \frac{2}{3}$

So, $0 < b < 1$, $P[X < b] = P[X \leq b] = 3b^2 - 2b^3 = \frac{2}{3}$

$9b^2 - 6b^3 - 2 = 0$

$b^3 - \frac{3}{2}b^2 + \frac{1}{3} = 0$

d) $$P\left[X \leq \tfrac{1}{2} \,\middle|\, \tfrac{1}{3} < X < \tfrac{2}{3}\right] = \frac{P[(X \leq \frac{1}{2}) \cap (\frac{1}{3} < X < \frac{2}{3})]}{P[\frac{1}{3} < X < \frac{2}{3}]}$$

$$= \frac{P[\frac{1}{3} < X \leq \frac{1}{2}]}{P[\frac{1}{3} < X < \frac{2}{3}]}$$

$$= \frac{3(\frac{1}{2})^2 - 2(\frac{1}{2})^3 - 3(\frac{1}{3})^2 + 2(\frac{1}{3})^3}{3(\frac{2}{3})^2 - 2(\frac{2}{3})^3 - 3(\frac{1}{3})^2 + 2(\frac{1}{3})^3}$$

$= \frac{1}{2}$

Scanned with CamScanner

4.26- Un experimento consta de n ensayos independientes. Se puede suponer que debido al "aprendizaje", la probabilidad de obtener un resultado exitoso aumenta con el número de ensayos realizados. Específicamente supongamos que

P(éxito en la i-ésima repetición) $=(i+1)/(i+2)$

$i=1,2,\ldots,n$

a) ¿Cuál es la probabilidad de tener tres resultados exitosos a lo menos en ocho repeticiones?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que el primer resultado exitoso ocurra en la octava repetición?

a) P[tener 3 resultados exitosos] $P[x \geq 3]$

$= 1 - P[x \leq 2] = 1 - [P[x=0] + P[x=1] + P[x=2]$

$P_1 = \frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$P_5 = \frac{6}{7}$	$\frac{1}{7}$
$P_2 = \frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$	$P_6 = \frac{7}{8}$	$\frac{1}{8}$
$P_3 = \frac{4}{5}$	$\frac{1}{5}$	$P_7 = \frac{8}{9}$	$\frac{1}{9}$
$P_4 = \frac{5}{6}$	$\frac{1}{6}$	$P_8 = \frac{9}{10}$	$\frac{1}{10}$

Multiplicamos todo

$$\frac{1}{1814400}$$

$P[x=1] = P[EF\ldots F \cup FEF\ldots F \cup \ldots \cup FF\ldots FE]$

$$= \frac{44}{1814400}$$

$P[x=2] = P[EEF\ldots FUEFEF\ldots FU\ldots UFE\ldots FEE]$

$$= \frac{826}{1814400}$$

4.28 - Si la variable aleatoria k está distribuida uniformemente en $(0;5)$ ¿cuál es la probabilidad de que las raíces de la ecuación $4x^2+4xk+k+2=0$ son reales?

$$(4k)^2 - 4 \times 4(k+2) \geq 0$$

$$16k^2 - 16k - 32 \geq 0$$

$$k^2 - k - 2 \geq 0$$

$$(k-2)(k+1) \geq 0$$

Desigualdad

$$f(k) = \frac{1}{5} \quad 0 \leq k \leq 5$$

$$= 0 \quad \text{en otros casos}$$

$$P[\text{raíces reales}] = P[k \leq -1 \cup k \geq 2]$$

$$= P[k \leq -1] + P[k \geq 2]$$

$$= 0 + \int_2^5 \frac{1}{5}\, dk + \int_5^{\infty} 0\, dk$$

$$= \frac{1}{5} k \Big|_2^5 = \frac{1}{5}(5-2) = \frac{3}{5}$$