



# Instituto Politécnico Nacional

## Escuela Superior de Cómputo



# *Análisis de algoritmos*

## **Tema 02:** Complejidad de los algoritmos

M. en C. Edgardo Adrián Franco Martínez

<http://www.eafranco.com>

[edfrancom@ipn.mx](mailto:edfrancom@ipn.mx)

[@edfrancom](https://twitter.com/edfrancom) [f](https://www.facebook.com/edgardoalfranco) [edgardoalfranco](https://www.facebook.com/edgardoalfranco)



# Contenido

- Algoritmo
- Algoritmo vs. Proceso Computacional
- Tamaño de problema
- Función complejidad
- Análisis Temporal
- Análisis Espacial
- Medición del tiempo de ejecución
- Medición de memoria requerida
- Ejemplos



# Algoritmo

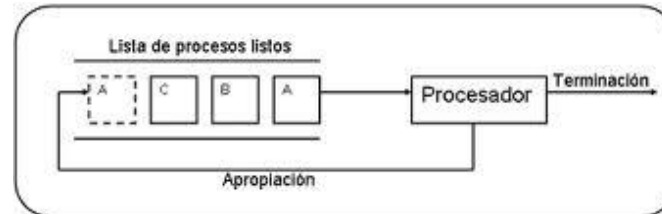
“Un algoritmo es un procedimiento para resolver un problema cuyos pasos son concretos y no ambiguos. El algoritmo debe ser correcto, de longitud finita y debe terminar para todas las entradas”

- Un **paso es NO ambiguo** cuando la acción a ejecutar está perfectamente definida:
  - $x \leftarrow \log(0)$  *Ambigua*
  - $x \leftarrow \log(10)+5$  *NO Ambigua*
- Una **instrucción es concreta o efectiva** cuando se puede ejecutar en un intervalo finito de tiempo
  - $x \leftarrow 2 + 8$  *Efectiva*
  - $\text{mensaje} \leftarrow \text{Concatena}('Hola', 'Mundo')$  *Efectiva*
  - $x \leftarrow \text{cardinalidad}(\text{números naturales})$  *NO Efectiva*



# Algoritmo vs. Proceso Computacional

- Si un conjunto de instrucciones a computar tiene todas las **características de un algoritmo**, **excepto ser finito en tiempo** se le denomina **proceso computacional**.
- Los sistemas operativos son el mejor ejemplo de proceso computacional, pues están diseñados para ejecutar tareas mientras las haya pendientes, y cuando éstas se terminan, el sistema operativo entra en un estado de espera, hasta que llegan más, pero nunca termina.

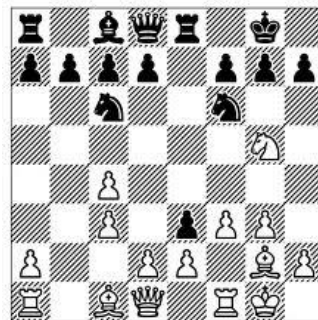


- En computación **se considera que un problema tiene solución algorítmica** si además de que el **algoritmo existe**, su **tiempo de ejecución es razonablemente corto**.



# Tamaño de problema

- **Ejemplo 01:** Es posible diseñar un algoritmo para jugar ajedrez que **triunfe siempre**: *el algoritmo elige la siguiente tirada examinando todas las posibles secuencias de movimientos desde el tablero actual hasta uno donde sea claro el resultado y elige la tirada que le asegure el triunfo*; el pequeño inconveniente de esta algoritmo es que dicho **espacio de búsqueda se ha estimado en  $1000^{40}$  tableros** por lo que puede tardarse años en tomar una decisión.



- Se considera que si un problema tiene una solución que toma años en computar, dicha solución **no existe**.



- **Ejemplo 02:** ordenar un conjunto de valores.

49	12	56	90	2	5	11	32	22	7	99	02	35	1
----	----	----	----	---	---	----	----	----	---	----	----	----	---

- Si el conjunto tiene 2 elementos es más fácil resolverlo que si tiene 20, análogamente un algoritmo que resuelva el problema tardará más tiempo mientras más grande sea el conjunto y requerirá una cantidad de memoria mayor para almacenar los elementos del conjunto.
- ***“En general la cantidad de recursos que consume un algoritmo para resolver un problema se incrementa conforme crece el tamaño del problema”.***
- Dependiendo del problema en particular, uno o varios de sus parámetros serán elegidos como **tamaño del problema**.



- Determinar el tamaño del problema es relativamente fácil realizando un análisis del problema si el problema ya ha sido comprendido.

PROBLEMA	TAMAÑO DEL PROBLEMA
Búsqueda de un elemento en un conjunto	Número de elementos en el conjunto
Multiplicar dos matrices	Dimensión de las matrices
Recorrer un árbol binario de búsqueda	Número de nodos en el árbol
Resolver un sistema de ecuaciones lineales	Número de ecuaciones y/o incógnitas
Ordenar un conjunto de valores	Número de elementos en el conjunto
Cálculo de la sumatoria $\sum_{i=m}^n a_i$	Tamaño del intervalo (m,n)
Encontrar un elemento en una Tabla Hash Abierta	Número de elementos en la Tabla



# Función complejidad

- La *función complejidad*,  $f(n)$ ; donde  $n$  es el **tamaño del problema**, da una **medida de la cantidad de recursos** que un algoritmo necesitará al implantarse y ejecutarse en alguna computadora.
- La cantidad de recursos que consume un **algoritmo crece conforme el tamaño del problema** se incrementa, la **función complejidad es *monótona creciente***  $f(n) \geq f(m)$  si  $n > m$  con respecto al tamaño del problema.





- La **memoria y el tiempo de procesador** son los recursos sobre los cuales se concentra todo el interés en el análisis de un algoritmo, así pues se distinguen dos clases de función complejidad:

1. **Función complejidad espacial.** Mide la cantidad de memoria que necesitará un algoritmo para resolver un problema de tamaño  $n$ :  $f_e(n)$ .
2. **Función complejidad temporal.** Indica la cantidad de tiempo que requiere un algoritmo para resolver un problema de tamaño  $n$ ; viene a ser una medida de la cantidad de instrucciones de CPU que requiere el algoritmo para resolver un problema de tamaño  $n$ :  $f_t(n)$ .



- La **cantidad de memoria** que utiliza un algoritmo depende de la implementación, no obstante, es posible obtener una **medida del espacio** necesario con la sola inspección del algoritmo.
- Para obtener esta cantidad es necesario sumar todas las celdas de memoria que utiliza. En general se requerirán dos tipos de celdas de memoria:
  1. **Celdas estáticas.** Son las que se utilizan en todo el tiempo que dura la ejecución del programa, p.g., las variables globales.
  2. **Celdas dinámicas.** Se emplean sólo durante un momento de la ejecución, y por tanto pueden ser asignadas y devueltas conforme se ejecuta el algoritmo, p.g., el espacio de la pila utilizado por las llamadas recursivas.



- **El tiempo** que emplea un algoritmo en ejecutarse refleja la cantidad de trabajo realizado, así, la **complejidad temporal** da una medida de la cantidad de tiempo que requerirá la implementación de un algoritmo para resolver el problema, por lo que **se le puede determinar en forma experimental**.
- Para encontrar el valor de la función complejidad de un algoritmo  $A$  que se codifica un lenguaje de programación  $L$ ; se compila utilizando el compilador  $C$ ; se ejecuta en la máquina  $M$  y se alimenta con un conjunto de casos  $S$ . Se deberá de medir el tiempo que emplea para resolver los casos (**análisis a posteriori**).



# Análisis Temporal

- Medir la complejidad temporal de manera experimental presenta, entre otros, el inconveniente de que los resultados obtenidos dependen de:
  - Las entradas proporcionadas,
  - La calidad del código generado por el compilador utilizado
  - La máquina en que se hagan las pruebas
- Cada **operación** requiere cierta **cantidad constante de tiempo** para ser ejecutada, por esta razón si se cuenta el número de operaciones realizadas por el algoritmo se obtiene una **estimación del tiempo** que le tomará resolver el problema.
- Dado un algoritmo, se puede determinar que tipos de operaciones utiliza y cuantas veces las ejecuta para una entrada específica (**análisis a priori**).



- Para evitar que **factores prácticos** se reflejen en el **cálculo de la función complejidad**, el **análisis temporal y el espacial a priori** se realiza únicamente **con base al algoritmo escrito en pseudocódigo**.
- Como el pseudocódigo no se puede ejecutar para medir la cantidad de tiempo que consume, la complejidad temporal no se expresará en unidades de tiempo, sino en términos de la **cantidad de operaciones que realiza**.

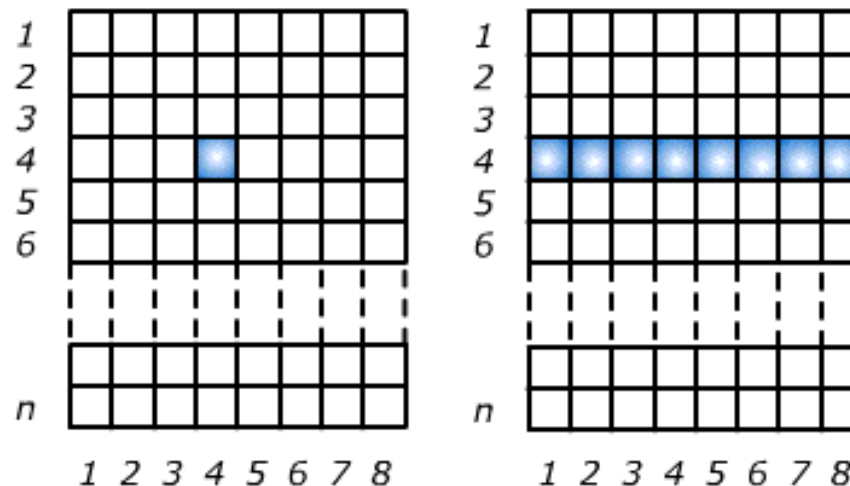
```

inserción(t)
for i=1 to n
    x= t[i]
    j=i-1
    while j > 0 and x<t[j]
        t[j+1]=t[j]
        j=j-1
    t[j+1]=x
    
```



# Análisis Espacial

- Los casos en la función complejidad espacial, se pueden definir análogamente, considerando ahora el conjunto  $C(n)$ ; como el conjunto formado por el número de celdas de memoria utilizadas por el algoritmo para resolver cada instancia del problema.



# Medición del tiempo de ejecución

- **Medir**

- **Cantidad de instrucciones** básicas (o elementales) que se ejecutan.

- Ejemplos de instrucciones básicas:

1. Asignación de variables
2. Lectura o escritura de variables
3. Saltos (goto's) implícitos o explícitos.
4. Operaciones aritméticas
5. Evaluación de condiciones
6. Llamada a sentencias simples
7. Llamadas y retornos de función\*



\*Las funciones tienen un costo de tiempo que hay que considerar a parte.



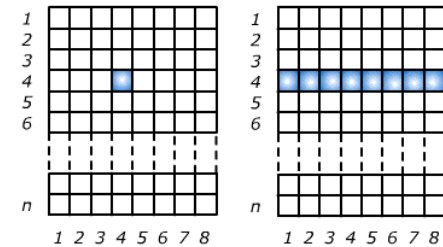
# Medición de la memoria requerida

- **Medir**

- **Cantidad de celdas de memoria (o elementales)** que se requieren.

- Ejemplos de celdas de memoria:

1. Variables del algoritmo
2. Numero de objetos instanciados requeridos
3. Tamaño de las estructuras de datos empleadas
4. Memoria de Entrada/Salida requerida
5. Tamaño de arreglo, matrices u otro tipo de memoria continua estática o dinámica empleada por el algoritmo.





# Ejemplo 1: Cantidad de instrucciones

*cont* = 1; → 1 asignación

*do* {

*x* = *x* + *a*[*cont*]; → *n* asignaciones

*x* = *x* + *b*[*cont*]; → *n* asignaciones

*cont* = *cont* + 1; → *n* asignaciones

}

*while* (*cont* ≤ *n*) → *n* + 1 (comparaciones) + *n* (goto implícito)

→ 1 (goto en falso)

**TOTAL: 5*n* + 3 instrucciones**

*Función de complejidad temporal*

$$f(n) = 5n + 3$$



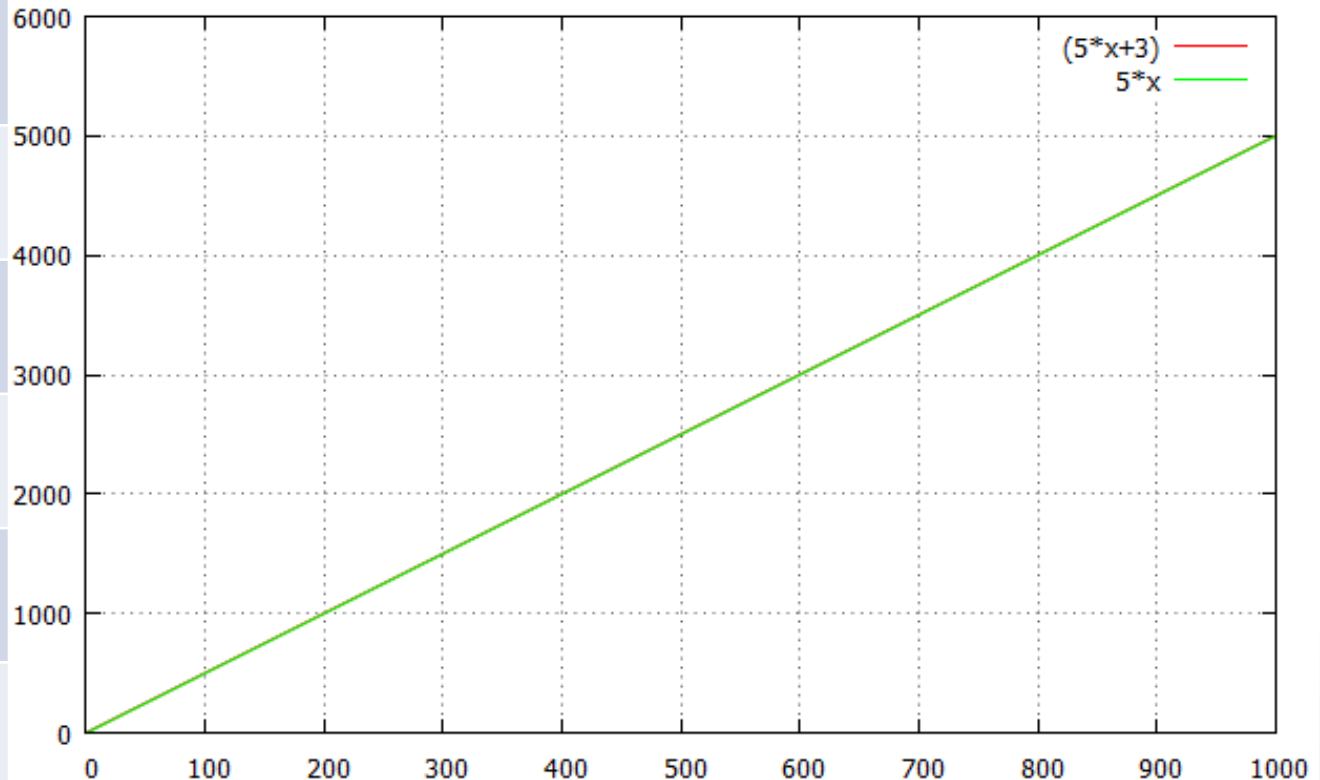
# Función de complejidad temporal

$$f(n) = 5n + 3$$

```

cont = 1;
do {
    x = x + a[cont];
    x = x + b[cont];
    cont = cont + 1;
}
while (cont <= n)
    
```

n	Instrucciones
0	3
1	8
10	53
100	503
500	2503
1000	5003



# Ejemplo 1: Cantidad de celdas de memoria

```

cont = 1;           → 1 variable “cont”
do {
    x = x + a[cont]; → 1 variable “x”
    x = x + b[cont]; → n variabes del arreglo “a”
    cont = cont + 1; → n variabes del arreglo “b”
}
while (cont <= n)
    
```

**TOTAL:  $2n + 2$**

*Función de complejidad espacial*

$$f(n) = 2n + 2$$



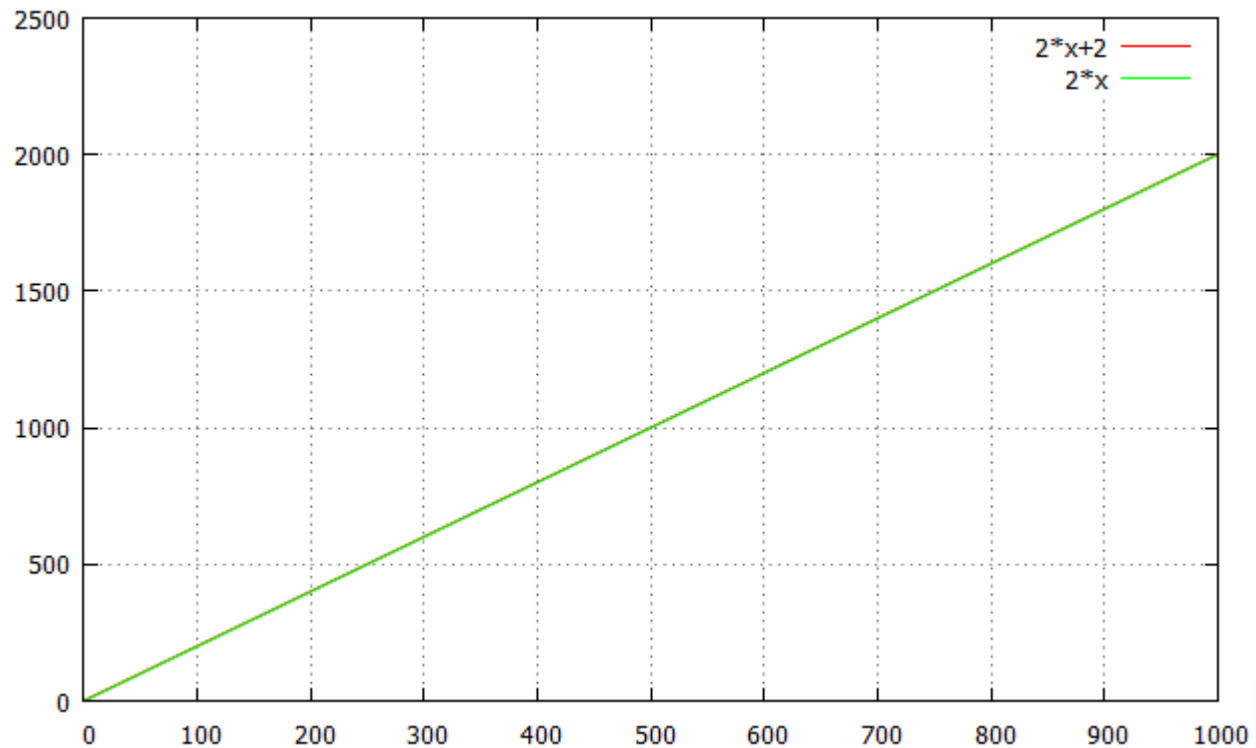
# Función de complejidad espacial

$$f(n) = 2n + 2$$

```

cont = 1;
do {
    x = x + a[cont];
    x = x + b[cont];
    cont = cont + 1;
}
while (cont <= n)
    
```

n	Celdas de memoria
0	2
1	4
10	22
100	202
500	1002
1000	2002



# Ejemplo 2: Cantidad de instrucciones

```

z = 0;
for (int x=1; x<=n; x++)
    for (int y=1; y<=n; y++)
        z = z + a[x,y];

```

$\rightarrow 1$   
 $\rightarrow 1 + (n+1)$  (asignación + comparaciones)  $= 2 + n$   
 $\rightarrow n + (n+1) * n = n^2 + 2n$   
 $\rightarrow n * n = n^2$   
 $\rightarrow n^2 + n^2$  (incremento + goto implícito)  $= 2n^2$   
 $\rightarrow n$  (goto en falso for y)  $= n$   
 $\rightarrow n + n$  (incremento + goto implícito)  $= 2n$   
 $\rightarrow 1$  (goto en falso for x)  $= 1$   
  
 $\rightarrow = 1 + 2 + n + n^2 + 2n + n^2 + 2n^2 + n + 2n + 1$   
**TOTAL:  $4n^2 + 6n + 4$**

*Función de complejidad temporal*

$$f(n) = 4n^2 + 6n + 4$$



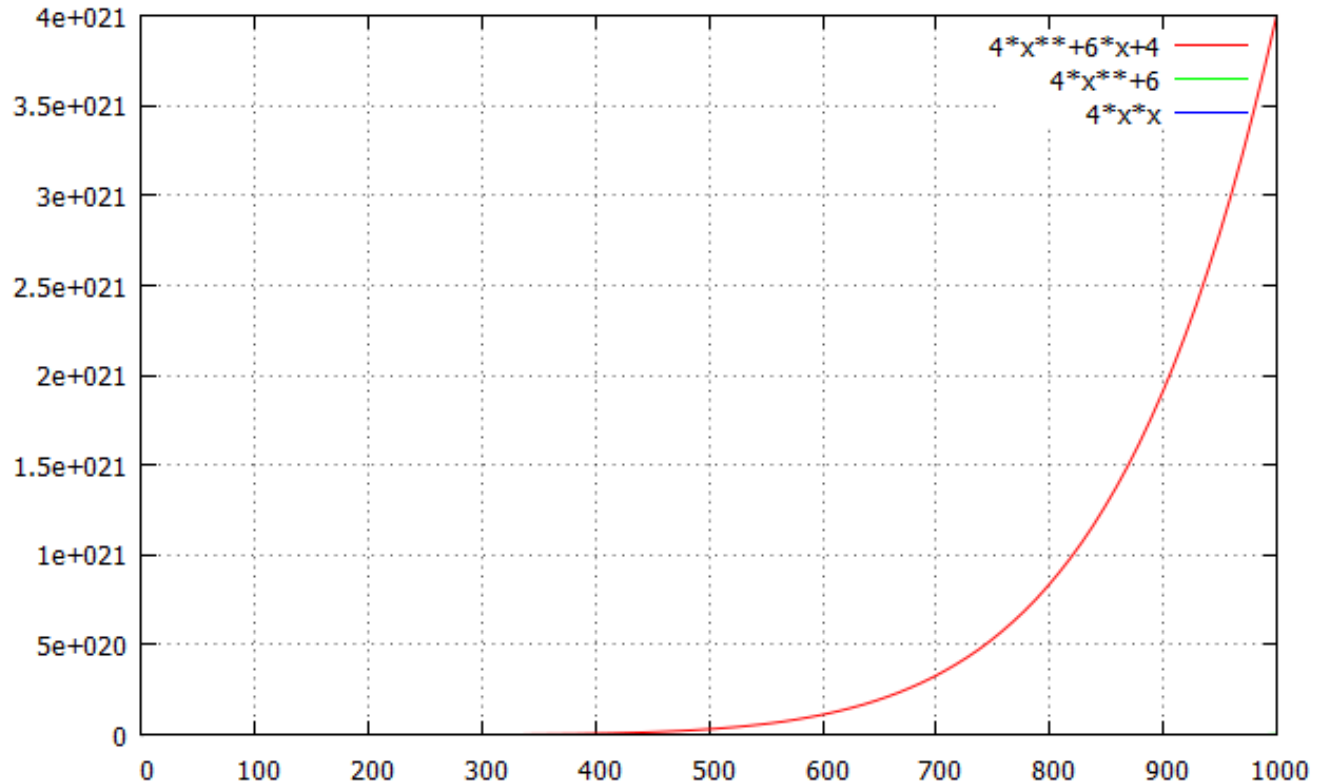
# Función de complejidad temporal

```

z = 0;
for (int x=1; x<=n; x++)
  for (int y=1; y<=n; y++)
    z = z + a[x,y];
  
```

$$f(n) = 4n^2 + 6n + 4$$

n	Instrucciones
0	4
1	14
10	464
100	40,604
500	1,003,004
1000	4,006,004



# Ejemplo 2: Cantidad de celdas de memoria

`z = 0;`

→ 1 (variable “z”)

`for (int x=1; x<=n; x++)`

→ 1 (variable “x”)

`for (int y=1; y<=n; y++)`

→ 1 (variable “y”)

`z = z + a[x,y];`

→  $n * n$  (variables de la matriz “a”)

**TOTAL:  $n^2 + 3$**

*Función de complejidad temporal*

$$f(n) = n^2 + 3$$

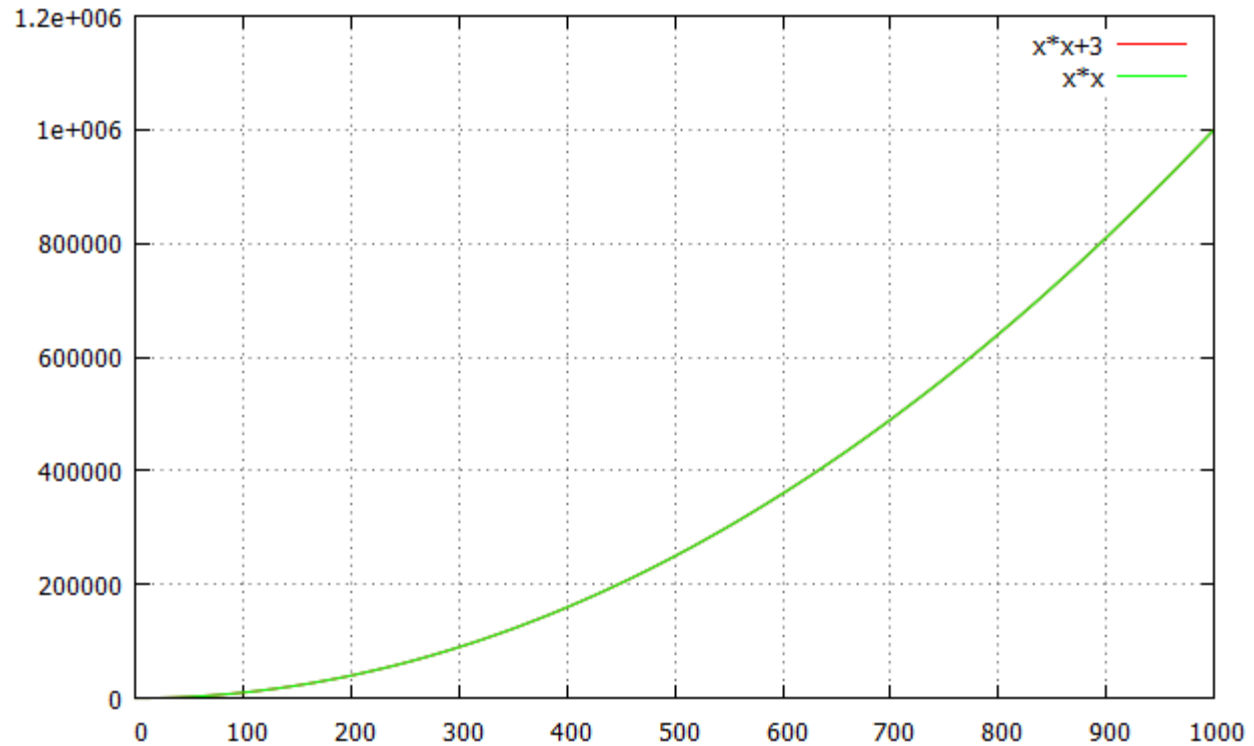


# Función de complejidad espacial

$$f(n) = n^2 + 3$$

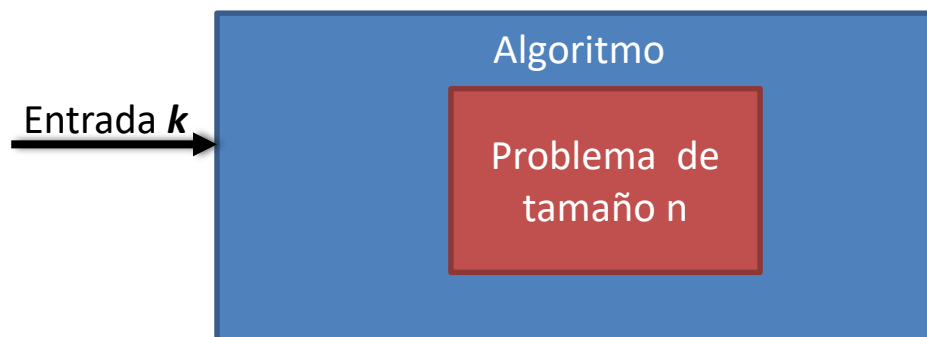
```
z = 0;
for (int x=1; x<=n; x++)
    for (int y=1; y<=n; y++)
        z = z + a[x,y];
```

n	Celdas de memoria
0	3
1	4
10	103
100	10,003
500	250,003
1000	1,000,003



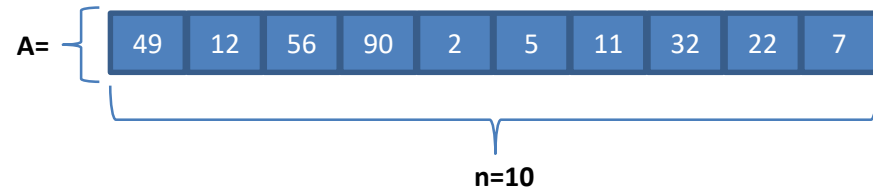


- Los algoritmos de los ejemplos 1 y 2 tienen un tamaño de problema directamente asociados a ***n*** i.e. ***solo existe un caso (instancia) del problema.***
- En la mayoría de los algoritmos también se deberá de considera que el número de operaciones y celdas memoria dependerá de los **casos de entrada** por lo que debe de realizarse el análisis considerando cada caso ***K (instancia del problema)*** con el tamaño de problema ***n***.
  - i.e. en un algoritmo, se debe determinar que tipos de operaciones utiliza, cuantas veces las ejecuta y cuanta memoria requiere para cada entrada especifica ***k***.



# Ejemplo 3: Cantidad de instrucciones

```
func BusquedaLineal(Valor,A,n)
{
    i=1;
    while(i<=n&&A[i]!=Valor)
    {
        i=i+1;
    }
    return i;
}
```



**Caso 0: Valor=11, A={49,12,56,90,2,5,11,32,22,7}, n=10**  
 Si el Valor es 11  $\Rightarrow$  se entra al ciclo 6 veces  $\Rightarrow k=6$

*Si el ciclo se ejecutará k veces (k puede tomar valor de 1 hasta n)*

- $\rightarrow k$  sumas (una por cada iteración).
- $\rightarrow k + 2$  asignaciones (las del ciclo y las realizadas fuera del ciclo).
- $\rightarrow k + 1$  operaciones lógicas (la condición se debe probar  $k + 1$  veces, la última es para saber que el ciclo no debe volver a ejecutarse).
- $\rightarrow k + 1$  comparaciones con el índice.
- $\rightarrow k + 1$  comparaciones con elementos de A:
- $\rightarrow k + 1$  accesos a elementos de A:
- $\rightarrow 6k + 6$  operaciones en total.**



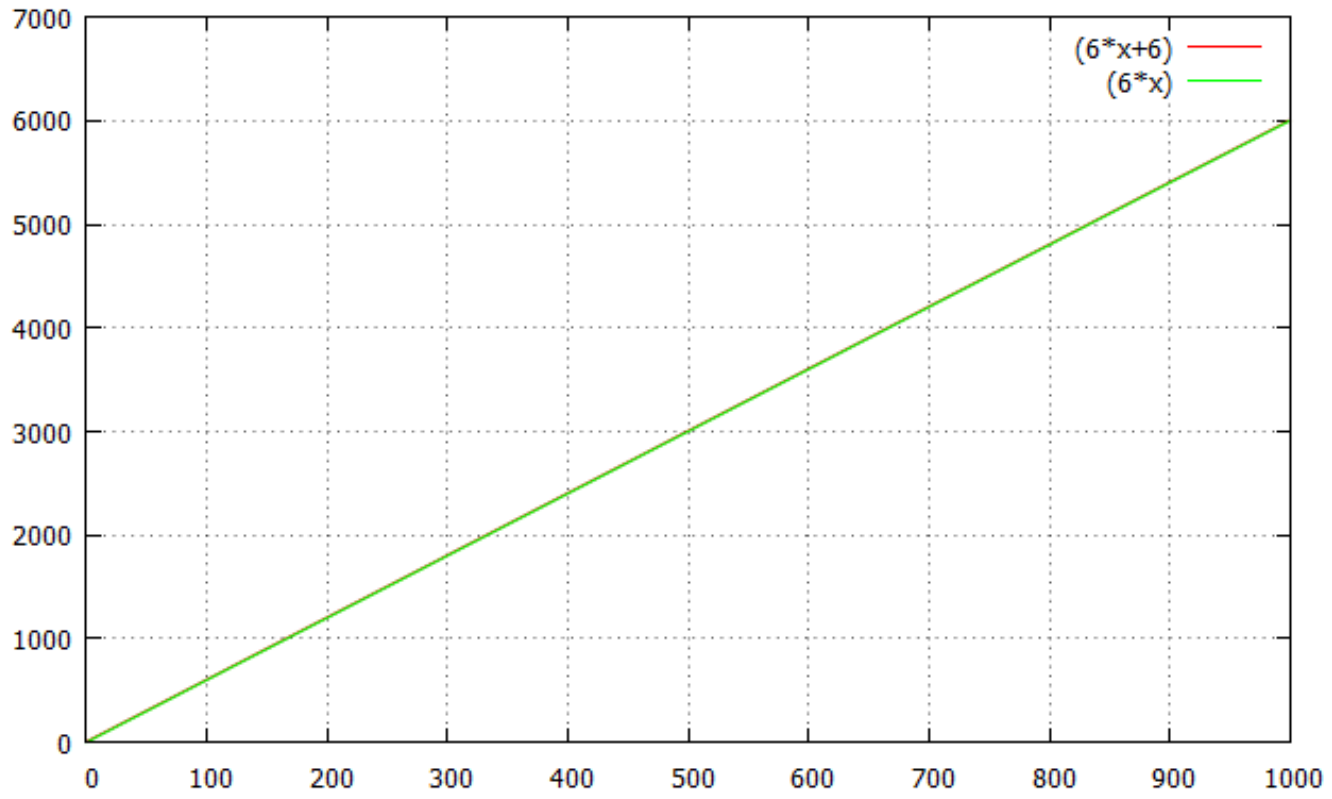
# Función de complejidad temporal

→  $f(k) = 6k + 6$

→  $k$  = Numero de veces que se entra al ciclo

```
func BusquedaLineal(Valor,A,n)
{
    i=1;
    while(i<=n&&A[i]!=Valor)
    {
        i=i+1;
    }
    return i;
}
```

k	Instrucciones
0	6
1	12
10	66
100	606
500	3006
1000	6006



# Ejemplo 3: Cantidad de celdas de memoria

*func* *BusquedaLineal*(*Valor*, *A*, *n*)

```

{
    i = 1;
    while(i ≤ n && A[i] ≠ Valor)
    {
        i = i + 1;
    }
    return i;
}

```

**A =** { 49, 12, 56, 90, 2, 5, 11, 32, 22, 7 }

**n = 10**

**Caso 0: Valor=11, A={49,12,56,90,2,5,11,32,22,7}, n=10**  
 Si el Valor=11 ⇒ se requieren 10 + 3 variables

**Caso 1: Valor=12, A={49,12,56,90,2,5,11,32,22,7}, n=10**  
 Si el Valor=12 ⇒ se requieren 10 + 3 variables

*Si se analizaran todos los casos*

→ Para este algoritmo la complejidad espacial no varia

→ **n + 3 celdas de memoria en total.**



# Función de complejidad espacial constante para todos los casos



$$\rightarrow f(n) = n + 3$$

```
func BusquedaLineal(Valor,A,n)
{
    i=1;
    while(i<=n&&A[i]!=Valor)
    {
        i=i+1;
    }
    return i;
}
```

k	Celdas de memoria
0	3
1	4
10	13
100	103
500	503
1000	1003

