Ejercicios Resueltos de Estadística:
Tema 4: Probabilidades y Variables Aleatorias

1. Supongamos que la probabilidad de tener una unidad defectuosa en una línea de ensamblaje es de 0.05. Si el conjunto de unidades terminadas constituye un conjunto de ensayos independientes:

1. ¿cuál es la probabilidad de que entre diez unidades dos se encuentren defectuosas?

2. ¿y de que a lo sumo dos se encuentren defectuosas?

3. ¿cual es la probabilidad de que por lo menos una se encuentre defectuosa?

<u>SOLUCIÓN:</u>

Sea δi una variable aleatoria que representa el estado de una unidad terminada en la línea de ensamblaje en el momento *i*, siendo δi= 1 si la unidad es defectuosa y δ=0 en caso contrario. La variable δ sigue una distribución Bernoulli con parámetro p=0'05, de acuerdo con el dato inicial del problema. Además, nótese que un conjunto de unidades terminadas constituye un conjunto de ensayos independientes, por lo que el número de unidades defectuosas de un total de n unidades terminadas ($\delta 1 \ldots\ldots\ldots \delta$n), esto es, $\eta_{n,p} = \sum_{i=1}^{n} \delta i$, sigue una distribución binomial de parámetros n y p=0,05. Hechas estas consideraciones iniciales, procedemos a resolver el problema:

1. Procedamos a calcular:

$$P(\eta_{10,0'05} = 2) = \binom{10}{2} * 0'05^{2} * (1-0,05)^{8} = 0,0476$$

2. Se tiene que:

$$P(\eta_{10,0'05} \leq 2) = \binom{10}{i} * 0'05^{i} * (1-0,05)^{10-i} = 0,9984$$

3. Por último:

$$P(\eta_{10,0'005} \geq 1) = 1 - P(\eta_{10,0'05} = 0) = 1 - \binom{10}{0} * 0,05^{0} * (1-0,05)^{10-0} = 1 - 0,5987 = 0,4013$$

2. El gerente de un restaurante que sólo da servicio mediante reservas sabe, por experiencia, que el 20% de las personas que reservan una mesa no asistirán. Si el restaurante acepta 25 reservas pero sólo dispone de 20 mesas, ¿cuál es la probabilidad de que a todas las personas que asistan al restaurante se les asigne una mesa?

SOLUCIÓN:

Representemos por la variable aleatoria δ la decisión de asistir ($\delta = 0$) o no ($\delta = 1$) finalmente al restaurante por parte de una persona que ha hecho una reserva. Esta variable sigue una distribución de Bernoulli de parámetro $p = 0{,}2$, de acuerdo con el enunciado del ejercicio. Suponiendo que las distintas reservas son independientes entre sí, se tiene que, de un total de n reservas ($\delta 1 \ldots \delta n$), el número de ellas que acuden finalmente al restaurante es una variable aleatoria $Yn = \sum_{i=1}^{n} \delta 1$, con distribución binomial de parámetros n y p=0,2. En el caso particular del problema, n=25. Entonces, para aquellas personas que asistan al restaurante de las 25 que han hecho la reserva puedan disponer de una mesa, debe ocurrir que acudan 20 o menos. Así se tiene que:

$$P(Y \leq 20) = \sum_{i=0}^{20} \binom{25}{i} * 0{,}2^{i} * (1 - 0{,}2)^{25-i} = 0{,}5799$$

---

3. Una empresa electrónica observa que el número de componentes que fallan antes de cumplir 100 horas de funcionamiento es una variable aleatoria de Poisson. Si el número promedio de estos fallos es ocho,

1. ¿cuál es la probabilidad de que falle un componente en 25 horas?

2. ¿y de que fallen no más de dos componentes en 50 horas?

3. ¿cuál es la probabilidad de que fallen por lo menos diez en 125 horas?

SOLUCIÓN:

Sea la variable aleatoria δ, con distribución de Poisson con parámetro $\lambda_{\delta} = E[\delta] = 8$, que determina el número de componentes que fallan antes de cumplir 100 horas de funcionamiento.

1. Considerando que se cumplen ciertas condiciones de regularidad, podemos asumir que una variable η que mide el número de componentes que fallan antes de cumplir 25 horas de funcionamiento sigue una distribución de Poisson con parámetro $\lambda_\eta = E[\eta] = 8{=}4 = 2$.

Por lo tanto, la probabilidad deseada es la siguiente:

$$P = (\eta = 1) = \frac{2^1}{1!} * e^{-2} = 0{,}27067$$

2. Análogamente, definimos una variable aleatoria *U* con distribución de Poisson de parámetro $\lambda_U = 8{=}2 = 4$, que mide el número de componentes que fallan antes de cumplir las 50 horas de funcionamiento. Se tiene entonces que:

$$P(U \leq 2) = \sum_{i=0}^{2} \frac{4^i}{i!} * e^{-4} = 0{,}2381$$

3. De la misma forma, definiendo una variable aleatoria V con distribución de Poisson de parámetro $\lambda_V = 10$, se obtiene:

$$P(V \geq 10) = 1 - P(V < 10) = 1 - \sum_{i=0}^{10} \frac{10^i}{i!} * e^{-10} = 0{,}41696$$

---

4. Sean λ y η las variables aleatorias que cuentan el número de veces que sale 1 y 6, respectivamente, en 5 lanzamientos de un dado. ¿Son λ y η independientes?.

SOLUCIÓN:

Las variables λ y η siguen una distribución binomial de parámetros n=5 y p=1/6. Veamos mediante un contraejemplo, que λ y η no son independientes. Por un lado se tiene que:

$$P = (\lambda = 0, \eta = 0) = \left(\frac{2}{3}\right)^5,$$

pero

$$P(\lambda = 0) = \left(\frac{5}{6}\right)^5 = P(\eta = 0)$$

$$P = (\lambda = 0, \eta = 0) = \left(\frac{2}{3}\right)^5 \neq P(\lambda = 0) * P(\eta = 0) = \left(\frac{5}{6}\right)^{10},$$

concluyéndose así que las variables no son independientes.

---

5. Supóngase que la producción de un día de 850 piezas manufacturadas contiene 50 piezas que no cumplen con los requerimientos del cliente. Se seleccionan del lote dos piezas al azar y sin reemplazo. Sea la variable aleatoria X igual al número de piezas de la muestra que no cumplen. ¿Cuál es la función de distribución acumulada de X?

<u>SOLUCIÓN:</u>

La pregunta puede contestarse encontrando primero la función de masa de probabilidad de X.

P(x=0)= (800/850)(799/849)=0,886

P(x=1)=2(800/850)(50/849)=0,111

P(x=2)=(50/850)(49/849)=0,003

Por lo tanto,

F(0)=P($x \leq 0$)=0.886

F(1)=P($x \leq 1$)=0.886+0,111=0,997

F(2)=P($x \leq 2$)=1

---

6. Cada muestra de aire tiene 10% de posibilidades de contener una molécula rara particular. Suponga que las muestras son independientes con respecto a la presencia de la

molécula rara. Encuentre la probabilidad de que en las siguientes 18 muestras, exactamente 2 contengan la molécula rara.

SOLUCIÓN:

Sea X=número de muestras de aira que contiene la molécula rara en la siguientes 18 muestras analizadas. Entonces X es una variable aleatoria binomial con p=0,1 y n=18. Por lo tanto,

P(X=2)=$\binom{18}{2}(0,2)^2(0,9)^{16}$

Ahora bien, $\binom{18}{2} = (18!/[2!16!]) = 18(17)/2 = 153.$ Por lo tanto,

$P(x=2) = 153(0,1)^2(0,9)^{16} = 0,284$

---

7. Un avión de alto rendimiento contienen tres computadoras idénticas. Se utiliza únicamente una para operar el avión; las dos restantes son repuestos que pueden activarse en caso de que el sistema primario falle. Durante una hora de operación la probabilidad de que una falle en la computadora primaria(o de cualquiera de los sistemas de repuesto activados) es 0,0005. Suponiendo que cada hora representa un ensayo independiente,

(a) ¿Cuál es el tiempo promedio para que fallen las tres computadoras?

(b) ¿Cuál es la probabilidad de que las tres computadoras fallen en un vuelo de 5 horas?

SOLUCIÓN:

Sea que X denote el número de horas hasta que los tres sistemas fallen, y sea que X1, X2 y X3 denoten el número de horas de operación antes de una falla de la primera, la segunda y la tercera computadoras usadas, respectivamente. Entonces, X=X1+X2+X3. Además, se supone que las horas comprenden ensayos independientes con la probabilidad con la probabilidad constante de falla p=0.0005 y r=3. En consecuencia,

E(X)= 3/0.0005= 6000horas

¿Cuál es la probabilidad de que las tres computadoras fallen en un vuelo de 5 horas? La probabilidad pedida es $P(x \leq 5)$ y

$$P(x \leq 5)=P(x=3)+P(x=4)+P(x=5)=0.0005^3+\binom{3}{2}0.0005^3(0,9995)+\binom{4}{2}0.0005^3(0.9995)$$

$$=1.25*10^{-10}+3,75*10^{-10}+7,49*10^{-10}=1,249*10^{-10}$$

---

8. Un lote contiene 100 piezas de un proveedor de tubería local y 200 unidades de un proveedor de tubería del estado vecino. Si se seleccionan cuatro piezas al azar y sin reemplazo,

(a) ¿cuál es la probabilidad de que todas sean del proveedor local?

(b) ¿Cuál es la probabilidad de que dos o más piezas de la muestra sean del proveedor local?

(c) ¿Cuál es la probabilidad de que al menos una pieza de la muestra sea del proveedor local?

SOLUCIÓN:

¿cuál es la probabilidad de que todas sean del proveedor local?

Sea X igual al número de piezas de la muestra del proveedor local. Entonces, x tiene una distribución hipergeométrica y la probabilidad pedida es P(x=4). Por consiguiente,

$$P(x=4)=\frac{\binom{100}{4}\binom{200}{0}}{\binom{300}{4}}=0.0119$$

¿Cuál es la probabilidad de que dos o más piezas de la muestra sean del proveedor local?

$$P(x \geq 2)=\frac{\binom{100}{2}\binom{200}{2}}{\binom{300}{4}}+\frac{\binom{100}{3}\binom{200}{1}}{\binom{300}{4}}+\frac{\binom{100}{4}\binom{200}{0}}{\binom{300}{4}}=0.298+0.098+0.0119=0.408$$

¿Cuál es la probabilidad de que al menos una pieza de la muestra sea del proveedor local?

$$P(x \geq 1) = 1 - P(x=0) = 1 - \frac{\binom{100}{0}\binom{200}{4}}{\binom{300}{4}} = 0.196$$

---

9. Supongamos que el número de imperfecciones en un alambre delgado de cobre sigue una distribución Poisson con una media de 2.3 imperfecciones por milímetro.

(a) Determine la probabilidad de 2 imperfecciones en un milímetro de alambre.

(b) Determine la probabilidad de 10 imperfecciones en 5 milímetros de alambre.

(c) Determine la probabilidad de al menos una imperfección en 2mm de alambre

---

<u>SOLUCIÓN:</u>

(a) Determine la probabilidad de 2 imperfecciones en un milímetro de alambre.

Entonces E(x)=2.3 imperfecciones y

$$P(x=2) = \frac{e^{-2.3}\,3*3^{2}}{2!} = 0.265$$

(b) Determine la probabilidad de 10 imperfecciones en 5 milímetros de alambre.

Sea que X denote el número de imperfecciones en 5 milímetro de alambre. Entonces, X tiene una distribución Poisson con

E(x)=5mmx2.3 imperfecciones/mm= 11,5 imperfecciones.

Por lo tanto,

P(x=10)=e $^{-11.5}$ 11.5 / 10!= 0.113

(c) Determine la probabilidad de al menos una imperfección en 2mm de alambre.

Sea que x denote el número de imperfecciones en 2 milímetros de alambra. Entonces, X tiene una distribución de Poisson con

E(x)=2mmx2.3imperdecciones/mm=4.6imperfecciones

Por lo tanto,

P(x $\geq$ 1)=1-P(x=0)=1-e $^{-4.6}$ =0.9899

---

10. La contaminación constituye un problema en la fabricación de discos de almacenamiento óptico. El número de partículas de contaminación que ocurre en un disco óptico tiene una distribución de Poisson y el número promedio de partículas por centímetro cuadrado de superficie del disco es 0.1. El área de un disco bajo estudio es 100 centímetros cuadrados.

(a) Encuentre la probabilidad de que ocurran 12 partículas en el área del disco bajo estudio.

(b) La probabilidad de que ocurran cero partículas en el área del disco bajo estudio

(c) Determine la probabilidad de que 12 o menos partículas ocurran en el área del disco bajo estudio

---

SOLUCIÓN:

Sea que x denote el número de partículas en el área de un disco bajo estudio. Puesto que el número promedio de partículas es 0.1 partículas por cm ^{2} .

E(x)=100 cm ^{2} x0.1 partículas/ cm ^{2} = 10 partículas

Por lo tanto,

(a) P(x=12)= $\dfrac{e^{-10}10^{12}}{12!}$ = 0.095

(b) La probabilidad de que ocurran cero partículas en el área del disco bajo estudio es

P(x=0)=e^{-10}=$4.54\text{x}10^{-5}$

(c) Determine la probabilidad de que 12 o menos partículas ocurran en el área del disco bajo estudio. La probabilidad es

P($X \leq 12$)=P(x=0)+P(x=1)+…..+P(x=12)=$\sum_{i=0}^{12}\dfrac{e^{-10}10^{i}}{i!}$

---

11. Una muestra aleatoria con reposición de tamaño n=2 se selecciona del conjunto {1,2,3} produciendo el espacio equiprobable de 9 elementos.

S={(1,1),(1,2),(1.3),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(3,3)}

Sea X la suma de los dos números.

(a) Encuentre la distribución *f* de X.
(b) Encuentre el valor esperado E(X).

SOLUCIÓN:

(a) La variable aleatoria X asume los valores 2,3,4,5,6, es decir, R_x={2,3,4,5,6}. Se calcula la distribución *f* de X:

(i) Un punto (1,1) tiene suma 2; donde *f*(2)=1/9.
(ii) Dos puntos (1,2) y (2,1) tienen suma 3; de donde *f*(3)=2/9.
(iii) Tres puntos (1,3),(2,2) y (1,3) tienen suma 4; de donde *f*(4)=3/9.
(iv) Dos puntos, (2,3),(3,2) tienen suma 5; de donde *f*(5)=2/9.
(v) Un punto (3,3) tiene suma 6; de donde *f*(6)=1/9.

Por tanto, la distribución *f* de X es la siguiente:

x	2	3	4	5	6
f(x)	1/9	2/9	3/9	2/9	1/9

(b) Se obtiene el valor esperado E(X) multiplicando cada valor de x por su probabilidad y tomando la suma. Por tanto,

$$E(X) = 2\left(\frac{1}{9}\right) + 3\left(\frac{2}{9}\right) + 4\left(\frac{3}{9}\right) + 5\left(\frac{2}{9}\right) + 6\left(\frac{1}{9}\right)$$

---

12. Una caja contiene 8 bombillos, de los cuales están 3 están defectuosos. Se selecciona un bombillo de la caja y se prueba. Si este sale defectuoso se selecciona y se prueba otro bombillo, hasta que se escoja un bombillo no defectuoso. Encuentre el número esperado E de bombillos seleccionados.

<u>SOLUCIÓN:</u>

Escribiendo D para significar defectuoso y N para no defectuoso, el espacio muestral S tiene los cuatro elementos

N. DN, DDN, DDDN

con las posibilidades respectivas.

$$\frac{5}{8}, \qquad \frac{3}{8}\cdot\frac{5}{7} = \frac{15}{56}, \qquad \frac{3}{8}\cdot\frac{2}{7}\cdot\frac{5}{6} = \frac{5}{56}, \qquad \frac{3}{8}\cdot\frac{2}{7}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{5} = \frac{1}{56}$$

El número X de bombillos escogidos tiene los valores

X(N)=1, X(DN)=2, X(DDN)=3, X(DDDN)=4

con las probabilidades anteriores respectivas. De donde

$$E(X) = 1\left(\frac{5}{8}\right) + 2\left(\frac{15}{56}\right) + 3\left(\frac{5}{56}\right) + 4\left(\frac{1}{56}\right) = \frac{3}{2} = 1.5$$

---

13. Se lanza un dado equilibrado produciendo el espacio equiprobable

S= {1,2,3,4,5,6}

Sea X el doble del número que aparece. Encuentre la distribución *f*, la media μ_x, la varianza σ_x^2 y la desviación estándar σ_x de X.

SOLUCIÓN:

Aquí X(1)=2, X(2)=4, X(3)=6, X(4)=8, X(5)=10, X(6)=12. También, cada número tiene probabilidad 1/6. Por tanto, la siguiente es la distribución f de X:

x	2	4	6	8	10	12
f(x)	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

En consecuencia,

$\mu_x = E(X) = \sum x_i f(x_i) =$

$$= 2\left(\frac{1}{6}\right) + 4\left(\frac{1}{6}\right) + 6\left(\frac{1}{6}\right) + 8\left(\frac{1}{6}\right) + 10\left(\frac{1}{6}\right) + 12\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{42}{6} = 7$$

$E(X^2) = \sum x_i^2 f(x_i) =$

$$= 4\left(\frac{1}{6}\right) + 16\left(\frac{1}{6}\right) + 36\left(\frac{1}{6}\right) + 64\left(\frac{1}{6}\right) + 100\left(\frac{1}{6}\right) + 144\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{354}{6} = 60.7$$

Entonces,

$\sigma_x^2 = \mathrm{var}(X) = E(X^2) - \mu_x^2 = 60.7 - (7)^2 = 11.7$

$\sigma_x = \sqrt{\mathrm{var}(X)} = \sqrt{11.7} = 3.4$

14. Encuentre la media μ = E(X), la varianza σ^2 =var(X) y la desviación estándar $\sigma = \sigma_x$ de la distribución

X_i	1	3	5	7
P_i	0.3	0.1	0.4	0.2

SOLUCIÓN:

Aquí la distribución se presenta utilizando x_i y f(x). Las siguientes son las formulas análogas:

$$\mu = E(X) = x_1 p_1 + x_i p_2 + \dots\dots + x_m p_m = \sum x_i p_i$$

$$E(X) = x_1^2 p_1 + x_{i2}^2 p_2 + \dots\dots + x_m^2 p_m = \sum x_i^2 p_i$$

Luego,

$$\sigma^2 = \mathrm{var}(X) = E(X^2) - \mu^2 \qquad \text{y} \qquad \sigma = \sigma_x = \sqrt{\mathrm{var}(X)}$$

$$\mu = E(X) = \sum x_i p_i = 1(0.3) + 3(0.1) + 5(0.4) + 7(0.2) = 4.0$$

$$E(X^2) = \sum x_i^2 p_i = 1^2(0.3) + 3^2(0.1) + 5^2(0.4) + 7^2(0.2) = 21.0$$

Entonces,

$$\sigma^2 = \mathrm{var}(X) = E(X^2) - \mu^2 = 21 - (4)^2 = 5$$
$$\sigma = \sqrt{\mathrm{var}(X)} = \sqrt{5 = 2.24}$$

---

15. Una muestra con reposición de tamaño n=2 se selecciona aleatoriamente de los números 1 al 5. Esto produce entonces el espacio equiprobable S conformando por todos los 25 pares de ordenados (a,b) de números del 1 al 5. Es decir,

S={(1,1),(1,2),….,(1,5),(2,1),….,(5,5)}

Sea X=0 si el primer número es par y X=1 de lo contrario; sea Y=1 si el segundo número es impar y Y=0 de lo contrario.

(a) Encuentre las distribuciones de X y Y.

(b) Encuentre la distribución conjunta de X y Y.

(c) Determine si X y Y son independientes.

<u>SOLUCIÓN:</u>

(a) Hay 10 puntos muestrales en los cuales la primera entrada es par, es decir, donde

a=2 o 4 y b=1,2,3,4,5

Por tanto, $P(x=0)=10/25=0.4$ y entonces $P(x=1)=0.6$. Hay 15 puntos muestrales en los cuales la segunda entrada es impar, es decir,

a= 1,2,3,4,5 y b=1,3,5

Por consiguiente, $P(Y=1)=15/25=0.6$ y entonces $P(Y=0)=0.4$. Por esta razón las distribuciones de X y Y son las siguientes:

x	0	1
P(x)	0.4	0.6

y	0	1
P(y)	0.4	0.6

(Observe que X y Y están distribuidas idénticamente.)

(b) Para la distribución conjunta de X y Y se tiene

$P(0,0) = P(\text{a par, b par}) = P\{(2,2),(2,4),(4,2),(4,4)\}=4/25=0.16$

$P(0,1) = P(\text{a par, b impar}) = P\{(2,1),(2,3),(2,5),(4,1),(4,3),(4,5)\}=6/25=0.24$

En forma similar $P(1,0)=6/25=0.24$ y $P(1,1)=9/25=0.36$. Por lo cual, la Fig. 1 da la distribución conjunta de X y Y.

Y \ X	0	1	Suma
0	0.16	0.24	0.4
1	0.24	0.36	0.6
Suma	0.4	0.6	

Fig.1

(c) El producto de las entradas marginales de las cuatro entradas interiores; por ejemplo,

P(0,0) = 0.16 = (0.4)(0.4) = P(X=0) P(Y=0)

Por tanto, X y Y son variables aleatorias independientes, aunque estén distribuidas idénticamente.

---

16. Una prueba consta de 200 preguntas de verdadero o falso, para un sujeto que respondiese al azar ¿Cual sería la probabilidad de que acertase:

a) 50 preguntas o menos.

b) Más de 50 y menos de 100.

c) Más de 120 preguntas.

<u>SOLUCIÓN:</u>

El número de preguntas acertadas seguirá una distribución Binomial con n = 200 y p= 0,5. Ahora bien, como el número de pruebas es elevado esta distribución se puede aproximar por una Normal de media 200·0,5 = 100 y de varianza 200·0,5·0,5 = 50 o lo que es lo mismo con desviación típica 7,07, luego:

a) $P(x \leq 50) \approx P(X \leq 50{,}5) = P\left(Z \leq \dfrac{50{,}5 - 100}{7{,}07}\right) = P(Z \leq -7) \approx 0$

b) $P(50 \prec x \prec 100) = P(x \leq 99) - P(x \leq 51) = P\left(Z \leq \dfrac{99{,}5 - 100}{7{,}07}\right) - P\left(Z \leq \dfrac{50{,}5 - 100}{7{,}07}\right) =$

□ $P(Z \leq -0{,}07) - P(Z \leq -7) = 0{,}4721 - 0 = 0{,}4721$

c) $P(x \succ 120) = P\left(Z \succ \dfrac{120{,}5 - 100}{7{,}07}\right) = 1 - P(Z \leq 2{,}9) = 1 - 0{,}9981 = 0{,}0019$

---

17. Una gran tienda de artículos eléctricos descubre que el número *x* de tostadores vendidos por semana obedece a una ley de Poisson de media 10. La ganancia de cada tostador vendido es de 500 ptas. Sin embargo, un lunes se encuentran con que solo les quedan 10 tostadores, y que a lo largo de esa semana no van a poder traer más del almacén. Determinar la distribución de las ganancias totales (en ptas.) en concepto de tostadores de pan a lo largo de esa semana.

SOLUCIÓN:

Teniendo en cuenta los datos del problema, podemos definir una variable aleatoria ´, que representa la ganancia total (en pesetas) en concepto de tostadores de pan a lo largo de la semana considerada, a partir de la variable *x*:

$$\eta = \begin{cases} 500 \cdot x & 0 \leq x \prec 10 \\ 5000 & x \geq 10 \end{cases}$$

En el segundo caso, si la demanda *x* es de más de 10 tostadores, es decir, si supera al número de existencias, solo es posible vender este último numero de tostadores.

La distribución de las ganancias totales en pesetas es, por tanto:

$$F_n(t) = P(\{w \in \Omega : \eta(w) \leq t \ \}) =$$

$$= \begin{cases} 0 & si \ldots t \prec 0 \\ P(500 \cdot x \leq t) = F_x\left(\dfrac{t}{500}\right) = \displaystyle\sum_{t=0}^{[t/500]} P(x = i) & si \ldots 0 \leq t \prec 5000 \\ 1 & si \ldots t \geq 5000 \end{cases}$$

18. El tiempo de reparación de unas máquinas de escribir tiene una distribución aproximadamente exponencial, con media 22 minutos.

1. Hallar la probabilidad de que el tiempo de reparación sea menor que diez minutos.

2. El costo de reparación es de 2000 pts. por cada media hora o fracción. ¿Cuál es la probabilidad de que una reparación cueste 4000 pts.?

3. Para efectuar una programación, ¿cuanto tiempo se debe asignar a cada reparación para que la probabilidad de que cualquier tiempo de reparación mayor que el tiempo asignado sea solo de 0.1?

SOLUCIÓN:

Definamos una variable aleatoria *x* que representa el tiempo de reparación (en minutos) de las máquinas y sigue una distribución exponencial de parámetro $\lambda = (E|x|)^{-1} = 1/22$. Por lo tanto, la función de densidad de esta variable es:

$$fx\,(x) = \frac{1}{22} \cdot e^{-x/22}, x \succ 0.$$

1). La probabilidad de que un tiempo de reparación sea menor que diez minutos es:

$$P\,(x \prec 10) = \int_0^{10} \frac{1}{22} \cdot e^{-x/22} \theta x = -e^{-x/22} \Big|_0^{10} = 1 - e^{-5/11}$$

2). De acuerdo con el enunciado, para un tiempo de reparación dado, el costo de reparación se obtendrá a partir del número total de fracciones de media hora y el conjunto de minutos restantes, inferiores a 30. (Todos, este ultimo inclusive, se cobran a 2000 pesetas). Teniendo esto en cuenta, se observa que una reparación costara 4000 pesetas siempre que su duración sea superior a 30 minutos e inferior o igual a 60 minutos (y así cada fracción de la segunda media hora se cobrará como una media hora entera). Así:

$$P\,(30 \prec x \leq 60) = \int_{30}^{60} \frac{1}{22} \cdot e^{-x/22} \theta x = -e^{-30/11} + e^{-15/11}$$

3). Representamos por t ($t > 0$) el tiempo asignado a una reparación (en minutos). Debe verificarse:

$P\,(x > t) = 0{,}1;$

es decir:

$$\int_t^{\infty} \frac{1}{22} \cdot e^{-x/22} \theta x = -e^{-x/22} \Big|_t^{\infty} = e^{-t/22} = 0{,}1$$

y esto se cumple para t = -22* ln0,1 = 50, 657 $\cong$ 51 minutos.

---

19. Para averiguar el tamaño *N* de una población de lagartos se utiliza el método siguiente de captura-marcaje-recaptura. Se capturan *k* lagartos, se les marca y se les reincorpora a su población. Un tiempo después se realizan *n* avistamientos independientes de los que *»* es el numero de ellos que están marcados.

1. Obtener una expresión para la probabilidad de que *»* = *m*.

2. Si *k* = 4 y *m* = 1, demostrar que la probabilidad es máxima cuando *N* = 4*n:*

3. Si *N* = 12, *k* = 4 y *n* = 3, ¿cuál es la probabilidad de que los tres lagartos observados estén marcados si sabemos que al menos uno de ellos lo está?

SOLUCIÓN:

Teniendo en cuenta que los n avistamientos que se realizan son independientes, la variable aleatoria x sigue una distribución binomial de parámetros n y k=N, donde k=N es la probabilidad de que un lagarto escogido al azar de la población este marcado.

1). La probabilidad de que m de los lagartos estén marcados es:

$$P(x=m)=\binom{n}{m}\cdot\left(\frac{k}{N}\right)^{m}\cdot\left(1-\frac{k}{N}\right)^{n-m}, m=0,1,\ldots,n.$$

2). Si $k = 4$ y $m = 1$:

$$P(x=1)=\binom{n}{1}\cdot\left(\frac{4}{N}\right)^{1}\cdot\left(1-\frac{4}{N}\right)^{n-1}=\frac{4\cdot n\cdot(N-4)^{n-1}}{N^{n}}$$

Derivando en la anterior expresión respecto de N e igualando a cero se obtiene que:

$$N^{n-1}\cdot(N-4)^{n-2}\cdot\left[(n-1)\cdot N-(N-4)\cdot n\right]=0$$

por lo que $N = 4n$

3). Si $N = 12$, $k = 4$ y $n = 3$, la probabilidad de que los tres lagartos estén marcados sabiendo que al menos uno de ellos lo está es:

$$P(x=3\,|\,x\geq 1)=\frac{P(x=3,x\geq 1}{P(x\geq 1)}=\frac{P(x=3)}{1-P(x=0)}=\frac{1}{397}$$

20. Una alumna trae cada día a la Universidad una tableta de chocolate de 16 cm., y de cuando en cuando le da un mordisco y se come la mitad de lo que le queda. Asumiendo que esta golosa apetencia aparece en la mañana siguiendo una distribución de Poisson de media un mordisco por hora:

1. Calcular la distribución del tiempo que transcurre hasta que aparece la primera mordida.

2. ¿Cuantos centímetros de chocolate esperas que le quede tras las cinco horas de clases?

3. ¿Qué probabilidad hay de que soporte una hora de clase sin morder su tableta?

4. Si un día, entre las 9:00 y las 14:00 horas, la ha mordido en cuatro ocasiones, ¿que probabilidad hay de que lo haya hecho durante las tres primeras horas de clase?

SOLUCIÓN:

1). Fijado cualquier intervalo temporal de amplitud *t* horas, para $t > 0$ arbitrario pero fijo, sea *xt* la variable aleatoria que mide el numero de mordiscos que se producen en dicho intervalo. Según el enunciado, esta variable aleatoria sigue una distribución de Poisson de parámetro *t*, es decir:

$P(x = k) = \frac{t^k}{k!} \cdot e^{-t}$, para toda k = 0, 1, 2,….

Consideremos otra variable aleatoria $\eta 1$ que mide el tiempo que transcurre hasta que se produce el primer mordisco en un intervalo de amplitud ilimitada. Se pretende demostrar que:

$f_{n1}(x) = e^{-x}$, para todo x$\succ 0$.

En efecto, utilizando la información disponible para *xt* y la relación entre ambas variables aleatorias, se tiene que, para cualquier $x > 0$:

$$F_{n1}(x) = P(\eta_1 \leq x) = 1 - P(\eta_1 \succ x) = 1 - P(x = 0) = 1 - e^{-x} \cdot \frac{x^0}{0!} = 1 - e^{-x}$$

luego el tiempo que transcurre hasta que aparece la primera mordida sigue una distribución exponencial de parámetro 1.

2). Sea $\varsigma 5$ la variable aleatoria que mide la longitud de la tableta restante tras un intervalo de tiempo de 5 horas. Claramente:

$$\varsigma 5 = \frac{16}{2^{\varsigma 5}}$$

y por lo tanto lo solicitado es:

$$E\left[\varsigma_5\right] = E\left[\frac{16}{2^{\varsigma 5}}\right] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{16}{2^{\varsigma 5}} \cdot P(\varsigma_5 = k) = 16e^{-5/2}$$

3). La probabilidad de que soporte una hora de clase sin morder su tableta es:

$$P(x=0)=\frac{1^0}{0!}\cdot e^{-1}=\frac{1}{e}$$

4). La probabilidad de que haya mordido la tableta cuatro veces en 5 horas, sabiendo que lo ha hecho en las tres primeras horas de clase es:

$$P(x_3=4\ |x_5=4)=\frac{\left(\frac{3^4}{4!}\cdot e^{-3}\right)\cdot\left(\frac{2^0}{0!}\cdot e^{-2}\right)}{\left(\frac{5^4}{4!}\cdot e^{-5}\right)}=0{,}1296$$

---

21. Las diagonales de un polígono se obtienen uniendo pares de vértices no adyacentes.

1. Obtener el número de diagonales del cuadrado, el hexágono y el octógono. Calcularlo para el caso general de un polígono de n lados.

2. ¿Existe algún polígono en el que el número de lados sea igual al de diagonales?

SOLUCIÓN:

1). Comenzamos calculando el número de diagonales del cuadrado. Hay C = 6 uniones posibles de dos vértices diferentes cualesquiera, adyacentes o no. Si de estas 6 parejas eliminamos las que corresponden a vértices adyacentes (tantas como el número de lados del cuadrado), quedarán 6 - 4 = 2 diagonales.

Procediendo del mismo modo con el hexágono, se obtienen

$C_{6;2}-6=\frac{6!}{2!\cdot 4!}-6$ = 15 - 6 = 9 diagonales

Análogamente, en el caso del octógono, se obtienen

$C_{8;2}-8=\frac{8!}{2!\cdot 6!}-8=\frac{8\cdot 7}{2}-8$ = 28 - 8 = 20 diagonales.

Finalmente, para el caso general de un polígono de n lados, el número de diagonales es:

$$C_{n;2} - n = \frac{n!}{2!\cdot(n-2)!} - n = \frac{n\cdot(n-1)}{2} - n = \frac{n^2-3n}{2}.$$

2). Veamos si existe algún polígono donde el número de lados sea igual al número de diagonales. Igualando el número de lados y el número de diagonales se obtiene:

$$n=\frac{n^2-3n}{2},$$

es decir, $n(n - 5) = 0$:

Como $n \geq 1$, el resultado n = 0 no es válido. La solución es n = 5 (el pentágono).

---

22. ¿Cuántos números de 4 dígitos se pueden formar con las cifras 0,1,. . . ,9?

1. Permitiendo repeticiones.

2. Sin repeticiones.

3. Si el último dígito ha de ser 0 y no se permiten repeticiones?

SOLUCIÓN:

Asumamos que para que un número sea de 4 dígitos su primer dígito debe ser distinto de cero.

1). Puesto que debe formarse un número de 4 dígitos, el primero de éstos no puede ser cero. Por lo tanto, hay nueve posibilidades para el primer dígito y diez para cada uno de los tres dígitos restantes, obteniéndose un total de $9 \cdot 10^3 = 9000$ números posibles.

2). Al igual que en el apartado anterior, el primer dígito no puede ser cero. Como además no se permiten repeticiones, hay nueve posibilidades para el segundo dígito: el cero y las ocho no escogidas para el primer dígito. Por tanto, se pueden formar $9^2 \cdot 8 \cdot 7 = 4536$ números.

3) Fijamos el último dígito y, como no puede haber repeticiones, se obtiene un total de $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 1 = 504$ números.

23. Los pesos de 2 000 soldados presentan una distribución normal de media65 kg y desviación típica 8 kg. Calcula la probabilidad de que un soldado elegidoal azar pese:

a) Más de 61 kg.

b) Entre 63 y 69 kg.

c) Menos de 70 kg.

d) Más de 75 kg

<u>SOLUCIÓN:</u>

x es N (65, 8)

a) $P\,[x > 61] = P\,[z > \frac{61-65}{8}] = P\,[z > -0{,}5] = P\,[z < 0{,}5] = 0{,}6915$

b) $P\,[63 < x < 69] = P\,[-0{,}25 < z < 0{,}5] = 0{,}2902$

c) $P\,[x < 70] = P\,[z < 0{,}625] = 0{,}7357$

d) $P\,[x > 75] = P\,[z > 1{,}25] = 1 - P\,[z \leq 1{,}25] = 0{,}1056$

---

24. En un proceso de fabricación de tornillos se sabe que el 2% son defectuosos. Los empaquetamos en cajas de 50 tornillos. Calcula la probabilidad de que en una caja haya este número de tornillos defectuosos:

a) Ninguno.

b) Uno.

c) Más de dos.

¿Cuántos tornillos defectuosos habrá, por término medio, en cada caja?

<u>SOLUCIÓN:</u>

x es B (50; 0,02)

a) $P\,[x = 0] = 0{,}9850 = 0{,}364$

b) $P\,[x = 1] = 50 \cdot 0{,}02 \cdot 0{,}9849 = 0{,}372$

c) $P\,[x > 2] = 1 - P\,[x \leq 2] = 1 - (P\,[x = 0] + P\,[x = 1] + P\,[x = 2]) =$

$= 1 - (0{,}364 + 0{,}372 + 0{,}186) = 1 - 0{,}922 = 0{,}078$

Por término medio, habrá $\mu = 50 \cdot 0{,}02 = 1$ tornillo defectuoso en cada caja.

---

25. Sea X una v.a. continua cuya función de distribución es:

$$F(x) = \begin{cases} 0 \quad para \quad x \leq 0 \\ x^3 \quad para \quad 0 < x \leq 1 \\ 1 \quad para \quad x < 1 \end{cases}$$

Obtener la función de densidad.

<u>SOLUCIÓN:</u>

Por definición f(x)=F'(x). Aplicándolo a cada tramo:

$$\begin{array}{ll} Si\, x \leq 0 & f(x) = 0 \\ Para\, x > 1 & f(x) = 0 \\ Para < x \leq 1 & f(x) = 3x^2 \end{array}$$

Resumiendo:

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 \quad para \;\; 0 < x \leq 1 \\ 0 \qquad en \;\; el \; resto \end{cases}$$

---

26. Calcula las probabilidades de las siguientes distribuciones binomiales mediante aproximación a la normal correspondiente (en todas ellas, ten en cuenta el ajuste de media unidad que hay que hacer al pasar de una variable discreta a una continua).

a) *x* es *B* (100; 0,1). Calcula *P*[*x* = 10], *P*[*x* < 2] y *P*[5 < *x* < 15]

b) *x* es *B* (1 000; 0,02). Calcula *P*[*x* > 30] y *P*[*x* < 80]

c) *x* es *B* (50; 0,9). Calcula *P*[*x* > 45] y *P*[*x* ≤ 30]

SOLUCIÓN:

a) x es B (100; 0,1) ≈ x' es N (10; 3)

$P [x = 10] = P [9{,}5 < x' < 10{,}5] = P [–0{,}17 < z < 0{,}17] = 0{,}135$

$P [x < 2] = P [x' \leq 1{,}5] = P [z \leq –2{,}83] = 0{,}0023$

$P [5 < x < 15] = P [5{,}5 \leq x' \leq 14{,}5] = P [–1{,}5 \leq z \leq 1{,}5] = 0{,}8664$

b) x es B (1 000; 0,02) ≈ x' es N (20; 4,427)

$P [x > 30] = P [x' \geq 30{,}5] = P [z \geq 2{,}37] = 0{,}0089$

$P [x < 80] = P [x' \leq 79{,}5] = P [z \leq 13{,}44] = 1$

c) x es B (50; 0,9) = x' es N (45; 2,12)

$P [x > 45] = P [x' \geq 45{,}5] = P [z \geq 0{,}24] = 0{,}4052$

$P [x \leq 30] = P [x' \leq 30{,}5] = P [z \leq –6{,}83] = 0$

---

27. El departamento de control de calidad de una empresa que fabrica pañuelos sabe que el 5% de su producción tiene algún tipo de defecto .Los pañuelos se empaquetan en cajas con 15 elementos. Calcular la probabilidad de que una caja contenga:

a) 2 elementos defectuosos .
b) Menos de 3 elementos defectuosos
c) Entre 3 y 5 elementos defectuosos(ambos incluidos)

SOLUCIÓN:

1 pañuelo, p(d)=0.05=p

n=15 pañuelos, X= #pañuelos defectuosos →B_i(15,p=0.5)

a) $P(X=2)= C_{15,2}\cdot 0.05^2 \cdot 0.95^{15-2} =0.135$

b) $P(X<3)= P (X=0) + P(X=1) + P(X=2) = C_{15,0}\, 0.05^0 \cdot 0.95^{15} + C_{15,1}\, 0.05^1 \cdot 0.95^{14} + C_{15,2}\, 0.05^2 \cdot 0.95^{13} = 0.463 + 0.3657 + 0.135 = 0.9637$

c) $P(3 \leq X \leq 5) = P(X=3) + P(X=4) + P(X=5) = C_{15,3}\, 0.05^3 \cdot 0.95^{12} + C_{15,4}\; 0.05^4 \cdot 0.95^4 + C_{15,5}\, 0.05^5 \cdot 0.95^{10} = 0.03536$

---

28. Una prueba de inteligencia consta de diez cuestiones cada una de ellas con cinco respuestas de las cuales una sola es verdadera .UN alumno responde al azar ¿Cuál es la probabilidad de que responda al menos a dos cuestiones correctamente?¿Cuál la de que responda bien a seis?¿Cuál la de que responda bien como máximo a dos cuestiones?

SOLUCIÓN:

$P(A)=1/5=0.20=p$

n=10 preguntas

a) $X \rightarrow B_i(10\ ,0.2)$

$P(X \geq 2) = 1\text{-}P(X<2) = 1\text{-}[f(0) + f(1)] = 1\text{-}\ [C_{10,0}\ 0.2^0 \cdot 0.8^{10} + C_{10,1}\ 0.2^1\ 0.8^9] = 1\text{-}[0.1073 + 0.2684] = 0.6242$

b) $P(X=6) = C_{10,6}\ \ 0.2^6\ 0.8^4 = 0.0055$

c) $P(X \leq 2) = f(0) + f(1) + f(2) = 0.1073 + 0.2684 + C_{10,2}\ 0.2^{\ 2}\ 0.8^8 = 0.1073 + 0.2684 + 0.3019 = 0.6776$

---

29. Determinar la probabilidad de realizar cierto tipo de experimento con éxito si se sabe que si se repite 24 veces es igual de probable obtener 4 éxitos que 5

SOLUCIÓN:

$P(A) = p$

n= 24 veces , $X \rightarrow B_i\ (24,\ p)$

$p(x = 4) = p(x=5) = \binom{24}{4} * p^4 * q^{20} = \binom{24}{5} * p^5 * q^{19}$

$10626 * p^4 * q^{20} = 42504 * p^5 * q^{19} \quad \rightarrow \quad \frac{q^{20}}{q^{19}} = \frac{42504 * p^5}{10626 * p^4} \quad \rightarrow \quad q = 4 * p$

Que junto con el hecho de que q = 1-p, tenemos que p=0.2.

---

30. Si se contesta sin pensar un test de 10 preguntas en las que hay que contestar si es cierto o falso. ¿Cuál es la probabilidad de acertar el 70 % o mas de las preguntas?, ¿y exactamente 7 de las 10 respuestas?

<u>SOLUCIÓN:</u>

n= 10 preguntas, Preguntas acertadas X $B_i\,(10,0.5)$

$P(X\geq 7) = f(7) + f(8) + f(9) + f(10) = 0.1172 + 0.0439 + 0.0098 + 0.0010 = 0.1719$

Donde, por ejemplo,

$P(X=7) = \binom{10}{7} * 0.50 *^7 * 0.50^2 = 0.1172$

---

31. Los mensajes que llegan a una computadora utilizada como servidor lo hacen de acuerdo con una distribución de Poisson con una tasa promedio de 0.1 mensajes por minuto.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que lleguen como mucho 2 mensajes en una hora?

b) Determinar el intervalo de tiempo necesario para que la probabilidad de que no llegue ningún mensaje durante ese lapso de tiempo sea 0.8.

<u>SOLUCIÓN:</u>

Sea X= mensajes por minuto con Po (0.1). Entonces el número de mensajes por hora será de

Po (6).

a) P (x$\leq$ 2) = f (0) + f (1) + f (2) = 0.0025 + 0.0149 + 0.0446 = 0.062

b) P (X = 0) = 0.8

$$\frac{e^{-\lambda} * \lambda^{0}}{0!} = 0.8 \longrightarrow e^{-\lambda} = 0.8 \longrightarrow \ell n * e^{-\lambda} = \ell n * 0.8$$

$$\ell n * e^{-\lambda} = \ell n * 0.8 \longrightarrow -\lambda * \ell n * e = \ell n 0 \longrightarrow \lambda = 0.2231$$

0.1 mensaje $\longrightarrow$ 1 minuto

0.2231 mensajes $\longrightarrow$ x

$$\left.\begin{array}{l} \\ \end{array}\right\} x = \frac{0.2231}{0.1} = 2.231 \text{ minutos.}$$

---

32. El número de pinchazos en los neumáticos de cierto vehiculo industrial tiene una distribución de Poisson con media 0.3 por cada 50000 kilómetros .Si el vehiculo recorre 100000 km, se pide:

a) probabilidad de que no tenga pinchazos

b) Probabilidad de que tenga menos de tres pinchazos

c) Número de km recorridos para que la probabilidad de que no tenga ningún pinchazo sea 0.4066

SOLUCIÓN:

Si λ = 0.3 para 50000 km, entonces para 10000km tendremos una X$\rightarrow P_o(0.6)$.

a) P(X=0) = 0.5488

b) P(x<3) = P(X=0) + P(x=1) + P(X=2) =0.5488 + 0.3292 + 0.09878 = 0.9767

c) P(X=0) = $e^{-\lambda}$ =0.4066. Por tanto, ln $e^{-\lambda}$ = ln 0.4066 y λ= 0.9

Si 0.3$\rightarrow$ 50000 km, 0.9$\rightarrow$ x km, y por tanto x = 150000km

---

33. En un libro de 500 páginas se distribuyen aleatoriamente 300 erratas de imprenta. Hallar la probabilidad de que en una página haya :

a) exactamente 2 erratas

b) dos o más erratas

<u>SOLUCIÓN:</u>

Si se tienen 300 errores en 500 páginas, tendremos una media de 300/500 = 0.6 errores por página. Sea X=número de errores por página, entonces

a) $X \rightarrow P_o(0.6)$

$P(X=2) = 0.098$

b) $P(X \geq 2) = 1 - P(X<2) = 1 - [f(0) + f(1)] = 1 - [\ 0.5488 + 0.292] = 0.1219$

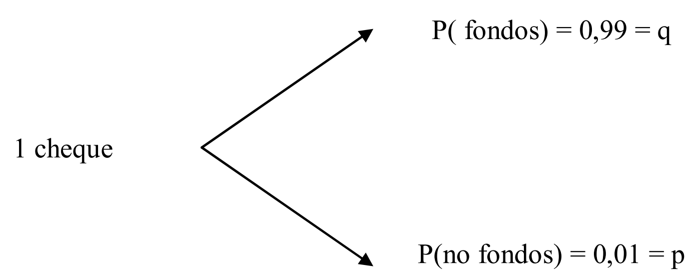
---

34. La probabilidad de que el Banco "Riu Sec" reciba un cheque sin fondos es 1%.

a) Si en una hora reciben 20 cheques, ¿cuál es la probabilidad de que se tenga algún cheque sin fondos?
b) El banco dispone de 12 sucursales en la ciudad, ¿cuál es la probabilidad de que al menos 4 de las sucursales reciban algún cheque sin fondos?
c) Si la media del valor de los cheques sin fondos es de 580 € y el banco trabaja 6 horas diarias, ¿qué cantidad total de euros no se espera pagar?
d) Si se computaran los primeros 500 cheques, ¿cuál es la probabilidad de recibir entre 3 y 6 (inclusive) cheques sin fondos?

<u>SOLUCIÓN:</u>

a) n = 20 cheques



X=número de cheques sin fondos→Bi(20, 0,01)

$P(X \geq 1) = 1\text{-}P(X<1) = 1\text{-}P(X=0) = 1- \binom{20}{0} * 0{,}01^0 * 0{,}99^{20} = 1\text{-}0{,}8179 = \underline{0{,}182}$

b) n = 12 sucursales

1 sucursal

P(al menos 1 cheque sin fondos) = 0,182 = p

P(no recibir 1 cheque sin fondos) = 0,812 = q

X=número de sucursales que reciben al menos 1 cheque $\rightarrow$Bi(12, 0,182)

$P(X \geq 4) = 1\text{-}P(X<4) = 1\text{-}[\rho(0)+ \rho(1)+ \rho(2)+ \rho(3)] = \underline{0{,}2054}$

c) 1 hora$\rightarrow$20 cheques, 6 horas$\rightarrow$ x = 120 cheques

E(x) = n*p = 120*0,01 = 1,2 cheques sin fondos, y por tanto 1,2*580 = <u>696 € no se espera pagar</u>

d) n = 500 cheques

1 cheque

P(fondos) = 0,9 = q

P(sin fondos) = 0, 10 = p

X= número de cheques sin fondos $\rightarrow$Bi(500, 0,01) - $n*p \leq 5$; n*p = 500*0,01 = 5 $\rightarrow P_0(5)$

$P(3 \leq X \leq 6) = \rho(3)+ \rho(4)+ \rho(5)+ \rho(6)= 0{,}1404+0{,}1755+0{,}1755+0{,}1462 = \underline{0{,}6376}$

35. Se sabe que de un lote de 40 semillas no esta en buenas condiciones la cuarta parte. Se toman al azar 8 semillas y se analizan en el laboratorio.¿ Cual es la probabilidad de que 3 de las analizadas estén en malas condiciones?

SOLUCIÓN:

N = 40 semillas

K = 40* $\frac{1}{4}$ = 10 semillas en malas condiciones

n = 8 semillas

$$P\,(X = 3) = \frac{\binom{10}{3} * \binom{30}{5}}{\binom{40}{8}} = 0.222$$

---

36. La duración de un láser semiconductor a potencia constante tiene una distribución normal con media 7.000 horas y desviación típica de 600 horas.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que el láser falle antes de 5.000 horas?
b) ¿Cuál es la duración en horas excedida por el 95 % de los láseres?
c) Si se hace uso de tres laseres en un producto y se supone que fallan de manera independiente.¿ Cuál es la probabilidad de que tres sigan funcionando después de 7.000 horas?

SOLUCIÓN:

X N (7.000 , 600)

a) $P\,(X < 5000) = P\,(z < \frac{5000-7000}{600}) = P\,(z < -3.33) = P\,(z > 3.33) = 1-P\,(z \leq 3.33) =$

$1-0.9996 = 0.004$

b) $P\,(X > a) = 0.95 \longrightarrow P\,(z > \frac{a-7000}{600}) = 0.95$

$\longrightarrow 1-P\,(z \leq \frac{a-7000}{600}) = 0.95 \longrightarrow P\,(z \leq \frac{a-7000}{600}) = 1-0.95 = 0.05$

Tenemos que buscar 0.95 en la columna del Φ (x)(tablas) , el número será -1.65.

Por tanto,

$$\frac{a-7000}{600} = -1.65 \;;\quad a = -1.65 * 600 + 7000 \;;\; a = 6010$$

c) P (X> 7000) = p (z > $\frac{7000-7000}{600}$) = P (z > 0) = 1-P (z $\leq$ 0) = 1-0.5= 0.50

0.50 es la probabilidad de 1 láser siga funcionando después de 7000 horas.

n = 3 láseres

P(F) = 0.50 = p

1 láser

P($\overline{F}$) = 0.50 = q

$$P (X = 3) = \binom{3}{3} * 0.50^{3} * 0.50^{0} = 0.125$$

---

37. Una máquina fabrica tornillos cuyas longitudes se distribuyen normalmente con media 20 mm y varianza 0.25 mm. Un tornillo se considera defectuoso si su longitud difiere de la media más de 1 mm. Los tornillos se fabrican de forma independiente. ¿Cuál es la probabilidad de fabricar un tornillo defectuoso? Si los envasamos en envases de 15 tornillos, probabilidad de que en un envase no tenga más de 2 defectuosos.

SOLUCIÓN:

0.5 = desviación típica

0.5^{2} = 0.25 = varianza

X $\longrightarrow$ N (20 ,0.25)

P(def.) = P (x >21) + P (x < 19) = P(z > $\frac{21-20}{0.5}$) + P(z < $\frac{19-20}{0.5}$) = P(z>2) + P (z <-2)
= [1 – P(z $\leq$2)] + [1 –P(z $\leq$2)] = [1 –0.9773] + [1 –0.9773] = 0.0452 tornillos defectuosos

n = 15 tornillos

P(def.) = 0.0452 = p

1 tornillo

P($\overline{def}$.) = 0.9548 = q

X = tornillos defectuosos $\longrightarrow$ Bi (15 , 0.0452)

P(x $\leq$ 2) = f (0) + f (1) + f (2) = $\binom{15}{0}$* 0.0452 ^{0}* 0.9548^{15} + $\binom{15}{1}$*0.0452 ^{1}*09548^{14} +

$\binom{15}{2}$*0.0452 ^{2}*09548^{13} = 0.972

---

38. Supongamos que disponemos de 3 variables independientes con las siguientes características:

X_1 $\longrightarrow$ N ($\mu = 1, \sigma = 1$)

X_2 $\longrightarrow$ N ($\mu = 3,\ \sigma = 2$)

X_3 $\longrightarrow$ N ($\mu = 4,\ \sigma = 3$)

Definimos una nueva variable $Y=X_1+X_2+X_3$, se pide:

a) Hallar E(Y) y Var(Y).

b) Determinar la probabilidad de que P(Y>A), siendo A=E(Y)-2

SOLUCIÓN:

a) $Y=X_1+X_2+X_3$

$E(Y)= E(X_1)+E(X_2)+E(X_3)=1+3+4=8$

Var(Y)=1^2+2^2+3^2=14

b) A=E(Y)-2.

A=8-2=6

Y $\longrightarrow$ N (8, $\sqrt{14}$)

P(Y>A)=P(Y>6)=P(Z>((6-8)/3,74)=P (Z>-0,53)=P (Z<0,53)=0,7019

---

39. Se supone que la probabilidad de que un pasajero opte por una compañía aérea dada para hacer un viaje es 0,5. Tomando un grupo de 400 pasajeros potenciales, esta compañía vende billetes a cualquiera que se lo solicita y la capacidad de su avión es de 230 pasajeros. Se pide:

a) La probabilidad de que la compañía tenga un overbooking, es decir, que un pasajero no tenga asiento.
b) Si existen 10 compañías aéreas que realizan el mismo viaje y cuyas condiciones son similares a la anterior, ¿cuál será la probabilidad de que al menos dos de ellas tenga un overbooking?

<u>SOLUCIÓN:</u>

P (opte) = 0,5= p

1 pasajero

P (no opte) = 0,5= q

a) n = 400 X= pasajeros que optan por ese avión → Bi (400, 0,5) → N(200, 10)

$$\mu = n \cdot p = 400 \cdot 0{,}5 = 200$$
$$\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q} = \sqrt{400 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}5} = 10$$

P (X>230) = P (z >(230-200)/100) = P (z >3) = 1-P (z ≤ 3) = 1- 0,9987 = <u>0,0013</u>

↳ overbooking

b)

$$1 \text{ compañía} \begin{cases} \nearrow \; P(\text{overbooking}) = 0{,}0013 = p \\ \searrow \; P(\text{no overbooking}) = 0{,}9987 = q \end{cases}$$

n = 10 compañías

$P (X \geq 2) = 1\text{-}P (X<2) = 1\text{-}P(X\leq 1) = 1\text{-} [\rho(0) + \rho(1)] = 1\text{-}[\binom{10}{0} *0{,}0013^{0}*0{,}9987^{10}$

$+\binom{10}{1}*0{,}0013^{1}*0{,}9987^{10}] = 1\text{-} [0{,}987 + 0{,}0128] = \underline{\underline{0{,}00015}}$

---

40. En un quiosco de periódicos se supone que el número de ventas diarias se distribuye normalmente con media 30 y varianza 2. Determinar:

a) Probabilidad de que en un día se vendan entre 13 y 31 periódicos
b) Determinar el máximo número de periódicos que se venden en el 90% de las ocasiones
c) Supongamos que en una ciudad hay 10 quioscos independientes del mismo tipo y con las mismas características. Determinar la probabilidad de que más de dos quioscos vendan entre 13 y 31 periódicos

---

SOLUCIÓN:

a) $X \rightarrow N(30,2)$

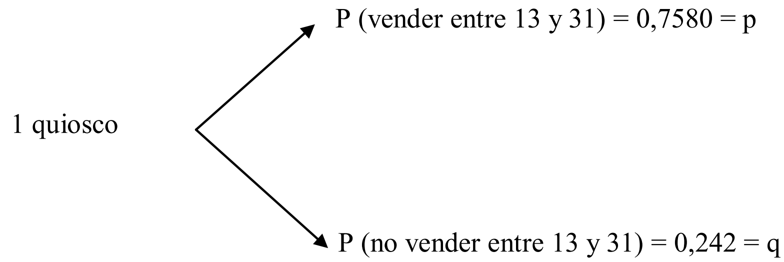
$P (13\leq X\leq 31)= P((13\text{-}30)/\sqrt{2} \leq z \leq(31\text{-}30)/\sqrt{2}) = P (-12{,}02 \leq z \leq 0{,}707) =$

$P (z \leq 0{,}707) - P (z \leq -12{,}02) = \underline{\underline{0{,}7580}}$

b) $P (X \leq a) = 0{,}90 \rightarrow P (z \leq (a\text{-}30)/\sqrt{2}) = 0{,}90$ (tablas)

$(a\text{-}30)/\sqrt{2} = 1{,}28 \rightarrow a = 31{,}81$ periódicos

c) n = 10 quioscos



X= quioscos que venden entre 13 y 31 $\rightarrow$ Bi (10, 0,7580)

$P(X > 2) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - [\rho(0) + \rho(1) + \rho(2)] =$

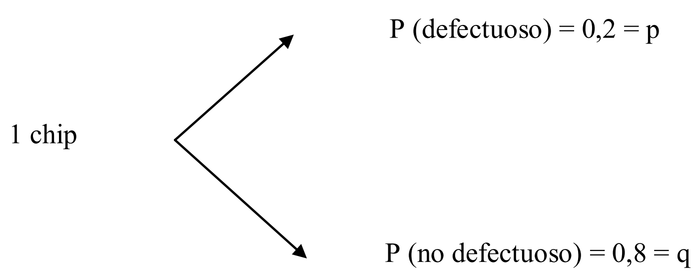
$= 1 - [\binom{10}{0} * 0{,}7580^0 * 0{,}242^{10} + \binom{10}{1} * 0{,}758^1 * 0{,}242^9 + \binom{10}{2} * 0{,}758^2 * 0{,}242^8] = \underline{\underline{0{,}99972}}$

---

41. Un operador elige al azar entre "n" chips de una caja. La probabilidad de que sea defectuoso es 0,2.

a) Si n = 7, ¿cuál es la probabilidad de que al menos 3 chips sean defectuosos?
b) Si n = 50, ¿cuál es la probabilidad de tener entre 9 y 12 chips defectuosos?
c) ¿Cuántos chips hay en la caja si la varianza es 32?

SOLUCIÓN:



a) n = 7
X= chips defectuosos $\rightarrow$ Bi (7, 0,2)

$P(X \geq 3) = 1 - P(X < 3) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - [\rho(0) + \rho(1) + \rho(2)] =$

$= 1 - [\binom{7}{0} * 0{,}2^0 * 0{,}8^7 + \binom{7}{1} * 0{,}2^1 * 0{,}8^6 + \binom{7}{2} * 0{,}2^2 * 0{,}8^5] = 1 - 0{,}852 = \underline{\underline{0{,}148}}$

b) n = 50
X$\rightarrow$ Bi (500, 0,2)--------------------------$\rightarrow$ N (10, 2,828)

$$\mu = n * p = 50 * 0{,}2 = 10$$

$\sigma = \sqrt{n * p * q}$ =2.828

P (9 ≤ X ≤ 12) = P ((9-10)/2,828≤ z ≤(12-10)/2,828) = P (-0,35 ≤ z ≤ 0,707) =

= P (z ≤ 0,707) – P (z ≤ -0,35) = 0,7580 – (1 - 0,6368) = 0,3948

c) n = ¿?
Var (x) = 32--------------------→ n*p*q = 32 ; n*0,2*0,8 = 32

N = 200 chips

---

42. El volumen que una máquina de llenado automático deposita en latas de una bebida gaseosa tiene una distribución normal con media 34 cl. Y una desviación típica 1,5 cl.

a) Si se despachan aquellas latas que tienen menos de 33 cl., ¿cuál es la proporción de latas desechadas?
b) La máquina de llenado puede ser ajustada para cambiar el volumen medio ö para que únicamente el 1% de las latas tuviera menos de 33 cl.?
c) Si tomamos 10 latas llenadas con la máquina tal y como figura originalmente, ¿cuál es la probabilidad de que ninguna sea desechada?
d) Si ahora tomamos 500 latas llenadas con la máquina tal y como figura originalmente, ¿cuál es la probabilidad de que al menos 100 sean desechadas?

SOLUCIÓN:

a) X→N(34,1,5)

P(X< 33) = p(z < (33-34)/1,5) = (z < -0,66) = p(z ≥ 0,66) = 1-p(z ≤ 0,66) =

1-0,7454 = 0,2546⇨ *probabilidad de que la lata sea desechada*

b) μ ?

P(X<33) = 0,01

P(z <(33- μ)/1,5) = 0,01 ; (33- μ)/1,5= -2,33 ; μ = 36,495 cl.

c)

n = 10 latas

1 lata

P(desechada) = 0,2546 = p

P(no desechada) = 0,7454 = q

$X \rightarrow Bi(10, 0{,}2546)$

$P(X=0) = \binom{10}{0} * 0{,}2546^0 * 0{,}7454^1 = \underline{\underline{0{,}05295}}$

d)

$X \rightarrow Bi(500, 0{,}2546)$-------------------------------→$N(127{,}3 , 9{,}74)$

$$\mu = n \bullet p = 500 \bullet 0{,}2546 = 127{,}3$$
$$\sigma = \sqrt{n \bullet p \bullet q} = \sqrt{500 \bullet 0{,}2546 \bullet 0{,}7454} = 9{,}74$$

$P(X \geq 100) = P(z \geq (100-127{,}3)/9{,}7411) = P(z \geq -2{,}8) = P(z \leq 2{,}8) = \underline{\underline{0{,}9974}}$

---

43. La confianza de un fusible eléctrico corresponde a la probabilidad de que un fusible. Escogido al azar de una línea de producción, funcione adecuadamente bajo condiciones de diseño. Calcule la probabilidad de obtener 27 ó mas fusibles defectuosos en una muestra de 1000 fusibles, sabiendo que la probabilidad de que un fusible elegido al azar no sea defectuoso es de 0,98.

<u>SOLUCIÓN:</u>

$$P(x \geq 27)$$
$$n = 1000 \quad \text{fusibles}$$
$$1 \quad \text{fusible} \rightarrow \text{P (def)} = 0'02 = \text{p}$$
$$\rightarrow \text{p (no def)} = 0'98 = \text{q}$$

$$\text{x} \rightarrow \text{Bi}\,(1000, 0'02) \rightarrow \text{N}\,(20, 4'47)$$
$$\text{x} = \text{fusible} \quad \text{defectuoso}$$
$$\mu = \text{n} * \text{p} = 1000 * 0'02 = 20(n * p > 5)$$
$$\sigma = \sqrt{n * p * q} = \sqrt{1000 * 0'02 + 0'098} = 4'427$$

$$P(x \geq 27) = P\left(z \geq \frac{27-20}{4'427}\right) = P(z \geq 1'58) = 1 - p(z \geq 1'58) = 1 - 0'9429 = 0'0571$$

---

44. Un banco recibe en promedio 6 cheques falsos al día, suponiendo que el número de cheques falsos sigue una distribución de Poisson, hallar:

a) Probabilidad de que se reciban cuatro cheques falsos en un día.
b) Probabilidad de que se reciban más de 30 cheques falsos en una semana

---

SOLUCIÓN:

$x \to Po(6) \to$ Sabemos que es Poisson porque sólo dan la media

$\text{x} = \text{cheques falsos/dia}$

a) $P(x=4) = \dfrac{\ell^{-6} + 6^4}{4!} = 0'1339$

$b)\ \lambda = 42 \ \to\ \lambda > 10 \ \to$ pasamos a una normal $\qquad$ $6\text{cheques} \to 1 dia$

$x \to Po(42) \to N(42, \sqrt{42})$ $\qquad$ $\text{x} \to 7\ \text{dias} \quad \text{x} = 42\ \text{cheques}$

$x = \text{cheques falsos/ semana}$

$$\text{P}(x > 30) = P\left(z > \frac{30-42}{\sqrt{42}}\right) = P(z > -1'85) = P(z < 1'85) = 0'96$$

---

45. El número de fallos de un instrumento de prueba debidos a las partículas de un producto es una variable de Poisson con media 0,2 fallos por hora.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que el instrumento no falle en una jornada de 8 horas?
b) ¿Cuál es la probabilidad de que haya entre 20 y 40 fallos (ambos incluidos) en un periodo de una semana (funcionando los 7 días, 24 horas diarias)?

SOLUCIÓN:

$x \rightarrow Po\,(0'2)$ $\quad$ 1h $\rightarrow$ 0'2 fallos

$x = fallos \;/\; hora$ $\quad$ 8h $\rightarrow$ x $\quad$ x = 1.6

a)

$x \rightarrow Po\,(1'6)$

$x = fallos \;/\; 8\, horas$

$$P(x = 0) = \frac{\ell^{-1'6} + 1.6^{1}}{0!} = 0'2019$$

$b)$

$P(20 \leq x \leq 40)$

$7 * 24 = 168\ h$

$1h \rightarrow 0'2\,f$

$168\ h \rightarrow x \quad$ x = 33'6

$\text{x} \rightarrow Po\,(33'6) \rightarrow N\,(33'6, \sqrt{33'6})$

$x = fallos \;/\; semana$

Tipificar

$$Po\,(20 \leq x \leq 40) = P\left(\frac{20 - 33'6}{\sqrt{33'6}} \leq z \leq \frac{40 - 33'6}{\sqrt{33'6}}\right) = P(-2'34 \leq z \leq 1'10) =$$

$$P(z \leq 1'10) - P(z \leq -2'34) = 0'8643 - (1 - 0'9904) = 0'8547$$

---

46. Los agricultores de una región están preocupados po la calidad de sus cosechas, ya que se ha detectado en ciertas áreas la existencia de sustancias contaminantes en el suelo. Para analizarla, se segmenta la tierra en parcelas de 100 m^2, y se concluye que hay una probabilidad de 0.6 de encontrar estos contaminantes en una determinada parcela. Se pide:

a) Si un agricultor posee 15 de estas parcelas. ¿Qué probabilidad hay de que tenga alguna contaminada?
b) Una cooperativa posee 200 parcelas del tipo anterior. ¿Qué probabilidad hay de que tenga entre 100 y 150 parcelas contaminadas?
c) Si por cada parcela contaminada la cooperativa sufre unas perdidas de 1000 €, ¿ cuál es la perdida que la cooperativa espera tener?.

<u>SOLUCIÓN:</u>

$a)$
$n = 15 parcelas$
$\text{x} \rightarrow \text{Bi}(15{,}0'6)$
$x = parcela$ contaminada
$1 parcela \rightarrow P(cont) = 0'6 = p$

$$\rightarrow P(nocont) = 0'4 = qP(x \geq 1) = 1 - P(x < 1) = 1 - P(x = 0) = 1 - \binom{15}{0} * 0'06^{1} * 0'4^{15} = 0'99999$$

$b)$
$n = 200$ parcelas
$x \rightarrow Bi(200{,}0'6) \rightarrow N(120{,}6'928)$
$x = parcelas$ contaminadas

$$\mu = \text{n} * \text{p} = 200 * 0'6$$
$$\sigma = \sqrt{\text{n} * \text{p} * \text{q}} = \sqrt{200 * 0'6 * 0'4} = 6.928$$

$$P(100 \leq x \leq 150) = P\left(\frac{100 - 200}{6'928} \leq z \leq \frac{150 - 200}{6'928}\right) = P(-2'88 \leq z \leq 4'33) = P(z \leq 4'33) - P(z \leq -2'88) =$$
$$1 - (1 - 0'9980) = 0'998$$

$c)$ 1 cooperativa $\rightarrow \text{h} = 200$ parcelas

$E(x) = h * p = 200 * 0'6 = 120$ parcelas contaminadas
$120 * 100 = 120000$€

---

47. En un estudio estadístico sobre la altura de los españoles y de los inglese. Se han obtenido los siguientes datos:

Nacionalidad	**Españoles**	**Ingleses**
Media	**170.2**	**175.4**
Desviación típica	**6.4**	**5.9**

a) ¿Quién es más alto en su país, un español que mide 177 cm o un inglés que mide 181 cm?
b) ¿Cuál es la probabilidad de que un español mida más de 180 cm? ¿cuál es la probabilidad de que un ingles mida entre 160 y 170 cm?
c) ¿Cuál es la probabilidad de que un español sea más alto que un inglés?

SOLUCIÓN:

$x \to N(170'2, 6'4)$
$x = españoles$
$y \to N(175'4, 5'9)$

$a)$ Cuando tipifico, paso de $x \to N(\mu,\sigma) \Rightarrow Z \to N(0,1)$, es decir, las dos están en la misma escala.

$$x_i = 177 \to z_i = \frac{177-170'2}{0'4} = 1'0625$$

El español es más alto en su país

$$y_i = 181 \to z_i = \frac{181-175'5}{0'9} = 0'9322$$

$$b) P(x>180) = 1-P(x\le 180) = 1-P\left(z \le \frac{180-170'2}{6'4}\right) = 1-P(z\le 1'53) = 1-0'9370 = 0'063$$

$$P(160 \le y \le 170) = P\left(\frac{160-175'5}{5'9} \le z \le \frac{170-175'5}{5'9}\right) =$$
$$P(-2'62 \le z \le -0'93) = P(z \le -0'93) - P(z \le -2'62) =$$
$$(1-0'8238)-(1-0'9956) = 0'1718$$

$c)$
$$P(x>y) = P(x-y>0) = 1.P(x-y\le 0) =$$
$$1-P\left(z \le \frac{0+5'3}{8'7043}\right) = 1-P(z\le 0'608) = 1-0'7291 = 0'2709$$

---

48. Supóngase que la concentración que cierto contaminante se encuentra distribuida de manera uniforme en el intervalo de 0 a 20 pares de millón. Si se considera tóxica una concentración de 8 o más. ¿Cuál es la probabilidad de que al tomarse una muestra la concentración de esta sea tóxica?. Concentración media y varianza. Probabilidad de que la concentración sea exactamente 10.

SOLUCIÓN:

$X \longrightarrow$ Un(0, 20) $\quad \mu$ = (a+b)/2=0+20/2=10 $\quad \sigma^2$=(b-a)^2/12=33,3

f(x)= 1/20 $\quad 0 \le x \le 20$

$$P(X\ge 8) = \int_8^{20} 1/20\,dx = 0,6$$

$P(X=10)=\int_{10}^{10} 1/20\,dx=0$

---

49. El personal de la compañía Onda S.L. usa una Terminal para realizar sus pedidos internacionales. Si el tiempo que cada comercial gasta en una sesión en la Terminal tiene una distribución exponencial con media 36 minutos, encontrar:

a) Probabilidad de que un comercial utilice la Terminal 30 minutos o menos.
b) Si un comercial a estado 30 minutos en la Terminal, ¿Cuál es la probabilidad de que pase al menos una hora más en la Terminal?.
c) El 90% de las sesiones terminan en menos de R minutos. ¿Cuánto vale R?

<u>SOLUCIÓN:</u>

$1/\beta=36 \longrightarrow \beta=1/36$ y la función de densidad es $f(x)=1/36 * e^{-1/36*x}$ $x\geq 0$

a) $P(X\leq 30)=\int_{0}^{30} 1/36*e^{-1/36*x}\,dx=0{,}565$

b) $P((X\geq 30+60)/(X\geq 30))=P(X\geq 60)=\int_{60}^{+\infty} 1/36*e^{-1/36*x}\,dx=0{,}188$

c) $P(X<R)=0{,}90$

$P(X<R)=0{,}90$ $\int_{0}^{R} 1/36*e^{-1/36*x}\,dx=0{,}90$ $R=82{,}89$

---

50. El peso de las naranjas de un determinado calibre, fluctúa normalmente con media 150 gr. Y desviación típica 30 gr. Si una bolsa se llena con 15 naranjas seleccionadas al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que el peso total de la bolsa sea inferior a 2 kilos?

<u>SOLUCIÓN:</u>

$Y=\sum_{I=1}^{n} X_i \longrightarrow N(n*\mu,\ \sqrt{n*}\ \sigma)$

$X_1=N(150, 30)$, $X_2=N(150, 30)$, …, $X_{15}=N(150, 30)$

n=15 Y=$\sum_{I=1}^{n} X$ i N (15*150, $\sqrt{15*30\wedge 2}$)

P (Y<2000)=P(Z<((2000-2250)/(116,189))=P(Z<-2,15)=(tabla)=1-0,9842=0,0158

---

51. Una fábrica produce en cada turno 100000 bolas para rodamientos de forma que la probabilidad de defectuosa es 0.04. En el control de las bolas se revisan todas depositando las defectuosas (que se detectan todas) en un recipiente que se vacía al final de cada turno. ¿Cuántas bolas ha de contener el recipiente para que la probabilidad de que su capacidad no se vea rebasada sea 0.95?

SOLUCIÓN:

Sea *X* el número de bolas defectuosas de entre 100000. *X* sigue una distribución binominal *B* (100000; 0.04) que se puede aproximar por una normal de media 100000 × 0.04 = 4000 y desviación típica $\sqrt{100000 \times 0.04 \times 0.96}$ = 61.96.

Sea *C* la capacidad buscada. *C* ha de ser tal que *P* (*X*<*C*) = 0.95. Tipificando, resulta que $\frac{X-4000}{61.96}$ es una variable normal N (0;1).

$$P(X<C) = P\left(\frac{X-4000}{61.96} < \frac{C-4000}{61.96}\right) = 0.95$$

$$\frac{C-4000}{61.96} = 1.65; C = 4000 + 1.65 \times 61.96 = 4102.23$$

Luego la capacidad aproximada del recipiente ha de ser de 4102 bolas.

---

52. Se elige un punto en el espacio, de forma que sus tres coordenadas sean variables aleatorias independientes con distribución normal de parámetros *N* (0,1). ¿Cuál es la probabilidad de que el cuadrado de las distancia de dicho punto al origen sea menor de 6.25?

SOLUCIÓN:

Las coordenadas del punto elegido en el espacio (X_1, X_2, X_3) son variables aleatorias con distribución N (0,1).

La distancia al cuadrado del punto al origen es:

$$d^2 = X_1^2 + X_2^2 + X_3^2$$

Como d^2 es la suma de 3 variables aleatorias al cuadrado con distribución N (0,1), presenta una distribución chi cuadrado con tres grados de libertad. Por tanto, en las tablas de dicha distribución encontramos la probabilidad pedida: $P(d^2 < 6.25) = 0.90$.

---

53. En un experimento de laboratorio se utilizan 10 gramos de $^{210}_{84}Po$. Sabiendo que la duración media de un átomo de esta materia es de 140 días, ¿cuántos idas transcurrirán hasta que haya desaparecido el 90% de este material?

SOLUCIÓN:

El tiempo T de desintegración de un átomo de $^{210}_{84}Po$ es una variable aleatoria de distribución exponencial:

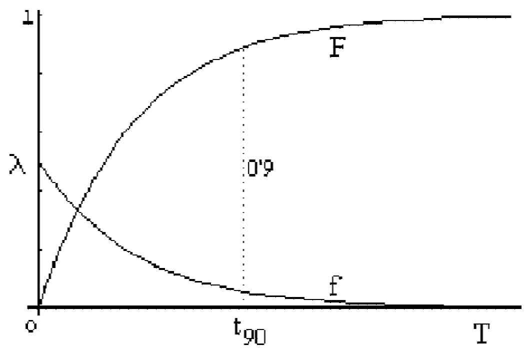
$$T \to Exp\left(\lambda = \frac{1}{140}\right) \leftrightarrow f(t) = \lambda e^{-\lambda t} \, si \forall t \geq 0$$

$$\leftrightarrow F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$$

Como el número de átomos de $^{210}_{84}Po$ existentes en una muestra de 10 gramos es enorme, el histograma de frecuencias relativas formado por los tiempos de desintegración de cada uno de estos átomos debe ser extremadamente aproximado a la curva de densidad, *f*. Del mismo modo, el polígono de frecuencias relativas acumuladas debe ser muy aproximado a la curva de su función de distribución *F*. Entonces el tiempo que transcurre hasta que el 90% del material radiactivo se desintegra es el percentil 90, t_{90}, de la distribución exponencial, es decir:

$$F(t_{90}) = 0.9 \leftrightarrow e^{-\lambda t_{90}} = 1 - 0.9 \leftrightarrow t_{90} = -\frac{1}{\lambda} \ln 0.1 \approx 322 \text{ días}$$

Figura: Como el número de átomos (observaciones) es extremadamente alto en 10 gramos de materia, el histograma puede ser aproximado de modo excelente por la función de densidad exponencial, y el polígono de frecuencias acumuladas por la función de distribución.



54. Se ha comprobado que el tiempo de vida de cierto tipo de marcapasos sigue una distribución exponencial con media de 16 años. ¿Cuál es la probabilidad de que a una persona a la que se le ha implantado este marcapasos se le deba reimplantar otro antes de 20 años? Si el marcapasos lleva funcionando correctamente 5 años en un paciente, ¿cuál es la probabilidad de que haya que cambiarlo antes de 25% años?

<u>SOLUCIÓN:</u>

Sea T la variable aleatoria que mide la duración de un marcapasos en una persona. Tenemos que

$$T \to Exp\left(\lambda = \frac{1}{16}\right) \leftrightarrow f(t) = \lambda e^{-\lambda t} si \forall t \geq 0$$

$$\leftrightarrow F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$$

Entonces:

$$P[T \leq 20] = \int_0^{20} f(t)dt = F(20) = 1 - e^{-\frac{20}{16}} = 0.7135$$

En segundo lugar:

$$P\left[T \le 25_{|T\ge 5}\right] = \frac{P[5 \le T \le 25]}{P[T \ge 5]} = \frac{0.522}{0.7316} = 0.7135$$

$$P[5 \le T \le 25] = \int_5^{25} f(t)dt = F(25) - F(5) = 1 - e^{-\frac{25}{16}} - 1 + e^{-\frac{5}{16}} = 0.522$$

$$P[T \ge 5] = \int_5^{+\infty} f(t)dt = F(+\infty) - F(5) = 1 - 1 + e^{-\frac{5}{16}} = 0.7316$$

Luego como era de esperar, por ser propio a un mecanismo exponencial:

$$P\left[T \le 25_{|T\ge 5}\right] = P[T \le 20]$$

Es decir, en la duración que se espera que tenga el objeto, no influye en nada el tiempo que en la actualidad lleva funcionando. Es por ello que se dice que "la distribución exponencial no tiene memoria".

---

55. Una empresa electrónica observa que el número de componentes que fallan antes de cumplir 100 horas de funcionamiento es una variable aleatoria de Poisson. Si el número promedio de estos fallos es ocho:

a)¿cuál es la probabilidad de que falle un componente en 25 horas?

b)¿y de que fallen no más de dos componentes en 50 horas?

c)¿cuál es la probabilidad de que fallen por lo menos diez en 125 horas?

<u>SOLUCIÓN:</u>

Sea la variable aleatoria ξ, con distribución de Poisson de parámetro $\lambda_\xi = E[\xi] = 8$, que determina el número de componentes que fallan antes de cumplir 100 horas de funcionamiento.

a) Considerando que se cumplen ciertas condiciones de regularidad, podemos asumir que una variable η que mide el número de componentes que fallan antes de cumplir 25 horas de funcionamiento sigue una distribución de Poisson con parámetro $\lambda_\eta = E[\eta] = \frac{8}{4} = 2$. Por lo tanto, la probabilidad deseada es la siguiente:

$$P(\eta - 1) = \frac{2^1}{1!} \times e^{-2} = 0.27067$$

b) Análogamente, definimos una variable aleatoria U con distribución de Poisson de parámetro $\lambda_U = \frac{8}{2} = 4$, que mide el número de componentes que fallan antes de cumplir las 50 horas de funcionamiento. Se tiene entonces que:

$$P(U \leq 2) = \sum_{i=0}^{2} \frac{4^i}{i!} \times e^{-4} = 0.2381$$

c) De la misma forma, definiendo una variable aleatoria V con distribución de Poisson de parámetro $\lambda_V = 10$, se obtiene:

$$P(V \geq 10) = 1 - P(V < 10) = 1 - \sum_{i=o}^{10} \frac{10^i}{i!} \times e^{-10} = 0.41696$$

---

56. Dada la variable aleatoria *X* continua y con función de distribución *F* se define la variable *Y=F(X)*. Demuéstrese que *Y* sigue una distribución uniforme en [0,1].

SOLUCIÓN:

Por ser F una función de distribución, la variable Y toma valores entre cero y uno. Será uniforme en [0,1] si se verifica que:

$F_Y(y) = y$, para todo $y \in [0,1]$

En efecto

$$F_Y(y) = P\{0 \leq Y \leq y\} = P\{F_X(X) \leq y\} = P\{X \leq F_X^{-1}(y)\} = F_X\left[F_X^{-1}(y)\right] = y$$

como queríamos demostrar.

---

57. Un punto aleatorio *X* tiene distribución uniforme en el intervalo [0,1] y otro punto aleatorio *Y* tiene distribución uniforme en el intervalo [2,3]. Se define la variable distancia entre *X* e *Y* por *d=Y-X*. Suponiendo que *X* e *Y* son independientes, calcúlese la esperanza matemática y la varianza de *d*.

SOLUCIÓN:

Como las distribuciones de X e Y son uniformes, sabemos que:

$$E[X]=\frac{1}{2};E[Y]=\frac{5}{2};\sigma^2[X]=\frac{1}{12};\sigma^2[Y]=\frac{1}{12};$$

como la esperanza es un operador lineal se tiene

$$E[d]=E[Y]-E[X]=\frac{5}{2}-\frac{1}{2}=2$$

Por otra parte, al ser X e Y independientes

$$\sigma^2[d]=\sigma^2[Y-X]=\sigma^2[Y]+(-1)^2\sigma^2[X]=\frac{1}{12}+\frac{1}{12}=\frac{1}{6}$$

---

58. Supongamos que el cuerpo de bomberos de una gran ciudad es capaz de atender asta un máximo de 300 servicios por día. Si el numero medio de servicios diarios es de 250 con distribución de Poisson, ¿Cuál es la probabilidad de que un día determinado no se puedan atender todos los servicios requeridos? ¿Que probabilidad existe de que en 31 días haya al menos un día en el que no se puedan atender todos los servicios requeridos?

<u>SOLUCIÓN:</u>

Si un día no se pueden atender todos los servicios requeridos es porque superan la capacidad máxima de 300 servicios, por tanto, la probabilidad pedida es:

$$\mathrm{P}(\mathrm{X} \succ 300)=\sum_{x\succ 300} e^{-250}\frac{250^x}{x}$$

Esta probabilidad puede aproximarse mediante la distribución normal $N(250;\sqrt{250})$

$$P\left(\frac{X-250}{\sqrt{250}} \succ \frac{300-250}{\sqrt{250}}\right)=P\left(\frac{X-250}{\sqrt{250}} \succ 3{,}16\right)=0{,}0008$$

Si consideramos como éxito el que un día no se puedan atender todos los servicios requeridos, el numero de días D en que esto ocurrirá a lo largo de un mes, vendrá dado por la binomial de parámetros B(31; 0,0008). La probabilidad de que al menos un día no se puedan prestar todos los servicios solicitados será:

$$P(D \geq 1) = 1 - P(D = 0) = 1 - \binom{31}{0}(0{,}0008)^0(0{,}9992)^{31} = 0{,}0245$$

---

59. Supongamos que el consumo familiar de un cierto producto se distribuye como una variable aleatoria de distribución uniforme, con esperanza igual a 10 y varianza unidad. Determina la probabilidad de que dicho consumo este comprendido entre 8 y 12 unidades.

<u>SOLUCIÓN:</u>

Sea X el numero de unidades consumidas, sabemos que se distribuye U(a,b), además:

$$\left\{ \quad E(X) = \frac{b+a}{2} = 10, \quad \sigma^2 x = \frac{(b-a)^2}{12} = 1 \right.$$

$$\left\{ \quad b + a = 20, \quad (b-a)^2 = 12 \right.$$

$$\left\{ b + a = 20, \quad b - a = 2\sqrt{3} \right.$$

Sumamos las dos igualdades: $\begin{array}{ll} 2b = 20 + 2\sqrt{3} & \quad b = 10 + \sqrt{3} = 11{,}73 \\ a = 20 - b & \quad a = 10 - \sqrt{3} = 8{,}26 \end{array}$

La distribución es uniforme entre 8,26 y 11,73 unidades, por tanto la probabilidad de que el consumo se encuentre comprendido entre 8 y 12 es la unidad.

---

60. Una báscula de tipo digital para vehículos de alto tonelaje da pesos cuya magnitud viene expresada en toneladas. ¿Cuál es la probabilidad de que en una pesada el valor real difiera del dado por la báscula en más de 200 Kg?

<u>SOLUCIÓN:</u>

Debido a la magnitud de los pesos que se colocan en la bascula un error de 1000 Kg. no se considera importante, por lo que el digito de las unidades aumenta su valor en una unidad cuando la carga ha aumentado en 1000 Kg.; o dicho de otra manera, la bascula no diferencia entre una carga de 57,1 toneladas y otra cuyo peso sea 57,5 toneladas. No tenemos pues, ninguna información acerca del peso real entre cada nueva tonelada y la siguiente, por lo que al ser máxima la incertidumbre, la distribución apropiada es uniforme:

$$f(\mathrm{x})=\frac{1}{1000}; \quad 0 \lhd x \lhd 1000$$

La probabilidad de que el error cometido en una pesada sea superior a 200 Kg. será:

$$P(X \succ 200)=\int_{200}^{1000}\frac{1}{1000}dx = 0{,}8$$

61. En un juego solo caben dos posibilidades, ganar o perder. ¿Cuántas veces es necesario jugar para que la probabilidad, de que la frecuencia relativa de victorias difiera, de la verdadera probabilidad de ganar, en valor absoluto, en al menos 0,05, sea inferior o igual al 5%?

SOLUCIÓN:

Aplicando el teorema de Bernoulli:

$$P\left(\left|\frac{x}{n}-p\right| \geq \delta\right) \leq \frac{pq}{n\delta^2}; \qquad P\left(\left|\frac{x}{n}-p\right| \geq 0{,}05\right) \leq \frac{pq}{n(0{,}05)^2}=0{,}05$$

Como el valor de p es desconocido, tomamos la cota superior de $\frac{pq}{n\delta^2}$ que es $\frac{1}{4n\delta^2}$,

Por tanto; $\frac{1}{4n(0{,}05)^2}=0{,}05$; $\quad n=\frac{1}{4(0{,}05)^3}=2000$ veces.

62. La probabilidad P de que un cliente cualquiera pague con cheques sin fondos, es desconocida por un gran banco. ¿Cuál seria el error cometido al tomar como valor de P la frecuencia relativa correspondiente a 50000 clientes, si se pretende que la probabilidad, de que el valor absoluto de la diferencia entre ambas sea mayor o igual que el error, sea como mucho de 0,1?

SOLUCIÓN:

Aplicando Bernoulli: $P\left(\left|\frac{x}{n}-p\right| \le \delta\right) \le \frac{pq}{n\delta^2} \le \frac{1}{4n\delta^2}$

Como p es desconocido tomamos la cota superior: $P\left(\left|\frac{x}{n}-p\right| \ge \delta\right) \le \frac{1}{4 \cdot 50000 \cdot \delta^2} = 0{,}1$

De donde $\delta \;\; = \frac{1}{4 \cdot 50000 \cdot 0{,}1} = 0{,}00005$, por tanto $\delta = 0{,}007$

---

63. La probabilidad de que un deportista gane una competición es 0,4. ¿Cuantas veces habremos de verle competir para que haya una probabilidad de al menos 0,95, de que la frecuencia relativa de triunfos difiera de 0,4, en valor absoluto, como máximo en 0,02?

SOLUCIÓN:

Aplicando el teorema de Bernoulli: $P\left(\left|\frac{x}{n}-p\right| \le \delta\right) \ge 1-\frac{pq}{n\delta^2}$;

$P\left(\left|\frac{x}{n}-p\right| \le 0{,}02\right) \ge 1-\frac{0{,}4 \cdot 0{,}6}{n(0{,}02)^2}$ Como queremos una probabilidad de al menos 0,95

$$1-\frac{0{,}4 \cdot 0{,}6}{n(0{,}02)^2} = 0{,}95; \frac{0{,}4 \cdot 0{,}6}{n(0{,}02)^2} = 0{,}05$$

$$n = \frac{0{,}4 \cdot 0{,}6}{0{,}05(0{,}02)^2} = 12000 \text{ veces}$$

---

64. Un fabricante de faros para coches informa que en un envío de 4000 faros a un distribuidor, 500 tenían un ligero defecto. Si se compran al distribuidor 20 faros elegidos al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que haya exactamente dos con defecto?

SOLUCIÓN:

Si X es el número de faros defectuosos en los 20 adquiridos, X sigue una distribución hipergeométrica con N=4000, n=20 y k=500 luego:

$$P\,(X=2)= \frac{\binom{500}{2}\binom{3500}{18}}{\binom{4000}{20}} = 0{,}2546.$$