CÓMO EL TIEMPO Y EL INTERÉS AFECTAN AL DINERO→ FACTORES DE EQUIVALENCIA

O B J E T I V O S D E A P R E N D I Z A J E

Propósito: Obtener y usar los factores de ingeniería económica que incorporan el valor del dinero en el tiempo.

INTRODUCCIÓN

El flujo de efectivo resulta fundamental en todo estudio económico. Los flujos de efectivo ocurren en muchas configuraciones y cantidades: valores únicos aislados, series uniformes y series que aumentan o disminuyen en cantidades o porcentajes constantes. El presente material realiza deducciones para los factores comunes en la ingeniería económica que toman en cuenta el valor del dinero en el tiempo, particularmente los montos únicos y las series uniformes, en todos los casos se considerarán inversiones con tasa de interés compuesto y a periodo vencido (final del periodo).

DESARROLLO

La aplicación de los factores de equivalencia se ilustra con sus formas matemáticas y un formato de notación estándar.

1	**Factores F/P y P/F**	**• Obtener y usar factores para cantidades únicas; factores para la cantidad compuesta (F/ P) y valor presente (P/F).**
2	**Factores P/A y A/P**	**• Deducir y utilizar los factores para series uniformes; factores para la cantidad compuesta (P/A) y la recuperación del capital (A/P).**
3	**Factores F/A y A/F**	**• Determinar y emplear los factores para una serie uniforme; factores para la cantidad compuesta (F/A) y fondo de amortización (A/F).**
4	**Valores de los factores**	**• Usar interpolación lineal con las tablas de factores para determinar los valores de los factores.**

EQUIVALENCIA ECONÓMICA

La equivalencia económica es un concepto fundamental en el que se basan los cálculos de la ingeniería económica. Antes de profundizar en los aspectos económicos pensemos en los

muchos tipos de equivalencias que se utilizan a diario para pasar de una escala a otra. Algunos ejemplos de conversión entre escalas son los siguientes:

Longitud:

12 pulgadas = 1 pie 3 pies = 1 yarda 39.370 pulgadas = 1 metro 1 kilómetro = 0.621 millas

Muchas medidas equivalentes son una combinación de dos o más escalas. Por ejemplo, considere la equivalencia de una velocidad de 110 kilómetros por hora (kph) en millas por minuto con conversiones entre escalas de distancia y tiempo y una exactitud de tres decimales.

Velocidad:

1 milla = 1.6093 kilómetros 1 hora = 60 minutos

110 kph = 68.365 millas por hora (mph) 68.365 = 1.139 millas por minuto

Se combinaron cuatro escalas —el tiempo expresado en minutos, tiempo expresado en horas, la distancia en millas y también en kilómetros— para elaborar enunciados equivalentes. Obsérvese que durante estos análisis se usó la relación fundamental de que 1 milla = 1.609 kilómetros y 1 hora = 60 minutos. Si esta relación cambiara, las equivalencias serían erróneas.

Ahora definamos la equivalencia económica.

La equivalencia económica es una combinación del valor del dinero en el tiempo y la tasa de interés para determinar las diferentes cantidades de dinero en momentos distintos y que tienen el mismo valor económico.

EJEMPLO: Si la tasa de interés es de 6% anual, $100 hoy (tiempo presente) equivalen a $106 un año después (cantidad acumulada en el futuro)

Cantidad acumulada = 100 + 100(0.06) = 100(1 + 0.06) = $106

Así, si un amigo nos ofrece un regalo con un valor de $100 el día de hoy o uno de $106 un año después, no habría diferencia entre una oferta y otra. Sin embargo, las dos sumas de dinero son equivalentes entre sí sólo si la tasa de interés es de 6% anual.

Si la tasa de interés fuera superior o inferior, $100 el día de hoy no equivaldrían a $106 un año después. Además de la equivalencia futura, con la misma lógica se calcula la equivalencia para años anteriores.

Un total de $100 ahora equivale a $100/1.06 =$94.34 hace un año con una tasa de interés de 6% anual.
De estos ejemplos se deriva lo siguiente: $94.34 el año pasado, $100 ahora y $106 un año después equivalen a una tasa de interés de 6% anual.

Factores para una cantidad única (F/P y P/F)

El factor fundamental en ingeniería económica es el que determina la cantidad de dinero F que se acumula después de n años (o periodos) a partir de un valor único presente P con interés compuesto una vez por año (o por periodo). Recuerde que el interés compuesto se refiere al interés pagado sobre el interés.

Por consiguiente, si una cantidad P se invierte en algún momento t = 0, la cantidad de dinero F acumulada en un año a partir del momento de la inversión con una tasa de interés de i por ciento anual será

$F1 = P + Pi$

$= P(1 + i)$

Donde la tasa de interés se expresa en forma decimal. Al final del segundo año, la cantidad de dinero acumulada F es la cantidad acumulada después del año 1 más el interés desde el final del año 1 hasta el final del año 2 sobre la cantidad total (F2).

$F2 = F1 + F*i$

$= P(1 + i) + P(1 + i)i$

La cantidad F2 se expresa como

$F2 = P(1 + i + i + i^2)$

$= P(1 + 2i + i^2)$

$= P(1 + i)^2$

En forma similar, la cantidad de dinero acumulada al final del año 3, si se utiliza la ecuación (2.1), será

$F3 = F2 + F2i$

Al sustituir $P(1 + i)^2$

por F2 y simplificar, se obtiene

$F3 = P(1 + i)^3$

De acuerdo con los valores anteriores, por inducción matemática es evidente que la fórmula puede generalizarse para "n" años.

Para calcular F, dado P

$F = P(1 + i)^n$ …………….(1)

El factor $(1 + i)^n$ se denomina *factor de cantidad compuesta de pago único* (FCCPU), pero en general se le conoce como factor F/P. Éste es el factor de conversión que, cuando se multiplica por P, produce la cantidad futura F de una inversión inicial P después de "n" años, con la tasa de interés i. El diagrama de flujo de efectivo se muestra en la figura 2.1a).

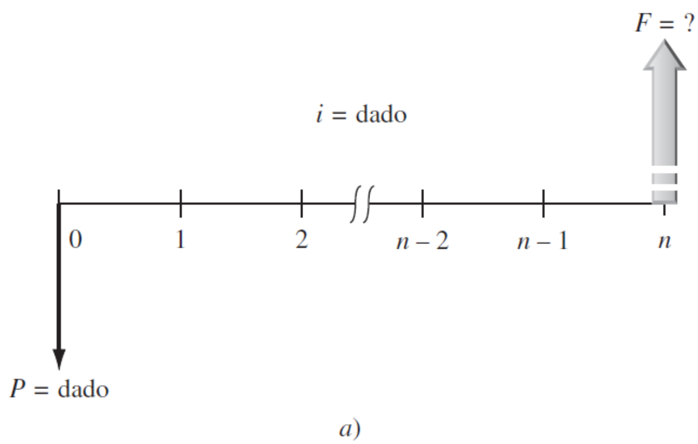


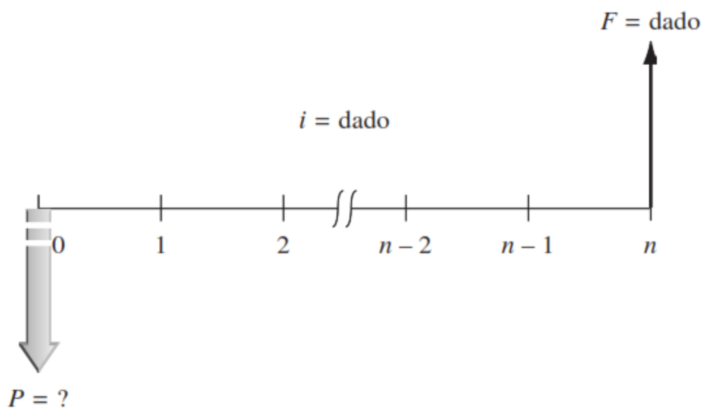
Figura 2-1
Diagramas de flujo de efectivo para factores de pago único: *a*) Calcular *F* dado *P*

Invierta la situación para calcular el valor P para una cantidad dada F que ocurre n periodos en el futuro. Tan sólo resuelva la ecuación (2) para P.

Dado $F = P(1 + i)^n$ ……….(2)
Despejar P de la ecuación (2)

$$P = F\left(\frac{1}{(1 + i)^n}\right) \quad \text{o}$$

$P = F(1 + i)^{-n}$…………….... (3)
La expresión 3 se conoce como *factor de valor presente de pago único (FVPPU)*, o factor P/F. Tal expresión determina el valor presente P de una cantidad futura dada F, después de "n" años con una tasa de interés i. En la figura 2.1b) se muestra el diagrama de flujo de efectivo.



b)

Figura 2-1
Diagramas de flujo de efectivo para factores de pago único: *b*) calcular *P* dado *F*.

Observe que los dos factores derivados aquí son para pago único; es decir, con ellos se determina la cantidad presente o futura cuando se tiene sólo un pago o entrada.
Se adoptó una notación estándar para todos los factores. La notación incluye dos símbolos de flujo de efectivo: tasa de interés y número de periodos. Siempre está en la forma general (X/Y,i,n). La literal X representa lo que se busca, mientras que la literal Y representa lo que está dado. Por ejemplo, F/P significa encuentre F cuando P está dado. La i es la tasa de interés en porcentaje, y n representa el número de periodos implicados.

NOTACION ESTANDAR
Con esta notación, (F/P,6%,20) representa el factor que determina la cantidad futura F acumulada en 20 periodos si la tasa de interés es de 6% por periodo.La P está dada. En adelante emplearemos la notación estándar, más sencilla que las fórmulas y los nombres de los factores.
La tabla 2.1 resume la notación estándar y las ecuaciones para los factores F/P y P/F.

TABLA 2-1 Factores *F/P* y *P/F*. Notación y ecuaciones

Factor					
Notación	**Nombre**	**Encontrar/Dado**	**Ecuación con la notación estándar**	**Ecuación con la fórmula desarrollada**	**Función en Excel**
$(F/P,i,n)$	Cantidad compuesta, pago único	F/P	$F = P(F/P,i,n)$	$F = P(1 + i)^n$	$= \mathrm{VF}(i\%,n,,P)$
$(P/F,i,n)$	Cantidad presente, pago único	P/F	$P = F(P/F,i,n)$	$P = F(1 + i)^{-n}$	$= \mathrm{VA}(i\%,n,,F)$

Para simplificar los cálculos rutinarios de la ingeniería económica se elaboraron las tablas de valores del factor para tasas de interés desde 0.25 hasta 50%, y periodos desde 1 hasta grandes valores de *n*, según el valor *i*. Estas tablas, que se anexan con el nombre de factores de equivalencia para valores discretos, están ordenadas de acuerdo con factores a lo largo de la parte superior y con el número de periodos *n* de manera descendente a la izquierda. La palabra *discreto* en el encabezado de cada tabla destaca que dichas tablas utilizan la convención de final de periodo y que el interés es compuesto una vez por cada periodo de interés. Para un factor, tasa de interés y tiempo dados, el valor correcto del factor está en la intersección del nombre del factor y *n*.

Por ejemplo, el valor del factor (*P*/*F*,5%,10) se encuentra en la columna *P*/F de la tabla de tasa de interés (i) 5% y en el periodo (n) 10, como 0.6139.

5% **TABLA 10** Flujo de efectivo discreto: Factores de interés compuesto **5%**

	Pagos únicos		Serie de pagos uniformes				Gradientes aritméticos	
n	Cantidad compuesta *F/P*	Valor presente *P/F*	Fondo hundido *A/F*	Cantidad compuesta *F/A*	Recuperación de capital *A/P*	Valor presente *P/A*	Valor presente del gradiente *P/G*	Serie uniforme del gradiente *A/G*
1	1.0500	0.9524	1.00000	1.0000	1.05000	0.9524		
2	1.1025	0.9070	0.48780	2.0500	0.53780	1.8594	0.9070	0.4878
3	1.1576	0.8638	0.31721	3.1525	0.36721	2.7232	2.6347	0.9675
4	1.2155	0.8227	0.23201	4.3101	0.28201	3.5460	5.1028	1.4391
5	1.2763	0.7835	0.18097	5.5256	0.23097	4.3295	8.2369	1.9025
6	1.3401	0.7462	0.14702	6.8019	0.19702	5.0757	11.9680	2.3579
7	1.4071	0.7107	0.12282	8.1420	0.17282	5.7864	16.2321	2.8052
8	1.4775	0.6768	0.10472	9.5491	0.15472	6.4632	20.9700	3.2445
9	1.5513	0.6446	0.09069	11.0266	0.14069	7.1078	26.1268	3.6758
10	1.6289	0.6139	0.07950	12.5779	0.12950	7.7217	31.6520	4.0991
11	1.7103	0.5847	0.07039	14.2068	0.12039	8.3064	37.4988	4.5144
12	1.7959	0.5568	0.06283	15.9171	0.11283	8.8633	43.6241	4.9219
13	1.8856	0.5303	0.05646	17.7130	0.10646	9.3936	49.9879	5.3215
14	1.9799	0.5051	0.05102	19.5986	0.10102	9.8986	56.5538	5.7133

Este valor también se puede determinar con la ecuación (3).

$$P/F,\ i\%,n = \frac{1}{(1+i)^n} \qquad (3)$$

$$P/F,\ 5\%,10 = \frac{1}{(1 + .05)^{10}}$$

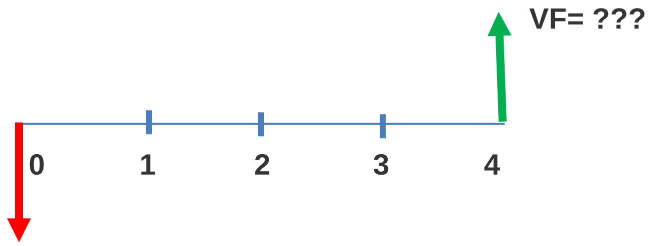
$$P/F,\ 5\%,10 = \frac{1}{(1.05)^{10}}$$

$$= \frac{1}{1.6289}$$ **= 0.613913 (generalmente en los cálculos se utilizan 6 cifras significativas)**

EJEMPLO1

Sandy, ingeniera industrial, recibió un bono de $10,000 que desea invertir ahora. Con la expectativa de ganar 8% de interés anual, espera retirar todo su dinero exactamente dentro de 4 años para pagar unas vacaciones de la familia.

a) **Diagrama de flujo de efectivo**



VP =10,000

b) **Calcula la cantidad total que tendrá en 4 años usando la fórmula:**

Dado $P = 10,000$

$i = 8\ \%$ **anual**

$n = 4$ **años**

Encontrar $F = ???$

SOLUCIÓN

$F = P\,(1 + i)^{n} =$

$F = 10,000\,(1 + 0.08)^{4} = 10,000\,(1.08)^{4}$

$F = 10,000\,(1.360488) = 13604.89$

b.2) usando las tablas de factores de equivalencia

SOLUCIÓN

En la figura 2-1*a*) se muestra el diagrama de flujo. Los símbolos y sus valores son

***P* = $10 000 *i* = 8% anual *n* = 4 años *F* = ???**

***Notación estándar y valor en las tablas:* La notación para el factor *F*/ *P* es (*F*/ *P*,*i*%,*n*).**

Tablas de factores de interés compuesto

8%	TABLA 13 Flujo de efectivo discreto: Factores de interés compuesto							8%
	Pagos únicos		Serie de pagos uniformes				Gradientes aritméticos	
n	Cantidad compuesta *F/P*	Valor presente *P/F*	Fondo hundido *A/F*	Cantidad compuesta *F/A*	Recuperación de capital *A/P*	Valor presente *P/A*	Valor presente del gradiente *P/G*	Serie uniforme del gradiente *A/G*
1	1.0800	0.9259	1.00000	1.0000	1.08000	0.9259		
2	1.1664	0.8573	0.48077	2.0800	0.56077	1.7833	0.8573	0.4808
3	1.2597	0.7938	0.30803	3.2464	0.38803	2.5771	2.4450	0.9487
4	1.3605	0.7350	0.22192	4.5061	0.30192	3.3121	4.6501	1.4040
5	1.4693	0.6806	0.17046	5.8666	0.25046	3.9927	7.3724	1.8465
6	1.5869	0.6302	0.13632	7.3359	0.21632	4.6229	10.5233	2.2763
7	1.7138	0.5835	0.11207	8.9228	0.19207	5.2064	14.0242	2.6937
8	1.8509	0.5403	0.09401	10.6366	0.17401	5.7466	17.8061	3.0985

Utilizando la notación estándar tenemos:

***F* = *P* (*F*/ *P*,8%,4)**
***F* = 10,000 (*F*/ *P*,8%,4)**
***F* = *10,000* (1.3605)**
= $ 13,605

La diferencia entre los valores calculados por ambos métodos radica en la cantidad de cifras significativas que se utilizaron para realizar los cálculos.

CONCLUSION: Si Sandy invierte ahora los $10 000 y gana 8% de interés anual durante 4 años, dispondrá de $46 610 para las vacaciones de su familia

CALCULO DEL NÚMERO DE PERIODOS (USANDO LA FORMULA Y USANDO LOS FACTORES DE EQUIVALENCIA)

Sandy, ingeniera industrial, recibió un bono de $10,000 que desea invertir ahora. Una institución de inversión ofrece pagarle 8% de interés anual. Durante cuantos años (periodos) deberá mantener su inversión para que pueda duplicarla.

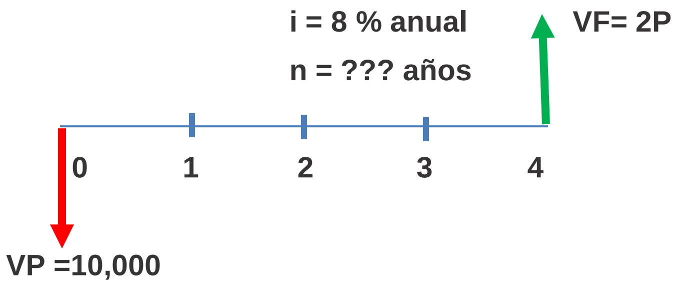


Figura 2.2a

Calcula el número de periodos que debe mantener su inversión para duplicarla

Dado P= 10,000 F= 20,000 -> dado que F debe ser el doble de P i=8% anual

n = ??? años

Usando la fórmula:

$F = P(1+i)^{n} =$

Despejando "n"

$F/P = (1+i)^{n}$

Aplicando logaritmos naturales

$\ln[F/P] = \ln(1+i)^{n}$

Aplicando regla de logaritmos

$\ln[F/P] = n \ln(1+i)$

Despejando "n"

$$n = \frac{\ln[F/P]}{\ln(1+i)}$$

Sustitución de Valores:

$$n = \frac{\ln[F/P]}{\ln(1+i)}$$

$$n = \frac{\ln[20{,}000/10{,}000]}{\ln(1+0.08)}$$

$$n = \frac{\ln[20{,}000/10{,}000]}{\ln(1+0.08)} = \frac{\ln(2)}{\ln(1.08)} = \frac{0.693147}{0.076961} = 9 \text{ años}$$

USANDO LAS TABLAS DE FACTORES DE EQUIVALENCIA

En la figura 2-2*a*) se muestra el diagrama de flujo. Los símbolos y sus valores son

P = $10 000 F = 20,000? i = 8% anual n = ??? años

***Notación estándar y valor en las tablas:* La notación para el factor *F/ P* es (*F/ P,i*%,*n*).**

Tablas de factores de interés compuesto

8%	TABLA 13 Flujo de efectivo discreto: Factores de interés compuesto							8%
	Pagos únicos		Serie de pagos uniformes				Gradientes aritméticos	
n	Cantidad compuesta *F/P*	Valor presente *P/F*	Fondo hundido *A/F*	Cantidad compuesta *F/A*	Recuperación de capital *A/P*	Valor presente *P/A*	Valor presente del gradiente *P/G*	Serie uniforme del gradiente *A/G*
1	1.0800	0.9259	1.00000	1.0000	1.08000	0.9259		
2	1.1664	0.8573	0.48077	2.0800	0.56077	1.7833	0.8573	0.4808
3	1.2597	0.7938	0.30803	3.2464	0.38803	2.5771	2.4450	0.9487
4	1.3605	0.7350	0.22192	4.5061	0.30192	3.3121	4.6501	1.4040
5	1.4693	0.6806	0.17046	5.8666	0.25046	3.9927	7.3724	1.8465
6	1.5869	0.6302	0.13632	7.3359	0.21632	4.6229	10.5233	2.2763
7	1.7138	0.5835	0.11207	8.9228	0.19207	5.2064	14.0242	2.6937
8	1.8509	0.5403	0.09401	10.6366	0.17401	5.7466	17.8061	3.0985
9	1.9990	0.5002	0.08008	12.4876	0.16008	6.2469	21.8081	3.4910
10	2.1589	0.4632	0.06903	14.4866	0.14903	6.7101	25.9768	3.8713
11	2.3316	0.4289	0.06008	16.6455	0.14008	7.1390	30.2657	4.2395
12	2.5182	0.3971	0.05270	18.9771	0.13270	7.5361	34.6339	4.5957
13	2.7196	0.3677	0.04652	21.4953	0.12652	7.9038	39.0463	4.9402
14	2.9372	0.3405	0.04130	24.2149	0.12130	8.2442	43.4723	5.2731

SOLUCION:

***F* = *P* (*F*/ *P*,8%,n)**
Despejando la notación estandar

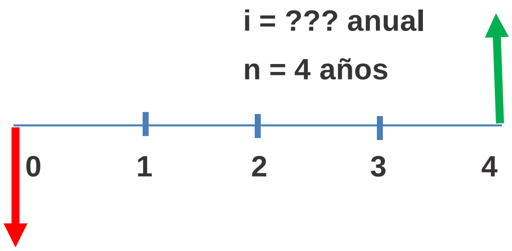
***F/P* =(*F*/ *P*,8%,n)**

Sustituyendo valores de F y P
20,000/ 10,000 = (*F*/ *P*,8%,n)
2 = (*F*/ *P*,8%,n)
El factor (F/P, 8%, n) que hace que esta igualdad se cumpla es de n = 9 periodos

CALCULO DE LA TASA DE INTERES
Sandy, ingeniera industrial, recibió un bono de $10,000 que desea invertir ahora. Tiene la expectativa de retirar 15,000 exactamente dentro de 4 años para pagar unas vacaciones. Cuál es la tasa de interés a la que debe de invertir para cumplir sus expectativas.

i = ??? anual **VF= 15,000**

n = 4 años



VP =10,000 **Figura 2.2-a**

Calcula la tasa de interés a la que debe de invertir.

Dado P= 10,000 F=15,000 N = 4 años i = ??? en porciento

Usando la fórmula:

$F = P (1+ i)^{n} =$

Pasamo P al primer miembro"

$F/P = (1+ i)^{n}$

Pasando "n" al primer miembro

$\sqrt[n]{F/P} = (1 + i)$

Despejando "i"

$(\sqrt[n]{F/P}) - 1 = i$

Sustitución de Valores y Resultado:

$(\sqrt[n]{F/P}) - 1 = i$

$(\sqrt[4]{15,000/10,000}) - 1 = i$

$(\sqrt[4]{1.5}) - 1 = i$

1.106681 – 1 = i

i = 10.67 %

CALCULAR LA TASA DE INTERES "i" USANDO LAS TABLAS DE FACTORES DE EQUIVALENCIA

Solución

En la figura 2-2b) se muestra el diagrama de flujo. Los símbolos y sus valores son

P = $10 000 F = 20,000? n = 4 años i = ??? (en %)

***Notación estándar y valor en las tablas:* La notación para el factor *F/ P* es (*F/ P,i%,n*)**

SOLUCION:

$F = P\ (F/P, i\%, 4)$

$F/P = (F/P, i\%, 4)$

$15{,}000 / 10{,}000 = (F/P, i\%, 4)$

$1.5 = (F/P, i\%, 4)$

$1.5 \approx 1.4641$

El factor (F/P, i%, 4) que hace que esta igualdad se cumpla es en la tabla de i = 10 %

Tablas de factores de interés compuesto

10% TABLA 15 Flujo de efectivo discreto: Factores de interés compuesto 10%

	Pagos únicos		Serie de pagos uniformes				Gradientes aritméticos	
n	Cantidad compuesta *F/P*	Valor presente *P/F*	Fondo hundido *A/F*	Cantidad compuesta *F/A*	Recuperación de capital *A/P*	Valor presente *P/A*	Valor presente del gradiente *P/G*	Serie uniforme del gradiente *A/G*
1	1.1000	0.9091	1.00000	1.0000	1.10000	0.9091		
2	1.2100	0.8264	0.47619	2.1000	0.57619	1.7355	0.8264	0.4762
3	1.3310	0.7513	0.30211	3.3100	0.40211	2.4869	2.3291	0.9366
4	1.4641	0.6830	0.21547	4.6410	0.31547	3.1699	4.3781	1.3812
5	1.6105	0.6209	0.16380	6.1051	0.26380	3.7908	6.8618	1.8101
6	1.7716	0.5645	0.12961	7.7156	0.22961	4.3553	9.6842	2.2236
7	1.9487	0.5132	0.10541	9.4872	0.20541	4.8684	12.7631	2.6216
8	2.1436	0.4665	0.08744	11.4359	0.18744	5.3349	16.0287	3.0045
9	2.3579	0.4241	0.07364	13.5795	0.17364	5.7590	19.4215	3.3724
10	2.5937	0.3855	0.06275	15.9374	0.16275	6.1446	22.8913	3.7255
11	2.8531	0.3505	0.05396	18.5312	0.15396	6.4951	26.3963	4.0641
12	3.1384	0.3186	0.04676	21.3843	0.14676	6.8137	29.9012	4.3884
13	3.4523	0.2897	0.04078	24.5227	0.14078	7.1034	33.3772	4.6988