Ramírez Cotonieto Luis Fernando
2020630417

"Probabilidad y Estadística 3er Par"

1- Sea X una variable aleatoria geométrica i.e, tiene una fdp.

$$f(x) = q^{x-1}p, \quad x = 1, 2, \ldots \qquad p+q=1$$

calcule la fgm y con ella $E(x)$ y la $V(x)$

Obtenemos de $0 < qe^t < 1$

$$M_x(t) = \frac{p}{q} qe^t \left[1 + qe^t + (qe^t)^2 + \ldots\right]$$

$$= \frac{p}{q} \frac{qe^t}{1-qe^t} = \frac{pe^t}{1-qe^t}$$

$\therefore$

$$M'(t) = \frac{(1-qe^t)pe^t - pe^t(-qe^t)}{(1-qe^t)^2} = \frac{pe^t}{(1-qe^t)^2}$$

$$M''(t) = \frac{(1-qe^t)^2 pe^t - pe^t 2(1-qe^t)(-qe^t)}{(1-qe^t)^4} = \frac{pe^t(1+qe^t)}{(1-qe^t)^3}$$

$\therefore$

$$\boxed{\begin{aligned} E(x) &= M'(0) = \frac{p}{(1-q)^2} = \frac{1}{p} \\ E(X^2) &= M''(0) = \frac{p(1+q)}{(1-q)^3} = \frac{(1+q)}{p^2} \\ V(x) &= \frac{(1+q)}{p^2} - \left(\frac{1}{p}\right)^2 = \frac{q}{p^2} \end{aligned}}$$

2. Supónga que $x_1, x_2, \ldots x_n$ son variables independientes entre si con fgm $M_{x_1}(t), M_{x_2}(t) \ldots M_{x_n}(t)$

$$Z = X_1 + X_2 + \ldots X_n$$

demuestre que

$$M_Z(t) = M_{x_1}(t) M_{x_2}(t) \ldots M_{x_n}(t)$$

Sabemos que el fgm de una var. alt y es:

$$M_y(t) = E(e^{ty})$$

$$\therefore M_{x_1}(t) = E(e^{tx_1})$$

$$M_{x_2}(t) = E(e^{tx_2})$$

$$\vdots$$

$$M_{x_n}(t) = E(e^{tx_n})$$

$$\therefore M_Z(t) = E(e^{tz})$$

$$= E(e^{t(x_1 + x_2 + \ldots x_n)})$$

$$= E(e^{tx_1}), E(e^{tx_2}) \ldots E(e^{tx_n})$$

[$\because X_1, x_2, \ldots, x_n$ son indep.]

$$= M_{x_1}(t) \, M_{x_2}(t) \ldots M_{x_n}(t)$$

Esta demostrado

Ramírez Cotonieto Luis Fernando

3. Supongase que la duración T (en horas) de los circ. electónicos D_1 y D_2 tienen la distribución $N(t:40,36)$ y $N(t\ 45,9)$, respectivamente. Cual se debe preferir para usarlo durante un periodo de 45 y 48 horas?

$D_1 = N(40,36)$

$D_2 = N(45,9)$

Para 45

a) $P[D_1 \geq 45] = 1 - P[D_1 < 45]$

$= 1 - P\left[\frac{D-N}{\sigma} < \frac{45-40}{6}\right]$

$= 1 - P[Z < 0.83]$

$= 1 - 0.7967$

$= 0.2033$

b) $P[D_2 \geq 45] = 1 - P\left[\frac{D_2 - N}{\sigma} < \frac{45-45}{3}\right]$

$= 1 - P[Z < 0]$

$= 1 - 0.50$

$= 0.50$

Es mejor usar D_2

Para 48

a) $P[D_1 \geq 48] = 1 - P\left[\frac{D_1 - N}{\sigma} < \frac{48-40}{6}\right]$

$= 1 - P[Z < 1.33]$

$= 1 - 0.9082$

$= 0.0918$

b) $P[D_2 \geq 48] = 1 - P\left[\frac{D_2 - N}{\sigma} < \frac{48-45}{3}\right]$

$= 1 - P[Z < 1]$

$= 1 - 0.8413$

$= 0.1587$

Es mejor usar D_2

Ramírez Cutonieto Luis Fernando

4-Suponga que $\vec{X}$ es un vector aleatorio n-dimensional, tal que, $E(x_i) = \mu_i$, $V(X_i) = \sigma_i^2$, si $Z = H(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, demuestre que:

$$a)\ E(Z) \approx H(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 H}{\partial x_i^2}\sigma_i^2$$

$$b)\ V(Z) \approx \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial H}{\partial x_i}\right)^2 \sigma_i^2$$

Se demuestra en el desarrollo de H en una serie de Taylor

$$V(Z) \approx [H'(\mu_i)]\sigma^2$$

$$E(x_1) = \mu_1$$

$$E(z) \approx H(\mu_i) + \frac{H''(\mu_i)}{2}\sigma$$

$$Z = H(\mu_i) + (x - \mu_i)H'(\mu_i) + \frac{(x-\mu_i)^2 H''(\mu_i)}{2}$$

Usando un valor esperado

$$E(z) \approx H(\mu_i) + \frac{H''(\mu_i)}{2}\sigma_i^2$$

$$E(z) = H(\mu_2) + \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 H}{\partial x_i^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial x^2}\sigma x_i\right]$$

$$E(z) \approx H(\mu_1, \ldots \mu_n) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial H}{\partial x_i}\right)^2\sigma_i^2$$

$$V(z) \approx [H'(\mu_1)]^2\sigma^2$$

$$V(z) \approx \left[\frac{\partial H}{\partial x}\right]^2\sigma_1^2 + \left[\frac{\partial H}{\partial x_i}\right]^2\sigma_i^2$$

$$V(z) \approx \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial H}{\partial x_i}\right)^2\sigma_i^2$$