Livro: Probabilidade - Aplicações à Estatística – Paul L. Meyer
Capitulo 10 – A Função Geratriz de Momentos.

Problemas

1. Suponha que X tenha fdp dada por $f(x) = 2x, 0 \leq x \leq 1$.
   a. Determine a fgm de X.

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = 2\int_{x=0}^{x=1} xe^{tx}dx = 2e^{tx}\frac{tx-1}{t^2}\bigg]_0^1 = 2e^t\frac{t-1}{t^2} + \frac{2}{t^2}$$
$$= \frac{2}{t^2}[e^t(t-1)+1]$$

   b. Empregando a fgm , calcule $E(X)$ e $V(X)$ e verifique sua resposta. (Veja o Comentário à Pág. 262.)

$$M_X'(t) = \frac{d}{dt}\left\{\frac{2}{t^2}[e^t(t-1)+1]\right\} = \frac{2e^t(t^2-2t+2)-4}{t^3}$$

$$M_X''(t) = \frac{d}{dt}\left\{\frac{2e^t(t^2-2t+2)-4}{t^3}\right\} = \frac{2[e^t(t^3-3t^2+6t-6)+6]}{t^4}$$

$$E(X) = \lim_{t\to 0} M_X'(t) = \lim_{t\to 0}\left[\frac{2e^t(t^2-2t+2)-4}{t^3}\right]$$
$$= \lim_{t\to 0}\left[\frac{2e^t(t^2-2t+2)+2e^t(2t-2)}{3t^2}\right] = \lim_{t\to 0}\left[\frac{2t^2e^t}{3t^2}\right]$$
$$= \frac{2}{3}$$

$$E(X^2) = \lim_{t\to 0} M_X''(t) = \lim_{t\to 0}\left[\frac{2[e^t(t^3-3t^2+6t-6)+6]}{t^4}\right]$$
$$= 2\lim_{t\to 0}\left[\frac{e^t(t^3-3t^2+6t-6)+6}{t^4}\right] = 2\lim_{t\to 0}\left[\frac{t^3e^t}{4t^3}\right] = \frac{1}{2}$$

$$V(X) = E(X^2) - E^2(X) = \frac{1}{2} - \frac{4}{9} = \frac{1}{18}$$

$$E(X) = 2\int_{x=0}^{x=1} x^2dx = \frac{2}{3}x^3\bigg]_0^1 = \frac{2}{3}$$

$$E(X^2) = 2\int_{x=0}^{x=1} x^3dx = \frac{2}{4}x^4\bigg]_0^1 = \frac{1}{2}$$

2.
   a. Determine a fgm da tensão (incluindo o ruído) tal como apresentada no Probl. 7.25.

$$M_X(t) = M_S(t)M_N(t) = E(e^{ts})E(e^{tn}) = \int_0^1 e^{ts}ds \frac{1}{2}\int_0^2 e^{tn}dn = \left.\frac{e^{ts}}{t}\right]_0^1 \left.\frac{e^{tn}}{2t}\right]_0^2 =$$
$$= \left(\frac{e^t}{t} - \frac{1}{t}\right)\left(\frac{e^{2t}}{2t} - \frac{1}{2t}\right) = \frac{1}{2t^2}(e^t - 1)(e^{2t} - 1)$$
$$= \frac{1}{2t^2}(e^t - 1)^2(e^t + 1)$$

b. Empregando a fgm, obtenha o valor esperado e a variância dessa tensão.

$$M_X'(t) = -\frac{1}{t^3}(e^t - 1)(e^{2t} - 1) + \frac{1}{2t^2}(e^t)(e^{2t} - 1) + \frac{1}{2t^2}(e^t - 1)(2e^{2t})$$
$$= \frac{1}{2t^3}(e^t - 1)[-2e^{2t} + 2 + te^t(e^t + 1) + 2te^{2t}]$$
$$= \frac{1}{2t^3}(e^t - 1)[t(e^{2t} + e^t) + 2e^{2t}(t - 1) + 2]$$
$$= \frac{1}{2t^3}(e^t - 1)[te^t + e^{2t}(3t - 2) + 1]$$

$$M_X''(t)$$
$$= -\frac{3}{2t^4}(e^t - 1)[te^t + e^{2t}(3t - 2) + 1]$$
$$+ \frac{1}{2t^3}(e^t)[te^t + e^{2t}(3t - 2) + 1]$$
$$+ \frac{1}{2t^3}(e^t - 1)[e^t(t + 1) + 2e^{2t}(3t - 2) + e^{2t}(3)]$$
$$= \frac{1}{2t^4}\{(te^t - 3e^t + 3)[te^t + e^{2t}(3t - 2) + 1]$$
$$+ t(e^t - 1)[e^t(t + 1) + 2e^{2t}(3t - 2) + 3e^{2t}]\}$$
$$= \frac{1}{2t^4}\{[e^t(t - 3) + 3][te^t + e^{2t}(3t - 2) + 1]$$
$$+ t(e^t - 1)[e^t(t + 1) + e^{2t}(6t - 1)]\}$$
$$= \frac{1}{2t^4}\{[e^t(t - 3) + 3][te^t + e^{2t}(3t - 2) + 1]$$
$$+ te^t(e^t - 1)[t + 1 + e^t(6t - 1)]\}$$
$$= \frac{1}{2t^4}\{[e^t(t - 3) + 3]\big[e^t\big(t + e^t(3t - 2)\big) + 1\big]$$
$$+ te^t(e^t - 1)[t + 1 + e^t(6t - 1)]\}$$

$$E(X) = \lim_{t\to 0} M_x'(t) = \lim_{t\to 0}\left[\frac{(e^t - 1)[te^t + e^{2t}(3t - 2) + 1]}{2t^3}\right] = -\infty$$

3. Suponha que X tenha a seguinte fdp:

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda(x-a)}, \qquad x \geq a.$$

(Esta é conhecida como distribuição exponencial a dois parâmetros.)

a. Determine a fgm de X.

$$
\begin{aligned}
M_X(t) = E(e^{xt}) &= \lambda e^{\lambda a}\int_a^\infty e^{xt}e^{-\lambda x}dx = \lambda e^{\lambda a}\int_a^\infty e^{-x(t-\lambda)}dx \\
&= \frac{\lambda e^{\lambda a}}{-(t-\lambda)}\int_a^\infty e^{-x(t-\lambda)}[-(t-\lambda)dx] = \frac{\lambda e^{\lambda a}}{-(t-\lambda)}e^{-x(t-\lambda)}\Big]_a^\infty \\
&= \frac{\lambda e^{\lambda a}e^{-a(\lambda-t)}}{\lambda-t} = \frac{\lambda e^{ta}}{\lambda-t}
\end{aligned}
$$

b. Empregando a fgm, ache $E(X)$ e $V(X)$.

$$
M_x'(t) = \frac{\lambda a e^{ta}(\lambda-t)+\lambda e^{ta}}{(\lambda-t)^2} = \frac{\lambda e^{ta}[a(\lambda-t)+1]}{(\lambda-t)^2} = \frac{\lambda a e^{ta}}{(\lambda-t)} + \frac{\lambda e^{ta}}{(\lambda-t)^2}
$$

$$
\begin{aligned}
M_x''(t) &= \frac{\lambda a^2 e^{ta}(\lambda-t)+\lambda a e^{ta}}{(\lambda-t)^2} + \frac{\lambda a e^{ta}(\lambda-t)^2+2\lambda e^{ta}(\lambda-t)}{(\lambda-t)^4} \\
&= \frac{\lambda a^2 e^{ta}(\lambda-t)}{(\lambda-t)^2} + \frac{\lambda a e^{ta}}{(\lambda-t)^2} + \frac{\lambda a e^{ta}(\lambda-t)^2}{(\lambda-t)^4} + \frac{2\lambda e^{ta}(\lambda-t)}{(\lambda-t)^4} \\
&= \frac{\lambda a^2 e^{ta}}{(\lambda-t)} + 2\frac{\lambda a e^{ta}}{(\lambda-t)^2} + \frac{2\lambda e^{ta}}{(\lambda-t)^3} \\
&= \frac{\lambda e^{ta}}{(\lambda-t)^3}\big(2+a(\lambda-t)(a(\lambda-t)+2)\big)
\end{aligned}
$$

$$
E(X) = \lim_{t\to 0} M_x'(t) = \lim_{t\to 0}\frac{\lambda e^{ta}[a(\lambda-t)+1]}{(\lambda-t)^2} = \frac{\lambda a\lambda+\lambda}{\lambda^2} = \frac{\lambda a+1}{\lambda}
$$

$$
\begin{aligned}
E(X^2) = \lim_{t\to 0} M_x''(t) &= \lim_{t\to 0}\frac{\lambda e^{ta}}{(\lambda-t)^3}\big(2+a(\lambda-t)(a(\lambda-t)+2)\big) \\
&= \frac{2+\lambda a(\lambda a+2)}{\lambda^2} = \frac{\lambda^2a^2+2\lambda a+2}{\lambda^2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
V(X) = E(X^2)-E^2(X) &= \frac{\lambda^2a^2+2\lambda a+2}{\lambda^2} - \left(\frac{\lambda a+1}{\lambda}\right)^2 \\
&= \frac{\lambda^2a^2+2\lambda a+2}{\lambda^2} - \frac{\lambda^2a^2+2\lambda a+1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}
\end{aligned}
$$

4. Seja X o resultado da jogada de uma moeda equilibrada.
   a. Determine a fgm de X.

$$
P(X=x) = \frac{1}{2}, \qquad x = 0, 1
$$

$$
M_X(t) = E(e^{Xt}) = \sum_{k=0}^{1} e^{kt}P(X=x) = \frac{1+e^t}{2}
$$

Se fosse um dado então

$$
P(X=x) = \frac{1}{6}, \qquad x = 1, 2, 3, 4, 5, 6
$$

$$M_X(t) = E(e^{Xt}) = \sum_{k=1}^{6} e^{kt}P(X = x) = \frac{1}{6}(e^t + e^{2t} + e^{3t} + e^{4t} + e^{5t} + e^{6t})$$

b. Empregando a fgm, ache $E(X)$ e $V(X)$.

$$M_x'(t) = \frac{e^t}{2}, \qquad M_x''(t) = \frac{e^t}{2}$$

$$E(X) = \lim_{t\to 0} M_x'(t) = \lim_{t\to 0} \frac{e^t}{2} = \frac{1}{2}$$

$$E(X^2) = \lim_{t\to 0} M_x''(t) = \lim_{t\to 0} \frac{e^t}{2} = \frac{1}{2}$$

$$V(X) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

Se fosse um dado então

$$M_x'(t) = \frac{1}{6}(e^t + 2e^{2t} + 3e^{3t} + 4e^{4t} + 5e^{5t} + 6e^{6t})$$

$$M_x''(t) = \frac{1}{6}(e^t + 4e^{2t} + 9e^{3t} + 16e^{4t} + 25e^{5t} + 36e^{6t})$$

$$E(X) = \lim_{t\to 0} M_x'(t) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{6}(e^t + 2e^{2t} + 3e^{3t} + 4e^{4t} + 5e^{5t} + 6e^{6t}) = \frac{21}{6} = \frac{7}{2}$$

$$E(X^2) = \lim_{t\to 0} M_x''(t) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{6}(e^t + 4e^{2t} + 9e^{3t} + 16e^{4t} + 25e^{5t} + 36e^{6t}) = \frac{91}{6}$$

$$V(X) = \frac{91}{6} - \frac{49}{8} = \frac{364 - 147}{24} = \frac{364 - 147}{24} = \frac{217}{24}$$

5. Determine a fgm da variável aleatória X do Probl. 6.7. Empregando a fgm, ache $E(X)$ e $V(X)$.

$$g(x) = \begin{cases} x - 1, & 1 < x \leq 2, \\ -x + 3, & 2 < x < 3 \\ 0, & c.c \end{cases}$$

$$\begin{aligned} M_X(t) = E(e^{xt}) &= \int_1^2 e^{xt}(x-1)dx + \int_2^3 e^{xt}(3-x)dx \\ &= \frac{e^t(e^t(t-1)+1)}{t^2} + \frac{e^{2t}(e^t - t - 1)}{t^2} = \frac{e^t}{t^2}[1 + e^{2t} - 2e^t] \\ &= \frac{e^t}{t^2}(e^t(e^t - 2) + 1) = \frac{e^t}{t^2}(e^t - 1)^2 \end{aligned}$$

$$M_X'(t)=\frac{t^2e^t-2te^t}{t^4}(e^t-1)^2+\frac{e^t}{t^2}2(e^t-1)e^t=\frac{e^t(e^t-1)}{t^3}(\,e^t(3t-2)-t+2)$$

$$\begin{aligned}M_X''(t)&=\frac{\left(e^t(e^t-1)+e^t(e^t)\right)t^3-3t^2e^t(e^t-1)}{t^6}(\,e^t(3t-2)-t+2)\\&\quad+\frac{e^t(e^t-1)}{t^3}(\,e^t(3t-2)+3e^t-1)\\&=\frac{e^t}{t^4}(t^2+3e^{2t}(3t^2-4t+2)-4e^t(2t^2-4t+3)-4t+6)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}E(X)&=\lim_{t\to 0}M_X'(t)=\lim_{t\to 0}\frac{e^t(e^t-1)}{t^3}(\,e^t(3t-2)-t+2)\\&=\lim_{t\to 0}\frac{27(3t+1)e^{3t}-16(2t+1)e^{2t}+(t+1)e^t}{6}=\frac{27-16+1}{6}\\&=2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&E(X^2)=\lim_{t\to 0}M_X''(t)\\&=\lim_{t\to 0}\frac{e^t}{t^4}(t^2+3e^{2t}(3t^2-4t+2)-4e^t(2t^2-4t+3)-4t+6)\\&=\lim_{t\to 0}\frac{81(9t^2+12t+2)e^{3t}-64(2t^2+4t+1)e^{2t}+(t^2+4t+2)e^t}{24}=\frac{25}{6}\end{aligned}$$

$$V(X)=\frac{25}{6}-4=\frac{1}{6}$$

6. Suponha que a variável aleatória X tenha fdp

$$f(x)=\frac{1}{2}e^{-|x|},\qquad -\infty<x<+\infty.$$

a. Ache a fgm de X.

$$\begin{aligned}M_X(t)=E(e^{xt})=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{xt}e^{-|x|}dx&=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0}e^{-x(t-1)}dx+\frac{1}{2}\int_{0}^{+\infty}e^{-x(t+1)}dx\\&=\frac{1}{1-t^2},\qquad -1<t<1\end{aligned}$$

b. Empregando a fgm, ache $E(X)$ e $V(X)$.

$$M_X'(t)=\frac{2t}{(t^2-1)^2}$$

$$M_X''(t)=-2\frac{3t^2+1}{(t^2-1)^3}$$

$$E(X)=\lim_{t\to 0}M_X'(t)=\lim_{t\to 0}\frac{2t}{(t^2-1)^2}=0$$

$$E(X^2)=\lim_{t\to 0}M_X''(t)=\lim_{t\to 0}-2\frac{3t^2+1}{(t^2-1)^3}=2$$

$$V(X)=2$$

7. Empregue a fgm para mostrar que, se X eY forem variáveis aleatórias independentes, com distribuição $N(\mu_x, \sigma_x^2)$ e $N(\mu_y, \sigma_y^2)$, respectivamente, então $Z = aX + bY$ será também normalmente distribuída, onde a e b são constantes.

$$M_X(t) = \exp\left(t\mu_x + \frac{\sigma_x^2 t^2}{2}\right), \qquad M_Y(t) = \exp\left(t\mu_y + \frac{\sigma_y^2 t^2}{2}\right)$$

$$M_Z(t) = M_X(t)M_Y(t) = \exp\left(t\mu_x + \frac{\sigma_x^2 t^2}{2}\right)\exp\left(t\mu_y + \frac{\sigma_y^2 t^2}{2}\right)$$
$$= \exp\left[t(\mu_x + \mu_y) + \frac{t^2}{2}(\sigma_x^2 + \sigma_y^2)\right]$$

$$E(Z) = \mu_x + \mu_y, \qquad V(Z) = \sigma_x^2 + \sigma_y^2 \therefore Z \sim N(\mu_x + \mu_y, \sigma_x^2 + \sigma_y^2)$$

8. Suponha que a fgm da variável aleatória X seja da forma

$$M_X(t) = (0{,}4e^t + 0{,}6)^8.$$

   a. Qual será a fgm da variável aleatória $Y = 3X + 2$?

   $M_Y(t) = e^{2t}M_X(3t) = e^{2t}(0{,}4e^{3t} + 0{,}6)^8$

   b. Calcule $E(X)$.

   $M_X'(t) = 3{,}2e^t(0{,}4e^t + 0{,}6)^7$

   $E(X) = \lim_{t\to 0} M_X'(t) = \lim_{t\to 0} 3{,}2e^t(0{,}4e^t + 0{,}6)^7 = 3{,}2$

   c. Você poderá verificar sua resposta a (b), por algum outro método? [Tente “reconhecer” $M_X(t)$.]

   $M_X(t)$ é a fgm de uma distribuição binomial com $n = 8,\ p = 0{,}4$.

   $E(X) = np = 8(0{,}4) = 3{,}2$

9. Alguns resistores, $R_i,\ i = 1, 2, \cdots, n$, são montados em série em um circuito. Suponha que a resistência de cada um seja normalmente distribuída, com $E(R_i) = 10\ ohms$ e $V(R_i) = 0{,}16$.

   a. Se $n = 5$, qual será a probabilidade de que a resistência do circuito exceda $49\ ohms$?

   $$R = \sum_{i=1}^{5} R_i, \qquad E(R) = 50, \qquad V(R) = 0{,}8$$

   $$P(R > 49) = P\left(Y > \frac{49 - 50}{\sqrt{0{,}8}}\right) \cong P(Y > -1{,}12) = \Phi(1{,}12) = 0{,}8686$$

   b. Para que se tenha aproximadamente igual a 0,05 a probabilidade de que a resistência total exceda $100\ ohms$, que valor deverá ter n?

$$P(R > 100) = P\left(Y > \frac{100 - 10n}{\sqrt{0{,}16n}}\right) = \Phi\left(\frac{10n - 100}{\sqrt{0{,}16n}}\right) \cong 0{,}05 \therefore$$

$$\frac{10n - 100}{\sqrt{0{,}16n}} \cong -1{,}645 \equiv 10n + 0{,}658\sqrt{n} - 100 \cong 0 \therefore$$

$$\sqrt{n} = \frac{-0{,}658 \pm \sqrt{(0{,}658)^2 - 4.10(-100)}}{2.10} \cong \begin{cases} 3{,}12955 \\ -3{,}19535 \equiv \emptyset \end{cases}$$

$$n \cong (3{,}12955)^2 \cong 9{,}79$$

$$n = \begin{cases} 9 \rightarrow P(R > 100) = P\left(Y > \dfrac{100 - 90}{1{,}2}\right) = \Phi(-8{,}333) \cong 0 \\ 10 \rightarrow P(R > 100) = P\left(Y > \dfrac{100 - 100}{\sqrt{1{,}6}}\right) = \Phi(0) \cong 0{,}5 \end{cases}$$

$n = 9$ é mais adequado.

10. Em um circuito, n resistores são montados em série. Suponha que a resistência de cada um seja uniformemente distribuída sobre $[0, 1]$ e suponha, também, que todas as resistências sejam independentes. Seja R a resistência total.
    a. Estabeleça a fgm de R.

$$f(r_i) = 1, \qquad 0 \le r_i \le 1, \qquad i = 1, 2, \cdots, n$$

$$M_{R_i}(t) = \int_0^1 e^{r_i t} dr_i = \frac{e^t - 1}{t}$$

$$M_R(t) = \prod_{i=1}^{n} M_{R_i}(t) = \left(\frac{e^t - 1}{t}\right)^n$$

    b. Empregando a fgm, obtenha $E(R)$ e $V(R)$. Confirme suas respostas pelo cálculo direto.

$$M_R'(t) = n\left(\frac{e^t - 1}{t}\right)^{n-1}\left(\frac{te^t - e^t + 1}{t^2}\right)$$

$$M_R''(t) = n\left(\frac{e^t - 1}{t}\right)^n\left(\frac{e^{2t}(n(t-1)^2 + 1) - e^t(2n(1-t) + t^2 + 2) + n + 1}{(e^t - 1)^2 t^2}\right)$$

$$E(R) = \lim_{t \to 0} M_R'(t) = \lim_{t \to 0} n\left(\frac{e^t - 1}{t}\right)^{n-1}\left(\frac{te^t - e^t + 1}{t^2}\right) = \frac{n}{2}$$

$$E(R^2) = \lim_{t\to 0} M_R''(t)$$

$$= \lim_{t\to 0} n\left(\frac{e^t - 1}{t}\right)^n \left(\frac{e^{2t}(n(t-1)^2 + 1) - e^t(2n(1-t) + t^2 + 2) + n + 1}{(e^t - 1)^2 t^2}\right)$$

$$= \lim_{t\to 0} n\left(\frac{e^t - 1}{t}\right)^n \lim_{t\to 0} \frac{(16nt^2 + 32nt + 16)e^{2t} + (-t^2 + (2n-8)t + 6n - 14)e^t}{(16t^2 + 64t + 48)e^{2t} - (2t^2 + 16t + 24)e^t}\Bigg|_{f'v}^{f'v}$$

$$= \frac{3n^2 + n}{12} = \frac{n^2}{4} + \frac{n}{12}$$

$$V(R) = \frac{3n^2 + n}{12} - \frac{n^2}{4} = \frac{n}{12}$$

$$E(R) = E\left(\sum_{i=1}^{n} R_i\right) = nE(R_i) = \frac{n}{2}$$

$$V(R) = V\left(\sum_{i=1}^{n} R_i\right) = n^2 V(R_i) = \frac{n^2}{12}$$

$$E(R_i^2) = \int_0^1 r_i^2 dr_i = \frac{1}{3}$$

11. Se X tiver distribuição de X_n^2, empregando a fgm, mostre que $E(X) = n$ e $V(X) = 2n$.

$$M_X(t) = (1 - 2t)^{-\frac{n}{2}}$$

$$M_X'(t) = n(1 - 2t)^{-\frac{1}{2}(n+2)}$$

$$M_X''(t) = n(n+2)(1 - 2t)^{-\frac{1}{2}(n+4)}$$

$$E(X) = M_X'(0) = n, \qquad E(X^2) = M_X''(0) = n(n+2)$$

$$V(X) = n(n+2) - n^2 = 2n$$

12. Suponha que V, a velocidade (cm/seg) de um objeto, tenha distribuição $N(0,4)$. Se $K = mV^2/2\ ergs$ for a energia cinética do objeto (onde $m = massa$), determine a fdp de K. Se $m = 10\ gramas$, calcule $P(K \le 3)$.

$$W = \frac{V}{2} \to W \sim N(0,1)$$

$$K = \frac{mV^2}{2} = 2mW^2 \therefore$$

$$G(k) = P(K \le k) = P(2mW^2 \le k) = P\left(-\sqrt{\frac{k}{2m}} \le W \le \sqrt{\frac{k}{2m}}\right)$$

$$= F\left(\sqrt{\frac{k}{2m}}\right) - F\left(-\sqrt{\frac{k}{2m}}\right)$$

$$g(k) = G'(k) = \frac{d}{dk}F\left(\sqrt{\frac{k}{2m}}\right) - \frac{d}{dk}F\left(-\sqrt{\frac{k}{2m}}\right)$$

$$= f\left(\sqrt{\frac{k}{2m}}\right)\frac{d}{dk}\left(\sqrt{\frac{k}{2m}}\right) - f\left(-\sqrt{\frac{k}{2m}}\right)\frac{d}{dk}\left(-\sqrt{\frac{k}{2m}}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2m}{k}}\left[\varphi\left(\sqrt{\frac{k}{2m}}\right) + \varphi\left(-\sqrt{\frac{k}{2m}}\right)\right]$$

$$= \sqrt{\frac{m}{2k}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[e^{-\frac{\left(\sqrt{\frac{k}{2m}}\right)^2}{2}} + e^{-\frac{\left(-\sqrt{\frac{k}{2m}}\right)^2}{2}}\right] = 2\sqrt{\frac{m}{4\pi k}}e^{-\frac{k}{40}} = \sqrt{\frac{m}{\pi k}}e^{-\frac{k}{40}},$$

$k > 0$

$$g(k|m = 10) = \sqrt{\frac{10}{\pi k}}e^{-\frac{k}{40}}$$

$$P(K \leq 3) = P(2mW^2 \leq 3) = P\left(W^2 \leq \frac{3}{20}\right) = 0{,}3015$$

13. Suponha que a duração da vida de uma peça seja exponencialmente distribuída, com parâmetro 0,5. Suponha que 10 dessas peças sejam instaladas sucessivamente, de modo que a i-ésima peça seja instalada "imediatamente" depois que a peça de ordem $(i-1)$ tenha falhado. Seja T_i a duração até falhar a i-ésima peça, $i = 1, 2, \cdots, 10$, sempre medida a partir do instante de instalação. Portanto, $S = T_1 + \cdots + T_{10}$ representa o tempo total de funcionamento das 10 peças. Admitindo que os T_i sejam independentes, calcule $P(S \geq 15{,}5)$.

$$f(x) = \frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}, \qquad x > 0$$

$$T_i \sim \text{Exp}(\alpha) \rightarrow\ S = T_1 + \cdots + T_r \sim \Gamma(\alpha;\ \text{r})$$

$$T_i \sim \text{Exp}(0{,}5) \rightarrow\ S = T_1 + \cdots + T_{10} \sim \Gamma(0{,}5;\ 10)$$

$$P(S \geq 15{,}5) = \sum_{k=0}^{9} e^{-(0{,}5)(15{,}5)}\frac{\left((0{,}5)(15{,}5)\right)^k}{k!} = 0{,}7471$$

14. Suponha que $X_1, \cdots, X_{80}$ sejam variáveis aleatórias independentes, cada uma tendo distribuição $N(0, 1)$. Calcule $P[X_1^2 + \cdots + X_{80}^2 > 77]$. [Sugestão: Empregue o Teor. 9.2]

Teorema 10.8

$$X_i \sim N(0, 1) \rightarrow S = X_1^2 + \cdots + X_{80}^2 \sim \chi_{80}^2 \therefore$$

$$P[X_1^2 + \cdots + X_{80}^2 > 77] = P[S > 77] = 0{,}5743$$

Teorema 9.2

$n \sim \infty \rightarrow \sqrt{2S} \approx N\left(\sqrt{2n-1}, 1\right) \therefore$

$$P[S > 77] = P\left[\sqrt{2S} > \sqrt{154}\right] = P\left[Y > \sqrt{154} - \sqrt{2(80)-1}\right] = \Phi\left(\sqrt{159} - \sqrt{154}\right) \cong \Phi(0,2) \cong 0,5793$$

15. Mostre que se $X_i, i = 1, 2, \cdots, k$, representar o número de sucessos em n_i repetições de um experimento, o qual $P(sucesso) = p$, para todo i, então $X_1 + \cdots + X_k$ terá uma distribuição binomial. (Isto é, a distribuição binomial possui a propriedade aditiva.)

$X = X_1 + \cdots + X_k \therefore$

$M_X(t) = M_{X_1}(t) \cdots M_{X_k}(t) = [pe^t + q]^n \cdots [pe^t + q]^n = [pe^t + q]^{nk} \therefore$

$X \sim B(nk, p)$

16. (Distribuições de Poisson e Multinominal.) Suponha que $X_i, i = 1, 2, \cdots, n$, sejam variáveis aleatórias independentes com distribuição de Poisson, com parâmetros $\alpha_i, i = 1, \cdots, n$. Faça $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$. Nesse caso, a distribuição de probabilidade conjunta de $X_1, \cdots, X_n$, dado $X = x$, é dada por uma distribuição multinominal. Isto é,

$$P(X_1 = x_1, \cdots, X_n = x_n | X = x) = \frac{x!}{x_1! \cdots x_n!}\left(\frac{\alpha_1}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i}\right)^{x_1} \cdots \left(\frac{\alpha_n}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i}\right)^{x_n}.$$

Observando a definição da distribuição multinominal, verificamos que basta provar que

$$p_j = \frac{\alpha_j}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i}$$

$$p_j = \frac{eventos\ favoráveis\ à\ j}{eventos\ totais} = \frac{x_j}{x} = \frac{nE(X_j)}{nE(X)} = \frac{E(X_j)}{E(X)} = \frac{\alpha_j}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i} \therefore$$

$$P(X_1 = x_1, \cdots, X_n = x_n | X = x) = \frac{x!}{\prod_{i=1}^{n} x_i!} \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{\alpha_i}{\alpha}\right)^{x_i}, \qquad \alpha = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \ \blacksquare$$

17. Estabeleça a fgm de uma variável aleatória que tenha distribuição geométrica. Essa distribuição possui a propriedade aditiva?

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = \sum_{x=1}^{\infty} e^{tx}(1-p)^x p = p \sum_{x=1}^{\infty} [e^t(1-p)]^x = \frac{pe^t(1-p)}{1 - e^t(1-p)}$$

$$M_Z(t) = M_X(t) M_Y(t) = E(e^{tX})E(e^{tY}) = \left[\frac{pe^t(1-p)}{1 - e^t(1-p)}\right]^2 \therefore$$

Não possui a propriedade aditiva.

18. Se a variável aleatória X tiver uma fgm dada por $M_X(t) = 3/(3-t)$, qual será o desvio-padrão de X?

$$\sigma = \sqrt{V(X)} = \sqrt{M_X''(0) - [M_X'(0)]^2}$$

$$M_X'(t) = \frac{3}{(3-t)^2}\ , \qquad M_X''(t) = \frac{6}{(3-t)^3}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{6}{(3-0)^3} - \left[\frac{3}{(3-0)^2}\right]^2} = \frac{1}{3}$$

19. Estabeleça a fgm de uma variável aleatória que seja uniformemente distribuída sobre $(-1, 2)$.

$$f(x) = \frac{1}{3}, \qquad -1 < x < 2$$

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = \frac{1}{3}\int_{-1}^{2} e^{tx} = \frac{1}{3}\frac{e^{tx}}{t}\Bigg]_{-1}^{2} = \frac{e^{3t}-1}{3te^{t}}$$

20. Um determinado processo industrial produz grande número de cilindros de aço, cujos comprimentos são distribuídos, normalmente, com média 3,25 polegadas e desvio-padrão 0,05 polegadas. Se dois desses cilindros forem escolhidos ao acaso e dispostos um em continuação ao outro, qual será a probabilidade de que seu comprimento combinado seja menor do que 6,60 polegas?

$$X \sim N(\mu_x, \sigma_x^2), Y \sim N(\mu_y, \sigma_y^2) \rightarrow Z = X + Y \sim N(\mu_x + \mu_y, \sigma_x^2 + \sigma_y^2) \therefore$$

$$Z \sim N(6{,}5;\ 0{,}005)$$

$$P(Z < 6{,}6) = P\left(W < \frac{6{,}6 - 6{,}5}{\sqrt{0{,}005}}\right) = \Phi(\sqrt{2}) = 0{,}9207$$

Comentário: Ao calcular $M_x'(t)$,para $t = 0$, pode surgir uma forma indeterminada. Assim, $M_x'(0)$ pode ser da forma $0/0$. Nesse caso, deveremos tentar aplicar a regra de L'Hôpital. Por exemplo, se X for uniformemente distribuída sobre $[0, 1]$, nós facilmente encontraremos que $M_x(t) = (e^t - 1)/t$ e $M_x'(t) = (te^t - e^t + 1)/t^2$. Consequentemente, em $t = 0$, $M_x'(t)$ é indeterminada.

Aplicando a regra de L'Hôpital, encontraremos que

$$\lim_{t\to 0} M_x'(t) = \lim_{t\to 0} te^t/2t = 1/2.$$

Isto confirma que $M_x'(0) = E(X)$, que é igual a $1/2$ para a variável aleatória apresentada aqui.