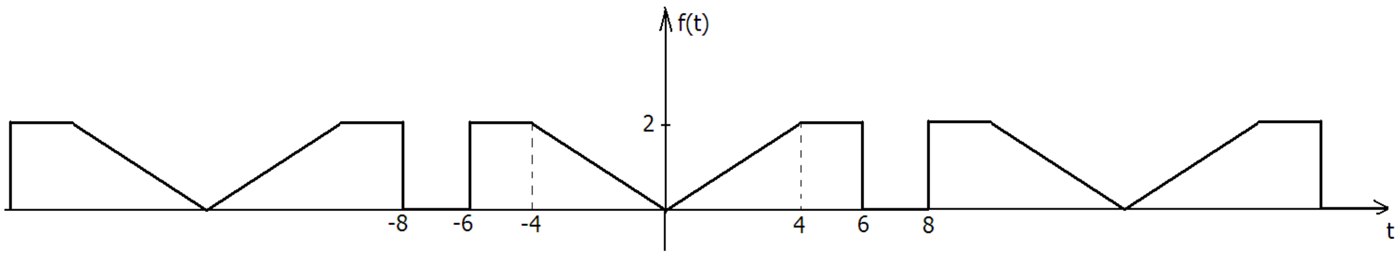
E S C U E L A   S U P E R I O R   D E   C O M P U T O

1er. Departamental ♦ TEORÍA DE COMUNICACIONES Y SEÑALES

PROFESORA: JACQUELINE ARZATE GORDILLO **TIPO "B"**

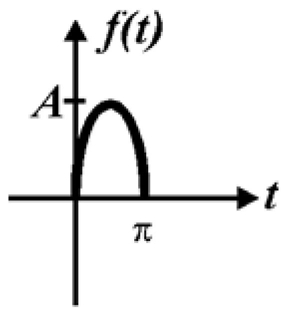
NOMBRE DEL ALUMNO: ____ **GRUPO**:___________

PROBLEMA 1. **(valor 2.0 puntos).**Encuentre la serie trigonométrica de Fourier de la siguiente señal *f(t)*



PROBLEMA 2. (valor 1.0 punto).A partir de la serie encontrada en el problema anterior, deduzca la serie exponencial de Fourier de *f(t)*

PROBLEMA 3. (valor 2.0 puntos). Encuentre la transformada[1] de *f(t)*

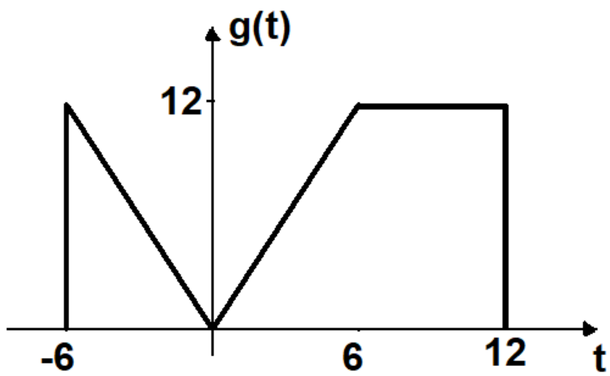


[1]*Puede emplear propiedades o usar la definición, es libre el criterio (considere que si usa la definición puede demorar más tiempo para completarla)*

PROBLEMA 4. (valor 2.0 puntos). Usando las propiedades de la transformada de Fourier, complete la pareja de transformadas siguiente:

$$\frac{t}{1-jt} \quad + \quad Sa(2t-1) \quad \leftrightarrow \quad ?$$

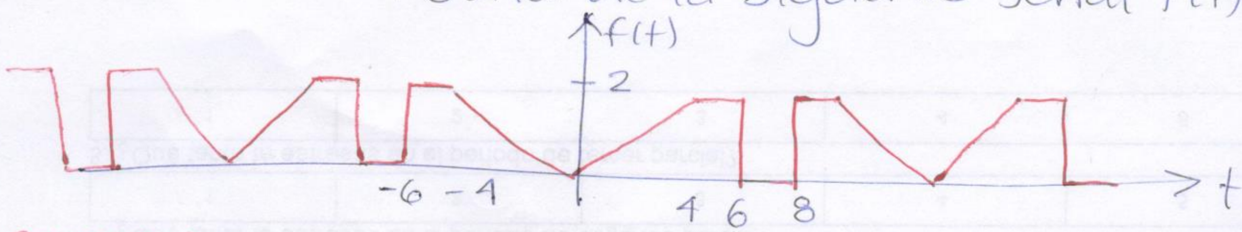
PROBLEMA 5. **(valor 2.0 puntos).**Usando la Propiedad de diferenciación de la transformada de Fourier, encuentre la transformada de g(t).



PROBLEMA 6. **(valor 1.0 punto).**Usando un graficador, grafique el espectro de frecuencias de la siguiente función (agregue la captura de pantalla de espectro de magnitud y espectro de fase al examen, y agregue sus respectivas funciones matemáticas):

$$te^{-t}u(t) \leftrightarrow \frac{1}{(1+j\omega)^2}$$

PROBLEMA. Encuentre la Serie trigonométrica de Fourier de la siguiente señal $f(t)$



SOLUCION:

$$f(t)=\begin{cases} 2 & -6<t\leq -4 \\ -\frac{1}{2}(t) & -4<t\leq 0 \\ \frac{1}{2}t & 0<t\leq 4 \\ 2 & 4<t\leq 6 \\ 0 & 6<t\leq 8 \\ f(t+14) & \text{otro caso} \end{cases}$$

$T=14$

$\omega_0=\frac{2\pi}{14}$

$\omega_0=\frac{\pi}{7}$

como $f(t)$ es PAR $\therefore$ $b_n=0$ &

$$a_n=\frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(t)\cos n\omega_0 t\,dt$$

$$a_n=\frac{4}{14}\int_0^{7} f(t)\cos\frac{n\pi}{7}t\,dt$$

$$a_n=\frac{2}{7}\int_0^4 \frac{1}{2}t\cos\frac{n\pi}{7}t\,dt+\frac{2}{7}\int_4^6 2\cos\frac{n\pi}{7}t\,dt$$

$$a_n=\frac{1}{7}\int_0^4 t\cos\frac{n\pi}{7}t\,dt+\frac{4}{7}\int_4^6\cos\frac{n\pi}{7}t\,dt$$

$u=t \quad dv=\cos\frac{n\pi}{7}t\,dt$

$du=dt \quad v=\frac{7}{n\pi}\operatorname{Sen}\frac{n\pi}{7}t$

$$a_n=\frac{1}{7}\left\{\frac{7t}{n\pi}\operatorname{Sen}\frac{n\pi}{7}t\Big|_0^4-\frac{7}{n\pi}\int_0^4\operatorname{sen}\frac{n\pi}{7}t\,dt\right\}$$

$$+\left(\frac{4}{7}\right)\left(\frac{7}{n\pi}\right)\operatorname{Sen}\frac{n\pi}{7}t\Big|_4^6$$

$$a_n=\frac{1}{7}\left\{\frac{28}{n\pi}\operatorname{sen}\frac{4n\pi}{7}+\frac{49}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi}{7}t\Big|_0^4\right.$$

$$+\frac{4}{n\pi}\left[\operatorname{sen}\frac{6n\pi}{7}-\operatorname{sen}\frac{4\pi}{7}n\right]$$

$$a_n=\cancel{\frac{4}{n\pi}\operatorname{sen}\frac{4\pi}{7}n\pi}+\frac{7}{n^2\pi^2}\left[\cos\frac{4\pi}{7}n-1\right]$$

$$+\frac{4}{n\pi}\operatorname{sen}\frac{6n\pi}{7}-\frac{4}{n\pi}\operatorname{Sen}\frac{4\pi}{7}n$$

$$a_n=\frac{7}{n^2\pi^2}\left[\cos\frac{4\pi}{7}n-1\right]+\frac{4}{n\pi}\operatorname{Sen}\frac{6\pi}{7}n$$

$\forall\, n\neq 0$

$$a_0=\frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(t)\,dt$$

$$a_0=\frac{1}{7}\int_0^4\frac{1}{2}t\,dt+\frac{1}{7}\int_4^6 2\,dt$$

$$a_0=\left(\frac{1}{14}\right)\left(\frac{t^2}{2}\right)\Big|_0^4+\frac{2}{7}t\Big|_4^6$$

$$a_0=\frac{1}{28}\left[16-0\right]+\frac{2}{7}\left[6-4\right]$$

$$a_0=\frac{8}{14}+\frac{4\cdot 2}{7\cdot 2}=\frac{16}{14}$$

$$a_0=\frac{8}{7}$$

Finalmente:

$$f(t)=\frac{8}{7}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{7}{n^2\pi^2}\left[\cos\frac{4\pi}{7}n-1\right]+\frac{4}{n\pi}\operatorname{Sen}\frac{6\pi}{7}n\right)\cdot\cos\frac{n\pi}{7}t$$

PROBLEMA 2. A partir del problema anterior deduzca la S.E.F

Si $C_n=\frac{1}{2}(a_n-ib_n)$ & $a_0=C_0$

$$C_n=\frac{7}{2n^2\pi^2}\left[\cos\frac{4\pi}{7}n-1\right]+\frac{2}{n\pi}\operatorname{Sen}\frac{6\pi}{7}n$$

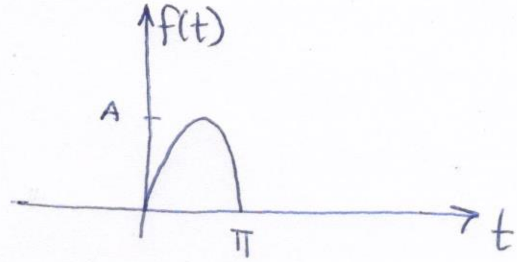
$\forall\, n\neq 0$

$$f(t)=\frac{8}{7}+\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\frac{7}{2n^2\pi^2}\left(\cos\frac{4\pi}{7}n-1\right)+\frac{2}{n\pi}\operatorname{Sen}\frac{6\pi}{7}n\right]e^{i\frac{n\pi}{7}t}$$

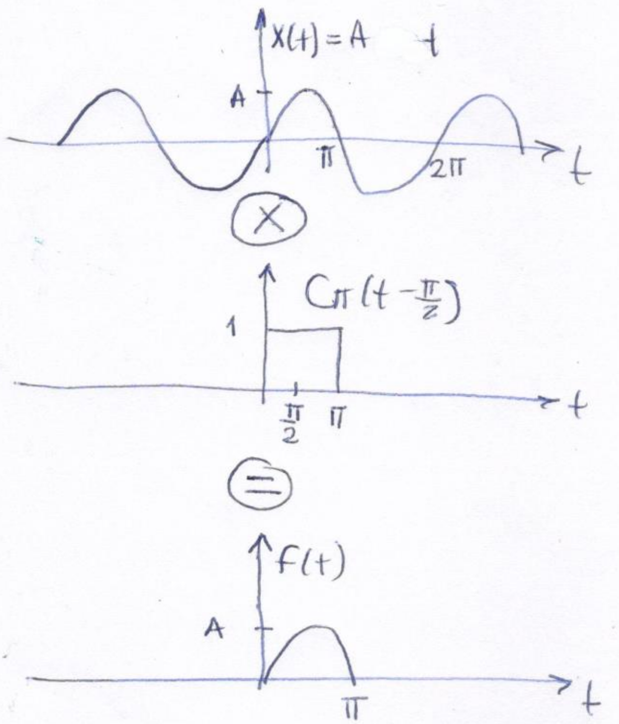
$n\neq 0$

PROBLEMA 3

Encuentre la transformada de $f(t)$



Considerando a $f(t)$ una función compuesta por el producto de otras dos, tal que:



Así:

$$f(t) = A\,\text{sen}\,t \cdot C_\pi\left(t-\frac{\pi}{2}\right)$$

$$A\,\text{sen}\,t \cdot C_\pi\left(t-\frac{\pi}{2}\right) \longleftrightarrow ?$$

De Tablas:

$$A C_d(t) \longleftrightarrow A d\, Sa\, \frac{\omega d}{2}$$

$$C_\pi(t) \longleftrightarrow \pi\, Sa\, \frac{\pi}{2}\omega$$

$$C_\pi\left(t-\frac{\pi}{2}\right) \longleftrightarrow \pi\, Sa\, \frac{\pi}{2}\omega \cdot e^{-j\frac{\pi}{2}\omega}$$

$$C_\pi\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\text{Sen}\,t \longleftrightarrow$$

$$\frac{j\pi}{2}\left[Sa\,\frac{\pi}{2}(\omega+1)\cdot e^{-j\frac{\pi}{2}(\omega+1)} - Sa\,\frac{\pi}{2}(\omega-1)e^{-j\frac{\pi}{2}(\omega-1)}\right]$$

$$A\, C_\pi\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\cdot\text{Sen}\,t \longleftrightarrow j\frac{A\pi}{2}\left[Sa\,\frac{\pi}{2}(\omega+1)e^{-j\frac{\pi}{2}(\omega+1)} - Sa\,\frac{\pi}{2}(\omega-1)\cdot e^{-j\frac{\pi}{2}(\omega-1)}\right]$$

PROBLEMA 4

Complete la siguiente pareja de transformadas:

$$\underbrace{\frac{t}{1-jt}}_{\text{I}} + \underbrace{Sa\,(2t-1)}_{\text{II}} \longleftrightarrow ?$$

SOLUCION:

I Si $e^{-at}u(t) \longleftrightarrow \frac{1}{a+j\omega}$

$\therefore \frac{1}{a+jt} \longleftrightarrow 2\pi e^{-a(-\omega)} u(-\omega)$

Si $a=1$

$$\frac{1}{1+jt} \longleftrightarrow 2\pi e^{\omega} u(-\omega)$$

$$\frac{1}{1-jt} \longleftrightarrow 2\pi e^{-\omega} u(\omega)$$

$$\frac{-jt}{1-jt} \longleftrightarrow 2\pi \frac{d}{d\omega}\left[e^{-\omega} u(\omega)\right]$$

$$\frac{t}{1-jt} \longleftrightarrow 2\pi j \frac{d}{d\omega}\left[e^{-\omega} u(\omega)\right]$$

II Si $AC_d(t) \longleftrightarrow Ad\, Sa\, \frac{\omega d}{2}$

$$d\, Sa\, \frac{d}{2}t \longleftrightarrow 2\pi C_d(-\omega)$$

$$Sa\, \frac{d}{2}t \longleftrightarrow \frac{2\pi}{d} C_d(\omega)$$

Si $\frac{d}{2} = 1 \therefore d = 2$

$$Sa\ t \longleftrightarrow \pi C_2(\omega)$$

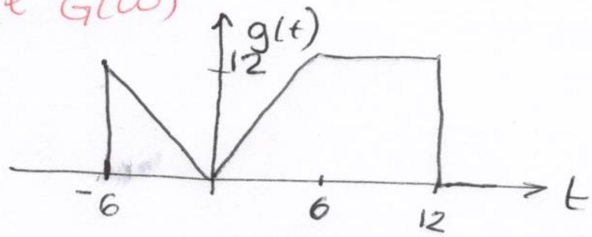
$$Sa\,(t-1) \longleftrightarrow \pi C_2(\omega) \cdot e^{-j\omega}$$

$$Sa\,(2t-1) \longleftrightarrow \frac{1}{|2|} \pi C_2\left(\frac{\omega}{2}\right) \cdot e^{-j\frac{\omega}{2}}$$

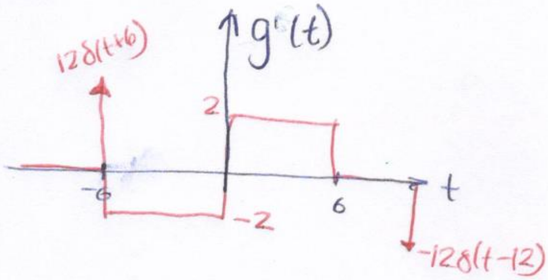
$$Sa\,(2t-1) \longleftrightarrow \frac{\pi}{2} C_2\left(\frac{\omega}{2}\right) \cdot e^{-j\frac{\omega}{2}}$$

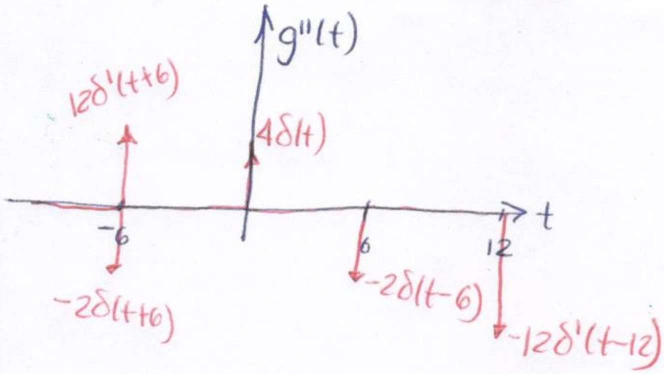
PROBLEMA 5

Usando la Propiedad de diferenciación de la transform. encuentre $G(\omega)$



SOLUCION:





$$g''(t) = 12\delta'(t+6) - 2\delta(t+6) + 4\delta(t) - 2\delta(t-6) - 12\delta'(t-12)$$

$$\mathcal{F}\{g''(t)\} = 12\mathcal{F}\{\delta'(t+6)\} - 2\mathcal{F}\{\delta(t+6)\} + 4\mathcal{F}\{\delta(t)\} - 2\mathcal{F}\{\delta(t-6)\} - 12\mathcal{F}\{\delta'(t-12)\}$$

Si

$$\delta(t) \longleftrightarrow 1$$
$$\delta(t+6) \longleftrightarrow e^{j6\omega}$$
$$\delta'(t+6) \longleftrightarrow j\omega e^{j6\omega}$$
$$\delta(t-12) \longleftrightarrow e^{-j12\omega}$$
$$\delta'(t-12) \longleftrightarrow j\omega e^{-j12\omega}$$

$$g''(t) \longleftrightarrow 12\cdot j\omega e^{j6\omega} - 2e^{j6\omega} + 4 - 2e^{-j6\omega} - 12j\omega e^{-j12\omega}$$

$$g''(t) \longleftrightarrow 12j\omega\left(e^{j6\omega} - e^{-j12\omega}\right) + 4 - 2\left(e^{j6\omega} + e^{-j6\omega}\right)$$

$$g''(t) \longleftrightarrow 12j\omega\left(e^{j6\omega} - e^{-j12\omega}\right) + 4 - 4\cos 6\omega$$

$$g''(t) \longleftrightarrow 12j\omega\left(e^{j6\omega} - e^{-j12\omega}\right) + 4(1-\cos 6\omega)$$

De la Prop. de Diferenciación

Si $g(t) \longleftrightarrow G(\omega)$

$g''(t) \longleftrightarrow (j\omega)^2 G(\omega)$

Así:

$$(j\omega)^2 G(\omega) = 12j\omega\left(e^{j6\omega} - e^{-j12\omega}\right) + 4(1-\cos 6\omega)$$

$$G(\omega) = -\frac{12j}{\omega}\left(e^{j6\omega} - e^{-j12\omega}\right) - \frac{4}{\omega^2}(1-\cos 6\omega)$$

$$G(\omega) = j\frac{12}{\omega}\left(e^{-j12\omega} - e^{j6\omega}\right) - 72\,Sa^2\,3\omega$$

Problema 6

$$t e^{-t} u(t) \longleftrightarrow \frac{1}{(1+j\omega)^2}$$

Expresando $F(\omega)$ en magnitud y fase

$$\frac{1}{1+j\omega} = \frac{1 \cdot e^{j0}}{\sqrt{1+w^2}\, e^{j\tan^{-1}\omega}}$$

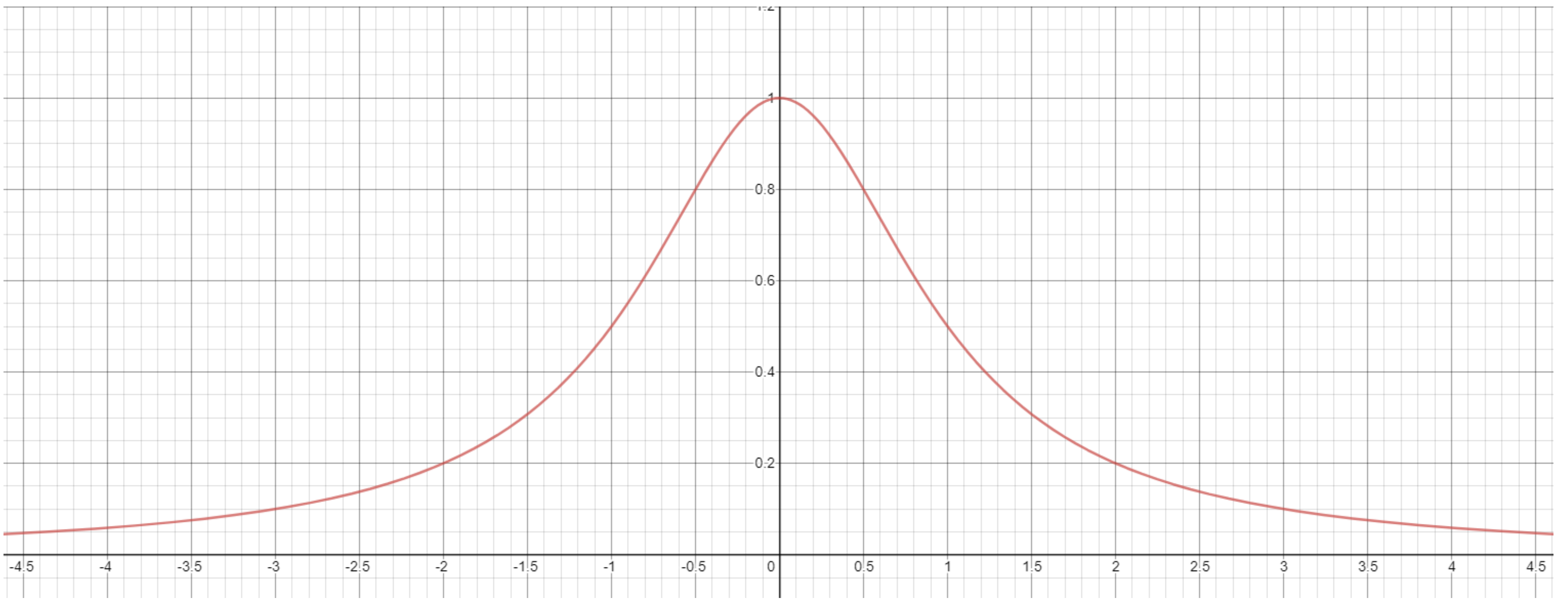
$$\frac{1}{(1+j\omega)^2} = \frac{1 \cdot e^{j0}}{\left[\sqrt{1+w^2}\, e^{j\tan^{-1}\omega}\right]^2}$$

$$\frac{1}{(1+j\omega)^2} = \frac{e^{j0}}{(1+w^2)\, e^{j2\tan^{-1}\omega}}$$

$$\frac{1}{(1+j\omega)^2} = \frac{1}{1+w^2}\, e^{-j2\tan^{-1}\omega}$$

así $\left|F(\omega)\right| = \frac{1}{1+w^2}$ & $\theta(\omega) = -2\tan^{-1}\omega$

ESPECTRO DE MAGNITUD



ESPECTRO DE FASE