Capitulo 7

Ramírez Cotonieto Luis Fernando

7.1. Encontrar el valor esperado de las sig. var. aleatorias

a) Var. alt. X 4.1
b) P. 4.2
c) 4.6
d) 4.18

a) $\mathcal{E}(x) = 0\left(\frac{1}{64}\right) + 1\left(\frac{9}{64}\right) + 2\left(\frac{27}{64}\right) + 3\left(\frac{27}{64}\right)$

$= 2.25$

b) i) Los artículos se escogen con sust. X es bin.

$p = \frac{1}{5}$ $n = 4$

$\mathcal{E}(x) = np = \frac{4}{5}$

ii) Los artículos se escogen sin sustitución

$\mathcal{E}(x) = 0\left(\frac{969}{2530}\right) + 1\left(\frac{1140}{2530}\right) + 2\left(\frac{380}{2530}\right) + 3\left(\frac{40}{2530}\right) + 4\left(\frac{1}{2530}\right)$

$= \frac{2024}{2530}$

c) $\mathcal{E}(T) = (k-c)(0.8) + \left(\frac{4}{3}k - c\right)(0.16) + \left(\frac{5}{3}k - c\right)(0.032)$
$+ (2k-c)(0.0064) + \left(\frac{7}{3}k - c\right)(0.00128)$
$+ \frac{7}{3}k(0.00032)$

$= (0.3632)k - (0.99968)c$

d) Para n en general

$\mathcal{E}(x) = \int_{2000}^{10000} \frac{k x\,dx}{x^n} = k\left[-\frac{x^{-n}}{n}\right]_{2000}^{10000} = \frac{k}{n 2^n 10^{3n}}\left(1 - \frac{1}{5^n}\right)$

Scanned with CamScanner

$$\varepsilon(x) = \frac{(n-1)\,10^{4(n-1)}}{5^{n-1}-1} \times \frac{1}{n2^n}\,10^{3n}\left(\frac{5^n-1}{4^n}\right)$$

$$= \frac{(n-1)(5^n-1)}{n10^4(5^{n-1}-1)}$$

7.4- En la fabricación del petroleo, la temperatura de destilación T (grados centigrados) es crucial para determinar la calidad del producto final. Supongamos que T se considera como una variable aleatoria distribuida uniformemente en [150,300]...

T es una variable distribuida uniformemente en [150,300]

Luego

$$f(t) = \frac{1}{150}, \quad 150 \leq t \leq 300$$

$$= 0$$

Sea U la variable aleatoria "utilidad neta", entonces

$$U = C_2 - C_1, \quad \text{si } T \leq 200$$

$$= C_3 - C_1, \quad \text{si } T > 200$$

De utilidad tenemos

$$\varepsilon(U) = (C_2-C_1)P[T\leq 200] + (C_3-C_1)P[T>200]$$

$$= (C_2-C_1)\int_{150}^{200}\frac{1}{150}\,dt + (C_3-C_1)\int_{200}^{300}\frac{1}{150}\,dt$$

$$= (C_2-C_1)\frac{1}{3} + (C_3-C_1)\frac{2}{3}$$

$$= \frac{1}{3}(2C_3 + C_2 - 3C_1)$$

Scanned with CamScanner

7.6- Supongase que un instrumento electrónico tiene una duración x (en unidades de 1000 horas) que se considera como una variable aleatoria continua con la siguiente fdp.

$$f(x) = e^{-x}, \quad x > 0$$

...

Sol.

Si P = utilidad neta de fabricante por artículo

Entonces

$$P = -2, \quad si \quad x \leq 0.9$$
$$= 3, \quad si \quad x > 0.9$$

$$\therefore \quad E(P) = (-2) P[x \leq 0.9] + 3P[x > 0.9]$$
$$= (-2) \int_0^{0.9} e^{-x} dx + 3 \int_{0.9}^{\infty} e^{-x} dx$$
$$= (-2)(-e^{-x}) \Big|_0^{0.9} + 3(-e^{-x}) \Big|_{0.9}^{\infty}$$
$$= -2(1 - e^{-0.9}) + 3e^{-0.9} = -2 + 5e^{-0.9}$$
$$= -2 + 5(0.40657)$$
$$= 0.03285 \#$$

7.8. Se sabe que un lote contiene 2 artículos defectuosos y 8 no defectuosos. Si estos artículos se inspeccionan al azar, uno después del otro. ¿cuál es el número esperado de artículos que se deben escoger para inspección a fin de sacar todos los defectuosos?

Sol.

X = no. artículos escogidos hasta obtener los dos defectuosos

$$R_x = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$$

Scanned with CamScanner

x	p(x)
2	1/45
3	2/45
4	3/45
5	4/45
6	5/45
7	6/45
8	7/45
9	8/45
10	9/45

$$E(x) = 2 \cdot \frac{1}{45} + 3 \cdot \frac{2}{45} + 4 \times \frac{3}{45} + 5 \times \frac{4}{45}$$

$$+ 6 \times \frac{5}{45} + 7 \times \frac{6}{45} + 8 \times \frac{7}{45} + 9 \times \frac{8}{45}$$

$$+ 10 \times \frac{9}{45}$$

$$= 7\frac{1}{3}$$

1.12. Suponiendo que x y y son variables aleatorias independientes con las sig fdp.

$$f(x) = 8/x^3 \ , \ x > 2 \ ; \ g(y) = 2y \ , \ 0 < y < 1$$

a) Fdp $z = xy$

b) $E(z)$

↳ fdp como z

↳ sin fdp

Sol.

a)

$$p(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, g\left(\frac{z}{x}\right) \left|\frac{1}{x}\right| dx$$

donde $z = xy$, $u = x$, $y = \frac{z}{x} = \frac{z}{u}$ y $\left|\frac{1}{u}\right| = \left|\frac{1}{x}\right|$

consideramos los valores donde f y g son > 0

$x > 2$ $\qquad$ $0 < \frac{z}{x} < 1$

$x > z > 0$

$$p(z) = \int_{2}^{\infty} \frac{8}{x^3} \cdot 2\left(\frac{z}{x}\right) \frac{1}{x}\, dx$$

$$= 16z \int_{2}^{\infty} x^{-5}\, dx$$

Scanned with CamScanner

$$= 16z\left[\frac{x^{-4}}{-4}\right]\Big|_2^{\infty} = \frac{z}{4}$$

Si $z > 2$, tenemos $x > z$

$$p(z) = \int_z^{\infty} 16 z x^{-5} dx = 16z\left[\frac{x^{-4}}{-4}\right]\Big|_z^{\infty}$$

$$= \frac{4}{z^3}$$

De (1) y (2) tenemos

$$p(z) = \frac{z}{4}, \text{ si } 0 \leq z \leq 2$$

$$= \frac{4}{z^3}, \text{ si } z > 2$$

b) Usando la obtenida en (a)

$$E(z) = \int_{-\infty}^{\infty} z\, p(z)\, dz = \int_0^2 \frac{z^2}{4} dz + \int_2^{\infty} \frac{4}{z^2} dz$$

$$E(z) = \frac{z^3}{12}\Big|_0^2 + \left(-\frac{4}{z}\right)\Big|_2^{\infty} = \frac{2}{3} + 2 = \frac{8}{3}$$

- Sin usar fdp de z

$$E(z) = E(x)(y)$$

$$= \int_2^{\infty} x \frac{8}{x^3} dx \int_0^1 2y^2 dy$$

$$= \left(-\frac{8}{x}\Big|_2^{\infty}\right)\left(\frac{2}{3} y^3\Big|_0^1\right)$$

$$= 4 \times \frac{2}{3}$$

$$= \frac{8}{3}$$

Scanned with CamScanner

7.38) Supongase que la variable aleatoria bidimensional (x,y) tiene la fdp dada por

$f(x,y) = ke^{-y}$; $0<x<y<1$

$=0$ para cualquier otro valor.

Sol.

$$g(x) = \int_{y=x}^{1} \frac{ke^{-y}}{1} dy = k(-e^{-y})\Big|_{x}^{1} = k[e^{-x} - e^{-1}]$$

$$g(x) = k(e^{-x} - e^{-1}) \quad , 0 \leq x \leq 1$$

$$h(y) = \int_{x=0}^{y} ke^{-y} dx = ke^{-y} x\Big|_{0}^{y} = kye^{-y}$$

$$h(y) = kye^{-y} \qquad 0 \leq y \leq 1$$

$\therefore$

$$\varepsilon(x) = k\int_0^1 (xe^{-x} - xe^{-1}) dx = k[\int_0^1 xe^{-x} dx - \int_0^1 xe^{-1} dx]$$

$$= k\left(\frac{2-5e^{-1}}{2}\right)$$

$$\varepsilon(x^2) = k[\int_0^1 x^2 e^{-x} dx - \int_0^1 x^2 e^{-1} dx] = k\left(\frac{6-16e^{-1}}{3}\right)$$

$$Var(x) = \varepsilon(x^2) - (\varepsilon(x))^2 = \frac{2k}{3}(3-8e^{-1}) - \frac{k^2}{4}(2-5e^{-1})^2$$

$$\varepsilon(y) = k\int_0^1 y^2 e^{-y} dy = k(2-5e^{-1}),$$

$$\varepsilon(y^2) = k\int_0^1 y^3 e^{-y} dy = k(6-16e^{-1}).$$

$$Var(y) = k(6-16e^{-1}) - k^2(2-5e^{-1})^2$$

$$\varepsilon(xy) = k\int_0^1 \int_0^y xye^{-y} dx dy = k\int_0^1 ye^{-y}\left(\frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^y dy$$

$$= k\int_0^1 \frac{y^3 e^{-y}}{2} dy = k(3-8e^{-1})$$

$$\rho = \frac{\varepsilon(xy) - \varepsilon(x)\varepsilon(y)}{\sqrt{var(x)\,var(y)}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Scanned with CamScanner