"Problemario I - Probabilidad y Estadística"

1.4- Supóngase que el conjunto universal consta de todos los puntos (x,y) cuyas coordenadas son enteros y quedan dentro o sobre el contorno del cuadrado acotado por las rectas $x=0$, $y=0$, $x=6$, $y=6$. Indique los elementos de los conjuntos siguientes.

a) $A=\{(x,y) \mid x^2+y^2 \leq 6\}$

b) $B=\{(x,y) \mid y \leq x^2\}$

c) $C=\{(x,y \mid x \leq y^2\}$

d) $B \cap C$

e) $(B \cup A) \cap C^c$

Tenemos que $U=[(x,y) \in \mathbb{Z}^2 / 0 \leq x \leq 6, 0 \leq y \leq 6)$

a) Sea $A=[(x,y) \in U / x^2+y^2 \leq 6)$

entonces

$=[(0,0),(1,0),(2,0),(0,1),(0,2),(1,1),(1,2),(2,1)]$

b) Sea $B=[(x,y) \in U / y \leq x^2]$

entonces

$=[(0,0),(1,0),(2,0),(3,0),(4,0),(5,0),(6,0),(1,1),(2,1),$
$(2,2),(2,3),(2,4),(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6),$
$(4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6),(5,1),(5,2),(5,3),$
$(5,4),(5,5),(5,6),(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)]$

c) Sea $C=[(x,y) \in U / x \leq y^2]$

entonces

$=[(0,0),(0,1),(0,2),(0,3),(0,4),(0,5),(0,6),(1,1),(1,2),$
$(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6),$
$(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),$
$(4,6),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6),(6,3),(6,4),(6,5),$
$(6,6)]$

Ramírez Cotonieto Luis Fernando 2CM6

d) Sea $B \cap C$

entonces

$= [(0,0), (1,1), (2,2), (2,3), (2,4), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)]$

e) Sea $(B \cup A) \cap C^c$

entonces tenemos primero que $B \cup A$

$B \cup A = [(0,0), (0,1), (0,2), (1,0), (1,2), (2,0), (3,0), (4,0), (5,0), (6,0), (1,1), (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6), (4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6), (5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6); (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)]$

Ahora...

$\bar{C} = [(1,0), (2,0), (2,1), (3,0), (3,1), (4,0), (4,1), (5,0), (5,1), (5,2), (6,0), (6,1), (6,2)]$

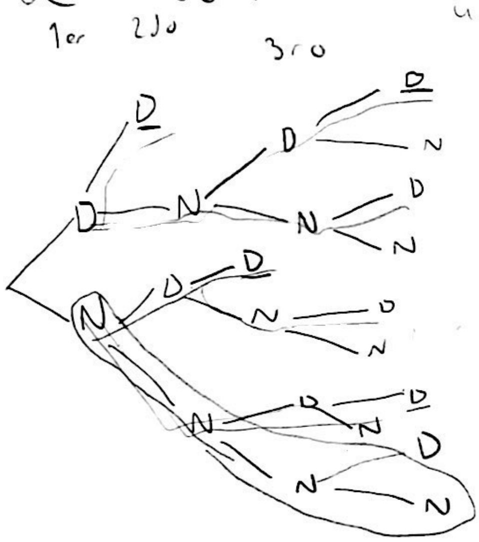
Unimos en $(B \cup A) \cap C'$

$= [(1,0), (2,0), (2,1), (3,0), (3,1), (4,0), (4,1), (5,0), (5,1), (5,2), (6,0), (6,1), (6,2)]$

Ramírez Cotonieto Luis Fernando 2CM6

1.6- Los artículos provenientes de una línea de producción se clasifican como defectuosos (D) o no defectuosos (N). Se observan los artículos y se anota su condición. Este proceso se continúa hasta que se produzcan dos artículos defectuosos consecutivos o se verifiquen cuatro artículos cualesquiera que ocurra primero. Describir un espacio muestral para este experimento.

Para que se comprenda mejor, realizaremos un diagrama de árbol.



Entonces tenemos...

[DD, DNDD, DNND, DNNN, DNDN, NDD, NDND, NDNN, NNDD, NNDN, NNND, NNNN]

1.9- Un lote contiene artículos que pesan 5, 10, 15, ..., 50 libras. Supóngase que al menos dos artículos de cada peso se encuentran allí. Se eligen dos artículos del lote. Identifíquese con X el peso del primer artículo elegido y con Y el peso del segundo artículo. Así, el par de números (x, y) representa un solo resultado del experimento. Usando el plano X, Y, indíquese el espacio muestral de los siguientes eventos.

a) $\{(x=y)\}$

b) $\{y > x\}$

c) El segundo artículo pesa el doble del primero

d) El primer artículo pesa 10 libras más que el segundo

e) El promedio de peso de los dos artículos es menos de 30 libras.

Ramírez Cotonieto Luis Fernando 2CM6

a) $[x=y] = [(5,5),(10,10),(15,15),(20,20),(25,25),(30,30),(35,35),$
$(40,40),(45,45),(50,50)]$.

b) $[y>x] = [(5,10),(5,15),(5,20),(5,25),(5,30),(5,35),$
$(5,40),(5,45),(5,50),(10,15),(10,20),(10,25),$
$(10,30),(10,35),(10,40),(10,45),(10,50),(15,20),$
$(15,25),(15,30),(15,35),(15,40),(15,45),(15,50),$
$(20,25),(20,30),(20,35),(20,40),(20,45),(20,50),$
$(25,30),(25,35),(25,40),(25,45),(25,50),(30,35),$
$(30,40),(30,45),(30,50),(35,40),(35,45),(35,50),$
$(40,45),(40,50),(45,50)]$

c) $[y=2x] = [(5,10),(10,20),(15,30),(20,40),(25,50)]$

d) $[x=x-10y] = [(5,15),(10,20),(15,25),(20,30),(25,35),$
$(30,40),(35,45),(40,50)]$

e) $[x+y<60] = [(5,5),(5,10),(5,15),(5,20),(5,25),$
$(5,30),(5,35),(5,40),(5,45),(5,50)$
$(10,5),(10,10),(10,15),(10,20),(10,25),$
$(10,30),(10,35),(10,40),(10,45),(15,5),$
$(15,10),(15,15),(15,20),(15,25),(15,30)$
$(15,35),(15,40),(20,5),(20,10),(20,15),$
$(20,20),(20,25),(20,30),(20,35),(25,5),$
$(25,10),(25,15),(25,20),(25,25),(25,30),$
$(30,5),(30,10),(30,15),(30,20),(30,25),$
$(35,5),(35,10),(35,15),(35,20),(40,5),$
$(40,10),(40,15),(45,5),(45,10),(50,5)]$

Ramírez Cotonreto Luis Fernando 2CM6

1.11- Sean A, B y C tres eventos asociados con un experimento. Expresar las siguientes proposiciones verbales en notación de conjuntos.

a) Al menos uno de los eventos ocurre

b) Exactamente uno de los eventos ocurre

c) Exactamente dos de los eventos ocurren

d) No ocurren más de dos eventos simultaneamente.

a) $A \cup B \cup C$

b) Tenemos 3 casos $[A, \bar{B}, \bar{C}]$, $[\bar{A}, B, \bar{C}]$, y $[\bar{A}, \bar{B}, C]$ así que hablariamos de la unión de ellos.

$$[A \cap \bar{B} \cap \bar{C}] \cup [\bar{A} \cap B \cap \bar{C}] \cup [\bar{A} \cap \bar{B} \cap C]$$

c) $[A \cap B \cap \bar{C}] \cup [A \cap \bar{B} \cap C] \cup [\bar{A} \cap B \cap C]$

d) $[\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}] \cup [\bar{A} \cap \bar{B} \cap C] \cup [A \cap \bar{B} \cap \bar{C}] \cup [\bar{A} \cap B \cap \bar{C}]$
$\cup [A \cap B \cap \bar{C}] \cup [A \cap \bar{B} \cap C] \cup [\bar{A} \cap B \cap C]$

1.13- a) Demostrar que para dos eventos cualesquiera, A_1 y A_2, tenemos $P(A_1 \cup A_2) \leq P(A_1) + P(A_2)$

b) Demostrar que para n eventos cualesquiera $A_1 \ldots A_n$, tenemos $P(A_1 \cup \ldots \cup A_n) \leq P(A_1) + \ldots P(A_n)$

a) $P[A_1 \cup A_2] = P[A_1] + P[A_2] - P[A_1 \cap A_2]$

Tenemos este teorema, en el cual

$P[A_1 \cap A_2] \geq 0$ obtenemos

$$P[A_1 \cup A_2] \leq P[A_1] + P[A_2]$$

Ramírez Cotonieto Luis Fernando 2CM6

b) Utilizando inducción matemática tenemos
Sea S el conjunto de los enteros positivos n

$$P[\bigcup_{i=1}^{n} A_i] \leq \sum_{i=1}^{n} P[A_i]$$

$P[A_1] = P[A_1]$ ⟵ Por lo visto en a)
$= 1$

$n = m \in S$, entonces $n = m+1 \in S$.
Si $m \in S$, es

$$P[\bigcup_{i=1}^{m} A_i] \leq \sum_{i=1}^{m} P[A_i]$$

$$P[\bigcup_{i=1}^{m+1} A_i] = P[(\bigcup_{i=1}^{m} A_i) \cup A_{m+1}]$$

$$= P[\bigcup_{i=1}^{m} A_i] + P[A_{m+1}] - P[(\bigcup_{i=1}^{m} A_i) \cap A_{m+1}]$$

$$= \sum_{i=1}^{m} P[A_i] + P[A_{m+1}]$$

$$= \sum_{i=1}^{m+1} P[A_i]$$

Comprobamos que $m \in S$ implica $m+1 \in S$.
Concluimos que S es el conjunto de todos los enteros positivos.

1.17. Supóngase A, B y C son eventos tales que

$P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{4}$
$P(A \cap B) = P(C \cap B) = 0$
y $P(A \cap C) = 1/8$

Calcular la probabilidad de que al menos uno de los eventos A, B o C, ocurra.

Ramírez Cotonieto Luis Fernando 2CM6

Tenemos que sacar al menos un evento es $A \cup B \cup C$.
Entonces:

$$P[A \cup B \cup C] = P[A] + P[B] + P[C] - P[A \cap B] - P[A \cap C] - P[B \cap C] + P[A \cap B \cap C]$$

Sustituyendo...

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \cancel{0} - \frac{1}{8} - \cancel{0} + \cancel{0}$$

$$= \frac{3}{4} - \frac{1}{8}$$

$$= \frac{6}{8} - \frac{1}{8}$$

$$= \frac{5}{8}$$

Ramírez Cotonieto Luis Fernando 2CM6