

Memorias del
20º ENCUENTRO DE GEOMETRÍA
y sus aplicaciones

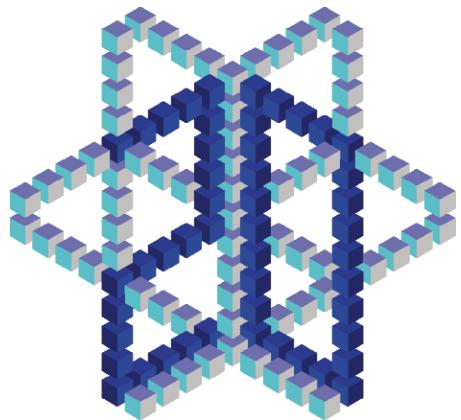
Patricia Perry
Editora



**UNIVERSIDAD PEDAGOGICA
NACIONAL**

Educadora de educadores

FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS



Memorias del
20º ENCUENTRO DE GEOMETRÍA
y sus aplicaciones

Patricia Perry
Editora



UNIVERSIDAD PEDAGOGICA
NACIONAL

Educadora de educadores

FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

Cítese como: Perry, P. (Ed.) (2011). *Memorias del 20º Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones*. Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

Website: <http://encuentrogeometriaupn.com>

Comité Editorial

Leonor Camargo
Carmen Samper
Patricia Perry

Apoyo editorial

Claudia Vargas y Andrea Pérez

Memorias del 20º Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones

Editora

Patricia Perry

© 2011 Universidad Pedagógica Nacional

© 2011 Autores

Se autoriza la reproducción total o parcial de algún artículo siempre y cuando se haga la cita correspondiente.

ISBN 978-958-44-8826-8

Diseño de logo del 20º Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones

Benjamín Sarmiento y Carmen Samper

Diseño y Diagramación

Grupo de Comunicaciones Corporativas
Universidad Pedagógica Nacional

Publicado por Universidad Pedagógica
Nacional, Departamento de Matemáticas
Calle 72 No. 11 86
Bogotá, Colombia



**UNIVERSIDAD PEDAGOGICA
NACIONAL**

Educadora de educadores

FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

PRESENTACIÓN

El *Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones* es un evento académico de carácter internacional que tradicionalmente ha organizado la Universidad Pedagógica Nacional (Colombia) con el apoyo de otras instituciones. El propósito ha sido convocar a matemáticos, investigadores, profesores y estudiantes de matemáticas o de educación matemática para favorecer el intercambio de ideas y experiencias. Con el *Encuentro* se espera contribuir a: la difusión de resultados de investigaciones en geometría, su didáctica y sus aplicaciones; la formación de estudiantes de matemáticas y de educación matemática y docentes de primaria, secundaria y educación superior en temáticas relacionadas con la geometría, su didáctica y sus aplicaciones; el fomento del estudio de los fundamentos de la geometría, su filosofía, sus métodos, su historia, su didáctica, sus aplicaciones y sus relaciones con otras ramas de las matemáticas.

El 20º *Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones* ha sido organizado por la Universidad Pedagógica Nacional y la Escuela Colombiana de Ingeniería Julio Garavito. Participan tres invitados de reconocida trayectoria académica en el campo de la Educación Matemática: Ángel Gutiérrez, de la Universidad de Valencia (España), Paolo Boero, de la Universidad de Génova (Italia) y Nadia Douek, de la Universidad de Niza (Francia). También participan profesores e investigadores de varias instituciones educativas colombianas: Colombia Aprendiendo, Universidad de Bogotá Jorge Tadeo Lozano, Universidad de los Andes, Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Universidad Industrial de Santander, Universidad Nacional de Colombia, Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia, Universidad Sergio Arboleda, Universidad del Rosario y de las entidades organizadoras.

Para esta versión del *Encuentro*, las actividades académicas se relacionan con alguna de las siguientes temáticas: Geometría en la educación matemática, Geometría e historia, Geometría y otras ramas de la matemática, Geometría y artes, Geometría y tecnología, y Tópicos de geometría.

Las ponencias sometidas a consideración del Comité Académico del *Encuentro* fueron evaluadas por pares académicos. Este libro digital, que no es una compilación de documentos sino una obra editada, incluye sólo los documentos que además de haber sido aceptados por los evaluadores pasaron por un proceso adicional de evaluación y de edición académica, este último con la participación de los autores.

Comité Editorial
Bogotá, junio de 2011

ORGANIZACIÓN DEL ENCUENTRO

COMITÉ ORGANIZADOR

Universidad Pedagógica Nacional

Mauricio Bautista, Leonor Camargo, Óscar Molina, Patricia Perry, Carmen Samper, Benjamín Sarmiento

Escuela Colombiana de Ingeniería Julio Garavito

Carlos Álvarez, Alicia Guzmán

COMITÉ DE REVISIÓN ACADÉMICA

Colombia Aprendiendo

Hugo Cuéllar

Escuela Colombiana de Ingeniería Julio Garavito

Bernarda Aldana, Carlos Álvarez, Alicia Guzmán, Rafael Méndez, Édgar O'bonaga

Fundación AprendEs

Miriam Ortiz

Universidad de los Andes

Ángela Restrepo

Universidad Industrial de Santander

Martín Acosta, Jorge Fiallo

Universidad Nacional

Omar Duque, Reinaldo Montañez

Universidad Pedagógica Nacional

Orlando Aya, Mauricio Bautista, Leonor Camargo, Hernán Díaz, Alberto Donado, Felipe Fernández, Gloria García, Édgar Guacaneme, Luis Guayambuco, Óscar Molina, Jorge Páez, Patricia Perry, Claudia Salazar, Carmen Samper, Benjamín Sarmiento, Nubia Soler

Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia

Clara Rojas

ENTIDAD DE APOYO ADMINISTRATIVO

Fundación Francisca Radke

ENTIDADES AUSPICIADORAS

Belpapel Ltda., Grupo Editorial Norma, Gimnasio Moderno, ICETEX, Proyecto Didácticos Creativos, Sociedad Colombiana de Matemáticas

TABLA DE CONTENIDO

Conferencias y cursillos de invitados

Ángel Gutiérrez

Reflexiones sobre la enseñanza de la geometría en los niveles de primaria y secundaria	3
----------------------------------------------------------------------------------------	---

Carlos Vasco

La interacción entre modelos y teorías en la enseñanza de la Cronotopía	15
-------------------------------------------------------------------------	----

Armando Echeverry y Orlando Aya

La circulatura del cuadrado: una perspectiva desde los métodos numéricos	37
--------------------------------------------------------------------------	----

Hugh Hilden, José Montesinos, Débora Tejada y Margarita Toro

Impresión de diseños simétricos en la obra de Escher	49
------------------------------------------------------	----

Eduardo Martínez y Primitivo Acosta-Humánez

Un enfoque geométrico del Teorema de Sharkovskii	77
--------------------------------------------------	----

Reinaldo Montañez

De los espacios topológicos a las categorías topológicas	85
----------------------------------------------------------	----

Reinaldo Núñez

Acerca del Triángulo de Pascal	93
--------------------------------	----

Luis-Enrique Ruiz-Hernández

Geometría afín y topología del prismatoide pentagonal	99
-------------------------------------------------------	----

Benjamín Sarmiento

Diseño de mecanismo con Cabri Plus para obtener ecuaciones paramétricas de algunas curvas	119
-------------------------------------------------------------------------------------------	-----

Jeannette Vargas, Mario Pérez y María Teresa González

El logaritmo: ¿cómo animar un punto que relacione una progresión geométrica y una aritmética?	129
-----------------------------------------------------------------------------------------------	-----

Carmen Samper, Patricia Perry, Óscar Molina, Armando Echeverry y Leonor Camargo

Lógica y geometría dinámica: su articulación para aprender geometría plana	139
----------------------------------------------------------------------------	-----

Benjamín Sarmiento		
Construcción de cónicas, tangentes y envolventes	143	
 Comunicaciones breves		
Diana Acosta y Diana Rincón		
Octágonos que teselan el plano	149	
Sherly Alfonso		
Las contribuciones de Hilbert y de Max Dehn a la geometría no arquimediana	155	
Erika Ariza y Daniel Cifuentes		
Análisis epistemológico de situaciones problema que contribuyen a la enseñanza de la geometría	161	
Iván Ballesteros y David Rojas		
Conceptualización de área del rectángulo con la mediación del programa Cabri Geometry	169	
Cristina Bolívar, Mayerly Martín y Leonor Camargo		
Caracterización de la actividad demostrativa en básica secundaria	173	
Claudia Castro, Luz Díaz y Rosa Palacios		
Secuencia didáctica para la enseñanza de la semejanza utilizando fractales	181	
Harold Devia y Tatiana Galvis		
El Teorema de Barrow como propuesta para la enseñanza del Teorema Fundamental del Cálculo	189	
Bibiana Franco, Giovanni Moreno y Leonor Camargo		
La verificación y la interpretación de enunciados en la actividad demostrativa	197	
Christian Fuentes, Yenny Gaviria, Paola Vásquez y Jeisson Márquez		
Una secuencia didáctica para potenciar la elaboración de estrategias de resolución de problemas que involucren la identificación de propiedades de algunos poliedros en estudiantes de cuarto grado	205	
Manuel García y Alberto Suárez		
Procedimientos de resolución de problemas multiplicativos de isomorfismo de medidas	213	

Sara Henao y Jhonny Vanegas		
Sólidos platónicos y teoría de grafos en las clases de geometría	221	
Danny Jovel y Milton Rodríguez		
Concepción de área en estudiantes de grado sexto	229	
Carolina Luque y Luis Robayo		
La actividad demostrativa en una clase de geometría con estudiantes en edad extraescolar	237	
Julio Ocaña		
Percepción y representación	245	
Tatiana Ospina, Tania Plazas y Carmen Samper		
Aproximación a las concepciones de demostración de algunos profesores universitarios de matemáticas	253	
Tatiana Ospina, Tania Plazas y Carmen Samper		
Un ejemplo de actividad demostrativa de estudiantes de sexto grado	261	
Madelyn Piñeros y Diana García		
Análisis comparativo de la enseñanza de poliedros en estudiantes de aula regular y estudiantes de aula exclusiva	269	
Ivón Pinzón, José Rodríguez y Carmen Samper		
El papel de las tareas para propiciar actividad demostrativa	277	
José Quijano		
Cabri como herramienta didáctica en una institución educativa rural	285	
Diana Reyes y Clara Rojas		
Una experiencia de aula con teselados, arte y GeoGebra en el colegio Carlos Arturo Torres Peña (Santa Rosa de Viterbo-Boyacá)	293	
Eridson Rodríguez		
GeoGebra como herramienta que facilita la comprensión y la generalización del Teorema de Pitágoras	301	
Antonio Sángari y Clara Perez		
Construcciones de polígonos regulares con regla y compás con la asistencia del GeoGebra	307	

Claudia Vargas, Leidy Cepeda y Carmen Samper	
¿Se modifican los argumentos de los estudiantes cuando se prioriza lo teórico sobre lo empírico?	315
Jennyfer Zambrano y Jenny González	
Geometría en una plaza de mercado	323
 Conferencias	
Jenny Acevedo y Leonor Camargo	
El <i>Tetris</i> como mediador visual para el reconocimiento de movimientos rígidos en el plano (rotación y traslación)	333
Gilbert Cruz y Carlos Montenegro	
Aproximación al tratamiento escolar de la geometría a través de materiales manipulativos	345
Leidi Gil y Martha Orjuela	
Figuras de ancho constante: un tema por explorar	355
Leonardo Granados y Norman Aya	
Geometría en el alfabeto lógico de Zellweger	361
Carlos León	
El paso de la razón a la función trigonométrica: revisión de algunos elementos históricos en la construcción de la función trigonométrica	371
Martha Mosquera	
De la geometría a la biología: “una experiencia de investigación escolar”	379
Claudia Orjuela, Clara Rojas, Jorge Páez y José Ramírez	
Reglas y símbolos con L-sistemas	385
Erdulfo Ortega	
Contribución de la geometría a la formación de la noción de estructura de grupo. Una visión histórico-epistemológica	397
Laura Peña y Germán Torres	
Sombreros y zapatos para desarrollar el pensamiento lateral	409

Brigitte Sánchez y Jaime Fonseca	Algoritmos como herramienta en la búsqueda de nuevos datos para la resolución de problemas sobre isometrías del plano	421
Cursillos		
Francisco Córdoba y Pablo Ardila	La visualización en matemáticas con ayuda de la geometría dinámica y sus aportes a la modelación	433
Jhonathan Cuevas, Jonathan Gamba, Sandra Macana y John Puentes	Los niveles de van Hiele, ejemplo en un modelo de geometría euclídea donde las rectas son redondas	437
Óscar Molina, Armando Echeverry, Carmen Samper, Leonor Camargo y Patricia Perry	Cabri 3D: introducción al estudio de poliedros duales, arquimediano y regulares	441
José Panqueva	Poliedros hechos con nudos ideales	445
Mario Pérez y Adelina Ocaña	Transformaciones de funciones y transformaciones geométricas	449
Marisol Santacruz	Diseño de situaciones didácticas en educación primaria: el caso de la transformación de rotación en un AGD	453
Pósters		
Yadir Garnica	Análisis del fenómeno gravitacional a través de las formas diferenciales	459
Edward Latorre	Politopos: una primera aproximación	461
John Salas y Yesid Cruz	Análisis de los fenómenos electromagnéticos a través de las formas diferenciales y los tensores	463

Astrid Torregroza

Proyecto Silueta: delineando el mundo con Derive 5

465



Conferencias y cursillos de invitados

REFLEXIONES SOBRE LA ENSEÑANZA DE LA GEOMETRÍA EN LOS NIVELES DE PRIMARIA Y SECUNDARIA

Ángel Gutiérrez

Universidad de Valencia, España

angel.gutierrez@uv.es, www.uv.es/Angel.Gutierrez

En este texto presento introducciones a los principales elementos didácticos centrales de la enseñanza de la geometría en los niveles educativos. El modelo de van Hiele es el marco más efectivo para organizar la enseñanza de la geometría en los diferentes niveles educativos. Me centraré en uno de sus componentes, las fases de aprendizaje, que sugiere cómo organizar los contenidos de las secuencias de enseñanza de las matemáticas escolares. A continuación, prestaré atención a una propuesta más específica, centrada en describir el aprendizaje de conceptos geométricos, basada en la distinción entre las imágenes conceptuales y las definiciones conceptuales, para mostrar el papel crítico que deben jugar los ejemplos. Por último, reflexionaré sobre la necesidad de que los profesores tengan en cuenta las representaciones gráficas, físicas y mentales, utilizadas en la enseñanza y el aprendizaje de la geometría. Describiré los principales elementos que forman parte de los procesos y destrezas de visualización presentes en el trabajo con elementos geométricos.

INTRODUCCIÓN

Enseñar geometría en los grados de las educaciones primaria y secundaria es una tarea compleja debido a las múltiples variables que influyen. Actualmente, existe un acuerdo generalizado entre didactas de las matemáticas y profesores de matemáticas en que la enseñanza de la geometría debe basarse en metodologías que faciliten la actividad de exploración y descubrimiento de parte de los estudiantes. Para facilitar a los profesores la tarea de planificar y gestionar este tipo de clases, se han desarrollado diferentes modelos teóricos prácticos que identifican y organizan diversos elementos intervenientes en los procesos de enseñanza y aprendizaje. En este texto propongo reflexionar sobre algunos de tales elementos, diversos y aparentemente desconectados pero que, en realidad, presentan estrechas relaciones que ayudan a dar a los profesores una visión más global y conexa de la geometría, de su enseñanza y de su aprendizaje.

Gutiérrez, Á. (2011). Reflexiones sobre la enseñanza de la geometría en los niveles de primaria y secundaria. En P. Perry (Ed.), *Memorias del 20º Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones* (pp. 3-14). Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

LAS FASE DE APRENDIZAJE DE VAN HIELE

El modelo de razonamiento matemático de van Hiele es en la actualidad el principal marco de referencia para organizar la enseñanza de la geometría y para entender y evaluar el aprendizaje de los estudiantes. Existen diversas publicaciones que presentan muestras de cómo utilizar el modelo de van Hiele, tanto organizaciones curriculares completas de toda la enseñanza no universitaria (NCTM, 2003), como organización de unos contenidos matemáticos enseñados a lo largo de los años (Jaime, 1993; Jaime y Gutiérrez, 1996) u organización de un tema específico de un grado particular (Corberán y otros, 1994). Un elemento del modelo de van Hiele son las *fases de aprendizaje*. Constituyen una propuesta metodológica para los profesores que les indica cómo organizar los diferentes tipos de contenidos de un tema específico, secuenciándolos de manera que facilite el progreso de los estudiantes y gradúe su aprendizaje¹.

Van Hiele caracteriza el aprendizaje como un resultado de la acumulación de la cantidad suficiente de experiencias adecuadas; por lo tanto, existe la posibilidad de alcanzar niveles más altos de razonamiento fuera de la enseñanza escolar si se consiguen las experiencias apropiadas. No obstante, esas experiencias, aunque existen y no deben despreciarse, generalmente no son suficientes para producir un desarrollo de la capacidad de razonamiento completo y rápido, por lo que la misión de la educación matemática escolar es proporcionar experiencias adicionales, bien organizadas para que sean lo más útiles posible. La función de las fases de aprendizaje propuestas por van Hiele es sugerir al profesor cómo realizar dicha organización. Las fases de aprendizaje son unas etapas en la graduación y organización de las actividades que debe realizar un estudiante para adquirir las experiencias que le lleven al nivel superior de razonamiento. A lo largo de estas fases, el profesor debe procurar que sus alumnos construyan una red mental de relaciones entre los diferentes contenidos matemáticos que tiene que aprender, incluyendo en esta red las formas de razonamiento propias del nivel de razonamiento al que deben acceder. Es necesario conseguir, en primer lugar, que los estudiantes adquieran de manera comprensiva los conocimientos básicos necesarios (nuevos conceptos, propiedades, vocabulario, etc.) con los que tendrán que trabajar, para después centrar su actividad en aprender a utilizarlos y combinarlos. Las fases de aprendizaje propuestas por van Hiele son cinco:

¹ El resto de esta sección se extrae de Jaime y Gutiérrez (1990).

1^a fase: Información. Se trata de una fase de toma de contacto. El profesor debe informar a los estudiantes sobre el campo de estudio en el que van a trabajar, qué tipo de problemas se van a plantear, qué materiales van a utilizar, etc. Así mismo, los alumnos aprenderán a manejar el material y adquirirán una serie de conocimientos básicos imprescindibles para poder empezar el trabajo matemático propiamente dicho.

Esta es también una fase de información para el profesor, pues sirve para que éste averigüe los conocimientos previos de los estudiantes sobre el tema que se va a abordar. Como decíamos antes, la experiencia extraescolar no debe despreciarse, sino que puede aprovecharse como fuente de motivación; además, es conveniente evitar hacer un trabajo repetido o tratar de “enseñar” cosas que los alumnos ya saben. Por otra parte, muchas veces tendremos que trabajar en un tema que no es absolutamente nuevo para los estudiantes, que ya lo han estudiado en algún curso anterior, por lo que, para una buena utilización del modelo de van Hiele, es imprescindible que el profesor sepa qué grado de conocimiento de los contenidos del tema tienen sus alumnos y, sobre todo, qué nivel de razonamiento son capaces de mostrar.

2^a fase: Orientación dirigida. En esta fase los estudiantes empiezan a explorar el campo de estudio por medio de investigaciones basadas en el material que les ha sido proporcionado. El objetivo principal de esta fase es conseguir que los estudiantes descubran, comprendan y aprendan cuáles son los conceptos, propiedades, figuras, etc. principales en el área de la geometría que están estudiando. En esta fase se construirán los elementos básicos de la red de relaciones del nuevo nivel. Van Hiele afirma, refiriéndose a esta fase, que “las actividades, si son escogidas cuidadosamente, forman la base adecuada del pensamiento del nivel superior” (van Hiele, 1986, p. 97).

Obviamente los estudiantes, por sí solos, no podrían realizar un aprendizaje eficaz (en cuanto a los resultados obtenidos y al tiempo empleado), por lo que es necesario que las actividades que se les propongan estén convenientemente dirigidas hacia los conceptos, propiedades, etc. que deben estudiar. El trabajo que vayan a hacer estará seleccionado de tal forma que los conceptos y estructuras característicos se les presenten de forma progresiva.

3^a fase: Explicitación. Una de las finalidades principales de la tercera fase es hacer que los estudiantes intercambien sus experiencias, que comenten las regularidades que han observado, que expliquen cómo han resuelto las activida-

des, todo ello dentro de un contexto de diálogo en el grupo. Es interesante que surjan puntos de vista divergentes, ya que el intento de cada estudiante por justificar su opinión hará que tenga que analizar con cuidado sus ideas (o las de su compañero), que ordenarlas y que expresarlas con claridad. Este diálogo hace que sea en el transcurso de esta fase cuando se forma parcialmente la nueva red de relaciones.

Esta fase tiene también la misión de conseguir que los estudiantes terminen de aprender el nuevo vocabulario, correspondiente al nuevo nivel de razonamiento que están empezando a alcanzar. En algunos casos, especialmente con niños de enseñanza primaria, no es conveniente, desde el punto de vista didáctico, introducir al mismo tiempo nuevos conceptos, nuevo vocabulario y nuevos símbolos. Una técnica utilizada por los maestros para reducir este problema consiste en permitir que, al principio, los niños denominen las nuevas figuras o propiedades a su gusto, hasta que hayan adquirido un dominio suficiente de las mismas. En la fase de explicitación se fomentará el paso del vocabulario de los niños al término matemático usual.

4^a fase: Orientación libre. Ahora los alumnos deberán aplicar los conocimientos y lenguaje que acaban de adquirir a otras investigaciones diferentes de las anteriores. El campo de estudio ya es en gran parte conocido por los alumnos, pero éstos todavía deben perfeccionar su conocimiento del mismo. Esto se consigue mediante el planteamiento de problemas por parte del profesor que, preferiblemente, puedan desarrollarse de diversas formas o que puedan llevar a diferentes soluciones. En estos problemas se colocarán indicios que muestren el camino que se ha de seguir, pero de forma que el estudiante tenga que combinarlos adecuadamente, aplicando los conocimientos y la forma de razonar que ha adquirido en las fases anteriores.

Queremos remarcar que el núcleo de esta fase está formado por actividades de utilización y combinación de los nuevos conceptos, propiedades y forma de razonamiento. Los problemas que hay que plantear en la fase 4 no tienen nada que ver con los ejercicios de “aplicación”, tan frecuentes en nuestros libros de texto de enseñanzas primaria y secundaria, para cuya solución sólo hace falta recordar algún hecho concreto y utilizarlo directamente; por el contrario, algunos de los problemas de esta fase deben presentar situaciones nuevas, ser abiertos, con varios caminos de resolución. Este tipo de actividad es la que permitirá completar la red de relaciones que se empezó a formar en las fases

anteriores, dando lugar a que se establezcan las relaciones más complejas y más importantes.

5^a fase: Integración. A lo largo de las fases anteriores, los estudiantes han adquirido nuevos conocimientos y habilidades, pero todavía deben adquirir una visión general de los contenidos y métodos que tienen a su disposición, relacionando los nuevos conocimientos con otros campos que hayan estudiado anteriormente; se trata de condensar en un todo el dominio que ha explorado su pensamiento. En esta fase el profesor puede fomentar este trabajo proporcionando comprensiones globales, pero es importante que estas comprensiones no le aporten ningún concepto o propiedad nuevos al estudiante: Solamente deben ser una acumulación, comparación y combinación de cosas que ya conoce.

APRENDIZAJE DE CONCEPTOS GEOMÉTRICOS ELEMENTALES

En geometría, como en las demás partes de las matemáticas escolares, los estudiantes deben entender y aprender conceptos, propiedades de estos conceptos y relaciones entre unos y otras. En contextos matemáticos en los que hay un importante soporte gráfico y visual, los procesos de aprendizaje están muy condicionados por el uso de objetos físicos, figuras, diagramas, etc. De manera general, se aprecia un desajuste entre los componentes gráficos y verbales de las actividades y respuestas de los estudiantes. Este desajuste se puede entender gracias a los resultados de las investigaciones del didacta S. Vinner, que presento a continuación².

Cuando los profesores y libros de texto españoles presentan por primera vez a los estudiantes un concepto nuevo de geometría elemental, suelen recurrir a uno de estos dos métodos de enseñanza: i) enunciar una definición matemática de dicho concepto (más o menos formal, según el curso) y, a continuación, plantear ejercicios de memorización y de reconocimiento de algunas figuras concretas, o ii) presentar ejemplos de figuras que representan ese concepto, haciendo una descripción de sus características matemáticas (y, a veces, físicas), a continuación, enunciar una definición matemática del concepto y, por último, plantear ejercicios de memorización de la definición y de reconocimiento de otras figuras concretas.

² El resto de esta sección se extrae de Gutiérrez y Jaime (1996).

En ambos casos, los profesores suelen poner más énfasis en las definiciones que en los ejemplos, sin darse cuenta de que son los últimos los que impactan más en los estudiantes y los que producen un efecto mental más duradero y profundo. Según Vinner (1991), cuando leemos o escuchamos el nombre de un concepto conocido, se estimula nuestra memoria y se evoca algo, que raramente es la definición del concepto, sino un conjunto de representaciones visuales, imágenes, impresiones o experiencias. Este “algo” es lo que Vinner llama la imagen del concepto (o imagen conceptual). En el caso de conceptos geométricos, la imagen conceptual que se crea en la mente de los estudiantes está compuesta por las diversas figuras, dibujos o representaciones que recuerdan los estudiantes como ejemplos de dicho concepto, junto al conjunto de las propiedades que el estudiante asocia al concepto. Según esto, una imagen de un concepto es correcta cuando le permite al estudiante discriminar sin errores todos los ejemplos de ese concepto y cuando las propiedades que lleva asociadas son todas relevantes. Dichas propiedades no son necesariamente matemáticas puesto que, especialmente en estudiantes situados en el primer o segundo niveles de van Hiele, también pueden ser propiedades irrelevantes de tipo físico. Por ejemplo, la imagen del concepto de rectángulo que se forman muchos estudiantes de enseñanza primaria está compuesta por una serie de rectángulos concretos colocados en posición estándar (el par de lados más largos, horizontales) y por algunas propiedades derivadas de estas figuras, como tener los ángulos rectos, los lados opuestos iguales, los lados verticales y horizontales, siendo los horizontales más largos que los verticales, etc.

Por otra parte, fruto de los métodos de enseñanza que mencionábamos antes, los estudiantes memorizan una cierta definición, que repiten cuando el profesor les pregunta pero que no utilizan cuando les pide que pongan en acción dicho concepto para resolver un problema. Vinner y Herskowitz (1983) llaman definición de un concepto a esta definición verbal que un estudiante tiene en su memoria y que recita cuando se le pide. La definición de un concepto expresada por un estudiante no tiene por qué estar ligada operativamente a su imagen de ese concepto en el momento de la realización de tareas. Por ejemplo, al preguntarles, muchos estudiantes recitan que un polígono regular es un polígono que tiene todos los lados iguales aunque parte de estos estudiantes son capaces de reconocer sin errores todos los ejemplos de polígonos regulares e irregulares que se les presenten. Inversamente, también es frecuente encontrar estudiantes de todos los niveles educativos que, aunque escriben la definición correcta de polígono regular, identifican como tales los rectángulos

“porque tienen los ángulos iguales”. Ambas discrepancias ponen en evidencia la diferencia que, para los estudiantes, hay entre la imagen y la definición de un concepto y los diferentes usos que hacen de ambas, cosa que el modelo de Vinner explica, como veremos más adelante.

En la formación de la imagen de un concepto que tiene una persona juegan un papel básico la propia experiencia y los ejemplos que se han visto o utilizado tanto en el contexto escolar como extraescolarmente. Con frecuencia estos ejemplos son pocos y con alguna característica visual peculiar, convirtiéndose en prototipos y en los únicos casos de referencia con los que el estudiante puede comparar casos nuevos. Por lo tanto, la manera de mejorar la calidad de las imágenes conceptuales es ofrecer a los estudiantes mayor variedad de ejemplos, tratar de detectar los defectos de sus imágenes del concepto y hacer especial incidencia en los ejemplos directamente relacionados con esos errores. Uno de los objetivos de la investigación que describimos en este capítulo es dar pautas concretas sobre cómo analizar y mejorar las imágenes de los conceptos geométricos de los estudiantes.

En cuanto a la utilización que los estudiantes hacen de las imágenes y las definiciones de los conceptos, está muy extendida entre los profesores de los diferentes niveles educativos la creencia (casi siempre errónea) de que los estudiantes basan sus razonamientos principalmente en las definiciones verbales (formales) de los conceptos y que sus imágenes del concepto tienen, como mucho, un papel secundario, de apoyo. Sin embargo, la actividad de los estudiantes está, en una mayoría de casos, basada sólo en sus imágenes de los conceptos. Hay un elevado número de estudiantes cuya definición del concepto es inactiva o no existe (olvidaron o nunca aprendieron la definición enseñada por su profesor).

LA VISUALIZACIÓN ESPACIAL EN EL APRENDIZAJE DE CONCEPTOS GEOMÉTRICOS³

La percepción visual es un elemento importante en infinidad de actividades de la vida, no sólo en las relacionadas con el aprendizaje escolar o con la geometría. Esto hace que diferentes grupos de investigadores, con objetivos y contextos diversos, se hayan preocupado de estudiar este campo, al que se suele dar diversos nombres como “percepción espacial”, “imaginación espacial”,

³ El contenido de esta sección se extrae de Gutiérrez y Jaime (1996).

“visión espacial”, o “visualización”. El término elegido por una persona suele dar indicios de la posición concreta que ha adoptado y del significado que le da a ese término, aunque esta no es una regla general. Para aludir a este tipo de habilidades, en Didáctica de las Matemáticas, cuando nos centramos en el estudio de la geometría 3-dimensional, se emplean generalmente los términos equivalentes de “visualización” o “visualización espacial”.

El elemento básico central en todas las concepciones de percepción visual son las *imágenes mentales*, es decir las representaciones mentales que las personas podemos hacer de objetos físicos, relaciones, conceptos, etc. En el contexto de las matemáticas, Presmeg (1986) ha encontrado diversos tipos de imágenes mentales:

- 1) *Imágenes concretas pictóricas*. Se trata de imágenes figurativas de objetos físicos.
- 2) *Imágenes de fórmulas*. Consisten en la visualización mental de fórmulas o relaciones esquemáticas de la misma manera como se las vería, por ejemplo, en el libro de texto.
- 3) *Imágenes de patrones*. Son imágenes de esquemas visuales correspondientes a relaciones abstractas. A diferencia del tipo anterior, no se visualiza la relación propiamente dicha (una fórmula generalmente), sino alguna representación gráfica de su significado.
- 4) *Imágenes cinéticas*. Se trata de imágenes en parte físicas y en parte mentales, ya que en ellas tiene un papel importante el movimiento de manos, cabeza, etc.
- 5) *Imágenes dinámicas*. Son imágenes mentales en las que los objetos o algunos de sus elementos se desplazan.

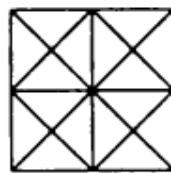
Una determinada imagen puede ser de dos tipos diferentes pues, normalmente, su clasificación como cinética o dinámica es independiente de su clasificación como pictórica, patrón o de fórmula.

De acuerdo con la distinción que hace Bishop (1989), las imágenes visuales (físicas o mentales) son los objetos que se manipulan en la actividad de visualización, manipulación que se realiza según dos tipos de procesos:

- *Procesamiento visual* (VP). Este es el proceso de conversión de información abstracta o no figurativa en imágenes visuales y también el proceso de transformación de unas imágenes visuales ya formadas en otras.
- *Interpretación de información figurativa* (IFI). Este es el proceso de comprensión e interpretación de representaciones visuales para extraer la información que contienen. Por lo tanto, este proceso puede verse como el inverso del anterior.

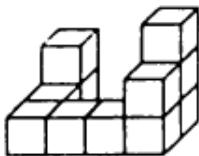
El tercer componente diferenciado de la visualización son las *habilidades de visualización* utilizadas por los individuos para la creación y procesamiento de imágenes visuales. Aunque Bishop no diferencia claramente entre procesos y habilidades, otros investigadores sí han hecho esa distinción. Una relación bastante detallada de las habilidades que pueden integrar la percepción espacial de un individuo es la que nos proporciona Del Grande (1990), obtenida uniendo las propuestas de diversos autores y que se refiere a un contexto más amplio que el de la geometría:

- 1) *Coordinación motriz de los ojos*. Es la habilidad para seguir con los ojos el movimiento de los objetos de forma ágil y eficaz.
- 2) *Identificación visual*. Es la habilidad para reconocer una figura aislando de su contexto. Se utiliza, por ejemplo, cuando la figura está formada por varias partes, como en los mosaicos, o cuando hay varias figuras superpuestas. Por ejemplo, ¿cuántos cuadrados hay en la figura de la derecha?



- 3) *Conservación de la percepción*. Es la habilidad para reconocer que un objeto mantiene su forma aunque deje de verse total o parcialmente, por ejemplo porque haya girado o se haya ocultado.
- 4) *Reconocimiento de posiciones en el espacio*. Es la habilidad para relacionar la posición de un objeto con uno mismo (el observador) o con otro objeto, que actúa como punto de referencia.

5) *Reconocimiento de las relaciones espaciales.* Es la habilidad que permite identificar correctamente las características de relaciones entre diversos objetos situados en el espacio. Por ejemplo, que están girados, son perpendiculares, simétricos, etc. Esta habilidad es necesaria para construir, con cubos Multilink, el cuerpo de la figura de la derecha.



6) *Discriminación visual.* Es la habilidad que permite comparar varios objetos identificando sus semejanzas y diferencias visuales. Un ejemplo es el siguiente: calcular la cantidad de módulos iguales que hay en la figura de la derecha.



7) Memoria visual. Es la habilidad para recordar las características visuales y de posición que tenían en un momento dado un conjunto de objetos que estaban a la vista pero que ya no se ven o que han sido cambiados de posición.

Se pueden definir otras habilidades interesantes y que merece la pena estudiar, pero casi siempre se trata de combinaciones de las habilidades indicadas antes. Por ejemplo, la habilidad de “conservación de las relaciones espaciales”, que nos permite reconocer que las posiciones relativas de varios objetos no varían cuando se les somete al mismo movimiento (giro o traslación), sería una combinación de las habilidades de reconocimiento de las posiciones espaciales y de conservación de la percepción.

Si realizamos una clasificación conjunta de imágenes, procesos y habilidades visuales, nos daremos cuenta de que, aunque todos ellos tienen relación con la actividad de los estudiantes de matemáticas, algunos tienen una relación más estrecha con el contexto del aprendizaje de la geometría espacial. En concreto, son importantes las imágenes pictóricas, cinéticas y dinámicas, los procesos VP e IFI (cuando intervienen en la obtención o análisis de los tres tipos anteriores de imágenes) y las habilidades de identificación visual, de reconocimiento de posiciones o de relaciones en el espacio y de discriminación visual

(también cuando se usan con los tres tipos de imágenes mencionados antes). Esta mayor relación con el contexto de la geometría 3-dimensional implica, por una parte, que los estudiantes los utilizan directamente al realizar actividades o resolver problemas en los que intervienen objetos geométricos espaciales y, por otra parte, que la capacidad de los estudiantes –para usarlos– se puede mejorar mediante una instrucción específica centrada en la resolución de actividades geométricas.

REFERENCIAS⁴

- Bishop, A.J. (1989). Review of research on visualization in mathematics education. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 11(1), 7-16.
- Corberán, R. y otros (1994). *Diseño y evaluación de una propuesta curricular de aprendizaje de la geometría en enseñanza secundaria basada en el modelo de razonamiento de van Hiele*. Madrid, España: Ministerio de Educación.
- Del Grande, J. (1990). Spatial sense. *Arithmetic Teacher*, 37(6), 14-20.
- Gutiérrez, Á. y Jaime, A. (1996). Uso de definiciones e imágenes de conceptos geométricos por los estudiantes de Magisterio. En J. Giménez, S. Llinares y M.V. Sánchez (Eds.), *El proceso de llegar a ser un profesor de primaria. Cuestiones desde la educación matemática* (pp. 143-170). Granada, España: Comares.
- Jaime, A. (1993). *Aportaciones a la interpretación y aplicación del modelo de van Hiele: la enseñanza de las isometrías del plano. La evaluación del nivel de razonamiento*. Tesis doctoral. Valencia, España: Universidad de Valencia.
- Jaime, A. y Gutiérrez, Á. (1990). Una propuesta de fundamentación para la enseñanza de la geometría: El modelo de van Hiele. En S. Llinares y M.V. Sánchez (Eds.), *Teoría y práctica en educación matemática* (pp. 295-384). Sevilla, España: Alfar.
- Jaime, A. y Gutiérrez, Á. (1996). *El grupo de las isometrías del plano*. Madrid, España: Síntesis.
- National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (2003). *Principios y estándares para la educación matemática*. Sevilla, España: Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales.
- Presmeg, N.C. (1986). Visualization in high school mathematics. *For the Learning of Mathematics*, 6(3), 42-46.
- van Hiele, P.M. (1986). *Structure and insight. A theory of mathematics education*. Londres, Gran Bretaña: Academic Press.

⁴ Varias de las referencias están disponibles en <http://www.uv.es/Angel.Gutierrez>.

Vinner, S. (1991). The role of definitions in the teaching and learning of mathematics. En D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 65-81). Dordrecht, Holanda: Kluwer.

Vinner, S. y Herskowitz, R. (1983). On concept formation in geometry. *ZDM*, 83(1), 20-25.

LA INTERACCIÓN ENTRE MODELOS Y TEORÍAS EN LA ENSEÑANZA DE LA CRONOTOPÍA

Carlos Vasco

Universidad Distrital-Universidad del Valle

carlosevasco@gmail.com

La teoría de modelos en lógica formal permite refinar los conceptos de *modelo* y de *teoría* para producir descripciones más finas de las actividades noético-semióticas sobre el espacio-tiempo que constituyen la Cronotopía. Estas descripciones que explicitan el trabajo sobre los modelos como distinto del trabajo sobre las teorías y que aclaran el papel de los morfismos de interpretación de las teorías en los modelos permiten potenciar la manera de enseñar la Cronotopía por medio del diseño y gestión de situaciones-problema de tipo taller que sean apropiadas para estimular y guiar los procesos de aprender.

LA CRONOTOPÍA

En el Encuentro XVI de Geometría y sus Aplicaciones en Bogotá en 2005, en la XII Conferencia Inter-Americana de Educación Matemática en Querétaro, México, y en el XXI Encuentro con la Matemática de Castel San Pietro en Italia en 2007, presenté un ambicioso programa de la disciplina matemática del futuro que incluye todo lo que ahora llamamos “geometría”, y que llamé “Cronotopía”. Para resumir brevemente lo dicho en las conferencias citadas, propuse la ecuación siguiente:

$$\text{Cronotopía} = \text{Cronología} + \text{Cronometría} + \text{Topología} + \text{Topometría}$$

La Cronotopía incluye el estudio del espacio, del tiempo y del espacio-tiempo relativista. Se trata, como diría Carlo Federici, de una física general del espacio-tiempo, que incluye la cinemática, antes de la introducción de la dinámica con magnitudes como la masa o la carga eléctrica.

Se distinguen en ella los aspectos *-lógicos, antes de las medidas numéricas, y los aspectos *-métricos, que incluyen el estudio de las magnitudes espaciales y temporales con sus cantidades, unidades y sistemas de medición. Así, lo que

llamamos “geometría” en sus aspectos lógicos está incluida en la Topología y, si se incorporan los aspectos métricos, en la Topometría.¹

MODELOS Y TEORÍAS

Cuando se habla de “modelos”, se suele entender “modelos con su teoría”, a los que podríamos llamar “modelos teóricos”, y cuando se habla de “teorías”, se suele entender “teorías con su modelo para interpretarlas”, a las que podríamos llamar “teorías modélicas”.

La tesis central de este trabajo es que, al menos para la Cronotopía, los procesos de enseñarla y aprenderla se facilitan y potencian con la ayuda de la distinción entre los modelos mentales, por un lado y, por otro, las teorías formuladas en lenguaje articulado, simbólico o no, conectadas con los modelos por medio de morfismos de interpretación.

Comencemos por un rápido recorrido histórico. Hacia 1930, con los teoremas de Gödel, se empezó a distinguir explícitamente la verdad de una proposición de la validez de un teorema en un sistema axiomático. En esa década, en Polonia, sobre todo en el trabajo de Tarski, se empezó a distinguir la teoría como un sistema de proposiciones o fórmulas enunciadas en un lenguaje formalizado, y el modelo como un conjunto de elementos con ciertas operaciones y relaciones específicas, que se llamaba indistintamente colección, clase, conjunto, familia, sistema o estructura.

La palabra “grupo” no aparece en esa lista, porque ya se había especializado durante el siglo XIX para ciertos sistemas de transformaciones invertibles y, por ello, dentro de las matemáticas, “grupo” ya no se toma como sinónimo de agrupación, agregado, clase o conjunto.

¹ La Cronotopía, a la que llamé con tan poca modestia “el Programa de Bogotá” para lo que se suele llamar “Geometría”, se proclamó por primera vez en una conferencia mía en el XVI Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones (Bogotá, junio 23-25 de 2005), y se publicó en las memorias de dicho encuentro (Vasco, 2006). Hablé de la Cronometría en el XII CIAEM de Querétaro, pero el texto de esa conferencia no apareció sino en el año 2011 en Costa Rica y en Internet (Vasco, 2011). Bruno D’Amore me invitó a dar a conocer la Cronotopía en Italia en el XXI Encuentro con la Matemática en Castel San Pietro Terme, (2-4 de noviembre de 2007), y publicó dos versiones en traducción suya al italiano (Vasco, 2007a; 2007b).

Desde los años 30, el grupo Bourbaki llamó a los grupos, anillos y cuerpos “estructuras algebraicas”, que tenían un conjunto de elementos con una o dos operaciones binarias. Las estructuras algebraicas se contraponían a las estructuras de orden, que sólo tenían el conjunto de elementos y una relación reflexiva, antisimétrica y transitiva, y a las estructuras topológicas, que eran de segundo orden, en el sentido de que, además del conjunto de elementos, tenían un conjunto de subconjuntos de elementos llamados “vecindades”, con relaciones entre los elementos y las vecindades, y relaciones y operaciones entre vecindades.

En los fascículos iniciales de Bourbaki tampoco se precisó la relación entre los conjuntos, las estructuras y los tipos de estructuras, y se intentó presentar la matemática en singular como una teoría presentable exclusivamente en una combinación de lenguaje verbal técnico y fórmulas simbólicas, pues se rechazaba explícitamente el uso de figuras e imágenes, incluso para la geometría.

Después de la guerra de 1939 al 45, con el trabajo en los lenguajes formales y en los incipientes lenguajes de programación, se empezó a precisar una teoría más fina sobre los modelos y las teorías, que históricamente se llamó “Teoría de Modelos”. En ella se distinguía claramente entre *teorías* como conjuntos de fórmulas con una relación de implicación, y *modelos* como subconjuntos de elementos con sus operaciones y relaciones. La referencia fundamental sigue siendo el texto de Chang y Keisler (1973).

A mi parecer, la motivación más fuerte para distinguir explícitamente entre teorías y modelos vino precisamente de la geometría, y más precisamente, de la pluralidad de las geometrías que sorprendieron a los matemáticos durante el siglo XIX.

El cuestionamiento de la naturalidad y la hegemonía de la geometría euclídea y la reaparición de la geometría proyectiva que ya venía desde Desargues y Pascal en el siglo XVII obligó a reflexionar sobre las relaciones entre las geometrías formalizadas con axiomas, teoremas y demostraciones y la realidad física.

La dualidad de la geometría proyectiva plana proporcionó la motivación más sorprendente para la separación entre teorías y modelos: si se interpreta “punto” como una recta y “recta” como un punto, se mantiene la verdad de la proposición.

El primer ejemplo lo proporciona el primer axioma de Euclides: “Dos puntos diferentes determinan una única recta”. Su dual es: “Dos rectas diferentes determinan un único punto”. Esto no se cumple en la geometría euclidiana, pero si se agrega un punto en el infinito para cada haz de paralelas del plano euclidiano, sí se cumple en el plano proyectivo.

La desazón que produce darle sentido a los puntos en el infinito y la dificultad para responder por qué se toma un solo punto en el infinito en vez de dos, uno por cada extremo del haz de rectas, se pueden atenuar si uno piensa en el modelo de la geometría de Riemann en la esfera, pero en la teoría identifica “punto” como una pareja de puntos antipodales, y “recta” como una circunferencia maximal, llamada imprecisamente “círculo máximo”, en la misma esfera, considerándola como compuesta por sus parejas de puntos antipodales.

Ya “punto” no significa lo que antes pensábamos que era un punto, porque son dos, ni “recta” significa lo que antes pensábamos que era una recta, pues es curva, pero todas las demostraciones parecen funcionar perfectamente, y la dualidad es comprobable por una inspección cuidadosa del modelo mental de la geometría de la esfera.

Con ciertos refinamientos lingüísticos se puede comprobar que un teorema de la geometría proyectiva plana sigue siendo teorema si se cambia la interpretación usual de “recta” y de “punto”, pues en una teoría en que todos los axiomas son duales, cada paso de una demostración sigue siendo válido formalmente con las dos interpretaciones.

Todo esto podría haberse formulado a comienzos del siglo XIX, antes de la aparición de la geometría no euclidiana de Bolyai, Lobatchevsky y Gauss, que ahora llamamos “hiperbólica”, pero esas reflexiones y preguntas no se concretaron en una teoría específica.

La geometría hiperbólica puso en tensión el campo de la geometría, pero fue tenida sólo como una curiosidad lógica durante cuarenta años, hasta que, hacia 1860, Beltrami inventó un modelo tridimensional euclidiano para una región del plano hiperbólico. La trompeta de Beltrami, generada por la revolución de la tractriz, permitía interpretar “punto” y “recta” de manera que se pudiera comprobar en ese modelo el cumplimiento del axioma no-euclidiano de la multiplicidad de paralelas por un punto exterior a una recta dada.

En pocos años, Riemann, Klein y Poincaré inventaron modelos sólidos y planos y desarrollaron teorías rigurosas para estas y otras geometrías no euclidianas, en particular la geometría de Riemann que ahora llamamos “elíptica”.

Aunque no podamos seguirlas en su totalidad por falta de tiempo, propondré luego algunas experiencias tipo “taller” sobre estos temas, que diseñé para la primera promoción del doctorado interinstitucional en educación en la Universidad del Valle. Nos apoyarán en lo que digo solamente en teoría, siguiendo por el rabillo del ojo mis modelos mentales, con la esperanza de que el lector o auditor puedan seguir lo que digo e interpretarlo en algunos de sus propios modelos mentales.

La interacción entre modelos y teorías en geometría se extendió muchísimo desde 1860 hasta 1960, pero no se formalizó explícitamente en la lógica hasta los años 70. Lo que he aprendido al respecto lo debo más que todo a los seminarios con Xavier Caicedo en la Universidad Nacional.

Desde los tiempos de la renovación curricular en el Ministerio de Educación de 1975 a 1993, trabajé las geometrías desde el enfoque de sistemas, con la distinción entre tres tipos de sistemas: los sistemas concretos físicos o imaginados a partir de los cuales se podían construir diferentes sistemas conceptuales, cada uno de los cuales, a su vez, se podía representar con sistemas simbólicos diferentes.

Propuse explícitamente el enfoque de sistemas desde 1980, pero se precisó en una primera versión completa para los marcos teóricos de las áreas curriculares del MEN en 1984 y se perfeccionó en la introducción al programa de noveno grado en 1991, programa que nunca pasó de una limitada experimentación en Bogotá, Medellín y Cali (Vasco, 1980). La presentación rigurosa, con la especificación a los sistemas geométricos, se publicó en la revista de la Academia Colombiana de Ciencias Exactas y Naturales en el mismo año 1991 (Vasco, 1991).

Pero la relación entre los sistemas conceptuales y los sistemas simbólicos no era todavía muy precisa; sólo pude formularla más rigurosamente con las ideas de Raymond Duval, quien vino a dar un curso en el doctorado de la Universidad del Valle, y trajo su libro recién publicado en francés en 1995 sobre semiosis y pensamiento humano. Myriam Vega lo tradujo al castellano en 1999 y en Colombia empezamos a utilizar sus ideas desde entonces, hoy ya muy extendidas en el ámbito europeo y latinoamericano (Duval, 2004/1995).

Raymond Duval nos enseñó a distinguir las representaciones internas, como imágenes mentales siempre traicioneras y escurridizas, producidas y procesadas por la actividad noética, de las representaciones semióticas externas y materializadas como productos de los registros semióticos de representación.

Los registros semióticos de representación completan la propuesta del enfoque de sistemas que utilicé en la renovación curricular en matemáticas de 1978 a 1993, mostrando cómo articular los sistemas conceptuales y los simbólicos con una distinción sutil pero potente: la distinción entre la representación semiótica como un sistema simbólico externo, materializado, producido por la actividad semiótica, y el registro semiótico de representación como sistema productor de representaciones semióticas materializadas, así sean efímeras.

Esa distinción permite otra muy potente también: el trabajo de transformación de una representación semiótica particular a otra del mismo registro, lo que se llama “tratamiento”, y la transformación de una representación semiótica particular perteneciente a un registro semiótico a otra perteneciente a otro, lo que se llama “conversión”.

Otro aporte a la distinción entre modelos y teorías viene de las neurociencias. Antonio Damasio (2010) en su libro *Self comes to mind* (en español *Y el cerebro creó al hombre*), propone distinguir “mapa” como el sustrato neuronal e “imagen” como la contraparte consciente, percibida y conocida del mapa. Un caso paralelo a esta distinción cognitiva es la distinción entre “emoción” como sustrato neuronal, y “feeling” como contraparte consciente, percibida y sentida de la emoción. Así, “feeling” ya podría traducirse como “afecto” o “afección” en el sentido de “afectación subjetiva” por la emoción, en un sentido que precisa la propuesta de William James modificada por Baird (aunque me parece que es más cercana a la de Magda Arnold).²

² Es conveniente estudiar a este respecto el libro de Antanas Mockus (1988), *Representar y disponer*. Toda la tetralogía de Antonio Damasio ha sido para mí una guía en la teorización de estos temas de la representación, la cognición y la emoción en el Doctorado en Ciencias Sociales, Niñez y Juventud de la Universidad de Manizales y el Cinde. Los cuatro libros son:

Self comes to mind (2010). En español: *Y el cerebro creó al hombre* (2010).

Looking for Spinoza (2003). *En busca de Spinoza* (2005).

The feeling of what happens (1999). *El sentimiento de lo que sucede* (2000).

Descartes' error (1994). *El error de Descartes* (1999).

Otro caso paralelo sería la excitación nerviosa aguda bioquímica y bioeléctrica como patrón fisiológico y el dolor como fenómeno psicológico. Otro sería la deprivación de nutrientes y los desequilibrios bioquímicos en los fluidos sanguíneo y linfático, y el hambre como fenómeno mental experimentado por la persona que lo sufre. Para precisar lo que entendemos por modelo mental tenemos pues que tener en cuenta esta idea de Damasio de distinguir el mapa de la imagen, el primero como configuración materializada y el otro como fenómeno mental percibido por un agente consciente.

En metodología de la investigación, el mapa correspondería a los modelos materiales como prototipos o como facsímiles y a sus contrapartes neuronales, y la imagen correspondería a los modelos mentales como fenómenos de la conciencia. El mapa correspondería a las teorías escritas con sus axiomas, definiciones, demostraciones y teoremas y sus contrapartidas neuronales, y la imagen a las teorías mentales como habla silenciosa o subvocal en lo que un agente-hablante experimenta como discurso interior.

En geometría, puede pensarse en la figura como dibujo en cuanto mapa, y la figura como modelo mental o imagen mental, y así la expresión “razonar sobre la figura” tendría ahora una doble interpretación: sobre el dibujo como mapa o sobre el modelo mental como imagen, y ambos tipos de razonamiento se diferencian de “razonar en la teoría”, guiándose o no por el modelo o por el dibujo (“con la figura” o “sin la figura”). Esto amplía y precisa la distinción ya muy útil entre figura y construcción en geometría dinámica computacional; la distinción entre figura y dibujo en la didáctica de la geometría, y entre “razonar con la figura” y “razonar sobre la figura” en la geometría euclíadiana usual.

Suele haber múltiples desfases y discrepancias entre la teoría y el modelo (por ejemplo, lo que designo como “una recta” en mi modelo mental no puede caer de ancho o espesor, pues no sería perceptible) y entre el modelo mental y el modelo materializado (una recta del modelo mental puede aparecer con ligeras desviaciones en el modelo materializado o dibujo). Esto precisa lo que todo profesor de geometría ha sabido desde siempre: se trata de demostrar teoremas rigurosos con la ayuda de figuras que no pueden cumplirlos. Pero todavía no hemos mencionado la relación de todo esto con lo real, la realidad o mi realidad.

Adelanto ahora una primera sugerencia metodológica: al “echar teorías”, no dejemos de mirar por el rabillo del ojo al modelo y, de vez en cuando, haga-

mos el esfuerzo de enfocar la mirada sobre el morfismo de interpretación para jugar con diferentes interpretaciones.

La segunda sugerencia metodológica es paralela a la primera: al “jugar con el modelo”, hagamos el esfuerzo de refrenar la verbalización espontánea para producir proposiciones formalizables y así poder, de vez en cuando, enfocar la mirada sobre el morfismo de interpretación para ensayar diferentes expresiones.

Ahora ya podemos precisar la diferencia entre modelo y sistema, pero esta distinción requiere la categoría *representar*. Todo modelo es un sistema utilizado por un agente para representar otro subproceso u otro sistema, pero no todo sistema es un modelo (aunque podría llegar a serlo si un agente lo utiliza para representar algún subproceso o sistema). La diferencia está en el propósito con el que se construye el sistema: un modelo se construye para representar a otro sistema o proceso.

Representar no se reduce a ser una imagen de otro, sino que puede incluir muchas otras maneras de actuar en lugar de otro, de prestarse a servir de sustituto de otro, de fungir en vez de otro.

“Representar” tiene direcciones y sentidos diferentes cuando el agente detiene momentáneamente su actividad para tratar de expresar algo intramental “hacia afuera”, y produce una representación externa materializada (así sea efímera), y cuando trata de interpretar una representación externa materializada para reorientar su actividad con representaciones internas logradas “hacia adentro”.

Para diferenciar esos dos sentidos (en el doble sentido de “sentido”, en el campo semiótico y en el campo de la física del movimiento) voy a utilizar “expresar” en el sentido “hacia afuera” e “interpretar” en el sentido “hacia adentro”. Al primero lo llamo “semiosis proyectiva” o “expresiva”, y podría llamarse “proceso noético-semiótico” en ese orden; al segundo lo llamo “semiosis inyectiva” o “interpretativa”, y podría llamarse “proceso semiótico-noético” en ese orden si quisiéramos insistir en el cambio de sentido.

Pero como esos cambios de sentido son muy frecuentes y cíclicos, es mejor no cambiar el orden, sino hablar de perturbaciones de la actividad noético-semiótica, la cual prosigue sin cesar, aun durante el sueño, como lo muestra la rápida reinterpretación onírica de los primeros sonidos del reloj despertador.

PERTURBACIONES NOÉTICO-SEMIÓTICAS

El hecho de que en el flujo de la conciencia lo noético y lo semiótico siempre vayan juntos no quiere decir que no sean diferentes. La actividad neuronal cortical y subcortical que en el nivel consciente llamamos “pensar” precede, se desvía y se transforma con las semiosis proyectivas y se guía por ellas a la vez que busca nuevas formas de expresión al no encontrar recursos semióticos ya preexistentes en la cultura.

Hay pues unos modelos mentales (“aquí adentro”) y otros extramentales (“allá afuera”). Hay unos que son facsímiles, otros que son prototipos y otros que son ambas cosas. Los facsímiles se diseñan para representar subprocessos semejantes a ellos (en la dirección del pasado hacia el presente), y los prototipos para iniciar subprocessos semejantes a ellos (en la dirección del presente hacia el futuro). Un modelo determinado puede tener ambas funciones en distintos momentos.

MODELOS Y SISTEMAS

Como todo modelo es un sistema, podemos precisar tres aspectos que tiene todo modelo: son los tres aspectos que la Teoría General de Sistemas TGS propone para todo sistema: el sustrato, la dinámica y la estructura.

El sustrato es el conjunto de componentes que seleccionamos y recortamos del trasfondo o campo subyacente, llamado en inglés “background”. La *dinámica* es el conjunto de operaciones, transformaciones o transiciones que construimos mentalmente para reparar los cortes y congelamientos temporales y recuperar el dinamismo de los procesos. La *estructura* es el conjunto de relaciones que construimos mentalmente para reparar los cortes espaciales y recuperar la interconexión entre los componentes que recortamos.

Con la precisión de los tres aspectos que tiene todo sistema, podríamos describir más detalladamente un modelo mental como un sistema que construimos para representar un subprocesso en el que desagregamos, desglosamos, cortamos, recortamos o diseccionamos algunos componentes o elementos, e intentamos reparar los cortes, in-cisiones o de-cisiones por medio de relaciones, correspondencias, nexos, conexiones, lazos, enlaces (“links”) o referencias entre ellos. Este sería un modelo con sustrato y estructura, pero sin dinámica, que llamamos “modelo estático”. Si además tratamos de modelar las acciones y actividades a través de operaciones o transformaciones mentales, tendríamos

un modelo con sustrato, dinámica y estructura, que llamamos “modelo dinámico”.

Estas consideraciones permiten precisar la diferencia entre un sistema estático y un sistema dinámico, utilícese o no como modelo. Así puede develarse el abuso de la expresión “sistema dinámico” en ciertos discursos que quieren valorizarse por el uso impreciso y engañoso de la teoría matemática de los sistemas dinámicos.

La consecuencia central de lo anterior para la metodología de la investigación es que todo proyecto de investigación tiene como propósito crear o modificar un modelo mental del subproceso investigado con una teoría que lo precise y refine en cuanto a la explicitación discursiva del sustrato, la estructura y la dinámica de ese modelo.

En síntesis, un modelo M es un sistema en el cual se va a interpretar una teoría:

$$M = (Comp, Op, Rel) = (C, \Omega, R) = (S, D, E).$$

Comp = C es el conjunto de componentes o el sustrato S, Op = Ω es el conjunto de operaciones o la dinámica D, y Rel = R es el conjunto de relaciones del modelo o su estructura E.

LENGUAJES Y TEORÍAS

Desde la Teoría General de Procesos TGP, lenguajear es sólo un tipo de subproceso, un cierto tipo de acción o actividad de algunos actores; no puede pues agotar todas sus acciones o actividades ni las de todos los actores (Vasco, 1995).

Lo real incluye por supuesto los actores que lenguajean y cada modelo mental va siempre acompañado por lenguaje y se reconfigura constantemente por el lenguaje y por el intento de recordarlo, comunicarlo, describirlo y refinarlo. No todo lenguaje es articulado, y hay lenguajes más apropiados para expresar, comunicar y refinar modelos que otros, así como hay lenguajes más apropiados para expresar, comunicar y refinar teorías sobre los modelos.

Al subconjunto de proposiciones de un lenguaje articulado (que llamaremos “chomskiano”) que acompaña al modelo lo llamamos “su teoría”. Se suele considerar como teoría no sólo el subconjunto sino un sistema de fórmulas con

operaciones de transformación de fórmulas y al menos una relación de implicación entre fórmulas.

Un lenguaje L es articulado si tiene símbolos diferentes para términos, predicados y proposiciones o fórmulas, y es chomskiano si todas sus proposiciones o fórmulas básicas se generan por aplicación de un predicado a uno o más términos.

Un lenguaje articulado L es un sistema:

$$L = (\text{Term}, \text{Pred}, \text{Form}; \text{Op}; \text{Rel}) = (T, P, F; \Omega; R)$$

Las operaciones sobre proposiciones son las conectivas y los cuantificadores:

$$\Omega = \text{Conect} \cup \text{Cuant.}$$

Las relaciones entre proposiciones deben tener al menos una relación binaria de inferencia \vdash (“de ... se deduce ...”):

$$\text{Rel} = \{ \vdash \}.$$

El lenguaje articulado es chomskiano si las proposiciones o fórmulas atómicas o básicas Bas se obtienen por aplicación de los predicados Pred a los términos Term:

$$\text{Bas} = \text{gen}[\text{Pred}](\text{Term}).$$

Los predicados unarios o monádicos se aplican a un solo término:

$$P_1(t).$$

Los predicados n-arios o n-ádicos a n términos:

$$P_2(t_1, t_2), \dots, P_n(t_1, t_2, \dots, t_n).$$

Esta exigencia de generación de todas las proposiciones atómicas o básicas por la aplicación de los predicados a los términos podríamos llamarla “El axioma de Chomsky”, pues bastaría recordar que en los lenguajes naturales los sintagmas nominales corresponden a los términos de los lenguajes formales y los sintagmas verbales (mejor llamados “sintagmas predicables”) corresponden a los predicados.

Si se hace un análisis paralelo sobre los términos y se distinguen los términos atómicos (constantes y variables) de los moleculares (obtenidos de los atómicos por aplicación de operadores), se ve la necesidad de introducir en los lenguajes naturales la distinción entre sintagmas nominales simples y compuestos, siendo los segundos la aplicación de sintagmas transductores a sintagmas nominales simples (ver Vasco, 2000).

Las proposiciones o fórmulas moleculares Prop (o Form) del lenguaje L se obtienen por aplicación de las operaciones Ω (conectivas y cuantificadores) a las proposiciones atómicas o básicas Bas:

$$\text{Prop} = \text{Form} = \text{gen}[\Omega](\text{Bas}).$$

A veces se entiende el lenguaje L como un sistema con tres tipos de elementos:

$$L = (\text{Term}, \text{Pred}, \text{Form}; \text{Op}; \text{Rel}).$$

A veces se reduce el lenguaje a las proposiciones moleculares $\text{Prop} = \text{Form}$:

$$L = (\text{Form}, \text{Op}, \text{Rel}) = (P, \Omega, R).$$

A veces se identifican $L = P = \text{Prop} = F = \text{Form}$.

Para precisar qué es una teoría, se selecciona un subconjunto S de las proposiciones o fórmulas de un lenguaje articulado L:

$$S = \text{Subprop} \subset \text{Prop}$$

Una teoría T es un sistema cuyo sustrato es un subconjunto S de proposiciones o fórmulas, su dinámica tiene al menos una operación binaria de conjunción y al menos una relación binaria de implicación:

$$T = (\text{Subprop}, \text{Subop}, \text{Rel}) = (S, \wedge, \vdash).$$

A veces se reduce la teoría al sistema con la relación de implicación:

$$T = (S, \vdash),$$

y a veces se identifica la teoría sólo con el subconjunto de proposiciones o fórmulas:

$$T = S.$$

Considero la teoría T como un subconjunto de proposiciones de un lenguaje articulado chomskiano, las cuales, si están ya formalizadas se suelen llamar “fórmulas bien formadas” (“wff’s”) o simplemente “fórmulas”, ya sea con operaciones que incluyen la conjunción, o también con relaciones que incluyen la implicación sintáctica.

Como contraste con los lenguajes articulados no chomskianos, piénsese paralelamente en la teoría verbalizada respecto a un modelo mental y en la escritura musical de una melodía que surge en el cerebro, con los doce semitonos como digitalizaciones de sonidos de un continuo (“pasar de la rampa a la escala”), y con la notación musical en una partitura; las llamadas “frases musicales” no representan ni términos ni predicados, y sólo pueden superponerse en la armonía o yuxtaponérse en la ejecución (“componer” = “superponer” + “yuxtaponer”). No conforman pues un lenguaje articulado chomskiano.

Por eso, el morfismo de interpretación va de los signos de la teoría hacia los componentes, operaciones y relaciones del modelo, pero no es suficiente por sí solo para explicar el proceso (más bien lingüístico) de creación de nuevos términos, transductores o predicados (fórmulas), y menos todavía para el proceso (más bien artístico) de producción de nuevas formas expresivas para plasmar en forma materializada los modelos mentales todavía no verbalizados (con frecuencia ni siquiera verbalizables en lenguajes articulados).

El proceso noético-semiótico de cambiar la terminología e inventar nuevas formulaciones para intentar fijar, comunicar y cuestionar conceptualizaciones requiere modelos más complejos y cíclicos, con fases de exploración, ensayos de expresión, modificaciones de los morfismos de interpretación previos, pruebas (“puestas-a-prueba”) de esos morfismo de interpretación recién modificados, simulaciones de comunicación externa (así parezcan sólo internas por desdoblamientos alternantes del sujeto fenomenológico), materializaciones con distintos medios, recursos y perturbaciones de los registros semióticos previamente utilizados y otros recursos y rodeos. Aquí es donde la posibilidad de escribir los nuevos términos, transductores y predicados y de diagramar los nuevos modelos permite una objetivación de estos procesos noético-semióticos.

En síntesis, los modelos son sistemas no lingüísticos que configuramos para representar subprocessos. Las teorías son sistemas lingüísticos que configura-

mos para hablar sobre nuestros modelos. Los modelos son imaginados. Las teorías son lenguajeadas. Los modelos son análogos. Las teorías son digitales.

La teoría de cada modelo tiene unos aspectos más descriptivos con los que cada uno de nosotros trata de precisarse a sí mismo y de comunicar a otros su propia construcción mental y otros más explicativos y prescriptivos con los que precisamos, delimitamos, restringimos, extendemos o potenciamos el modelo. Los aspectos más descriptivos se van configurando con una cierta independencia hasta permitir que el mismo modelo pueda servir de interpretación para varias teorías y los aspectos explicativos y prescriptivos se van configurando con cierta independencia hasta permitir que la misma teoría se pueda interpretar en varios modelos.

EL MORFISMO DE INTERPRETACIÓN

Ahora es necesario reflexionar sobre las formas de relacionar las teorías con los modelos. Ya insinuamos la idea básica al respecto, que es la de *morfismo de interpretación*, que tiene que ser triple: debe permitir interpretar los términos, los transductores u operadores y los predicados o relatores.

Podría sustituirse la pareja *modelo/teoría* por la tríada *modelo/teoría/morfismo de interpretación*.

En la pareja *modelo/sistema*, el constructo más abstracto es el de sistema, como agregado mental de tres aspectos: un conjunto de componentes o elementos (sustrato), un conjunto de operaciones o transformaciones mentales (dinámica) y un conjunto de relaciones o nexos (estructura).

Como recopilación de lo anterior, recuérdese que inicialmente se habló de los modelos como construcciones mentales. Lo mismo sucedió con los sistemas. Aun lo que parece ser un sistema “allá afuera”, extramental, es un proceso que nos parece fácilmente modelable, generalmente porque fue construido por otros o por nosotros mismos. En la TGP los sistemas son herramientas mentales que utilizamos para vernoslas con los procesos: la actividad de los agentes se reduce a evitar, desviar, frenar, mantener o acelerar subprocesos, directa o indirectamente.

Terminemos esta sección con un estudio de caso. Hilbert analiza la lógica de las demostraciones euclidianas y logra formular axiomas que capturan toda la geometría plana eucliana. Pero sólo puede hacerlo “mirando por el rabillo

“del ojo” al modelo euclíadiano en su imaginación. Por ejemplo, los axiomas de dimensión no se podrían seleccionar, como lo muestro en el artículo sobre la cronotopía. Algo parecido sucede con el intento de formular teoría sobre el ángulo. Tiene que mirar de reojo al modelo y formular teoría, que le queda mal en cuanto a distintas maneras de precisar el morfismo de interpretación.

El juego de definiciones permite experimentar la articulación de los modelos mentales y las teorías por el morfismo de interpretación. En los artículos sobre la Cronotopía mencioné las definiciones de cuadrado, como aquella que llamé “la definición 4-3-2”: “Un cuadrado es un polígono de cuatro lados, al menos tres de ellos iguales, que forman al menos dos ángulos rectos” (Vasco, 2006, vol. 1, p. 18)

Si se quiere agregar otro acertijo para el juego de definiciones con modelos, teorías y morfismos de interpretación, piénsese un poco en mi definición preferida de triángulo: “Un triángulo es una partición del plano en siete regiones lograda con tres cortes rectos”. Es útil detenerse un momento y ensayar con tres cortes rectos paralelos (se forman cuatro regiones), dos paralelos y una recta secante (seis regiones), tres cortes por rectas concurrentes (seis regiones), y...

LOS TALLERES DE MODELOS Y TEORÍAS

1. El primer taller podría ser el de la aritmo-geometría pitagórica. Retrocedamos 2600 años en el tiempo y pensemos en Pitágoras tratando de enseñar a un grupo de jóvenes novicios, los “akusmáticos”, lo que había aprendido de las matemáticas en Mesopotamia y Egipto. Comenzaba con un bastón de punta afilada con el que hacía huecos y trazos en la arcilla o la arena de Crotona en el sur de Italia.

Comenzaba así:

• : . :: ...

¿Es aritmética o geometría? Estamos antes de cualquier distinción entre ellas.

Si usted ve una sucesión, es porque lee de izquierda a derecha. Y si cree que es una sucesión como función de N hacia un espacio X, ¿qué espacio es X? Y, ¿qué es N? Al menos no empieza por cero. ¿Son los números naturales, o son instancias de ellos, o son símbolos de ellos? Estamos todavía antes de los números naturales o enteros.

¿Dónde están los segmentos que los unen? ¿Y por qué no las rectas que pasan por ellos? Hay una teoría que se queda sólo en enunciar propiedades de las parejas, ternas, etc. de puntos; otra que además enuncia propiedades de los segmentos entre parejas de puntos, y otra que además enuncia propiedades de las rectas determinadas por parejas de puntos.

Esta última da lugar a la geometría proyectiva que llamo “temporalizada” (“timed”), porque en los segundos pares produce puntos y en los impares rectas que pasan por los puntos producidos en el momento anterior. Por ejemplo, la teoría de los cuadriláteros comienza con el cuadrvértice en el segundo 0, luego con seis rectas en el segundo uno, luego aparecen tres puntos más en el segundo 2, luego aparece la diagonal externa y dos rectas más que pasan por el centro, etc.

Eso es claro en el modelo, pero no ha sido enunciado como teoría. Mirando por el rabillo del ojo al modelo, se puede empezar inmediatamente a formular proposiciones de la teoría.

2. El segundo taller es el que yo llamo irónicamente “La recta (?) numérica”. Nos parece natural que los números naturales se modelen mentalmente en una recta numérica. Robbie Case y Juan Pascual-Leone propusieron la teoría de que los niños necesitan el modelo de la recta numérica para dominar los números naturales. Pero al estudiar la aritmética en preescolar y primaria creo poder asegurar que hay muchas dificultades en esa teoría.

La primera no es muy grave: puedo afirmar que no se trata de una recta sino de una semirrecta, y que no necesariamente es horizontal, y si lo es, culturalmente el origen estaría a la izquierda en nuestras culturas y a la derecha en los árabes e israelíes.

La segunda es que he podido comprobar que hay al menos dos modelos de semirrecta numérica horizontal de izquierda a derecha: la de los niños comienza con segmentos aproximadamente iguales de largos, con o sin marcas verticales que los separan, y los números se marcan o se cuentan sobre los segmentos:

1 2 3 4 ...

La de los maestros comienza con un trazo vertical debajo del cual los maestros escriben el cero, luego otro con el uno debajo, etc.



La primera no sirve para contar, pero sí sirve para modelar el tiempo: los siglos primero, segundo, etc. después de Cristo; el primero, segundo, etc. año de vida; el primero, segundo, etc. día de la semana; la primera, segunda, etc. hora del día, etc.

Parece que este modelo fue el que usó Descartes cuando inventó la geometría analítica.

La segunda es la preferida de los matemáticos.

Pero el modelo mejor es el que llamo “la semifila numérica de bolitas”.

• • • ...

Ese sí sirve, porque en nuestra cultura empieza por el primero, el segundo, el tercero, que antes se llamaban “números ordinales”, hasta que los matemáticos los cambiaron por lo ordinales de Cantor que no son los mismos.

Ese modelo es más apropiado para contar la cardinalidad de colecciones discretas, y sirve también como el sistema más sencillo de numeración:

•, ••, •••, •••• ...

Este sistema de la semifila numérica de bolitas es claramente isomorfo con el modelo de la semifila numérica de barritas

|||| ...

Esta semifila produce los numerales I, II, III, IIII, etc. Los hemos visto que perduran al menos durante toda la primaria y hasta en jóvenes y adultos para los juegos y notaciones deportivas y cotidianas, talvez con una tachadura de las cuatro primeras barritas para el número cinco.

Aquí el modelo mental tiene una estructura dada no sólo por el orden de izquierda a derecha, sino por la alineación o colinealidad.

La colinealidad expresa propiedades del espacio mental generado por el cerebro, que no es espacial en el mismo sentido que el espacio del movimiento cotidiano. El último estudio que conozco al respecto es uno sobre los niños Mundurucú en el Amazonas (Izarda, Picad, Spelke y Dehaene, 2011). Estos

niños se desempeñan tan bien en temas de geometría euclíadiana sin ninguna escolaridad formal como adultos y niños europeos. Un ejemplo de pregunta es. Imagínese una recta que corta una de las dos rectas de una pareja de rectas paralelas; si prolonga la que corta la una, ¿corta la otra?

3. El tercer taller ejercita al tallerista en efectuar mentalmente el paso del modelo del disco plano de Poincaré al disco de Klein por medio de la proyección estereográfica al modelo esférico seguida de la proyección vertical para bajar al de Klein.

Luego se ejercita el paso al modelo del semiplano de Poincaré por proyección desde otro polo. Así se pueden inventar otros modelos, como el modelo parabólico de Minkowski, el modelo cónico y el modelo plano hiperbólico.

4. Otro taller se inicia a la manera usual de entender las superficies de Riemann en análisis complejo, y enseña a comparar la esfera de Riemann con el modelo hemisférico de Poincaré: si se dobla el ángulo, parece igual al de Riemann, por el simple teorema del ángulo central y el ángulo inscrito.

5. Un taller muy ilustrativo de la distinción entre modelo y teoría es el que enseña a visualizar la dualidad de la geometría proyectiva por la idea del trompo (no en el sentido usual del trompo de cuerda sino del giróscopo).

6. Diseñé otros talleres muy divertidos que llamé “de las geometrías de la Tierra por dentro” y “de la Tierra por fuera”, para compararlas con la geometría elíptica de Riemann. Pude lograr un resultado inesperado: la geometría de Riemann en la esfera no es no-euclíadiana por el quinto postulado de Euclides, pero si se toma el quinto postulado con el enunciado de Playfair, sí es no-euclíadiana.

En estos talleres se puede modelar mentalmente el punto como disco y la línea como segmento diametral; el punto como segmento diametral y la línea como disco; el punto como bipunto y la línea como círculo maximal en la esfera, y viceversa; el punto como recta y la línea como plano, y viceversa; el punto como semirrecta sobre el plano horizontal y la línea como semiplano menos una semirrecta del borde, y viceversa; el punto como segmento radial y la línea como semidisco menos un radio, y viceversa; el punto como punto y la línea como semicírculo semiabierto en la semiesfera con medio ecuador, y viceversa. Basta una sola teoría e ir cambiando el morfismo de interpretación.

La mirada al modelo por el rabillo del ojo permite corregir el lenguaje y des-
cartar los no-teoremas.

La distinción entre modelos y teorías permite la exploración de los puntos orientados (hacia adentro o hacia afuera) y las líneas orientadas; se hace girar el trompo y la regla de la mano derecha y la doble cubierta de la esfera y las representaciones de los grupos de Lie.

La extensión del trompo de tres a cuatro dimensiones puede hacerse de dos maneras. La primera es considerar el segmento que imaginamos como eje del trompo como la sombra o proyección de otro disco ortogonal al visible en un espacio de cuatro dimensiones. Es el trompo simétrico, que podría llevar al análisis de dos variables complejas.

La segunda manera es considerar el disco que imaginamos como la sombra o proyección de una bola tridimensional en un espacio de cuatro dimensiones. Es el trompo asimétrico, que podría llevar al análisis cuaterniónico.

CONCLUSIÓN

Piénsese finalmente en la dualidad de la mano derecha y la mano izquierda; claramente las distinguimos con nuestra imagen mental corporal, pero esa dualidad no se deja capturar por ninguna teoría formal. La regla de la mano derecha en física es claramente discernible de la de la mano izquierda si hay un modelo mental tridimensional en el que se ubique un modelo mental del agente, con un morfismo preciso de interpretación; tiene una ventaja sobre otros modelos: se puede proyectar sobre las dos esquinas del salón de clase.

Lo mismo puede decirse de la dualidad “arriba y abajo”. No hay teoría que las distinga; más bien, cualquier teoría puede inducir a errores por la pulsión a interpretarla inadecuadamente, como al hablar de “base” y “altura” en un triángulo, etc. Un triángulo equilátero que “descansa” sobre la punta no parece ser triángulo para los niños, quienes prefieren llamarlo “flecha”.

Un último ejemplo: el teorema de Desargues en el plano dice que si dos triángulos son perspectivos desde un punto, lo son desde una línea. El modelo tridimensional muestra que eso tiene que ser así, por tratarse de una pirámide con base en el triángulo de mayor área, con el otro triángulo producido por un corte de la pirámide por un plano; pero la sola teoría en el plano no permite demostrarlo directamente.

La teoría muestra que el antecedente y el consecuente del teorema de Desargues son duales: dos tripuntos producen por las parejas de vértices homólogos tres líneas concurrentes si y sólo si dos triláteros producen por las parejas de lados homólogos tres puntos colineales. Si la geometría proyectiva plana es autodual, ambas proposiciones tienen que ser verdaderas o ambas falsas. Eso es lo que dice el teorema... Todo esto puede hacerse con el solo tratamiento de la teoría una vez formulada en lenguaje técnico formalizable. No hace falta saber cómo se va a fijar el morfismo de interpretación. No hace falta modelo ni demostración directa.

Con estos talleres y ejemplos, espero no necesitar más motivación para convencer a lectores y auditores de la conveniencia, la productividad y la diversión inagotable de jugar a la Cronotopía con la distinción explícita entre modelos, teorías y morfismos de interpretación.

REFERENCIAS

- Chang, C.C. y Keisler, H.J. (1973). *Model theory*. Amsterdam, Holanda: North-Holland.
- Damasio, A. (2010). *Self comes to mind. Constructing the conscious brain*. New York, USA: Random House/Pantheon Books. (Obra publicada simultáneamente en español: *Y el cerebro creó al hombre*. Barcelona: Destino).
- Duval, R. (2004/1995). *Semiosis y pensamiento humano: Registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. (Segunda edición. Trad. Myriam Vega Restrepo). Cali, Colombia: Peter Lang/Universidad del Valle. [Original: *Sémiosis et pensée humaine*. Bern: Peter Lang, 1995. Primera edición en español: Universidad del Valle, 1999].
- Izarda, V., Picad, P., Spelke, E.S. y Dehaene, S. (2011). *Flexible intuitions of Euclidean geometry in an Amazonian indigene group*. *PNAS Online-Early Edition*. Disponible en el URL <http://www.pnas.org/content/early/2011/05/18/1016686108.full.pdf>
- Mockus, A. (1988). *Representar y disponer*. Bogotá, Colombia: Universidad Nacional de Colombia-Centro Editorial.
- Vasco, C.E. (1980). El concepto de sistema como clave del currículo de matemática. *Notas de Matemática* (Universidad Nacional de Colombia), 10, 1-14.
- Vasco, C.E. (1991). Conjuntos, estructuras y sistemas. *Revista de la Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales*, 18(69), 211-223.
- Vasco, C.E. (1995). La teoría general de procesos y sistemas. En Misión Ciencia, Educación y Desarrollo. *Educación para el desarrollo* (Informes de Comisionados I. Colección Documentos de la Misión, Tomo 2, pp. 377-652). Bogotá, Colombia: Presidencia de la República-Consejería Presidencial para el Desarrollo Institucional-

Colciencias. (Con la colaboración de Hernán Escobedo, Teresa León y Juan Carlos Negret).

Vasco, C.E. (2000). Una teorización cognitiva acerca de la diferencia entre conceptos pre-dicativos o relacionales y conceptos operativos o funcionales. En J.J. Botero, J. Ramos y A. Rosas (Comps.), *Mentes reales: la ciencia cognitiva y la naturalización de la mente* (pp. 183-202). Bogotá, Colombia: Siglo del Hombre/Universidad Nacional de Colombia.

Vasco, C.E. (2006). Cronotopía: Un “Programa de Bogotá” para lo que se suele llamar “Geometría”. En C. Ruiz et al. (Eds.), *Memorias del XVI Encuentro de Geometría y sus aplicaciones - IV Encuentro de Aritmética* (Bogotá, junio 23-24-25 de 2005, vol. 1, pp. 1-28). Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

Vasco, C.E. (2007a). La cronotopìa o la matematica dello spazio-tempo, prima e dopo la metrica. *La Matematica e la sua Didattica* (Bologna), 21(4), 455-470.

Vasco, C.E. (2007b). La cronotopìa o la matematica dello spazio-tempo, prima e dopo la metrica. En B. D’Amore y S. Sbaragli (Eds.), *Allievi, insegnanti, sapere: La sfida della didattica della matematica* (Incontri con la Matemática, n. 21. Comune di Castel S. Pietro Terme, 2-3-4 de noviembre 2007, pp. 71-79). Bologna, Italia: Pitagora Editrice.

Vasco, C.E. (2011). La cronotopía, antes y después de la geometría. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática* (Costa Rica), 6(9), 77-91. Disponible en el URL: <http://www.cimm.ucr.ac.cr/ojs/index.php/CIFEM/article/view/681>.

LA CIRCULATURA DEL CUADRADO: UNA PERSPECTIVA DESDE LOS MÉTODOS NUMÉRICOS

Armando Echeverry y Orlando Aya

Universidad Pedagógica Nacional

acheverri@pedagogica.edu.co, oaya@pedagogica.edu.co

Los procesos para tratar de darle cuadratura al círculo con regla y compás permitieron el desarrollo de ramas de estudio de las matemáticas como las denominadas “curvas mecánicas”. Sin embargo, pensar el problema recíproco, esto es encontrar la circulatura del cuadrado con los mismos instrumentos produjo un conocimiento que desde la perspectiva geométrica y del análisis no es menos importante. Se presenta acá la descripción de algunos intentos por lograrla y su relación con aspectos básicos de los métodos numéricos.

ALGUNAS CIRCULATURAS DEL CUADRADO

Como lo reporta Beckmann (2006/1971), la primera aproximación racional del número π data de la época de los babilonios y los egipcios. Ellos encontraron la razón entre el radio de la circunferencia r y el perímetro C de la misma usando el método mecánico de trasladar la medida del radio con un objeto físico, como una cuerda, sobre la curva de la circunferencia. De esta manera establecieron que π es un número algo mayor que tres y estimaron la parte decimal buscando la fracción que podía representar dicho arco en relación con el radio; así lograron determinar que $3\frac{1}{8} < \pi < 3\frac{1}{7}$ (Figura 1), o $3.125 < \pi < 3.143$.

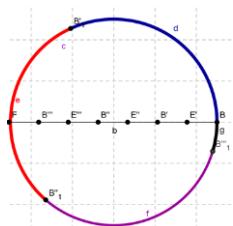


Figura 1. Primera aproximación “mecánica” de π

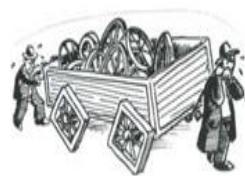


Figura 2. La paradoja de “cuadrar” el círculo

El menosprecio que los griegos desarrollaron por los métodos mecánicos, y la intención de solucionar diversos problemas geométricos mediante regla y compás, entre ellos la cuadratura del círculo, hicieron que los procesos de Echeverry, A. y Aya, O. (2011). La circulatura del cuadrado: una perspectiva desde los métodos numéricos. En P. Perry (Ed.), *Memorias del 20º Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones* (pp. 37-48). Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

aproximación fuesen más dispendiosos. Hoy en día, se sabe por qué el problema resulta ser irresoluble utilizando regla y compás; la razón fundamental se encuentra en los números construibles.

El problema y sus soluciones aproximadas en el contexto geométrico

Hallar la cuadratura del círculo equivale a encontrar, sólo con regla y compás euclídeos, un cuadrado cuya área sea igual a la de un círculo dado. Tras muchos intentos, F. Lindemann en 1882 demostró que resolver el problema bajo esas condiciones es imposible ya que π es un número trascendente. El esfuerzo para cuadrar el círculo llevó al estudio de algunas de las denominadas “curvas mecánicas”, pero también a conceptos matemáticos muy importantes como son la teoría de la aproximación y las cuadraturas.

Una forma de abordar el mismo problema es pensar de manera dual, esto es, hacer la “circulatura del cuadrado”. Esto significa encontrar un círculo que tenga la misma área de un cuadrado dado. El término fue acuñado por el historiador de la matemática Moritz Cantor (1829-1920). Si bien el problema es menos conocido, ha sido abordado por varios matemáticos y artistas. También resulta irresoluble utilizando únicamente regla y compás, pues se tendría un cuadrado de lado L y se desea construir una circunferencia de radio r de tal forma que $L^2 = \pi r^2$. Sin pérdida de generalidad se puede considerar un cuadrado unitario y por lo tanto r estaría dado por $r = \sqrt{\frac{1}{\pi}}$ de donde $\pi = \frac{1}{r^2}$.

Ahora bien, hacer la circulatura del cuadrado desde un punto de vista pragmático resulta más viable pues se podría, por ejemplo, considerando el diseño y la ingeniería, construir una rueda (Figura 2). Así se puede empezar a hacer el proceso desde dos opciones extremas, a saber: con una circunferencia inscrita y luego con una circunferencia circunscrita.

Circulatura por acotamiento numérico

En el siguiente análisis se asumirá que $L=1$. En el caso de la circunferencia inscrita se tendría que, siendo A_c el área de la circunferencia, $A_c < 1$ y como el radio es $r = \frac{1}{2}$ entonces el valor estimado de π , π^* sería $\pi^* = 4$. De otra parte,

para el caso de la circunferencia circunscrita se tendrá que el radio es $r = \frac{\sqrt{2}}{2}$

y como $A_C > 1$, entonces el valor estimado de π es: $\pi^* = \frac{1}{(\sqrt{2}/2)^2} = 2$; así se tiene un acotamiento para π^* : $2 \leq \pi^* \leq 4$ (Figura 3).

Luego una buena aproximación podría darse por dos vías: una aritmética ($\pi^* = 3$) y otra geométrica que consiste en trabajar con una radio equivalente al determinado por el valor promedio de los radios de la circunferencia inscrita y la circunscrita, procedimiento construible con regla y compás usando números construibles o la bisectriz de un segmento.

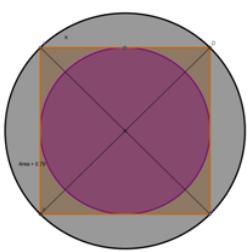


Figura 3. Primer acotamiento para π^*

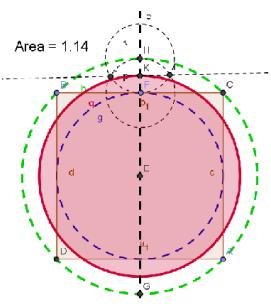


Figura 4. Segundo acotamiento para π^*

En la Figura 4 se presenta uno de los procesos, donde $r = \frac{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{1 + \sqrt{2}}{4}$.

Como se tiene que $A_C > 1$, $\pi^* = \frac{1}{((1+\sqrt{2})/4)^2} = \frac{16}{(1+\sqrt{2})^2}$ podría reescribirse

como $\pi^* = 16(3 - \sqrt{2})$ y sería aproximadamente $\pi^* = 2.7452$. Es decir, se tiene un acotamiento para π^* dado por $2.7452 \leq \pi^* \leq 4$ o bien $16(3 - \sqrt{2}) \leq \pi^* \leq 4$, según sea el procedimiento determinado. La segunda opción pareciera ser un retroceso en la estimación lograda anteriormente pues el ancho del intervalo es mayor; no obstante, su reiteración permite no sólo llegar a acotar adecuadamente a π^* sino a mantener la interpretación geométrica del problema original. La siguiente iteración del proceso se hará determinando el punto medio entre

los radios $r = \frac{1}{2}$ y $r = \frac{1 + \sqrt{2}}{4}$. Esto es un valor de $r = \frac{\frac{1 + \sqrt{2}}{4} + \frac{1}{2}}{2} = \frac{3 + \sqrt{2}}{8}$ con

lo cual $\pi^* = \frac{1}{\left(\frac{3+\sqrt{2}}{8}\right)^2} = \frac{64}{(3+\sqrt{2})^2} = \frac{64(11-6\sqrt{2})}{49}$. En aritmética de cinco cifras, $\pi^* = 3.2845$; se tiene un intervalo dado por $16(3-\sqrt{2}) \leq \pi^* \leq \frac{64(11-6\sqrt{2})}{49}$.

El procedimiento se puede iterar sucesivamente y obtener la aproximación de π tan cerca del valor como se desee, en términos de los métodos numéricos, con la tolerancia que se requiera. Esto es reconocer la aproximación no sólo como una noción básica en el cálculo sino en la matemática en general (García, Serrano y Díaz, 2002). En las Figuras 5 y 6 se presenta el proceso geométrico del tercer y cuarto acotamiento para π^* . El método numérico que se está aplicando no es otro que el de bisección (Burden, 2001) y encarna los defectos de este método, siendo el principal, su baja rapidez de convergencia hacia la solución, lo que implica el aumento de los pasos de cálculo.

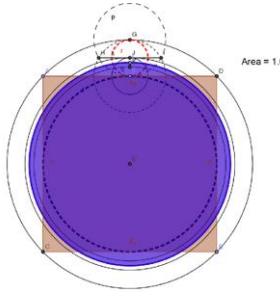


Figura 5. Tercer acotamiento para π^*

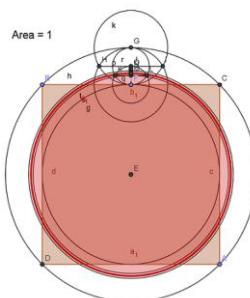


Figura 6. Cuarto acotamiento para π^*

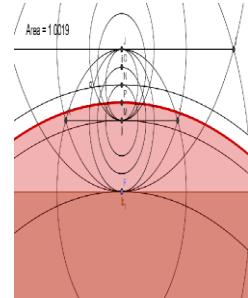


Figura 7. Detalle de la cuarta iteración

Parece que se ha encontrado la solución, no obstante es una ilusión debida al procesador y el software usados; en la Figura 7 se muestra en detalle la región donde se bisecan los segmentos presentados en la cuarta iteración del proceso y el cálculo con el software del área utilizando redondeo y aritmética en cinco cifras. En cuanto al error porcentual de esta cuarta iteración, usando redondeo en cuatro cifras decimales es de: $E\% = \frac{|3.2845 - 3.1416|}{3.1416} 100\% = 4.55\%$. En algunos contextos prácticos, no matemáticos, podría resultar suficiente.

Los aspectos relacionados con el error desde el enfoque de la matemática como ciencia pura y exacta casi que resultarían indeseables; no obstante las nue-

vas tendencias que consideran a la matemática como un constructo social y cultural reconocen el error desde tres perspectivas:

- (i) Como un agente constructor de nuevo conocimiento.
- (ii) Como un factor ineludible en el contexto de las aplicaciones.
- (iii) Como un aspecto que ningún procesador, por eficaz que sea, puede evitar ya que al trabajar en base binaria, sin importar cuántos bits se empleen, sólo se tendrán aproximaciones racionales para un número irracional. Ellas son las aproximaciones por las reductas racionales o un número irracional (Campos, 1978; Luque, Mora y Torres, 2006).

Es en este marco donde surgen otras circulaturas del cuadrado; cada una de ellas responde a un proceso geométrico que utiliza sólo regla y compás.

Circulaturas por acotamiento geométrico

Numerosos artistas buscaron presentar la circulatura mediante novedosas construcciones; la primera de ellas parece ser de un oficio relacionado con las ciencias místicas y artesanales que es reportado por Maskin (1999). La construcción es como sigue: se tiene un cuadrado de apotema conocido. Sin pérdida de generalidad, si el cuadrado es unitario, la apotema será $a = 1/2$. Se busca construir un triángulo rectángulo que tenga a a como cateto mayor y ángulos agudos cuyas medidas sean 30° y 60° . Como se tiene que en un triángulo al ángulo mayor se debe oponer el lado mayor, entonces, siendo O el centro del cuadrado, se debe:

- (i) Trazar una perpendicular a uno de los lados que pase por O y determinar el punto de intersección A ; con centro en O y radio OA se traza un arco. Ahora con centro en A y radio OA se traza un segundo arco; el punto de intersección de los arcos es B y resulta claro que se determina un triángulo equilátero OAB donde $m\angle AOB = 60^\circ$.
- (ii) Trazar la mediatrix del \overline{AB} y determinar el punto medio de éste como C .
- (iii) Construir la \overrightarrow{OC} y nombrar el punto donde corta al lado, como D . Por propiedades de los triángulos equiláteros, \overrightarrow{OC} es también bisectriz del $\angle AOB$ con lo que $m\angle AOC = 30^\circ$, y así se tiene construido el $\triangle AOC$ con los requisitos dados.

La circunferencia de radio OC da la circulatura aproximada del cuadrado. El valor de OC se puede determinar por semejanza de triángulos (Figura 8).

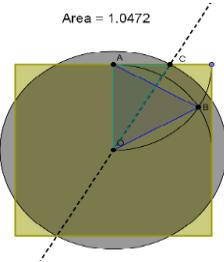


Figura 8. Circulatura mística y artesanal

Se tiene que $\frac{AC}{AO} = \frac{AD}{OD}$, $AD = 1/4$, $AO = 1/2$ y $OD = \sqrt{(OA)^2 - (AD)^2}$, de donde $OD = \sqrt{3}/4$. Entonces, $AC = \sqrt{3}/6$. Se deduce que $OC = \sqrt{(OA)^2 + (AC)^2}$. O sea, $OC = \sqrt{(1/2)^2 + (\sqrt{3}/6)^2} = \sqrt{3}/3$ y la aproximación de π^* es $\pi^* = \frac{1}{(\sqrt{3}/3)^2} = 3$.

Eso da un error porcentual, con redondeo y aritmética de cuatro cifras, de $E\% = \frac{|3 - 3.1416|}{3.1416} 100\% = 4.51\%$.

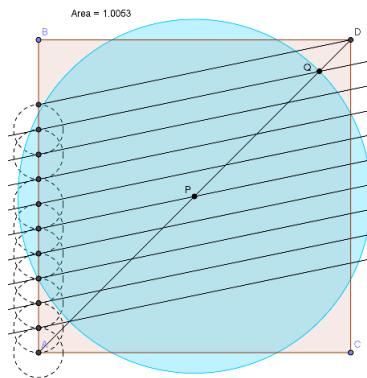


Figura 9. Circulatura reportada por Durero

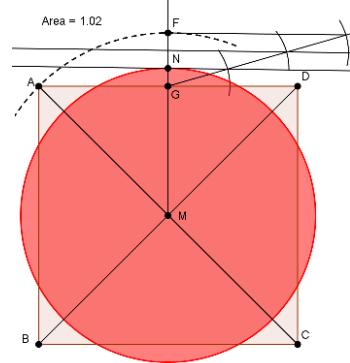


Figura 10. Circulatura sulvasutra

El artista Alberto Durero (1471-1528) desarrolló una circulatura que, según él mismo lo reporta en su obra *De la medida* (Durero, 1525/2000), fue empleada desde la antigüedad. Consistía en tomar, sobre un cuadro unitario, la diagonal y segmentarla en diez partes para luego tomar como radio de la circunferencia cuatro de las diez particiones. En la Figura 9 se presenta la circulatura realizada con regla y compás, utilizando el procedimiento clásico para dividir un segmento dado en n segmentos congruentes. El valor de π^* , dado que la me-

dida de la diagonal está dada por $d = \sqrt{2}$, es de $\pi^* = \frac{1}{(2\sqrt{2}/5)^2} = \frac{25}{8} = 3.125$. El

valor así determinado da, en aritmética de cinco cifras y redondeo, como error porcentual: $E\% = \frac{|3.1416 - 3.125|}{3.1416} 100\% = 0.53\%$.

Otra manera interesante de aproximar la cuadratura está reportada por autores como Boyer (2003/1968) y fue propuesta en el texto indio de los sulvasutras. El proceso consistía en tomar las diagonales y determinar el punto de intersección de las mismas M y, con centro en ese punto, trazar un arco de radio la semidiagonal, es decir MA (Figura 10). Luego se traza un rayo paralelo al lado \overline{AB} desde M determinando el punto G de corte en éste con el lado \overline{AD} y el punto F como el punto de intersección del rayo con el arco previamente trazado.

Finalmente se triseca el \overline{GF} y se toma el punto N tal que $GN = \frac{GE}{3}$, donde MN

determina el radio y aproxima la circulatura. Como $GE = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}-1}{2}$ y

$GN = \frac{(\sqrt{2}-1)/2}{3} = \frac{\sqrt{2}-1}{6}$, el radio de la circulatura es $r = \frac{2+\sqrt{2}}{6}$. Así, el valor

de π^* sería: $\pi^* = 18(3 - 2\sqrt{2})$, lo que da un error porcentual con redondeo y aritmética de cuatro cifras de: $E\% = \frac{|3.0883 - 3.1416|}{3.1416} 100\% = 1.7\%$.

Tal vez la circulatura del cuadrado desde una obra artística más conocida y curiosa es la que se atribuye a Piera en un análisis artístico de la obra “El Hombre de Vitrubio” (Figura 11) de Da Vinci (1452-1519). Esta soportada sobre una curiosa construcción oculta pero de la cual Leonardo dejó suficientes evidencias como lo señala este analista artístico.

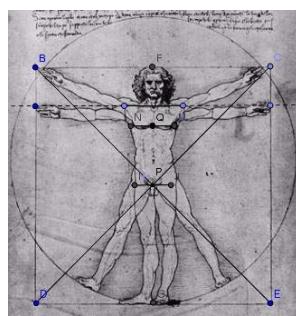


Figura 11. Pistas en el Hombre de Vitrubio (Piera, 2002)

- a) En el dibujo, los brazos horizontales del hombre indican unos puntos específicos sobre los lados del cuadrado.
- b) Los puntos anteriores determinan el segmento visible en la base de la cabeza.
- c) Un segmento visible se encuentra en la base de la raíz del pene, y otro une las tetillas. Si se considera el punto medio de cada uno de estos segmentos, el primero (P) resulta ser el punto medio del cuadrado y el otro (Q) está ubicado a su vez en el punto medio del segmento que une el centro con un punto del lado superior del cuadrado. Es decir, Q estará ubicado a los $\frac{3}{4}$ de la altura del hombre.

Ahora se realizan los siguientes trazos (Figura 12):

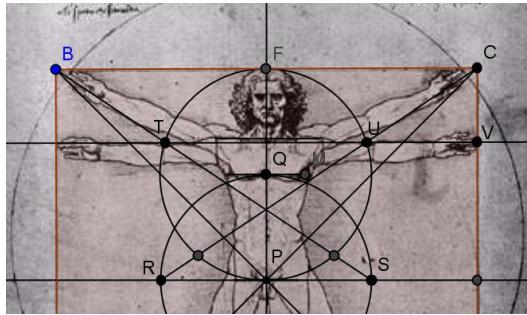


Figura 12. Primeras construcciones sobre pistas preliminares

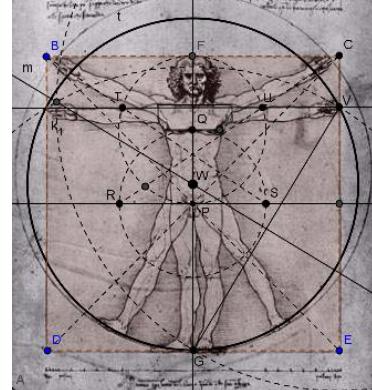


Figura 13. Determinación de la circulatura del cuadrado

- (i) La circunferencia con centro en Q y en radio PQ , es decir la circunferencia t de centro Q y radio $\frac{1}{4}$, asumiendo el cuadrado de lado unitario.
- (ii) Las rectas paralelas a los lados y que pasan por P . Con centro en P y radio $\frac{1}{2}$ una circunferencia; se determinan los puntos R y S donde ésta interseca la recta horizontal.
- (iii) Los segmentos \overline{BS} y \overline{CR} que cortan a la circunferencia t en los puntos T y U que, evidentemente, determinan una paralela a \overline{BC} ; \overrightarrow{TU} interseca al lado \overline{CE} precisamente en V que corresponde al índice de la mano izquierda del hombre.

(iv) \overline{VG} (Figura 13) y luego la mediatrix m de este segmento. Se determina el punto de corte de ésta con la \overline{FG} y se denota por W .

(v) La circunferencia C con centro W y radio GW . Esta circunferencia corresponde entonces a la circulatura del cuadrado.

Para calcular el valor de π^* por esta aproximación, si X y Y denotan respectivamente los puntos donde \overline{BS} y \overline{CR} y \overline{TU} y \overline{FG} se intersecan (Figura 14), $FQ = 1/4$, $FC = 1/2$ y $FX = 1/3$. Por tanto, aplicando el Teorema de Pitágoras al $\triangle XFC$, $XC = \sqrt{(XF)^2 + (FC)^2} = \sqrt{(1/3)^2 + (1/2)^2} = \sqrt{13}/6$, y aplicándolo al $\triangle QYU$, $QU = \sqrt{(QY)^2 + (YU)^2} = 1/4$ (1).

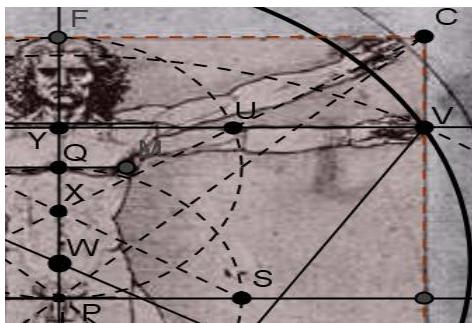


Figura 14. Detalle de la región para la determinación de π

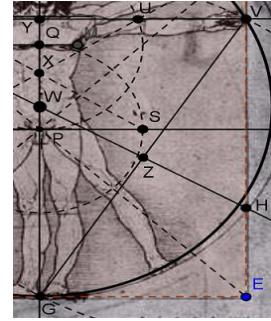


Figura 15. Detalle para la determinación de r

Ahora, del Teorema de Thales o la semejanza entre $\triangle XFC$ y $\triangle XYU$, se tiene que: $\frac{XU}{XY} = \frac{XC}{XP}$ (2), y $\frac{XU}{YU} = \frac{XC}{FC}$ (3). Pero, al ser Y, Q, X puntos colineales se tiene que $YQ + QX = XY$ y $\frac{XU}{QX + YQ} = \frac{XC}{XF}$. Como $QX = 1/12$ entonces $\frac{XU}{(1/12) + YQ} = \frac{XC}{XF}$ (4). Las ecuaciones (2) y (4) se pueden reescribir con los valores conocidos como: $\frac{XU}{YU} = \frac{XC}{1/2}$ y $\frac{XU}{(1/12) + YQ} = \frac{(\sqrt{16})/6}{1/3}$. El sistema de ecuaciones así obtenido (tres ecuaciones con tres incógnitas) se puede resolver para YQ . Se obtiene la ecuación: $(YQ)^2 + (3/2)^2 (YQ + (1/12))^2 = (1/4)^2$ o $13(YQ)^2 + \frac{3}{2} YQ - \frac{1}{16} = 0$. La raíz positiva de esta ecuación es $YQ = (4\sqrt{3} - 3)/52$.

De otra parte, $FY = FQ - YQ = \frac{1}{4} - YQ$ es decir, $FY = \frac{1}{4} - \frac{4\sqrt{3}-3}{52} = \frac{32-8\sqrt{3}}{104}$.

Dado que $FY = 1 - GY$, entonces $GY = 1 - FY = 1 - ((32-8\sqrt{3})/104)$, lo que simplificado da $GY = (9+\sqrt{3})/13$. Si se determinan los puntos Z y H como el punto medio de \overline{VG} y el punto donde la mediatrix de \overline{VG} corta al lado \overline{CE} , respectivamente, se encuentran los siguientes hechos (Figura 15):

- (i) $\triangle GZW$ y $\triangle VZH$ son congruentes
- (ii) $VZ = VG/2$
- (iii) $VH = r$ siendo r el radio que se quiere determinar
- (iv) Existen dos triángulos rectángulos determinados por $\overline{VG}, \overline{VE}, \overline{GE}, \frac{\overline{DJ}}{2}$ y el punto H .
- (v) De lo anterior y por triángulos semejantes se tiene $\frac{VG}{VE} = \frac{VH}{VZ}$; es decir $\frac{VG}{VE} = \frac{VH}{\frac{VG}{2}}$, de lo que se deduce que $(VG)^2 = 2(VH)(VE)$.
- (vi) $(VG)^2 = (VE)^2 + (EG)^2 = (VE)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2$.

De los hechos (iii), (v) y (vi), junto con los resultados obtenidos anteriormente y resolviendo para r , se obtiene que $r = \frac{4(9+\sqrt{3})^2 + (13)^2}{104(9+\sqrt{3})} = \frac{333+11\sqrt{3}}{624}$.

Finalmente, como $\pi^* = \frac{1}{r^2}$ entonces $\pi^* = \frac{1}{((333+11\sqrt{3})/624)^2} = \left(\frac{8(333-11\sqrt{3})}{1417}\right)$.

Usando aritmética de cinco cifras y redondeo, esto equivale a $\pi^* = 3.1416$ lo que en esa misma aritmética da un error porcentual nulo. No obstante si se aumentan las cifras decimales a ocho ya se aprecia una diferencia. El valor de π^* será $\pi^* = 3.14162373$, lo que dará un error porcentual determinado por:

$$E \% = \frac{|3.14162373 - 3.14159265|}{3.14159265} 100 \% = 0.00099 \% .$$

A MANERA DE CODA

El desarrollo de métodos de aproximación alberga en sí mismo estructuras matemáticas que han sido y deben seguir siendo exploradas. La utilización de la circulatura del cuadrado y las posibles aproximaciones π^* al número π dentro del presente artículo sólo ha sido un pretexto para analizar la forma en que se elaboran algunos métodos que procuran dos aspectos relevantes dentro del estudio de los métodos numéricos; el primero es crear un proceso que resulte algorítmico y el segundo es encontrar valores cada vez más próximos al valor real.

Los actuales procesadores se disputan el honor de calcular números como π , $\sqrt{2}$, e con cada vez más cifras decimales y eso les da un cierto carácter de prestigio y estatus. No obstante lo anterior, cualquier resultado que se obtenga mediante un procesador, de un número trascendente, será sólo eso, una excelente aproximación y sólo retardara el hacernos conscientes del error si no reconocemos esos procesos como *procesos de aproximación*.

REFERENCIAS

- Beckmann, P. (2006/1971). *Historia de π* . México: Conulta. [Original: *A history of π* . New York: The Golem Press, 1971.]
- Boyer, C. (2003/1968). *Historia de la matemática*. (Trad. Mariano Martínez Pérez). México: Alianza Editorial. [Original: *A history of mathematics*. New York: Wiley & Sons Inc., 1968. Primera edición en español: Alianza Editorial, 1986].
- Burden, R.L. y Douglas, F.J. (2002). *Análisis numérico*. (Séptima edición.). México, DF: Cengage Learning/Thomson Internacional. [Original: *Numerical Analysis*, Thomson International.]
- Campos, A. (1978). *Matemática para filosofía: de Pitágoras a Euclides*. Bogotá, Colombia: Universidad Nacional de Colombia.
- Durero, A. (2002/1525). *De la medida*. Madrid, España: Editorial Akal S.A.
- García, G., Serrano, C. y Díaz, H. (2002). *La aproximación una noción básica en el cálculo. Un estudio en la educación básica*. Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.
- Luque, C., Mora, L. y Torres, J. (2006). *Estructuras análogas a los números reales*. Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

Maskin, J.S. (1999). La verdadera resolución de la cuadratura del círculo. *Symbolos*, 17-18.
Versión digital disponible en <http://ciclogia.com/cuadraturadelcirculo.htm>.

Piera. C. (2002). *Leonardo Da Vinci y la cuadratura Humana*. Versión digital disponible
en http://www.asociacionartistica.com/06_resegnas/articulos/leonardo.pdf.

IMPRESIÓN DE DISEÑOS SIMÉTRICOS EN LA OBRA DE ESCHER

Hugh Hilden, José Montesinos, Débora Tejada y Margarita Toro

Universidad de Hawaii, USA; Universidad Complutense de Madrid, España;

Universidad Nacional de Colombia

mike@math.hawaii.edu, jose_montesinos@mat.ucm.es, dtejada@unal.edu.co, mmtoro@unal.edu.co

La búsqueda del hombre de bellos diseños, la selección de formas y colores de distintas piezas que quería usar en sus muros y embaldosados y la repetición sistemática de motivos produjeron patrones simétricos como ejemplos de teselaciones. Así mismo, la naturaleza ha encontrado bellísimas teselaciones resolviendo sus propios problemas. Una teselación o embaldosado de una superficie es cubrirla con una misma pieza que se repite sin dejar espacios ni solapamientos. Aunque a simple vista se piense que son infinitas las formas de producir diseños simétricos planos, básicamente existen sólo 17 formas de producirlos. Mostraremos que la ejecución de estas teselaciones sigue unas reglas sencillas y precisas, las cuales hemos utilizado para imaginar 17 artefactos, los cuales son ejemplos del concepto debido a William Thurston de orbifold (orbicie o calidoscopio generalizado) y que pueden ser utilizados en la impresión de cualquier diseño simétrico plano. Exhibiremos estos artefactos por medio de algunos videos y utilizaremos algunas de las obras de Escher para ilustrar nuestra conferencia. Se verá que los conceptos de translación, rotación y de reflexión pueden enseñarse fácilmente por medio de la utilización de estos artefactos.

INTRODUCCIÓN

El estudio de sólidos cristalinos y del principio que gobierna su crecimiento, su forma externa y su estructura interna se llama cristalografía. El orden interno o cristalino de un mineral se puede pensar como un motivo repetido sobre un retículo, que es un arreglo periódico de puntos en el espacio. Por esta razón en cristalografía es fundamental estudiar los patrones de estas simetrías en el espacio. Para ayudar a entender estos patrones en 3 dimensiones, es importante estudiar el caso plano, que es el objetivo principal de este artículo.

Introducimos el tema dando un recorrido muy rápido en la vida de Escher. Luego nos centraremos en los aspectos matemáticos de las teselaciones. Una teselación o embaldosado de una superficie es cubrirla con una misma pieza que se repite sin dejar espacios ni solapamientos. Aunque a simple vista se piense que son infinitas las formas de producir diseños simétricos planos, bá-

Hilden, H., Montesinos, J., Tejada, D. y Toro, M. (2011). Impresión de diseños simétricos en la obra de Escher. En P. Perry (Ed.), *Memorias del 20º Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones* (pp. 49-76). Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

sicamente existen sólo 17 formas de producirlos, cada una de ellas asociada con un grupo cristalográfico plano. Mostraremos que la ejecución de estas te selaciones sigue unas reglas sencillas y precisas, las cuales permiten imaginar 17 artefactos que están en correspondencia biunívoca con los 17 grupos cristalógraficos planos y que pueden ser utilizados en la impresión de cualquier diseño simétrico plano. Veremos que los conceptos de translación, rotación y de reflexión pueden enseñarse fácilmente por medio de la utilización de estos artefactos. Por otro lado, cada uno de estos artefactos es la exemplificación concreta de un orbifold euclídeo y, por lo tanto, ellos nos permiten acceder en una forma práctica al concepto de orbifold.

Al lector, le recomendamos no alejarse del computador, pues la lectura se debe hacer interactuando con muchos sitios en la web.¹

NOTAS BIOGRÁFICAS SOBRE ESCHER

Los dibujos de Escher muestran una variada gama de paradojas y objetos imposibles, y exploran los alcances de las ilusiones ópticas. Esta obra, reconocida por su realismo meticuloso y admirada por su virtuosismo, no cesa de intrigar a matemáticos, psicólogos y al público general.

Comenzaremos recordando muy rápidamente quién fue Maurits Cornelis Escher. Nació en Leeuwarden (Frise, Países Bajos) en 1898. Entre 1903 y 1918 realizó sus estudios de primaria y secundaria. Con respecto a estos años hay que decir que la secundaria fue prácticamente una pesadilla para él, con la única excepción de las dos horas semanales de dibujo que disfrutaba enormemente. En 1919 entró a la Escuela de Arquitectura y Bellas Artes de Haarlem, donde rápidamente se dio cuenta que su inclinación no era la Arquitectura sino las Bellas Artes.

Su maestro, el profesor De Mesquita, fue su guía en el aprendizaje del difícil arte del grabado. Para 1922 ya había adquirido gran destreza en el manejo de técnicas de grabado. Su maestro consideró que ya estaba maduro y que era hora de que emprendiera su camino solo. Escher seguiría en contacto con De Mesquita hasta su muerte.

¹ Para apreciar algunos videos sobre los artefactos que imprimen diseños simétricos, recomendamos una visita a la página web: <http://www.atractor.pt>.

En el período comprendido entre los años 1922 y 1935 vivió en Italia, donde conoció a Jetta Umiker, quien sería su esposa desde 1924 y con quien compartió la pasión por dibujar y pintar. Cada primavera emprendían largas excursiones por los pueblos de Italia. La obra de estos años se enmarcó principalmente en el tema de paisajes y grabados de pequeños pueblos, inspirados en las múltiples excursiones hechas en Italia. Para esa época Escher era aún muy desconocido.

En el año 1935 el clima fascista que se vivía en Italia le hace la vida insoprible y decide dejar Italia. Siendo Jetta de origen Suizo, se radican en Suiza por corto tiempo y en el año siguiente hacen varios cruceros en el Mediterráneo. Estos cruceros los financiaron con grabados de Escher, ya que el dueño de la compañía de cruceros, quien era un amante del arte, le aceptó el canje que Escher le propuso en una carta. En uno de estos cruceros visitó por segunda vez el Palacio de la Alhambra de Granada. Ya había estado allí 10 años antes. Esta segunda visita le entregó a Escher las llaves de un mundo lleno de nuevas posibilidades. En compañía de su esposa tomó nota cuidadosa de muchos de los diseños de la Alhambra, notas que serían su inspiración en los años venideros.

En Internet² se pueden observar los primeros dibujos de teselaciones inspiradas en la Alhambra. Allí vemos, por ejemplo, las acuarelas conocidas como *Niño chino* (*China boy*), *Ardillas* (*Squirrels*) y *Hombres fuertes* (*Strong men*). Todas ellas son del año 1936.

En 1937 se instaló en Uccle, cerca de Bruselas y en sus obras se ve ya la influencia de la Alhambra. En la misma página web podemos apreciar cómo él comienza a hacer variaciones en las teselaciones para producir obras más complejas. Por ejemplo, en el año 1937 produce los grabados *Desarrollo I* (*Development I*) y *Metamorfosis I* (*Metamorphosis I*) en donde se ve claramente la utilización dinámica que él hace de las teselaciones.

En enero de 1941 se trasladó para Baarn en los Países Bajos. Su clima frío y húmedo obligó a Escher a trabajar en recogimiento, lo que a su vez dio pie para que allí fuese la cuna de su obra más rica. En 1962 debió ser operado y su producción se suspendió por un corto período. En 1969 terminó su última y magistral xilografía: *Serpientes*³ (*Serpents*). Esta xilografía está llena de deta-

² Consultar la galería (gallery) de la página web <http://www.tessellations.org>.

³ Véase <http://www.arrakis.es/~sysifus/escher.html>.

lles; se pueden apreciar algunos de menos de 2 milímetros. Murió el 21 de febrero de 1971. Un estudio muy completo de la vida y obra de M. C. Escher se puede leer en *Le miroir magique de M.C. Escher* (Ernst, 1978).⁴

ESCHER: ¿MATEMÁTICO O ARTISTA?

Cuando se observan las obras de Escher, uno no puede dejar de maravillarse por sus minuciosos detalles. Su obra muestra su carácter obsesivo e incansable. En el momento en que Escher se dio cuenta y reconoció la riqueza escondida en los diseños geométricos de la Alhambra comenzó un trabajo permanente y repetitivo sobre ellos. Hizo investigaciones matemáticas que lo llevaron a comprender y a descubrir muchos trucos que él pudo aplicar. Los matemáticos, como el geómetra Coxeter, se fascinaron con la obra de Escher e incluso lo invitaron a hablar en congresos de matemáticos, donde Escher no podía más que celebrarlo dado que se consideraba negado para las matemáticas. Podemos afirmar, tal como él mismo lo hacía, que no era matemático, pues no manejaba el lenguaje formal que usamos los matemáticos, sin embargo, sin temor a equivocarnos, podemos decir con toda seguridad que la mente de Escher era privilegiada en su concepción del mundo desde un punto de vista geométrico. Era simplemente un artista dotado con una profunda mente geométrica.

La obra de Escher se puede dividir en tres temas diferentes:

- paisajes,
- teselaciones o embaldosados,
- mundos imposibles (juegos con la perspectiva).⁵ El libro *Un mundo de figuras imposibles* (Ernst, 1991), es un muy buen compendio de estos trabajos de Escher.

TESELACIONES O EMBALDOSADOS

Sólo los dos últimos temas tienen interés para nosotros desde el punto de vista matemático. El tema de los mundos imposibles merece un estudio completo pero éste no es de nuestro interés en este espacio. Aquí queremos estudiar las

⁴ En <http://www.mcescher.com/indexuk.htm> y http://users.erols.com/ziring/escher_bio.htm se encuentran también biografías muy completas.

⁵ Véanse, por ejemplo, *Cascada, Arriba y abajo, Relatividad, Cóncavo y convexo y Tribarrido Penrose* en <http://aixa.ugr.es/escher/table.html>.

teselaciones y tratar de entender las herramientas matemáticas que se usan en el aparentemente complejo y misterioso mundo de ellas. Terminaremos el artículo dando un paseo por otras curvaturas y, a la vez, exhibiendo la grandeza de la mente geométrica de Escher en otras obras relacionadas con las teselaciones.

Una teselación o embaldosado de una superficie es cubrirla con una misma pieza (baldosa) que se repite sin dejar espacios ni solapamientos. Mostraremos, sin demeritar la complejidad del arte de Escher, que la ejecución de estas teselaciones sigue unas reglas sencillas y precisas.

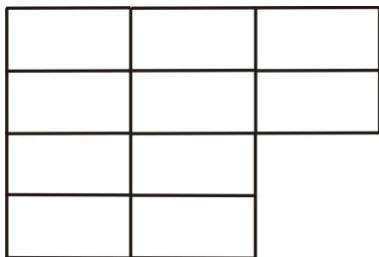


Figura 1. Teselación con rectángulos

A lo largo de la historia de la civilización se encuentran muchos ejemplos de teselaciones, o mosaicos. Desde que el hombre comenzó a construir paredes, pisos y techos, la colocación de piedras, ladrillos o baldosas produjeron en forma natural el surgimiento de teselaciones. La búsqueda de bellos diseños, la selección de formas y colores de las piezas y la repetición sistemática de motivos produjeron patrones simétricos como ejemplos de teselaciones.

Aunque se tienen infinitas formas de hacer diseños simétricos, básicamente existe un número muy restringido de patrones. Hay sólo 17 patrones básicos para hacer diseños simétricos sobre un plano. En efecto, el cristalógrafo E. S. Fedorov, interesado en el estudio de las formas de los cristales, probó en 1891 que existen solamente 17 grupos cristalográficos planos. Para probar esto es suficiente considerar sólo cuatro tipos de movimientos rígidos de una baldosa sobre un plano (decimos que son rígidos porque no cambian el tamaño de la baldosa ni la deforman, simplemente la cambian de lugar sobre el plano). Ellos son: traslaciones; rotaciones, reflexiones y reflexiones corridas. Cualquier movimiento rígido que nos imaginemos puede ser reproducido con una combinación apropiada de estos movimientos. En realidad sería suficiente considerar sólo el movimiento de reflexión, ya que una traslación se puede producir a partir de la combinación de dos reflexiones a lo largo de dos ejes paralelos, una rotación también es la combinación de dos reflexiones, pero en

este caso los ejes no son paralelos y una reflexión corrida es simplemente el producto de una reflexión por una traslación. Estas cuatro clases de movimientos generan grupos algebraicos. Estos grupos son solamente 17 (salvo homomorfismos) y son llamados los grupos cristalográficos planos o euclídeos.

El entendimiento en dos dimensiones, permitió que un poco más adelante Fedorov, Schonflies y Barlow (estos dos últimos matemáticos) demostrarán la existencia de solamente 230 grupos cristalográficos tridimensionales.

Las aplicaciones de los grupos cristalográficos han sido diversas. El arte, la arquitectura y hasta la antropología se han beneficiado de ellos. Por ejemplo, como aplicación en la antropología, Albis-González y Valencia-Oviedo (1990) usan los grupos de simetría planos para confirmar la existencia de divisiones estilísticas en la cerámica precolombina de la región central de Panamá.

En la Figura 1 vemos una teselación euclídea con rectángulos. Observándola es natural preguntarse si ¿será posible teselar un plano con baldosas que no sean polígonos? La respuesta es sí y Escher fue un maestro en la producción de teselaciones hechas a partir de baldosas en forma de figuras humanas o de los más diversos y extraños animales. El arte Nazarí que podemos apreciar en los palacios como, por ejemplo en la Alhambra de Granada, fue rico en la creación de teselaciones, pero por razones de índole religioso ellos no se permitieron el uso de figuras humanas o de animales (véase Montesinos-Amilibia, 1987, 2005).

CALIDOSCOPIOS

Hemos dicho que queremos enseñar cuáles son las reglas simples que hay veladas detrás de los 17 patrones de diseños de simetría sobre un plano. Comenzaremos con un ejemplo que todos conocemos: un calidoscopio. Un calidoscopio es un artefacto formado por espejos y que tiene la propiedad que con el mismo artefacto se pueden producir infinitos diseños simétricos sobre el plano simplemente cambiando la imagen que se mira a través de él. Para que el calidoscopio funcione y no se solapen las figuras unas sobre otras, los espejos deben formar entre sí ángulos especiales. Por ejemplo, si los espejos forman un triángulo equilátero, la obra de Escher llamada *Lagarto, pez y murciélagos* (*Lizard/Fish/Bat*) se puede reproducir mirando una baldosa triangular que con-

tiene únicamente las mitades del lagarto, del pez y del murciélagos.⁶ En la Figura 2 representamos un esquema de dicha baldosa con su diseño simétrico.

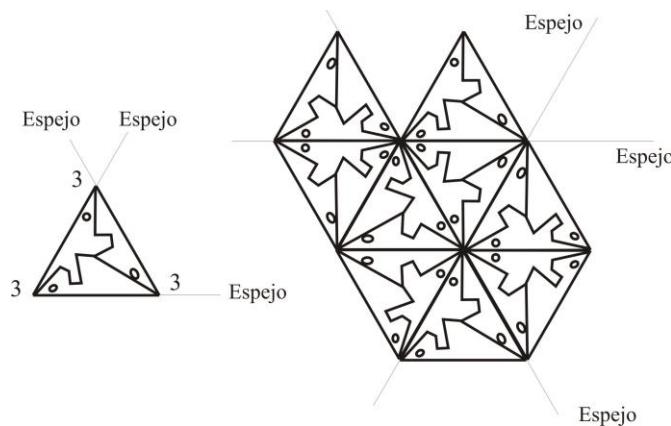


Figura 2. Baldosa y diseño de calidoscopio de triángulo equilátero

El diseño producido por un calidoscopio triangular con tres ángulos de 60° corresponde al grupo cristalográfico euclídeo denotado por $p3m1$, que es generado como grupo algebraico por tres reflexiones a lo largo de tres ejes que forman un triángulo equilátero. En este mismo diseño se ilustran (véase Figura 3) los movimientos rígidos de traslación, rotación, reflexión y de reflexión corrida de una baldosa básica.

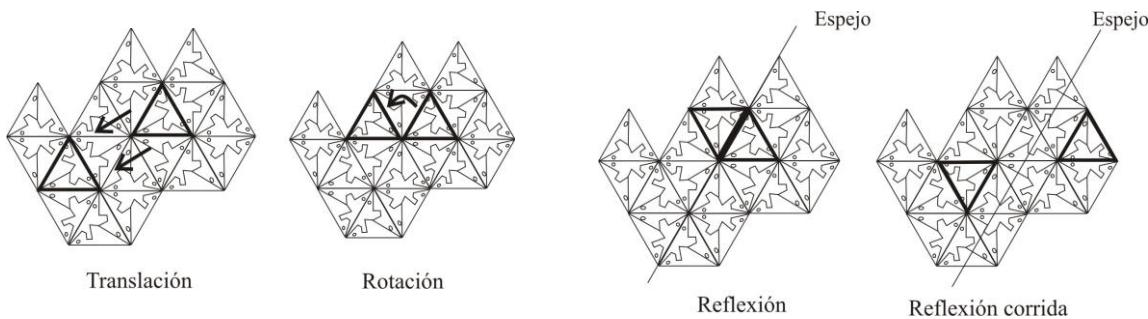


Figura 3. Movimientos rígidos aplicados a una baldosa

Para estudiar diseños simétricos hay dos puntos de vista posibles. De un lado, podemos usar el lenguaje algebraico, y en este sentido es que hablamos de grupos cristalográficos o, por otro lado, nos es permitido usar el lenguaje geométrico y topológico, y en este caso nos referimos en términos de orbificies, “orbifolds” o calidoscopios generalizados. En este artículo no definimos

⁶ Véase la baldosa y el diseño completo de esta obra de Escher en la teselación 85 de la página web: <http://britton.disted.camosun.bc.ca/jbescher2.htm>.

explícitamente el concepto de orbifold, pues nuestro objetivo no es el de profundizar en este concepto. Nos limitaremos a dar los 17 orbifolds asociados a los grupos cristalográficos planos. Por simplicidad en el lenguaje, el término que nosotros usaremos será el de calidoscopio; entendiendo que nos referiremos a los calidoscopios generalizados y que los calidoscopios formados por espejos son sólo ejemplos particulares.

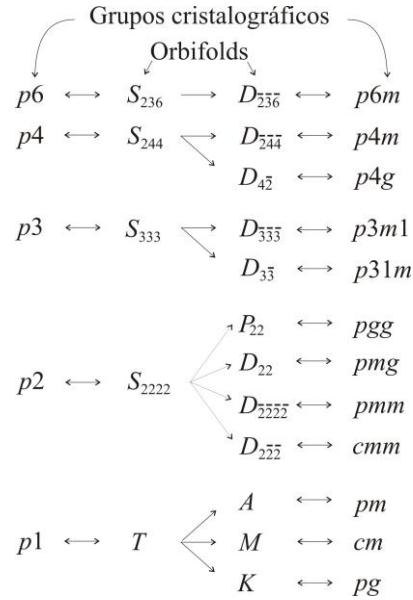


Tabla 1. Grupos cristalográficos versus orbifolds

Históricamente, la simetría de las teselaciones fue primero entendida desde el punto de vista algebraico. Como ya lo hemos dicho, los trabajos del cristalógrafo E. S. Fedorov probaron en 1891 la existencia de sólo 17 grupos algebraicos (cristalográficos) que permiten entender los diseños simétricos sobre un plano. A partir de las ideas de W. Thurston (1997), la simetría de los diseños simétricos se entiende también utilizando el concepto de calidoscopio, que pertenece al mundo de la geometría y de la topología. Ambos lenguajes son equivalentes; para cada grupo cristalográfico existe un calidoscopio y viceversa. En la Tabla 1 listamos los 17 grupos cristalográficos euclídeos con sus correspondientes calidoscopios. Usamos las notaciones usuales para los grupos cristalográficos y para los calidoscopios u orbifolds euclídeos. La notación de los orbifolds se irá entendiendo a medida que se estudia cada uno de ellos (véase Klein y Hurlbut, 1999).

MOVIMIENTOS RÍGIDOS Y ARTEFACTOS QUE LOS PRODUCEN

A continuación mostraremos cómo construir artefactos que permiten imprimir una misma imagen que se repite, obedeciendo al efecto de alguno de los movimientos rígidos (para mayores detalles véase Hilden, Montesinos, Tejada y Toro, 2011).

Traslación

Las rotativas utilizadas en la imprenta son un ejemplo del artefacto que produce traslaciones de una imagen. Cuando se tiene un rectángulo, hecho de material flexible, hay dos maneras de pegar las parejas de lados opuestos para formar dos cilindros diferentes. Y el efecto de impresión (véase Figura 4) usando ambos cilindros es muy diferente. Uno producirá traslaciones horizontales mientras que el otro las producirá en forma vertical. Ilustramos las dos opciones de impresión.

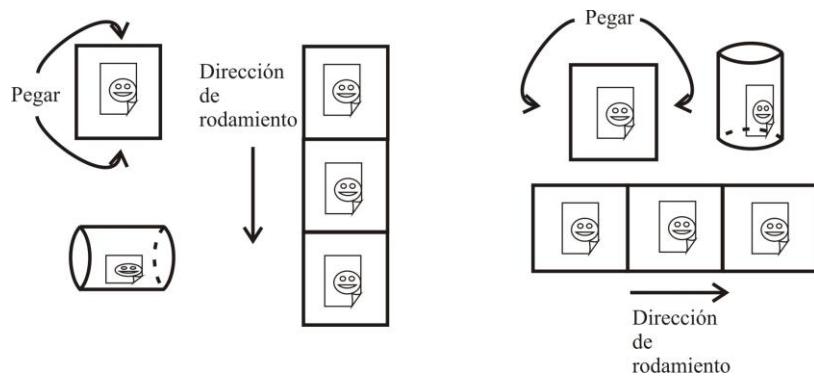


Figura 4. Traslaciones horizontales y verticales

Rotación

Para producir rotaciones necesitamos un artefacto en forma de cono, que al impregnarlo de tinta y ponerlo a rodar sobre un plano reproduzca el movimiento rígido de una rotación. Construimos el cono a partir de un sector circular con un ángulo de $360^\circ/n$, donde n es un entero positivo, con el fin de que al ir imprimiendo no se solapen las imágenes. La Figura 5 representa el caso de una rotación de 90° .

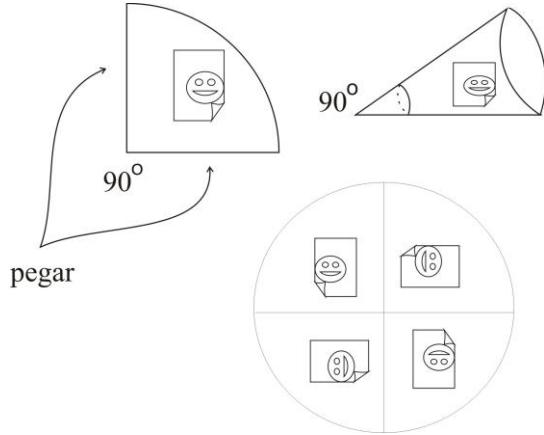


Figura 5. Rotación de 90°

Reflexión

En este caso, necesitaremos un artefacto que imite el efecto de un espejo (véase la Figura 6). Para esto podemos usar el arte de la serigrafía, que usa material poroso y delgado con el fin de poder imprimir una figura por cualquiera de los dos lados del material. Al hacer esto lo que se obtiene es la reflexión de la figura que se ve del otro lado, de igual forma como si la estuviésemos mirando en un espejo. Este artefacto lo debemos hacer con un material delgado y poroso pero con cierta rigidez que permita el rodamiento. Además, el artefacto debe tener bordes rectos, que actuarán como ejes de reflexión y sobre los cuales nos apoyamos para darle vuelta al artefacto y poder ir imprimiendo por ambos lados. Cuando el artefacto va rodando siempre se gira sobre alguna arista manteniéndola apoyada sobre el plano.

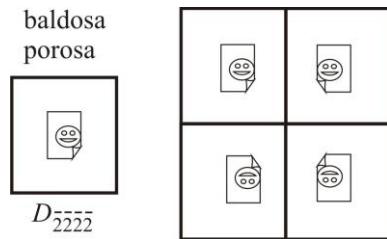


Figura 6. Reflexiones

Reflexión corrida

Para reproducir una reflexión corrida necesitamos un artefacto que combine la posibilidad de hacer una reflexión, o sea que podamos imprimir por ambos lados y que, además produzca también el efecto del cilindro en cuanto a tras-

laciones. Una banda de Möebius cumple ambas condiciones. Construimos una banda de Möebius a partir de un rectángulo hecho de material poroso y flexible, al cual se le pegan dos lados opuestos en forma cruzada. En la Figura 7 mostramos la construcción de una banda y el efecto al imprimir con ella.

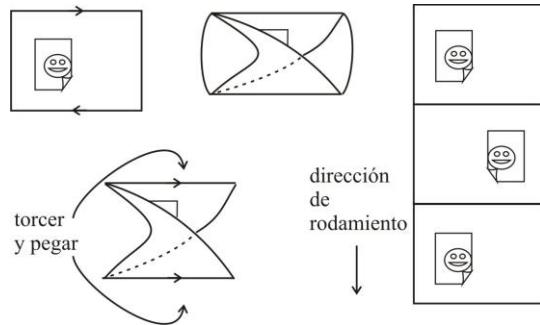


Figura 7. Cinta de Möebius y reflexión corrida

Así pues, cada movimiento rígido puede ser reproducido por un artefacto. Como cada grupo cristalográfico es generado por algunos de estos movimientos rígidos, una buena combinación de los artefactos anteriormente descritos nos dará la posibilidad de tener 17 artefactos diferentes, uno para cada uno de los 17 grupos cristalográficos.

Estos artefactos son justamente los 17 calidoscopios generalizados u orbificies.

Test para identificar el calidoscopio que corresponde a un diseño simétrico

Caso 1. *No hay rotaciones*

1. No hay reflexiones ni reflexiones corridas: Toro T
2. No hay reflexiones pero hay reflexiones corridas: Botella de Klein K
3. Hay reflexiones y reflexiones corridas: Cinta de Möebius M
4. Hay reflexiones y no reflexiones corridas: Anillo A

Caso 2. *Hay rotaciones pero no hay reflexiones ni reflexiones corridas*

1. Hay centro de orden 6: S_{236}
2. Hay centro de orden 3 pero no de orden 6: S_{333}
3. Hay centro de orden 4: S_{244}

4. Sólo hay centros de orden 2: S_{2222}

Caso 3. *Hay rotaciones y reflexiones o reflexiones corridas*

1. Hay centro de orden 6: $D_{\overline{2}\bar{3}6}$
2. Sólo hay centros de orden 3 y por todos ellos pasan reflexiones: $D_{\overline{3}\bar{3}3}$
3. Sólo hay centros de orden 3 y por alguno de ellos no pasan reflexiones: $D_{3\bar{3}}$
4. Hay centros de orden 4 y por ellos pasan reflexiones: $D_{\overline{2}44}$
5. Hay centros de orden 4 pero por ellos no pasan reflexiones: $D_{4\bar{2}}$
6. Sólo hay centros de orden dos
 1. Por todos ellos pasan reflexiones: $D_{\overline{2}\bar{2}\bar{2}\bar{2}}$
 2. Sólo por algunos pasan reflexiones: $D_{\overline{2}\bar{2}\bar{2}}$
 3. Por ninguno de ellos pasan reflexiones pero hay reflexiones: D_{22}
 4. Por ninguno de ellos pasan reflexiones pero hay reflexiones corridas: P_{22}

Compárese el test anterior con la Figura 9 de Albis-González y Valencia-Oviedo (1990). Véase también Gutiérrez-Santos (1992) y Klein y Hurlbut (1999).

Teselaciones planas

En lo que sigue estudiaremos los grupos cristalográficos junto con sus calidoscopios asociados (según la Tabla 1). Además los relacionaremos con algunas de las obras de Escher.

LOS GRUPOS CRISTALOGRÁFICOS cm Y pm Y LOS CALIDOSCOPIOS M Y A

Si miramos detenidamente la obra *Escarabajos*⁷ (*Scarabs*), sin tener en cuenta sus colores, podemos distinguir un eje de reflexión que pasa por el medio de los escarabajos y otro eje de reflexión corrida que pasa en medio de las patas de los escarabajos. Como no hay rotaciones, deducimos entonces que se trata del calidoscopio denotado por M (primera letra de Möebius). Éste lo llamamos cinta de Möebius, la cual es la misma *cinta de Möebius* descrita un poco más arriba pero, además, imprimimos con ella misma varias cintas paralelas así:

⁷ Véase <http://www.tessellations.org/eschergallery20.htm>.

una vez se ha impreso una cinta como la de la Figura 7, se consigue la impresión de su reflejo en sus bordes al darle la vuelta a la cinta de Möebius como si fuese un calcetín. El calidoscopio M corresponde al grupo cristalográfico cm , que es generado por una reflexión y una reflexión corrida con ejes paralelos.

Si en la misma obra de los escarabajos, tenemos en cuenta los colores, podemos distinguir dos ejes de reflexión paralelos, uno que pasa por la mitad de los escarabajos blancos y otro que pasa por el medio de los escarabajos cafés. Tenemos entonces dos ejes de reflexión paralelos y como no hay rotaciones, deducimos que el calidoscopio correspondiente es A , llamado *anillo*. Un anillo es un cilindro hecho de material poroso. La manera de operar con este cilindro es la de imprimir primero una cinta como cualquiera de las de la Figura 4 y a continuación darle la vuelta al cilindro como a un calcetín para imprimir el reflejo de la primera cinta en una cinta paralela.

EL GRUPO CRISTALOGRÁFICO $p1$ Y EL TORO T

En la obra *Pegasos*⁸ podemos ver que hay una baldosa básica en forma de pegaso (en nuestro análisis no hacemos caso a los colores y pensamos que todos los pegasos son del mismo color) que se repite trasladada en dirección horizontal y en dirección vertical. Es decir, tenemos traslaciones en dos sentidos. Obsérvese que se ven también traslaciones diagonales, pero estas aparecen como composición de traslaciones horizontales con verticales. Observamos también que no hay rotaciones ni reflexiones. A partir de la baldosa del pegaso y teniendo la autorización para hacer traslaciones en dos sentidos (independientes) podemos teselar todo el plano. El grupo cristalográfico generado por dos traslaciones es $p1$ y corresponde al calidoscopio llamado *toro*, denotado por T . En la Figura 8 exhibimos un toro y el diseño que se imprimaría con él.

Abrimos un paréntesis en nuestra discusión sobre los artefactos que nos permiten reproducir las teselaciones para hacer caer en cuenta cómo Escher se las ingenió para hacer sus diseños sin tener que usar artefactos como el toro. Aunque Escher no conocía el toro, supo aplicar la esencia del toro, el cual tiene la particularidad de trasladar una figura en dos direcciones.

⁸ Ver <http://britton.disted.camosun.bc.ca/jbescher3.htm> y <http://www.tessellations.org/eschergallery25.htm>

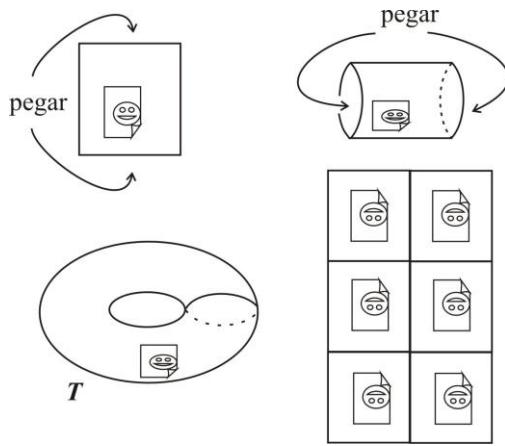


Figura 8. Diseño impreso con un toro

En la misma página web <http://britton.disted.camosun.bc.ca/jbescher3.htm> se ve la animación que ilustra cómo se construye la baldosa básica a partir de un cuadrado y que probablemente nos muestra lo que Escher hizo. Allí podemos ver muy claramente las dos traslaciones que hemos mencionado. La clave de esta construcción es la de partir de una teselación sencilla del plano hecha en este ejemplo por cuadrados y luego cada cuadrado se modifica tal cual se ve en la animación mencionada. La idea es de deformar, por ejemplo, la línea que forma el lado superior del cuadrado, en este caso, se dibuja el perfil de la cabeza y del lomo del pegaso, para trasladarla enseguida hacia el lado inferior del cuadrado, formando ahora el pecho y las patas traseras del pegaso. A continuación se deforma la línea del lado derecho del cuadrado obteniendo las alas y la cola del pegaso para luego trasladarla hacia el lado izquierdo del cuadrado obteniendo con ella las patas delanteras del pegaso. Trucos similares a éste fueron utilizados por Escher para poder confeccionar sus diseños. En general, él partía de una teselación hecha por polígonos y a continuación los deformaba utilizando éste u otros trucos similares que más adelante comentaremos. El truco anterior es posible aplicarlo siempre que se tengan dos lados paralelos e iguales en el polígono al cual se le hacen las deformaciones.⁹

Cerrando el paréntesis, en <http://www.tessellations.org/eschergallery15.htm> encontramos la obra *Sapos y peces* de 1942 de Escher que podría ser impresa por un toro. En ella observamos que la baldosa básica está conformada por la pareja de un sapo junto con un pez y que, además, las traslaciones no son ho-

⁹ Véase el mismo truco aplicado en la construcción de otras teselaciones (en particular las teselaciones 75 y 97) en <http://britton.disted.camosun.bc.ca/jbescher4.htm>, aunque en estos dos casos no se aplica sino a un solo par de lados.

rizontales ni verticales, como en el caso de los pegasos, sino que siguen la dirección de dos diagonales, que no son perpendiculares entre sí. En este caso debemos construir el toro a partir de un paralelogramo que no es rectángulo. La dirección de sus lados nos dirá cuál es la dirección de las traslaciones. La Figura 9 nos enseña un cilindro que genera traslaciones sesgadas.

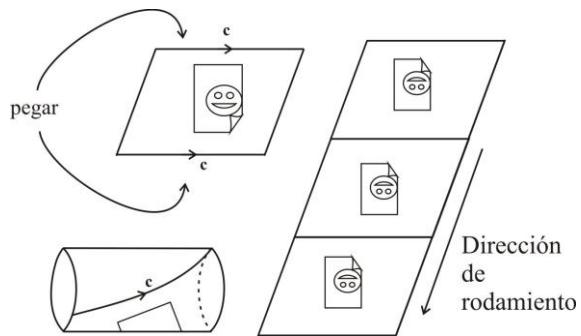


Figura 9. Traslación siguiendo una diagonal

Le recomendamos al lector que haga el ejercicio de construir este cilindro con un paralelogramo de papel.

LOS GRUPOS CRISTALOGRÁFICOS $p3m1$, pmm , $p4m$ Y $p6m$ Y LOS CUATRO CALIDOSCOPIOS COMUNES $D_{\overline{333}}$, $D_{\overline{2222}}$, $D_{\overline{244}}$ Y $D_{\overline{236}}$

El grupo cristalográfico $p3m1$ generado por reflexiones a lo largo de tres ejes que forman un triángulo equilátero y el grupo pmm generado por reflexiones a lo largo de cuatro ejes que forman un rectángulo están en correspondencia con los calidoscopios comunes formados por espejos y denotados por $D_{\overline{333}}$ y $D_{\overline{2222}}$, donde la letra D significa que se tiene un disco topológico con bordes y cada uno de los números n nos indica que hay un ángulo en el borde de $180^\circ/n$ formado por dos espejos consecutivos.

Ya discutimos anteriormente que la obra de Escher llamada *Lagarto, pez y murciélagos* puede ser reproducida observando una baldosa triangular que contiene únicamente la mitad del lagarto, la mitad del pez y la mitad del murciélagos a través de un calidoscopio de tres espejos que forman entre ellos ángulos de 60° y por lo tanto este diseño corresponde al calidoscopio $D_{\overline{333}}$ (véase la Figura 2). Por otro lado, la obra *Motivos 4*¹⁰ (*Motifs 4*) corresponde al calidoscopio $D_{\overline{2222}}$ y se puede reproducir al mirar una baldosa cuadrada, que contenga solamente la mitad de una abeja, de una mariposa, de un pez y de un murcié-

¹⁰ Véase <http://www.tessellations.org/eschergallery19.htm>.

lago, a través de un calidoscopio formado por cuatro espejos que forman un cuadrado. Por otro lado, los calidoscopios $D_{\overline{244}}$ y $D_{\overline{236}}$ corresponden a los grupos $p4m$ y $p6m$ que son generados, cada uno por tres reflexiones a lo largo de tres ejes. En el primero, los tres ejes forman un triángulo isósceles recto y en el segundo forman un triángulo con ángulos de 90° , 60° y 30° . Al igual que los dos calidoscopios anteriores sus diseños se pueden producir por tres espejos que formen los ángulos respectivos. La Figura 10 ilustra $D_{\overline{2222}}$.

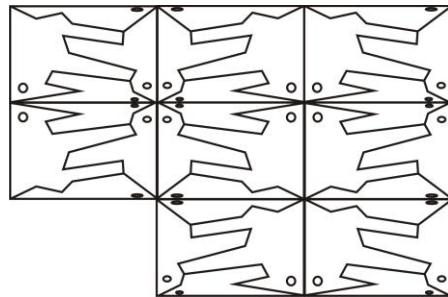


Figura 10. Diseño de calidoscopio $D_{\overline{2222}}$

EL GRUPO CRISTALOGRÁFICO $p3$ Y EL CALIDOSCOPIO S_{333}

En la obra *Reptiles*¹¹ vemos que hay una baldosa básica en forma de lagarto que se repite. En la misma forma que en el caso de los pegasos en nuestro análisis no nos interesa diferenciar los colores. La baldosa se repite por rotación de 120° en los vértices señalados con triángulos en la Figura 11 y esto nos permite teselar todo el plano.

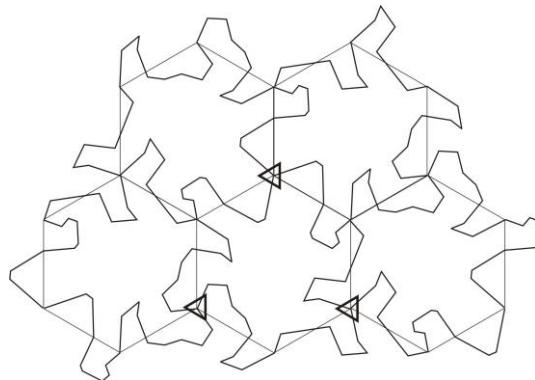


Figura 11. Centros de rotación de 120°

El grupo cristalográfico generado por tres rotaciones de 120° en los vértices de un triángulo equilátero es $p3$ y corresponde al calidoscopio S_{333} . Aquí la letra

¹¹ Véase [http://aixa.ugr.es/escher/800x600/Reptiles_\(boceto\).jpg](http://aixa.ugr.es/escher/800x600/Reptiles_(boceto).jpg)

S nos indica que se tiene una esfera topológica y cada número n nos dice que hay un cono de $360^\circ/n$. Recordemos que el artefacto que nos reproduce una rotación es un cono. Así, S_{333} es un artefacto parecido a una almohada o cojín triangular con tres esquinas, que a su vez son conos de 120° cada uno. Lo mostramos en la Figura 12.

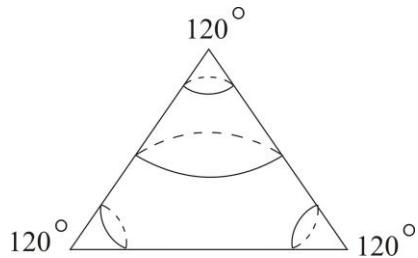


Figura 12. El cojín S_{333}

Abramos de nuevo un paréntesis y expliquemos brevemente el truco que probablemente usó Escher para construir la baldosa del lagarto. Escher partió de una teselación hecha de hexágonos regulares y cada uno de estos hexágonos lo modificó teniendo en cuenta la esencia del calidoscopio S_{333} , que es la de producir tres rotaciones de 120° en los vértices de un triángulo equilátero. La secuencia exhibida en la Figura 13 nos ilustra los dos primeros pasos en la construcción de la baldosa básica a partir de un hexágono. No ilustramos el tercer paso que se realiza de manera similar para modificar los últimos dos lados del hexágono (véase Seymour y Britton, 1989, p. 207).

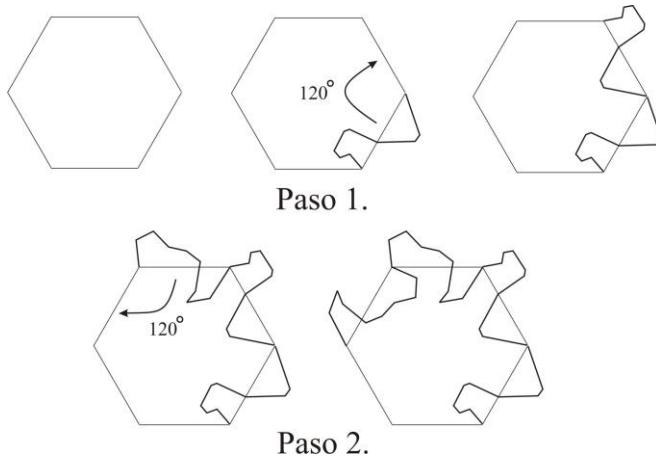


Figura 13. Los dos primeros pasos para construir el lagarto de la baldosa básica

Este truco se puede aplicar cuando se tienen lados consecutivos iguales en el polígono de la teselación original.¹²

LOS GRUPOS $p2$, $p4$, $p6$ Y LOS CALIDOSCOPIOS S_{2222} , S_{244} Y S_{236}

El calidoscopio S_{2222} , como su notación lo indica, tiene cuatro esquinas que son conos de 180° y aparece en dos formas básicas diferentes una es la de una almohada tradicional y la otra tiene forma de cojín tetraédrico o almohada torcida. Este calidoscopio corresponde al grupo cristalográfico $p2$, que es generado por cuatro rotaciones de 180° . Representamos la construcción de la almohada torcida junto con su diseño simétrico en la Figura 14.

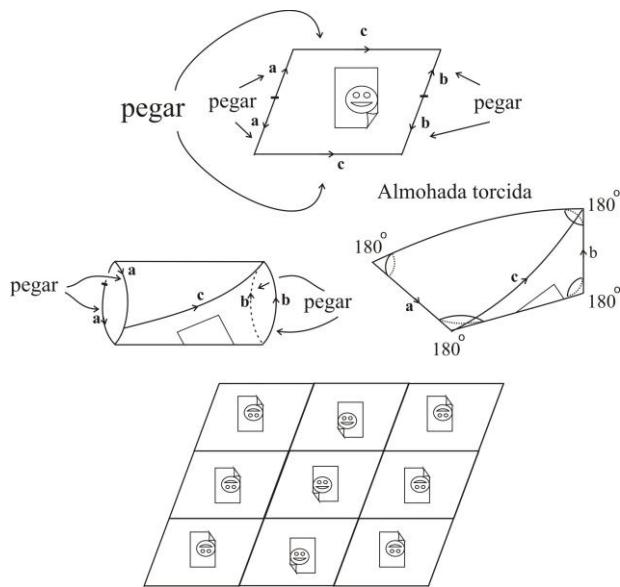


Figura 14. □ S_{2222} en forma de almohada torcida

Otra forma de construir el cojín tetraédrico o almohada torcida es la siguiente: partimos de un triángulo acutángulo de material flexible al cual le marcamos los puntos medios de sus tres lados. Trazamos el triángulo que une estos puntos medios, doblamos a lo largo de los lados de este nuevo triángulo y al pegar estas mitades nos produce el tetraedro. Observamos que por la forma en que lo hemos construido, cada vértice de este tetraedro está formado por tres ángulos cuya suma es exactamente 180° . Le proponemos al lector construir este tetraedro con papel. Si dicho tetraedro lo cubre con tinta en forma irregular y lo echa a rodar sobre un plano verá cómo se produce un diseño simétrico.

¹² Véase el mismo truco aplicado en la construcción de otras teselaciones (en particular, las teselaciones 104 y 99) en la página web <http://britton.disted.camosun.bc.ca/jbescher4.htm>.

Por su lado, los calidoscopios S_{244} y S_{236} (véase la Figura 15) son análogos al cojín S_{333} y tienen forma de cojines triangulares. Ellos corresponden a los grupos cristalográficos $p4$ y $p6$. Donde $p4$ es generado por tres rotaciones, una de 180° y dos de 90° y, por su lado, $p6$ también es generado por tres rotaciones, en este caso de 180° , 120° y 60° .

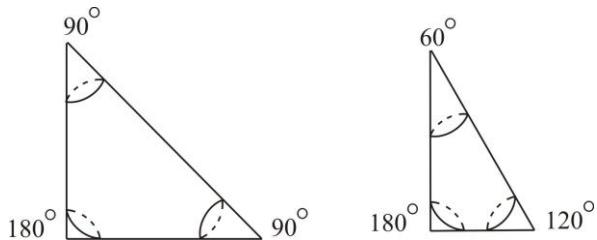


Figura 15. Los cojines S_{244} y S_{236}

En la obra de Escher encontramos diseños con estos tres calidoscopios. Por ejemplo, *Ardillas*¹³ y *Sapos*¹⁴ (*Frogs*) corresponden ambas al calidoscopio S_{2222} .

Por otro lado, la obra titulada *Pescado*, de 1938, y la del mismo nombre, de 1964, son ambas producidas por S_{244} .¹⁵ De la misma forma, la obra *Lagartos II* (teselación 104) corresponde a S_{244} .¹⁶ En la misma página web consultada para la obra citada antes, tenemos un ejemplo de S_{236} en la obra del *Pez volador* (haga clic en la teselación 99 para ver el diseño completo). Es interesante observar allí mismo la animación de la construcción de su baldosa básica.

LOS GRUPOS cmm , pmg Y LOS CALIDOSCOPIOS $D_{\bar{2}\bar{2}}$ Y D_{22}

A continuación describiremos cómo se construyen los calidoscopios $D_{\bar{2}\bar{2}}$ y D_{22} . Primero que todo pensemos en el siguiente hecho. Consideremos la almohada rectangular S_{2222} , sin diseño pintado sobre ella. Pensémosla como si estuviese llena de aire. Ella tiene un plano de simetría que pasa simultáneamente por las cuatro esquinas. Al cortar la almohada a lo largo de este plano, obtenemos dos piezas rectangulares del mismo tamaño. Si pensamos que ellas son hechas de material poroso, entonces cada una de ellas resulta ser el cali-

¹³ Véase <http://www.tessellations.org/eschergallery2.htm>.

¹⁴ Véase <http://www.tessellations.org/eschergallery14.htm>.

¹⁵ Ver <http://www.tessellations.org/eschergallery10.htm> y <http://www.tessellations.org/eschergallery26.htm>.

¹⁶ En <http://britton.disted.camosun.bc.ca/jbescher4.htm> se aprecia la animación de la baldosa básica de *Lagartos II*.

doscopio $D_{\overline{2}\overline{2}\overline{2}}$ estudiado anteriormente. Así, de S_{2222} hemos obtenido dos veces $D_{\overline{2}\overline{2}\overline{2}}$, por esta razón se dice que S_{2222} es el doble de $D_{\overline{2}\overline{2}\overline{2}}$. Pero S_{2222} admite otras dos clases de planos de simetría (véase Figura 16) y cada vez que cortemos por uno de ellos encontraremos otro artefacto que si lo pensamos de material poroso nos permitirá imprimir diseños diferentes.

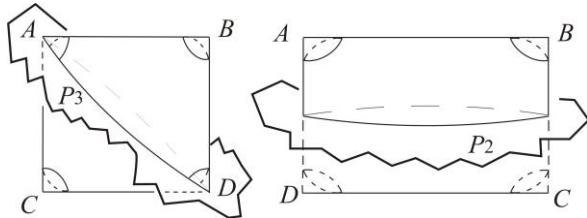


Figura 16. Otros planos de simetría de S_{2222}

Al cortar por los planos anteriores obtenemos los calidoscopios $D_{\overline{2}\overline{2}}$ y D_{22} , donde el primero de ellos se parece a un sombrero de fiesta de cumpleaños con dos ángulos de 90° en su borde y el segundo a una funda de almohada. Apreciamos estos calidoscopios en la Figura 17, junto con los diseños simétricos que ellos producen. De la misma forma que anteriormente, los números de la notación nos indican la esencia de los calidoscopios. Así, el número 2 sin barra de $D_{\overline{2}\overline{2}}$ nos dice que hay un centro de rotación de 180° , la letra D que hay reflexiones y los dos números 2 con barra nos dicen que hay dos vértices diferentes donde se tienen reflexiones a lo largo de ejes perpendiculares entre sí, que son justamente ángulos de 90° en el borde del disco. Por otro lado, en la notación D_{22} , la letra D indica la existencia de un eje de reflexión y los dos números 2, indican la existencia de dos centros de rotación de 180° . La obra *Cangrejos*¹⁷ (*Crabs*) es un ejemplo de D_{22} .

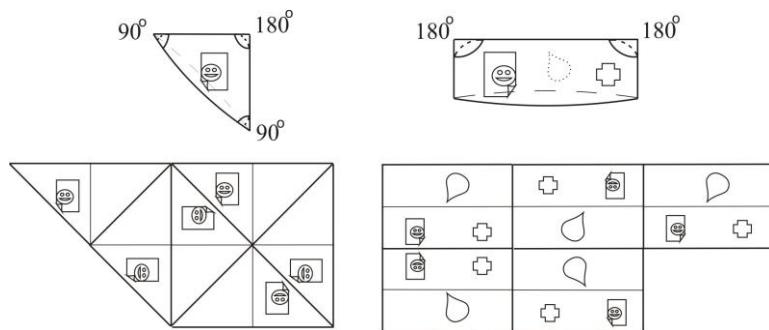


Figura 17. Los calidoscopios $D_{\overline{2}\overline{2}}$ y D_{22} y sus diseños simétricos

¹⁷ Véase en <http://www.mcescher.com/indexuk.htm>, página oficial de Escher.

LOS GRUPOS $p4g$, $p31m$ Y LOS CALIDOSCOPIOS $D_{4\bar{2}}$ Y $D_{3\bar{3}}$

Los artefactos $D_{4\bar{2}}$ y $D_{3\bar{3}}$ correspondientes a los grupos $p4g$ y $p31m$ se asemejan también a sombreros de fiesta de cumpleaños que aparecen al cortar, respectivamente, los cojines triangulares S_{244} y S_{333} a lo largo de planos de simetría (véase la Figura 18).

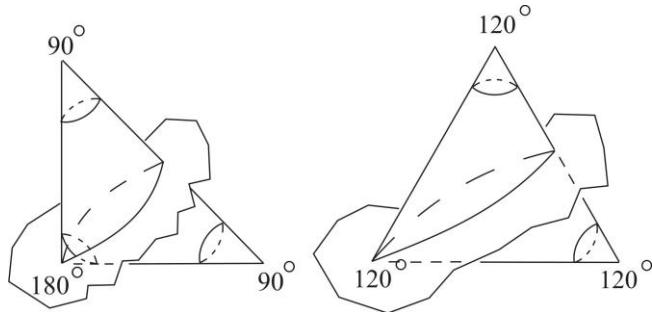


Figura 18. Planos de simetría de S_{244} y S_{333}

De nuevo $D_{4\bar{2}}$ nos indica que se tiene un cono de 90° y que hay un ángulo de 90° en el borde. Mientras que $D_{3\bar{3}}$ tiene un cono de 120° y un ángulo de 60° en el borde. De esto podemos deducir que $p4g$ se puede generar con una rotación de 90° junto con dos reflexiones a lo largo de ejes perpendiculares y, por su lado, $p31m$ está generado por una rotación de 120° junto con dos reflexiones a lo largo de ejes que forman un ángulo de 60° (obsérvese la Figura 19).

En Escher encontramos diseños con estos calidoscopios. Por ejemplo, la obra *Hombres fuertes*¹⁸ y la obra *Trabajo simétrico 45*, conocida también como *Ángeles y demonios*¹⁹, corresponden ambas al calidoscopio $D_{4\bar{2}}$. Por otro lado, el *Niño chino*²⁰ de 1936, se relaciona con a $D_{3\bar{3}}$.

¹⁸ Véase <http://www.tessellations.org/eschergallery3.htm>.

¹⁹ Véase <http://www.dartmouth.edu/~matc/math5.pattern/lesson7art.html>.

²⁰ Véase <http://www.tessellations.org/eschergallery1.htm>.

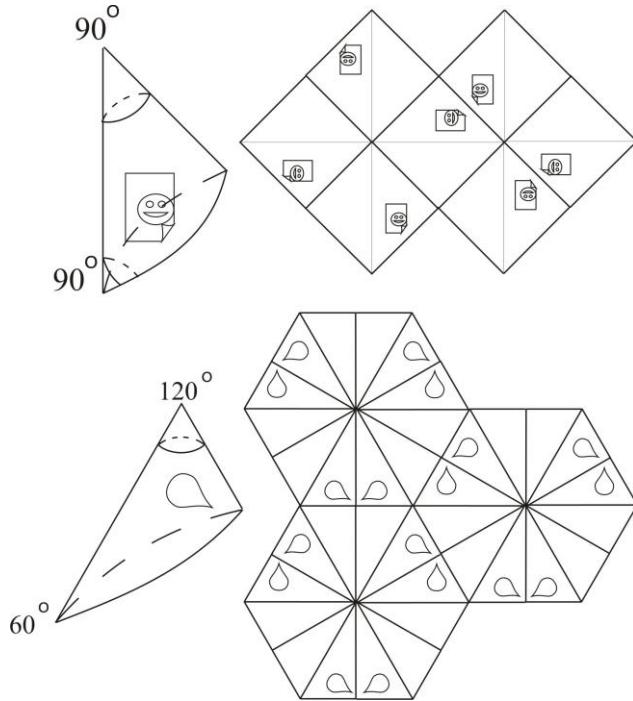


Figura 19. $D_{4\bar{2}}$ y $D_{3\bar{3}}$ con sus diseños simétricos

LOS GRUPOS pg , pgg Y LOS CALIDOSCOPIOS K Y P_{22}

Llegamos al final del listado de calidoscopios y con ello a los diseños de Escher más complejos y algunos de los más bellos. Los calidoscopios K y P_{22} son llamados, respectivamente, *botella de Klein* y *plano proyectivo*. K primera letra de Klein y P primera letra de proyectivo.

Las obras *Golondrinas* (*Swallows*) y *Jinetes*²¹ (*Horsemen*) así como *Leones alados* (*Winged lions*, en la teselación 66) y *Bulldogs*²² (en la teselación 97) son ejemplos de la botella de Klein K .

Observándolas con cuidado se detecta en ellas dos reflexiones corridas sobre ejes paralelos. Estas reflexiones se ven muy claras en la animación (que se aprecia en la misma página web) de la construcción de la baldosa básica de *León alado*. Es interesante anotar que en la construcción de la baldosa de *Bulldog* no se observa sino una única reflexión corrida la cual es seguida por una traslación. Sin embargo, así como el grupo pg , correspondiente a K , se puede

²¹ Ambas obras se aprecian en <http://www.tessellations.org/eschergallery2thumbs.htm>.

²² Se aprecian en <http://britton.disted.camosun.bc.ca/jbescher4.htm>.

generar por dos reflexiones corridas paralelas, también es posible generarlo con una sola reflexión corrida y una traslación.

Teniendo en cuenta la última observación, el artefacto K debe ser la combinación de un cilindro, que produce traslaciones, con una cinta de Möebius que produce una reflexión corrida. Para construirlo partimos de un rectángulo con cierres en sus bordes, tal cual lo ilustramos en la Figura 20.

El proceso de impresión, consiste en cerrar primero los cierres marcados con la letra A, hacer rodar la cinta de Möebius, para imprimir una cinta horizontal, y luego abrir los cierres A y cerrar los B, para hacer rodar una vuelta completa el cilindro, luego se intercambian los cierres, para imprimir de nuevo con la cinta de Möebius, y así se continúa imprimiendo alternando los cierres.

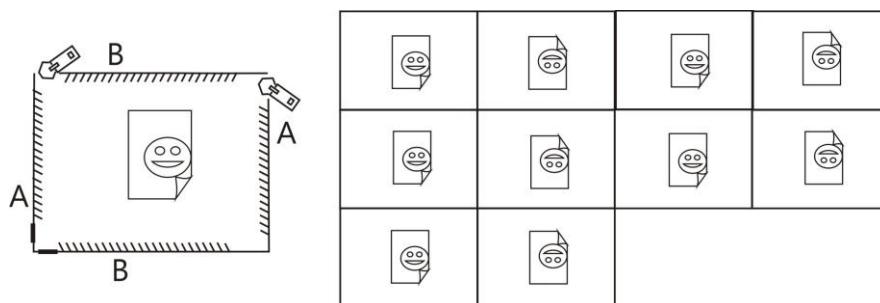


Figura 20. Botella de Klein y su diseño

Finalmente, para terminar esta sección de teselaciones planas, estudiamos el Plano Proyectivo P_{22} , que es el calidoscopio correspondiente a las obras *Leones (Lions)* y *Perros (Dogs)*.²³ Detallando éstas, encontramos que en cada una de ellas hay dos reflexiones corridas con respecto a ejes perpendiculares. Su grupo cristalográfico correspondiente es pgg . El artefacto que imprimirá un diseño de estos debe ser una combinación de dos cintas de Möebius, que deben trabajar en forma perpendicular. Al igual que en el caso anterior partimos de un rectángulo con cierres en sus bordes dispuestos como en la Figura 21. Y la operación del artefacto se hace alternando el uso de los cierres, unas veces para obtener una cinta de Möebius que imprime en forma vertical y otras veces una cinta de Möebius que imprime en forma horizontal.

²³ Véase <http://www.tessellations.org/eschergallery1thumbs.htm>.

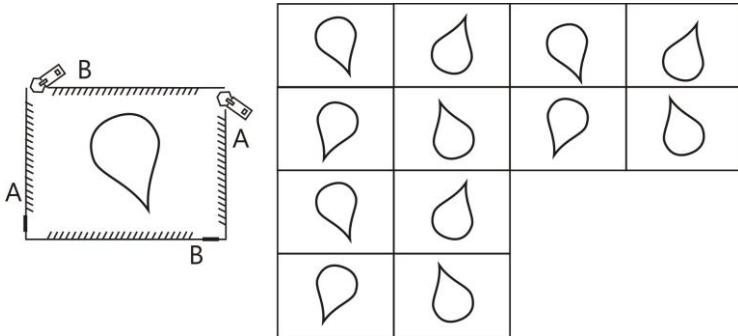


Figura 21. Plano proyectivo y su diseño

TESELACIONES EN OTRAS CURVATURAS

Así como tenemos teselaciones sobre un plano, es posible considerar teselaciones sobre otras superficies. Un plano es una superficie de curvatura constante cero. Una esfera es una superficie de curvatura constante positiva y un plano hiperbólico es una superficie de curvatura constante negativa. La Figura 22 nos muestra teselaciones hechas con triángulos en cada una de estas curvaturas.

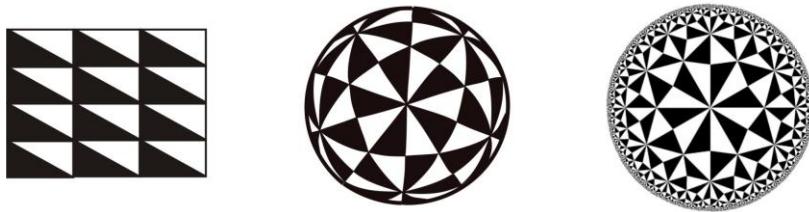


Figura 22. Teselaciones sobre superficies de distintas curvaturas

Cuando observamos las dos primeras figuras, nuestra mente reconoce que la primera de ellas cubre una superficie plana (euclídea) y que la segunda cubre una esfera. Con respecto a la tercera nuestro cerebro no tiene la experiencia y se confunde. Manteniendo la mirada sobre ella vemos a veces que los vértices de los triángulos se salen del plano y otras que se hunden en el plano y no se sabe muy bien de qué superficie se trata; esta última es una teselación del modelo de Poincaré del plano hiperbólico.

Teselaciones esféricicas

La mayoría de las teselaciones que hizo Escher son euclídeas, pero también podemos encontrar en sus trabajos teselaciones sobre esferas. Son ejemplos

una esfera esculpida en madera y teselada con peces²⁴, al igual que otra bella esfera también esculpida en madera con una teselación hecha de ángeles y demonios, cuya fotografía se encuentra en Ernst (1978, p. 41). También ubicamos una falsa teselación de una esfera²⁵; decimos que es falsa porque la figura del pez cambia de tamaño sobre la esfera, lo cual no es permitido en una verdadera teselación, ya que los movimientos son rígidos. Las teselaciones esféricas pueden también ser producidas por artefactos similares a los calidoscopios ya discutidos.

Teselaciones hiperbólicas

Escher estuvo muy obsesionado con la posibilidad de plasmar el infinito en una superficie finita esta idea repetitiva lo llevó a hacer muchas teselaciones del plano hiperbólico usando principalmente el modelo de Poincaré. El disco de Poincaré es una especie de claraboya redonda que nos permite visualizar el plano hiperbólico. Tiene la particularidad que a medida que nuestros ojos se dirigen al borde de la claraboya las figuras que observamos están cada vez más y más lejos y por eso su tamaño aparente es más pequeño. El borde corresponde al infinito.

En la teselación del plano hiperbólico (tercera figura) de la Figura 22 debemos entender que todos los triángulos tienen el mismo tamaño, sólo que los que vemos más pequeños están más alejados. En las obras *Límite circular III*, *Límite circular IV*²⁶ y *Límite circular I*²⁷ debemos entender que en cada una de ellas, todas las figuras son del mismo tamaño aunque las veamos de diferentes tamaños.

Para visualizar el plano hiperbólico existen diferentes clases de ventanas (o modelos). Además del modelo del disco de Poincaré, Escher usó el modelo del semiplano superior en la obra *División de superficie*²⁸. Lo mismo ocurre en la obra *División*²⁹. En este modelo el borde inferior está en el infinito y mientras más cerca estén las figuras a dicho borde ellas realmente están más y más lejos y por eso su tamaño aparente es más pequeño.

²⁴ Véase <http://www.dartmouth.edu/~matc/math5.pattern/lesson7art.html>.

²⁵ Véase http://aixa.ugr.es/escher/800x600/Superficie_esferica_con_peces.jpg.

²⁶ Ésta y la anterior se pueden apreciar en <http://www.arrakis.es/~sysifus/escher.html>.

²⁷ Véase http://aixa.ugr.es/escher/800x600/Limite_circular_I.jpg.

²⁸ Se aprecia en http://aixa.ugr.es/escher/800x600/Division_de_la_superficie.jpg.

²⁹ Véase <http://www.tessellations.org/eschergallery21.htm>.

Antes de enterarse de la existencia del modelo de Poincaré, Escher venía trabajando en su obsesión de plasmar el infinito en sus dibujos. En trabajos como *Evolución II*³⁰ y *Pequeño y más pequeño*³¹, Escher estaba elaborando la misma idea del infinito pero organizó las cosas de manera que las figuras más distantes estaban más cerca al centro del dibujo y por eso su tamaño es cada vez más pequeño mientras más cerca estén del centro. Estos dibujos los podemos pensar como la visión que tendríamos a la entrada de un túnel que está teselado. En su última y magistral obra *Serpientes*³² combina lo que ocurre en el disco de Poincaré con la idea de túnel teselado. Allí vemos que, aproximándonos tanto al borde como al centro del círculo mayor, los círculos que tejen la maya donde se enredan las serpientes se achican, dando la impresión de lejanía.

Para más información sobre el plano hiperbólico y el modelo de Poincaré, consultese <http://mathworld.wolfram.com/PoincareHyperbolicDisk.html> y <http://math.youngzones.org/Non-Egometry/poincare.html>. Véase también Montesinos-Amilibia (1987, 1992) y Ramírez-Galarza y Seade (2002).

Teselaciones del espacio

Así como un plano euclídeo se puede teselar, es posible teselar el espacio euclídeo. En este caso las baldosas básicas que se repiten son tridimensionales. Aunque brevemente, Escher también excursionó en el campo de teselaciones del espacio euclídeo tridimensional. Sus obras *División cúbica del espacio*³³ y *Profundidad*³⁴ hacen gala de su impresionante capacidad geométrica y son ejemplo de teselaciones del espacio euclídeo.

TESELACIONES COMO PARTES DE OTRAS OBRAS

Muchas de las teselaciones que realizó Escher eran estudios preliminares para introducirlas como parte de otras obras mucho más complejas.

En la obra *Reptiles*³⁵ vemos que se incluye, como parte de ella, la teselación plana Reptiles (boceto) mencionada en el estudio de *S₃₃₃*. Esta obra plasma

³⁰ Véase http://aixa.ugr.es/escher/800x600/Evolucion_II.jpg.

³¹ Véase <http://www.tessellations.org/eschergallery22.htm>.

³² Véase <http://aixa.ugr.es/escher/800x600/Serpientes.jpg>.

³³ Véase http://aixa.ugr.es/escher/800x600/Division_cubica_del_espacio.jpg.

³⁴ Véase en <http://www.mcescher.com/indexuk.htm>, página oficial de Escher.

³⁵ Véase <http://britton.disted.camosun.bc.ca/jbescher2.htm>.

cómo Escher se maravillaba con la idea de poder hacer dibujos con la apariencia de tres dimensiones en una superficie de sólo dos dimensiones. De forma similar y magistralmente, Escher usa la teselación de los *Leones alados* (véase la Botella de Klein K anteriormente estudiada) como parte central de su obra *El espejo mágico*³⁶ donde de nuevo se puede apreciar el juego de las tres dimensiones en dos dimensiones. Esta idea se repite en *Encuentro*³⁷ siendo la teselación del fondo también una Botella de Klein.³⁸

La serie de *Metamorfosis* (I, II y III) además de utilizar algunas teselaciones ya estudiadas por él involucra el desarrollo del concepto topológico de homotopía. Informalmente podemos decir que una homotopía es la deformación de un objeto durante un período de tiempo.

En *Metamorfosis I*³⁹, Escher retoma la teselación del *Niño chino* (véase el estudio de $D_{3\bar{3}}$) y la transforma gradualmente en un pueblo al lado de un acantilado. En *Metamorfosis II*⁴⁰ se observa la transformación de la palabra *metamorphose* pasando por diversas teselaciones y dibujos.

De carácter muy similar es la obra *Metamorfosis III*, la cual se aprecia en la página web: http://en.wikipedia.org/wiki/Metamorphosis_III.

CONCLUSIONES

Hemos visto en este artículo varias cosas:

- (1) Los grupos cristalográficos desde un punto de vista geométrico y práctico.
- (2) Una forma divertida para entender los movimientos rígidos.
- (3) Una forma práctica para imprimir diseños simétricos.
- (4) Una introducción al concepto de orbifold.
- (5) La obra de Escher como exemplificación de los grupos cristalográficos.
- (6) Una introducción rápida a otras curvaturas.

³⁶ Véase http://aixa.ugr.es/escher/800x600/Espejo_magico.jpg

³⁷ (<http://www.tessellations.org/eschergallery17.htm>)

³⁸ Invitamos al lector a visitar <http://www.mcescher.com/indexuk.htm>, página oficial de Escher.

³⁹ Véase <http://www.tessellations.org/eschergallery6.htm>.

⁴⁰ Véase la animación que recorre esta obra en <http://www.3quarks.com/Applets/Metamorphose/>.

(7) Interpretaciones diferentes, a las usuales en topología, del toro, de la cinta de Möebius, de la botella de Klein y del plano proyectivo.

REFERENCIAS

- Albis-González, V.S. y Valencia-Oviedo, J.A. (1990). Una aplicación de los grupos de simetría a la confirmación de períodos y subperíodos estilísticos en la cerámica de la región central de Panamá. *Revista de la Academia Colombiana de Ciencias*, 17(67), 703-714.
- Ernst, B. (1978). *Le miroir magique de M.C. Escher*. Berlín: Ed. Benedikt Taschen.
- Ernst, B. (1991). *Un mundo de figuras imposibles*. Berlín: Ed. Benedikt Taschen.
- Gutiérrez-Santos, M.V. (1992). *Notas de geometría*. Bogotá: Editorial de la Universidad Nacional de Colombia.
- Hilden, H.M., Montesinos, J.M., Tejada, D.M. y Toro, M.M. (2011). Artifacts for stamping symmetric designs. *American Mathematical Monthly*, 118(4). 327-343.
- Klein, C. y Hurlbut, C.S. (Jr.) (1999). *Manual of mineralogy* (after James D. Dana). (Edición 21, revisada). Nueva York: John Wiley and Son.
- Montesinos-Amilibia, J.M. (1987a). *Classical tessellations and three-manifolds*. Berlin-Heidelberg: Springer-Verlag.
- Montesinos-Amilibia, J.M. (1987b). Caleidoscopios y grupos cristalográficos en la Alhambra. *Epsilón*, volumen extra, 9-30.
- Montesinos-Amilibia, J.M. (1992). Las geometrías no euclídeas: Gauss, Lobachevski y Bolyai. *Historia de la matemática*, 65-114.
- Montesinos-Amilibia, J.M. (2003). *Calidoscopios y 3-variedades*. Bogotá: Editorial de la Universidad Nacional de Colombia.
- Montesinos-Amilibia, J.M. (2005). *Geometría en los mosaicos del Palacio de la Alhambra de Granada*. Conferencia presentada en la Cátedra Pedro Nel Gómez, Universidad Nacional de Colombia, 4 de agosto 2005, Vídeo institucional.
- Ramírez-Galarza, A.I. y Seade, J. (2002). *Introduction to classical geometries*. Berlin: Birkhauser Verlag.
- Seymour, D. y Britton, J. (1989). *Introduction to tessellations*. Palo Alto, California: Dale Seymour Publications.
- Thurston, W. (1997). *Three-dimensional geometry and topology* (vol. 1). (Editado por S. Levy). Princeton, NJ: Princeton University Press.

UN ENFOQUE GEOMÉTRICO DEL TEOREMA DE SHARKOVSKII

Eduardo Martínez y Primitivo Acosta-Humánez

Universidad Sergio Arboleda

Oscare.martinez@correo.usa.edu.co, primi@ima.usergioarboleda.edu.co

A continuación se presenta cómo la geometría de las funciones primitivas permite evidenciar los comportamientos periódicos y establecer relaciones de tipo genealógico entre períodos relacionados por el Teorema de Sharkovskii, resultado fundamental en sistemas dinámicos discretos y, de manera particular, en la dinámica minimal.

1. PRELIMINARES

La dinámica combinatoria encuentra su génesis en el artículo “Co-existencia de ciclos de transformaciones continuas en un intervalo” de Oleksandr Mykailovich Sharkovskii. Esta rama de los sistemas dinámicos estudia las relaciones algebraicas y combinatorias de funciones de \mathbb{R} en \mathbb{R} con dinámica minimal. En este contexto, las permutaciones pueden ser utilizadas para describir órbitas minimales (primarias). Por tal razón para el estudio de la dinámica combinatoria se requieren algunas definiciones del álgebra y de los sistemas dinámicos.

1.1 Sobre sistemas dinámicos

Para comprender la dinámica minimal es necesario establecer previamente las definiciones de órbita, punto fijo, punto periódico y, a manera de noción, el caos (ver Devaney, 2003; Alseda, Llibre y Misiurewicz, 2005).

Definición 1.1.1. (Órbita): La órbita de x es el conjunto de puntos $x, f(x), f^2(x), \dots$ y se denota como $O^+(x)$. Si f es un homeomorfismo, definimos la órbita de $x, O(x)$, como el conjunto de puntos $f^n(x)$ para $n \in \mathbb{Z}$, y la órbita hacia atrás de $x, O^-(x)$, como el conjunto de puntos $x, f^{-1}(x), f^{-2}(x), \dots$.

Definición 1.1.2. (Punto fijo y periódico): El punto x se dice fijo para f si $f(x)=x$, es periódico de período n si $f^n(x)=x$. El menor entero positivo n que cumpla esta igualdad se denomina período primo de x . El conjunto de puntos

Martínez, E. y Acosta-Humánez, P. (2011). Un enfoque geométrico del Teorema de Sharkovskii. En P. Perry (Ed.), *Memorias del 20º Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones* (pp. 77-84). Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

periódicos de período n se denomina $\text{Per}_n(f)$. El conjunto de todas las iteraciones de un punto periódico forman una órbita periódica.

Por ejemplo, en la función $f(x)=x^3$, los puntos -1, 0 y 1 son puntos fijos. De manera similar, la función $g(x)=x^2-1$ tiene puntos fijos en -1 y 1 los puntos 0 y -1 forman una órbita periódica de período 2.

Si bien es cierto que el comportamiento caótico de una función se establece a través de transitividad topológica, dependencia sensible y densidad de sus puntos periódicos, los períodos de una función permiten entender también el comportamiento caótico de una función (este resultado se deriva del Teorema de Sharkovskii o del resultado encontrado por Li y Yorke sobre el período 3) (ver Block y Coppel, 1986).

1.2. Sobre álgebra y combinatoria

Definición 1.2.1. (Permutaciones): Si X es un conjunto no vacío, una permutación de X es una biyección $\alpha:X \rightarrow X$. Llamamos al conjunto de todas las permutaciones de X como S_X . Si $X=\{1, 2, \dots, n\}$ se acostumbra denotar al conjunto de permutaciones de X como S_n .

Definición 1.2.2. (Partición): Se define la partición de un intervalo como el conjunto

$$P_n = \{x_i, x_{i+1} \in \mathbb{R} : x_i < x_{i+1}, \forall i=1, \dots, n-1\}.$$

Definición 1.2.2. Partición de un intervalo

Estas definiciones son necesarias para establecer el conjunto de Permutaciones asociado a una función y el forzamiento entre conjuntos de permutaciones, concepto necesario para dar una interpretación algebraica al Teorema de Sharkovskii.

Definición 1.2.3. (Conjunto de permutaciones): El conjunto de permutaciones de una función f , denotado por $\text{Perm}(f)$, está definido de la siguiente manera: Una permutación $\theta \in \text{Perm}(f)$ si y sólo si existe una partición P_n tal que $f(x_i)=x_{\theta(i)}$, donde $x_i, x_{\theta(i)} \in P_n$. Es decir,

$$\text{Perm}(f) = \left\{ \theta : f(x_i) = x_{\theta(i)}, x_i, x_{\theta(i)} \in P_n \right\}.$$

Definición 1.2.3. Conjunto de permutaciones de f

Definición (Forzamiento): Sean $\theta, \eta \in S_n$, P_θ y P_η definidos como $P_\theta = \{f : \theta \in \text{Perm}(f)\}$, $P_\eta = \{g : \eta \in \text{Perm}(g)\}$. θ fuerza a η ($\theta \triangleleft \eta$) si y sólo si $P_\eta \subset P_\theta$.

2. DINÁMICA COMBINATORIA

Un apartado importante de los sistemas dinámicos es aquel que corresponde al estudio del comportamiento caótico. Previamente establecimos la posibilidad de acercarnos a dicho comportamiento a través de órbitas periódicas. Veremos como el Teorema de Sharkovskii relaciona (fuerza) la existencia de órbitas periódicas y cómo estas pueden ser estudiadas a través de grafos de Markov y funciones primitivas.

2.1. Teorema de Sharkovskii

En marzo de 1962 se publicó el artículo “Coexistence of cycles of a continuous map of the line into itself”. En este artículo Sharkovskii define una relación de orden para los números enteros positivos (\prec) en la que $\eta_1 \prec \eta_2$ si la existencia de un ciclo de orden η_1 implica la existencia de uno de orden η_2 (ver Sharkovskii, 1964; Stefan, 1977; Misiurewicz, 1995).

Teorema 2.1.1. (Orden de Sharkovskii): La relación definida previamente (\prec) transforma el conjunto de los enteros positivos en un conjunto ordenado de la siguiente manera:

$$3 \prec 5 \prec 7 \prec 9 \prec 11 \prec \dots \prec 3 \times 2 \prec 5 \times 2 \prec \dots \prec 3 \times 2^2 \prec 5 \times 2^2 \prec \dots \prec 2^3 \prec 2^2 \prec 2 \prec 1.$$

Teorema 2.1.1. Orden de Sharkovskii

Esto quiere decir que al encontrar un ciclo de orden n en una función, existen en ella ciclos de orden m , con $n \prec m$.

Los grafos de Markov son utilizados para estudiar la estructura de las órbitas periódicas. Estos describen a la órbita periódica a través de las relaciones existentes entre las particiones que la definen y sus imágenes (ver Bernhardt, 1984; Acosta-Humánez, 2008).

Definición 2.1.2. (Grafo de Markov). Sean $x_i, x_{i+1} \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \dots, n-1$ tales que $x_i < x_{i+1}$, y $\theta \in \text{Perm}(f)$. El Grafo de Markov (también conocido como grafo dirigido) de f y θ tiene $n-1$ vértices J_1, J_2, \dots, J_{n-1} . Existirá una flecha de J_k a J_l si y sólo si $[x_l, x_{l+1}] \subseteq f([x_k, x_{k+1}])$.

Si bien es cierto que el teorema de Sharkovskii establece la existencia de órbitas periódicas y garantiza la existencia de nuevos períodos a partir de períodos conocidos, no es tarea fácil encontrar funciones continuas de \mathbb{R} en \mathbb{R} con dichos comportamientos (el lector puede tratar de encontrar una función continua con un punto de período 10, por ejemplo). Las funciones primitivas permiten encontrar ejemplos de funciones con comportamientos periódicos a partir de una órbita establecida. Su construcción está inspirada en las funciones que Sharkovskii utilizó para la demostración de su teorema.

Definición 2.1.3. (Función Primitiva): Dada una permutación $\theta \in S_n$ la función primitiva \bar{f} asociada está definida de la siguiente manera:

- (1) $f(k) = \theta(k)$;
- (2) $f(tk + (1-t)(k+1)) = t\theta(k) + (1-t)\theta(k+1)$;
- (3) $f(x) = \theta(1)$, si $x < 1$;
- (4) $f(x) = \theta(n)$, si $x > n$; donde $k = 1, \dots, n$ y $0 \leq t \leq 1$.

Definición 2.1.3. Función primitiva \bar{f} asociada a f

2.2. Aplicación al análisis de órbitas

A continuación aplicaremos los grafos de Markov y las funciones primitivas para interpretar el Teorema de Sharkovskii. Dada una permutación θ , estableceremos su función primitiva y a través de ella su grafo de Markov (ver Acosta-Humánez y Martínez, sometido a consideración), para así poder evidenciar en ella el Teorema de Sharkovskii.

Ejemplo 2.2.1. Consideremos la permutación $\theta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. La función primitiva asociada \bar{f} es:

$$\bar{f}(x) = \begin{cases} 6 & \text{si } x < 1 \\ -2x + 8 & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ x + 2 & \text{si } 2 \leq x < 3 \\ -4x + 17 & \text{si } 3 \leq x < 4 \\ x - 3 & \text{si } 4 \leq x < 6 \\ 3 & \text{si } x \geq 6 \end{cases}$$

Ejemplo 2.2.1. Función primitiva \bar{f} asociada a $\theta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

Y su gráfica es:

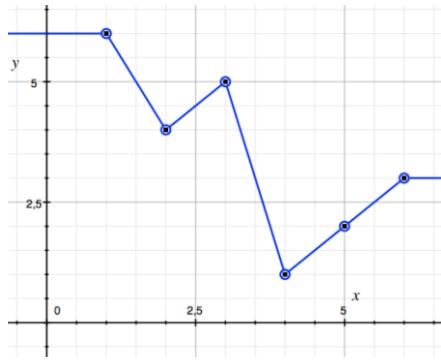


Figura 1. Gráfica de función primitiva \bar{f} asociada a $\theta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

Los intervalos para construir el Grafo de Markov de f y θ son: $J_1 = [1, 2]$, $J_2 = [2, 3]$, $J_3 = [3, 4]$, $J_4 = [4, 5]$, $J_5 = [5, 6]$. Se puede ver que: $\bar{f}(J_2) = J_4$, $\bar{f}(J_4) = J_1$, $\bar{f}(J_5) = J_2$, $\bar{f}(J_1) \supseteq J_4$, $\bar{f}(J_1) \supseteq J_5$, $\bar{f}(J_3) \supseteq J_1$, $\bar{f}(J_3) \supseteq J_2$, $\bar{f}(J_3) \supseteq J_4$, $\bar{f}(J_3) \supseteq J_5$.

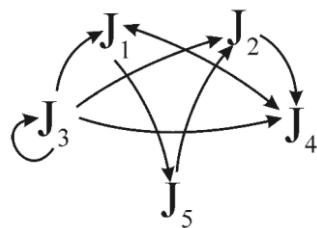


Figura 2. Grafo de Markov asociado a $\theta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

Gracias a estas representaciones es posible evidenciar, por ejemplo, la existencia de: un punto fijo en J_3 , una órbita de segundo orden en J_1 y J_4 y una órbita de orden 4 en J_1, J_5, J_2 y J_4 .

Ejemplo 2.2.2. Veremos a continuación un ejemplo en el que el grafo de Markov y la función primitiva nos permitirán conocer comportamientos no contemplados en el teorema de Sharkovskii y encontrar que una función es caótica. Consideremos la permutación $\eta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$. La función primitiva asociada \bar{g} es:

$$\bar{g}(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x < 1 \\ x+1 & \text{si } 1 \leq x < 3 \\ 13-3x & \text{si } 3 \leq x < 4 \\ 1 & \text{si } x \geq 4 \end{cases}$$

Ejemplo 2.2.2. Función primitiva \bar{g} asociada a $\eta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

Y su gráfica es:

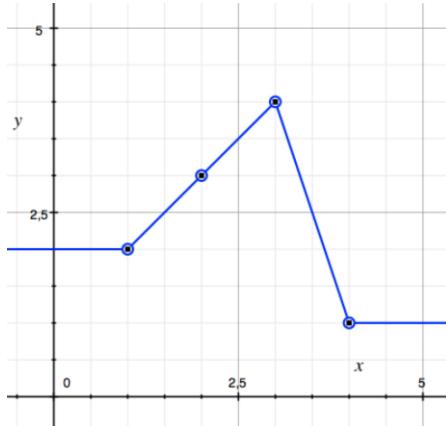


Figura 3. Función primitiva \bar{g} asociada a $\eta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

Los intervalos para construir el grafo de Markov de g y η son: $J_1 = [1, 2]$, $J_2 = J_1 = [1, 2]$, $J_2 = [2, 3]$, $J_3 = [3, 4]$. Se puede ver que: $f(J_1) \supseteq J_2$, $f(J_2) = J_3$ y $f(J_3) = J_1 \cup J_2 \cup J_3$.

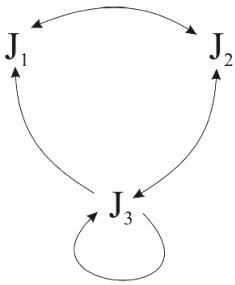


Figura 4. Grafo de Markov asociado a $\eta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

Gracias a estas representaciones es posible evidenciar la existencia de una órbita de orden 3 en J_1 , J_2 y J_3 . Si bien es cierto que el Teorema de Sharkovskii permite afirmar a partir de η la existencia de órbitas de período 2 y 1, el grafo de Markov permitió hallar una órbita de período 3 y, por ende, la existencia de órbitas de todos los períodos.

REFERENCIAS

- Acosta-Humánez, P. (2008). Genealogía de permutaciones simples de orden una potencia de dos. *Revista Colombiana de Matemáticas*, 42(1), 1-13.
- Acosta-Humánez, P. y Martínez, E. *Simple permutations with order 4n+2*. (Sometido a consideración). <http://arxiv.org/abs/1012.2076>
- Alsedà, Ll., Llibre, J. y Misiurewicz, M. (2005). *Combinatorial dynamics and entropy in dimension one*. Singapur: World Scientific Publishing.
- Bernhardt, C. (1984). Simple permutations with order a power of two. *Ergodic Theory and Dynamic Systems*, 2, 179-186.
- Block, L. y Coppel, W. (1986). *Dynamic in one dimension*. Nueva York, USA: Springer Verlag.
- Devaney, R. (2003). *An introduction to chaotic dynamical systems*. Colorado, USA: Westview Press.
- Misiurewicz, M. (1995). Thirty years after Sharkovskii's theorem. En Ll. Alsedà, J. Llibre, F. Balibrea y M. Misiurewicz (Eds.), *Proceedings of the Conference "Thirty years after Sharkovskii's theorem: New perspectives"*. Singapur: World Scientific.
- Sharkovskii, A. (1964). Coexistence of cycles of a continuous map of the line into itself, *Ukrain Math. Z*, 16, 61-71.

Stefan, P. (1977). A theorem of Sharkovskii on the existence of periodic orbits of continuous endomorphisms of the real line. *Communications in Mathematical Physics*, 54, 237-248.

DE LOS ESPACIOS TOPOLÓGICOS A LAS CATEGORÍAS TOPOLOGICAS

Reinaldo Montañez

Universidad Nacional de Colombia

jrmontanezp@unal.edu.co

A partir de un espacio topológico y haciendo uso de las topologías iniciales y finales se muestra la manera de construir subcategorías topológicas de la categoría de los espacios topológicos Top. Las categorías construidas resultan además subcategorías reflexivas y correflexivas en Top.

INTRODUCCIÓN

La esencia de una categoría topológica es la existencia de estructuras iniciales y finales que generalizan los conceptos de topologías iniciales y finales.

Podemos decir que la topología categórica se inicia con los trabajos de Bourbaki; trabajos más recientes se encuentran en Adámek, Herrlich y Strecker (1990) y Preuss (1988). Las categorías de los espacios topológicos uniformes y de proximidad son ejemplos de categorías topológicas fibradas sobre la categoría de los conjuntos.

En este trabajo se pretende dar información acerca del uso de la estructura de categoría topológica para construir endofuntores idempotentes en la categoría de los espacios topológicos Top, que hemos denominado *elevadores de estructura*. Las imágenes de estos funtores dan origen a subcategorías topológicas, que además resultan reflexivas y correflexivas en Top. En particular, las categorías de los espacios secuenciales y los espacios completamente regulares resultan de estas construcciones. Es de anotar que este trabajo toma como base las referencias Montañez y Ruiz (2006) y Montañez (2007).¹

¹ El autor agradece al Dr. Carlos Javier Luis Salguero los comentarios y sugerencias para la realización de este trabajo.

Montañez, R. (2011). De los espacios topológicos a las categorías topológicas. En P. Perry (Ed.), *Memorias del 20º Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones* (pp. 85-91). Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

NOCIONES BÁSICAS

La noción de categoría topológica

Definición: Sea $F : \mathcal{C} \rightarrow D$ un funtor. Se dice que F es un funtor topológico y que \mathcal{C} es una categoría topológica relativa a F y a D , si cumplen las siguientes condiciones:

- I) F es fiel.
- II) F es apto para construir estructuras iniciales y finales de fuentes y sumideros unitarios.
- III) Para cada objeto X de D , la fibra $Fib(X)$ tiene estructura de retículo completo.

Esta definición corresponde a una caracterización del funtor topológico dado en Adámeck, Herrlich y Streker (1990), (ver Ardila, Montañez y Ruiz, 2000). Para el caso de la categoría Top, la condición [II] se traduce de la existencia de topologías iniciales y finales.

Observación

- (i) Para facilitar la comprensión de algunas definiciones y resultados del trabajo, los objetos y morfismo de una categoría topológica los notaremos en negrilla y su imagen por el funtor los escribiremos sin negrilla. Por ejemplo, en la categoría de los espacios topológicos $f : X \rightarrow Y$ simboliza una función continua y $f : X \rightarrow Y$ su función correspondiente en la categoría de los conjuntos.
- (ii) Este trabajo toma como punto de partida la categoría de los espacios topológicos. Así que en adelante estará implícito el funtor olvido de estructura y su codominio que corresponde a la categoría de los conjuntos. En particular la categoría de los espacios topológicos es un constructo topológico (Adámeck, Herrlich y Streker, 1990), lo cual significa que es una categoría topológica fibrada sobre la categoría de los conjuntos, en la cual sobre un conjunto unitario hay una única estructura. Decir que K es una subcategoría topológica de Top , significa que el funtor olvido restringido a K es un funtor topológico.

Ejemplos

1. La categoría Top de los espacios topológicos y funciones continuas es una categoría topológica fibrada con el funtor de olvido, sobre la categoría de los conjuntos. Este es el ejemplo que motiva la definición de categoría topológica.
2. Las categorías de los espacios uniformes, pretopológicos y pseudotopológicos son categorías topológicas fibradas sobre la categoría de los conjuntos (Adámek, Herrlich y Streker 1990).

Subcategorías reflexivas y correflexivas

Definición: Sea \mathcal{C} una categoría y H una subcategoría de \mathcal{C} . Se dice que H es reflexiva en \mathcal{C} , si para todo objeto V en \mathcal{C} existe un objeto V^* en H y un morfismo $r_v : V \rightarrow V^*$, llamado la reflexión de V , tal que para cualquier objeto U de H y cualquier morfismo $f : V \rightarrow U$ existe un único morfismo $f^* : V^* \rightarrow U$ tal que $f^* \circ r_v = f$ (Adámek, Herrlich y Streker, 1990).

Puede observarse fácilmente que la reflexión de cada objeto es única salvo isomorfismos.

La siguiente proposición caracteriza las categorías reflexivas.

Proposición: H es una subcategoría reflexiva de \mathcal{C} , si y solamente si, el funtor de inclusión $I : H \rightarrow \mathcal{C}$ admite adjunto a izquierda. (Adámek, Herrlich y Streker, 1990)

De manera dual se tiene la definición de subcategoría correflexiva H y su caracterización correspondiente.

Ejemplos

La categoría de los espacios compactos de Hausdorff es una subcategoría reflexiva de la categoría de los espacios completamente regulares.

SUBCATEGORÍAS TOPOLÓGICAS GENERADAS A TRAVÉS DE TOPOLOGÍAS INICIALES Y FINALES

La noción de elevador de estructura

Definición: Sea $F : \mathcal{C} \rightarrow D$ un funtor topológico y sea $E : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ un funtor. Diremos que E es un elevador de estructura si se satisfacen las siguientes condiciones:

1. $F \circ E = F$.
2. $X \leq E(X)$ para todo objeto X de \mathcal{C} .

La condición (1.) implica, entre otros, que E es un funtor concreto y por lo tanto fiel, además que E respeta las fibras, esto es, $E(X) \in Fib(X)$ para todo objeto X de \mathcal{C} .

Análogamente se dice que un funtor $C : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ es un *coelevador de estructura* si $F \circ C = F$ y para todo objeto X de \mathcal{C} se tiene que $C(X) \leq X$.

En adelante, nos referiremos a los funtores elevadores (coelevadores) de estructura simplemente como elevadores (coelevadores).

Nota. Es de anotar que a pesar de la sencillez de la noción de elevador de estructura, no la hemos encontrado referenciada de manera explícita en la literatura.

Un funtor E definido en Top se dice idempotente si $E \circ E = E$. Nótese que en tal caso los puntos fijos de E coinciden con su imagen. La subcategoría plena de Top formada por los puntos fijos de E se notará $E(Top)$ y a esta nos referiremos como la subcategoría de Top generada por E .

Como se verá más adelante los puntos fijos de elevadores y coelevadores idempotentes generan categorías topológicas. Sin embargo, el siguiente teorema que se constituye en uno de los resultados centrales usa funtores con menos propiedades.

Teorema: Sea $E : Top \rightarrow Top$ un funtor concreto e idempotente. Entonces, $E(Top)$ es una categoría topológica y una subcategoría correflexiva de Top .

De manera dual se obtienen los resultados para coelevadores idempotentes definidos en *Top*.

Elevadores idempotentes generados por espacios topológicos y subcategorías asociadas

Haciendo uso de estructuras finales, los espacios topológicos definen elevadores como se ilustra a continuación.

Sean W y X espacios topológicos. En la colección de funciones continuas se obtiene el sumidero que notamos $S_{(W,X)} = \{f : W \rightarrow X \mid f \in [W, X]_{Top}\}$. La estructura final para $S_{(W,X)}$ la notaremos $F_{S_{(W,X)}}$.

Es natural que $F_{S_{(W,X)}}$ resulte un espacio con topología más fina que la de X .

Otro detalles que se pueden resaltar es que las funciones continuas de W en X y de W en $F_{S_{(W,X)}}$ coinciden. Estos hechos se consideran en los siguientes lemas, que finalmente van a permitir definir un elevador idempotente a partir de W , haciendo uso de estructuras finales.

Lema. Sean W y X espacios topológicos entonces $X \leq F_{S_{(W,X)}}$.

Lema. Sean W y X espacios topológicos entonces

$$[W, X]_{Top} \cong [W, F_{S_{(W,X)}}]_{Top}$$

Nótese que este lema está diciendo que el proceso de tomar estructuras finales, con el proceso antes descrito, es idempotente.

Teorema: Sea W un espacio topológico. La aplicación $E_w : Top \rightarrow Top$ definida por $E_w(X) := F_{S_{(W,X)}}$ y $E_w(f) := f$ define a E_w como un elevador idempotente en *Top*.

De manera dual, haciendo uso de estructuras iniciales, un espacio topológico da origen a un coelevador idempotente, con lo que se obtienen los resultados duales a los del teorema anterior.²

² A. Oostra (1995) ha publicado otros trabajos que relacionan subcategorías generadas a través de estructuras iniciales y temas afines.

Observación

En general si $\{\mathbf{W}_i\}_{i \in J}$ es una familia de espacios topológicos, se determina un elevador idempotente $E_{(\mathbf{W}_i)}$, el cual se define asociando a cada espacio topológico X la estructura final para el sumidero $\{f : \mathbf{W}_i \rightarrow X \mid \mathbf{f} \in [\mathbf{W}_i, \mathbf{X}]_{Top}\}_{i \in J}$; en funciones continuas el funtor se define por $E_{(\mathbf{W}_i)}(\mathbf{f}) = \mathbf{f}$.

Más aún, con este mismo método, una clase de espacios topológicos \mathcal{C} determina un elevador idempotente Ee en Top . En efecto, puesto que para todo conjunto X la colección de topologías sobre X es un conjunto, para cada espacio topológico X se determina el conjunto $\{E_w(X) \mid \mathbf{W} \in \mathcal{C}\}$; $Ee(X)$ corresponde a la intersección de los elementos de este conjunto.

De manera dual se obtienen los resultados para coelevadores definidos en Top .

La siguiente proposición establece una adjunción entre las categorías generadas por un elevador y un coelevador representables por un mismo espacio topológico.

Proposición: Sea \mathbf{W} un espacio topológico. Existe una adjunción entre las categorías $C_w(Top)$ y $E_w(Top)$, más exactamente el funtor

$$C_w : E_w(Top) \rightarrow C_w(Top)$$

es adjunto a izquierda del funtor

$$E_w : C_w(Top) \rightarrow E_w(Top)$$

Ejemplos

1. Consideremos el espacio de Sierpinski $\mathbf{S} = (S, \tau)$ donde $\tau = \{\emptyset, \{0, 1\}, \{1\}\}$. Entonces, $C_s(Top) = Top$.
2. Sea \mathcal{C} la clase de los espacios compactos. La categoría de los k -espacios corresponde a la categoría generada por el elevador determinado por \mathcal{C} en Top .
3. Sea A la clase de los espacios compactos de Hausdorff. La categoría de los espacios de Kelley corresponde a la categoría generada por el elevador determinado por A en Top .

4. Consideremos $\mathbb{N}_\infty = \{0, 1, 1/2, \dots, 1/n, \dots\}$ como subespacio del conjunto de los números reales \mathbb{R} con su topología usual. La categoría $E_{\mathbb{N}_\infty}(Top)$ corresponde a la categoría de los espacios secuenciales.
5. Sea I el intervalo $[0,1]$ con su topología usual. La categoría $C_i(Top)$ corresponde a la categoría de los espacios completamente regulares.
6. La categoría de los espacios de proximidad $Prox$ es isomorfa a la categoría de los espacios completamente regulares, ver por ejemplo Willard (1970). Por lo tanto $Prox$ es una categoría topológica.
7. La categoría de los espacios uniformes $Unif$ es isomorfa a la categoría de los espacios completamente regulares, ver por ejemplo Willard (1970). Por lo tanto $Unif$ es una categoría topológica.

REFERENCIAS

- Adámek, J., Herrlich, H. y Streker, G. (1990). *Abstract and concrete categories*. New York, USA: John Wiley and Sons Inc.
- Ardila, V., Montañez, J. y Ruiz, C. (2000). Nociones equivalentes de categorías topológicas. *Boletín de Matemáticas*, VII(1), 19-27.
- Montañez, R. (2007). *Funtores, elevadores y coelevadores de estructura*. Tesis de doctorado no publicada, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, Colombia.
- Montañez, R. y Ruiz, C. (2006). Elevadores de estructura. *Boletín de Matemáticas*, 13, 111-135.
- Oostra, A. (1995). Subcategoría generadas mediante estructuras iniciales. *Lecturas Matemáticas*, 16, 63-72.
- Preuss, G. (1988). *Theory of topology structures*. Dordrecht, The Netherlands: D. Reidel Publishing Company.
- Willard, S. (1970). *General topology*. Londres, Gran Bretaña: Adison Wesley Publishing Company.

ACERCA DEL TRIÁNGULO DE PASCAL

Reinaldo Núñez

Universidad Sergio Arboleda

reinaldo.nunez@usa.edu.co, reinaldonunez@gmail.com

El Triángulo de Pascal es un concepto que se “ve” en la secundaria cuando se desarrolla $(a+b)^n$ o algunas veces como una simple curiosidad. Se quiere mostrar parte de la riqueza matemática que ofrece este triángulo para partir una construcción, explorar diferentes sucesiones, hacer extensiones a los enteros módulo n y sus relaciones con el triángulo Sierpinski; también es útil, mediante un proceso de *copia*, para construir la pirámide de Pascal para el desarrollo de $(a+b+c)^n$ y algunas relaciones matriciales.

RESEÑA HISTÓRICA

El Triángulo de Pascal debe su nombre al matemático Blaise Pascal, siglo XVII, sin embargo, varios matemáticos antes de Pascal ya lo conocían y aplicaban este conocimiento. Por ejemplo, en China y Persia lo descubrieron de forma independiente alrededor del siglo XI. Chia Hsien (ca. 1050), un matemático chino, demostró que el Triángulo se podía usar para extraer raíces cuadradas y cúbicas de números; varios algebristas chinos usaban el triángulo para resolver ecuaciones de orden superior a tres. El Triángulo de Pascal fue escrito de la forma como lo conocemos por el matemático chino Zhu Shijie.

UNA CONSTRUCCIÓN DEL TRIÁNGULO DE PASCAL

Una forma de construir el Triángulo de Pascal consiste en usar técnicas de conteo. Observemos el siguiente desarrollo:

$$\begin{aligned}(a+b)^3 &= (a+b)(a+b)(a+b) \\&= (aa+ab+ba+bb)(a+b) \\&= aaa + aab + aba + abb + baa + bab + bba + bbb \\&= aaa + (aab + aba + baa) + (abb + bab + bba) + bbb \\&= 1 \cdot a^3 + 3 \cdot a^2b + 3 \cdot ab^2 + 1 \cdot b^3\end{aligned}$$

$$= \binom{3}{3}a^3 + \binom{3}{2}a^2b + \binom{3}{1}ab^2 + \binom{3}{0}b^3$$

A partir de esto se tiene que la última expresión está dada por la siguiente regla de conteo: en cada desarrollo se cuentan las a que se encuentran en cada factor, es decir:

- Para el primer factor se tiene que su expresión es $aaa = 1 \times a^3$, en ésta se encuentran tres (3) letras a , luego se expresa como $\binom{3}{3}$.
- En el segundo factor se tiene $aab + aba + baa = 3 \times a^2b$ y en cada uno de los tres (3) sumandos hay dos (2) a , luego se expresa como $\binom{3}{2}$.
- En el tercer factor se tiene $abb + bab + bba = 3 \times ab^2$ y en cada sumando hay dos (1) a , luego se expresa como $\binom{3}{1}$.
- En el último factor bb tenemos que no hay ninguna a , luego se expresa $\binom{3}{0}$.

De forma general, si se continuara con esta construcción se tendría la representación del Triángulo de Pascal que se muestra en la Figura 1. El Triángulo de Pascal puede expresarse en forma de triángulo isósceles como en la Figura 2.

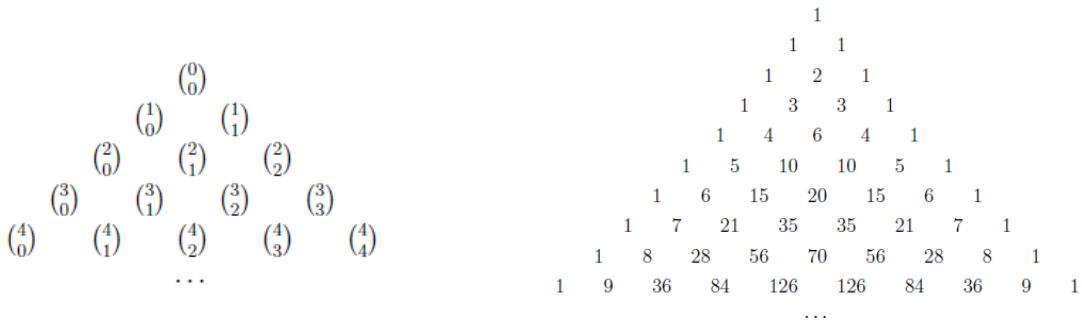


Figura 1. Triángulo de Pascal combinatoria

Figura 2. Triángulo de Pascal isósceles

También se puede conocer en forma de un triángulo rectángulo.

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1
1 9 36 84 126 126 84 36 9 1
...

Figura 3. Triángulo de Pascal rectángulo

EXPLORACIÓN

Triángulo de Sierpinski

El Triángulo de Sierpinski es un fractal construido a partir de cualquier triángulo.

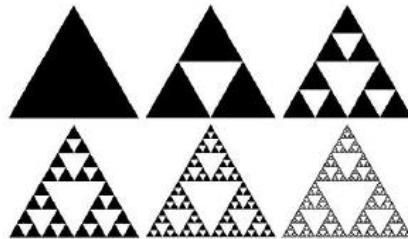


Figura 4. Construcción del Triángulo de Sierpinski

Ahora bien, tomando el Triángulo de Pascal y seleccionando un color para los números impares y otro para los pares se encuentra una relación muy particular con el anterior fractal.

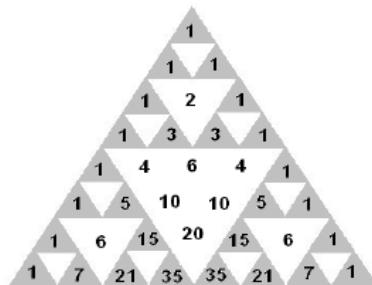


Figura 5. Triángulo de Pascal su relación con el triángulo de Sierpinski

Sucesiones del Triángulo de Pascal

Sucesión de Número de Fibonacci

La sucesión de Fibonacci es 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21,... Cada número de la sucesión está dada por la suma de los dos anteriores. En el Triángulo de Pascal se pueden encontrar los números de esta sucesión de la siguiente forma: primero debe situarse un uno en el triángulo, posterior a esto se toma el número sobre éste y se traslada al lado derecho, obteniendo así un número de la sucesión de Fibonacci.

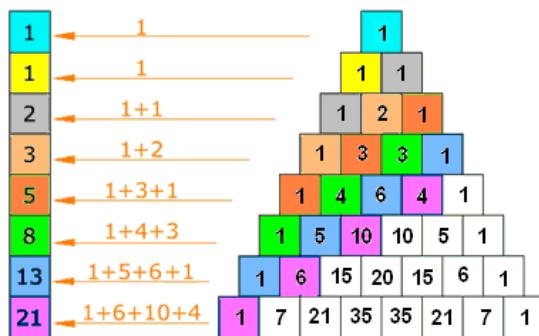


Figura 6. Sucesión de Fibonacci en el Triángulo de Pascal

Otras sucesiones

En la siguiente representación del Triángulo de Pascal se pueden observar sucesiones como: la constante (en la primera columna); los números naturales (segunda columna); números triangulares (tercera columna) y los números tetraédricos en la columna cuatro.

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1
1 9 36 84 126 126 84 36 9 1
...

Figura 7. Triángulo de Pascal y otras sucesiones

REPRESENTACIÓN DEL TRIÁNGULO EN Z_2 Y Z_3

La siguiente es la construcción del Triángulo de Pascal en Z_2 y Z_3 ; estas construcciones tienen un patrón parecido al del triángulo de Sierpinski.

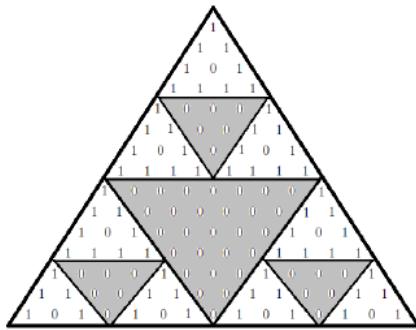


Figura 8. Representación del Triángulo de Pascal en Z_2

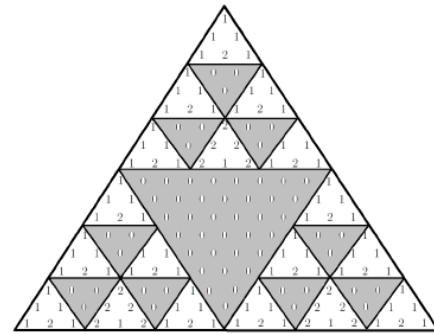


Figura 9. Representación del Triángulo de Pascal en Z_3

LA PIRÁMIDE DE PASCAL

La Pirámide de Pascal se construye de la siguiente manera: colocamos en la punta un uno (1). Para el siguiente nivel colocamos 1 en cada esquina del triángulo. El tercer y cuarto nivel se construyen sumando los números que están en los lados laterales del triángulo como se muestra en la Figura 10.

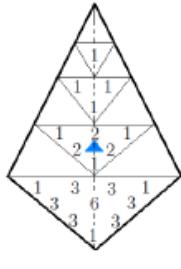


Figura 10. Pirámide de Pascal 1

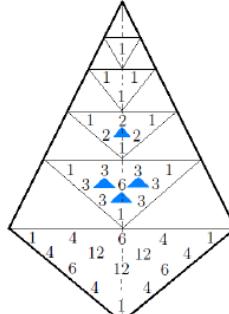


Figura 11. Pirámide de Pascal 2

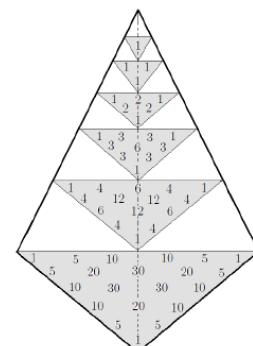


Figura 12. Pirámide de Pascal

Continuando el procedimiento anterior se tienen los niveles quinto y sexto, obteniendo la pirámide que se muestra en la Figura 11. Finalmente se tiene la pirámide de la Figura 12.

Ahora bien, desarrollando $(a + b + c)^n$ se puede ver que se obtienen los números de la pirámide anterior.

$$\begin{aligned}
 (a+b+c)^0 &= 1 \\
 (a+b+c)^1 &= a+b+c \\
 (a+b+c)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 + 2ac + 2bc + c^2 \\
 (a+b+c)^3 &= a^3 + 3a^2b + 3a^2c + 3ab^2 + 6abc + 3ac^2 + b^3 + 3b^2c + 3bc^2 + c^3 \\
 (a+b+c)^4 &= a^4 + 4a^3b + 4a^3c + 6a^2b^2 + 12a^2bc + 6a^2c + 3ab^3 + 12abc^2 + 4ac^3 + \\
 &\quad 4ab^3 + b^4 + 4b^3c + 6b^2c^2 + 4bc^3 + c^4
 \end{aligned}$$

MATRICES DE PASCAL

Las Matrices de Pascal son matrices infinitas que contienen los coeficientes binomiales. Algunos ejemplos:

Ln: Son matrices expresadas de forma triangular inferior.

$$L_1 = (1), \quad L_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad L_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad L_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Figura 13. Matrices de Pascal inferiores

Un: Son matrices expresadas de forma triangular inferior.

$$U_1 = (1), \quad U_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad U_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad U_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Figura 14. Matrices de Pascal superiores

Ln × Un

$$P_n \text{ definida como } \left\{ \begin{array}{ll} p_{i1} = 1 = p_{ij} = 1 & \text{Si } ij > 1 \\ p_{ij} = p_{i-1,j} + p_{i,j-1} & \end{array} \right\}$$

GEOMETRÍA AFÍN Y TOPOLOGÍA DEL PRISMATOIDE PENTAGONAL

Luis-Enrique Ruiz-Hernández

Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia

leruizh@yahoo.es

Si \mathcal{P} es el prismatoide pentagonal, se investiga la geometría y topología de $f(\mathcal{P})$, donde f es un automorfismo afín de \mathbb{R}^3 , introduciendo una norma φ sobre \mathbb{R}^3 , respecto a la cual $f(\mathcal{P})$ es una esfera. La representación unificada de φ en términos de tres vectores linealmente independientes en \mathbb{R}^3 (con la inefable presencia del número de oro), permite, en particular, describir a \mathcal{P} como un lugar geométrico cuyos puntos satisfacen ciertas condiciones de proyección orthogonal sobre las rectas perpendiculares a pares de caras opuestas de \mathcal{P} a través de sus centros. Al abordar la estereometría del sólido afín, se encuentra una representación del circunelipsoide y el volumen de $f(\mathcal{P})$, aplicando un importante resultado de las transformaciones afines. Específicamente se obtiene el volumen de \mathcal{P} en términos de su arista.

INTRODUCCIÓN

Por una ligera distorsión del prisma pentagonal recto de bases regulares, obtenemos un dodecaedro convexo de dos caras pentagonales regulares y paralelas, conectadas por 10 triángulos isósceles. La altura del poliedro siempre puede ajustarse de tal manera que los triángulos isósceles sean equiláteros. Entonces el sólido así obtenido (de caras regulares) recibe el nombre de anti-prisma (prismatoide, prismoide o prisma oblicuo) pentagonal (ver Figura 1).

No hay hasta el presente un estudio, diferente al clásico, del prismatoide pentagonal que aporte una nueva concepción sobre su geometría. Razón por la cual, en este documento, se emprende y se pone de manifiesto, la existencia de una metodología que abre nuevos caminos en esa dirección.

En efecto, articulando profusamente nociones de análisis funcional y convexo, se concibe un marco conceptual que permite abordar la topología y geometría afín del sólido. En general, se indaga sobre el prismatoide pentagonal afín \mathcal{P} (ver Definición 1.1 y Figura 3), introduciendo una norma φ sobre \mathbb{R}^3 respecto a la cual \mathcal{P} es una esfera (Teoremas 1.3 y 2.1). La representación de φ se da en términos de tres vectores linealmente independientes en \mathbb{R}^3 , con la inefable presencia del número de oro (Lema 1.2). Se construye así un modelo matemá-

tico, riguroso y versátil, que unifica y describe minuciosamente la geometría de \mathcal{P} . El caso notable en que \mathcal{P} es un prismatoide pentagonal es tratado en el Corolario 3.2. Posteriormente veremos cómo la ilustración 2.2 permite avizorar el alcance de estos resultados.

Más adelante se aportan dos representaciones del prismatoide pentagonal en términos de los centros de seis caras no paralelas, como también en términos de las rectas perpendiculares a esas caras a través de sus centros (Corolario 3.1). Así, se describe (vía proyecciones ortogonales) el prismatoide pentagonal como un lugar geométrico de puntos en \mathbb{R}^3 , resultado hasta hoy desconocido.

Finalmente se estudian algunos aspectos relevantes de la estereometría de \mathcal{P} , y en particular, aplicando una importante propiedad de las transformaciones afines, se calcula el volumen de \mathcal{P} (Teorema 4.1).

Denotaremos con letra mayúscula los puntos o vectores (fila) de \mathbb{R}^3 , su producto interior usual por un punto \cdot y el producto vectorial con una cruz \times .

El Lema 1.2, los Teoremas 1.3, 2.1 y 4.1, como los Corolarios 3.1 y 3.2, consignados en la presente investigación son originales. Constituyen aportes concebidos y demostrados por el autor.

1. GEOMETRÍA Y TOPOLOGÍA DEL PRISMATOIDE PENTAGONAL AFÍN

1.1. Definición. Un prismatoide (o prismoide o antiprisma o prisma oblicuo) pentagonal afín, es la imagen de un prismatoide pentagonal bajo un automorfismo afín de \mathbb{R}^3 (ver Figuras 1 y 3).

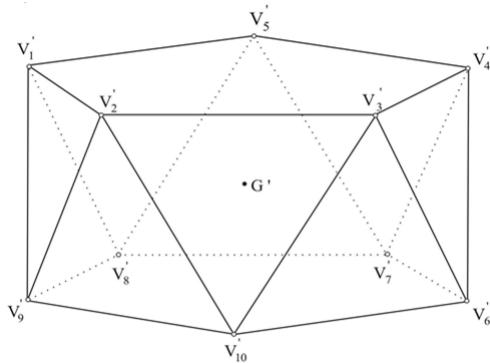


Figura 1. El prismatoide pentagonal $V_1 \dots V_{10}$ de centro $G' = \frac{1}{2}(V_i + V_{i+5})$, $i=1,\dots,5$

De manera similar se define pentágono regular afín. El número

$$(1.1.1) \quad \tau = 2\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1,6180339887....$$

fue llamado por los griegos el número de oro, y es la raíz positiva de la ecuación cuadrática

$$(1.1.2) \quad \tau^2 - \tau - 1 = 0$$

(Coxeter, 1989, pp. 160-168; Fuentes, 1991, pp. 19-38).

Es un hecho singular que en el pentágono regular, cada diagonal es paralela al lado opuesto y es τ veces dicho lado. Dado que las transformaciones afines preservan las combinaciones lineales promedio (la suma de cuyos coeficientes es 1) (Birkhoff y MacLane, 1970, pp. 417-423), entonces la propiedad anterior se mantiene en el pentágono regular afín $V_1 \dots V_5$. En otras palabras

$$(1.1.3) \quad V_4 = V_1 - \tau V_2 + \tau V_3 \quad V_5 = \tau V_1 - \tau V_2 + V_3$$

(ver Figura 2).

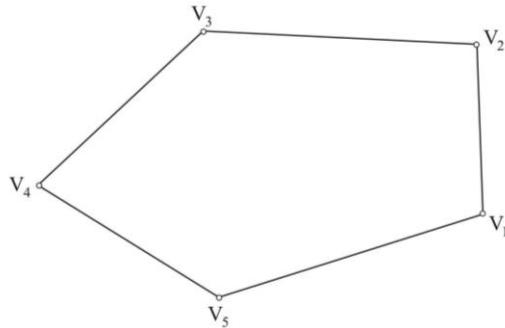


Figura 2. $V_1 \dots V_5$ es un pentágono regular afín, en el cual $\overline{V_1V_3} \parallel \overline{V_5V_4}$ y $V_1V_3 = \tau V_5V_4$

1.2. Lema. Sean A, B y C tres vectores dados en \mathbb{R}^3 , linealmente independientes, y hagamos

$$(1.2.1) \quad \begin{cases} \Lambda_k = \frac{1}{2} \left\{ (5 - 2\tau)k + 8\tau - 15 - 3\tau^{-2} |k - 2| - 2\tau^{-3} |k - 3| - 3\tau^{-2} |k - 4| \right. \\ \left. + (5 - 2\tau) |k - 5| \right\} A + \frac{1}{2} \left\{ -3\tau^{-1} k + 8\tau - 9 + \sqrt{5}\tau^{-2} |k - 2| \right. \\ \left. - \tau^{-3} |k - 3| + 2\tau^{-1} |k - 4| - 2\tau^{-1} |k - 5| \right\} B + \frac{1}{2} \left\{ (2 - 3\tau) k + 12\tau \right. \\ \left. - 8 + 2\tau^{-1} |k - 2| - \tau^{-3} |k - 3| + \sqrt{5}\tau^{-2} |k - 4| + (3 - 4\tau) |k - 5| \right\} C \end{cases}$$

para todo $k = 1, \dots, 6$. Entonces la función $\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ representada por

$$(1.2.2) \quad \varphi(X) = \max_{1 \leq k \leq 6} |\Lambda_k \cdot X|$$

para todo $X \in \mathbb{R}^3$, es una norma sobre \mathbb{R}^3 .

Demostración. Según (1.2.2), la afirmación $\varphi(X) = 0$ implica

$$|\Lambda_k \cdot X| \leq \varphi(X) = 0 \quad k = 1, \dots, 6$$

expresiones equivalentes al sistema de ecuaciones

$$\Lambda_k \cdot X = 0 \quad k = 1, \dots, 6$$

por ser

$$\begin{aligned} & \det(\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3) \\ &= \det \left(\tau^{-1}A + \tau^{-1}B - C, 2A - \tau^{-1}B - \tau C, \sqrt{5}A - B - C \right) \\ &= -\det(A, B, C) \neq 0 \end{aligned}$$

el rango de la matriz de los coeficientes es tres, y el sistema tiene como solución única $X = \mathbf{0}$. La misma representación de φ nos aporta

$$\varphi(\lambda X) = |\lambda| \varphi(X), \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

y

$$\begin{aligned} |\Lambda_k \cdot (X + Y)| &= |\Lambda_k \cdot X + \Lambda_k \cdot Y| \quad k = 1, \dots, 6 \\ &\leq |\Lambda_k \cdot X| + |\Lambda_k \cdot Y| \leq \varphi(X) + \varphi(Y) \end{aligned}$$

lo que implica

$$\varphi(X+Y) \leq \varphi(X) + \varphi(Y)$$

1.3. Teorema. Bajo todas las hipótesis del Lema 1.2, consideremos la norma φ sobre \mathbb{R}^3 representada en (1.2.1) y (1.2.2). Si $r > 0$, $G \in \mathbb{R}^3$ y

$$(1.3.1) \quad \Delta = \det(A, B, C)$$

hagamos

$$(1.3.2) \quad \begin{cases} V_1 = G + \frac{r}{\Delta} (A \times B + B \times C + C \times A) \\ V_2 = G + \frac{r}{\Delta} (A \times B + B \times C + \tau^{-3} C \times A) \\ V_3 = G + \frac{r}{\Delta} (A \times B + \tau^{-3} B \times C - \tau^{-3} C \times A) \\ V_4 = G + \frac{r}{\Delta} (\tau^{-3} A \times B - \tau^{-3} B \times C + \tau^{-3} C \times A) \\ V_5 = G + \frac{r}{\Delta} (-\tau^{-3} A \times B + \tau^{-3} B \times C + C \times A) \\ V_{i+5} = 2G - V_i, \quad V_i \quad i = 1, \dots, 5 \end{cases}$$

Entonces, $S_r[G]$ la esfera cerrada de centro G y radio r , respecto a la norma φ , es un prismatoide pentagonal afín, macizo y cerrado, centralmente simétrico en G , de vértices V_1, \dots, V_{10} dados en (1.3.2) y dispuestos como se muestra en la Figura 3.

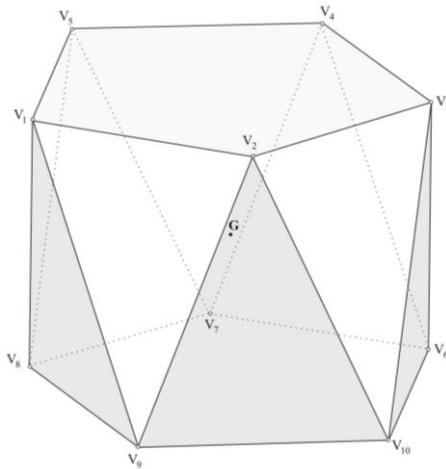


Figura 3. El prismatoide pentagonal afín $\text{conv}\{V_1, \dots, V_{10}\}$ es la esfera cerrada de centro $G = \frac{1}{2}(V_i + V_{i+5})$, $i = 1, \dots, 5$, y radio r , respecto a la norma φ sobre \mathbb{R}^3 .

Además, los planos faciales del poliedro tienen las siguientes representaciones. Las caras (triángulos y pentágonos regulares afines)

$$(1.3.3) \quad \begin{array}{lll} V_1V_5V_8, & V_1V_9V_8, & V_1V_2V_9, \\ V_2V_{10}V_9, & V_2V_3V_{10}, & V_6\dots V_{10} \end{array}$$

están en los planos

$$(1.3.4) \quad \Lambda_k \cdot (X - G) = r \quad k = 1, \dots, 6$$

respectivamente, donde Λ_k está definido en (1.2.1).

Los planos faciales de sus correspondientes caras opuestas (y paralelas) respecto a G , tienen representaciones de la misma forma anterior, cambiando r por $-r$.

Demostración. Aplicando propiedades de los determinantes y la relación $(A \times B) \times (C \times D) = (A \times B \cdot D) C - (A \times B \cdot C) D$, hallamos que

$$\det(V_1 - G, V_2 - G, V_3 - G) = \frac{r^3}{\Delta} (35 - 22\tau) \neq 0$$

teniendo presente (1.3.1) y (1.3.2); es decir, G, V_1, V_2, V_3 son afínmente independientes en \mathbb{R}^3 , lo mismo que G', V'_1, V'_2, V'_3 en el prismatoide pentagonal de la Figura 1 (de hecho no degenerado).

Por tanto existe un único automorfismo afín $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que

$$(1.3.5) \quad f(G') = G, \quad f(V'_k) = V_k, \quad k = 1, 2,$$

(Birkhoff y MacLane, 1970, p. 429; Rockafellar, 1972, p. 8).

Puede verificarse que los puntos V_4, V_5 en (1.3.2) son combinaciones lineales promedio de G, V_1, V_2, V_3 como las indicadas en (1.1.3). Análogas combinaciones lineales ocurren para V'_4 y V'_5 por ser $V'_1 \dots V'_5$ un pentágono regular, además de acuerdo al texto de la Figura 1,

$$V'_{i+5} = 2G' - V'_i \quad i = 1, \dots, 5$$

por lo cual, a la luz de (1.3.5) y de la última ecuación en (1.3.2)

$$f(V_i) = V_i \quad i = 1, \dots, 10$$

dado que f preserva tales combinaciones. Se sigue, según la Definición 1.1, que $V_1 \dots V_{10}$ es un prismatoide pentagonal afín de centro G y vértices dispuestos como se muestra en la Figura 3.

A continuación trataremos con los planos faciales de $V_1 \dots V_{10}$:

$$\Lambda_1 \cdot (V_1 - G) = \frac{r}{4} (\tau^{-1} A + \tau^{-1} B - C) \cdot (\tau^{-3} A \times B + B \times C + C \times A) \quad \text{por (1.2.1) y (1.3.2)}$$

$$= r \quad \text{por (1.1.2) y (1.3.1)}$$

Análogamente se prueba que los vértices V_5 y V_8 satisfacen (1.3.4) para $k = 1$. Procediendo de este modo y según (1.3.2), se demuestra que las caras (1.3.3) del prismatoide están, respectivamente, en los planos dados en (1.3.4). Similarmetne para los planos faciales de sus caras opuestas.

Consideremos ahora el dodecaedro $V_1 \dots V_{10}$ como un sólido macizo cerrado \mathcal{P} , esto es,

$$\mathcal{P} = \text{conv} \{V_1, \dots, V_{10}\}$$

la envolvente convexa de sus vértices (Rockafellar, 1972, p. 158 Teorema 17.2; p.12 Corolario 2.3.1). Siendo cada X en \mathcal{P} una combinación convexa de la forma

$$\begin{aligned} X &= \sum_{j=1}^{10} \lambda_j V_j = \sum_{j=1}^5 \lambda_j V_j + \sum_{j=1}^5 \lambda_{j+5} V_{j+5} \\ &= \sum_{j=1}^5 \lambda_j V_j + \sum_{j=1}^5 \lambda_{j+5} (2G - V_j) \quad \text{Por (1.3.2),} \\ &= \sum_{j=1}^5 \lambda_j \{ (V_j - G) + G \} - \sum_{j=1}^5 \lambda_{j+5} \{ (V_j - G) - G \} \quad \text{última ecuación} \\ &= G + \sum_{j=1}^5 (\lambda_j - \lambda_{j+5}) (V_j - G) \end{aligned}$$

donde

$$\lambda_1 + \dots + \lambda_{10} = 1 \quad \text{y cada } \lambda_j \geq 0$$

Se desprende

$$(1.3.6) \quad \left\{ \begin{array}{l} (X - G) \cdot A_k = r \left\{ \begin{array}{l} (-\tau^{-2}k + 6\tau^{-2} - \tau^{-2}) | k-3 | + \tau^{-4} | k-4 | \\ -\tau^{-4} | k-5 | (\lambda_1 - \lambda_6) + (-2\tau^{-2}k - 3\tau + 10 + \tau^{-4}) | k-2 | \\ -\tau^{-2} | k-3 | - | k-5 | (\lambda_2 - \lambda_7) + (-k + 5 + \tau^{-2}) | k-2 | \\ -\tau^{-4} | k-3 | + \tau^{-4} | k-4 | - \sqrt{5}\tau^{-1} | k-5 | (\lambda_3 - \lambda_8) \\ + (-2\tau^{-2}k + 15 - 8\tau + \tau^{-2}) | k-2 | + \tau^{-2} | k-4 | \\ -2\tau^{-2} | k-5 | (\lambda_4 - \lambda_9) + (-\tau^{-2}k + \tau^{-2} + \tau^{-4}) | k-2 | \\ \tau^{-4} | k-3 | + \tau^{-2} | k-4 | (\lambda_5 - \lambda_{10}) \end{array} \right\} \\ \text{para todo } k=1, \dots, 6, \end{array} \right.$$

relaciones en las cuales

$$\begin{aligned} & | -\tau^{-2}k + 6\tau^{-2} - \tau^{-2} | | k-3 | + \tau^{-4} | k-4 | - \tau^{-4} | k-5 | | \leq 1, \\ & | -2\tau^{-2}k - 3\tau + 10 + \tau^{-4} | | k-2 | - \tau^{-2} | k-3 | - | k-5 | | \leq 1, \\ & | -k + 5 + \tau^{-2} | | k-2 | - \tau^{-4} | k-3 | + \tau^{-4} | k-4 | - \sqrt{5}\tau^{-1} | k-5 | | \leq 1, \\ & | -2\tau^{-2}k + 15 - 8\tau + \tau^{-2} | | k-2 | + \tau^{-2} | k-4 | - 2\tau^{-2} | k-5 | | \leq 1, \\ & | -\tau^{-2}k + \tau^{-2} + \tau^{-4} | | k-2 | - \tau^{-4} | k-3 | + \tau^{-2} | k-4 | | \leq 1, \end{aligned}$$

para todo $k = 1, \dots, 6$, y por ende, de acuerdo a la desigualdad triangular,

$$\begin{aligned} & | (X - G) \cdot A_k | \leq r \left\{ \begin{array}{l} | -\tau^{-2}k + 6\tau^{-2} - \tau^{-2} | | k-3 | + \tau^{-4} | k-4 | - \tau^{-4} | k-5 | | \lambda_1 - \lambda_6 | \\ + | -2\tau^{-2}k - 3\tau + 10 + \tau^{-4} | | k-2 | - \tau^{-2} | k-3 | - | k-5 | | \lambda_2 - \lambda_7 | \\ + | -k + 5 + \tau^{-2} | | k-2 | - \tau^{-4} | k-3 | + \tau^{-4} | k-4 | - \sqrt{5}\tau^{-1} | k-5 | | \lambda_3 - \lambda_8 | \\ + | -2\tau^{-2}k + 15 - 8\tau + \tau^{-2} | | k-2 | + \tau^{-2} | k-4 | - 2\tau^{-2} | k-5 | | \lambda_4 - \lambda_9 | \\ + | -\tau^{-2}k + \tau^{-2} + \tau^{-4} | | k-2 | - \tau^{-4} | k-3 | + \tau^{-2} | k-4 | | \lambda_5 - \lambda_{10} | \end{array} \right\} \\ & \leq r (| \lambda_1 - \lambda_6 | + | \lambda_2 - \lambda_7 | + | \lambda_3 - \lambda_8 | + | \lambda_4 - \lambda_9 | + | \lambda_5 - \lambda_{10} |) \\ & \leq r (| \lambda_1 + \lambda_6 + \lambda_2 + \lambda_7 + \lambda_3 + \lambda_8 + \lambda_4 + \lambda_9 + \lambda_5 + \lambda_{10} |) = r, \end{aligned}$$

para todo $k = 1, \dots, 6$, y por esto según (1.2.2), $\varphi(X - G) \leq r$, es decir $\mathcal{P} \subseteq S_r[G]$ la esfera cerrada de centro G y radio r respecto a la norma φ .

Por ser $\varphi(X - G)$ una función real convexa, propia y cerrada, para todo $X \in \mathbb{R}^3$, entonces

$$F_r(S_r[G]) = \{ X \in \mathbb{R}^3 \mid \varphi(X - G) = r \}$$

(Rockafellar, 1972, p. 59; Corolario 7.6.1)

Si $X \in \text{conv}\{V_1, V_5, V_8\} \subseteq \mathcal{P}$ existen $\lambda_1, \lambda_5, \lambda_8$ no negativos, $\lambda_1 + \lambda_5 + \lambda_8 = 1$, tales que

$$X = \lambda_1 V_1 + \lambda_5 V_5 + \lambda_8 V_8 + \sum_{j \in \{1, \dots, 10\} \setminus \{1, 5, 8\}} 0 V_j$$

reduciéndose las expresiones en (1.3.6) a

$$\begin{aligned} (X - G) \cdot A_k &= r \left\{ \left(-\tau^{-2}k + 6\tau^{-2} - \tau^{-2}|k-3| + \tau^{-4}|k-4| - \tau^{-4}|k-5| \right) \lambda_1 \right. \\ &\quad - \left(-k + 5 + \tau^{-2}|k-2| - \tau^{-4}|k-3| + \tau^{-4}|k-4| - \sqrt{5} \tau^{-1}|k-5| \right) \lambda_8 \\ &\quad \left. + \left(-\tau^{-2}k + \tau^{-2} + \tau^{-4}|k-2| - \tau^{-4}|k-3| + \tau^{-2}|k-4| \right) \lambda_5 \right\} \end{aligned}$$

$k = 1, \dots, 6$, y en particular $(X - G) \cdot A_1 = r$, por lo cual según (1.2.2),

$$\varphi(X - G) = r$$

y

$$\text{conv}\{V_1, V_5, V_8\} \subseteq F_r(S_r[G])$$

Así, utilizando (1.3.6) en general se prueba que todas las caras de \mathcal{P} están contenidas en la frontera de $S_r[G]$. Por tanto

$$(1.3.7) \quad \mathcal{P} \subseteq S_r[G] \quad \text{y} \quad F_r(\mathcal{P}) \subseteq F_r(S_r[G])$$

Si $X \in S_r[G] \sim \mathcal{P}$ entonces X es un punto interior de $\mathbb{R}^3 - \mathcal{P}$ por ser \mathcal{P} cerrado, y el segmento $GX \subseteq S_r[G]$ interseca a $F_r(\mathcal{P})$ en un punto P entre G y X (por ser \mathcal{P} un poliedro convexo), esto es, $P \in \text{int}(S_r[G])$ (Rockafe-

llar, 1972, p. 45 Teorema 6.1) y además por (1.3.7) $P \in F_r(S_r[G])$ lo cual es imposible. Así que $S_r[G] \subseteq \mathcal{P}$.

2. REPRESENTACIÓN DE UN PRISMATOIDE PENTAGONAL AFÍN DADO

2.1. Teorema. Sea dado un prismatoide pentagonal afín \mathcal{P} , macizo y cerrado, de vértices V_1, \dots, V_{10} dispuestos como en la Figura 3 y centro

$$G = \frac{1}{2}(V_i + V_{i+5}) \quad i = 1, \dots, 5$$

Si

$$(2.1.1) \quad \nabla = \det(V_1 - G, V_2 - G, V_3 - G)$$

hagamos

$$(2.1.2) \quad \begin{cases} A = \nabla^{-1} \left\{ \tau^{-3}(V_1 - G) \times (V_2 - G) + (V_2 - G) \times (V_3 - G) - (V_1 - G) \times (V_3 - G) \right\} \\ B = \nabla^{-1} \left\{ -\tau^{-3}(V_1 - G) \times (V_2 - G) + (V_2 - G) \times (V_3 - G) - \tau^{-3}(V_1 - G) \times (V_3 - G) \right\} \\ C = \nabla^{-1} \left\{ (V_1 - G) \times (V_2 - G) + \tau^{-3}(V_2 - G) \times (V_3 - G) - (V_1 - G) \times (V_3 - G) \right\} \end{cases}$$

Entonces, para dichos vectores, \mathcal{P} es la esfera cerrada unitaria de centro G respecto a la norma φ sobre \mathbb{R}^3 representada en (1.2.1) y (1.2.2).

Demostración. De acuerdo a la Definición 1.1, \mathcal{P} es un poliedro no degenerado y por tanto el determinante ∇ en (2.1.1) es no nulo. Además, teniendo en mente (2.1.2) hallamos

$$\Delta = \det(A, B, C) = -4\tau^{-5}\nabla^{-1} \neq 0$$

En otras palabras, los vectores A, B, C definidos en (2.1.2) satisfacen las hipótesis del Teorema 1.3 bajo los cuales consideramos la norma φ sobre \mathbb{R}^3 introducida en (1.2.1) y (1.2.2). Por tanto, su esfera cerrada unitaria $S_1[G]$ es un prismatoide pentagonal afín de centro G , de tal manera que remitiéndonos a las expresiones en (1.3.2) (después de cuidadosos cálculos vectoriales) se demuestra que V_1, V_2 y V_3 son también vértices de $S_1[G]$.

Ahora bien, dado que \mathcal{P} es la imagen automorfa afín de un prismatoide pentagonal, entonces sus vértices (y los de $S_1[G]$, según se estableció en la demostración del Teorema 1.3) son combinaciones lineales promedio de G , V_1 , V_2 y V_3 como las indicadas en (1.1.3). Se dimana que los vértices de $S_1[G]$ son, justamente, V_1, \dots, V_{10} , es decir, $S_1[G] = \mathcal{P}$.

2.2. Ilustración. Consideremos el prismatoide pentagonal de centro el origen 0 y arista 2, de vértices

$$\begin{array}{lll} V'_1 = (0, \tau, 1) & V'_2 = (0, \tau, -1) & V'_3 = (1, 0, -\tau) \\ V'_4 = (\tau, -1, 0) & V'_5 = (1, 0, \tau) & V'_{i+5} = -V'_i \end{array}$$

$i = 1, \dots, 5$, dispuestos como en la Figura 1, obtenido del icosaedro regular de Edmund Hess (1.843-1.903) al suprimir dos pirámides pentagonales opuestas de ápices $\pm(\tau, 1, 0)$ (Coxeter, 1973, p. 52). Entonces, aludiendo al Teorema 2.1 hallamos

$$\begin{array}{ll} \nabla = -2\tau, & V'_1 \times V'_2 = (-2\tau, 0, 0), \\ V'_2 \times V'_3 = (-\tau^2, -1, -\tau), & V'_1 \times V'_3 = (-\tau^2, 1, -\tau) \end{array}$$

y las expresiones en (2.1.2) se reducen a

$$A = \tau^{-3}(1, \tau^2, 0), \quad B = \tau^{-2}(1, 1, 1), \quad C = \tau^{-2}(1, 1, -1)$$

Por tanto, y de acuerdo a la norma φ en (1.2.1) y (1.2.2) el prismatoide pentagonal como sólido cerrado, tiene la siguiente representación cartesiana,

$$\max \left\{ |x_2 \pm \tau^2 x_3|, \tau |x_1 - x_2 \pm x_3|, |x_1 - \tau^2 x_2|, \tau^2 |\tau x_1 + x_2| \right\} \leq \tau^3$$

condición necesaria y suficiente para que un punto (x_1, x_2, x_3) en \mathbb{R}^3 esté en el sólido. La igualdad sólo ocurre en la frontera del poliedro.

3. REPRESENTACIÓN DEL PRISMATOIDE PENTAGONAL

Dado que el prismatoide pentagonal se obtiene del icosaedro regular (ver ilustración 2.2), y observando así que los diez centroides de las caras triangulares del prismatoide forman parte de los veinte vértices de un dodecaedro

regular (inscrito en dicho icosaedro), caracterizamos a continuación los puntos del sólido.

3.1 Corolario. Sea \mathcal{P} un prismatoide pentagonal dado, macizo y cerrado de centro G y arista a . Si C_1, \dots, C_5 son los centros de cinco caras triangulares no opuestas de \mathcal{P} , y C_6 el centro de una cara pentagonal, entonces

(i) La inecuación de \mathcal{P} es

$$(3.1.1) \quad \max \left\{ \left| (C_1 - G) \cdot (X - G) \right|, \dots, \left| (C_5 - G) \cdot (X - G) \right|, \frac{\sqrt{5}\tau^3}{3} \left| (C_6 - G) \cdot (X - G) \right| \right\} \leq \frac{a^2\tau^4}{12}$$

donde la igualdad sólo ocurre en la frontera del poliedro

(ii) Sea S el conjunto de los veinte vértices del dodecaedro regular de centro G , diez de los cuales son los puntos $C_k, 2G - C_k$, $k = 1, \dots, 5$. Si \mathcal{L}_6 es el eje de simetría del dodecaedro a través de los centros de las caras pentagonales de vértices los puntos del conjunto $S \sim \{C_1, \dots, C_5, 2G - C_1, \dots, 2G - C_5\}$ (esto es, \mathcal{L}_6 es la recta que pasa por G y C_6), y \mathcal{L}_k es la recta que contiene la diagonal del dodecaedro que une a C_k y $2G - C_k$, $k = 1, \dots, 5$, entonces

$$(3.1.2) \quad \begin{aligned} \mathcal{P} = \left\{ X \in \mathbb{R}^3 \mid \max \left\{ \frac{5^{1/4}}{3^{1/2}} \tau^{3/2} \text{ (Proyección de } \overline{XG} \text{ sobre } \mathcal{L}_6), \right. \right. \\ \left. \left. \max_{1 \leq k \leq 5} \text{Proyección de } \overline{XG} \text{ sobre } \mathcal{L}_k \right\} \leq \frac{\sqrt{3}}{6} a \tau^2 \right\} \end{aligned}$$

(ver Figura 4)

Demostración. De acuerdo al Teorema 2.1, \mathcal{P} es la esfera cerrada unitaria de centro G respecto a la norma φ sobre \mathbb{R}^3 representada en (1.2.1) y (1.2.2), bajo las condiciones en (2.1.2), donde V_1, \dots, V_{10} son los vértices de \mathcal{P} dispuestos como en la Figura 3.

Si C_1, \dots, C_6 son los centros de las caras de \mathcal{P} listadas en (1.3.3), respectivamente, y dado que \mathcal{P} se obtiene de un icosaedro regular \mathcal{P}_0 (Ver ilustración 2.2), entonces $C_1 - G, \dots, C_6 - G$ son vectores normales a estas caras, respectivamente (la insfera del icosaedro regular es tangente a cada cara (en este caso a las diez caras triangulares del prismatoide) en su centro).

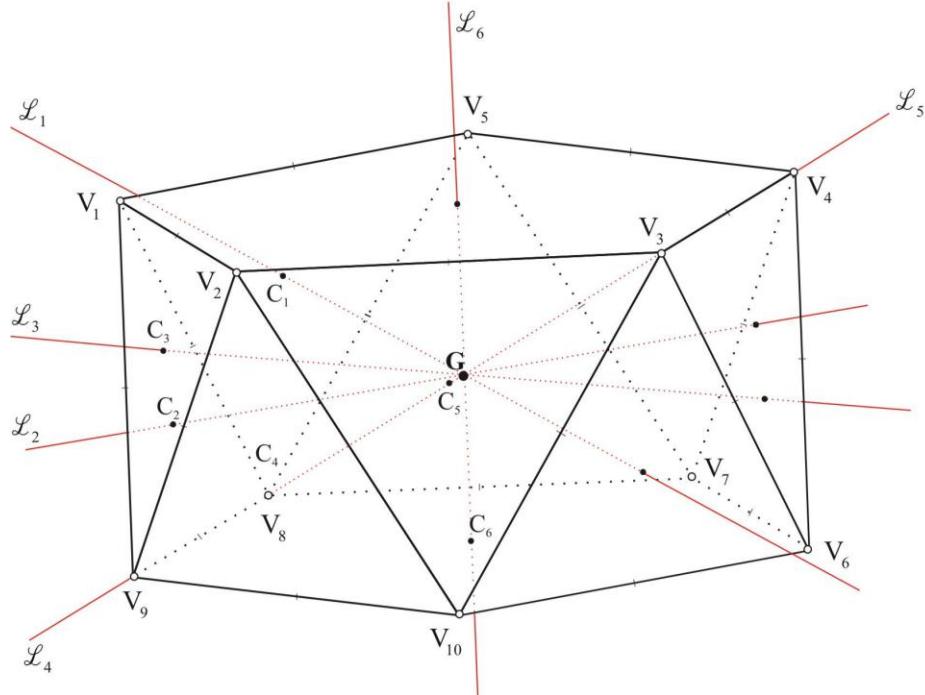


Figura 4. Si \mathcal{P} es un prismatoide pentagonal, macizo y cerrado de arista a, vértices $V_1 \dots$

$$V_{10} \text{ y centro } G = \frac{1}{2}(V_i + V_{i+5}), i=1,\dots,5, \text{ entonces } \mathcal{P} = \left\{ X \in \mathbb{R}^3 \mid \max \left\{ \frac{5^{1/4}}{3^{1/2}} \tau^{3/2} \right. \right.$$

$$\left. \left. \text{(Proyección de } \overline{XG} \text{ sobre } \mathcal{L}_6), \max_{1 \leq k \leq 5} \text{Proyección de } \overline{XG} \text{ sobre } \mathcal{L}_k \right\} \leq \frac{\sqrt{3}}{6} a \tau^2 \right\},$$

donde C_1, \dots, C_5 son los centros de cinco cara triangulares no opuestas y paralelas, y C_6 el centro de una cara pentagonal

De acuerdo a la última parte del Teorema 1.3 y a las relaciones en (1.3.4) con $r=1$, existen escalares t_k tales que

$$(3.1.3) \quad A_k = t_k(C_k - G) \quad \text{y} \quad (-1)^{i_k} t_k(C_k - G) \cdot (V_{j_k} - G) = 1$$

$k = 1, \dots, 6$, donde

$$i_1 = i_3 = j_3 = 2, \quad i_2 = i_4 = i_5 = i_6 = j_1 = 1, \quad j_2 = 3,$$

$$j_4 = 4 \quad j_5 = j_6 = 5$$

teniendo en mente que $V_{i+5} = 2G - V_i$, $i = 1, \dots, 5$, como se consigna en (1.3.2). De este modo,

$$(3.1.4) \quad \begin{aligned} \text{Inradio de } \mathcal{P}_0 &= \text{La distancia de } G \text{ a los planos de las caras triangulares de } \mathcal{P} \\ &= \|C_k - G\| = \frac{3^{\frac{1}{2}}}{2} a \tau^2 \end{aligned}$$

y

$$(3.1.5) \quad \text{Circunradio de } \mathcal{P}_0 = \|V_k - G\| = \frac{5^{\frac{1}{4}}}{2} a \tau^{\frac{1}{2}}$$

para todo $k = 1, \dots, 5$ (Coxeter, 1973, pp. 292 - 293, Tabla I), por lo cual

$$\begin{aligned} \frac{3^{-\frac{1}{2}}}{2} a \tau^2 &= \frac{|\Lambda_k \cdot (V_{j_k} - G)|}{\|\Lambda_k\|} \\ &= \frac{|(-1)^{i_k} t_k (C_k - G) \cdot (V_{j_k} - G)|}{\|(-1)^{i_k} t_k (C_k - G)\|} \quad \text{Por (3.1.3)} \\ &= \frac{1}{|t_k| \|C_k - G\|} = \frac{2\sqrt{3}}{a \tau^2 |t_k|} \end{aligned}$$

y por ende

$$|t_k| = \frac{12}{a^2 \tau^4} \quad k = 1, \dots, 5$$

Además, teniendo presente que el circunradio del pentágono regular $V_1 \dots V_5$ (de lado a) es

$$(3.1.6) \quad \|V_k - C_6\| = 5^{-\frac{1}{4}} a \tau^{\frac{1}{2}} \quad k = 1, \dots, 5$$

entonces

$$\begin{aligned} \text{La distancia de } G \text{ al plano de una cara pentagonal de } \mathcal{P} &= \|C_6 - G\| \\ &= \frac{|\Lambda_6 \cdot (V_{j_6} - G)|}{\|\Lambda_6\|} = \frac{|(-1)^{i_6} t_6 (C_6 - G) \cdot (V_{j_6} - G)|}{\|(-1)^{i_6} t_6 (C_6 - G)\|} \quad \text{Por (3.1.3)} \\ &= \frac{1}{|t_6| \|C_6 - G\|} \end{aligned}$$

o bien, de acuerdo al Teorema de Pitágoras ($V_k C_6 G$ es un triángulo rectángulo, recto en C_6 , para todo $k = 1, \dots, 5$),

$$\begin{aligned} \frac{1}{|t_6|} &= \|C_6 - G\|^2 = \|V_k - G\|^2 - \|V_k - C_6\|^2 \\ &= \frac{a^2 \sqrt{5} \tau}{20} \end{aligned} \quad \text{Por (3.1.5) y (3.1.6)}$$

y por tanto

$$(3.1.7) \quad |t_6| = \frac{4\sqrt{5}}{a^2 \tau} \quad \text{y} \quad \|C_6 - G\| = \frac{a}{2} 5^{-\frac{1}{4}} \tau^{\frac{1}{2}}$$

reduciéndose $\varphi(X - G) \leq 1$ a la expresión (3.1.1), o bien,

$$(3.1.8) \quad \begin{aligned} &\max \left\{ \|X - G\| \|C_1 - G\| |\cos \theta_1|, \dots, \right. \\ &\|X - G\| \|C_5 - G\| |\cos \theta_5| \\ &\left. \frac{\sqrt{5}\tau^3}{3} \|X - G\| \|C_6 - G\| |\cos \theta_6| \right\} \leq \frac{a^2 \tau^4}{12} \end{aligned}$$

donde θ_k es el ángulo entre los vectores $X - G \neq \mathbf{0}$ y $C_k - G$, $k = 1, \dots, 6$. Ahora, teniendo presente (3.1.4) y (3.1.7), y percibiendo que

$$\left\{ \begin{array}{l} \|X - G\| |\cos \theta_k| = \text{Proyección de } \overline{XG} \text{ sobre } \mathcal{L}_k, \\ \text{para todo } k = 1, \dots, 6. \end{array} \right.$$

Entonces la relación (3.1.8) es equivalente a la condición que define al poliedro \mathcal{P} en (3.1.2).

3.2. Corolario. Sea \mathcal{P} un prismatoide pentagonal, macizo y cerrado, de arista a y vértices V_1, \dots, V_{10} dispuestos como en la Figura 3, y centro

$$G = \frac{1}{2}(V_i + V_{i+5}) \quad k = 1, \dots, 5$$

Hagamos

$$(3.2.1) \quad \begin{cases} A = b \left\{ \tau (V_1 - G) + (V_3 - G) \right\} \\ B = b \left\{ \tau^2 (V_1 - G) - \tau V_2 + \tau V_3 \right\} \\ C = b \left\{ (V_1 - G) + \tau (V_3 - G) \right\} \end{cases}$$

Entonces A, B, C son linealmente independientes en \mathbb{R}^3 , para los cuales obtenemos en (1.2.1)

$$(3.2.2) \quad \begin{cases} A_1 = b \left\{ \tau (V_1 - G) - (V_2 - G) \right\} \\ A_2 = b \left\{ (V_2 - G) - \tau (V_3 - G) \right\} \\ A_3 = b \left\{ \tau (V_2 - G) - (V_3 - G) \right\} \\ A_4 = b \left\{ -\tau (V_1 - G) + \tau^2 (V_2 - G) - \tau (V_3 - G) \right\} \\ A_5 = b \left\{ -(V_1 - G) + \tau (V_2 - G) \right\} \\ A_6 = b \left\{ -\tau^3 (V_1 - G) + \tau^2 (V_2 - G) - \tau^3 (V_3 - G) \right\} \end{cases}$$

vectores que a su vez definen la norma φ sobre \mathbb{R}^3 en (1.2.2), respecto a la cual, \mathcal{S} es la esfera cerrada unitaria de centro G , donde $b = 4a^{-2}\tau^{-3}$.

Demostración. Si $V'_1 \dots V'_{10}$ es el prismatoide pentagonal de centro 0 de la ilustración 2.2, según se estableció en la demostración del Teorema 1.3, existe un automorfismo afín f de \mathbb{R}^3 tal que $f(V'_i) = V_i$ $i = 1, \dots, 10$ y $f(0) = G$. En este caso $\theta_{ij} = \angle V_i G V_j$ implica $\theta_{ij} = \angle V'_i \mathbf{0} V'_j$, por lo cual cálculos directos (con los vértices V'_i) nos aportan que en general

$$\cos \theta_{12} = -\cos \theta_{13} = \cos \theta_{23} = -5^{-\frac{1}{4}} \tau^{\frac{1}{2}} \cos \theta = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

donde θ es el ángulo entre los vectores $V'_1 \times V'_2$ y V'_3 , esto es, entre $(V_1 - G) \times (V_2 - G)$ y $V_3 - G$. Entonces

$$\begin{aligned}
 (3.2.3) \quad & \nabla = \det(V_1 - G, V_2 - G, V_3 - G) \\
 & = \left\{ (V_1 - G) \times (V_2 - G) \right\} \cdot (V_3 - G) \\
 & = \| (V_1 - G) \times (V_2 - G) \| \| V_3 - G \| \cos \theta \\
 & = R^2 \sqrt{1 - \cos^2 \theta_{12}} R \cos \theta \quad (\text{Identidad de Lagrange}) \\
 & = -2 \cdot 5^{-\frac{3}{4}} R^3 = -\frac{a^3}{4} \tau \quad \text{por (3.1.5)}
 \end{aligned}$$

donde $R = \| V_k - G \|$, $k = 1, \dots, 5$, es el circunradio de \mathcal{P} . Así, existen escalares s, t y u tales que

$$(V_1 - G) \times (V_2 - G) = s(V_1 - G) + t(V_2 - G) + u(V_3 - G)$$

Multiplicando interiamente ambos miembros de esta ecuación, sucesivamente por $V_i - G$, $i = 1, 2, 3$, obtenemos, respectivamente, las siguientes tres ecuaciones simultáneas

$$\begin{cases}
 5s + \sqrt{5}t - \sqrt{5}u = 0 \\
 \sqrt{5}s + 5t + \sqrt{5}u = 0 \\
 \sqrt{5}s - \sqrt{5}t - 5u = \sqrt{5}a
 \end{cases}$$

resolviendo el sistema obtenemos

$$s = -t = \frac{\tau}{2}, \quad u = -\frac{a}{2} \tau^2$$

es decir,

$$(V_1 - G) \times (V_2 - G) = \frac{a}{2} \tau \left\{ -\tau(V_1 - G) + \tau(V_2 - G) - 2(V_3 - G) \right\}$$

Procediendo análogamente encontramos

$$(V_2 - G) \times (V_3 - G) = \frac{a}{2} \tau \left\{ -2(V_1 - G) + \tau(V_2 - G) - \tau(V_3 - G) \right\}$$

y

$$(V_1 - G) \times (V_3 - G) = \frac{a}{2} \tau \left\{ -\tau (V_1 - G) + 2(V_2 - G) - \tau (V_3 - G) \right\}$$

sustituyendo estos valores y vectores en (2.1.2) arribamos a (3.2.1), y por ende de acuerdo al Teorema 2.1, \mathcal{P} es la esfera cerrada unitaria de centro G respecto a la norma φ sobre \mathbb{R}^3 representada en (3.2.2) y (1.2.2).

4. ESTEROMETRÍA DEL POLIEDRO AFÍN

4.1. Teorema. Sea \mathcal{P} un prismatoide pentagonal afín, de vértices V_1, \dots, V_{10} dispuestos como en la Figura 3 y centro

$$(4.1.1) \quad G = \frac{1}{2}(V_i + V_{i+5}) \quad k = 1, \dots, 5$$

Hagamos

$$(4.1.2) \quad \begin{aligned} W_1 &= (V_1 - G) \times (V_2 - G) \\ W_2 &= -\tau (V_1 - G) \times (V_3 - G) + \tau (V_2 - G) \times (V_3 - G) , \\ W_3 &= -\tau (V_1 - G) \times (V_2 - G) + (V_1 - G) \times (V_3 - G) + (V_2 - G) \times (V_3 - G) \end{aligned}$$

y denotemos por \mathcal{L} a la matriz cuadrada no singular de orden tres cuya i -ésima columna es w_i^T . Entonces

(i) La ecuación del circunelipsoide de \mathcal{P} (el elipsoide donde está inscrito \mathcal{P}) es

$$(4.1.3) \quad (X - G) \mathcal{L} \mathcal{L}^T (X - G)^T = \sqrt{5}\tau \nabla^2$$

donde \mathcal{L}^T (y similares) es la transpuesta de \mathcal{L} y ∇ es el determinante (2.1.1).

(ii) Si f es el automorfismo afín de \mathbb{R}^3 representado por

$$(4.1.4) \quad f(X) = \nabla^{-1} (X - G) \mathcal{L} \quad X \in \mathbb{R}^3$$

entonces $f(\mathcal{P})$ es ¡justamente! el prismatoide pentagonal de vértices $f(V_i) = V'_i$, $i = 1, \dots, 10$, de la ilustración 2.2.

(iii) El volumen de \mathcal{P} es $\frac{2}{3}\sqrt{5}\tau^2 |\nabla|$

En particular, si \mathcal{P} es un prismatoide pentagonal de arista a , entonces su volumen es $\frac{\sqrt{5}}{6}a^3\tau^3$

Demostración. Dado que

$$\det \mathcal{L} = \det \mathcal{L}^T = \det (W_1, W_2, W_3) = -2\tau \nabla^2 \neq 0$$

entonces \mathcal{L} es no singular y $\mathcal{L}\mathcal{L}^T$ es una matriz simétrica positivamente definida, por lo cual (4.1.3) es, en efecto, la ecuación de un elipsoide de centro G (Strang, 1982, pp. 282 - 285).

Las expresiones

$$(X-G) \mathcal{L} \mathcal{L}^T (X-G)^T = \|(X-G) \mathcal{L}\|^2,$$

$$(X-G) \mathcal{L} = ((X-G) \cdot w_1, (X-G) \cdot w_2, (X-G) \cdot w_3)$$

y las dadas en (4.1.2) pueden utilizarse para probar que los vértices V_1, V_2 y V_3 satisfacen la ecuación (4.1.3). Para verificar que los otros vértices V_4, \dots, V_{10} de \mathcal{P} también la satisfacen, nos remitimos a (1.1.3) y (4.1.1).

Procediendo así también se demuestra, teniendo presente (4.1.4), que $f(V_i) = V_i$, $i = 1, \dots, 10$, los vértices del prismatoide pentagonal de la ilustración 2.2.

Ahora consideremos en la Figura 1 la pirámide de ápice G' y base el triángulo equilátero $V_1 V_2 V_9$ de centro C_3 , según se acordó en la demostración del Corolario 3.1. Su volumen es, de acuerdo al prismatoide pentagonal de la ilustración 2.2, con $G = 0$,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{3} \left(\text{área de } V_1 V_2 V_9 \right) \cdot \| C_3 - G' \| \\ &= \frac{\tau^2}{3} \end{aligned} \quad \text{por (3.1.4) con } a = 2$$

Además, el volumen de la pirámide de ápice $G' = 0$ y base el pentágono regular $V_6 \dots V_{10}$ de centro C_6 , según se convino en la demostración del Corolario 3.1, es de acuerdo a la ilustración 2.2.

$$\frac{1}{3} \cdot (\text{área de } V_6 \dots V_{10}) \cdot \| C_6 - G \|$$

por (3.1.7) con $a = 2$

$$= \frac{\sqrt{5}}{3} \tau^2$$

Por esto el volumen del prismatoide pentagonal $V_1 \dots V_{10}$ es

$$10 \cdot \frac{\tau^2}{3} + 2 \cdot \frac{\sqrt{5}}{3} \tau^2 = \frac{2}{3} (5 + \sqrt{5}) \tau^2$$

y por ende

$$\frac{2}{3} (5 + \sqrt{5}) \tau^2 = v |\det(\nabla^{-1} \mathcal{L})| = 2v \tau |\nabla|^{-1}$$

donde v es el volumen de \mathcal{P} (Birkhoff y MacLane, 1965, p. 243; Corolario). En particular si \mathcal{P} es un prismatoide pentagonal de arista a , entonces, según (3.2.3), $\nabla = -\frac{a}{4}\tau$.

REFERENCIAS

- Birkhoff, G. y MacLane, S. (1965). *A brief survey of modern algebra*. (Segunda edición.) New York, USA: The Macmillan Company.
- Birkhoff, G. y MacLane, S. (1970). *Algebra*. (Cuarta reimpresión.) Londres, Gran Bretaña: The Macmillan Company.
- Coxeter, H.S.M. (1973). *Regular polytopes*. (Tercera edición.) New York, USA: Dover Publications.
- Coxeter, H.S.M. (1989). *Introduction to geometry*. (Segunda edición.) New York, USA: John Wiley & Sons, Inc.
- Fuentes, A. (1991). Desarrollo en fracción continua simple infinita de las potencias enteras del número de oro. *Educación Matemática*, 3(1), 19-38.
- Rockafellar, R.T. (1972). *Convex analysis*. New Jersey, USA: Princeton University Press.
- Strang, G. (1982). *Álgebra lineal y sus aplicaciones*. Bogotá, Colombia: Fondo Educativo Interamericano S.A.

DISEÑO DE MECANISMO CON CABRI PLUS PARA OBTENER ECUACIONES PARAMÉTRICAS DE ALGUNAS CURVAS

Benjamín Sarmiento

Universidad Pedagógica Nacional

bsarmiento@pedagogica.edu.co

Se pretende mostrar cómo construir algunas curvas mecánicas usando la vía tradicional de mover una circunferencia de radio r al interior o exterior de una circunferencia de radio R , y cómo obtener la misma curva como una simetría oculta generada por un vector \mathbf{w} que es la suma de dos vectores \mathbf{u} y \mathbf{v} cuyos movimientos dependen de una relación de sus velocidades angulares. Finalmente, se parametrizan las simetrías obtenidas y así se justifica por qué funciona esta forma de construir algunas famosas curvas. Con esto se muestra una vez más la importancia de la geometría dinámica para llegar a nuevos métodos para construir ciertos objetos matemáticos gracias a un trabajo de exploración.

INTRODUCCIÓN

El uso de ambientes virtuales o computacionales para el aprendizaje de la matemática gana cada día un buen número de seguidores. Algunos docentes se privan de aprovechar estas nuevas herramientas por el temor de tener que invertir mucho tiempo y grandes esfuerzos en el aprendizaje de temáticas relacionadas con la informática; los que se deciden a incursionar en estas nuevas formas de presentar el conocimiento a sus estudiantes terminan concluyendo que el quehacer del docente con ayuda de herramientas computacionales requiere mucho tiempo, no para el aprendizaje de temáticas informáticas, sino para idear las actividades dinámicas que ayuden a la comprensión de los conceptos matemáticos y para encontrar nuevas maneras de construir los objetos.

A lo largo de esta conferencia los docentes verán que realmente no se requieren conocimientos avanzados de programación, sólo disposición y ganas de explorar los alcances de las construcciones de representaciones dinámicas de los objetos matemáticos hechos con algún software de geometría dinámica.

CONSTRUCCIÓN DE UN MECANISMO GENERADOR DE CURVAS

La intención es construir un mecanismo manipulable que permita trazar un gran número de curvas mecánicas, a partir del punto final de un vector \mathbf{w} que Sarmiento, B. (2011). Diseño de mecanismo con Cabri Plus para obtener ecuaciones paramétricas de algunas curvas. En P. Perry (Ed.), *Memorias del 20º Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones* (pp. 119-128). Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

resulta de sumar dos vectores \mathbf{u} y \mathbf{v} . El vector \mathbf{w} será el trazador de curvas, los vectores \mathbf{u} y \mathbf{v} tendrán magnitudes que podremos variar y se podrán girar a diferentes velocidades en el mismo sentido o en sentidos contrarios. Para modificar las magnitudes de los vectores \mathbf{u} y \mathbf{v} se construirán dos controles numéricos que a su vez representarán los radios de dos circunferencias concéntricas en las cuales reposarán los puntos finales de los vectores \mathbf{u} y \mathbf{v} .

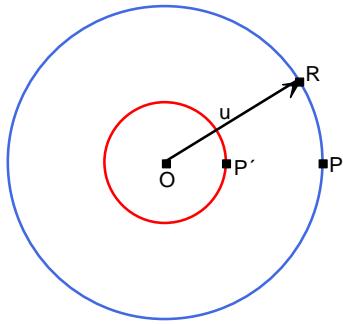


Figura 1.

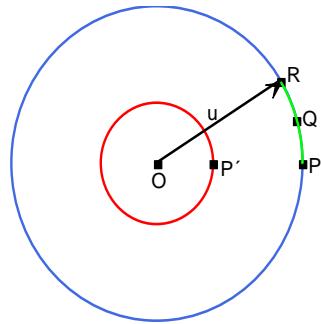


Figura 2.

Inicialmente construimos dos controles numéricos que llamaremos Radio 1 y Radio 2. Esto lo hacemos con la herramienta Número.

Trazamos dos circunferencias concéntricas de radios R y r , (Radio 1 y Radio 2, respectivamente). Marcamos un punto fijo P y un punto móvil R sobre la circunferencia CR y trazamos el vector OR (vector \mathbf{u}).

Ahora trazamos el arco PQR y lo medimos. La medida de este arco nos servirá para controlar la velocidad con que se va mover el vector \mathbf{v} .

Para modificar la velocidad del vector \mathbf{v} , se construye un control numérico que llamaremos velocidad. Con la herramienta Calculadora multiplicamos la medida del arco PQR por el valor del control Velocidad y esa nueva medida se transfiere a la circunferencia Cr tomando como punto de partida a P' . Cuando este número (Control velocidad) es positivo el vector \mathbf{v} se moverá en el mismo sentido del vector \mathbf{u} , y cuando es negativo se moverá en sentido contrario.

El arco con la nueva medida, trazado sobre Cr , terminará en el punto T , que será el punto final del vector OT (vector \mathbf{v}). Trazamos el vector OT (vector \mathbf{v}).

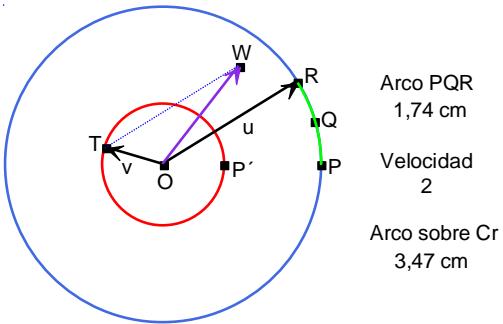


Figura 3

Se traza el vector suma OW (vector $w = \mathbf{u} + \mathbf{v}$). El rastro o lugar geométrico generado por el punto W a medida que se mueve el punto R será una curva mecánica.

De la misma manera como se diseñó este mecanismo usando dos vectores, se pueden diseñar otros mecanismos usando tres o más vectores y operaciones entre ellos.

Ejemplos de curvas generadas

A continuación se darán algunos ejemplos de lugares geométricos ampliamente conocidos obtenidos (ver Lehmann, 1994; Álvarez, 2006; Sarmiento y Rodríguez, 2009a, 2009b) con el mecanismo expuesto, cambiando los valores de los tres controles construidos (ver Figura 4).

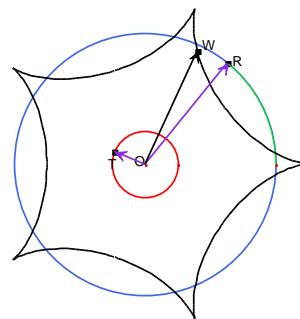
<p>Ej. 1. Tricúspide o Deltoide:</p> <p>Radio 1 = 2 Radio 2 = 1 Velocidad = -1</p>	
<p>Ej. 2. Astroide</p> <p>Radio 1 = 3 Radio 2 = 1 Velocidad = -1</p>	

Ej. 3. Hipocicloide de 5 cúspides:

$$\text{Radio 1} = 4$$

$$\text{Radio 2} = 1$$

$$\text{Velocidad} = -1$$

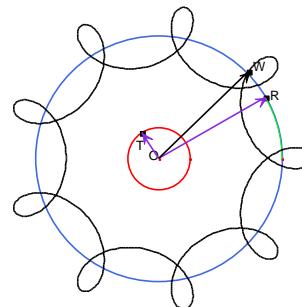


Ej. 4. Trocoide

$$\text{Radio 1} = 4$$

$$\text{Radio 2} = 1$$

$$\text{Velocidad} = -2$$

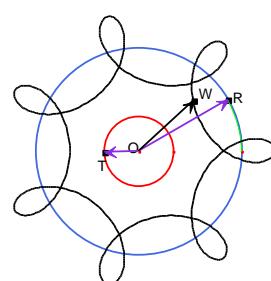


Ej. 5. Trocoide

$$\text{Radio 1} = 3$$

$$\text{Radio 2} = 1$$

$$\text{Velocidad} = -2$$

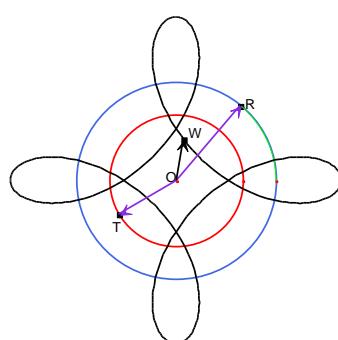


Ej. 6. Trocoide

$$\text{Radio 1} = 3$$

$$\text{Radio 2} = 2$$

$$\text{Velocidad} = -2$$

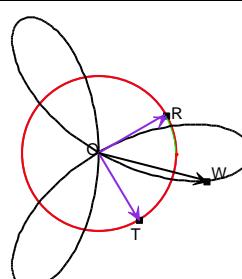


Ej. 7. Trifolium

$$\text{Radio 1} = 2$$

$$\text{Radio 2} = 2$$

$$\text{Velocidad} = -2$$



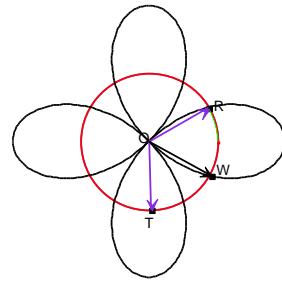
Ej. 8. Cuadrifolio

Este lugar geométrico se obtiene cuando:

$$\text{Radio 1} = 2a$$

$$\text{Radio 2} = 2a$$

$$\text{Velocidad} = -3a$$

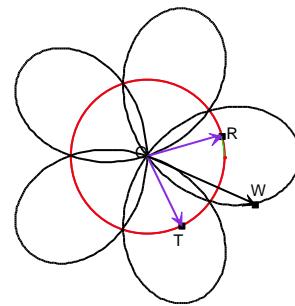


Ej. 9. Hipotrocoide

$$\text{Radio 1} = 2$$

$$\text{Radio 2} = 2$$

$$\text{Velocidad} = -4$$

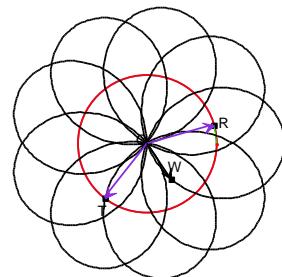


Ej. 10. Hipotrocoide

$$\text{Radio 1} = 2$$

$$\text{Radio 2} = 2$$

$$\text{Velocidad} = -8$$

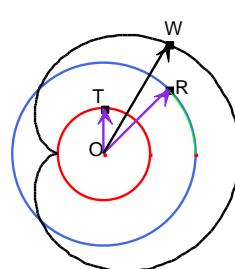


Ej. 11. Cardioide

$$\text{Radio 1} = 2$$

$$\text{Radio 2} = 1$$

$$\text{Velocidad} = 1$$

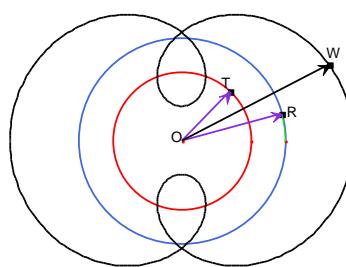


Ej. 12. Nefroide

$$\text{Radio 1} = 3$$

$$\text{Radio 2} = 2$$

$$\text{Velocidad} = 2$$

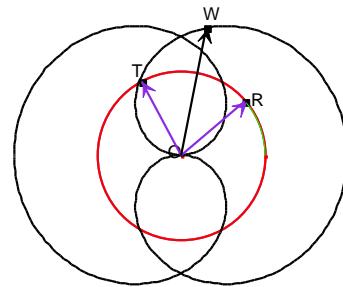


Ej. 13. Espiral de Durero

Radio 1 = 2

Radio 2 = 2

Velocidad = 3

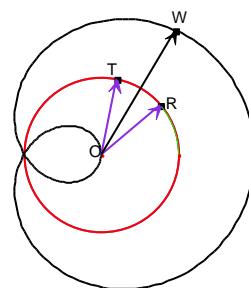


Ej. 14. Caracol de Pascal

Radio 1 = 2

Radio 2 = 2

Velocidad = 2

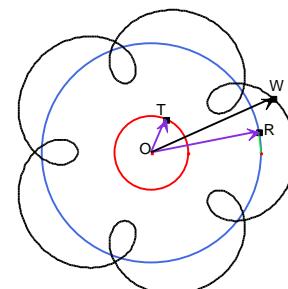


Ej. 15. Hipocicloide de cinco ciclos

Radio 1 = 3

Radio 2 = 1

Velocidad = 2

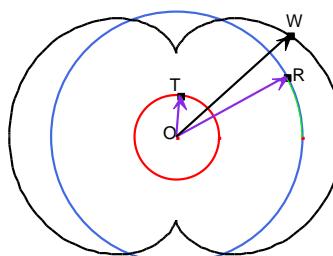


Ej. 16. Epicicloide de dos ciclos

Radio 1 = 3

Radio 2 = 1

Velocidad = 1

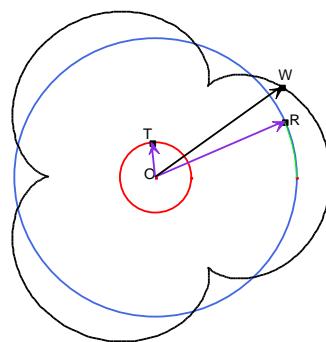


Ej. 17. Epicicloide de tres ciclos

Radio 1 = 2 ; 4

Radio 2 = 2 ; 4

Velocidad = -2 ; 1

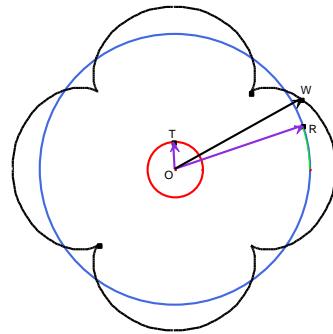


Ej. 18. Epicicloide de cuatro ciclos

Radio 1 = 5

Radio 2 = 1

Velocidad = 1

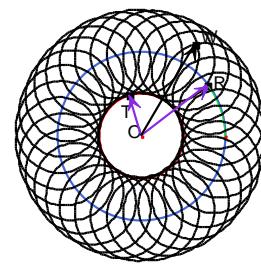


Ej. 19. Epitrocoide

Radio 1 = 4

Radio 2 = 2

Velocidad = 14

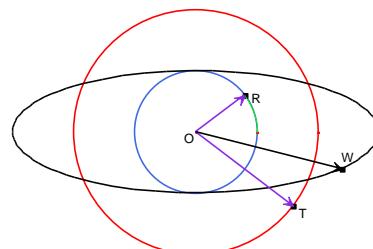


Ej. 20. Elipse

Radio 1 = 2

Radio 2 = 4

Velocidad = -2

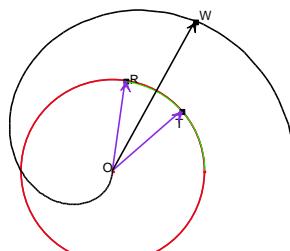


Ej. 21. Espiral

Radio 1 = 3

Radio 2 = 3

Velocidad = 0.5



Ej. 22. Ovalo de Casini

Radio 1 = 3.6

Radio 2 = 0.6

Velocidad = 0.5

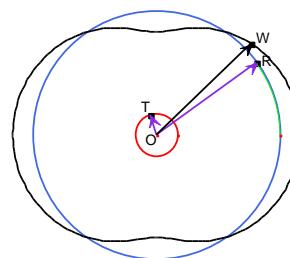


Figura 4

PARAMETRIZACIÓN DE LAS CURVAS OBTENIDAS

Consideremos dos circunferencias concéntricas de radios R y r y centradas en O , y tracemos el radio OM de la circunferencia CR .

Marcamos un punto móvil P sobre CR , determinamos el ángulo $\alpha = \angle MOP$ y trazamos el vector $\mathbf{u} = OP$.

Determinamos el ángulo $\beta = n\alpha$, ($n \neq 0$), y trazamos el vector $\mathbf{v} = OT$ tal que $\angle MOT = \beta$.

Las coordenadas del punto P son $x = R\cos(\alpha)$, $y = R\sin(\alpha)$.

Las coordenadas del punto T son $x = r\cos(\beta)$, $y = r\sin(\beta)$.

Construimos el vector suma $OW = OP + OT$, donde las coordenadas de \mathbf{W} son:

$$x = R\cos(\alpha) + r\cos(\beta), \quad y = R\sin(\alpha) + r\sin(\beta).$$

$$x = R\cos(\alpha) + r\cos(n\alpha), \quad y = R\sin(\alpha) + r\sin(n\alpha).$$

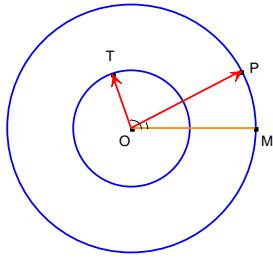


Figura 5

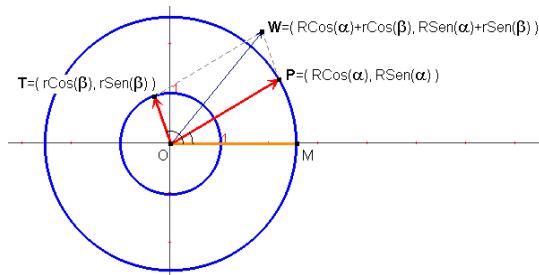


Figura 6

Usando esta parametrización del punto W , podemos obtener parametrizaciones particulares, dándole valores a R , r y n . Veamos algunos ejemplos:

Ejemplo 1

Si $R=2$, $r=2$ y $n=2$, entonces $h(\alpha) = [2\cos(\alpha) + 2\cos(2\alpha), 2\sin(\alpha) + 2\sin(2\alpha)]$ es la ecuación para el caracol de Pascal.

Ejemplo 2

Si $R=2$, $r=2$ y $n=-3$, entonces $h(\alpha) = [2\cos(\alpha) + 2\cos(3\alpha), 2\sin(\alpha) - 2\sin(3\alpha)]$ es la ecuación para el caracol de Fermat.

$2\text{Sen}(3\alpha)]$ es la ecuación para el cuadrifolium.

Ejemplo 3

Si $R = 3$, $r = 3$ y $n = -1$, entonces $h(\alpha) = [3\text{Cos}(\alpha) + \text{Cos}(3\alpha), 3\text{Sen}(\alpha) + \text{Sen}(3\alpha)]$ es la ecuación para el cuadrifolium.

Ejemplo 4

Si $R = 2$, $r = 1$ y $n = -1$, entonces $h(\alpha) = [2\text{Cos}(\alpha) + \text{Cos}(\alpha), 2\text{Sen}(\alpha) - \text{Sen}(\alpha)]$ es la ecuación para el deltoide o tricúspide.

Ejemplo 5

Si $R = 3$, $r = 1$ y $n = -1$, entonces $h(\alpha) = [3\text{Cos}(\alpha) + \text{Cos}(\alpha), 3\text{Sen}(\alpha) - \text{Sen}(\alpha)]$ es la ecuación para el astroide.

Ejemplo 6

Si $R = 4$, $r = 1$ y $n = -2$, entonces $h(\alpha) = [4\text{Cos}(\alpha) + \text{Cos}(2\alpha), 4\text{Sen}(\alpha) - \text{Sen}(2\alpha)]$ es la ecuación para la trocoide.

Ejemplo 7

Si $R = 2$, $r = 2$ y $n = -2$, entonces $h(\alpha) = [2\text{Cos}(\alpha) + 2\text{Cos}(2\alpha), 2\text{Sen}(\alpha) - 2\text{Sen}(2\alpha)]$ es la ecuación para el trifolium.

Ejemplo 8

Si $R = 2$, $r = 2$ y $n = 3$, entonces $h(\alpha) = [2\text{Cos}(\alpha) + 2\text{Cos}(3\alpha), 2\text{Sen}(\alpha) + 2\text{Sen}(3\alpha)]$ es la ecuación para la espiral de Durero.

Ejemplo 9

Si $R = 2$, $r = 4$ y $n = -2$, entonces $h(\alpha) = [2\text{Cos}(\alpha) + 4\text{Cos}(2\alpha), 2\text{Sen}(\alpha) - 4\text{Sen}(2\alpha)]$ es la ecuación para una elipse.

Ejemplo 10

Si $R = 2$, $r = 1$ y $n = 1$, entonces $h(\alpha) = [2\text{Cos}(\alpha) + \text{Cos}(\alpha), 2\text{Sen}(\alpha) + \text{Sen}(\alpha)]$ es la ecuación para la cardioide.

REFERENCIAS

- Lehmann, Ch. (1994). *Geometría analítica*. México: Editorial Limusa.
- Álvarez, J. (2006). *Curvas en la historia*. España: Nivela Libros y Ediciones.
- Sarmiento, B. y Rodríguez, Y. (2009a). *Los tres problemas clásicos de la geometría*. Bogotá, Colombia: El autor.
- Sarmiento, B. y Rodríguez, Y. (2009b). *Setenta curvas famosas*. Bogotá, Colombia: El autor.

EL LOGARITMO: ¿CÓMO ANIMAR UN PUNTO QUE RELACIONE UNA PROGRESIÓN GEOMÉTRICA Y UNA ARITMÉTICA?

Jeannette Vargas, Mario Pérez y María Teresa González

Universidad Colegio Mayor de Cundinamarca;

Universidad Jorge Tadeo Lozano; Universidad de Salamanca, España

jeannettevargash@usal.es, mario.perez@utadeo.edu.co, maite@usal.es

Volver sobre el concepto de función logarítmica, con los recursos de construcción geométrica y movimiento que nos brinda la tecnología, para una aproximación a la curva logarítmica a través de la relación entre una progresión geométrica y una progresión aritmética es reconstruir el concepto de logaritmo usando algunos de los elementos que inspiraron a Napier en el siglo XVII, los cuales consideramos deben estar ligados a la explicación que se presente actualmente en las aulas. Una construcción que evidencie esta relación entre las progresiones favorece la comprensión del concepto logaritmo y puede contribuir en la generación de reflexiones como, por ejemplo, por qué la base e y qué es lo “natural” del logaritmo natural.

INTRODUCCIÓN

La investigación en Educación Matemática alrededor de los procesos de aprendizaje de los estudiantes, relativos a los conceptos logaritmo y función logarítmica se ha incrementado en los últimos años debido a que se detectó la casi inexistencia de estudios sobre tal problemática a pesar de la importancia que estos conceptos tienen a nivel de la educación superior, el sinnúmero de aplicaciones en la modelación de fenómenos y cómo los profesores continúan manifestando la existencia, en sus grupos, de estudiantes con dificultades relacionadas con la notación y el significado de la palabra logaritmo (Kenney, 2005; Toumasis, 1993), el claro arraigo a los procedimientos memorísticos de algoritmos (Kastber, 2002; Berezovski, 2004), el concepto de logaritmo desligado de su génesis histórica (Berezovski, 2004; Toumasis, 1993) y, en el mejor de los casos, con inquietudes acerca de por qué, entre tantas opciones que podrían existir, el número e es utilizado como la base de los logaritmos naturales (Toumasis, 1993; Fernández y Pacheco, 2000; Katz, 1995).

Desde el punto de vista de su enseñanza, en el caso de las funciones logarítmicas se ha realizado una inversión respecto a su génesis histórica dado que lo

Vargas, J., Pérez, M. y González, M.T. (2011). El logaritmo: ¿cómo animar un punto que relacione una progresión geométrica y una aritmética? En P. Perry (Ed.), *Memorias del 20º Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones* (pp. 129-138). Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

habitual es que se enseñe con posterioridad a la función exponencial, mediante la función inversa cuando, en realidad, el concepto de logaritmo surgió previo a la notación de los exponentes (Vargas y González, 2007; Fauvel, 1995) e históricamente se identificaban como curvas logarítmicas las representaciones gráficas que relacionaban las progresiones aritméticas con las geométricas o viceversa. La presentación de las funciones logarítmicas, que se acostumbra hacer en las aulas, como inversa de las funciones exponenciales ha conducido a que se descuiden aspectos que la dotan de significado y que tienen que ver tanto con dicha génesis histórica, como puede ser la relación entre la estructura multiplicativa de la variable independiente y la aditiva del logaritmo, como con su importancia al ser una función que permite transformar multiplicaciones en sumas.

El logaritmo definido por Napier (1550-1617) utilizando una representación de dos puntos en movimiento –uno con velocidad constante y el otro con velocidad variable que va disminuyendo proporcionalmente a la distancia del punto inicial, desplazándose a través de una semirrecta el primero y a través de un segmento el segundo– además de haber tenido una evolución en el ámbito de la matemática que le ha permitido su vigencia en esta ciencia, ha sido sustituido, en las aulas, por oprimir una tecla en la calculadora o digitar ya sea $y = \log x$ o $y = \ln x$ para obtener, de inmediato, en una pantalla gracias a algún programa graficador, un número o una gráfica. Estas facilidades tecnológicas usadas sin reflexión alejan al estudiante de la comprensión del concepto de logaritmo y funciones logarítmicas, razón por la cual se requiere que los profesores e investigadores deban plantear opciones que permitan, mediante el software, utilizar tanto las ideas de las construcciones de los conceptos originales como el concepto actual.

Si se considera como tarea del profesor, por excelencia, el acercar a sus estudiantes al estudio de una ciencia, se deben propiciar actividades de estudio que ayuden a los estudiantes a hacer conexiones entre ideas y descubrir sus interrelaciones lógicas. Esto, puede hacer más plausible contextualizar la enseñanza de las matemáticas mediante la presentación de un concepto en donde se exploran respuestas a preguntas tales como ¿de dónde vino?, ¿quién, por qué y cómo alguien pudo mencionar esto? En esta línea de ideas sobre elementos que conforman el concepto de logaritmo desde su génesis histórica se pretende desarrollar el contenido de este documento que puede brindar una estrategia más de acercamiento a su estudio.

CONSTRUYENDO APROXIMACIONES A LA CURVA LOGARÍTMICA

Logaritmo neperiano y sistema de logaritmos

El interés de John Napier por resolver los problemas astronómicos de la época utilizando las recién descubiertas Reglas de Prosthaphaeresis¹ y los avances de la física, le permiten crear un sistema mecánico para efectuar cálculos aritméticos que llevó a la invención de los logaritmos:

Sean el segmento AB y una semirrecta CDE dados. Sea un punto P que parte de A y se mueve a lo largo de AB con velocidad variable que decrece en proporción a su distancia B ; supongamos que un punto Q parte al mismo tiempo de C y se mueve a lo largo de la semirrecta CDE con velocidad uniforme igual a la velocidad inicial del punto P ; entonces a la distancia variable CQ se le llama el logaritmo de la distancia PB . (Boyer, 2003, p. 303)

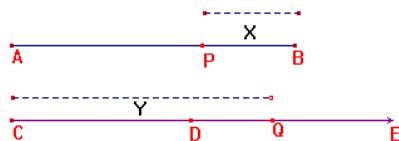


Figura 1. Representación del logaritmo de Napier

El término logaritmo acuñado por Napier proviene de “logos”, razón y “aritmos”, número, y hace referencia al “número de la razón”, es una medida del “número de veces” que la “acción razón” ha ocurrido. Este término, que incursionó como una práctica para agilizar los cálculos astronómicos, había evolucionado desde una etapa inicial, en la cual se plantea la relación entre los términos de una progresión geométrica y los correspondientes términos en la progresión aritmética sin que emergiera aún ningún concepto, siendo en el siglo XVII cuando se nomina el nuevo concepto y, desprendiéndose de la mirada en las progresiones discretas, se elabora un modelo que involucra variabilidad, covariación y una búsqueda de continuidad, generando una definición geométrica y la elaboración de tablas de cálculo. El no cumplimiento, en todos los casos, de la equivalencia del logaritmo de un cociente y producto, con la diferencia o suma de los logaritmos, se supera en la etapa siguiente que se ca-

1 Palabra griega que significa suma y resta.

racteriza por cambios que conllevan la aceptación de las igualdades $\log 1 = 0$; $\log 10 = 1$, y la utilización de 10 como base de los logaritmos, situación que se traduce en un esquema de logaritmo con propiedades como las que se consideran actualmente. Se generaliza la idea y se define el concepto de logaritmo como exponente, considerando la logaritmación como una de las dos operaciones inversas de la elevación de potencias, lo cual hace posible aplicar a los logaritmos procedimientos algebraicos. Finalmente, se llega a una de las principales etapas del desarrollo matemático del concepto, puesto que el estudio del logaritmo como área bajo la curva y, a través de series, elevó el concepto de logaritmo al rango analítico. Esta etapa y el desarrollo del Análisis, dan paso a la introducción de los logaritmos en el ámbito de las funciones trascendentes (Vargas y González, 2007, p. 142).

En la presentación que hacemos, acogemos dos de las fases en la invención de los logaritmos que estuvieron presentes en Napier (Moulton, 1915). Una primera, de carácter aritmético, como correspondencia entre progresiones aritméticas y geométricas y, la segunda, de carácter geométrico, que incorpora movimiento de puntos.

Definiciones de logaritmo como vínculo entre una progresión aritmética y una geométrica fueron utilizadas en el siglo XIX. Serret (1887), por ejemplo, establecía la siguiente:

I. Dadas dos progresiones crecientes e indefinidas:

$$1, r, r^2, r^3, r^4 \dots$$

$$0, d, 2d, 3d, 4d, \dots$$

una por cociente, comenzando por 1, y la otra con diferencia d comenzando por cero, se llama *logaritmos* de los números que forman parte de la progresión por cociente a los números que le corresponden respectivamente en la progresión por diferencia.

Las dos progresiones de las cuales se trata constituyen un *sistema de logaritmos* sujetas solamente a la condición de comenzar la primera por 1 y la segunda por 0. (Serret, 1887, p. 270)

REPRESENTACIÓN DE UN SISTEMA DE LOGARITMOS CON GEOMETRÍA DINÁMICA

Una representación gráfica del concepto de logaritmo dado por Serret, en un contexto de geometría dinámica, se muestra a continuación. Tomemos la progresión geométrica $1, r, r^2, r^3, \dots$ y la aritmética $0, d, 2d, 3d, \dots$ en donde di-

remos, con Serret, que logaritmo de 1 es 0, logaritmo de r es d , logaritmo de r^2 es $2d$, etc. En el eje horizontal colocamos la progresión geométrica y en el vertical la aritmética (los logaritmos).

Construimos geométricamente las potencias de r de la siguiente manera: se traza una circunferencia de radio 1 centrada en el origen O y señalamos un punto P de ella, cualquiera, ubicado en el primer cuadrante; trazamos luego el rayo OP cuyo ángulo de inclinación llamamos θ . La tangente a la circunferencia por P determina un punto de intersección Q con el eje x . Entonces: $\sec \theta = OQ/OP = OQ/1 = OQ$. El movimiento de P , en el primer cuadrante, permite recorrer todos los valores de OQ mayores que 1:

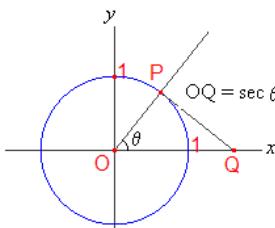


Figura 2

Construimos el ángulo θ para cada valor particular de $r > 1$ así: determinamos el punto Q tal que $OQ = r$; con la construcción para trazar tangentes a una circunferencia desde un punto exterior a ella, trazamos la tangente a la circunferencia desde Q , con punto de tangencia P en el primer cuadrante, y luego, la semirrecta OP , la cual tiene el ángulo de inclinación θ requerido.

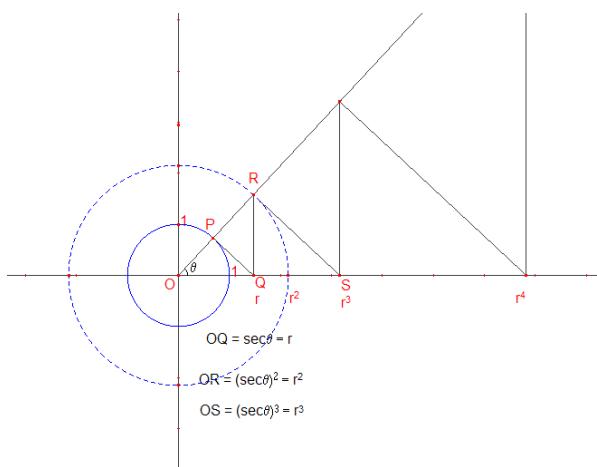


Figura 3

Trazando ahora la perpendicular al eje x por Q se determina el punto de intersección R con el rayo OP . El segmento OR tiene como longitud $(\sec \theta)^2 = r^2$. Si de nuevo se traza la perpendicular (Figura 3) al rayo OP por R y se determina la intersección S con el eje x se tiene que OS tiene longitud $(\sec \theta)^3 = r^3$. Continuando este proceso se construyen las potencias de r , con exponente entero positivo.

Serret extiende luego el concepto de logaritmo a los números obtenidos para las potencias de r que tienen exponente entero negativo: $r^{-1}, r^{-2}, r^{-3}, \dots$; para esto se amplía la progresión aritmética a los múltiplos negativos de d : $-d, -2d, -3d, \dots$ y decimos que el logaritmo de r^{-1} es $-d$, el logaritmo de r^{-2} es $-2d$, etc... La construcción geométrica de estas potencias de r (Figura 4) se continúa como antes pero hacia el interior del círculo:

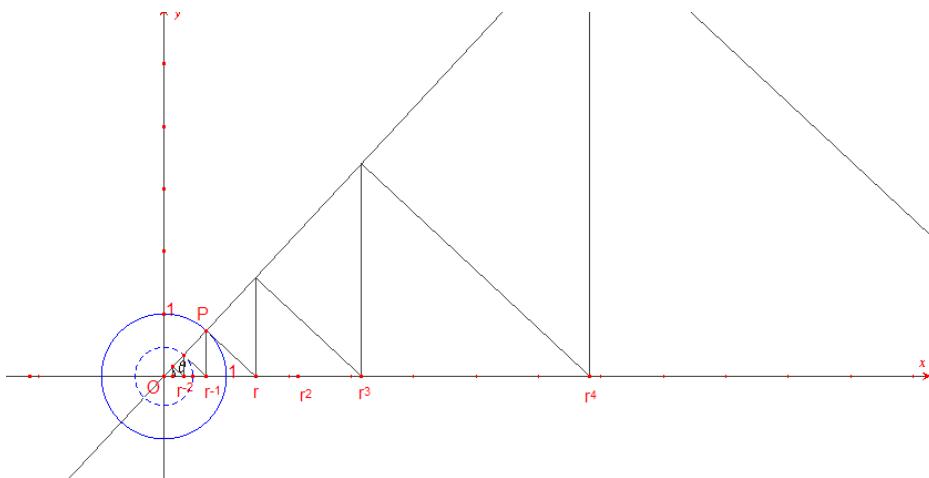


Figura 4

Una vez obtenidas las potencias, graficando los puntos de la forma (r^n, nd) , con n entero y uniendo con segmentos dichos puntos (Figura 5), se tiene una primera aproximación, con segmentos rectilíneos, a la curva logarítmica.

Una vez definido el logaritmo para las potencias enteras de r , Serret define los logaritmos de los números que son medias geométricas entre potencias sucesivas de r (potencias de r con exponente fraccionario) como las correspondientes medias aritméticas. Las medias geométricas se construyen con el método de Descartes (1637/1952) el cual describimos a continuación.

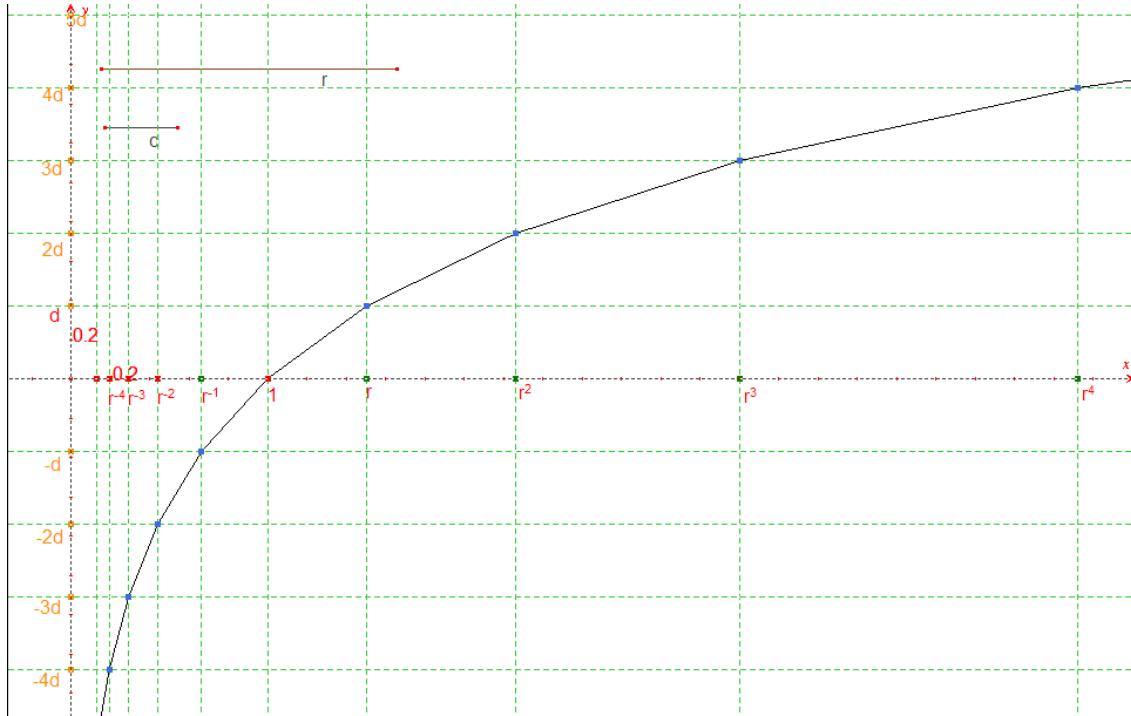


Figura 5

MÉTODO DE DESCARTES PARA CONSTRUIR MEDIAS GEOMÉTRICAS

En los libros II y III de la *Geometría*, Descartes describe un mecanismo formado por reglas articuladas que le permite construir n medias geométricas entre dos números a y b , $0 < a < b$:

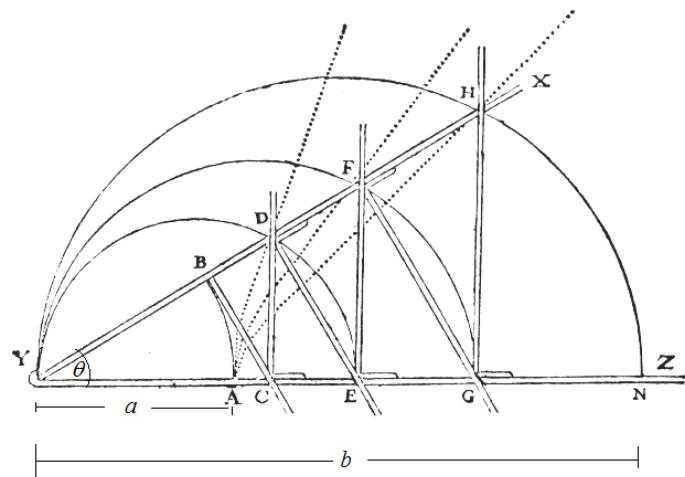


Figura 6. Mecanismo para construir n medias geométricas de Descartes

Las longitudes $\alpha = YA, YC, YD, YE, YF, \dots$ forman una progresión geométrica de razón $\sec \theta$. Ajustando el ángulo θ se pueden conseguir las medias geométricas que se deseen. En la figura se ha ajustado θ para conseguir 3 medias geométricas. El ajuste puede conseguirse por medio de la intersección de la semi-circunferencia de diámetro b con la curva descrita por el punto D al variar θ si se trata de conseguir una media geométrica; con la curva descrita por F si se trata de dos medias geométricas; con la curva descrita por H si se trata de tres, etc. En un ambiente de geometría dinámica las curvas descritas por D, F, H, \dots se determinan con la herramienta *lugar geométrico*.

En la Figura 7 se tiene una mejor aproximación a la curva logarítmica, obtenida al añadir los logaritmos de las dos medias geométricas entre potencias enteras, sucesivas, de r .

Finalmente, define Serret el logaritmo de los números que no son potencias fraccionarias de r con sucesiones convergentes de potencias fraccionarias de r .

Una aproximación a la *base* b del sistema de logaritmos que determinan las dos sucesiones, o sea, el número b para el cual $\log_b b=1$ se ve en la Figura 7:

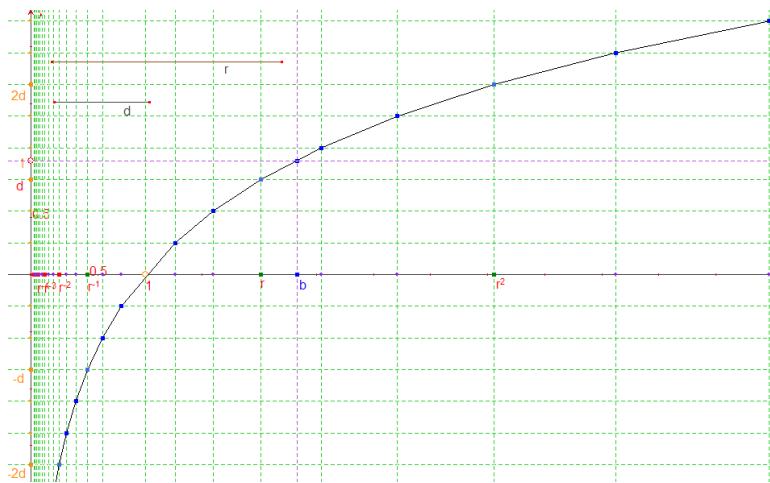


Figura 7

- I. Se traza la perpendicular al eje y por el punto de ordenada 1; por la intersección de esta recta y la línea poligonal se baja una perpendicular al eje x , la cual lo intercepta en un punto que es aproxidamente b .

Aun cuando la definición de logaritmo de Napier no es la definición que empleamos actualmente (Hobson, 1914), una adaptación de su método original,

basado en movimiento de puntos, podría usarse hoy en día como una alternativa para introducir los logaritmos naturales (Katz, 1995).

Asumamos que un punto P parte de 0 y se mueve hacia la derecha con velocidad constante v . Al mismo tiempo, parte un punto Q , desde 1, también hacia la derecha, con la misma velocidad v (Figura 8), la cual se incrementa de modo que en cualquier punto es proporcional a su distancia de 0. Supongamos que para el mismo tiempo transcurrido desde que salieron los dos puntos, P se encuentra a una distancia y de 0 y que Q se encuentra a una distancia x de 0. Definimos, de forma análoga a Napier, el logaritmo de x como y :

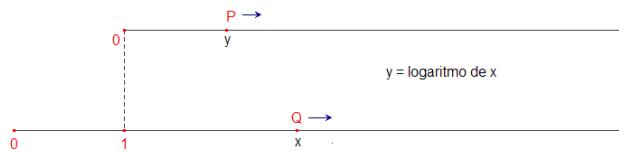


Figura 8

Con ayuda del cálculo podemos mostrar que el logaritmo así definido es el logaritmo natural:

Velocidad de $P = \frac{dy}{dt} = v$, $y(0)=0$. Resolviendo tenemos: $y=vt$

Velocidad de $Q = \frac{dx}{dt} = kx$, $x(0)=1$, $x'(0)=v$. Resolviendo: $\ln x=kt+c$. Como $x(0)=1$, $c=0$ y ya que $x'(0)=v$, $k=v$, luego $\ln x=vt=y$

MÁS PREGUNTAS A MANERA DE CONCLUSIONES

En el desarrollo de esta indagación, los argumentos geométricos y el uso de programas de geometría dinámica nos permitieron, no sólo realizar una construcción para la aproximación de la curva logarítmica dependiente de d y r , sino también abrir caminos para continuar con la investigación sobre el tema al plantear preguntas tales como:

¿Subyacen en esta aproximación a la curva logarítmica elementos que justifiquen diseñar una instrucción guiada hacia mecanismos de interiorización, coordinación, encapsulación de la función exponencial?

¿Cómo continuar, profundizar o lograr otras aproximaciones relacionadas con la explicación acerca de lo natural de los logaritmos naturales?

¿Admiten los pasos aquí detallados procesos de institucionalización del saber que favorezcan el aprendizaje/comprendión de la función logarítmica?

¿El uso, en el aula de clase, del registro de representación gráfica y su coordinación con otros registros de representación, llevará implícito la generación de obstáculos didácticos?

REFERENCIAS

- Berezovski, T. (2004). *An inquiry into high school students' understanding of logarithms*. Tesis de maestría no publicada, Simon Fraser University, Burnaby, BC, Canada.
- Boyer, C. (2003). *Historia de la matemática*. Madrid, España: Alianza Editorial.
- Descartes, R. (1637/1952). *The Geometry* (Trad. D.E. Smith y M.I. Latham). LaSalle, Illinois: Open Court.
- Fauvel, O. (1995). Revisiting the history of logarithms. En F. Swetz, J. Fauvel, O. Bekken, B. Johansson y V. Katz (Eds.), *Learn from the masters!* (pp. 39-47). Washington, DC, USA: Mathematical Association of America.
- Fernández, I. y Pacheco, J. (2000). ¿Por qué son naturales los logaritmos neperianos? *Epsilon*, 46-47, 107-116.
- Hobson, E.W. (1914). *John Napier and the invention of logarithms, 1614; a lecture* (pp. 23-24). Cambridge: University Press.
- Katz, V.J. (1995). Napier's logarithms adapted for today's classroom. En F. Swetz, J. Fauvel, O. Bekken, B. Johansson y V. Katz (Eds.), *Learn from the masters!* (pp. 49-55). Washington, DC, USA: Mathematical Association of America.
- Kenney, R. (2005). *Students' understanding of logarithmic function notation*. Ponencia presentada en la reunión anual del North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Roanoke, VA. Tomado el 14 de marzo de 2011, de: http://www.allacademic.com/meta/p24727_index.html.
- Moulton, L. (1915). The invention of logarithms, its genesis and growth. En C. Knott (Ed.), *Napier tercentenary memorial volume* (pp. 1-32). London, UK: Longmans.
- Serret, J.A. (1887). *Traité d'arithmétique* (séptima edición). París, Francia: Gauthier-Villars.
- Toumasis, C. (1993). Teaching logarithms via their history. *School Science and Mathematics*, 93(8), 428-434.
- Vargas, J. y González, M.T. (2007). Segmentos de la historia: la función logarítmica. *Matemáticas: Enseñanza Universitaria*, XV, 129-144.

LÓGICA Y GEOMETRÍA DINÁMICA: SU ARTICULACIÓN PARA APRENDER GEOMETRÍA PLANA

Carmen Samper, Patricia Perry, Óscar Molina, Armando Echeverry y Leonor Camargo

Universidad Pedagógica Nacional

carmensamper@gmail.com, pperryc@yahoo.com.mx, ojmolina@pedagogica.edu.co,
aecheverri@pedagogica.edu.co, lcamargo@pedagogica.edu.co

Este cursillo se propone sensibilizar a los asistentes con respecto al papel de la lógica matemática en el aprendizaje y la enseñanza de la demostración en geometría plana. Además de exponer y ejemplificar asuntos problemáticos en el desempeño de los estudiantes cuando construyen demostraciones, presentamos ejemplos de estrategias didácticas que pueden resultar útiles para el aprendizaje de la demostración, en las que la geometría dinámica juega un papel importante.

En la actualidad se percibe más claramente la problemática compleja en la que está inmersa la construcción de demostraciones por parte de estudiantes de básica secundaria y universidad. Un aspecto que ha sido objeto de discusión entre los investigadores que se han preocupado por los procesos de enseñanza y aprendizaje de la demostración es el papel de la lógica matemática en ellos. Específicamente, varios estudios (e.g., Epp, 2003; Selden y Selden, 2009) se han ocupado de determinar cuáles son los temas que se deben incluir y los énfasis que se deben hacer en cursos cuya intención es apoyar a los estudiantes en su transición desde la matemática enfocada en lo procedural a aquella en la que la demostración juega un papel crucial. A ese respecto, la necesidad del estudio de la lógica matemática ha sido un asunto polémico.

Por otro lado, se reconoce ampliamente el potencial de la geometría dinámica para apoyar el aprendizaje de la demostración (Bartolini y Mariotti, 2008). Su uso para resolver tareas que buscan favorecer actividades matemáticas tales como la producción de conjjeturas, el razonamiento argumentativo y la vinculación de éste con la producción de demostraciones matemáticas, apoya la participación real de los estudiantes en la actividad demostrativa.

El objetivo del cursillo es sensibilizar a los asistentes con respecto al papel de la lógica matemática en el aprendizaje y la enseñanza de la demostración y de asuntos problemáticos asociados a ella que se evidencian en el desempeño de

los estudiantes cuando construyen demostraciones en geometría plana. Proponemos a los asistentes desarrollar algunos problemas que ejemplifican las estrategias didácticas con las que buscamos apoyar el aprendizaje de la demostración, en las que la geometría dinámica juega un papel importante.

BREVE REVISIÓN DE LA LITERATURA

Existen posiciones encontradas con respecto a la inclusión del estudio de la lógica matemática en la formación de estudiantes de carreras que tienen un fuerte componente matemático (i.e., ingenierías, licenciaturas de matemáticas, matemáticas). Según Selden y Selden (2009) se debe trabajar con los alumnos conceptos, teoremas, tipos de demostraciones y aspectos de éstas desde el punto de vista formal, lo cual implica abrir un espacio para abordar cuestiones de la lógica matemática, en el contexto del trabajo de los estudiantes, cuando ello contribuya a la comprensión de algún asunto problemático. En contraposición, Epp (2003) afirma que se debe trabajar la lógica elemental (e.g., conectivos, cuantificadores, esquemas de razonamiento) en una unidad inicial de un curso cuyo fin sea el desarrollo del razonamiento matemático, ligándola con el lenguaje y con situaciones cotidianas y matemáticas. Nuestra postura didáctica se acerca más a la de Selden y Selden.

En lo que sí coinciden los investigadores es en el reconocimiento de asuntos problemáticos estructurales que afectan el aprendizaje de la demostración. Consideramos como *asuntos problemáticos* las acciones de los estudiantes que no obedecen a conceptos o procedimientos matemáticos institucionales, o a las normas sociomatemáticas establecidas para el funcionamiento en el aula. Estas últimas son reglas implícitas, o que el profesor declara, relativas al tratamiento que se le dará a la matemática misma y con respecto a las cuales se espera una enculturación de los estudiantes.

A partir de nuestro análisis de las acciones de los estudiantes al construir una demostración, hemos podido agrupar las problemáticas en torno a cuatro asuntos estructurales, dos de los cuales son pertinentes para el tema que nos ocupa: el uso de la lógica matemática como guía y sustento del razonamiento requerido para producir una justificación, y la comprensión y el manejo del enunciado de un teorema (Perry, Camargo, Samper y Rojas, 2006). A partir del estudio cuidadoso de estas dificultades, diseñamos estrategias, es decir, planes de acción para seguir deliberadamente con el propósito de lograr la modificación del comportamiento de los estudiantes, a largo o corto plazo, respecto a un

asunto problemático (Samper, Perry, Echeverry y Molina, 2008). En su diseño tuvimos en cuenta, entre otras cosas, que es necesario: aclarar la estructura lógica de las proposiciones; enfatizar en la realización de acciones de carácter heurístico para favorecer la construcción de conjeturas que establezcan relaciones de dependencia que dan significado a la condicional o de contraejemplos para entender esquemas de razonamiento como la Ley de De Morgan y Modus Tollendo Tollens; e identificar el papel que juegan las condicionales y el estudio de casos en la construcción de demostraciones formales y en los mecanismos para producir una cadena deductiva.

Durand-Guerrier (2003) propone usar reflexivamente la condicional abierta $Px \rightarrow Qx$ para ayudar a que los estudiantes tengan mejor comprensión de aspectos lógico-matemáticos y porque ello propicia el desarrollo del razonamiento plausible. Para una condicional abierta, se considera *ejemplo* cualquier caso en el que el antecedente y el consecuente son verdaderos, mientras que es *contra-ejemplo* cualquier caso en el que el antecedente es verdadero y el consecuente falso. Si se aceptan proposiciones contingentes (i.e., en las que no puede decidirse su valor de verdad) en los cursos de matemáticas, se abre un panorama rico en posibilidades de análisis. Esta consideración enriqueció nuestras estrategias.

Jones (2000) señala que la preparación para la demostración puede hacerse con actividades de enseñanza que lleven a los estudiantes a *tener conciencia de la dependencia entre propiedades* y agrega que ello hace que el razonamiento deductivo sea significativo. Olivero (2002) asegura que el aprendizaje de la demostración se favorece mediante procesos, apoyados en la geometría dinámica, que focalizan la atención de los estudiantes en hechos particulares de los cuales van emergiendo las conjeturas y los elementos para realizar una demostración. Reconoce además que el papel fundamental del programa de geometría dinámica es constituirse en instrumento con el cual el contexto interno del aprendiz (que incluye el conocimiento previo y su experiencia) se puede hacer explícito y puede ser compartido con los demás estudiantes.

EJEMPLOS DE ACTIVIDADES

En el cursillo se realizarán actividades de distinta índole con los asistentes: análisis de respuestas de estudiantes, análisis de problemas propuestos, y resolución de problemas con geometría dinámica.

Ejemplo:

- a) Complete el siguiente enunciado:
Si _____, entonces el cuadrilátero $ABCD$ es un cuadrado.
- b) Con geometría dinámica, construya una figura que cumpla las condiciones que consignó en la parte a. Anote los pasos de construcción realizados.
- c) ¿Es posible transformar el enunciado en el ítem a) a partir de su construcción?

REFERENCIAS

- Bartolini Bussi, M.G. y Mariotti, M.A. (2008). Semiotic mediation in the mathematics classroom: Artifacts and signs after a Vygotskian perspective. En L.D. English (Ed.), *Handbook of international research in mathematics education* (pp. 746-783). New York: Routledge.
- Durand-Guerrier, V. (2003). Which notion of implication is the right one? From logical considerations to a didactic perspective. *Educational Studies in Mathematics*, 53(1), 5-34.
- Epp, S.S. (2003). The role of logic in teaching proof. *American Mathematical Monthly*, 110 (10), 886-899.
- Jones, K. (2000). Providing a foundation for deductive reasoning: Students' interpretation when using dynamic geometry software and their evolving mathematical explanations. *Educational Studies in Mathematics*, 44(1-3), 55-85.
- Olivero, F. (2002). *The proving process within a dynamic geometry environment*. Tesis doctoral no publicada, University of Bristol, Graduate School of Education, UK.
- Perry, P., Camargo, L., Samper, C. y Rojas, C. (2006). *Actividad demostrativa en la formación inicial del profesor de matemáticas*. Bogotá, Colombia: Fondo Editorial de Universidad Pedagógica Nacional.
- Samper, C., Perry, P., Echeverry, A. y Molina, Ó. (2008). *Aprendizaje de la demostración en geometría euclídea con el apoyo de un programa de geometría dinámica*. Reporte de investigación no publicado, Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, Colombia.
- Selden, J. y Selden, A. (2009). Understanding the proof construction process. En F.L. Lin, F.J. Hsieh, G. Hanna y M. de Villiers (Eds.), *Proceedings of the ICMI Study 19 Conference: Proof and proving in mathematics education* (vol. 2, pp. 196-201). Taipei: National Taiwan Normal University.

CONSTRUCCIÓN DE CÓNICAS, TANGENTES Y ENVOLVENTES

Benjamín Sarmiento

Universidad Pedagógica Nacional

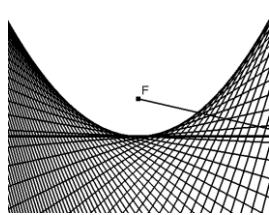
bsarmiento@pedagogica.edu.co

Este cursillo se centra en la construcción de las cónicas y sus tangentes con apoyo del software Cabri Plus II, tema desarrollado en el curso de geometría analítica de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional. Se inicia presentando los conceptos de envolvente de una familia de rectas, directrices, focos y circunferencias focales. En la primera sesión se presentarán las construcciones más comunes de las cónicas, es decir, construcciones a partir de las definiciones. En la segunda sesión se construirá la familia de tangentes de cada cónica. En la tercera sesión se construirán tangentes específicas dada la cónica y un punto exterior a ella. En lo posible, los asistentes elaborarán definiciones para objetos que usualmente no se definen en los textos cuando se estudian las cónicas, tales como recta directriz y circunferencia focal.

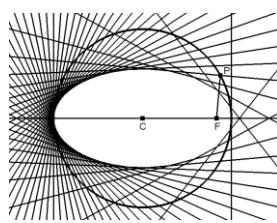
CONSTRUCCIÓN DE ENVOLVENTES

En esta sección se construirán las cónicas como envolventes de familias de rectas, usando dos métodos (ver Lehman, 1994; Oteyza et al., 1994; Sarmiento y Rodríguez, 2009a, 2009b).

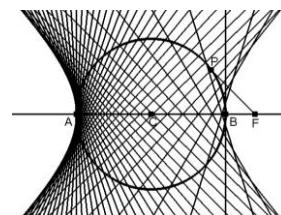
Primer método



(a) Parábola



(b) Elipse



(c) Hipérbola

Figura 1. Construcción de las envolventes de la parábola, la elipse y la hipérbola (primer método)

Parábola: se utilizará una recta L (que contiene al vértice) y un punto F (foco) exterior a la recta L (Figura 1a).

Sarmiento, B. (2011). Construcción de cónicas, tangentes y envolventes. En P. Perry (Ed.), *Memorias del 20º Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones* (pp. 143-146). Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

Elipse: se utilizará una circunferencia con centro C (circunferencia principal) y un punto F (foco) interior a la circunferencia (Figura 1b).

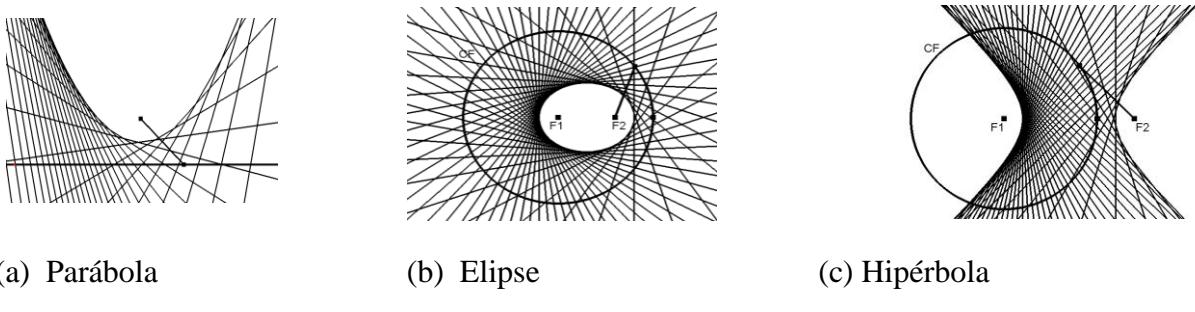
Hipérbola: se utilizará una circunferencia con centro C (circunferencia principal) y un punto F (foco) exterior a la circunferencia (Figura 1c).

Segundo método

Parábola: se utilizarán un punto F (foco) y una recta D (directriz) (Figura 2a).

Elipse: se utilizará una circunferencia con centro F_1 (circunferencia focal) y un punto F_2 (foco) interior a la circunferencia, donde F_1 y F_2 son los focos (Figura 2b).

Hipérbola: se utilizará una circunferencia con centro F_1 (circunferencia focal) y un punto F_2 (foco) exterior a la circunferencia, en donde los focos son F_1 y F_2 (Figura 2c).



(a) Parábola

(b) Elipse

(c) Hipérbola

Figura 2. Construcción de las envolventes de la parábola, la elipse y la hipérbola (segundo método)

CONSTRUCCIÓN DE TANGENTES

En esta sección se definirán los focos, las directrices y circunferencias focales como lugares geométricos, y serán utilizados para la construcción de: tangente a una cónica por un punto dado, tangentes que pasan por un punto exterior a la cónica, y tangentes a la cónica que tengan una pendiente específica.

Tangentes para la parábola

Aquí se considerarán tres casos: (1) Dada la parábola, su foco y directriz, construir la tangente por un punto T de la parábola. (2) Dada la parábola, su foco y directriz, construir las tangentes a la parábola que pasan por un punto exterior a la parábola. (3) Dada la parábola, su foco y directriz, construir la

tangente a la parábola que tiene la misma pendiente de una recta dada. En la Figura 3 se ilustran los resultados finales de las construcciones para los tres casos.

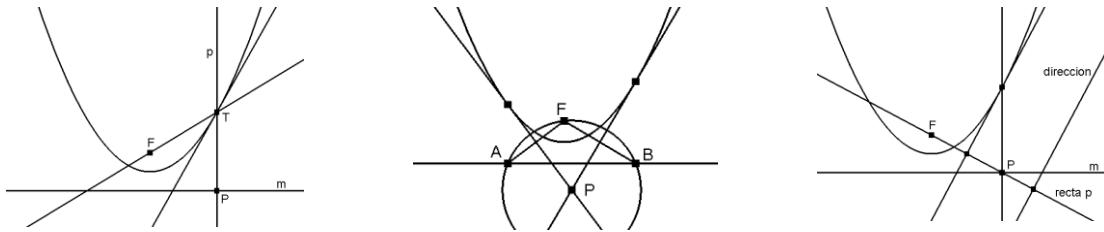


Figura 3. Construcción de las tangentes de la parábola

Tangentes para la elipse

Aquí se considerarán tres casos: (1) Dada la elipse y sus focos, construir la tangente por un punto T de la elipse. (2) Dada la elipse y sus focos, construir las tangentes a la elipse que pasan por un punto exterior a la elipse. (3) Dada la elipse y sus focos, construir la tangente a la parábola que tiene la misma pendiente de una recta dada. En la Figura 4 se ilustran los resultados finales de las construcciones para los tres casos.

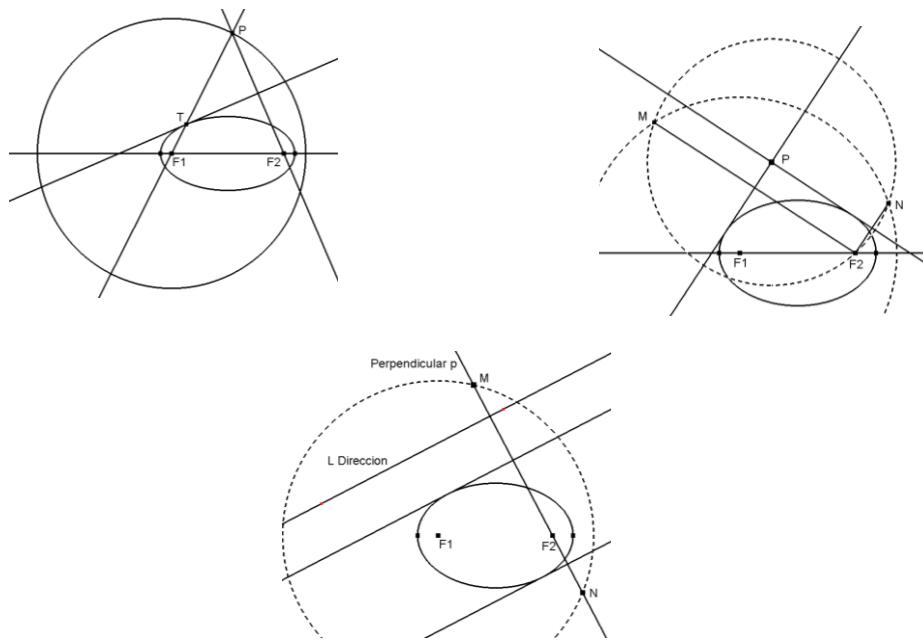


Figura 4. Construcción de las tangentes de la elipse

Tangentes para la hipérbola

Aquí se considerarán tres casos: (1) Dada la hipérbola y sus focos, construir la tangente por un punto T de la hipérbola. (2) Dada la hipérbola y sus focos, construir las tangentes a la hipérbola que pasan por un punto exterior a la hipérbola. (3) Dada la hipérbola y sus focos, construir la tangente a la hipérbola que tiene la misma pendiente de una recta dada. En la Figura 5 se ilustran los resultados finales de las construcciones para los tres casos.

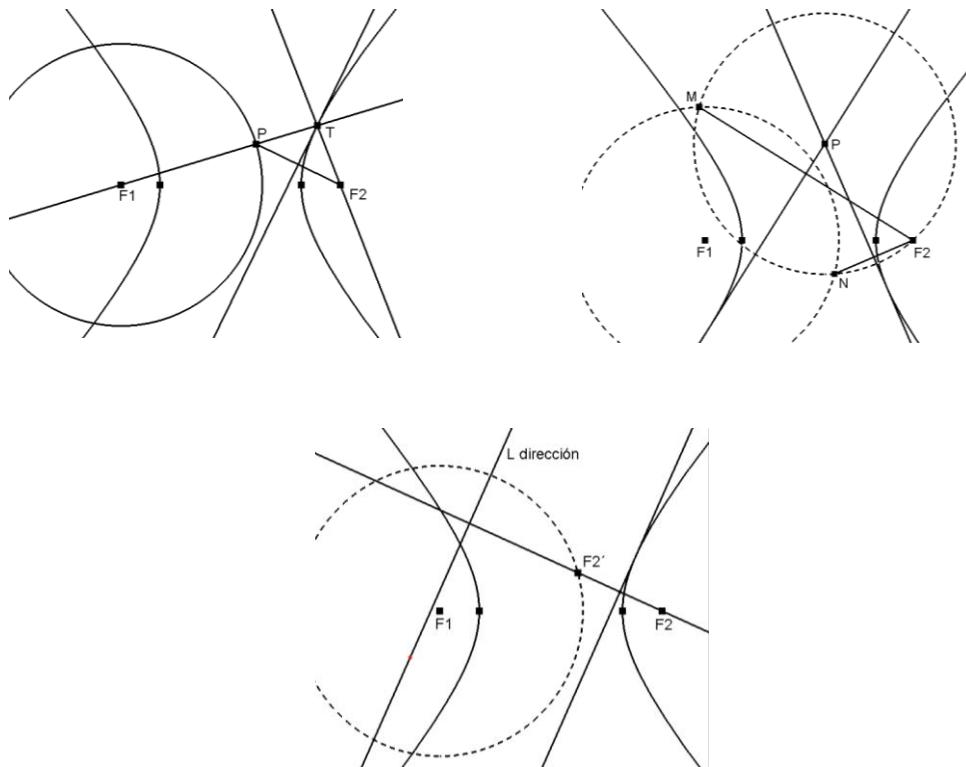


Figura 5. Construcción de las tangentes de la hipérbola

REFERENCIAS

- Lehmann, C. (1994). *Geometría analítica*. México: Limusa.
- Oteyza, E. et al. (1994). *Geometría analítica*. México: Prentice-Hall Hispanoamericana, S.A.
- Sarmiento, B. y Rodríguez, Y. (2009a). *Los tres problemas clásicos de la geometría*. Bogotá, Colombia: El autor.
- Sarmiento, B. y Rodríguez, Y. (2009b). *Setenta curvas famosas*. Bogotá, Colombia: El autor.

Comunicaciones breves

OCTÁGONOS QUE TESELAN EL PLANO

Diana Acosta y Diana Rincón

Egresadas de la Licenciatura en Matemáticas, Universidad Pedagógica Nacional
dalexacosta@gmail.com, dikristi@hotmail.com

Esta comunicación breve surge del trabajo realizado en el curso *Teselados* del Club de Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional. La experiencia se plantea desde una clasificación de algunos octágonos que teselan el plano, para demostrar, a partir de técnicas de Escher, dos nuevos teoremas propuestos por los estudiantes.

DE LOS CUADRADOS A LOS OCTÁGONOS

La experiencia que se reporta en esta ponencia tuvo lugar durante la realización de una práctica que hace parte del programa de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional.

Al iniciar el curso *Teselados* se indujo a los estudiantes a realizar teselaciones sencillas pidiéndoles que decoraran cuadrados y los giraran para formar diferentes mosaicos. A partir de esta actividad se consiguieron diferentes recubrimientos que permitieron visualizar diferentes tipos de octágonos irregulares que teselan el plano. La teselación que se presenta en la Figura 2 surgió a partir del recubrimiento del plano con el cuadrado de la Figura 1. El objetivo de la clase era que los estudiantes identificaran los tipos de polígonos que visualizaban allí para clasificarlos y verificar si tenían características especiales, de manera que se lograran proponer nuevos teoremas. En las Figuras 3 y 4 se pueden observar dos tipos de octágonos que teselan el plano, que surgen a partir de la Figura 2.



Figura 1. Cuadrado fraccionado por dos segmentos

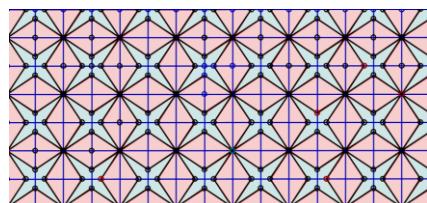


Figura 2. Recubrimiento del plano a partir del cuadrado de la Figura 1

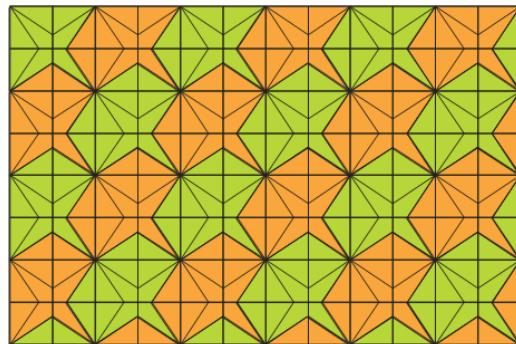


Figura 3. Plano teselado por octágonos a partir de la Figura 2

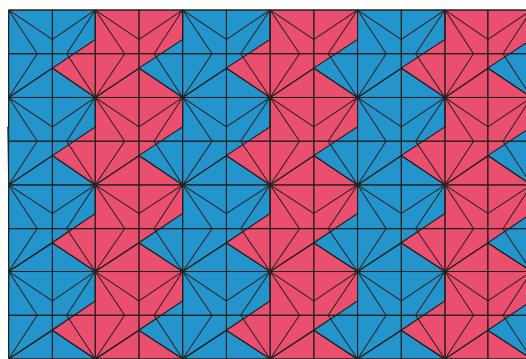


Figura 4. Plano teselado por octágonos a partir de la Figura 2

Sin embargo, en recubrimientos como el que se muestra en la Figura 5, los estudiantes encontraron octágonos que no teselan el plano y, en consecuencia, es necesario llenar los espacios vacíos con cuadrados si se pretende teselar el plano.

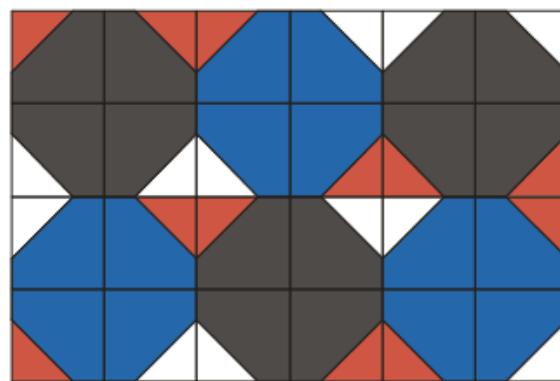


Figura 5. Plano teselado por octágonos y cuadrados

En tal circunstancia, se les propuso a los estudiantes que identificaran características comunes a octágonos que teselan el plano.

Características de algunos octágonos que teselan el plano

Se presentó a los estudiantes la clasificación de los octágonos de la Figura 6, encontrados en diferentes recubrimientos diseñados por ellos, de manera que se pudieran estudiar las características comunes de los que sí teselan el plano.

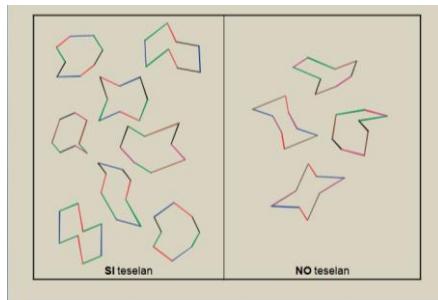


Figura 6. Clasificación inicial de los octágonos encontrados en los recubrimientos diseñados por los estudiantes

Al estudiar las características comunes de los octágonos que recubren el plano, los estudiantes hicieron las siguientes generalizaciones:

- Los octágonos que tienen exactamente dos pares de lados opuestos, paralelos y congruentes, teselan el plano (Figura 7).
- Los octágonos que tienen tres pares de lados paralelos y congruentes, separados por dos segmentos en una dirección y cuatro en la otra dirección, teselan el plano (Figura 8).

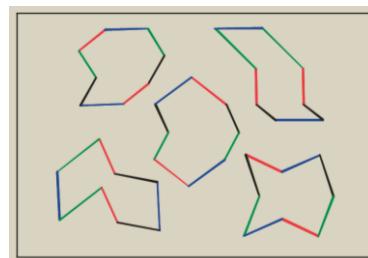


Figura 7. Octágonos que tienen dos pares de lados opuestos, paralelos y congruentes



Figura 8. Octágonos que tienen tres pares de lados paralelos y congruentes, separados por dos segmentos en una dirección y cuatro segmentos en la otra dirección

Validez de las conjeturas

Teniendo en cuenta las características que los estudiantes encontraron en los octágonos que teselan el plano, se establecieron dos nuevos teoremas:

- **Teorema 1:** Si un octágono tiene cuatro pares disyuntos de lados paralelos y congruentes que están separados por dos segmentos en una dirección y por cuatro segmentos en la otra dirección, entonces este octágono tesela el plano.
- **Teorema 2:** Si un octágono tiene cuatro pares disyuntos de lados paralelos congruentes y exactamente dos de estos pares son opuestos, entonces este octágono tesela el plano.

La justificación de la validez de los dos teoremas está basada en la aplicación de la primera técnica de Escher:

Comience con un polígono que ya se sepa embaldosa el plano, y que tenga dos lados paralelos y congruentes. Modifique uno de estos dos lados y translade esa modificación al otro lado. Si desea, aplique el mismo procedimiento a otro par de lados paralelos y congruentes. La figura que resulta embaldosa el plano.
(Mariño, 2004, p. 70)

Los octágonos que se mencionan en el Teorema 1 pueden ser construidos a partir de paralelogramos, quitando un triángulo a un lado del paralelogramo y añadiéndolo al lado opuesto, y repitiendo este procedimiento en el otro par de lados.

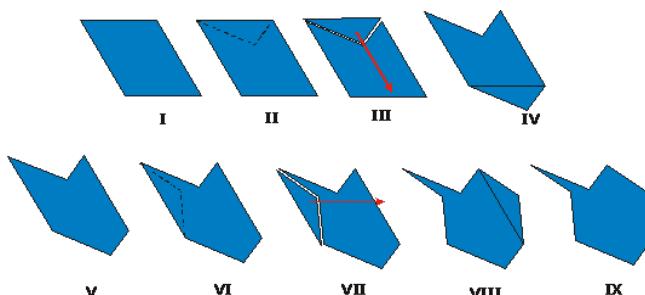


Figura 9. Octágonos construidos a partir de un paralelogramo

Los octágonos que se nombran en el Teorema 2 son de dos tipos. En los primeros, los pares de lados opuestos paralelos y congruentes están separados por un segmento; en los segundos, los lados que tienen otro lado paralelo, congruente y opuesto, son adyacentes entre sí.

En el primer caso, estos octágonos se pueden obtener utilizando la primera técnica de Escher, recortando un cuadrilátero sobre uno de los lados y añadiéndolo en su opuesto (Figura 10).

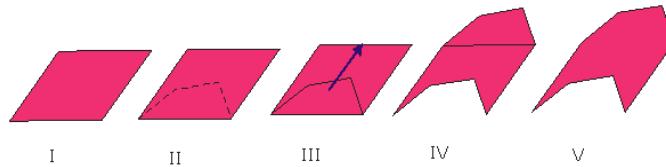


Figura 10. Octágonos construidos a partir de un paralelogramo

En el segundo caso, los octágonos pueden obtenerse utilizando la misma técnica pero sobre un par-hexágono, que es un hexágono en el cual cada lado tiene un lado paralelo y congruente a él (Figura 11).

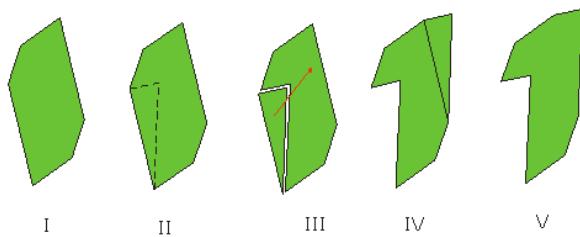


Figura 11. Octágonos construidos a partir de un par-hexágono

Sin embargo, esta no es una justificación válida mientras no se argumente por qué los par-hexágonos (Figura 12) teselan el plano.

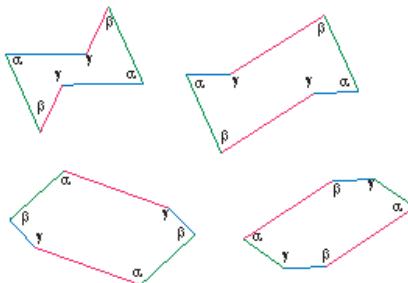


Figura 12. Par-hexágonos convexos y no convexos

Teniendo en cuenta que las medidas de los ángulos interiores de cualquier hexágono suman 720° y que los ángulos opuestos de un par-hexágono son congruentes, se tiene que:

$$\alpha + \beta + \gamma + \alpha + \beta + \gamma = 720^\circ$$

$$2\alpha + 2\beta + 2\gamma = 720^\circ$$

$$2(\alpha + \beta + \gamma) = 720^\circ$$

$$\alpha + \beta + \gamma = 360^\circ$$

De esta manera, si se hacen coincidir los ángulos cuya medida son α , β y γ , se puede diseñar una teselación como muestra la Figura 13, con lo cual queda justificado que los par-hexágonos teselan el plano y el Teorema 2.

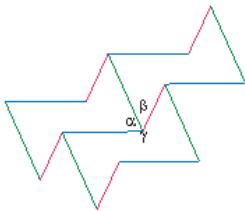


Figura 13. Inicio del recubrimiento de una porción del plano con par-hexágonos

REFERENCIAS

Mariño, R. (2004). *La geometría en el arte y el diseño*. Bogotá, Colombia: Pro-Offset Editorial Ltda.

LAS CONTRIBUCIONES DE HILBERT Y DE MAX DEHN

A LA GEOMETRÍA NO ARQUIMEDIANA

Sherly Alfonso

Universidad Nacional de Colombia

spalfonsos@unal.edu.co

Las contribuciones de Hilbert y de Max Dehn a la geometría no arquimediana es un trabajo de grado, en el nivel de pregrado en matemáticas, en el cual se describe la investigación acerca de la geometría no arquimediana, emprendida por Hilbert y continuada por su alumno Max Dehn. Tal investigación llevó a esclarecer el alcance del Axioma de Arquímedes y la importancia de la axiomática hilbertiana. En este trabajo se ahonda en el aporte hecho por Dehn en su tesis: *Los teoremas de Legendre acerca de la suma de los ángulos en un triángulo*, debido a que este no ha sido estudiado en profundidad a diferencia de la investigación hecha por Hilbert en *Fundamentos de la geometría*.

MOTIVACIÓN

En su obra *Fundamentos de la geometría*, Hilbert (1996/1899) presenta los veinte axiomas de su construcción en cinco agrupamientos; el quinto, referente a la continuidad, contiene el Axioma de Arquímedes. Se dice que una geometría es arquimediana si en ella es válido el Axioma de Arquímedes; se llama no arquimediana si en ella no se satisface tal axioma.

Aunque, en la obra antes citada, Hilbert logró demostrar resultados acerca de la independencia de los axiomas de continuidad, le confió varias preguntas pendientes al matemático alemán Max Dehn, quien las respondió en su tesis (tesis de doctorado), guiado por su director y maestro David Hilbert.

El meollo de la investigación emprendida por Dehn estaba en responder la siguiente cuestión: Dado que las demostraciones hechas por el matemático francés Legendre de sus teoremas se apoyan fuertemente en el Axioma de Arquímedes, ¿es necesario tal axioma para que sean válidos los teoremas mencionados?

Las respuestas de Dehn fueron:

Alfonso, S. (2011). Las contribuciones de Hilbert y de Max Dehn a la geometría no arquimediana. En P. Perry (Ed.), *Memorias del 20º Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones* (pp. 155-160). Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

- Sin el axioma de Arquímedes no es posible demostrar el Primer Teorema de Legendre según el cual *la suma de los ángulos internos de un triángulo no puede ser mayor que dos ángulos rectos*.
- Sin el Axioma de Arquímedes es posible demostrar el Segundo Teorema de Legendre según el cual *si en un triángulo cualquiera la suma de los ángulos es igual a dos ángulos rectos, entonces lo es en todo triángulo*. Dehn demuestra este hecho mostrando un teorema más general.

Dehn, además de llegar a responder contundentemente mediante las dos afirmaciones anteriores, llega al siguiente resultado sorprendente:

La suma de los ángulos internos de un triángulo es:	A través de un punto exterior a una recta pasa		
	Ninguna paralela a ésta	Una única paralela a ésta	Infinitas paralelas a ésta
> 2R	Geometría elíptica	Imposible	Geometría no legendriana
= 2R	Imposible	Geometría euclíadiana	Geometría semieuclíadiana
< 2R	Imposible	Imposible	Geometría hiperbólica

Resultado general de Max Dehn

Las conclusiones de la investigación de Dehn fueron halagadas por su maestro Hilbert, ya que representaron un resultado capital para los fundamentos de la geometría.

Teniendo en cuenta dicho contexto, la propuesta inicial del director de este trabajo de grado, Alberto Campos Sánchez, consistía en escribir una apreciación a fondo del artículo: Cerroni, C. (2007). The contributions of Hilbert and Dehn to non archimedian geometries and their impact on the Italian school. *Revue d'histoire des mathématiques*, XIII, 259-299.

El artículo es un estudio histórico extenso acerca de la disertación de Max Dehn. Sin embargo, pronto se hizo manifiesto que Cinzia Cerroni no hizo explícitos muchos detalles matemáticos necesarios para el entendimiento total de

dicha investigación. Este hecho motivó a que el trabajo de grado *Contribuciones*¹ (Alfonso, 2010) se enfocara en realizar un estudio directo de la disertación de Dehn, con el fin de poder entenderla y así exponerla con total claridad.

METODOLOGÍA

La metodología se describe a continuación. Primero se estudió de manera preliminar la investigación de Hilbert ya que Dehn utilizó posteriormente algunos de los resultados de aquél. Para esto se tomó como fuente su memorable obra *Fundamentos de la geometría*.

Luego se estudió en profundidad la disertación de Dehn, *Die Legendre'schen Sätze über die Winkelsumme im Dreieck* (Los teoremas de Legendre acerca de la suma de los ángulos en un triángulo) (Dehn, 1900). Este estudio consistió en la traducción de la disertación del idioma alemán al español, su entendimiento y posteriormente la realización de una exposición escrita.

Así, *Contribuciones* resultó una exposición cuidadosa de los teoremas establecidos por Max Dehn, importantes para ilustrar una de las facetas del pensamiento axiomático de Hilbert: combinación y alcance de cada uno de los postulados en una axiomatización.

Con el fin de recordar dicha faceta, se recuerda que para la construcción de la geometría se necesitan proposiciones fundamentales, las cuales reciben el nombre de axiomas. El presentar de manifiesto dichos axiomas y estudiar sus conexiones fue un problema discutido desde los tiempos de Euclides. Más aún, en el siglo XIX con la creación de geometrías no euclidianas, los geómetras se vieron obligados a hacer un estudio del estatus de la geometría, la cual se consideraba una disciplina entre matemática pura y ciencia de la naturaleza. Varios geómetras intentaron arreglar el problema, pero sólo fue Moritz Pasch quien logró llegar a un avance en la investigación de los fundamentos de la geometría al dar a esta ciencia la categoría de sistema formal. Sin embargo, sólo Hilbert en *Fundamentos de la geometría* logra por primera vez exponer la geometría de manera completamente axiomática. Según la apreciación de Bourbaki (1974, citado en Campos, 1999),

Y es que, en efecto, HILBERT no contento con suministrar un sistema completo de axiomas para la geometría euclidiana, clasifica los axiomas en diversos

¹ Se abrevia como *Contribuciones* el trabajo en el que se basa este artículo.

agrupamientos de naturaleza diferente y pone todo su interés en la determinación del alcance exacto de cada uno de tales agrupamientos, no solamente mediante el desarrollo de las consecuencias lógicas de cada axioma aisladamente, sino más aún mediante la discusión de las diversas “geometrías” obtenidas al suprimir o modificar algunos axiomas (las de LOBACHEVSKI o RIEMANN devienen apenas casos particulares). (pp. 155-156)

RESULTADOS

Exponiendo de manera global los procesos que llevó a cabo Dehn para poder responder la pregunta de Hilbert, se puede resaltar lo siguiente:

La demostración de Max Dehn se basó tanto en la obra citada de Hilbert como en la de Pasch, 1882, *Lecciones de geometría moderna*.

Dehn no sólo tuvo que ampliar la geometría de la obra de Hilbert sino que debió además construir una nueva geometría no euclíadiana y otra geometría no legendriana.

En la geometría ampliada de Max Dehn vale el Teorema de Desargues y con base en este teorema, Dehn puede introducir nociones de pseudoparalelismo y de pseudocongruencia así como de pseudomayoración, pseudoigualdad y pseudominoración, junto con propiedades convenientes para poder resolver el problema (ver Figura 1).

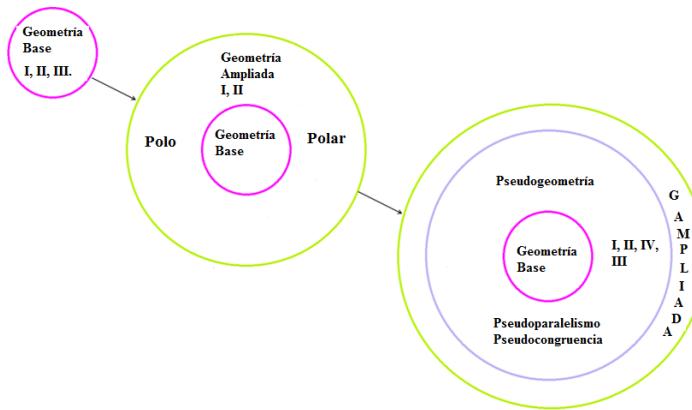


Figura 1. Construcción realizada por Dehn (Axioma de Arquímedes – Segundo Teorema de Legendre)

En *Contribuciones* se logra penetrar en los complejos razonamientos de Dehn; al explicitar algunos antecedentes o consecuentes meramente enunciados. Por ejemplo:

En el parágrafo 6 de su disertación, Dehn demuestra un teorema que relaciona la congruencia con la pseudocongruencia y al iniciar el parágrafo 7 afirma que dicha relación es la base para poder demostrar la independencia entre el Segundo Teorema de Legendre y el Axioma de Arquímedes. Sin embargo, al leer tal demostración no se observa fácilmente en qué momento se utiliza esta relación, por esto en la página 81 de *Contribuciones* se resalta el momento en el que ésta es necesaria.

Más aún, en la demostración de la relación entre congruencia y pseudocongruencia, Dehn razona por medio de ecuaciones con razones dobles cuyos cálculos no se presentan. Al explicitar los cálculos, no se logra la conclusión de Dehn. No obstante, en *Contribuciones* se complementa la argumentación obteniendo los consecuentes exigidos.

Más aún, en *Contribuciones* se logra hacer un trabajo expositivo detallado con más de 80 ilustraciones en 113 páginas, lo cual motiva a un mejor entendimiento de las construcciones hechas por Dehn. Por ejemplo, la siguiente ilustración (ver Figura 2) presentada en el Primer Teorema de pseudocongruencia, se desglosa en más de 15 figuras.

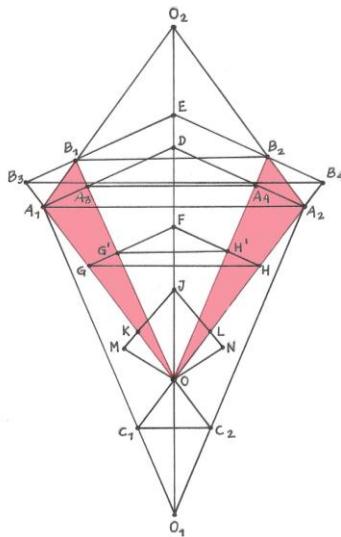


Figura 2. Ilustración del Primer Teorema de Pseudocongruencia

CONCLUSIONES

Después de realizar el trabajo *Contribuciones* se logró reconocer la importancia de las investigaciones de estos dos matemáticos alemanes para los fundamentos de la geometría, en particular en el estudio de la geometría no arqui-

mediana, ya que por medio del estudio de la combinación de axiomas se determina el alcance del Axioma de Arquímedes.

Es un trabajo que además permite entender y materializar el carácter axiomático de la matemática, en particular de la axiomática hilbertiana, como lo hace Dehn para demostrar la dependencia entre el Axioma de Arquímedes y el Primer Teorema de Legendre.

Las demostraciones de Max Dehn redactadas en alemán, en 35 páginas, en *Contribuciones* se presentan en español, explicadas de manera minuciosa y con ilustraciones en 113 páginas.

Contribuciones enfrenta puntos delicados de la investigación de Dehn por lo cual su estudio y redacción son provechosos para la investigación en geometría; más aún, es una invitación a retomar el estudio de los fundamentos de la geometría por parte de estudiantes interesados en la matemática.

En *Contribuciones* además de dar descripciones de los aportes a la geometría no arquimediana hechos por ambos matemáticos, se han hecho cálculos y razonamientos no explícitos en la disertación de Dehn, lo cual ha quedado consignado en material bibliográfico para todos aquellos interesados en los fundamentos de la geometría.

Además de esto, es un tema abierto ya que existen algunos hechos que fueron admitidos y que para un apasionado por la geometría resultaría grato desentrañar.

REFERENCIAS

- Alfonso, S. (2010). *Las contribuciones de Hilbert y de Max Dehn a la geometría no arquimediana*. Trabajo de pregrado no publicado, Universidad Nacional del Colombia, Bogotá, Colombia.
- Campos, A. (1999). 1899 Fundamentos de la geometría 1999. *Lecturas Matemáticas*, 20(2), 153-174.
- Dehn, M. (1900). Die Legendre'schen Sätze über die Winkelsumme im Dreieck. *Mathematische Annalen*, 53(3), 404-439.
- Hilbert, D. (1996/1899). *Fundamentos de la geometría*. (Traducción de la séptima edición en alemán publicada en 1930). Madrid: Publicaciones del Instituto “Jorge Juan” de Matemáticas.

ANÁLISIS EPISTEMOLÓGICO DE SITUACIONES PROBLEMA QUE CONTRIBUYEN A LA ENSEÑANZA DE LA GEOMETRÍA

Erika Ariza y Daniel Cifuentes

Universidad Distrital Francisco José de Caldas

katatio@hotmail.com, danicimao@hotmail.com

A partir de este trabajo se busca establecer una relación entre el análisis epistemológico de la matemática y los procesos de enseñanza-aprendizaje de la geometría, centrados en un estudio de los problemas que históricamente han fundamentado la integral, desde la postura de resolución de problemas, las ventajas e implicaciones para el trabajo en el aula, el docente y el estudiante. Se hace una presentación del trabajo realizado geométrica y analíticamente para obtener las fórmulas del cálculo de área y volumen de algunas figuras, encaminado a un estudio sobre la importancia del tratamiento de situaciones problema para la enseñanza de la geometría, partiendo de los aportes que desde las situaciones históricamente abordadas se pueden realizar al conocimiento del profesor y los aspectos que puede tener en cuenta para orientar la enseñanza.

Ante la caracterización de los procesos de enseñanza de la matemática como temáticas organizadas en ramas, tales como geometría, estadística, aritmética o cálculo, se presenta una separación entre conceptos que genera una enseñanza de la geometría centrada en el reconocimiento de un conjunto de entes geométricos con propiedades, mas no para la comprensión de sistemas geométricos (MEN, 2006). De manera similar, se evidencia en la matemática escolar un tratamiento trivial, formalizado y algorítmico de los conceptos relacionados con el pensamiento numérico, lo que implica además una visión de la enseñanza y el aprendizaje aislada de la resolución de problemas, desde donde se podría integrar por ejemplo los pensamientos numérico y geométrico.

Si el interés de la educación se centra en que la matemática sea de utilidad y no una disciplina tediosa, debe existir una preocupación por el aprendizaje significativo de los estudiantes. Al respecto, Godino (2003) indica que el significado de la matemática resulta principalmente de los problemas que se resuelven, mas no de las definiciones y las fórmulas, pues así se limita la comprensión de conceptos matemáticos.

Al considerar como objetivo principal de la “actividad matemática” que los estudiantes lleguen a pensar matemáticamente a través de la resolución de Ariza, E. y Cifuentes, D. (2011). Análisis epistemológico de situaciones problema que contribuyen a la enseñanza de la geometría. En P. Perry (Ed.), *Memorias del 20º Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones* (pp. 161-168). Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

problemas, “se hace énfasis en los procesos característicos como clasificar, particularizar, generalizar y argumentar” (Mason, Burton y Stacey, 1988, citados en MEN, 1998), con lo que se llega a la comprensión de los objetos matemáticos, no como entes sino como redes de conceptos que se interrelacionan para potenciar el desarrollo del pensamiento matemático. Frente a esto, el docente debe asumir un rol complejo, que involucra no sólo explicar, mostrar y administrar la situación del salón de clases, sino también escoger cuidadosa y adecuadamente un conjunto de situaciones (Gascón, 1989), pues cada situación debe ser coherente con el proceso y las características socioculturales de los estudiantes.

A partir de la resolución de problemas, se busca potenciar el aprendizaje de los sistemas geométricos que, como todos los sistemas, tienen tres aspectos: los elementos de que constan, las operaciones y transformaciones con las que se combinan, y las relaciones o nexos entre ellos (MEN, 1998). Algunos problemas, si se abordan desde la historia permiten caracterizar procesos de resolución y aprendizaje de las matemáticas. Por ello aquí se presenta la forma como puede llegar a darse el análisis histórico-epistemológico desde la interpretación de planteamientos teóricos como los de Godino (2003) y Campos (2004). A partir de un breve análisis al objeto matemático integral, se pretende el reconocimiento de algunos aspectos de la historia que pueden verse involucrados en la enseñanza y así mismo en un aprendizaje significativo por parte del estudiante. Destacan en esto los problemas de cuadraturas y cubaturas en los que se integran aspectos numéricos y geométricos; es allí donde el análisis histórico-epistemológico de los procesos, situaciones o conceptos matemáticos específicos, se torna herramienta para fundamentar el conocimiento del docente y orientarle en su proceso de enseñanza.

Como pauta principal para la educación matemática, se deben buscar situaciones propicias que contextualicen al estudiante en la resolución de un problema y permitan al docente ser guía que oriente de manera crítica y complejice la situación generando un choque cognitivo que lleve al estudiante a poner en juego sus conocimientos y ampliarlos. Esto, porque de acuerdo con Polya (citado en Carrillo y Contreras, 2000) al resolver un problema se utiliza un razonamiento heurístico que permite introducir una notación, establecer relaciones, generalizar y determinar estrategias que generan conocimiento y comprensión de las matemáticas, lo que lleva al estudiante a convertirse en un sujeto activo que participa en la construcción de su conocimiento.

Tras reconocer la importancia de las situaciones problema para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, y evidenciar que muchos conceptos se han abordado de manera formal, aislados de la resolución de problemas, se plantea el “análisis histórico-epistemológico” como herramienta que permite tomar elementos de la génesis de la historia y la epistemología para aprovecharlos en la didáctica de las matemáticas. Así lo menciona Filloy (citado en Godino, 2003), desde su aporte a la fundamentación del conocimiento del docente, quien considera los resultados de este análisis a la hora de plantear situaciones problema y orientar su proceso de enseñanza. No se pueden dejar de vincular los fundamentos históricos que han aportado a la evolución del concepto con el estudio de situaciones problema que promuevan la comprensión de un objeto matemático, ya que la epistemología ayuda a establecer la configuración de los elementos constitutivos de la significación de un determinado concepto mediante el análisis de los diferentes sentidos con los que ha podido aparecer y su adaptación al tratamiento de situaciones que a lo largo de la historia han preocupado a las personas (Gómez, 2003). Tal vinculación permite a los docentes orientar los procesos de enseñanza: partir de la consideración del conocimiento de aspectos relacionados con los objetos matemáticos, apropiarse de un significado de la matemática y así mismo fundamentar los objetivos del proceso de enseñanza y el saber qué quiere que sus estudiantes desarrollen.

Para poder definir la manera como el análisis epistemológico de la matemática puede aportar al proceso de enseñanza-aprendizaje de la geometría, deben estudiarse y tenerse en cuenta algunos aspectos que permiten una manera distinta de presentar en el aula un concepto matemático, en este caso la integral, incluyendo las situaciones que aportaron y pueden aportar a su comprensión desde estudios geométricos y analíticos. Por ejemplo, Euclides propone en los *Elementos* una reconstrucción de las áreas de figuras mediante el método de exhaución, el cual fue base para procedimientos como las sumas de Riemann y los sólidos de revolución (método de discos), los indivisibles de Cavalieri, las cuadraturas de Eudoxo y Arquímedes, y su desarrollo a partir de ideas como la de límite, lo infinitesimal y la integral misma, que permiten llegar a aproximaciones del área y el volumen de figuras. Todo esto pone en evidencia una relación entre procesos geométricos y analíticos desarrollados a través de la historia.

En este trabajo se busca establecer una relación entre los valores que se obtienen por aproximación y la integración de las funciones, definida como antiderivada, dejando ver la importancia del trabajo geométrico, analítico y numérico.

co interrelacionado para generar comprensión sobre los procesos de integración y conceptos propios como figuras y áreas emergentes en la resolución de situaciones problema específicas. Para evidenciar las relaciones previamente descritas, se aborda el siguiente problema:

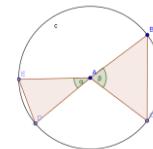
Obtener fórmulas de cálculo de áreas y volúmenes de figuras y sólidos.

TRATAMIENTO DEL PROBLEMA

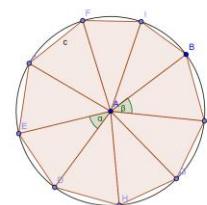
Para encontrar el área de las figuras se requieren: la idea del área como magnitud, aspectos relativos a la proporción, la caracterización del área del rectángulo a partir de construcciones históricas como las presentadas en los *Elementos* de Euclides y que conducen a asumirla como el producto de la base por la altura; de igual manera, el área del triángulo como una derivación de la anterior. Se presentan los procedimientos realizados para el área del círculo, vinculando aspectos de medida, modelación, representación y estudio numérico y geométrico.

Área del círculo

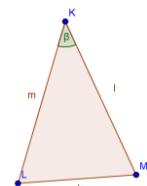
Para determinar el área del círculo es necesario obtener fórmulas en relación con áreas ya conocidas como la del triángulo y el rectángulo. De esta manera se describen algunos pasos para convertir el círculo en una figura cuya área se pueda calcular.



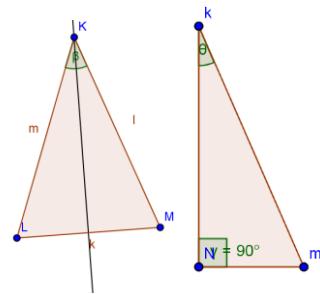
Se sabe que todos los radios del círculo son iguales, por tanto es posible construir triángulos isósceles cuyos lados iguales sean dos radios y el ángulo central sea menor que π . Para poder encontrar el área de cada triángulo es necesario conocer la base y la altura, pero con los datos que se tienen hasta el momento no es posible calcular dichas medidas; para conseguirlas, se condicionan los triángulos de tal forma que se pueda conocer la medida de los ángulos formados por los radios, en este caso, se forman n triángulos semejantes, tal que la suma de los ángulos de los vértices sea 360° .



Debido a esa condición, se sabe que uno de los ángulos del triángulo, el central en la circunferencia, mide $360^\circ/n$, donde n determina la cantidad de triángulos. De esta manera obtenemos n triángulos, así:



Reconociendo que $\beta = 360/n$ y que el triángulo es isósceles, pues sus lados son radios del círculo, se deben calcular su base y altura, para lo cual se determina la apotema (una recta perpendicular a la base del triángulo que pasa por el centro del círculo o vértice del triángulo); así, se forman dos triángulos rectángulos que se pueden estudiar por separado recurriendo a identidades trigonométricas y al Teorema de Pitágoras, donde $\theta = 360/2n$.



El lado NM , que resulta ser la mitad de la base de los triángulos isósceles formados inicialmente, es cateto opuesto del $\triangle KNM$ que por ser rectángulo, cumple:

$$\sin(\theta) = NM/r, r = \text{radio del círculo.}$$

$$\sin(360/2n) = NM/r \Rightarrow \sin(360/2n) * r = NM = \text{base}$$

De acuerdo con este cálculo se puede encontrar el área de cada triángulo isósceles que conforma al círculo, la cual depende de la base que ya se conoce y la altura que se obtiene a partir de la aplicación del Teorema de Pitágoras (relacionando el radio del círculo –hipotenusa del triángulo– y la base de los triángulos). Todo esto conduce a que el área de cada triángulo rectángulo es:

$$\frac{bh}{2} = \frac{(\sin(\frac{360}{2n}) * r) * r \sqrt{1 - \sin^2(\frac{360}{2n})}}{2} = \frac{r^2 \sin(\frac{180}{n}) \cos(\frac{180}{n})}{2}$$

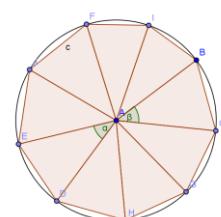
Así mismo, el área del triángulo isósceles corresponderá al doble del área de los rectángulos, es decir:

$$A(\text{T. isósceles}) = r^2 \sin\left(\frac{360}{2n}\right) \cos\left(\frac{360}{2n}\right)$$

Y una aproximación al área del círculo, será n veces el área de uno de los triángulos isósceles, sabiendo que son congruentes, es decir:

$$A \text{ Circulo} \approx n(r^2 \sin\left(\frac{180}{n}\right) \cos\left(\frac{180}{n}\right))$$

Sin embargo, el área de este polígono de n lados tiene un área menor a la del círculo en el que está inscrito, esto debido a que sólo los vértices de los triángulos tocan al círculo y así, queda



una región curvilínea sobrante que irá disminuyendo conforme el polígono tenga más lados; cuando sean infinitos lados, la diferencia de áreas será infinitamente pequeña, hasta que la diferencia sea nula. En términos matemáticos:

$$A_{\text{círculo}} = \lim_{n \rightarrow \infty} (n * r^2 * \sin(180/n) * \cos(180/n)) = r^2 * \lim_{n \rightarrow \infty} (n * \sin(180/n) * \cos(180/n)) = r^2 * \pi$$

ANÁLISIS DE LA SOLUCIÓN AL PROBLEMA

Si bien hemos destacado el análisis epistemológico de la matemática como un recurso del docente para mejorar sus procesos de enseñanza, debe aclararse la manera como esto se puede realizar. Al respecto, Campos (2004) propone considerar tres componentes primarios, cada uno de los cuales corresponde a un aspecto distinto del objeto matemático y aporta a su conocimiento, lo que llega a ser de utilidad para orientar al docente en su proceso de enseñanza desde la selección de situaciones y, en este caso considerando aspectos relacionados con los procesos de cálculo de área y la integral.

Génesis. Este componente se relaciona con los indicios históricos o momentos importantes en los cuales se desarrolla el objeto matemático, por tanto podemos referirnos a los trabajos iniciales de Arquímedes, Eudoxo y otros matemáticos griegos quienes se enfrentaron a situaciones en que requerían del área de figuras geométricas, y frente a las cuales se establecen cuadraturas y cubaturas. Allí se resaltan procesos mediante los cuales se consolidó la integración, al superar obstáculos como el reconocimiento y comprensión del continuo, infinito, límite, variación, entre otros, los cuales se conciben en la enseñanza actual desde definiciones que permiten caracterizar la matemática axiomática y algorítmica. Desde esta perspectiva se lleva a los estudiantes a realizar cálculos asociados a fórmulas, sin reconocer las relaciones que se establecen entre los diferentes conceptos. La importancia de problemas como las cuadraturas radica en la posibilidad de relacionar procesos de modelación y comunicación, a partir de razonamientos geométricos y aritméticos, con el desarrollo de conocimientos, habilidades o competencias matemáticas.

Estructura. La integración (entendida como el área bajo la curva) se concibe no sólo como la antiderivada en los problemas referenciados, sino como un objeto matemático relacionado con las nociones de continuidad de una función, límite, etc., por medio de las cuales se configuran métodos de descubrimiento y demostración de propiedades y soluciones, tales como el método de

exhaución, el cual inicialmente hace uso de varios aspectos de la geometría analítica para hacer deducciones y así mismo demostrar la validez de las respuestas, desde el estudio de magnitudes y relaciones de proporcionalidad.

La solución de problemas donde se requiere de la integración se basa históricamente en la relación que hay entre distintas representaciones. Consiste inicialmente en una aplicabilidad donde la geometría analítica es el primer contexto en el que aparece, requiere de propiedades y axiomas, tales como la commensurabilidad de medidas, axiomas de continuidad y el reconocimiento del límite en varios momentos, los cuales pueden configurar adecuadamente la comprensión de la integral, esto pasando por ideas como lo infinitamente pequeño y lo indivisible.

Función. La actividad matemática es una actividad por excelencia educativa; es utilizable en diversas tareas necesarias para la organización de una sociedad. Dar este contexto a los conceptos aporta al interés y validez que el estudiante le otorga. En el caso de la integral se debe hacer un reconocimiento de su aplicabilidad al cálculo de áreas de figuras geométricas, áreas entre curvas, cálculo del trabajo y otras magnitudes físicas, en la industria, la mecánica, la medicina, etc. De esta manera se contribuye a superar esa falsa creencia de que los aprendizajes en matemáticas son útiles sólo dentro del aula de clase para resolver una serie de ejercicios.

Para concluir, es necesario reconocer que las cuestiones epistemológicas han sido casi totalmente descuidadas por los profesores (Vergnaud, 1990), lo que se ve reflejado en el tipo de situaciones que seleccionan para la enseñanza de los objetos matemáticos. A la hora de reconstruir el proceso conceptual de la matemática, debe tenerse en cuenta el correspondiente análisis histórico-epistemológico pues éste ayuda al docente a orientar los procesos de enseñanza. Es necesario considerar múltiples aspectos de los objetos matemáticos que permitan al estudiante construir su conocimiento y por ende lograr una educación de calidad.

La resolución de problemas abre la posibilidad dentro del proceso de enseñanza-aprendizaje para que el estudiante se convierta en un “resolutor” de situaciones en las cuales pone en juego no sólo los conocimientos previos, sino también razonamientos heurísticos y estrategias, con lo que se desarrolla un pensamiento matemático y se promueve que los aprendizajes sean significativos y relacionados con la comprensión de los conceptos, la funcionalidad y

aplicación de los mismos. Desde el abordaje del problema relativo al área del círculo se muestra una relación entre la geometría y la aritmética, que permite al estudiante ver la matemática no como algo mecánico y trivial, sino que debe haber una comprensión previa de los objetos, para que sea una herramienta a la hora de enfrentar situaciones en distintos contextos.

REFERENCIAS

- Campos, A. (2004) *Acerca de la epistemología de la matemática*. En *Memorias del XV Encuentro de Geometría y III de Aritmética*. (Versión electrónica.) Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.
- Carrillo, J. y Contreras, C. (2000). *Resolución de problemas en los albores del siglo XXI: una visión desde múltiples perspectivas y niveles educativos*. Huelva, España: Hergué.
- Gascón, J. (1989). Incidencia del modelo epistemológico de las matemáticas sobre las prácticas docentes. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 4(2), 129-159. Recuperado de:
<http://redalyc.uaemex.mx/redalyc/src/inicio/ArtPdfRed.jsp?iCve=33540202>
- Godino, J. (2003). *Teoría de las funciones semióticas. Un enfoque ontológico-semiótico de la cognición e instrucción matemática*. Granada, España: Universidad de Granada. Recuperado de: www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/monografiatfs.pdf
- Gómez, B. (2003). La investigación histórica en didáctica de la matemática. En E. Castro (Coord.), *Investigación en educación matemática: Séptimo Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 79-85). Granada, España, Universidad de Granada. Recuperado el 28 de mayo de 2011 en:
<http://dialnet.unirioja.es/servlet/libro?codigo=12300>
- Ministerio de Educación Nacional (MEN) (1998). *Lineamientos curriculares*. Bogotá, Colombia: Editorial Magisterio.
- Ministerio de Educación Nacional (MEN) (2006). *Estándares básicos de competencias en matemáticas*. Bogotá, Colombia: Editorial Magisterio.
- Vergnaud, G. (1990). Epistemology and psychology of mathematics education. En P. Nesher y J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics and cognition: A research synthesis by the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 14-30). Cambridge, Gran Bretaña: Cambridge University Press.

CONCEPTUALIZACIÓN DE ÁREA DEL RECTÁNGULO CON LA MEDIACIÓN DEL PROGRAMA CABRI GEOMETRY

Iván Ballesteros y David Rojas

Universidad Industrial de Santander

Ivancho_2323@hotmail.com, darroga_123@hotmail.com

En esta charla se presentará el trabajo realizado durante el año 2010 por el grupo Nuevas Tecnologías de EDUMAT-UIS coordinado por el Dr. Martín Eduardo Acosta Gempeler. El grupo viene realizando un trabajo de capacitación a profesores de varios colegios del área metropolitana de Bucaramanga en cuanto a la implementación de software de geometría dinámica en la enseñanza de diferentes conceptos geométricos en secundaria.

Con base en la Teoría de las Situaciones Didácticas de Brousseau el grupo ha diseñado una serie de actividades que buscan generar situaciones a-didácticas dentro del aula de clase, en las cuales el estudiante con la ayuda de un medio sea el responsable de construir un conocimiento para dar solución a un problema previamente preparado por el profesor.

Para esto analizaremos dos actividades con las cuales pretenderemos mostrar que a pesar de que exista una muy buena planeación y diseño de una actividad, puede que ésta produzca o no las condiciones necesarias para generar una situación a-didáctica.

INTRODUCCIÓN

Como integrantes del grupo Nuevas Tecnologías realizamos el proyecto de grado titulado “Análisis de la implementación de las actividades para la conceptualización de área del rectángulo en el grado séptimo con la mediación del programa Cabri Geometry”, dirigido por el profesor Martín Eduardo Acosta Gempeler. El proyecto busca dar solución a una problemática identificada en el grupo; pretende responder a la pregunta: ¿Las actividades planeadas en Proyecto Institucional de Uso de la Geometría Dinámica logran cumplir a cabalidad los objetivos para los cuales fueran diseñadas? Para esto realizamos un trabajo de ingeniería didáctica que consiste en hacer un análisis a priori y a posteriori de cada actividad aplicada utilizando como marco de referencia la Teoría de las Situaciones Didácticas. Para realizar el análisis a priori se tuvo

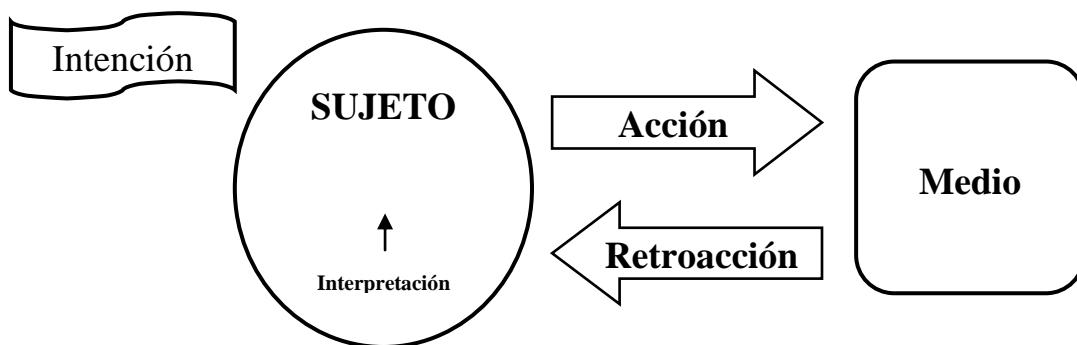
Ballesteros, I. y Rojas, D. (2011). Conceptualización de área del rectángulo con la mediación del programa Cabri Geometry. En P. Perry (Ed.), *Memorias del 20º Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones*, (pp. 169-172). Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

en cuenta la orientación realizada en el curso de capacitación y las guías que se entregan a los profesores. Para realizar el análisis a posteriori se recogieron registros en video de todas las actividades realizadas en el salón de clases.

En esta charla mostraremos dos actividades analizadas en nuestro proyecto de grado tratando de mostrar las dos conclusiones más importantes a las que llegamos y que responden claramente a la pregunta planteada por el grupo.

La **primera** actividad, titulada “Actividad de construcción de un rectángulo”, consiste en construir un rectángulo de manera que cumpla la condición de que al arrastrar sus lados o sus vértices siga siendo un rectángulo. A través del análisis y resultados obtenidos en la aplicación de esta actividad, mostraremos cómo cuando se está seguro del papel del medio como herramienta de validación y se prevén suficientemente todas las dificultades que se puedan presentar en la realización de la actividad, ésta funcionará muy bien como situación a-didáctica. El profesor se sentirá más seguro y podrá tener más confianza en la actividad, pues sabrá cómo intervenir sin necesidad de entregar directamente el saber, utilizando, más bien, el medio como herramienta de validación, donde los alumnos a través de las retroacciones producidas por el medio logran observar e identificar las propiedades en juego llegando así a construir su propio conocimiento sin la intervención directa del profesor.

Para dar claridad del marco teórico haremos un paralelo de la aplicación de esta actividad con la TSD, basándonos en argumentos utilizados por Brousseau (2007) y Margolinas (1993):



Como **medio** se utilizarán todas las herramientas de construcción de Cabri, con las cuales tendrán que construir un rectángulo de manera que al arrastrar sus lados o sus vértices siga siendo un rectángulo.

Para que se pueda dar interacción entre el *sujeto* y el *medio* debe existir una *intención*; en una situación a-didáctica la *intención* es producida por el problema que plantea el profesor: en este caso, construir un rectángulo. Para ejecutar esta intención el sujeto utiliza su conocimiento inicial y por lo tanto, realiza unas *acciones* sobre el medio intentando reproducir una imagen mental de rectángulo (por ejemplo, selecciona la herramienta segmento y traza cuatro segmentos consecutivos con forma de rectángulo). La primera *retroacción* que genera el *medio* es estática, esa *retroacción* muestra una figura que tiene forma de rectángulo en la pantalla. El alumno *interpreta* que esta construcción es un rectángulo y *valida* su construcción. En este momento interviene la segunda condición del problema que decía que el rectángulo debería resistir el arrastre (por ejemplo, el profesor recuerda esa condición y solicita que arrastre los vértices), entonces el alumno realiza la *acción* de arrastrar los vértices. La *retroacción* del *medio* consiste en el desplazamiento de los puntos y de los segmentos. El alumno *interpreta* ese nuevo dibujo como un no-rectángulo, y por lo tanto *invalida* su estrategia de construcción. Al *invalidar* su construcción el alumno debería abandonar dicha estrategia y buscar una nueva. El alumno podrá intentar tantas veces como quiera, pero siempre que utilice su conocimiento, es decir la asociación del rectángulo con una forma global, el arrastre *invalidará* su construcción. Estas sucesivas *invalidaciones* lo llevarán a plantearse la pregunta de cómo lograr que el rectángulo construido no pierda su forma al arrastrar. Esta pregunta servirá de base al profesor para presentar el saber: lo importante en el rectángulo es la relación de perpendicularidad entre los lados consecutivos, y para lograr que esa perpendicularidad se mantenga durante el arrastre es necesario utilizar la herramienta ‘recta perpendicular’. En este punto, la responsabilidad del docente es utilizar como base los conocimientos adquiridos por los estudiantes para acercarlos al *saber* (concepto netamente matemático) en este caso definición y propiedades del rectángulo, este proceso es conocido como institucionalización.

La **segunda** actividad, titulada “Actividad de área del rectángulo”, consistía en llenar un rectángulo dado con cuadrados de 1cm x 1cm utilizando la herramienta “Simetría axial” y encontrar el número total de cuadrados utilizados para llenar exactamente cada rectángulo. El objetivo era deducir y comprender la fórmula para calcular el área de un rectángulo, cosa que no se alcanzó a cabalidad debido a que no hubo un buen diseño y planeación de la actividad. Esto trajo como consecuencia que se presentaran dificultades en la aplicación por parte del profesor. Al implementar la actividad se pudo observar que el

éxito de ésta dependía directamente del uso del medio como herramienta de validación. Por ejemplo, se observó que los estudiantes no tenían posibilidad de validar o invalidar sus estrategias gracias a las retroacciones del medio. Cuando los estudiantes formulaban hipótesis sobre el valor de una porción del cuadrado que quedaba dentro del rectángulo se presentó la dificultad de que no contaban con herramientas para poder validar dicho valor, por tanto era necesario que el profesor interviniere para cumplir dicha función. Como el medio no cumplió el papel de validar o invalidar las hipótesis de los estudiantes, en consecuencia no se logró generar una situación a-didáctica y, por tanto, el profesor se vio obligado a intervenir para emitir un juicio sobre el trabajo de los alumnos produciendo de inmediato una ruptura en el proceso de aprendizaje del estudiante para comenzar a hacer una institucionalización apresurada de los conceptos en juego.

Para finalizar esta charla se enfatizará en la aplicación de unas condiciones necesarias dentro del diseño de una actividad, para que esté produzca una situación a-didácticas eficaz que beneficie la producción de conocimiento por parte del estudiante.

REFERENCIAS

- Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de la Teoría de las Situaciones Didácticas*. Buenos Aires, Argentina: Libros del Zorzal.
- Margolinás, C. (2009). *La importancia de lo Verdadero y de lo Falso en la clase de matemáticas*. (Trad. Martín Acosta y Jorge Fiallo del original *De l'importance du Vrai et du Faux dans la classe de mathématiques*, publicado en 1993 por La Pensée Sauvage.) Bucaramanga, Colombia: Ediciones Universidad Industrial de Santander.

CARACTERIZACIÓN DE LA ACTIVIDAD DEMOSTRATIVA EN BÁSICA SECUNDARIA

Cristina Bolívar, Mayerly Martín y Leonor Camargo

Universidad Pedagógica Nacional

crisbol_2002@hotmail.com, mmartinb@pedagogica.edu.co, lcamargo@pedagogica.edu.co

Se presentan algunos resultados obtenidos de una investigación interdependiente con una experiencia de aprendizaje desarrollada con estudiantes de grado noveno del Instituto Pedagógico Nacional. En ella se pretendía involucrar a los estudiantes en la actividad demostrativa, a partir de la resolución de un problema geométrico abierto haciendo uso de un software de geometría dinámica. El estudio contribuyó a caracterizar la participación de los estudiantes en la actividad demostrativa e identificar algunos factores que influyen en dicha participación.

INTRODUCCIÓN

La comunicación que queremos socializar se deriva del trabajo de grado que realizamos para optar al título de magister en Docencia de las Matemáticas en la Universidad Pedagógica Nacional y que giraba alrededor de la actividad demostrativa en educación básica secundaria, mediada por el uso de un programa de geometría dinámica. El proyecto se centró en caracterizar la actividad demostrativa que llevan a cabo dos grupos de estudiantes de grado noveno, del Instituto Pedagógico Nacional, cuando se enfrentan a una tarea en la que tienen que formular una conjetura y demostrarla, haciendo uso de un conjunto de enunciados geométricos estudiados en clase.

Entre los objetivos que se plantearon en el proyecto para favorecer la actividad demostrativa se encuentran: diseñar un conjunto de problemas geométricos; analizar sus posibles soluciones, identificando el contenido geométrico que los estudiantes podrían usar, propuestas de construcción y exploraciones en Cabri, posible formulación de conjetura y argumentos geométricos; implementar los problemas propuestos en un grupo de estudiantes de noveno grado del Instituto Pedagógico Nacional; analizar por fragmentos la interacción en clase profesor-estudiante, del proceso llevado a cabo por los estudiantes en torno a la actividad demostrativa, sintetizar y caracterizar dicho proceso y evaluar sus proyecciones para un curso completo.

El estudio se enmarca en la línea Aprendizaje y Enseñanza de la Geometría, del grupo Didáctica de la Matemática de la Universidad Pedagógica Nacional, que pretende aportar elementos a la solución de la problemática del aprendizaje de la demostración en geometría. Este asunto es objeto de discusión en la comunidad de investigadores en educación matemática (Mariotti, 1997; Healy y Hoyles, 1999; Sánchez, 2003; Perry, Camargo, Samper y Rojas, 2006), y es preocupación constante en nuestra práctica como profesoras de matemáticas.

A continuación hacemos una breve presentación del marco de referencia empleado en el estudio, después sintetizamos aspectos del diseño metodológico. Posteriormente proponemos un ejemplo del tipo de análisis que realizamos. Finalizamos con algunas conclusiones del estudio.

MARCO DE REFERENCIA

Tomamos como referente teórico principal la conceptualización de *actividad demostrativa* desarrollada por Perry, Camargo, Samper y Rojas (2006). Este es un constructo que abarca más que la elaboración de una demostración formal pues se ve como una actividad que apunta al aprovechamiento de la justificación como recurso para la comprensión de ideas geométricas y a la adquisición de herramientas para la comunicación de éstas y para su validación. Es decir, que para poder realizar una auténtica actividad demostrativa las acciones deben ir dirigidas a desarrollar procesos tales como visualizar, explorar, analizar, conjeturar y verificar, que son las que permiten movilizar el razonamiento hacia la búsqueda de la validación, dar significado a la tarea de argumentar para aceptar afirmaciones y proveerse de elementos para responsabilizarse de la verdad de dichas afirmaciones; además, se deben considerar las acciones propias de la práctica de justificar, que movilizan el razonamiento argumentativo hacia la formulación de explicaciones, pruebas o demostraciones matemáticas. Desde nuestro punto de vista, es posible acercar significativamente a estudiantes de secundaria a la demostración si ellos participan de manera genuina en acciones asociadas a dicha actividad.

Uno de los aspectos relevantes que se constituye en objeto de análisis de quienes se ocupan del aprendizaje de la demostración es el papel que juegan las definiciones en la actividad demostrativa. Reflexiones hechas por autores como Vinner (1991) y Dreyfus (1990) destacan que aprender de memoria una definición no garantiza comprender su significado y mucho menos su uso correcto en la producción de demostraciones, razón por la cual los estudiantes

tendrán dificultades a la hora de hacer uso de las definiciones dentro de una cadena de argumentos. Destacan la necesidad de incluir el análisis de las definiciones en el marco de la resolución de problemas en el momento en el que los objetos geométricos que se van a definir se vuelven parte indispensable de la argumentación. Efectivamente, en el curso de nuestra investigación encontramos en los registros de las dos primeras sesiones de trabajo una intensa discusión acerca de las definiciones de rectángulo, cuadrado y trapecio dado que las conjeturas formuladas por los estudiantes hacían referencia a dichos objetos. Incluso, pese a haber acordado como definición de rectángulo que éste es un cuadrilátero con dos pares de lados opuestos paralelos y cuatro ángulos rectos, al momento de justificar una conjetura, un estudiante quiso usar como dato que dos lados opuestos de un rectángulo eran congruentes. Esto condujo a revisar la definición y establecer qué propiedades explícitas en ella se podían tomar como antecedentes de los pasos de la justificación.

DISEÑO METODOLÓGICO

Para realizar el proyecto, diseñamos un conjunto de problemas encaminados a que los estudiantes identificaran propiedades comunes al rectángulo y al trapecio isósceles (Bolívar y Martín, 2010). Estos problemas fueron propuestos a dos grupos de tres estudiantes en cuatro sesiones de trabajo de dos horas cada una, que se realizaron en horario extra-clase. Los dos grupos disponían de un computador portátil con el software Cabri y de un listado de postulados, definiciones y teoremas que se les entregó al iniciar la primera sesión. La dinámica seguida combinó: trabajo en grupo sin ayuda de la profesora, trabajo en grupo con intervención de ella, discusión entre los estudiantes con intervenciones ocasionales de la profesora y puesta en común dirigida por la profesora.

Cada sesión fue grabada y se dispone del video y del audio del trabajo del grupo y de las puestas en común. Al finalizar la implementación de la experiencia, realizamos la transcripción de los archivos de audio y video, para su posterior análisis. A partir de la transcripción de las interacciones de las sesiones de trabajo, realizamos la organización y reducción de la información.

Dividimos las transcripciones de cada sección en fragmentos teniendo en cuenta la acción de la actividad demostrativa que estaban realizando. Contextualizamos cada fragmento escribiendo un encabezado que permitiera a cualquier lector ubicarse en la actividad que estaban realizando los estudiantes y comprendiera la interacción comunicativa que se llevaba a cabo sin necesidad

de leer todos los fragmentos. Luego, propusimos una descripción general de cada fragmento indicando la acción de la actividad demostrativa que se llevaba a cabo y algunas ideas en torno al rol de los estudiantes y de la profesora.

Interpretamos y analizamos la interacción en cada fragmento. Además de la descripción, analizamos la actividad demostrativa de los estudiantes, apoyándonos en los referentes proporcionados por el marco teórico.

EJEMPLO DE ANÁLISIS

A continuación, presentamos un ejemplo de los análisis realizados. El fragmento es tomado de la segunda sesión. Los estudiantes estaban investigando qué tipo de cuadrilátero permitía afirmar lo siguiente: “si el cuadrilátero $ABCD$ es un _____ entonces la intersección de sus diagonales es vértice de dos triángulos isósceles”. Cada grupo había construido un rectángulo, ya que habían conjeturado que este cuadrilátero satisfacía la afirmación. Habían etiquetado los vértices con las letras A , B , C y D , respectivamente, y trazado sus diagonales. También nombraron el punto de intersección entre ellas con la letra E (ver Figura 1).

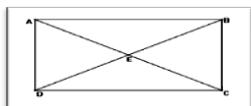


Figura 1

El fragmento que se presenta a continuación recoge la interacción entre los estudiantes, con intervención de la profesora, en el momento en el que creen haber demostrado que $\angle ADE$ y $\angle CBE$ son congruentes, así como $\angle DAE$ y $\angle BCE$. Deciden justificar que los segmentos AD y BC son congruentes para poder afirmar que los triángulos AED y BEC son congruentes. Esto porque han desviado el interés por demostrar que los triángulos son isósceles y se concentran en mirar que son congruentes. En el curso de la justificación de la conjetura, un estudiante pretende hacer uso de propiedades del rectángulo no incluidas en la definición de rectángulo que había sido construida en consenso por todos los integrantes del grupo.

458. Diego: Pero falta mirar que los lados [de los triángulos] son congruentes.
459. Jordan: ¡Ah!... pero falta.
460. Nathaly: Faltan los segmentos [AD y BC].

461. Diego: Los segmentos son congruentes.
[...]
465. Jordan: [...] [El segmento] BC es congruente a [el segmento] AD , por definición de rectángulo.
[...]
469. Profesora: ¿Sí? Y, ¿dónde dijimos en la definición de rectángulo que dos [lados opuestos] son congruentes?
470. Jordan: ¡Ah, no!, eso era el trapecio [isósceles].
471. Nathaly: Sí, los [lados] paralelos son congruentes.
472. Profesora: Pero eso no lo dijimos en la definición que construimos.
473. Jordan: No.
474. [...]
476. Profesora: Y como la definición es esa, no la podemos usar así. Tocaría demostrarlo. [...]
[...]
492. Profesora: Miren [el criterio] ALA; si fuera ALA, necesitaríamos un [par de] lado [lados congruentes].
493. Jordan: ¡Ah!
[...]
495. Jordan: ALA... yo ya lo tengo.
[Los estudiantes observan las construcciones de su respectiva mesa de trabajo. Luego se retoma la socialización entre todos los integrantes].
497. Jordan: Eh..., uhm... Profe, cuando uno traza las...
498. Profesora: ¿Señor?
499. Jordan: ¿Al trazar las diagonales en un cuadrilátero, entonces, o sea, la intersección de estas es el punto medio, de este segmento [de cada diagonal]?
500. Profesora: [...] Puede que sí sea cierto, pero [...] todo lo que no conoczamos en este momento habría que demostrarlo, solamente podemos jugar con lo que tenemos.

Diego, Jordan y Nathaly caen en cuenta de que deben afirmar que tienen un par de lados congruentes [458-461], afirmación en la que se centra la argumentación desarrollada en este fragmento. Jordan comienza por señalar que el segmento *BC* es congruente con el segmento *AD* justificando la afirmación con la definición de rectángulo [465]. La profesora interviene preguntándoles si realmente pueden asegurar la congruencia recurriendo a la definición de rectángulo que se ha construido en consenso [469]. Nathaly insiste en que los lados paralelos del rectángulo son congruentes [471], quizá con base en la visualización de la figura o en la imagen conceptual que posee, por lo que parece no comprender por qué no se puede usar esta información en la justificación [474]. La profesora recurre a la norma establecida al comenzar la experiencia recordándoles que sólo pueden afirmar propiedades del rectángulo que estén explícitas en la definición que ellos adoptaron [476]; por lo tanto, deben buscar cómo justificar la congruencia de los segmentos *AD* y *BC*. Propone revisar el criterio de congruencia ALA, haciendo ver a los estudiantes que hace falta verificar la congruencia de un par de lados para poder aplicarlo [492]. Por tal motivo, Jordan, (probablemente buscando una alternativa que le permita encontrar un lado), pregunta si se puede afirmar que las diagonales de un cuadrilátero se intersecan en su punto medio [499]. La profesora insiste en que todo lo que se afirme y no se haya establecido o definido anteriormente debe ser demostrado para poder ser usado [500].

El fragmento ilustra dos características de la actividad demostrativa que están muy relacionados. De un lado, el papel que juegan las definiciones en la producción de una justificación. A pesar de haber acordado una definición de rectángulo, a la hora de usarla como garante de una afirmación, los estudiantes recurren al conocimiento común que tienen del rectángulo y sus propiedades, y no a la definición, ignorando el funcionamiento de un paso deductivo. Es decir, los estudiantes asumen la definición como una descripción y no como una expresión bicondicional que sirve de puente entre unos datos y una conclusión que se quiere obtener. A lo largo de la interacción, Jordan parece entender a qué se refiere la profesora cuando les explica que sólo deben usar las propiedades incluidas en la definición de rectángulo. En cambio, Nathaly se muestra confundida al respecto e insiste en preguntar por qué no pueden afirmar que los lados paralelos de un rectángulo son congruentes. De otro lado, la negociación de la norma de usar en las justificaciones sólo afirmaciones que ya se tengan de antemano, es otro aspecto que genera dificultades a los estudiantes. En el fragmento, como Jordan ha entendido que no se puede valer de

la definición de rectángulo para afirmar la congruencia de dos segmentos, recurre a una propiedad del rectángulo reconocida visualmente, pero no demostrada: las diagonales se bisecan. Nuevamente viola la norma establecida y la profesora debe insistir en ella.

Desde nuestro punto de vista, aunque los estudiantes logran sintetizar los hallazgos relevantes alrededor de la demostración de la congruencia de triángulos que quieren establecer, es necesaria la guía de la profesora cuando buscan las justificaciones de lo que desean afirmar. Ella centra su papel en enfocarlos sobre los objetos relevantes para la demostración y también los ubica cuando recurren a argumentos que no son válidos dentro de una argumentación deductiva, insistiendo en la norma. Parece que Jordan entiende mejor las reglas del juego y se ve un avance en la actividad demostrativa que realiza con respecto al resto de los estudiantes. A pesar de que aún utiliza afirmaciones que no se han demostrado, recurre a la generalización y a hacer uso de sus conocimientos previos. Es probable que un trabajo más sistemático y prolongado en ese sentido le permita a él y a otros estudiantes entrar en el mundo teórico de la geometría tempranamente.

CONCLUSIONES

Dentro de los alcances del proyecto se evidencia que fue posible plantear un conjunto de problemas retadores que permitieron a los estudiantes involucrarse de manera genuina en la actividad demostrativa, lo que se analizó, extrayendo un conjunto de indicadores derivados de las interacciones que se dieron en la actividad, logrando realizar una síntesis y caracterizar el proceso que realizan los estudiantes.

Una característica central de la actividad demostrativa en la que se involucran los estudiantes es que tienen mayor facilidad para elegir argumentos, que para construirlos, aunque no necesariamente sean correctos. El nivel argumentativo de los estudiantes permite explicar las diferencias en sus respuestas, ya que los que le encontraban poco sentido a una demostración, casi siempre elegían argumentos empíricos; en cambio, los que reconocían la generalidad de la prueba y su papel en el establecimiento de la verdad de una afirmación eran mejores en la construcción de una demostración y en la selección de argumentos.

El uso del programa de geometría dinámica aportó a la acción de visualizar, lo que posibilitó que los estudiantes completaran la conjetura sugerida en el segundo problema. Sin embargo, los resultados no permitieron concluir cuál es

el efecto de la geometría dinámica en la construcción de una justificación, quizá porque en el diseño metodológico no se previó que el manejo que tenían los estudiantes de Cabri no era suficiente para poder aprovechar la opción de arrastre para explorar, verificar y visualizar hechos geométricos que les permitieran vislumbrar un camino para la justificación. Sin embargo, no debe desestimarse el papel de la geometría dinámica al crear un ambiente propicio para la indagación y de construcción colectiva de las justificaciones, ya que permitió que los estudiantes participaran en la solución de un problema abierto involucrándose de manera genuina en la solución y justificación del problema.

La experiencia favoreció un ambiente que permitió a los estudiantes participar activamente en la construcción social del conocimiento, en el que el proceso de enseñanza y aprendizaje fue una responsabilidad compartida y los estudiantes tuvieron un papel activo. Al escoger los problemas que se les proponen a los estudiantes hay que tener en cuenta que la demostración de las conjeturas que surgen no implique observar más de un elemento a la vez, pues esto puede desviar su atención en lo que deben demostrar.

REFERENCIAS

- Bolívar, C. y Martín, M. (2010). *Caracterización de la actividad demostrativa. Una experiencia en secundaria*. Tesis de Maestría, Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, Colombia.
- Dreyfus, T. (1990). Advanced mathematical thinking. En P. Nesher y J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics and cognition* (pp. 113-133). Cambridge: Cambridge University Press.
- Healy, L. y Hoyles, C. (1999). Student's performance in proving: Competence or curriculum? En I. Schwank (Ed.), *Proceedings of the First Conference of the European Society for Research in Mathematics Education* (vol. 1, pp. 153-167). Osnabrück: Forschungsinstitut fuer Mathematikdidaktik.
- Mariotti, M. (1997). Justifying and proving in geometry: The mediation of a microworld. En M. Hejny y J. Novotna (Eds.), *Proceedings of the European Conference on Mathematical Education* (pp. 21-26). Prague: Prometheus Publishing House.
- Perry, P., Camargo, L., Samper, C. y Rojas, C. (2006). *Actividad demostrativa en la formación inicial del profesor de matemáticas*. Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.
- Sánchez, E. (2003). La demostración en geometría y los procesos de reconfiguración: una experiencia en un ambiente de geometría dinámica. *Educación matemática*, 15(2), 27-53.
- Vinner, S. (1991). The role of definitions in the teaching and learning of mathematics. En D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking*. Dordrecht: Kluwer.

SECUENCIA DIDÁCTICA PARA LA ENSEÑANZA DE LA SEMEJANZA UTILIZANDO FRACTALES

Claudia Castro, Luz Díaz y Rosa Palacios

Universidad Sergio Arboleda, Fundación Universidad de América,

Colegio Policarpa Salavarrieta

mathclaudiacastro@yahoo.com, dicamelu73@yahoo.es, rosamariwill@hotmail.com

Una secuencia didáctica se entiende como un sistema de reflexión y actuación del profesor en donde se explicitan aquellos aspectos del quehacer didáctico fundamentales a toda acción de enseñanza y aprendizaje, y en el que participan estudiantes, docentes, saberes y el entorno. En la secuencia didáctica a la que se refiere esta ponencia, propuesta para la enseñanza de la semejanza, los fractales serán el recurso a través del cual se identificarán las características y propiedades de la semejanza. En la planeación se tuvieron en cuenta la relación intrafigural y las transformaciones geométricas propuestas por Lemonidis, como referente teórico para analizar el concepto de semejanza.

MARCO TEÓRICO

Al hacer la revisión teórica del concepto de semejanza se encontró que es necesario que los estudiantes tengan nociones acerca de proporcionalidad, caracterización de figuras planas, medida de ángulos y lados, lo cual permitirá construir, según Lemonidis (1991), una aproximación al concepto de semejanza desde las transformaciones geométricas y la relación intrafigural.

Respecto a las transformaciones geométricas, se tendrán en cuenta las transformaciones isomórficas que se caracterizan por conservar la forma de la figura original, la proporcionalidad entre los lados homólogos y la congruencia entre ángulos correspondientes. La *relación intrafigural* se da entre figuras que forman parte de configuraciones de Thales en la que se consideran los aspectos proyección y homotecia con sus correspondientes razones, según Lemonidis (1991).

Una vez revisado el proceso de enseñanza a partir de la propuesta de Lemonidis, se organiza, con base en la teoría de jerarquía de aprendizaje de Gagné (1975), un ideograma en el que se relacionan los objetivos asociados a discriminaciones, conceptos, reglas y reglas superiores que conducen al objetivo

general. Cada requisito se enumera y se asocia a los siguientes objetivos, que permite proponer una secuencia.

1. Utilizar los conceptos de proporción y medida de segmentos.
2. Analizar la proporción de los lados de las figuras planas y encontrar la constante de proporcionalidad.
3. Evidenciar el Teorema de Thales.
4. Introducir el concepto de semejanza en figuras separadas.
5. Comprobar los criterios de semejanza de triángulos.
6. Deducir las condiciones de semejanza entre figuras planas.

JERARQUÍA DE LA PROPUESTA DE AULA ACERCA DEL CONCEPTO DE SEMEJANZA

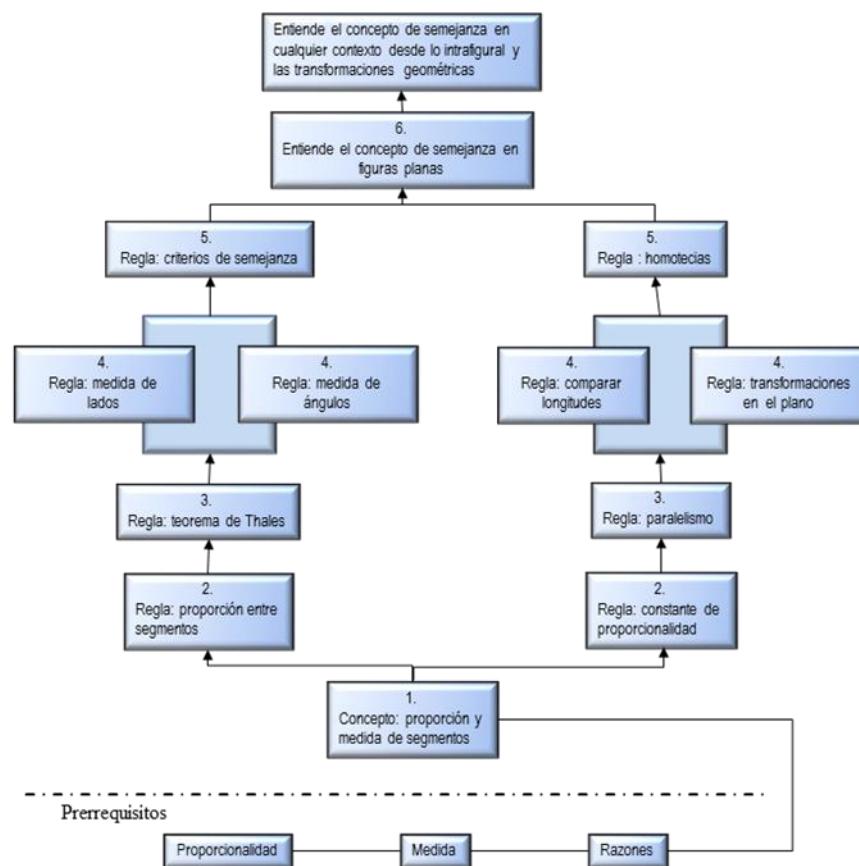


Figura 1. Jerarquía de aprendizaje para el concepto de semejanza (Castro y Céspedes, 2009, p. 41)

A partir de los objetivos y teniendo identificado el proceso de aprendizaje de la secuencia, se organiza la jerarquía, empezando de abajo hacia arriba hasta llegar al objetivo principal. Como recurso didáctico para lograr la comprensión del concepto semejanza, se utiliza la propiedad de autosemejanza de los fractales, a través de la cual se abordarán las relaciones intrafigurales y las transformaciones geométricas.

Los fractales como recurso para la enseñanza de la semejanza

Los fractales se pueden definir como una estructura geométrica generada por la iteración infinita de un proceso simple, que se caracteriza básicamente por dos propiedades: la dimensión y la autosemejanza. Dado que la intención de esta propuesta es considerar la pertinencia de la enseñanza de la semejanza a través de los fractales y no el aprendizaje de los mismos, se hace énfasis en centrar la atención en la característica de la autosemejanza.

Mandelbrot (s.f.) define la característica de autosemejanza en fractales de la siguiente forma: “En general, F es una estructura autosemejante si puede ser construida como una reunión de estructuras, cada uno de las cuales es una copia de F a tamaño reducido (una imagen de F mediante una semejanza contractiva)”, es decir, un conjunto es autosemejante si al ser descompuesto en partes, cada una de sus partes es semejante al conjunto total, como se observa en la Alfombra de Sierpinski.

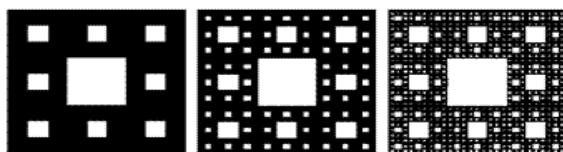


Figura 2. Alfombra de Sierpinski

La propiedad de autosemejanza de los fractales se establece a partir de las transformaciones de semejanza, lo que implica, aplicar sobre una figura una homotecia (ampliarla o disminuirla), una rotación y/o una traslación. Además, el fractal permite que sobre su construcción se realice un análisis intrafigural de cada una de sus partes, mirándolas como figuras separadas.

A continuación se presentan algunos de los conceptos matemáticos que se relacionan con el estudio de la semejanza y la forma como se pueden visualizar a través de los fractales.

Teorema de Thales: Si tres o más rectas paralelas son cortadas por dos transversales, los segmentos determinados sobre las transversales son proporcionales.

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{EF}}$$

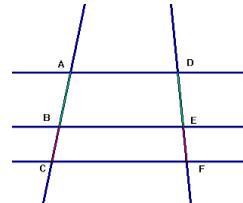


Figura 3. Representación gráfica del Teorema de Thales

Proyección paralela: Sean a y a' dos rectas concurrentes en O y una recta b no paralela ni a a ni a a' y sean P, Q, R, S puntos sobre a , se trazan rectas paralelas a b que pasen por P, Q, R, S y que corten a a' en P', Q', R', S' , esto es: por cualquier punto de a puedo trazar una recta paralela a b que cortará a a' , es decir, a cada punto de a es posible asociar un punto de a' .

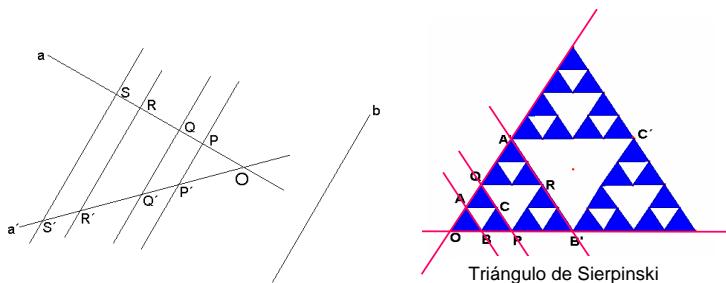


Figura 4. Proyección paralela (Triángulo de Sierpinski)

El uso del Triángulo de Sierpinski permite visualizar dentro de un contexto, en este caso los fractales, la proyección paralela, el Teorema de Thales y las relaciones de razón y proporción que allí se presentan.

Criterios de semejanza de triángulos: Es posible a partir de la construcción de diferentes fractales, visualizar los criterios de semejanza de los triángulos y establecer la relación intrafigural de las figuras semejantes generadas en dicha construcción.

- **Criterio AA (ángulo-ángulo):** Si dos ángulos de un triángulo son congruentes a dos ángulos de otro triángulo, los triángulos son semejantes.
- **Criterio LAL (lado-ángulo lado):** Si dos lados de un triángulo son proporcionales a sus lados correspondientes de otro triángulo y los

ángulos correspondientes entre estos lados son congruentes, entonces los triángulos son semejantes.

- Criterio LLL (lado-lado-lado): Si los lados correspondientes de dos triángulos son proporcionales, entonces los triángulos son semejantes.

Con las siguientes situaciones, en donde se presenta la construcción del triángulo de Sierpinski con diferentes tipos de triángulos (escaleno e isósceles), se pretende la construcción, medición y cálculo, de cada uno de los criterios de semejanza.

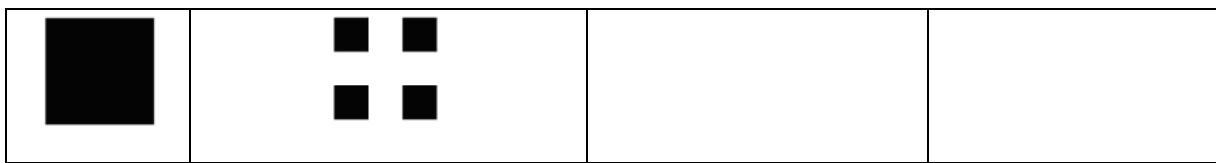
Paso 1	Paso 2	Paso 3	Paso 4
Paso 1	Paso 2	Paso 3	Paso 4

a. Construye el paso 4 del Triángulo de Sierpinski.
b. Encuentra la razón entre $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} =$
c. Encuentra la medida de: $\angle C =$ _____ $\angle C' =$ _____ y $\angle C''' =$ _____

Figura 1. Triángulos de Sierpinski escaleno y rectangular

Otras relaciones: En el estudio de la semejanza es importante que el estudiante comprenda las relaciones relativas a la longitud de los lados, la amplitud de los ángulos, la medida de perímetros y áreas que se dan entre la imagen y la preimagen. La construcción y el análisis que se hace sobre un fractal permite a los estudiantes encontrar estas relaciones y generalizarlas.

Paso 1	Paso 2	Paso 3	Paso 4
Dibuja un cuadrado de lado $9u$	Divide el cuadrado en nueve cuadrados congruentes. Elimina los cinco cuadrados centrales, dejando los cuadrados de las esquinas.	Sobre cada cuadrado obtenido repite lo indicado en el Paso 2. Quedan 16 cuadrados.	Repite el proceso del paso anterior sobre los cuadrados resultantes. Quedan 64 cuadrados.



- Denomina como A al primer cuadrado del paso 1 y como A' a uno de los cuadrados del paso 2, y continua con el proceso hasta enumerar un cuadrado de cada paso.
- ¿Cuál es la longitud del lado de cada uno de los cuadrados en cada paso? ¿Se conserva alguna relación entre las longitudes de los lados? Concluye
- ¿Cómo son los ángulos de cada cuadrado y qué relación guarda con los ángulos de los otros cuadrados?
- Halla perímetro y área de uno de los cuadrados obtenidos en cada paso.

Figura 6. Análisis del Cuadrado de Cantor

METODOLOGÍA

El trabajo del profesor muchas veces se ve enmarcado en el diseño de actividades que permitan potenciar la participación activa de los estudiantes en sus procesos de aprendizaje, para lo cual resulta importante orientar actividades que promuevan, entre otras: la interacción de los estudiantes, el uso de recursos y materiales didácticos, el reconocimiento y uso de diferentes representaciones y por último, el trabajo con situaciones o problemas significativos.

Para organizar la secuencia de actividades se toma como base la propuesta del Grupo Deca (1992), que propone incluir:

- **Actividades de iniciación e introducción:** En esta fase se observan las ideas previas de los estudiantes y se da cuenta de la importancia de trabajar nuevos conceptos.
- **Actividades de desarrollo y estructuración:** El estudiante entra en contacto con los nuevos conceptos y empieza a trabajar para asimilarlos. Es importante tener en cuenta que en esta etapa el estudiante logra comprensión de algunas situaciones que le permiten la resolución de situaciones problemáticas.
- **Actividades de aplicación y profundización:** El estudiante aplica los conocimientos adquiridos en situaciones problemáticas nuevas, reflexiona acerca de los procesos empleados en la resolución de los problemas y plantea nuevos problemas.

- **Actividades de evaluación:** La evaluación es concebida como un continuo dentro del proceso de enseñanza-aprendizaje; sin embargo, las actividades planteadas en esta fase están diseñadas para conocer el grado de apropiación y estrategias de resolución de problemas.

Secuencia para la enseñanza de la semejanza			
Tipo de actividad	Actividad	Intención	Recursos
Actividad de introducción	Análisis y construcción del conjunto de Cantor y del copo de nieve	Revisar conceptos previos de los estudiantes sobre proporcionalidad y medida	Según Godino (2002), clasificaremos los recursos en: Ayudas al estudio: textos y documentos en los que se aborde el estudio de la semejanza y los fractales Instrumentos semióticos: De tipo gráfico – textual, guía o taller para el estudiante
Actividad de estructuración	Análisis y construcción del Triángulo de Sierpinski Construcción del cuadrado de Cantor	Deducir el Teorema de Thales, hacer una aproximación a la semejanza a partir de figuras separadas	Representaciones fractales
Actividad de profundización	Análisis y construcción Triángulo de Cantor, Triángulo de Sierpinski y Cuadrado de Besicovich.	Trabajar los criterios de triángulos semejantes	
Actividad de evaluación	Análisis de las Curvas de Hilbert y Peano	Aplicar los conceptos estudiados: proporcionalidad, Teorema de Thales, criterios de semejanza	

Tabla 1. Secuencia didáctica para la enseñanza de la semejanza

Se plantea una metodología de trabajo en grupo con el fin de que los estudiantes a través de la comunicación y la interacción, propongan estrategias de solución a las situaciones planteadas. El profesor será un orientador en el proceso de construcción de los estudiantes, dará pautas para la realización de la socialización y tendrá a su cargo la institucionalización de los conceptos. En la evaluación se propondrán actividades en las cuales se hará uso de figuras fractales y de otras de diferente naturaleza para verificar que el concepto de

semejanza se ha comprendido ya que los estudiantes pueden utilizarlo en diferentes contextos.

REFERENCIAS

- Castro, C. y Céspedes, Y. (2009). *Concepciones de los estudiantes de grado octavo sobre el concepto de semejanza*. Tesis de maestría no publicada, Universidad Sergio Arboleda, Bogotá, Colombia.
- Gagné, R. (1975). *Principios básicos del aprendizaje para la instrucción*. México D.F., México: Diana.
- Godino J. (2002). Uso de material tangible y gráfico-textual en el estudio de las matemáticas: superando algunas posiciones ingenuas. En A.M. Machado et al. (Ed.), *Actas do ProfMat 98*. Guimaraes, Portugal: Associaçao de Professores de Matemática.
- Grupo Deca. (1992). Orientaciones para el diseño y elaboración de actividades de aprendizaje y de evaluación. *Revista AULA*, 6, 33-39.
- Lemonidis, Ch. (1991). *Conception, réalisation et résultats d'une expérience d'enseignement de l' homothétie*. Tesis doctoral no publicada, Université Louis Pasteur, Strasbourg, Francia.
- Mandelbrot, B. (s.f.). *Objetos fractales. Autosemejanza*. Recuperado el 2 de marzo de 2011, en: <http://coco.ccu.uniovi.es/geofractal/capitulos/01/01-04.shtml#Cantor>.

EL TEOREMA DE BARROW COMO PROPUESTA PARA LA ENSEÑANZA DEL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

Harold Devia y Tatiana Galvis

Universidad Pedagógica Nacional

hdevia@gmail.com, matetag@gmail.com

Se presenta la descripción de un taller del trabajo de grado titulado *Propuesta didáctica para el paso de la gráfica de la función derivada a la gráfica de una función primitiva*, y las conclusiones de su implementación con estudiantes de cálculo integral de Licenciatura en Matemáticas, de la Universidad Pedagógica Nacional. El propósito del trabajo fue diseñar un conjunto de actividades que involucraran el empleo de algunas herramientas del cálculo, para establecer la relación que existe entre el cálculo diferencial y el cálculo integral a través del Teorema Fundamental del Cálculo, y además, resaltarán el uso del sistema de representación gráfico de las funciones a través de los procesos de visualización y análisis gráfico.

JUSTIFICACIÓN

Uno de los conceptos fundamentales en el estudio del Cálculo es el de función, a partir del cual se abordan los conceptos de derivada e integral. Siguiendo a Font (2005), las funciones tienen cuatro representaciones: la simbólica, la tabular, la gráfica y la verbal. Entre ellas es posible establecer conexiones “que marcan las diferentes etapas de aprendizaje en los estudiantes” (Turégano, 1998, p. 45) y realizar cambios de unas a otras a través de lo que Font denomina procesos de traducción y conversión.

En el Cálculo Integral se suele usar constantemente la representación simbólica, haciendo énfasis en el uso de algoritmos y distintos métodos para hallar las antiderivadas de una función. Como consecuencia de este enfoque de enseñanza, el uso de la representación gráfica queda relegado a un segundo plano, lo que dificulta entender la integral de una función desde su interpretación geométrica como el área acumulada bajo una curva, tal como menciona Turégano (1998).

Con base en las ideas citadas, se diseñó una propuesta para analizar el Teorema Fundamental del Cálculo como aquel concepto que relaciona el proceso de integración con el de diferenciación, y que constituye un “robusto puente que

Devia, H. y Galvis, L. (2011). El Teorema de Barrow como propuesta para la enseñanza del Teorema Fundamental del Cálculo. En P. Perry (Ed.), *Memorias del 20º Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones* (pp. 189-196). Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

une estas dos estructuras matemáticas aparentemente independientes” (Turégano, 1998, p. 236).

MARCO TEÓRICO

Font (2005) sólo considera cuatro representaciones del concepto de función (la analítica, la tabular, la gráfica y la verbal) y afirma que a pesar de que éstas hacen alusión a un mismo objeto matemático, en cada una se privilegia el uso de algún proceso cognitivo, y la integración de éstos son los que hacen a una persona competente en el estudio del objeto matemático llamado función.

Para la representación gráfica es indispensable el proceso de la visualización; para la tabular, los procesos que incluyen aspectos numéricos y cuantitativos; para la analítica, los procesos relacionados con la capacidad simbólica; y finalmente, la representación verbal, la asocia con los procesos que incluyen las capacidades lingüísticas de una persona.

De acuerdo con Cantoral y Montiel (2003), la visualización es la habilidad para representar, transformar, generar, comunicar, documentar y reflejar información visual en el pensamiento y el lenguaje del que aprende. Castro y Castro (1997) presentan la noción de visualización como la capacidad para la formación de imágenes mentales que permiten la evocación de un objeto sin que el mismo esté directamente presente.

En el libro *Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales* de Duval (como se cita en MEN, 2004) existen tres niveles de visualización: el global de percepción visual, el de percepción de elementos constitutivos y el operativo de percepción visual. El primero es el nivel más elemental donde se observan los objetos de manera global para asociar figuras geométricas a objetos físicos. En él se le da importancia a la posición del objeto o al tipo de trazo, sin tener en cuenta aspectos matemáticos como propiedades y relaciones. En el segundo nivel, además de retomar los aspectos del nivel anterior, se consideran las relaciones entre los elementos constitutivos, es decir, las figuras geométricas se enuncian con nombre propio, por ejemplo como cuadrados y triángulos. Al tener nombre propio, tienen características propias como lo son las relaciones de congruencia entre lados y ángulos; y relaciones de perpendicularidad y/o paralelismo. Es importante en este nivel orientar al estudiante para visualizar los objetos de manera no estandarizada. Por último, el tercer nivel además de considerar la percepción de las caracte-

rísticas de una figura para operar en ella, se reorganizan los elementos que la conforman para lograr la solución de un problema planteado; es el caso de las conocidas pruebas sin palabras, donde la visualización se enfoca en la capacidad de transformar la figura para dar validez a una proposición matemática.

Finalmente, la visualización se emplea para lograr un mejor entendimiento de conocimientos abstractos, y se considera una habilidad que es necesario estimular mediante el diseño de actividades que pongan en evidencia la interpretación que da el estudiante en la construcción y descripción de un tópico matemático.

Teorema de Barrow, una aproximación al Teorema Fundamental del Cálculo

Según Flashman (1996), el Teorema de Barrow es un caso particular del Teorema Fundamental del Cálculo, en el que la función primitiva (curva A) se obtiene al determinar el área acumulada bajo la curva de otra función (curva Y y semirrecta OZ).

El Teorema de Barrow afirma lo siguiente: *Suponga que en x la altura de la curva A que pasa por los puntos O y P es el segmento PX, la cual mide igual al valor del área del triángulo rectángulo OXQ. Si se elige el punto T sobre la semirrecta OZ de tal manera que $TX \cdot XQ = XP$, entonces la recta TP es tangente a la curva A en el punto P.*¹

En la Figura 1, la curva A corresponde a una rama de parábola de la forma $f(x)=kx^2$, con $k > 0$. También se infiere que por ser la recta PX perpendicular a la recta OX , las longitudes XQ y PX aumentan cuando la longitud OX aumenta.

En la Figura 2, se presenta lo que Barrow hizo en una misma gráfica por encima y por debajo de un mismo eje horizontal. La Figura 2(a) corresponde a la

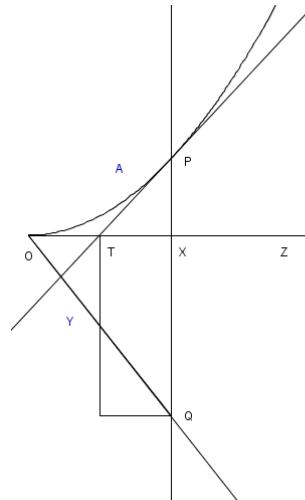


Figura 1

¹ Enunciado adaptado de Flashman (1996, p. 312).

curva Y , y en la Figura 2(b) se representa la gráfica de las abscisas que tienen la misma magnitud que el área del triángulo OXQ de la Figura 2(a).

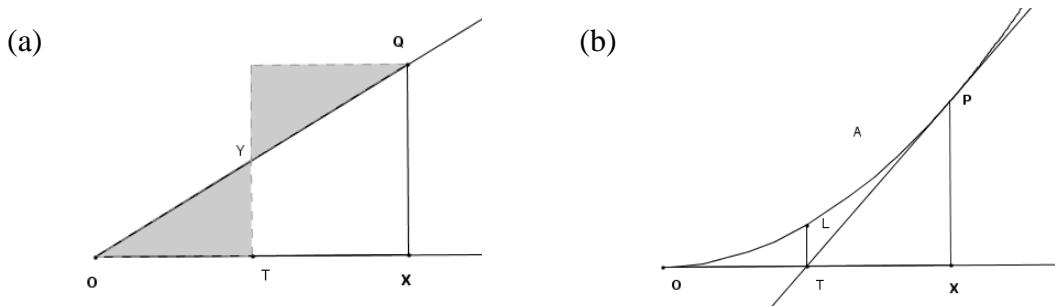


Figura 2

La condición de que $PX = QX \cdot TX$ en el Teorema de Barrow, exige que la posición del punto T en la semirrecta OX no sea arbitraria, sino que T debe ser el punto medio del segmento OX . La Figura 2(a) ilustra esta afirmación al considerar la congruencia en área entre el triángulo OXQ y el rectángulo de base TX y altura QX como consecuencia de que los triángulos sombreados son congruentes.

Otra manera de referirse al área de uno de los triángulos sombreados, es empleando la notación de integral definida de la siguiente manera: $\int_0^t Y$, lo cual representa la longitud del segmento LT de la Figura 2(b).

De acuerdo con la demostración del Teorema de Barrow (Flashmn, 1996) se deduce que la pendiente de la recta tangente a la curva A en el punto P es $m = \frac{XP}{TX}$, pero por hipótesis del teorema se tiene que $PX = TX \cdot QX$, por lo tanto se concluye que la pendiente es $m = QX$. Es decir, si se tiene la información de la Figura 2(a) se puede trazar una parte de la función primitiva y saber con precisión el valor de su pendiente en un punto específico. Ahora, si se tiene la Figura 2(b) se puede hallar el valor de la pendiente en un punto específico dividiendo el valor de la ordenada entre la mitad del valor de la abscisa.

Como comentario final al Teorema de Barrow, se afirma que él estableció la relación entre el problema de la recta tangente a una curva en un punto, y el problema del área bajo la curva para funciones cuadráticas y lineales respectivamente. En otras palabras, se aproximó a lo que se conoce como Teorema Fundamental del Cálculo aplicándolo a las funciones antes mencionadas.

TALLER IMPLEMENTADO Y RESULTADOS

Para introducir el Teorema Fundamental del Cálculo a partir de los registros de representación algebraico y gráfico, en el siguiente taller se hace una adaptación de la propuesta de Zubieto (s.f.), en el que se plantea a los estudiantes manipular una construcción realizada con el software Regla y Compás el cual modela el Teorema de Barrow.



TALLER: TEOREMA DE BARROW

Elaborado por: Harold Devia - Tatiana Galvis

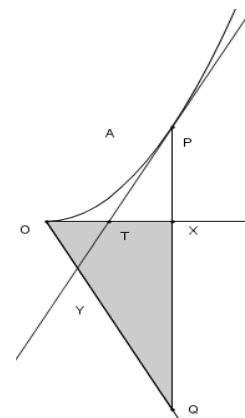
Objetivo: Identificar la relación entre el Teorema de Barrow y el Teorema Fundamental del Cálculo.

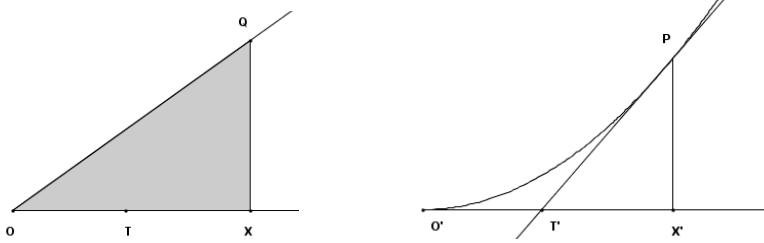
En este taller se aborda, desde una perspectiva geométrica, el puente entre dos problemas clásicos del Cálculo: el problema de la recta tangente a una curva en un punto específico y el problema del área de una región plana.

Al retroceder en la historia del Cálculo, aparece un predecesor de Newton y Leibniz que se interesó en estudiar la relación entre los dos problemas antes mencionados. Este personaje fue Isaac Barrow (1630-1677), quien fue profesor de Newton y el primero en evidenciar que la interpretación geométrica de la derivada y la integral no eran conceptos inconexos, a partir de lo cual elaboró el teorema que lleva su nombre.

Teorema de Barrow: Suponga que en X la altura de la curva A que pasa por los puntos O y P es el segmento PX , la cual mide igual al valor del área del triángulo rectángulo OXQ . Si se elige el punto T sobre la recta OX de tal manera que $TX \cdot XQ = XP$, entonces la recta TP es tangente a la curva A en el punto P .

- 1) Empleando la construcción que se presenta en el archivo Barrow1, manipule la posición del punto T sobre la semirrecta OX , para que la recta $T'P$ sea tangente a la curva A . ¿A qué distancia del punto O debe estar el punto T para que la recta $T'P$ sea tangente?

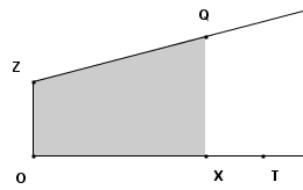




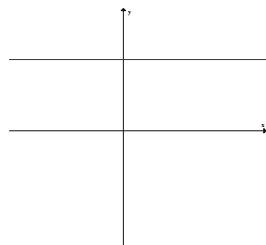
En el archivo Barrow1 se encuentra una construcción que ilustra al Teorema de Barrow. En éste, el segmento OX es congruente con el segmento $O'X'$, al igual que el OT lo es con el $O'T'$. La recta $T'P$

- 2) Trace una recta paralela a \overleftrightarrow{QX} que pase por el punto T (donde $\overleftarrow{PT'}$ es tangente a la curva A en el punto P), y una recta paralela a \overleftrightarrow{OX} que pase por Q . Denomine con R la intersección de estas rectas.
- (a) ¿Qué debe representar el área del triángulo que se visualiza en el rectángulo $TXQR$, con respecto a la curva A ? Justifique su respuesta.
- (b) El área del trapezio que se visualiza en el mismo rectángulo se interpreta como una longitud. Indique cómo obtener esa longitud analizando la gráfica de la curva A .
- 3) En el archivo Barrow2 se encuentra una variación del Teorema de Barrow, en el que las semirrectas OX y OQ no se intersectan, tal como se ilustra en la imagen de la derecha.

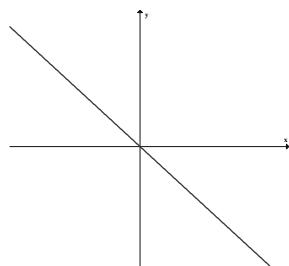
I. Para cada una de las siguientes gráficas haga un bosquejo de la gráfica de una de las funciones primitivas.



(a)

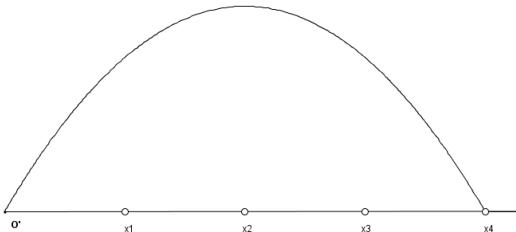


(b)



II. En el archivo Barrow2 rote la semirrecta ZQ alrededor de Z para hacer los modelos gráficos presentados en (I) y verifique si el lugar geométrico que cada uno genera coincide con los respectivos bosquejos que usted realizó de las funciones primitivas.

III. Para la gráfica (b), la construcción de Barrow2 genera una parábola como la que se muestra a continuación. Trace en ella los segmentos tangentes en los puntos x_i con $i = 1, 2, 3$ y 4 .



IV. Relacione el comportamiento de las rectas tangentes a la parábola en los puntos x_i con la semirrecta ZQ cuando ésta modela la gráfica (b).

4) ¿Encuentra alguna similitud entre el Teorema de Barrow y el Teorema Fundamental del Cálculo? ¿Sería correcto afirmar que la variación del Teorema de Barrow y el Teorema Fundamental del Cálculo son los mismos? Explique su respuesta.

Para el desarrollo de este taller, cada estudiante tuvo la posibilidad de explorar dos archivos correspondientes a las construcciones Barrow1 y Barrow2 realizadas con el software de geometría dinámica Regla y Compás.

Con respecto a la intención del numeral 1, los estudiantes efectivamente cumplieron nuestras expectativas porque todos afirmaron que el punto T debe ser el punto medio del segmento OX , para que efectivamente la curva A sea la función de área acumulada de la curva Y , y sólo el 53% de ellos lo justificaron.

En el numeral 2, todos los estudiantes concluyeron que el triángulo por el cual se pregunta en el literal (a) es congruente con el que tiene por base el segmento OT , sin embargo a la mayoría de ellos les fue dispendioso comprender que el área del triángulo representa la altura de la curva A en el punto T' . Por esta razón fue necesario intervenir y explicar a los estudiantes el significado de esa área en la curva A .

Consideramos que la dificultad que mostraron los estudiantes fue causada por dos factores: el hecho de que el Teorema de Barrow prescinde de ejes cartesianos y en consecuencia de los términos de abscisa y ordena, y en segundo lugar por la redacción del enunciado del literal (a).

En el literal 2(b) los estudiantes manifestaron incomprendión o desacuerdo en lo que se desea indicar, y fue necesario intervenir una vez más en el trabajo de los estudiantes para que comprendieran lo que se espera con el enunciado.

El numeral 4, únicamente tres estudiantes lo respondieron. Los tres coincidieron en responder la pregunta: ¿Encuentra alguna similitud entre el Teorema de Barrow y el Teorema Fundamental del Cálculo?

Sus respuestas afirmaron que el Teorema de Barrow funciona igual que el Teorema Fundamental del Cálculo, pero sólo uno de ellos manifestó que no son el mismo, sin exponer la justificación de su respuesta.

REFERENCIAS

- Cantoral, R. y Montiel, G. (2003). Visualización y pensamiento matemático. En J. Delgado (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (vol. 16, tomo 2, 694-701). Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C. Recuperado en agosto de 2008 de <http://www.matedu.cicata.ipn.mx/actas.html>.
- Castiblanco, C., Urquina, H., Camargo, L. y Acosta, M. (2004). *Pensamiento geométrico y tecnologías computacionales*. Bogotá, Colombia: Ministerio de Educación Nacional.
- Castro, E. y Castro E. (1997). Representaciones y modelización. En L. Rico (Coord.), *La educación matemática en la educación secundaria* (pp. 95-112). Barcelona, España: Horsori.
- Flashman, M. (1996). Historical motivation for a calculus course: Barrow's Theorem. En R. Calinger (Ed.), *Vita mathematica. Historical research and integration with teaching* (pp. 309-315). Washington, USA: Mathematical Association of America.
- Font, V. (2005). Funciones y derivadas. En *Memorias del XXI Coloquio Distrital de Matemáticas y Estadística* (tomo II, pp. 5-54). Bogotá, Colombia: Universidad Distrital Francisco José de Caldas.
- Turégano, P. (1998). Del área a la integral. Un estudio en el contexto educativo. *Enseñanza de las Ciencias*, 16(2), 233- 249.
- Zubieta, G. y Meza, R. (s.f.). *El teorema fundamental del cálculo: la versión que aparece en los textos de cálculo y la otra, basada en las ideas de Barrow, presentada con un paquete de geometría dinámica*. Documento recuperado en julio de 2008, de: http://www.matedu.cinvestav.mx/~matedul/publicaciones/MemoriasPrimerEncuentro/investigacion/articulos_pdf/Zubieta.pdf.

LA VERIFICACIÓN Y LA INTERPRETACIÓN DE ENUNCIADOS EN LA ACTIVIDAD DEMOSTRATIVA

Bibiana Franco, Giovanni Moreno y Leonor Camargo

Universidad Pedagógica Nacional

nanitaa55@gmail.com, giovanotas7@hotmail.com, leonor.camargo@gmail.com

Referimos el primer acercamiento que tienen estudiantes de grado octavo cuando se enfrentan a problemas de construcción que pretenden involucrarlos en la actividad demostrativa. Mostramos que los estudiantes de básica secundaria tienen la necesidad de verificar las afirmaciones incluidas en el enunciado de los problemas como un mecanismo para interpretar la información contenida y lo que se les pide. En este sentido, la verificación, como parte de las acciones de la actividad demostrativa, no se restringe a la comprobación de un hecho descubierto, tal como lo sugieren Perry et al. (2006), sino que está presente desde el comienzo de la actividad. Ilustramos esta idea con fragmentos de la interacción de un grupo de cuatro estudiantes.

En esta ponencia comunicamos algunos avances de los análisis que estamos desarrollando relacionados con nuestro proyecto de investigación “La argumentación como núcleo de la actividad demostrativa”, estudio que adelantamos como trabajo de grado en el programa de Maestría en Docencia de las Matemáticas, de la Universidad Pedagógica Nacional. Nuestra investigación se inscribe en la línea *Aprendizaje y Enseñanza de la Geometría* del grupo Didáctica de la Matemática. Esta línea de investigación se ha preocupado por el aprendizaje de la demostración en los diferentes niveles educativos. A partir de tal inquietud, considera de vital importancia realizar experimentos de enseñanza que permitan estudiar acciones desarrolladas por los estudiantes en donde se hagan evidentes las posibilidades que tienen los estudiantes de secundaria de llevar a cabo procesos de argumentación y justificación como parte fundamental del aprendizaje de las matemáticas. Los resultados de tales experimentos permitirán promover diseños curriculares para la enseñanza y el aprendizaje de la geometría en la escuela.

Nuestra ponencia se divide en cuatro apartados organizados de la siguiente manera: inicialmente, describimos el marco de referencia con el cual estamos orientando la investigación; luego presentamos un resumen del diseño metodológico del estudio; posteriormente, damos cuenta del proceso de análisis de

Franco, B., Moreno, G. y Camargo, L. (2011). La verificación y la interpretación de enunciados en la actividad demostrativa. En P. Perry (Ed.), *Memorias del 20º Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones* (pp. 197-204). Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

la información recogida sobre la actividad demostrativa del grupo de estudiantes; por último, damos un ejemplo del análisis de un fragmento de interacción que se constituye en una evidencia del uso de la verificación por parte de los estudiantes.

MARCO DE REFERENCIA

Nuestro trabajo está en consonancia con el constructo *actividad demostrativa* (Perry, Camargo, Samper y Rojas, 2006), el cual ha sido desarrollado a partir de diversas investigaciones realizadas por profesores del Departamento de Matemáticas y estudiantes de Maestría de la Universidad Pedagógica Nacional. Este constructo propone una mirada amplia a la demostración en el ámbito educativo, que incluye: el proceso de conjeturación y el proceso de justificación. En el proceso de conjeturación se realizan acciones que conducen a la formulación de una conjetura que da solución a una tarea (visualizar, explorar, conjeturar y verificar); estas acciones posibilitan la creatividad de los estudiantes, pues no existen reglas para llevarlas a cabo. En el proceso de justificación las acciones conducen a la búsqueda y organización de ideas para explicar, probar o demostrar la conjetura, es decir, para justificarla.

El constructo *actividad demostrativa* se circunscribe a la perspectiva sociocultural, enfoque de referencia de la línea de investigación. En este sentido, son de vital importancia las interacciones estudiante–estudiante y estudiante–profesor en el desarrollo de tal actividad. Gracias a esa perspectiva, los profesores de la línea de investigación dan relevancia a la argumentación, foco de interés de nuestro trabajo de grado. De esta manera, cuando los estudiantes se enfrentan a un problema y buscan una vía para su solución, pueden realizar interacciones de diversa índole con sus compañeros, a partir de las cuales se generan argumentos empíricos o teóricos que permiten proponer y validar una posible solución del problema. En particular, Perry, Camargo, Samper y Rojas (2006), definen la acción de verificación como la:

Comprobación empírica mediante acciones visibles sobre una representación, como medir, construir y calcular, con el propósito de poner a prueba la conjetura establecida cuando un cuestionamiento suscita una duda frente a ésta.

Con ello suponen que la argumentación que los estudiantes despliegan, cuando verifican, se realiza sólo al momento en que quieren poner a prueba el hecho descubierto. Una posible explicación de esta caracterización es que las

investigaciones realizadas en la línea se han desarrollado principalmente con estudiantes de los primeros semestres de educación superior, en la formación inicial de profesores, quienes probablemente no tienen necesidad de verificar la información contenida en los enunciados de los problemas. Nuestro trabajo aporta a la línea de investigación al analizar las acciones de verificación que despliegan estudiantes de secundaria en momentos previos a la producción de la conjectura.

DISEÑO METODOLÓGICO

Dado que el interés de nuestra investigación se centra en buscar evidencias de los procesos de argumentación que estudiantes de básica secundaria llevan a cabo al involucrarse en la actividad demostrativa, nuestro trabajo se enmarca dentro de una perspectiva naturalista; es decir, observamos estudiantes en el espacio usual del aula interactuando en pro de solucionar un problema, y tomamos registro de las interacciones entre ellos.

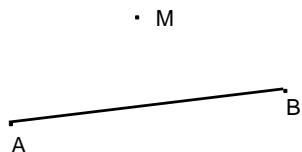
Los primeros ejercicios de análisis de las interacciones dan evidencias del fenómeno que queremos comunicar en esta ponencia. A continuación, describimos la población a la que se dirige el estudio y de la cual tomamos los datos, el problema que se les propuso, los mecanismos que utilizamos para recoger la información y por último la manera como la estamos analizando.

La investigación se realiza con estudiantes de grado octavo de básica secundaria, en una clase de geometría que tuvo lugar al finalizar el año 2010. Uno de los autores de esta ponencia era la profesora titular de dicha asignatura y por lo tanto tuvo la posibilidad de proponer estrategias de trabajo en la clase para favorecer la actividad demostrativa. Los estudiantes tenían conocimientos básicos de geometría, tales como la identificación de figuras geométricas y sus partes. Adicionalmente, gracias a las habilidades adquiridas en la asignatura *Dibujo técnico*, manejaban la regla y el compás y conocían algunos procedimientos para construir rectas perpendiculares y ángulos congruentes. Sin embargo, no reconocían en las construcciones hechas los objetos geométricos involucrados, pues en esa asignatura lo importante era seguir cuidadosamente una serie de pasos para obtener la construcción deseada.

A ocho de los veintiocho estudiantes de grado octavo distribuidos en dos grupos, se les propuso un problema en una sesión de clase, para la cual los estu-

diantes debían usar compás, regla sin medidas, lápices y borrador. El problema era el siguiente:

En la figura, el punto M es el punto donde se cortan las mediatrices del $\triangle ABC$ y \overline{AB} es un lado del triángulo. Construya un triángulo tal que M sea corte de las mediatrices.



Los estudiantes debían leer el enunciado y solucionar el problema. La profesora y otro autor de esta ponencia acompañaron el trabajo de cada grupo formulando preguntas para promover la argumentación. Después de que los estudiantes resolvieron el problema, la profesora realizó una socialización de los procesos de solución realizados por los dos grupos, para institucionalizar los resultados. Las definiciones, teoremas o procedimientos se validaron a partir de las justificaciones propuestas por los estudiantes.

La interacción entre los estudiantes se grabó en audio y video. Las grabaciones se transcribieron en su totalidad atendiendo al orden cronológico y estas han sido objeto de varias correcciones a partir de una versión inicial, buscando reconstruir lo más fielmente posible lo sucedido en la interacción. Adicionalmente, las transcripciones se alimentaron con información proveniente de las hojas de trabajo de los estudiantes, con aclaraciones (puestas entre paréntesis cuadrados) que hicieron los investigadores a algunas intervenciones de los estudiantes que no resultaban lo suficientemente comprensibles por sí solas o con narraciones de acciones de los estudiantes que no iban acompañadas de un diálogo. Las figuras observadas en el video se modelaron utilizando un programa de geometría dinámica.

PROCESO DE ANÁLISIS

Con la transcripción completa del proceso de resolución del problema, realizamos una división de ésta en episodios. Entendemos por episodio un fragmento de la transcripción donde los estudiantes están desarrollando una idea para solucionar el problema. Por ejemplo, en la transcripción del proceso realizado por el Grupo 1 propusimos, entre otros, los siguientes episodios: (i) Interpretan el enunciado y hacen un primer intento de comprobación de que M está en la mediatriz; (ii) Comprueban que M está en la mediatriz; (iii) Propo-

nen una forma para ubicar C sobre la mediatrix de \overline{AB} , para lo cual hacen un triángulo equilátero; (iv) Identifican en la figura construida características asociadas a la mediatrix.

El análisis de cada episodio tiene en cuenta tres aspectos. Primero, describimos las acciones que hicieron los estudiantes y el diálogo sostenido entre ellos. Segundo, identificamos los momentos de la transcripción en los cuales los estudiantes desarrollan alguna de las acciones de la actividad demostrativa. Tercero, identificamos y caracterizamos los argumentos que utilizan los estudiantes para justificar sus afirmaciones. El estudio pretende caracterizar, organizar y clasificar los argumentos que están usando los estudiantes y establecer vínculos entre ellos y las diferentes acciones de la actividad demostrativa. En esta ponencia, mostramos y analizamos un episodio en donde se evidencia qué verifican los estudiantes y con qué objetivo.

EJEMPLO DE ANÁLISIS

Los estudiantes habían: leído el enunciado, revisado en sus apuntes la definición de mediatrix y discutido entre ellos cómo se construía una mediatrix. En este episodio Sergio, Cristian, Felipe y Daniel retoman el enunciado y deciden construir la mediatrix sobre el lado \overline{AB} .

18. Felipe: Con la misma medida de M [arco de abertura AM] toca hacerlo abajo.
[Señala la parte de abajo del \overline{AB} , como lugar para trazar otro arco].
19. Daniel: Toca sacar C .
20. Sergio: Toca mirar si M es... Por eso, haga las dos circunferencias y toca mirar si M es la mediatrix.
21. Felipe: ¿Qué era? ¿Radio AM ? [Con el compás hace centro en A y describe un arco, sin trazarlo, con radio AB].
[...]
25. Felipe: No nos da [Se refiere a que M no quedó en dicho arco].
26. Cristian: Pero no, tocaría sacar entonces C .
27. Sergio: ¿ C ?
28. Felipe: Lo que yo les digo, tocaría hacerlo abajo, tocaría hacer la misma medida de M abajo.
29. Daniel: Sí.

30. Sergio: Pero toca mirar primero si M sí pasa por la mediatrix o no pasa por la mediatrix.
31. Felipe: Por eso, primero toca averiguar eso [Hace dos arcos en la parte de abajo del \overline{AB} con radio AM y con centro en A y B]
32. [...]
33. Profesora: ¿Qué van a verificar?
34. Felipe: Si M es la mediatrix [Se refiere a verificar que el punto M esté en la mediatrix].
35. Profesora: ¿Si M es la mediatrix?
36. Todos: ¡Ajá!, Sí.
37. Sergio: Dios mío, que sea la mediatrix.
38. Profesora: [...]
39. Felipe: [Después de hacer los arcos]. ¡Ah!, sí es la mediatrix... sí, sí es la mediatrix. [Vuelve a marcar los dos arcos en la parte de abajo del \overline{AB} con radio AM y centros en A y en B].
40. Sergio: Sí, sí es la mediatrix.
41. Daniel: Sí, porque sube por toda la...
42. Profesora: ¿Qué comprobaron Sergio?
43. Felipe: Que era la mediatrix.
44. Sergio: Que M es un punto que equidista en A y B . O sea que M está formando la mediatrix.

Los estudiantes aún están interpretando el enunciado. Sugieren dos alternativas diferentes para abordar el problema: por un lado, proponen buscar el vértice C para formar el $\triangle ABC$; por el otro, proponen comprobar que el punto M está en la mediatrix del \overline{AB} .

En este episodio se evidencian dos momentos de *verificación*: cuando proponen trazar la mediatrix y anticipan que M no está en la mediatrix, porque el arco que describen con el compás no pasa por M [21-25] y cuando deciden cambiar el radio \overline{AB} por el radio \overline{AM} , para asegurarse de que los arcos pasen por M [31-40]. Cuando diseñamos el problema no previmos que los estudiantes necesitaran comprobar el hecho geométrico dado en el enunciado; esta situación nos sorprendió y puso en tela de juicio nuestra convicción de que

cualquier sujeto acepta como cierta la información dada en el enunciado de un problema. Adicionalmente, evidenciamos que la acción de verificación no sólo está presente en la justificación de una conjetura, como lo proponen Perry, Camargo, Samper y Rojas (2006), sino desde la misma interpretación del enunciado, como se muestra en este episodio, pues los estudiantes tienen la necesidad de poner a prueba lo que el enunciado propone.

Los argumentos que se identifican en este episodio están enfocados a justificar que el punto M está en la mediatrix del \overline{AB} . En una primera caracterización de los argumentos, identificamos uno de tipo empírico –en el que los estudiantes justifican que la recta construida es la mediatrix apoyándose en lo observado en la construcción [41]– y un argumento de tipo teórico en el que justifican que el punto M está en la mediatrix porque equidista de los extremos del segmento [44].

REFLEXIÓN FINAL

El análisis que hemos hecho hasta el momento nos permite reflexionar sobre las siguientes cuestiones:

- La importancia de tener unas transcripciones que reflejen lo más fielmente las interacciones; es decir, con solo la lectura de ellas se debe poder reconstruir las acciones de los estudiantes. Lo anterior permite hacer un mejor análisis de los diálogos que entablan los integrantes del grupo, sin necesidad de revisar nuevamente los archivos de audio y video.
- El orden en que aparecen las acciones de la actividad demostrativa no es lineal. En los fragmentos de las conversaciones de los estudiantes, podemos evidenciar, por ejemplo, que los estudiantes visualizan, explorar, verificar, vuelven a explorar y luego otra vez verifican.
- En cuanto a la acción *verificar* es necesario ampliar la caracterización que de ella proponen Perry, Camargo, Samper y Rojas (2006), pues no sólo cuando tienen una conjetura recurren los estudiantes a ella para verificarla, sino que utilizan la verificación como medio para validar cualquier tipo de información dada o que surge en el curso de resolución del problema.

- Los argumentos son producto de la necesidad recurrente de verificar cualquier tipo de información dada o emergente del problema. Estos argumentos permiten dar validez a las diferentes estrategias de solución.
- La interpretación del enunciado propuesto en un problema, no es obvia y mucho menos inmediata. Por el contrario, los estudiantes necesitan tiempo para comprender lo que se pide en el problema y por ello cada vez que una estrategia no funciona, vuelven a leer el enunciado y a interpretarlo nuevamente para buscar una estrategia diferente.

REFERENCIAS

Perry, P., Camargo, L., Samper, C. y Rojas, C. (2006) *Actividad demostrativa en la formación inicial del profesor de matemáticas*. Bogotá, Colombia: Fondo Editorial de la Universidad Pedagógica Nacional.

**UNA SECUENCIA DIDÁCTICA PARA POTENCIAR LA ELABORACIÓN DE
ESTRATEGIAS DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS QUE
INVOLUCREN LA IDENTIFICACIÓN DE PROPIEDADES DE
ALGUNOS POLIEDROS EN ESTUDIANTES DE CUARTO GRADO**

Christian Fuentes, Yenny Gaviria, Paola Vásquez y Jeisson Márquez

Universidad Distrital Francisco José de Caldas

cristianfuentes558@hotmail.com, yengavi@hotmail.es, paolavasquez7@hotmail.com,
yeye8323@hotmail.com

Se presenta una experiencia de aula realizada en el segundo semestre del año 2010 en el IED Colegio Nacional Restrepo Millán, con respecto a la enseñanza de geometría tridimensional a partir de la teoría de situaciones didácticas con dos cursos de cuarto grado.

LA ENSEÑANZA DE LA GEOMETRÍA EN LA EDUCACIÓN BÁSICA

Según MEN (1998), la enseñanza de la geometría en la educación básica es una herramienta para interpretar, entender y apreciar un mundo que es predominantemente geométrico. Este aspecto constituye una importante fuente de modelación y un ámbito por excelencia para desarrollar el pensamiento espacial y procesos matemáticos como, por ejemplo, las diversas formas de argumentación. En este caso, el desarrollo de la percepción espacial y de las intuiciones sobre las figuras bidimensionales y tridimensionales, la comprensión y uso de las propiedades de las figuras, el reconocimiento de propiedades, relaciones a partir de la observación de regularidades que conduzca al establecimiento de conjeturas y generalizaciones.

A partir de las evidencias encontradas en la actividad diagnóstica realizada a los estudiantes de grado cuarto, se identificaron algunas dificultades (e.g., deficiencias para caracterizar figuras bidimensionales y tridimensionales, y para identificar las propiedades de algunos sólidos a partir de la resolución de problemas), por lo cual vimos la necesidad de diseñar e implementar una secuencia de actividades para abordar las dificultades observadas, teniendo en cuenta como pregunta orientadora: ¿Cómo elaborar e implementar una secuencia de actividades que potencien en los estudiantes de grado cuarto la elaboración y el reconocimiento de estrategias de resolución de problemas que involucren la

Fuentes, C., Gaviria, Y., Vásquez, P. y Márquez, J. (2011). Una secuencia didáctica para potenciar la elaboración de estrategias de resolución de problemas que involucren la identificación de propiedades de algunos poliedros en estudiantes de cuarto grado. En P. Perry (Ed.), *Memorias del 20º Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones* (pp. 205-212). Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

identificación de propiedades de algunas figuras geométricas planas y tridimensionales, a través del uso de sus diversas representaciones?

MARCO DE REFERENCIA CONCEPTUAL

Por medio de la planeación, el diseño y la ejecución de una secuencia de actividades, se busca que los estudiantes de grado cuarto de la institución educativa I.E.D. Colegio Nacional Restrepo Millán, logren construir parte del pensamiento geométrico (construcción de poliedros y sus características). Para lograr que los estudiantes realicen la construcción de dicho conocimiento, se planteará una serie de situaciones significativas para el estudiante, para que de esta forma se lleve el desarrollo del objeto matemático. En este momento se ha de tener en cuenta lo mencionado desde la parte legal, del propio saber y la metodología propuesta de la Teoría de las Situaciones Didácticas. Es de notar que todos estos aspectos no son individuales; todo lo contrario, están totalmente relacionados entre sí. A continuación, en el marco teórico se explicitará la conjunción de estos tres elementos:

Para tener claro lo que se desea enseñar vamos a tener en cuenta la definición que dan Godino y Ruiz (2002), de lo que es un poliedro y de las propiedades de algunos poliedros:

Un poliedro es el sólido delimitado por una superficie cerrada simple formada por regiones poligonales planas. Cada región poligonal se dice que es una cara del poliedro, los vértices y lados de las regiones poligonales se dicen que son los vértices y lados del poliedro. (p. 482)

Desde una perspectiva didáctica MEN (1998) menciona que el estudio de la geometría intuitiva en los currículos de las matemáticas escolares se había abandonado como una consecuencia de la adopción de la “matemática moderna”. Desde un punto de vista didáctico, científico e histórico, actualmente se considera una necesidad ineludible volver a recuperar el sentido espacial intuitivo en toda la matemática, no sólo en lo que se refiere a la geometría.

En los sistemas geométricos se hace énfasis en el desarrollo del pensamiento espacial, entendido como el conjunto de los procesos cognitivos mediante los cuales se construyen y se manipulan las representaciones mentales de los objetos del espacio, las relaciones entre ellos, sus transformaciones, y sus diversas traducciones a representaciones materiales.

Los sistemas geométricos se construyen a través de la exploración activa y modelación del espacio tanto para la situación de los objetos en reposo como para el movimiento. Esta construcción se entiende como un proceso cognitivo de interacciones, que avanza desde un espacio intuitivo o sensorio-motor¹ de un espacio conceptual o abstracto relacionado con la capacidad de representar internamente el espacio, reflexionando y razonando sobre propiedades geométricas abstractas; paralelamente también se tuvo en cuenta la utilización de los siguientes estándares los permitirán que la secuencia didáctica no sólo esté fundamentada desde el aspecto didáctico, del saber matemático, sino que también hacer uso del aspecto legal para sustentarla.

- Comparo y clasifico objetos tridimensionales de acuerdo con componentes (caras, lados) y propiedades.
- Construyo y descompongo figuras y sólidos a partir de condiciones dadas.
- Construyo objetos tridimensionales a partir de representaciones bidimensionales y puedo realizar el proceso contrario en contextos de arte, diseño y arquitectura.
- Represento objetos tridimensionales desde diferentes posiciones y vistas.
- Utilizo técnicas y herramientas para la construcción de figuras planas y cuerpos con medidas dadas.

METODOLOGÍA

El planteamiento metodológico para la planeación y la ejecución de la secuencia de actividades se basa en la Teoría de Situaciones Didácticas propuesta por Brousseau (1986), y en la que se proponen las siguientes fases para la enseñanza de la matemática en el aula:

Fase de acción: En esta fase los estudiantes con sus conocimientos previos tratan de dar respuesta a la situación, dándose cuenta de que con los conocimientos que poseen no logran responder la situación.

¹ Se relaciona con la capacidad práctica de actuar en el espacio, manipulando objetos, localizando situaciones en el entorno y efectuando desplazamientos, medidas, cálculos espaciales, entre otros.

Fase de formulación: En cuanto a la comunicación en esta fase se plantea que por medio del intercambio de ideas realizado por los estudiantes se llega a fortalecer los conocimientos de cada uno de los estudiantes.

Fase de validación: En esta etapa los estudiantes ponen en juego el objeto de estudio, donde el estudiante describe lo hecho, justificando las estrategias utilizadas para dar solución a la situación planteada.

Fase de institucionalización: En este momento el profesor generaliza los conceptos inmersos durante el desarrollo de todas las fases y da a conocer la intencionalidad de aprendizaje que se pretendía en los estudiantes.

Además de los planteamientos anteriores también se tuvieron en cuenta las fases de aprendizaje geométrico, propuestas por Alsina (1997).

Fase 1: Discernimiento: Se presentan a los estudiantes situaciones de aprendizaje dando el vocabulario y las observaciones necesarias para el trabajo.

Fase 2: Orientación dirigida: El profesor propone una secuencia de actividades para que los estudiantes realicen y exploren; la ejecución y reflexión propuesta servirían de motor para proporcionar el avance en los niveles de conocimiento.

Fase 3: Explicitación: Los estudiantes, una vez realizadas las experiencias, expresan resultados y comentarios. Durante esta etapa el estudiante estructura el sistema de relaciones exploradas.

Fase 4: Orientación libre: Con los conocimientos adquiridos, los estudiantes aplican sus conocimientos de forma significativa a otras situaciones distintas de las presentadas, pero con estructura comparable.

Fase 5: Integración: Los objetos y las relaciones son unificados e interiorizadas en un sistema mental de conocimientos.

La secuencia de actividades inició con la implementación de una actividad diagnóstica donde se evidenciaron las dificultades conceptuales que presentaron los estudiantes (entre ellas, la representación plana de figuras tridimensionales). Con base en esta información se diseñó y se presentó una situación fundamental (que será el marco en donde estén todas las demás situaciones), a saber:

La fábrica de juguetes PELUCHIN S.A., empaca peluches pequeños en cajitas de lados iguales. Por ser el mes del amor y la amistad, la empresa ha hecho una

promoción y ha decidido vender 4 peluches en su caja por precio de 2, los cuales serán empacados en una caja más grande, para esto se requiere un estuche donde entren las 4 cajitas con sus respectivos peluches. Ayuda a los empacadores a realizar la caja para cada peluche y la cajita de promoción. ¿Cómo las armarías?

Con base en el planteamiento de esta situación se empezaron a implementar múltiples representaciones del objeto matemático (poliedros); entre ellas, representaciones tabulares, ortogonales, construcción de los poliedros con material tangible. Todas estas actividades estaban dirigidas a la potenciación de actitudes relacionadas con la identificación de propiedades de los poliedros. Finalmente se hizo una actividad de evaluación para comparar cognitivamente el nivel de cómo estaban y cómo concluyó el proceso de los estudiantes, con el fin de analizar los avances y dificultades presentadas.



Figura 1. Diferentes sistemas de representación utilizados por los estudiantes de grado cuarto en el transcurso de la ejecución de la secuencia didáctica

MODELO DE EVALUACIÓN

Los *Estándares curriculares de matemáticas* (MEN, 1998) proponen que para evaluar a los estudiantes se debe aplicar una evaluación formativa, continua, sistemática y flexible, además centrada en producir y recoger información necesaria sobre los procesos de enseñanza-aprendizaje que tienen lugar tanto en el aula como por fuera de ella. Señalan que:

La evaluación educativa no sólo es una parte de la didáctica como estrategia operacional de la pedagogía que se despliega en la ejecución de la enseñanza real, sino que es también su conciencia crítica que analiza desde el diseño del programa y del currículo hasta los logros de aprendizaje de cada alumno según las expectativas de cada perspectiva y modelo pedagógico. (p. 86)

A partir de lo mencionado anteriormente llegamos a definir evaluación como la actividad de acción, análisis y reflexión de los componentes del proceso educativo donde se involucran el alumno, el profesor, el saber, la metodología y el entorno. El evaluar adquiere sentido en la búsqueda de mejorar los procesos y resultados que se obtienen en la escuela; además de permitir diagnosticar el resultado de los procesos de desarrollo del alumno y pronosticar sus tendencia. Por este medio se asegura el éxito del proceso educativo. Por otra parte, evaluar permite identificar las dificultades, deficiencias y limitaciones que puede llegar a tener el estudiante al momento de comprender un objeto matemático.

Algunos referentes teóricos que fueron implementados para la evaluación en el proceso de diseño y ejecución de la secuencia didáctica fueron los niveles de Van Hiele, presentados por Dickson, Brown y Gibson (1991). Estos niveles son:

Nivel 0: Los estudiantes perciben figuras geométricas como un todo global. No reconocen las partes ni los componentes de la figura.

Nivel 1: Los estudiantes logran analizar las partes y propiedades particulares de las figuras.

Nivel 2: Los estudiantes determinan las figuras y sus propiedades.

Nivel 3: Los estudiantes pueden desarrollar secuencias de proposiciones para deducir una propiedad a otra.

Nivel 4: Los estudiantes están capacitados para analizar el grado de rigor de varios sistemas deductivos.

ANÁLISIS DE DATOS

Durante la ejecución de la secuencia didáctica, al finalizar cada sesión de clase, cada practicante elaboraba un documento llamado protocolo, el cual incluía varios elementos. Inicialmente, una descripción de la sesión, luego una reflexión acerca de los avances obtenidos en cada una de las sesiones; también, un análisis de los errores presentados por los estudiantes. La siguiente tabla, en la que se incluyen los niveles que se tuvieron en cuenta para evaluar tanto en la actividad diagnóstica como en la evaluación final, permite ver los avances.

Nivel	Diagnóstica	Evaluación Final
Nivel 1. Reconoce y traza figuras geométricas tales como cuadrado, círculo, triángulo y rectángulo.	43 %	60 %
Nivel 2. Identifica y utiliza figuras geométricas planas en las representaciones de su entorno.	32 %	45 %
Nivel 3. Hace una representación de los objetos del espacio en relación con él, tiene en cuenta la posición de los objetos, de tal forma que el estudiante represente los cambios.	25 %	50 %

Figura 2. Niveles de evaluación y tabulación de información en el momento de hacer la actividad diagnóstica y el examen final

De acuerdo a la información anterior evidenciamos un avance significativo en el aprendizaje de aspectos relacionados a la geometría, tales como:

- Caracterización de las propiedades de algunos cuerpos sólidos y los polígonos regulares.
- Heurísticas presentes en la resolución de problemas geométricos.
- Modelación matemática por medio de la utilización de material concreto.
- Utilización de diferentes sistemas de representación de una misma figura o forma geométrica.

CONCLUSIONES

Después de haber realizado esta experiencia didáctica, podemos concluir que:

El diseño y la planeación del docente son imprescindibles en la implementación de esta teoría. Nos damos cuenta desde la experiencia que es importante el diseño de las situaciones problema, las cuales deben ser del interés del estudiante. Además del diseño y la planeación de las situaciones problema es importante disponer apropiadamente cada una de las actividades que se dan en el aula, pues gracias al enfoque que se les dé, el estudiante podrá llegar a construir el conocimiento.

La adecuada implementación de la Teoría de Situaciones Didácticas permite el desarrollo de la comprensión, en este caso de las propiedades de algunos sóli-

dos en los estudiantes de cuarto grado. Esto se concluyó luego de las observaciones realizadas en el aula y de las continuas evaluaciones que realizamos del grupo de estudiantes frente a cuatro análisis: análisis de actuación, análisis cognitivo, análisis de contenido y análisis de instrucción. Además, los buenos resultados obtenidos a partir del trabajo con materiales didácticos demuestran que una enseñanza diferente puede conseguir que los estudiantes trabajen, se motiven y aprendan al mismo tiempo. Así que, a pesar del tiempo, trabajo y esfuerzo que demanda la elaboración de los materiales didácticos, bien vale la pena hacerlos.

Puesto que la creación de materiales didácticos es tarea de los docentes, es nuestra intención difundir gradualmente una metodología práctica, activa, participativa, cíclica, abierta, flexible, continua y motivadora, donde primen los intereses de los estudiantes.

REFERENCIAS

- Alsina, C. (1997). *Invitación a la didáctica de la geometría*. Madrid, España: Síntesis.
- Brousseau, G. (1986). Fundamentos y métodos de la didáctica de las matemáticas. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 7(2), 33-115.
- Dickson, L., Brown, M. y Gibson, O. (1991). *El aprendizaje de las matemáticas*. Madrid, España: Labor S.A.
- Godino, J. y Ruiz, F. (2002). *Matemáticas y su didáctica para maestros: Geometría y su didáctica para maestros* (pp. 445-603). Recuperado el 28 de marzo de 2010 en <http://www.ugr.es/local/jgodino/edumat-maestros/>.
- Ministerio de Educación Nacional (1998). *Lineamientos curriculares de matemáticas*. Bogotá, Colombia: Magisterio.

PROCEDIMIENTOS DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS MULTIPLICATIVOS DE ISOMORFISMO DE MEDIDAS

Manuel García y Alberto Suárez

*IED Tenerife (Granada Sur), Universidad Agraria de Colombia
CEDID Guillermo Cano Isaza, Universidad Pedagógica Nacional,
Universidad San Buenaventura
alejandro_972@yahoo.com, betosuarez68@gmail.com*

Se busca dar solución a la pregunta ¿Qué procedimientos de resolución utilizan los estudiantes de quinto grado de educación básica primaria cuando resuelven problemas de isomorfismo de medidas? Para ello se realiza un análisis de los procedimientos mostrados por estudiantes de grado quinto al resolver un cuestionario de problemas de isomorfismo de medidas. Este análisis se realiza a partir de seis categorías construidas de acuerdo a los referentes teóricos de Vergnaud. En la relación cuaternaria se categorizaron los procedimientos en tres clases: el procedimiento funcional, escalar y de iteración de unidades. En la relación ternaria se categorizaron los procedimientos en multiplicación, división y suma repetida.

PRESENTACIÓN DEL PROBLEMA

El *campo conceptual* lo define Vergnaud como un conjunto de problemas y situaciones cuyo tratamiento requiere conceptos, procedimientos y representaciones diferentes. Por ejemplo, el campo de las estructuras multiplicativas está formado por el conjunto de situaciones que requieren una multiplicación, una división o una combinación de tales operaciones. Una ventaja de esta aproximación al concepto es que se fundamenta en el estudio de los procedimientos que se evidencian ante las tareas a las cuales se enfrenta el individuo. El estudio de tales procedimientos aritméticos permite establecer un puente con los procedimientos y estrategias propios de la geometría en campos relacionados con los procesos de medida, por ejemplo.

Dentro de las múltiples clasificaciones que existen de los problemas multiplicativos, se destacan las que tienen en cuenta el aspecto semántico de su enunciado; entre ellas se encuentra la estructura de isomorfismo de medidas propuesta por Gerard Vergnaud y plasmada en el libro *El niño, las matemáticas y la realidad* (1991 y reimpreso en 2000).

García, M. y Suárez, A. (2011). Procedimientos de resolución de problemas multiplicativos de isomorfismo de medidas. En P. Perry (Ed.), *Memorias del 20º Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones* (pp. 213-220). Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

El estudio acerca de la resolución de los problemas de isomorfismo de medidas por parte de los estudiantes es de gran importancia, ya que tales problemas aparecen en la mayoría de actividades desarrolladas al trabajar la multiplicación en la educación básica primaria y más adelante en niveles superiores, ratificando su presencia permanente en el currículo a lo largo de la escolaridad.

Diversas investigaciones (Almeida, 2001; Llinares y Sánchez, 1997) han centrado su estudio en los procedimientos de los estudiantes al resolver problemas de estructura multiplicativa, tratando de indagar sobre el actuar cognitivo frente a un problema presentado en representación verbal, tabular y/o icónica. Los resultados muestran errores, obstáculos y niveles de complejidad analizados desde las producciones de los niños y niñas de diferentes grados de escolaridad. Las indagaciones realizadas en nuestro país no han sido ajenas a este tipo de cuestionamientos conceptuales que se dan a nivel internacional. Documentos creados colectivamente como MEN (1998, 2006) dedican parte de su contenido al estudio y presentación de la estructura multiplicativa a lo largo de la educación básica, en concordancia con la idea de que es un concepto que se desarrolla y se adquiere a lo largo de mucho tiempo.

La resolución de problemas multiplicativos reviste gran dificultad en los estudiantes, ya que en la clase de matemáticas generalmente es utilizado el mismo tipo de problema, debido a la concepción del maestro acerca de la multiplicación y de la organización curricular que se usa para programar las clases.

MARCO DE REFERENCIA CONCEPTUAL

Se realizó el análisis de investigaciones relacionadas con el objeto de estudio clasificando los trabajos analizados en dos grandes grupos: el primero reúne las investigaciones que dan cuenta de los procedimientos que los estudiantes usan al resolver problemas de estructura multiplicativa (Almeida, 2001; Gómez y Contreras, 2009; Llinares y Sánchez, 1997). Un segundo grupo que reunió algunos trabajos que describen cómo se vive la multiplicación en la escuela (Vergel, 2004; Bello y Salazar, 2007). Al comprender la complejidad que implica analizar la estructura multiplicativa, se decidió limitar el campo de estudio de este trabajo a los problemas de isomorfismo de medidas.

METODOLOGÍA

El cuestionario que se aplicó (denominado cuestionario PIM) estuvo compuesto por doce problemas multiplicativos que tienen estructura de isomorfismo de medidas, los doce problemas fueron divididos en tres grupos teniendo en cuenta la representación empleada para el planteamiento del enunciado, así: (a) verbal-íconica, cuatro problemas; (b) verbal-tabular, cuatro problemas y (c) enunciado verbal, cuatro problemas. Además se tuvo en cuenta la clasificación de los problemas de isomorfismo de medida.

Este análisis se realizó esperando encontrar evidencias de procedimientos escalares o funcionales dentro de una concepción de relación ternaria de la multiplicación, de acuerdo con lo expresado por Vergnaud (2000/1991) y por lo encontrado en las diferentes investigaciones ya documentadas. Para el análisis se tuvo en cuenta la representación con la cual se enunció el problema, las representaciones entendidas como “las notaciones simbólicas o gráficas, específicas para cada noción, mediante las que se expresan los conceptos y procedimientos matemáticos así como sus características y propiedades más relevantes” (Castro y Castro, 2000, p. 96).

Como consecuencia del estudio de los procesos de resolución (procedimientos) mostrados por los estudiantes en el cuestionario PIM, se diseñaron categorías de análisis de acuerdo a la relación mostrada entre los datos dados en el enunciado. Si en el dibujo, operación y/o explicación verbal expresada por el alumno se notó que relacionó las cantidades de manera lineal bajo el esquema $a \times b = c$ este procedimiento se considera dentro de la relación ternaria. En cambio, si en el dibujo, operación y/o explicación verbal expresada por el alumno se notó un procedimiento donde relacionó los dos espacios de medidas teniendo en cuenta, las cuatro cantidades involucradas se clasifican como una relación cuaternaria.

En la relación cuaternaria se categorizaron los procedimientos en tres clases: (a) el procedimiento funcional, (b) el procedimiento escalar y (c) el procedimiento de iteración de unidades. Los dos primeros se definieron según la propuesta de Vergnaud (2000/1991) y el tercero, cercano al concepto conocido como uniticidad (*unitizing*) de acuerdo a lo expuesto por Lamon (1994).

En la relación ternaria se categorizaron los procedimientos en tres grandes grupos: (a) multiplicación, (b) división y (c) suma repetida. Algunos procedimientos que no se ubican dentro de las categorías anteriores y son tenidos en

cuenta sólo para efectos cuantitativos y para algunas observaciones particulares son: respuesta inmediata, respuesta incorrecta, no responde.

ANÁLISIS DE RESULTADOS

Los procedimientos identificados en la resolución de los problemas del cuestionario PIM se clasificaron en dos grandes categorías: relaciones ternarias y relaciones cuaternarias. Los problemas P1, P5, P9 corresponden a problemas simples de multiplicación planteados en tres tipos de representación diferente. Los enunciados de estos problemas fueron clasificados de acuerdo con su representación así: P1 está enunciado de forma verbal-íónica; P5, de manera verbal-tabular y P9 se representa con un enunciado verbal. Se pudo observar que dentro de la relación cuaternaria se identificaron procedimientos categorizados como procedimientos funcionales y procedimientos escalares, además, se logró identificar el procedimiento que se denominó iteración de unidades.

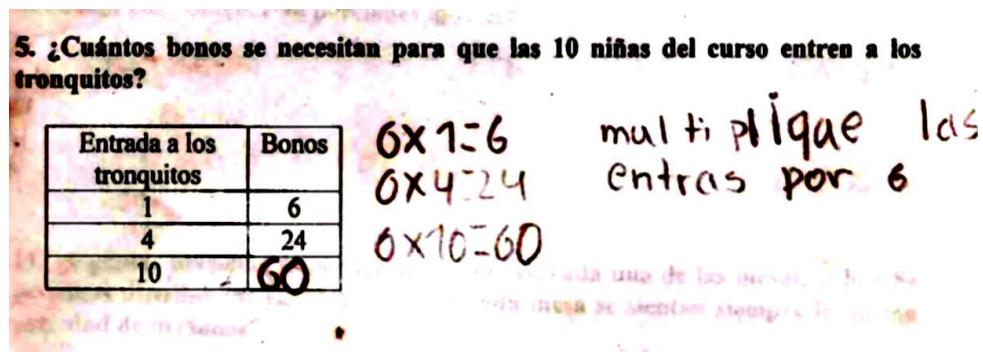


Figura 1. Procedimiento funcional de P5. Tomado de cuestionario del Estudiante 17

Realizando un análisis comparativo de la categoría de relación funcional en los tres tipos de representación se evidencia que la verbal-tabular (P5) favoreció el procedimiento funcional sobre las otras dos representaciones. La Figura 1 muestra el procedimiento funcional empleado por un estudiante para resolver el problema 5.

En este problema los dos espacios de medidas están relacionados mediante la función lineal $y = 6 \cdot x$, y de acuerdo con lo observado en la Figura 1 y al planteamiento expresado en el marco de referencia en el que se establece que el procedimiento funcional consiste en establecer la correspondencia entre las cantidades de ambos espacios de medidas aplicando a la vez en ambos espacios un operador funcional, que representa el coeficiente de la función lineal que existe entre los dos espacios de medidas, el razonamiento empleado por el estudiante le permite encontrar el operador $\times 6$ que pone en evidencia el análi-

sis de tipo funcional que relaciona las cantidades en forma horizontal lo cual implica pasar de un espacio de medida al otro como lo expresa Vergnaud (2000/1991). Este mismo autor indica que la representación tabular favorece el uso de relaciones cuaternarias en los procedimientos de resolución de problemas de isomorfismo de medidas. Llinares y Sánchez (1997), encuentran procedimientos similares en su investigación sobre evolución de estrategias, donde las tareas se presentan con una representación tabular.

Los resultados clasificados dentro de la categoría llamada iteración de unidades han mostrado un acercamiento al concepto de uniticidad (Lamon, 1994). Para avanzar de la suma o la resta a una estructura más compleja como lo es la multiplicación, se requiere un proceso mental de composición de unidades múltiples. En los resultados estudiados se puede observar que la representación verbal-íconica de P1 favoreció este proceso, mientras que en P5, con representación verbal-tabular y P9 con representación de enunciado verbal no se encontró ninguna evidencia de este procedimiento. En el Figura 2 se muestra un procedimiento que permite identificar la relación que el niño establece entre el espacio de medida *cajas* y el espacio de medida *paquetes*, lo cual verifica el planteamiento de Lamon (1994) que afirma que la representación en forma de dibujos facilita los procedimientos de emparejamiento entre los espacios de medida.

A partir del análisis de la Figura 2, se puede observar que el estudiante construyó una unidad de referencia conformada por seis paquetes por caja, la numeración que usa en cada fila de seis paquetes en el espacio de medida *paquetes* y la numeración en cada caja en el espacio *cajas* sugiere un intento de establecer una relación entre los dos espacios de medida, por ello este procedimiento se categorizó dentro de las relaciones cuaternarias.

1. ¿Cuántos paquetes de chocolates hay en 4 cajas?	
CAJAS	PAQUETES

Figura 2. Procedimiento de unidad múltiple de P1. Tomado de cuestionario del Estudiante 12

El dibujo que realiza el niño permite observar rasgos de habilidades de construcción de unidades múltiples, existe una organización en el procedimiento del niño que sugiere la organización de unidades de unidades, en términos de Lamon, pues ubica en cada fila 6 unidades y las numera con el número 1 y sigue la secuencia numérica: 6 es 1 12 es 2 18 es 3.

Por otra parte, dentro de los problemas solucionados usando una relación ternaria sobresalen los procedimientos categorizados como multiplicación y suma repetida; P9 fue el problema con mayor índice de procedimientos de este tipo.

En las resoluciones de los estudiantes se presentaron mayor cantidad de procedimientos ternarios comparados con los procedimientos de relación cuaternaria, posiblemente porque como afirman diversos autores (Freudenthal, 1983, en Puig y Cerdán, 1995; Vergnaud, 2000/1991) el modelo habitual $a \times b = c$ tiene gran arraigo en la escuela, en particular, en el colegio donde se realizó el estudio pues se observó este hecho en el análisis realizado a los problemas existentes en los cuadernos de los estudiantes. Para Vergnaud (1991/2000) esta forma de escribir la multiplicación no es una representación correcta y no permite ver la multiplicación como una operación cuaternaria.

En general, al comparar los problemas de división –de búsqueda del valor unitario– en las tres representaciones se concluye que, al igual que en los problemas simples de multiplicación, la representación verbal-tabular permite que los estudiantes objeto de estudio muestren de manera evidente procedimientos pertenecientes a la categoría funcional mientras que los problemas de representación verbal-íconica permiten identificar procedimientos de la categoría de iteración de unidades, lo cual concuerda con los estudios de diversos autores (por ejemplo Lamon, 1994, Vergnaud, 2000/1991) y con los reportes de investigaciones en el campo (e.g., Llinares y Sánchez, 1997). Las relaciones ternarias categorizados como de multiplicación y de suma repetida son procedimientos que se hacen visibles, con mayor frecuencia, en los problemas con representación de enunciado verbal.

La tercera clase de problemas son los de división: búsqueda de la cantidad de unidades. Al igual que en los problemas simples de multiplicación y en los de división: búsqueda del valor unitario, el funcional es el más representativo de los procedimientos categorizados dentro de la relación cuaternaria. Para Vergnaud (1991/2000) los problemas simples de división búsqueda de la cantidad

de unidades son de un nivel de complejidad mayor. En el mismo sentido, para Castro (1995) los resultados reiterativos donde los estudiantes evitan el proceso de división en los procedimientos pueden originarse debido a la mayor complejidad que presenta su algoritmo con respecto a la multiplicación y en el papel que pueden representar las cantidades del problema en los dos espacios de medida de acuerdo a la estructura del problema. Finalmente, los problemas referidos a cuarta proporcional no evidencian procedimientos de resolución por lo cual se tomó la decisión de no incluir un análisis exhaustivo.

CONCLUSIONES

Al resolver problemas multiplicativos de isomorfismo de medidas se encontraron dos clases de relaciones entre los datos presentados en el enunciado: cuaternarias y ternarias. En las relaciones cuaternarias se encontraron tres procedimientos: funcional, escalar e iteración de unidades. Cuando el niño estableció únicamente una relación ternaria se identificaron también tres procedimientos diferentes: multiplicación, división y suma repetida.

Los problemas simples de división: búsqueda de la cantidad de unidades, presentan más procedimientos correctos que los problemas simples de división: búsqueda del valor unitario. A su vez, el uso de la representación verbal-tabular en el enunciado de problemas de isomorfismo de medidas favorece el establecimiento de procedimientos propios de las relaciones cuaternarias, es decir, escalares y funcionales, siendo dentro de estos más común el escalar.

El procedimiento de iteración de unidades para encontrar la solución del problema, solamente es utilizado cuando el enunciado del problema se presenta mediante una representación verbal-íónica, mientras que en los problemas en los que se presenta el enunciado mediante la representación enunciado verbal, los estudiantes utilizan mayor cantidad de procedimientos relativos a establecimiento de relaciones ternarias que de cuaternarias.

A pesar de que las situaciones multiplicativas trabajadas en el aula y en los textos de apoyo del profesor son planteadas empleando enunciados verbales, se encontró que los problemas de isomorfismo de medidas en los que el enunciado se presenta empleando representaciones verbal-íonica y verbal-tabular son de más fácil comprensión para los estudiantes y por tanto presentan mayor éxito en su solución.

REFERENCIAS

- Almeida, I.M. (2001). *Problemas verbais multiplicativos de quarta – proporcional: A diversidade de procedimentos de resolucao*. Tesis de maestría no publicada, Pontificia Universidad Católica, Sao Paulo, Brasil.
- Bello, J. y Salazar, C. (2007). *Evaluuar las evaluaciones: el caso de la estructura multiplicativa en las pruebas Saber*. Trabajo de grado de maestría no publicado, Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, Colombia.
- Castro, E. y Castro, E. (2000). Representaciones y modelización. En L. Rico (Comp.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 95-124). Barcelona, España: Universidad de Barcelona.
- Gómez, B. y Contreras, M. (2009). Sobre el análisis de los problemas multiplicativos relacionados con la división de fracciones. *PNA. Revista de investigación en didáctica de la matemática*, 3(4), 169-183
- Lamon, S. (1994). Ratio and proportion: Cognitive foundations in unitizing and norming. En G. Harel y J. Confrey (Ed.), *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics* (pp. 89-122). Albany, New York: State University of New York.
- Llinares, S. y Sánchez, V. (1997). El aprendizaje desde la instrucción: la evolución de las estrategias personales en tareas de proporcionalidad numérica. *Enseñanza de las Ciencias*, 10(1), 37-48.
- Ministerio de Educación Nacional (MEN) (1998). *Matemáticas, lineamientos curriculares*. Bogotá, Colombia: Cooperativa Editorial Magisterio.
- Ministerio de Educación Nacional (MEN) (2006). *Estándares básicos de competencias en lenguaje, matemáticas, ciencias y ciudadanía*. Bogotá, Colombia: MEN.
- Puig, L. y Cerdán, F. (1995). *Problemas aritméticos escolares. Matemáticas: cultura y aprendizaje*. España: Editorial Síntesis.
- Vergel, R. (2004). *Organizaciones didácticas matemáticas y criterios de evaluación en torno a la multiplicación*. Trabajo de grado de maestría no publicado, Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, Colombia.
- Vergnaud, G. (1991/2000). *El niño, las matemáticas y la realidad*. (Reimpreso en 2000.) México: Editorial Trillas.

SÓLIDOS PLATÓNICOS Y TEORÍA DE GRAFOS EN LAS CLASES DE GEOMETRÍA

Sara Henao y Jhonny Vanegas

Universidad del Valle

s.a.rit@hotmail.com, jorbis777@hotmail.com

Investigaciones realizadas en las últimas décadas han dado lugar a la aparición de visiones renovadas de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, reconocibles en los replanteamientos de contenidos temáticos y procesos matemáticos. De esta manera, se reconocen las grandes posibilidades que tiene la introducción de temáticas como la *teoría de grafos* y temáticas de la *geometría del espacio* en el marco de la integración de los procesos de resolución de problemas y modelación matemática en las clases de geometría. La presente propuesta de comunicación breve busca ilustrar esta conexión a partir de una serie de *actividades experimentales* dirigidas a promover la exploración, la conjeturación y la validación de ciertas propiedades matemáticas.

INTRODUCCIÓN

Los *sólidos platónicos* son objetos matemáticos de especial significación en la historia de las matemáticas desde su aparición en la Grecia clásica. Se señala que fue Euclides quien los formalizó y consagró como elementos matemáticos, proponiendo en el Libro XIII construcciones de los mismos (proposiciones 13 a 17), inscribiéndolos en la esfera y argumentando que existen sólo cinco sólidos platónicos (Quesada, 2006). Desde esa época se los asocia a algunos aspectos y fenómenos de la vida real, idea que trascenderá en el tiempo y que dará lugar a una presencia particular en la ciencia, la religión, las artes y la tecnología.

El estudio de estos poliedros en la escuela se enmarca regularmente en la enseñanza de la *geometría del espacio*, campo que infelizmente ocupa aún un espacio marginal en la escuela. Lo paradójico de esta situación es que se considera como un contenido temático de gran potencial para el trabajo en distintos niveles de escolaridad (Nouche, s.f.) puesto que puede asociarse al desarrollo de diversas habilidades y competencias matemáticas en relación con el

Henao, S. y Vanegas, J. (2011). Sólidos platónicos y teoría de grafos en las clases de geometría. En P. Perry (Ed.), *Memorias del 20º Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones* (pp. 221-227). Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

estudio de distintos tipos de pensamiento matemático como el espacial, el variacional y, por supuesto, el geométrico.

Por su parte, la *teoría de grafos* es considerada como uno de los diversos temas matemáticos que han empezado a ser “revisitados” por parte de investigadores y educadores en didáctica de las matemáticas, desde la perspectiva de procesos matemáticos como la resolución de problemas y la modelación matemática hasta la posibilidad de su integración a través de juegos durante las clases de matemáticas.

En cuanto concierne a este último asunto, algunos elementos de la *teoría de grafos* se revelan potencialmente útiles para el estudio de *juegos de estrategia*. Se plantea por ejemplo, que es posible identificar un *modelo matemático* basado en la *teoría de grafos* para algunos juegos de este tipo, identificando estrategias ganadoras y tratando de generalizarlas para otros juegos que puedan modelar de la misma manera (Novo y Méndez, 2004).

ALGUNOS REFERENTES TEÓRICOS

La *teoría de grafos* tiene una interesante conexión con la geometría; de hecho, se la suele considerar como parte de la denominada *geometría cualitativa* que a su vez se inscribe en el campo de la matemática discreta. Este último es un campo que se considera de especial proyección en las tendencias innovadoras en Educación Matemática.

Se suele considerar que la *teoría de grafos* no requiere de grandes conocimientos matemáticos previos y permite el desarrollo de estrategias que apuntan a favorecer un buen desempeño en la resolución de problemas (Nouche, s.f.).

También se reconoce que la *teoría de grafos* es una herramienta matemática potente que sirve para modelizar una diversa gama de problemas matemáticos, pero además que puede entenderse como un recurso que permite de manera eficaz estudiar algunas propiedades topológicas de los poliedros regulares, propiciando una aproximación experimental a algunos conceptos geométricos como la simetría, la rotación y la traslación de objetos.

De igual importancia es el complejo asunto de la visualización de objetos tridimensionales en dos dimensiones. Aquí es importante mencionar que pese a los esfuerzos por representar los *poliedros regulares* lo más aproximadamente

possible a la realidad, es evidente que estas representaciones no son suficientes para caracterizar completamente el objeto matemático (Duval, 1999). Además la perspectiva que comúnmente se utiliza, como la proyección en el plano no permite ver eficientemente todas las caras, aristas y vértices del poliedro, mientras que la presentación de la gráfica plana (grafo) es suficiente para visualizar en su totalidad estos elementos.

Igualmente se destaca la posibilidad de vincular el estudio de *la teoría de grafos* al modelo de competencias, a partir del supuesto de que una aproximación intuitiva y experimental podría llevar a una mejor comprensión de propiedades geométricas de los *poliedros regulares*, constituyéndose en una alternativa metodológica para la enseñanza y el aprendizaje de estos objetos matemáticos, promoviendo la construcción en el estudiante de habilidades de resolución de problemas y modelación matemática.

Más aún, el potencial de la *teoría de grafos* en el ámbito de la educación matemática, suele asociarse con el campo de la matemática discreta y con la posibilidad que entraña de introducir nuevos contenidos temáticos vinculados a los procesos de modelización y resolución de problemas y nuevas formas de representación de la información.

En este sentido, el uso de los grafos como herramienta conceptual en la enseñanza de los polígonos desarrolla diferentes capacidades en el estudiante; específicamente, permite que los alumnos elaboren razonamientos alrededor de la matemática discreta a través de la intuición, exploración, descubrimiento y diseño de hipótesis, lo cual contribuye al desarrollo lógico y a la visión espacial del estudiante, así como a la formación de la intuición y el razonamiento abstracto; asimismo la utilización de esta herramienta permite un aprendizaje significativo para el estudiante ya que modeliza diferentes problemas y situaciones de la vida cotidiana que pueden ser solucionados por medio de los conocimientos que ofrece este concepto (Braicovich, s.f.).

Por otra parte, los grafos pueden ser utilizados como instrumento de modelización y representación de situaciones de la vida diaria. Un claro ejemplo de ello se visualiza en el problema de los puentes de Königsber solucionado por Euler en el siglo XVIII, en donde se plantea atravesar una ciudad compuesta por siete puentes de tal forma que sólo se pueda pasar una sola vez por cada puente llegando al mismo sitio en donde inició el paseo.

Así pues, los grafos constituyen una potente herramienta para la enseñanza y comprensión de conceptos matemáticos asociados a la geometría discreta, puesto que imprimen un significado real a los objetos matemáticos, además de que favorecen la comprensión, el aprendizaje y la construcción de nuevos conocimientos matemáticos a través de la resolución de problemas y la modelación matemática. Muestra de este interés se refleja en el hecho que la *teoría de grafos* sea un asunto de estudio de importantes publicaciones en didáctica de las matemáticas, como por ejemplo la revista SUMA (e.g., Espinel y Sobrón, 1992; Espinel, 1994; Menéndez, 1998; Novo y Méndez, 2004).

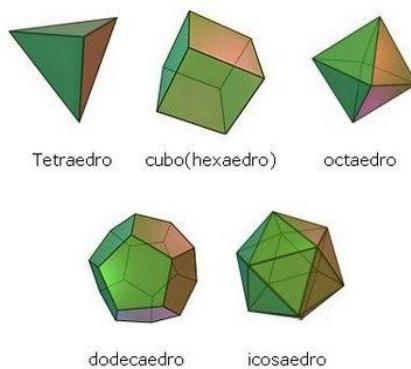
DISEÑO DE LA ACTIVIDAD

A continuación presentamos una de las situaciones que se esperan presentar durante la comunicación breve.

Ficha de los participantes

Los griegos fueron los primeros en considerar importante el estudio matemático de los poliedros; daban especial atención a cinco de ellos, los poliedros regulares (cuyas caras son polígonos regulares), pues pensaban que el tetraedro, el cubo, el octaedro, el dodecaedro y el icosaedro, eran los componentes geométricos constituyentes de los elementos fundamentales (agua, fuego, tierra, aire, éter). El primero en hacer un tratamiento verdaderamente matemático es Euclides de Alejandría en su conocida obra los *Elementos*.

Conozcámosslos:



Estos poliedros (sólidos de Platón), y en general cualquier poliedro convexo está caracterizado por una relación particular entre número de caras, vértices y aristas, conocida como la Fórmula de Euler. El ejercicio que se propone a con-

tinuación le permitirá descubrirla, pero primero veamos un ejemplo. El cubo es un poliedro regular de seis caras ($C=6$), ocho vértices ($V=8$) y doce aristas ($A=12$).

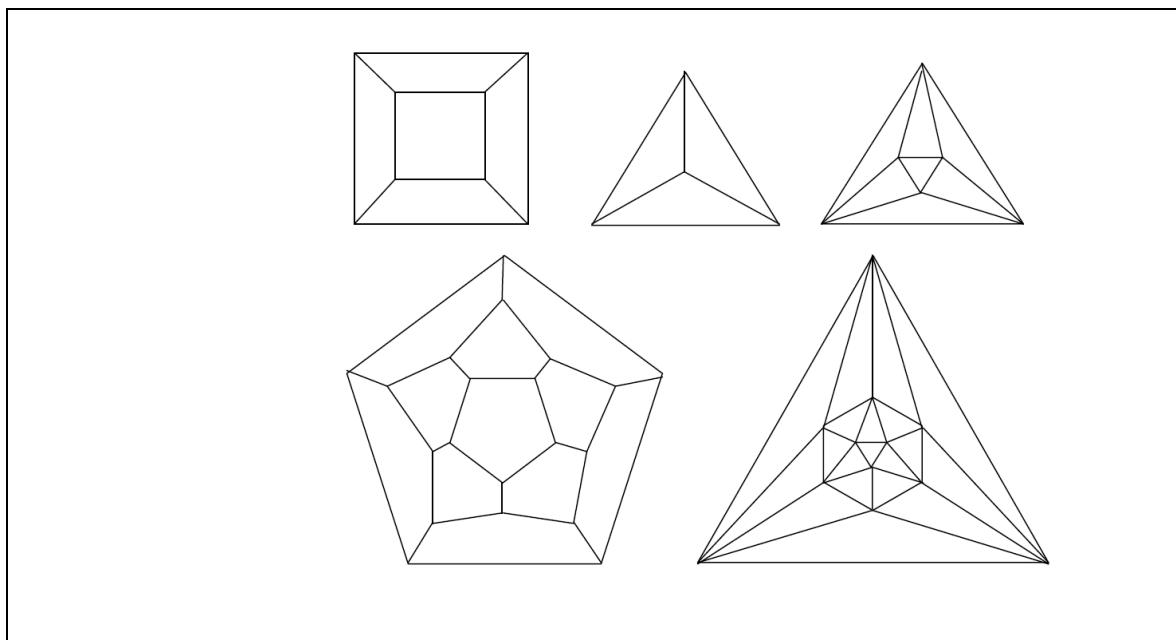
Pensemos en un momento, ¿qué sucede si aplanamos el cubo, de tal forma que no haya intersección entre sus aristas? Como es lógico, el número de aristas permanecería constante y, por tanto, también el numero de vértices, aunque el número de caras se reduciría. ¿Por qué? Veamos:



Realizar el mismo procedimiento con los restantes poliedros regulares, facilitaría la búsqueda del número de caras, vértices y aristas, además de promover el descubrimiento de otras relaciones más generales. ¿Cuáles?

Actividad

1) Utilice las siguientes gráficas planas o grafos e identifique a qué tipo de poliedro pertenece y complete la tabla.



Poliedro regular plano	Caras (C)	Vértices (V)	Aristas (A)	Valor de C+V-A
Tetraedro				
Hexaedro				
Octaedro				
Dodecaedro				
Icosaedro				

Ahora, establezca una conjetura concerniente al valor de C+V-A para todo poliedro convexo. Este resultado se conoce como **Fórmula de Euler**.

2) Considere el grafo del cubo (Figura 1), si definimos el *grado de un vértice* como el número de aristas que inciden en él, es claro que la suma de todos los grados de los vértices es proporcional al número de sus aristas. Compruébelo.

a) De acuerdo a los resultados obtenidos en el numeral 1), ¿qué relación existe entre el número de aristas de los grafos y la sumatoria de los grados de sus vértices?

b) ¿Qué se puede decir del número de vértices de grado impar, en estos grafos?

3) Una forma interesante de representar los cinco sólidos platónicos es utilizando el símbolo de Schläfli = { p, q } donde p es el número de lados de cada cara y q es el número de aristas que llegan a cada vértice.

Descubra el símbolo de Schläfli para cada uno de los poliedros regulares.

4) En un poliedro regular cada arista une dos vértices y tiene dos caras adyacentes, así que:

$$pC = 2A = qV \quad \text{donde} \quad \left\{ \begin{array}{l} C = \text{número de caras} \\ A = \text{número de aristas} \\ V = \text{número de vértices} \end{array} \right.$$

Utilizando este resultado y la Fórmula de Euler para poliedros regulares, demuestre que en efecto existen únicamente cinco sólidos platónicos. (Sugerencia: utilice el resultado de que p y q valen por lo menos 3).

REFERENCIAS

- Braicovich, T. (s.f.). *Grafos y su potencial educativo*. Documento para un curso de la Universidad Nacional del Comahue, Argentina. Recuperado el 6 de mayo de 2011, de: <http://ebookbrowse.com/curso-extenso-grafos-y-su-potencial-educativo-braicovich-1-pdf-d108850619>
- Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano*. (Traducido del francés por Myriam Vega). Cali, Colombia: Universidad del Valle.
- Espinel, M. (1994). El lenguaje de los grafos en los problemas de comunicación. *SUMA*, 18, 32-38.
- Espinel, M. y Sobrón, M. (1992). Grafos a través de juegos. *SUMA*, 11-12, 88-94.
- Menéndez, A. (1998). Una breve introducción a la teoría de grafos, *SUMA*, 27, 11-26.
- Nouche, F. (s.f.). *Teoría de grafos: propuesta para escuela secundaria*. Recuperado el 20 de marzo de 2011, de: <http://www.soarem.org.ar/Documentos/39%20Nouche.pdf>
- Novo, E. y Méndez, A. (2004). Aplicaciones de la teoría de grafos a algunos juegos de estrategia. *SUMA*, 46, 31-35.
- Quesada, C. (2006). *Sólidos platónicos*. Recuperado el 20 de marzo de 2011, de: http://www.uam.es/personal_pdi/ciencias/barcelo/historia/Los%20solidos%20platonicos.pdf

CONCEPCIÓN DE ÁREA EN ESTUDIANTES DE GRADO SEXTO

Danny Jovel y Milton Rodríguez

Universidad del Tolima

danny9480@hotmail.com, milrod33@yahoo.com

El presente Trabajo identificará la concepción del concepto de área que poseen los estudiantes de grado sexto. Este estudio nace como respuesta a los escasos conocimientos geométricos, en particular sobre áreas, que hemos observado en los escolares. Hacemos un acercamiento a través de teorías como las de Artigue, Vinner, la EMR y el Modelo Van Hiele. Clasificamos el conocimiento en tres clases (*formal, curricular y personal*). Particularmente, el conocimiento personal está referido al estudiante, que es nuestro objetivo. La metodología parte de la premisa que el alumno tiene una concepción sobre los conceptos matemáticos, manifestada en la forma como aborda los problemas y justifica sus procedimientos o afirmaciones relacionados con el concepto.

El concepto de área es uno de los más básicos y profundos de las matemáticas (Freudenthal, 1983, citado por Turégano, 1989) y su aprendizaje es “un proceso complejo que no puede de ser adquirido inmediatamente” (Carbó, Mántica y Saucedo, 2007). Exige un alto grado de conceptualización tanto de orden geométrico como aritmético (Chamorro, 2003); ahí está la fuente de la mayoría de obstáculos y dificultades que a menudo presentan los estudiantes. Además, el concepto de área es de nivel cognoscitivo superior al de longitud y su apropiación conlleva grandes retos didácticos (Turégano, 1989).

Muchos docentes creen que los estudiantes ante una tarea fundamentan sus juicios en definiciones formales de conceptos; pero las investigaciones (Vinner, 1991) muestran que cuando el alumno enfrenta un problema, no utiliza definiciones, sino que realmente evoca la *concepción* que tiene de ellos. Por esto nos preguntamos ¿cuál es la concepción del concepto de área que tienen los estudiantes? Nos centraremos en alumnos de grado sexto.

LA FORMACIÓN DE CONCEPTOS

Muchos autores en Educación Matemática han contribuido con teorías sobre la “formación de conceptos” (e.g., Skemp, 1980; Tall y Vinner, 1981; Vinner y Dreyfus, 1989; Artigue, 1990; Vergnaud, 1990; Vinner, 1991; Godino y Batanero, 1994; Sotos, 2004; D’Amore, 2001; Turégano, 2006).

Jovel, D. y Rodríguez, M. (2011). Concepción de área en estudiantes de grado sexto. En P. Perry (Ed.), *Memorias del 20º Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones* (pp. 229-236). Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

Tall y Vinner (1981, citado por Jaime, 1995) distinguen entre el concepto como conocimiento de los matemáticos y como conocimiento de quien lo aprende; este último lo denominan *imagen del concepto*. Por su parte, Artigue (1990, citado por Azcárate, 1995) hace la misma distinción pero denomina “concepción” al concepto del aprendiz. Hemos observado diferencias entre el conocimiento del ‘matemático’ y el del estudiante. En este estudio consideramos tres tipos de conocimientos asociados a un concepto matemático: formal, curricular y personal. El *conocimiento formal* es aquel que, durante la historia de la matemática, han producido los matemáticos sobre el concepto. El *conocimiento curricular* es el conocimiento formal de un concepto matemático, transformado para ser enseñado. Y el *conocimiento personal* es aquel que de un concepto matemático tiene una persona que lo aprende.

Componentes de un concepto

Un concepto tiene atributos relevantes e irrelevantes (Tall y Vinner, 1981, citado en Turégano, 2006). Los *atributos relevantes* son las propiedades que definen el concepto, mientras que los *atributos irrelevantes* son características no necesarias para el concepto (sólo diferencian ejemplos). Artigue (1990, citada por Azcárate, 1995) precisa componentes para un concepto, que llamaremos: definiciones, problemas, representaciones, teoría y procedimientos.

En matemáticas, las definiciones son uno de los componentes de un concepto, y sólo tienen atributos relevantes. En la imagen del concepto, cuando existen definiciones, además de atributos relevantes, ellas pueden contener atributos irrelevantes. En la actividad de los estudiantes se puede reconocer la presencia de atributos relevantes o irrelevantes cuando ellos realizan, identifican o usan ejemplos y contraejemplos. Para ilustrar cambios en atributos de la definición de un concepto enunciaremos una definición formal y una curricular de área.

Definición formal de área. Apostol (1984) introduce el concepto de área mediante seis axiomas, partiendo de una clase M de conjuntos del plano medibles y una función a de dominio M . Toma conjuntos S y T de M , indicando que $S \cup T$, $S \cap T$ y $T - S$ están en M , estableciendo que: Para todo S , $a(S) \geq 0$; si $S \equiv T$ entonces $a(S) = a(T)$; si S es rectángulo de lados h y k , entonces $a(S) = hk$; sea $Q \in M | S \subseteq Q \subseteq T$ (1), si existe uno y sólo un número $c | a(S) \leq c \leq a(T)$ para todo S y T que satisfagan (1), entonces Q es medible y $a(Q) = c$. Además, $a(S \cup T) = a(S) + a(T) - a(S \cap T)$ y $a(T - S) = a(T) - a(S)$.

Definición curricular de área. En Gordillo (2006, p. 134) se lee: “Una línea cerrada determina dos regiones, la interior y la exterior. La medida de la región interior es el área. Calcular el área es hallar la medida de la superficie encerrada por la frontera”. El área, en tal texto escolar, es la medida de la región interior a una línea cerrada.

Nótese que área como concepto formal es un concepto primitivo cuyos atributos se introducen mediante axiomas en cuya formulación entran conceptos, como el de función. Área como concepto curricular no es un concepto primitivo; se define mediante otros conceptos, como el de *región del plano*. En este caso, además de cambios en los atributos, también hay cambio en la naturaleza del concepto.

CONOCIMIENTO PERSONAL DE UN CONCEPTO GEOMÉTRICO

El modelo de van Hiele. Este modelo, referente teórico para propuestas curriculares de geometría, consta de tres partes: niveles de razonamiento, fases de aprendizaje y propiedades. Según Jaime (1995), los niveles de razonamiento se pueden entender como maneras distintas de comprender un concepto geométrico. Como el modelo consta de cinco niveles de razonamiento, existen cinco maneras distintas de comprender el concepto, y de su comprensión harían parte, como mínimo, procesos como definir, clasificar, representar, demostrar y, plantear y resolver problemas.

La Educación Matemática Realista (EMR). Para Alsina (2009), la EMR es una propuesta de enseñanza y aprendizaje de la matemática que ha organizado sus elementos teóricos a partir de interrogantes como, por ejemplo, qué es la matemática, cómo y qué se enseña, cómo, cuándo y con quién se aprende¹. Todo se organiza en seis principios: de actividad, de realidad, de niveles, de reinención guiada, de interacción y de interconexión.

Tanto en los niveles de van Hiele como en los propuestos por la EMR hay un nivel inicial y otro final. El nivel inicial (nivel 1 para van Hiele y nivel situacional para la EMR) corresponde a lo que tiene sentido para un estudiante en relación a un concepto, lo que sabe y ha aprendido –conocimiento personal– dentro y fuera del salón. En el nivel final (nivel 4 para van Hiele y nivel formal para la EMR) también coinciden ambas propuestas. Una enseñanza ade-

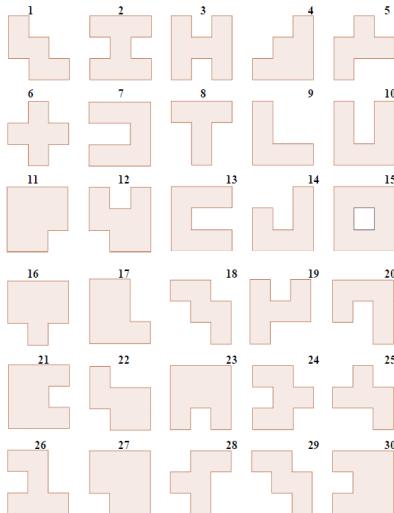
¹ Ver otras presentaciones de la EMR en Bressan, Zalkower y Gallego (2005) y Goffree (2000).

cuada (las fases de aprendizaje para van Hiele y los seis principios para la EMR) permitirá avanzar del nivel inicial al final².

METODOLOGÍA

Se estudia la concepción de área en estudiantes de un curso de grado sexto de la Institución Educativa El Jardín, colegio urbano de estrato dos de Ibagué. La Institución consta de tres sedes que atienden aproximadamente 2.200 estudiantes; la tasa de mortalidad en bachillerato es aproximadamente de 25% y para el año 2010, los resultados en las pruebas ICFES estuvieron entre 40 y 60 puntos. El curso tenía 48 estudiantes, 23 hombres y 25 mujeres, con edad promedio de 12 años. La investigación es de tipo cualitativo. Se hizo un estudio de casos seleccionando dos estudiantes para profundizar en el análisis de la información, para comprender cómo piensa y razona un estudiante.

Instrumento aplicado



Instrumento para la captación de atributos relevantes en el concepto de área

Teniendo en cuenta los componentes de un concepto según Vinner y la definición formal de área (Apostol, 1984) se aplicó un cuestionario cuyo objetivo era indagar si los estudiantes al clasificar y comparar figuras encontraban atributos relevantes para este concepto. A través de las instrucciones dadas se solicitó clasificar todas las figuras bajo un solo atributo, esperando que fuera re-

² Enseñanza, que para el caso de la educación colombiana, se tienen once años (cinco de primaria y seis de secundaria) para completar los cuatro niveles de comprensión de cualquier concepto matemático.

levante en la definición de área. No se esperaba que subdividieran cada figura en unidades de superficie de forma cuadrada, por ejemplo, que dijeron que las figuras 2 y 3 son de igual tamaño por tener siete cuadrados unidad; en cambio se esperaba que, por ejemplo, concluyeran que dichas figuras tenían el mismo tamaño porque eran resultado de una rotación, lo cual equivaldría a la congruencia por rotación en la definición de área de Apostol (1984).

RESULTADOS

La prueba se entregó a los estudiantes en el primer bloque de clase de la mañana, dándoles hora y media para contestarla. Ese día faltaron a clase nueve estudiantes, por lo cual la prueba fue aplicada sólo a 39 de los 48 jóvenes. Los estudiantes rotularon la hoja entregada con el número de pupitre que, normalmente, tiene asignado en el salón y cada uno presentó las figuras pintadas según sus propuestas de clasificación. Dos alumnos realizaron la clasificación de las figuras bajo un solo criterio, mientras que los demás emplearon varios criterios. A continuación se analizan las respuestas de dos estudiantes.

Alumno 47

Este alumno construyó nueve grupos de figuras, y los criterios de clasificación establecidos por él, estaban relacionados en cierta medida con su cotidianidad.

Todas las figuras parecen letras, números, cruces y rectángulos y también parecen fichas de tetris,

Utilizó en algunos casos términos de su diario vivir así: “escaleras”, “números”, “letras del abecedario”, “pistolas” y “Pacman”. Se refirió a algunas propiedades geométricas con palabras como “misma medida y forma”, “rectángulos con un cuadrado salido” y “tienen un hueco y tres cuadrados salidos”.

Más figuras 5, 25 y 28 parecen pistolas.
Más figuras 3, 10 y 13 parecen a Pacman.

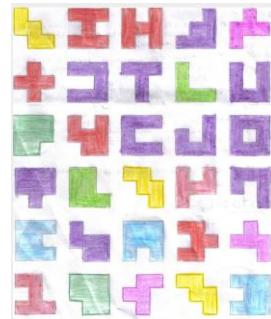
Reconoce en su clasificación la propiedad *congruencia*, hecho que se puede evidenciar cuando usa la expresión “tienen la misma medida y forma” refiriéndose a dos grupos de figuras (21, 23 y 30; 11 y 27); hace tal reconocimiento pese a que las figuras están rotadas. En sus afirmaciones no menciona explícitamente términos relacionados con rotación, pero es claro que identifica

la congruencia. De igual manera reconoce la propiedad *aditividad* cuando dice “son rectángulos con un cuadrado salido” (figuras 16 y 17). En este caso, el estudiante está reconociendo que cada una de estas figuras se obtiene a partir de un “rectángulo” al que se le agrega un “cuadrado”; alude a la aditividad cuando dice que está “salido”, dando a entender que al cuadrado se le debe agregar el rectángulo. De nuevo, reconoce la propiedad *aditividad* cuando dice “3 cuadrados salidos” (figuras 19 y 24). También deja entrever que reconoce la propiedad de la diferencia cuando menciona que estas figuras “tienen un hueco”, con lo que indica que ese “hueco” se le debe quitar a la superficie.

Alumno 45

Esta estudiante construyó 8 grupos, estableciendo diferentes criterios de clasificación guiándose por la forma o parecido de las figuras. Establece una convención de colores para nombrar los grupos haciendo referencia a otros atributos relevantes para ella, que destacamos porque son importantes en la identificación de propiedades geométricas relacionadas con el concepto de área. Resaltamos que en cada grupo la estudiante identificó el número de lados de las figuras. A continuación destacamos los siguientes criterios:

Número de lados: de color morado destaca diez figuras que tienen “8 lados” (figuras 4, 7, 8, 10, 13, 14 15, 16, 20 y 22), con color rojo destaca 7 figuras que tienen estrictamente “12 lados” (figuras 2, 3, 6, 12, 19, 24, 26).



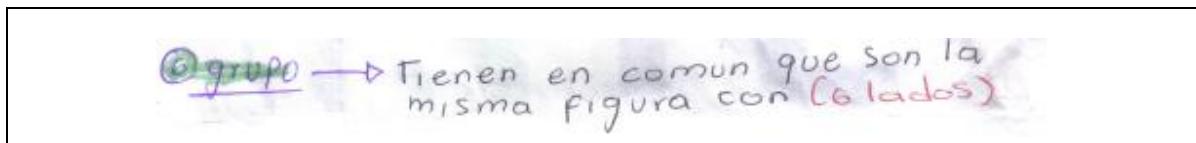
Objetos de la vida cotidiana: “Números” (figuras 24 y 26), ella reconoce que las dos figuras son números pero no explica ningún tipo de congruencia.

Parecido: Pinta con color verde oscuro (figuras 9 y 17), aquí se puede ver un aspecto relevante para ella, pero que, en primera instancia, no lo habíamos considerado importante porque no percibimos mucho parecido.

Propiedades geométricas: Se podrían ver cuatro grupos de figuras dado que la estudiante reconoce la misma figura en distinta posición, cuando alude a algunas de estas propiedades que se detallan a continuación.

Se puede entrever en esta alumna el reconocimiento de la congruencia por rotación. Por ejemplo, pinta un grupo de figuras en color amarillo (figuras 1, 18 y 29) diciendo “son la misma figura”, aquí se puede visualizar que la niña reco-

noce la propiedad de la congruencia. Además, observa que todas las figuras de este conjunto tienen diez lados. También reconoce la congruencia en las figuras que pinta de color violeta (figuras 5, 20 y 28) donde vuelve a afirmar que “son la misma figura”, identifica en ellos 10 lados. Igual ocurre con un grupo que pintó de color verde oscuro (figuras 11 y 27):



Particularmente, en un grupo que pintó de color azul (figuras 21, 23 y 30) no sólo dijo que eran “las mismas figuras” sino que agregó que estaban “desacomodadas”, este último término llama la atención porque parece estar referido a la rotación de figuras. Es de resaltar que, a diferencia de los grupos anteriores, en este último se hace alusión a la propiedad de congruencia por rotación que posee el área (Apostol, 1984).

Con respecto a la formación de conceptos matemáticos, se puede concluir que: Un concepto matemático no es únicamente su definición, consta de otros elementos; para ser enseñado, un concepto matemático sufre transformaciones didácticas; la comprensión de un concepto implica un mínimo de procesos del pensamiento matemático; su comprensión no se alcanza de un momento a otro, en un curso y de cualquier manera; además, en la enseñanza de un concepto, se debe tener en cuenta la naturaleza descontextualizada del conocimiento formal y la contextualizada del conocimiento personal.

REFERENCIAS

- Alsina, A. (2009). El aprendizaje realista: una contribución de la investigación en educación matemática a la formación del profesorado. En M.J. González, M.T. González y J. Murillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIII* (pp. 119-127). Santander, España: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática.
- Apostol, T. (1984). *Calculus*. (Volumen I.) España: Reverté.
- Artigue, M. (1990). Epistémologie et didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 10(2-3), 241-286.
- Azcárate, C. (1995) Sistemas de representación. *UNO*, 4, 53-61.
- Bressan, A., Zolkower, B. y Gallego, M. (2005). Los principios de la Educación Matemática Realista. En H. Alagia, A. Bressan y P. Sadovsky (Eds.), *Reflexiones teóricas para la educación matemática* (pp. 69-98). Buenos Aires, Argentina: Libros del Zorzal.

- Carbó, A., Mantica, A. y Saucedo, G. (2007). La construcción del concepto de área: un proceso complejo. *Revista Novedades Educativas*, 195, 72-79.
- Chamorro, M.C. (2003). *Didáctica de las matemáticas para primaria*. Madrid, España: Prentice Hall.
- D'Amore, B. (2001). Una contribución al debate sobre conceptos y objetos matemáticos. La posición “ingenua” en una teoría “realista” “versus” el modelo “antropológico” en una teoría “pragmática”. *UNO*, 27, 51-76.
- Godino, J. y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 4(3), 325- 355.
- Goffree, F. (2000). Principios y paradigmas de una “Educación Matemática Realista”. En N. Gorgorió, J. Deulofeu y A. Bishop (Coords.). *Matemáticas y educación. Retos y cambios desde una perspectiva internacional* (pp. 151-168). Barcelona, España: Grao.
- Gordillo, J.A. (2006). *Ingenio Matemático 6*. Bogotá, Colombia: Voluntad.
- Jaime, A. (1995). Vinner y la formación de conceptos. En Á. Gutiérrez y A. Jaime, *Geometría y algunos aspectos generales de la educación matemática*. México: “una empresa docente” y Grupo Editorial Iberoamérica.
- Skemp, R. (1980). *Psicología del aprendizaje de las matemáticas*. Madrid, España: Morata.
- Sotos, M. (2004). ¿En qué piensa el alumnado cuando decimos número? *UNO*, 37, 93-104.
- Tall, D. y Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, 12(2), 151-169.
- Turégano, P. (1989). Propuesta metodológica para tratar de subsanar las dificultades didácticas y teóricas que se observan en la adquisición del concepto cualitativo del área. *Ensayos*, 3, 235-255. Disponible en: <http://www.uclm.es/ab/educacion/ensayos/>
- Turégano, P. (2006). Una interpretación en la formación de conceptos y su aplicación en el aula. *Ensayos*, 21, 35-48. Disponible en: <http://www.uclm.es/ab/educacion/ensayos/>
- Vergnaud, G. (1990). La teoría de los campos conceptuales. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 10(2-3), 133-170.
- Vinner, S. (1991). The role of definitions in the teaching and learning of mathematics. D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 65-81). Dordrecht. Kluwer Academic Publishers.
- Vinner, S. y Dreyfus, T. (1989). Images and definitions for the concept of function. *Journal for Research in Mathematics Education*, 20(4), 356-366.

LA ACTIVIDAD DEMOSTRATIVA EN UNA CLASE DE GEOMETRÍA CON ESTUDIANTES EN EDAD EXTRAESCOLAR

Carolina Luque¹ y **Luis Robayo¹**

Universidad Pedagógica Nacional

carolina.luque@live.com, luisalejandroleon@yahoo.com

A través de esta comunicación, queremos dar cuenta de parte del análisis que hemos realizado de la actividad demostrativa de estudiantes en edad extraescolar, cuando se enfrentan a una tarea en la que se les pide indagar sobre las propiedades geométricas del triángulo isósceles. Este análisis tiene como sustento teórico el constructo *actividad demostrativa* propuesto por el grupo $\mathcal{A} \bullet \mathcal{G}$ de la Universidad Pedagógica Nacional. Realizar el análisis de la actividad de los estudiantes nos ha permitido plantear algunas reflexiones en torno a nuestra experiencia investigativa y la posibilidad de involucrar a estudiantes en edad extraescolar en un ambiente de actividad demostrativa.

INTRODUCCIÓN

A través de esta comunicación, queremos socializar un avance de nuestro trabajo de grado, el cual tiene como objetivo reconocer acciones de estudiantes en edad extraescolar, que reflejan la emergencia de un ambiente de actividad demostrativa en el aula de clase de matemáticas. Para cumplir con este objetivo, diseñamos un conjunto de tareas en las cuales los estudiantes debían usar el software de geometría dinámica Cabri, con el propósito de establecer su solución. Las tareas estuvieron encaminadas a que los estudiantes identificaran propiedades del triángulo; en particular, en este documento describimos y analizamos parte de la actividad que realizaron los alumnos al abordar una tarea en la que se les pidió encontrar propiedades del triángulo isósceles. La implementación de las tareas se llevó a cabo durante el segundo semestre de 2011 en el Colegio Gabriel Echavarría de Madrid, Cundinamarca, en un grupo de 35 estudiantes que se encontraban nivelando los grados octavo y noveno de básica secundaria, en jornada nocturna.

Hemos organizado esta comunicación de la siguiente manera: en primer lugar, esbozamos el enfoque teórico que sustenta el estudio; luego describimos,

¹ Estudiante de Maestría en Docencia de las Matemáticas.

Luque, C. y Robayo, L. (2011). La actividad demostrativa en una clase de geometría con estudiantes en edad extraescolar. En P. Perry (Ed.), *Memorias del 20º Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones* (pp. 237-244). Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

grossó modo, los aspectos metodológicos para el análisis y realizamos una descripción breve de la población; en seguida exponemos parte del análisis de la actividad de los estudiantes en relación con la tarea propuesta (éste se hizo con base en el marco de referencia); por último, presentamos algunas reflexiones relativas a nuestra experiencia investigativa y al desempeño de los estudiantes.

MARCO DE REFERENCIA

Uno de los referentes teóricos que sustentan nuestro trabajo de grado es el constructo *actividad demostrativa* elaborado por el grupo de investigación AE•G de la Universidad Pedagógica Nacional. Este constructo abarca dos procesos, conjeturación y justificación, los cuales no se constituyen como procesos independientes ni las acciones que los componen se consideran secuenciales. El proceso de conjeturación se compone de acciones de tipo heurístico, tales como: visualizar, explorar, generalizar y verificar. Estas acciones permiten a los estudiantes reconocer el contenido geométrico y las propiedades que subyacen en un enunciado matemático o en una figura geométrica, contribuyen al planteamiento de conjeturas y a la verificación empírica de las mismas (Perry, Camargo, Samper y Rojas, 2006). La visualización es la acción por medio de la cual el estudiante identifica, percibe o evoca propiedades geométricas de una representación gráfica dada o construida. Cuando la indagación del estudiante incluye la visualización y otros modos de actuación tales como tomar medidas, realizar construcciones auxiliares, etc., (e.g. utilizando Cabri), se manifiesta que su proceder es de carácter exploratorio. Tanto en la visualización como en la exploración, el estudiante tiene la oportunidad de encontrar regularidades en las figuras geométricas, que posteriormente se pueden comunicar en forma de generalidades, las cuales eventualmente pueden ser cuestionadas y comprobadas a partir de la verificación empírica sobre la representación gráfica. Dado que el análisis realizado hasta el momento no nos ha permitido identificar acciones del proceso de justificación, en este documento no haremos una descripción de ellas; por ello nos centraremos en el proceso de conjeturación.

ASPECTOS METODOLÓGICOS

Para dar cuenta de la actividad de los estudiantes se implementaron unas tareas durante diez sesiones de clase (de cuarenta minutos cada una), de las cuales seis se registraron en audio y video. En particular, en este documento se da

cuenta de parte del análisis de la primera sesión grabada. Para efectos del análisis se realizó la transcripción de ésta, la cual contiene aclaraciones (en paréntesis cuadrados) que no pretenden interpretar sino aclarar o describir acciones no verbalizadas que hacían estudiantes y profesor.

Realizada la transcripción, se hizo una lectura superficial de la misma con el propósito de hacernos una idea global de la información, para luego seleccionar episodios que podrían ser de utilidad en la fase de análisis de datos. La selección de los episodios obedeció a dos aspectos: reconocimiento de acciones de la actividad demostrativa e identificación de la forma de interacción durante la clase (interacción profesor-estudiante, estudiante-estudiante). Esto último, con el fin de identificar el nivel de autonomía² de los estudiantes. Las interacciones profesor-estudiante se reconocieron en el marco de la clase, mientras que las interacciones entre estudiantes se tomaron en el marco de la actividad llevada a cabo por un grupo de tres personas. La selección del grupo de tres estudiantes (E1, E2 y E9) obedeció a su asistencia regular a las sesiones de clase.

Descripción de la población

La población cuyas acciones fueron objeto de estudio, correspondió a un grupo de 35 estudiantes, con un rango de edad entre 24 y 57 años. Su ocupación, en general, estaba relacionada con oficios operarios en empresas de flores, vidrios y panadería. Ellos tomaron la decisión de terminar sus estudios de bachillerato (después de un período de desescolarización) porque las empresas en las que laboraban así lo exigían; sin embargo, esto no implicó un desinterés por parte de ellos en relación con su formación académica. Al ser una población en edad extraescolar y con experiencias académicas diferentes se hizo necesario indagar acerca de sus conocimientos geométricos y manejo del computador. Dicha pesquisa nos permitió concluir que sus conocimientos geométricos estaban ligados al reconocimiento de representaciones gráficas de algunas figuras geométricas que asocian con sus respectivos nombres, con el uso de fórmulas para hallar áreas y perímetros. En cuanto a su experiencia con el manejo del computador, se encontró que su uso era esporádico y exclusivo de la clase de informática.

² Según Perry, Samper, Camargo, Echeverry y Molina (2008), “autonomía” hace referencia a la capacidad de fundamentar con razones propias lo que se dice y lo que se hace independientemente de otra autoridad.

UN EJEMPLO DE ANÁLISIS: LA ARMONÍA DE LAS TRIBUS INDÍGENAS

La armonía de las tribus indígenas corresponde a la primera tarea que se propuso a los estudiantes, con miras a que ellos: (i) interpretaran el enunciado en términos geométricos y se instruyeran en relación con cómo una situación puede modelarse mediante una representación gráfica; (ii) realizaran una exploración en el entorno de geometría dinámica de una construcción que modela la situación; y (iii) establecieran invariantes con base en la exploración realizada. El enunciado de esta tarea, fue el siguiente:

Algunas tribus indígenas para mantener la armonía de su pueblo distribuyen su territorio de tal manera que todos los clanes de la tribu se organizan de la misma forma. Pueblos indígenas como los Huari, Nazca y Chimú han construido las viviendas en su territorio de tal manera que cada clan (conformado por tres familias) debe edificar sus casas logrando que éstas queden ubicadas en forma triangular. La ubicación de las viviendas en estas tres tribus coincide en su forma triangular, pero su disposición en cada clan para cada una de estas tribus es diferente.

Abra el archivo Huari y encuentre las propiedades invariantes que tienen en común los clanes que conforman esta tribu.

El enunciado anterior se presentó en dos tiempos: (i) la contextualización de la situación sin la indicación que le sugería al estudiante qué hacer frente a la misma y (ii) la presentación de la tarea (indicación dada en el texto en cursiva) que deberían realizar los estudiantes en relación con la situación planteada. Ello determinó, a su vez, los momentos de la clase: un primer momento que se enfoca en la interpretación del enunciado y el segundo momento que se focaliza en la actividad exploratoria de los estudiantes.

La interpretación del enunciado se realizó a través de una puesta en común con la intervención del profesor. El dar el enunciado a los estudiantes antes de indicarles qué hacer, es una acción del profesor que está ligada, en particular, a cómo tal enunciado podría modelarse mediante una representación gráfica utilizando objetos geométricos, para este caso, triángulos. En el transcurso de la interpretación del enunciado, la docente les indicó a los estudiantes distribuirse en grupos de tres o cuatro personas, de tal manera que cada grupo tuviera a disposición un computador. La actividad de los estudiantes en el segundo momento, se caracterizó por la exploración de una construcción que se les dio en Cabri con el propósito de determinar sus invariantes. En este mo-

mento no hubo intervención del profesor debido a que se buscaba que los estudiantes empezaran a vivenciar un ambiente de trabajo autónomo. Durante la implementación de la tarea, los dos primeros autores de esta ponencia asumieron un papel específico, siendo uno el profesor y el otro el encargado de realizar las observaciones y grabaciones de la clase.

El primer momento: interpretación del enunciado

Las primeras ideas que los estudiantes manifestaron en relación con el enunciado no dan cuenta de los objetos geométricos involucrados en la situación. Un ejemplo de ello son las siguientes respuestas a la pregunta *¿qué entienden del enunciado?* hecha por la profesora: “*Que ellas organizan su territorio de tal manera que a todos les toque por igual*”, y “*Se distribuyen su territorio por satisfacer un juego*”. Tras identificar que los alumnos no hacen una buena interpretación, la profesora indaga sobre cómo están ubicados y cómo se conforman los clanes de cada tribu. Esta intervención lleva a que los estudiantes planteen dos dibujos para representar el enunciado (Figuras 1 y 2).



Figura 1. Representación realizada por E1

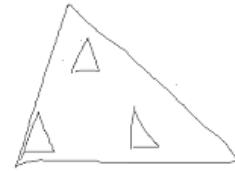


Figura 2. Representación realizada por E4

Ante la aparición de dos representaciones diferentes para una misma situación la profesora sugiere identificar las características de cada una; esto con el propósito de reconocer cuál es la que mejor se ajusta al contexto. En las representaciones de los estudiantes E1 y E4 se evidencian dos interpretaciones diferentes. En la Figura 1, cada triángulo representa un clan (las familias son representadas por los vértices del triángulo) mientras que en la Figura 2, el triángulo no sólo es utilizado para representar el clan sino también las casas de las familias que lo conforman. La primera se adecua al problema (Figura 1), por tanto la profesora indaga a los estudiantes acerca de lo que según el enunciado debe estar en forma triangular; ello con el objetivo de que los estudiantes se convenzan de que la primera representación es adecuada. Para hacer tal reconocimiento, la profesora pone etiquetas en lo que serían las casas en cada una de las representaciones (Figura 3 y 4).

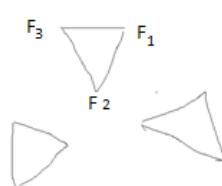


Figura 3.

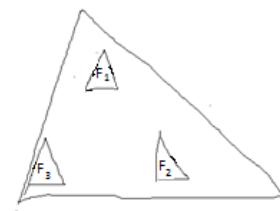


Figura 4.

Las etiquetas facilitaron que los estudiantes manifestaran discrepancias entre las dos representaciones. Básicamente, los alumnos se centraron en señalar que lo diferente era el número de casas representado en cada ilustración (en la ilustración 3, nueve casas y tres clanes y en la 4, tres casas y un clan). Para descartar la segunda interpretación la profesora preguntó *¿en el enunciado se decía que las casas también tenían que ser triangulares?* Los estudiantes respondieron que no, lo cual les llevó a escoger la **Figura 3** como la adecuada, en vista de que la Figura 4 suponía información que no está en el enunciado.

En este primer momento se destaca la interpretación como, quizá, una acción previa a la actividad demostrativa, que prepara a los estudiantes para iniciar acciones de visualización y exploración.

El segundo momento: fase de exploración

Al abrir el archivo Huari, los estudiantes del grupo conformado por E1, E5 y E9, se encontraron con la Figura 5. Iniciaron la exploración indagando acerca del paralelismo de los lados de uno de los triángulos. Dado que está primera exploración no era pertinente, el observador les cuestionó acerca de la definición de rectas paralelas. Esta intervención hizo que los estudiantes redirigieran su exploración, tal como se evidencia en el siguiente fragmento:

146. E9 ¿Qué va a hacer?
147. E1 Pues mirar los ángulos. Miramos los ángulos.

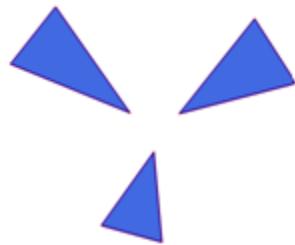


Figura 5. El archivo HUARI del software Cabri

Pese a la intervención [147], los estudiantes deciden determinar primero la longitud de los lados del triángulo. Al medir sus lados y arrastrar un vértice, concluyeron que dos de los lados del triángulo medían lo mismo. Antes de tomar la medida de los ángulos, uno de los integrantes del grupo sugirió nombrar los vértices de los triángulos para poder referirse a ellos con mayor facilidad. El tomar la medida de los ángulos y arrastrar los llevó a deducir que dos de éstos eran de igual medida. En el siguiente fragmento se evidencia la manera como los estudiantes concluyen los invariantes mencionados:

283. E9 Así lo mueva, es una figura invariante porque a pesar de que coja un punto y lo arrastre no se deforma, sigue siendo la misma medida.[Arrastran vértices del triángulo *IJH* y observan que siempre se mantienen los dos lados congruentes]
- [...]
286. E1 Y eso es lo que tienen en los tres clanes en común es eso. Porque los tres los movemos para todos lados y las medidas le siguen iguales.
287. E9 Pues eso es un invariante.
- [...]
290. E9 Tómele medidas. Los ángulos también siguen igual. [Señala los ángulos congruentes del triángulo *DEF*]
291. E5 Sí. Los ángulos tampoco pierden su medida.
292. E9 Son invariantes.

Realizar una acción de exploración desafortunada (estudio de paralelismo) no impidió que los estudiantes continuaran con el desarrollo de la tarea; por el contrario, los condujo a ser más conscientes en la forma de explorar la figura dada. La exploración y el uso de la acción de arrastre en Cabri permitieron que los estudiantes reconocieran una regularidad en los triángulos dados. En el proceso de exploración se evidencia cómo se apropiaron de normas ya establecidas durante la clase para facilitar la comunicación entre ellos. Esto se evidencia cuando deciden etiquetar los vértices de los triángulos de manera tal que les facilitara comunicar las propiedades invariantes encontradas.

REFLEXIONES FINALES

Dado que esta comunicación es producto de un trabajo en curso, más que plantear conclusiones queremos señalar algunas reflexiones en relación con nuestra experiencia investigativa y con la posibilidad que percibimos, a través del desempeño de los estudiantes, de generar la actividad demostrativa en un nivel de educación secundaria con estudiantes en edad extraescolar.

En relación con nuestra experiencia investigativa, el análisis de la actividad de los estudiantes nos permitió identificar que el constructo *actividad demostrativa* no presenta una acción particular referida a la interpretación del enunciado, por lo cual nos surgen las siguientes inquietudes: *¿será que para el contexto escolar (o incluso a nivel superior) es importante tener en cuenta la interpre-*

tación como una acción que haga parte del constructo de actividad demostrativa? O ¿será conveniente tener un referente teórico como complemento al de la actividad demostrativa que tenga presente acciones como la interpretación?

Este análisis también nos llevó a reconocer la importancia de hacer una planeación rigurosa de las intervenciones del profesor durante la implementación de las tareas. Creemos que anticipar los momentos y las manera en la que puede intervenir el docente favorece una participación más espontánea de los estudiantes (específicamente en la puesta en común).

En cuanto a la actividad demostrativa de los estudiantes, consideramos que con algunas pautas y direccionamientos del profesor es posible impulsar la actividad demostrativa en estudiantes en edad extraescolar. Proponer tareas que inviten al estudiante a realizar acciones de exploración contribuye a que sientan la necesidad de comunicar sus ideas y verificar la validez de las mismas en medio de la discusión con otros. En este primer análisis se evidencia que los estudiantes realizan acciones tales como: visualizar, explorar y conjecturar, las cuales son evidencia de su involucramiento en un ambiente de actividad demostrativa. Consideramos que dicho involucramiento estuvo favorecido por: (i) las intervenciones de la profesora, las cuales propiciaron la interpretación y comprensión de los estudiantes en relación con la situación abordada en clase, y (ii) el papel de Cabri, como herramienta que permitió a los estudiantes explorar y descubrir propiedades invariantes de la figura geométrica dada.

Por último, es pertinente destacar el compromiso de los estudiantes en relación con: utilizar el lenguaje acordado durante la clase, nombrar los objetos y hacer uso de Cabri para dar solución a la tarea propuesta.

REFERENCIAS

- Perry, P., Camargo, L., Samper, C. y Rojas, C. (2006). *La actividad demostrativa en la formación inicial del profesor de matemáticas*. Bogotá, Colombia: Fondo Editorial de la Universidad Pedagógica Nacional.
- Perry, P., Samper, C., Camargo, L., Echeverry, A. y Molina, Ó. (2008). Innovación en la enseñanza de la demostración en un curso de geometría para formación inicial de profesores. En *Libro electrónico del XVII Simposio Iberoamericano de Enseñanza de las Matemáticas: “Innovando la enseñanza de las matemáticas”*. Toluca, México: Universidad Autónoma del Estado de México.

PERCEPCIÓN Y REPRESENTACIÓN

Julio Ocaña

Universidad de Bogotá Jorge Tadeo Lozano

julio.ocana@utadeo.edu.co

La comunicación breve que presento a continuación está dirigida a profesores de educación media y superior. En ella se propone la realización de tres talleres cuyo objetivo es lograr que el estudiante realice representaciones de objetos que percibe ya sea de manera física, virtual o por medio de imágenes. Estas representaciones se harán en dos dimensiones, ya sea en papel o en el computador, utilizando los sistemas de representación axonométrico y ortogonal, los cuales permiten tener una representación pictórica utilizando la perspectiva, en el sistema axonométrico, o a través de la representación de las vistas principales del objeto, en el sistema ortogonal y así reproducirlo.

PERCEPCIÓN Y SISTEMAS DE REPRESENTACIÓN

El objetivo de esta comunicación breve es presentar una propuesta de trabajo dirigida a estudiantes que toman cursos de geometría descriptiva. Esta propuesta la conforman tres talleres cuya realización busca desarrollar habilidades y destrezas en la representación de objetos en el plano utilizando los sistemas de representación (Bertoline, Wiebe, Miller y Mohler, 1999) axonométrico (Black, 1976) y ortogonal (Rowe, 1970).

Un objeto o pieza de trabajo se puede percibir de manera real (por ejemplo, utilizando módulos de madera), virtual (por ejemplo, utilizando el programa Cabri¹) o a través de imágenes o dibujos en libros. Estos objetos se representan en un medio de dos dimensiones, ya sea el papel o el computador, utilizando los sistemas de representación axonométrico y ortogonal, los cuales tomaron fuerza en el Renacimiento. De esta forma, un objeto en tres dimensiones se percibe de diferentes formas y se representa en dos dimensiones.

En la representación axonométrica se hace únicamente una representación pictórica del objeto, utilizando la perspectiva; esto permite tener una idea de la forma pero no posibilita su reproducción física. En el sistema ortogonal se representa el objeto o pieza por medio de las vistas principales; de esa manera,

¹ Software de geometría dinámica.

el objeto se puede reproducir ya que se conoce con precisión las medidas y la forma.

Usando la herramienta Cabri o módulos en madera (Ocaña, en prensa), cada estudiante hace su composición, en otras palabras, crea su propio modelo de estudio. La idea es lograr que el estudiante descubra las relaciones entre la percepción del objeto y su representación partiendo del modelo creado.

Para la realización de los talleres se han clasificado las representaciones o proyecciones en dos grandes grupos: en el primero se incluyen las multiplanares u ortogonales y en el segundo, las monoplanares o pictóricas (Ocaña, 2011). En el caso de la proyección ortogonal debemos dibujar varios planos para conocer la pieza; dibujamos las vistas principales de la pieza y si es necesario, las vistas auxiliares que se requieran para tener una información completa. En las proyecciones pictóricas con un solo dibujo podemos dar a conocer la pieza. El sistema de representación paralelo se divide en dos grupos: en el primero se encuentra la representación paralela que cobija las axonométricas, las oblicuas (por ejemplo, la caballera) y el caso especial de la perspectiva militar; en el segundo grupo, se ubica la representación de las cónicas que dependiendo del número de puntos de fuga se clasifican en: perspectiva paralela con un punto de fuga, perspectiva cónica con dos puntos de fuga y perspectiva oblicua con tres puntos de fuga.

Para este taller, trabajaremos con las vistas principales del plano y la representación paralela.

Como el objeto o modelo tiene tres dimensiones, la construcción propuesta en Cabri permite controlar las coordenadas, X, Y y Z y los ángulos de proyección del modelo. De esta forma al dibujar la vista superior del objeto y proyectarla a la vista frontal, girando la superior obtendremos las cuatro vistas (F: frontal, LD: lateral derecha, P: posterior y LI: lateral izquierda). Al proyectar la vista superior y la frontal obtenemos un dibujo, que controlando los valores de los dos ángulos, nos da como resultado las perspectivas axonométricas, oblicuas y la caballera. Controlando X, Y y Z podemos aplicar las reducciones de representación que se requieran.

ACTIVIDAD

El proceso de percibir un objeto para luego representarlo requiere de una práctica dirigida, orientando a los estudiantes en el uso de las normas de represen-

tación (posición relativa de los objetos) y las normas de dibujo (formatos y clases de líneas). La propuesta de talleres para desarrollar con los estudiantes es la siguiente:

Taller 01. Construir una plantilla, en el programa Cabri, que permita controlar las coordenadas X , Y y Z y simultáneamente los ángulos del modelo (plantilla módulo).

Taller 02. Componer un modelo partiendo de módulos de madera para representarlos en la plantilla desarrollada en el primer taller.

Taller 03. Hacer un modelo utilizando la plantilla módulo desarrollada en Cabri. Esta hoja de trabajo contiene trece módulos que serán utilizados para la composición y estará disponible un video para ilustrar cómo utilizarla.

Estas ayudas potencian en el estudiante la relación entre la percepción y la representación de un objeto, permitiendo que el estudiante cree nuevos diseños ajustados a las necesidades planteadas.

Taller 1

Construcción en el programa Cabri de la plantilla (hoja de trabajo) y las macros necesarias para la construcción de la representación de un objeto. La vista superior, la vista frontal y la representación paralela.

Se inicia la construcción de la plantilla 2D, trazando una recta vertical y sobre ésta se levantan seis perpendiculares y un punto, los cuales se marcan de la siguiente forma:

- L recta vertical
- S : recta sobre la cual montamos la vista superior
- Oxy : recta origen del sistema coordenado $X-Y$
- Punto F : base del modelo
- Oxz : recta origen del sistema coordenado $X-Z$
- $Ux 0$: recta que contiene la escala de los valores de X
- $Uy 0$: recta que contiene la escala de los valores de Y
- $Uz 0$: recta que contiene la escala de los valores de Z

Las regletas (U_x , U_y , U_z) deben estar marcadas en forma independiente, copiando la unidad de medida para cada una de ellas. Por ejemplo, para x la unidad de medida es 0,7.

En la Figura 1 está el esquema de los elementos descritos.

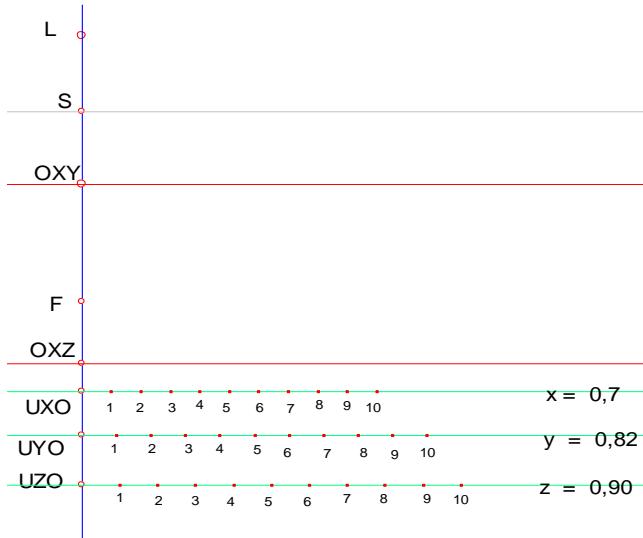


Figura 1

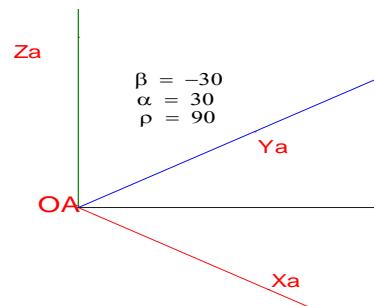


Figura 2

Para completar nuestra plantilla debemos definir el área para la representación en 3D, trazando una semirrecta y rotándola 30° , -30° y 90° para definir de esta forma los ejes que llamaremos X_a , Y_a , Z_a , origen del sistema econométrico (Figura 2).

Taller 2

En este segundo taller se espera potenciar la creatividad del estudiante pues es artífice de su propio modelo. Al estudiante se le entrega una caja acrílica que contiene diez módulos y una guía de trabajo. Debe componer un modelo utilizando sólo siete piezas o las que se designen para esa actividad, las cuales deben estar dispuestas de tal forma que no sobrepasen el tamaño del cubo inicial, de 6 cm de lado, ni queden espacios vacíos. Una vez terminada la actividad de componer su modelo, debe proceder a dibujarlo.

Saca las vistas principales y la proyección paralela, partiendo del objeto real compuesto por él. El estudiante tiene la posibilidad de apropiarse del objeto manipulándolo de acuerdo a sus inquietudes visuales para formarse un concepto claro de las características del objeto. Procede a nombrar los vértices

empezando desde abajo a la izquierda y en sentido contrario a las manecillas del reloj, en forma ascendente. Luego debe dibujar las vistas y el objeto en 3D en la hoja de trabajo construida en el Taller 1. Ahora debe identificar los vértices en las vistas principales y en el isométrico.

En la Figura 3 se observa una foto de las piezas para componer el modelo y un ejemplo de composición.



Figura 3

Taller 3

En esta oportunidad al estudiante se le presentan los objetos para su diseño en forma virtual, en un formato denominado *hoja de componer*. Encuentra trece piezas o módulos con los cuales debe armar un modelo de siete piezas. Luego hace la representación de la vista superior, frontal y el isométrico, todo en hoja de papel, actividad que le permite rotular para luego pasar a la tercera parte de este ejercicio que es representar en el programa Cabri las vistas superior y frontal y el isométrico en la plantilla *hoja de trabajo* que debe tener en la plataforma como resultado del Taller 1.

Este tercer taller afianza la relación entre percepción y representación; permite igualmente comprender el proceso a través de la construcción de las macros que requiere para agilizar la construcción en cabri.

En la Figura 4 se muestra un ejemplo de los trece módulos o piezas y la organización de un modelo de siete de esas piezas

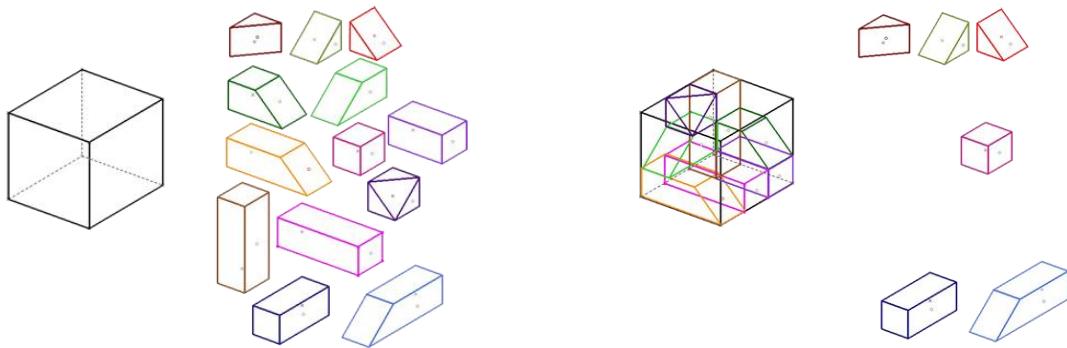


Figura 4

La representación de objetos, comprender el espacio 3D, no es una tarea fácil; no todos los estudiantes logran hacerlo de la misma manera. Si miramos el desarrollo de la historia de la geometría y la comparamos con el desarrollo del individuo podemos establecer similitudes. En los comienzos de la geometría no existían conceptos ni elementos geométricos; la línea, el cuadrado, el círculo, son trazos que imitan la naturaleza, los cuales se van dando, de acuerdo con las necesidades que van surgiendo. De igual manera en el ser humano, el desarrollo se da más o menos hasta los cinco años; realizamos trazos y aprendemos sus nombres, posteriormente éstos adquieren significado y se crean relaciones: el cuadrado, su perímetro, su área, por ejemplo.

En la antigua Grecia nacen los postulados, axiomas y teoremas que son el por qué de algunos conceptos; de manera análoga entre los cinco y ocho años el niño quiere saber el por qué de las cosas. Siguiendo con el desarrollo del hombre, el adolescente intenta representar los objetos que lo rodean pero no logra identificar el método para mostrar adecuadamente lo que está viendo; las figuras carecen de profundidad. Este período, en la historia de la geometría dura más o menos hasta el año 1200, donde inicia sus primeros intentos de mostrar la profundidad de los objetos. Luego en el renacimiento con Masaccio, Piero de la Franchesca, Fray Angélico, entre otros, se empiezan a determinar las reglas para el dibujo en perspectiva.

Como vemos, tomó cientos de años para que el hombre lograra representar en dos dimensiones, los objetos que percibe en tres dimensiones. Por eso es importante llegar a nuestros estudiantes de diferentes formas para desarrollar y fortalecer el aprendizaje de la representación de los objetos que percibe a su alrededor.

REFERENCIAS

- Black, E.D. (1976). *Dibujo técnico*. Buenos Aires, Argentina: Marymar Ediciones S. A.
- Bertoline, G.R., Wiebe, E.N., Miller, C.L. y Mohler, J.L. (1999). *Dibujo en ingeniería y comunicación gráfica*. México: Compañía Editorial Ultra S.A. de C.V.
- Ocaña, J.C. (en prensa). *Animaciones maquetas y material audiovisual para la enseñanza de la geometría*. Bogotá, Colombia: Universidad Jorge Tadeo Lozano.
- Ocaña, J.C. (2011). *Geometría Descriptiva I*. Bogotá, Colombia: Universidad Jorge Tadeo Lozano.
- Rowe, Ch.E. (1970). *Geometría descriptiva*. México: Compañía Editorial Continental, S.A.

APROXIMACIÓN A LAS CONCEPCIONES DE DEMOSTRACIÓN DE ALGUNOS PROFESORES UNIVERSITARIOS DE MATEMÁTICAS

Tatiana Ospina¹, Tania Plazas¹ y Carmen Samper²

Universidad Pedagógica Nacional

tatiana.ospina.usaquer@gmail.com, tania.plazas@gmail.com, csamper@pedagogica.edu.co

Se han identificado diferentes funciones de la demostración y reconocerlas influye en el concepto que los futuros docentes de matemáticas desarrollen de ésta. Como ello depende, en gran medida, de las concepciones que los profesores de matemáticas, de la Universidad Pedagógica Nacional (UPN), tengan al respecto de dicha actividad matemática, es de interés determinar cuáles son esas concepciones. Para aproximarnos a las concepciones de los profesores, identificamos diferencias y similitudes entre éstas, basándonos en las funciones que el profesor asigna a la demostración.

A continuación se presenta un reporte de un estudio de tipo exploratorio, que realizamos como tema del trabajo de grado para la Licenciatura en Matemáticas. Se pretendía caracterizar las visiones que tienen algunos docentes del Departamento de Matemáticas de la UPN sobre la actividad matemática de demostrar.

MARCO DE REFERENCIA

Godino y Recio (2001), presentan tres visiones para la demostración, que se esbozan a continuación.

La demostración vista desde la lógica

Bajo este punto de vista, la demostración está sujeta a un sistema axiomático y al pensamiento formal deductivo. La demostración consiste entonces en la construcción de una justificación, a partir de unas premisas (axiomas y postulados), de teoremas y definiciones usando las reglas de la lógica formal. Los teoremas que se incorporan al sistema axiomático son considerados válidos en toda teoría matemática, sin importar el contexto de las proposiciones que

¹ Estudiante de Maestría en Docencia de las Matemáticas.

² Profesora titular.

componen el teorema, ya que están ligados a la validez de las reglas de la lógica. Por ejemplo, $[(p \rightarrow q) \wedge p] \rightarrow q$ es un teorema de toda teoría matemática que se base en la lógica bivalente usual. En este caso, la demostración se reduce a ser una actividad algorítmica que no involucra contexto alguno.

La demostración vista desde los demás campos de la matemática

La demostración está ligada a un sistema axiomático con un contexto teórico definido y al pensamiento formal deductivo. Esta visión sitúa la demostración en un contexto donde el centro no es el análisis sintáctico de las proposiciones, es decir su composición lógica, sino que se enfoca principalmente en las interpretaciones matemáticas que asumen las proposiciones dentro de una teoría. Las demostraciones en sí son, de cierta forma, subjetivas porque dependen de la visión que tenga la persona sobre las funciones de la demostración. Los teoremas pierden el carácter de verdad absoluta porque dependen del sistema axiomático y de la aceptabilidad de la demostración dentro de una comunidad específica.

La demostración vista desde la educación matemática

Hablar de la demostración desde la educación matemática implica la generación de discusiones sobre el papel de ésta en la formación matemática de un individuo, siendo éste el aspecto que nos ofrece algunos referentes teóricos para el posterior análisis de las visiones de los profesores acerca de la demostración.

La demostración en la enseñanza

Respecto al propósito de una demostración en la labor del maestro en el aula de clase, Recio (2001) sugiere dos situaciones. (1) La demostración es parte del contrato didáctico establecido en la clase; es decir, los estudiantes no aceptan proposición alguna sin su demostración inmediata, haciendo que las proposiciones no demostradas pasen a un segundo nivel, o que se conviertan en parte de la siguiente situación. (2) La demostración es un modelo para entrenar al estudiante, esto es, el profesor considera importante que el estudiante conozca las demostraciones de las proposiciones que se enuncian, las analicen y las comprendan pues es así como aprenden a demostrar.

La enseñanza de la demostración

Éste es uno de los temas de interés de educadores matemáticos. Existen diferentes ideas en torno a cómo debe ser el proceso de enseñanza. Generalmente, los profesores proveen a sus estudiantes una visión limitada de qué es demostrar, pues esa actividad en sus clases se reduce a realizar ejemplos de demostraciones que los estudiantes deben entender y replicar (Recio, 2001). Como lo expresan algunos autores, existe la necesidad de transformar el paradigma que tienen muchos profesores respecto a la demostración:

La idea común formalista de muchos profesores de matemáticas de que la convicción es una cartografía monocromática de la demostración deductiva (esto es: una función biyectiva) debe ser, por tanto, completamente abandonada; la convicción no se consigue exclusivamente con la demostración ni es la verificación/convicción la única función de la demostración. (de Villiers, 1993, p. 27)

Pensar en las funciones de la demostración es reflexionar sobre los aportes de la misma en la formación de un individuo. En el análisis para aproximarnos a la concepción de la demostración que tienen los profesores, se tendrán en cuenta los aportes que de Villiers (1993) ofrece en relación con las funciones de la demostración. Este autor destaca cinco funciones principales:

- Verificación/convicción, que tiene como objetivo obtener certeza de un teorema y convencer a los pares y a uno mismo de ésta. Esta función exige demostraciones formales y completas, cuando se trata de un grupo de expertos.
- Descubrimiento, que tiene como objetivo encontrar nuevos teoremas a partir de deducciones de otros, como ha sucedido históricamente.
- Sistematización, que atiende a la organización de los axiomas, definiciones y teoremas dentro de una teoría. Tiene las siguientes intenciones: identificar inconsistencias, integrar los teoremas y definiciones, dar lugar a nuevos sistemas axiomáticos, permitir coherencia y unificación de los resultados.
- Explicación, que busca proveer el por qué la proposición es verdadera y que el individuo comprenda mejor el objeto matemático involucrado. Usualmente esta función cobra importancia cuando se piensa en la demostración en la formación matemática de un individuo.

- Comunicación, que busca difundir resultados matemáticos entre personas de una misma comunidad. Por lo tanto, es una actividad social que estipula ciertas normas para que el proceso comunicativo sea óptimo. Permite vislumbrar las demás funciones de la demostración.

La visión de la demostración que ofrece el grupo de investigación Aprendizaje y Enseñanza de la Geometría ($\mathcal{A} \cdot \mathcal{G}$) de la UPN resalta que la demostración es medio de descubrimiento, comunicación, explicación y sistematización. (Camargo, Samper y Perry, 2006) El grupo propone el constructo *actividad demostrativa*, según el cual ésta se compone de dos procesos: (1) construcción de conjeturas y (2) producción de justificaciones. El primer proceso incluye acciones como la visualización, exploración, generalización y verificación para poder establecer conjeturas. El segundo proceso se centra en la justificación a través de una explicación, prueba o demostración formal. La actividad demostrativa tiene como fin descubrir hechos geométricos, propiciar mejor comprensión de la propiedad y el objeto matemático trabajado, y proveer elementos para la construcción de una justificación.

METODOLOGÍA

La población de estudio fueron once profesores del Departamento de Matemáticas de la UPN, que tenían a cargo cursos de matemáticas en el segundo semestre de 2008 y primero de 2009, dirigidos a estudiantes de la Licenciatura en Matemáticas.

La recolección de información se realizó en dos fases. La primera fase fue una entrevista de ocho preguntas que se le hizo a cada profesor. A continuación se presenta cada pregunta junto con las razones por las cuales se formuló.

Pregunta	Propósito
¿Qué es demostrar? ¿Es importante la demostración en matemáticas? ¿Por qué?	Lograr una aproximación a lo que consideran como demostración, desde su formación matemática.
¿Cuál es el papel de la demostración en el aprendizaje de las matemáticas?	Evidenciar si diferencian entre lo que es la demostración para los matemáticos y lo que es la demostración en el proceso de aprender matemáticas.
¿Cómo cree que un estudiante aprende	Determinar si reconocen la problemática asociada al aprendizaje de la demostración y si tienen

a demostrar? ¿Es posible enseñar a demostrar? ¿Cómo lo hace usted?	una propuesta didáctica para abordar el proceso de aprender a demostrar.
¿Es importante la demostración en la formación de un maestro? ¿Por qué? ¿Considera usted que la demostración se debe llevar a nivel escolar? ¿Cómo se debe implementar la demostración en este nivel?	Establecer la visión que tiene de la demostración en la educación matemática de los individuos, y el papel que juega un maestro en propiciar habilidades que están ligadas a la demostración, a nivel escolar.
¿Existe alguna diferencia entre demostrar en álgebra, demostrar en geometría y demostrar en cálculo?	Evidenciar mayor amplitud de su visión acerca de la demostración, dado que podían asignarle diferentes funciones según el campo teórico en el que se realiza la demostración.
Tabla 1. Entrevista	

La segunda fase fue un registro audiovisual de una clase en la cual se realizó alguna demostración, de tres de los profesores, uno de álgebra, uno de cálculo y uno de geometría. Para el análisis de este registro se tuvieron en cuenta ocho aspectos relacionados con la gestión del profesor durante el proceso de demostración. Éstos se presentan a continuación acompañados del propósito correspondiente.

Aspectos	Propósito
Deja participar a los estudiantes en la construcción de demostraciones.	Evidenciar su visión del papel de la demostración en la educación matemática de un individuo.
Indaga para propiciar participación de estudiantes con ideas para la demostración.	Establecer las ideas que tiene sobre lo que es aprender y enseñar a demostrar.
Busca la comprensión de los estudiantes presentando ejemplos o contraejemplos antes de demostrar el teorema.	Determinar el papel que le asigna a la demostración en el aprendizaje de las matemáticas.
Usa expresiones que se refieren a la demostración como validación/convicción. Usa expresiones que se refieren a la demostración para la sistematización. Usa expresiones que se refieren a la demostración para la comprensión o realiza accio-	Capturar la información que permita evidenciar las funciones que le otorga a la demostración en su práctica docente.

nes a través de las cuales se entrevé que considera la demostración elemento para la comprensión/explicación. Da lugar a un espacio de actividad previa para investigar una situación que lleve al descubrimiento del teorema a demostrar.	
Problematiza el teorema a demostrar con el fin de generar discusiones en torno a éste.	Observar estrategias didácticas para la enseñanza y el aprendizaje de la demostración.
Muestra interés en la refinación y rigurosidad de la demostración.	Evidenciar el papel que le asigna a la demostración desde la educación matemática.

Tabla 2. Registro audiovisual

ANÁLISIS

Se realizó el análisis de la entrevista que permitió categorizar a los docentes entrevistados, teniendo en cuenta las funciones que en ésta le asignan a la demostración y las ideas que proveen de cómo se enseña y se aprende a demostrar. Se establecieron tres categorías.

Tipo A

Corresponde a la visión de los docentes que le asignan a la demostración únicamente la función tradicional de verificación/convicción. Ellos consideran que un individuo aprende a demostrar haciendo demostraciones o repitiéndolas. Las demostraciones en el aula de clase hacen parte esencial del contrato didáctico. Sin embargo, no se percibe que tengan interés en realizar actividades que motiven a los estudiantes a producir y entender las demostraciones; es decir, la demostración se convierte en un trabajo personal del estudiante quien trata de imitar los ejemplos que el docente provee.

Tipo B

Es la visión de aquellos docentes que le asignan a la demostración todas las funciones mencionadas por de Villiers (1993). Estos docentes consideran que los estudiantes aprenden a demostrar a través de procesos de exploración, conjeturación y justificación. Además, como de Villiers (1993) lo menciona, al reconocer la función de explicación /comprensión ligada a la de descubrimiento, expresan su interés en que la actividad que realiza el estudiante resulte sig-

nificativa para ellos. Sus visiones de la demostración coinciden con la *actividad demostrativa* propuesta por el grupo de investigación $\mathcal{A} \cdot \mathcal{G}$. Además reconocen la demostración como parte esencial del contrato didáctico; buscan generar el interés en los estudiantes por la demostración. Consideran que la importancia de realizarlas no está en presentarla de manera completa sino en cómo se construye.

Tipo C

Es la visión de los docentes que reconocen la función de verificación/convicción como la principal de la demostración pero también le asignan una o dos funciones más. Sin embargo, el hecho de que reconozcan otras funciones no lleva a pensar que su idea de demostración coincide con la *actividad demostrativa*. Algunos de ellos reconocen que se deben generar procesos de exploración y conjeturación para acceder a la justificación, pero no tienen en cuenta que para llevar a cabo esto es necesario identificar las funciones de descubrimiento y explicación/comprendión como acciones simultáneas. Ellos también consideran la demostración como parte esencial del contrato didáctico, mas no se percibe algún interés en realizar actividades que motiven a los estudiantes a producir y entender las demostraciones.

Teniendo estas categorías, se realizó el análisis de los registros audiovisuales de los tres profesores. Dicho análisis llevó a modificar la primera clasificación que se tenía de los profesores pues lo que expresaron en la entrevista no coincidía, en algunos casos, con lo que hacían en la práctica.

CONCLUSIONES

- Es usual que todos los docentes identifiquen la demostración como medio para verificar la veracidad de una proposición matemática y/o convencer a individuos de la misma comunidad académica de ello.
- Como resultado del análisis de la información recogida, fue posible establecer tres tipos de docentes, agrupados de acuerdo con sus ideas respecto a la demostración.
- En el proceso realizado se evidenció que para determinar la visión que tiene un docente respecto a cualquier actividad matemática se requiere no solamente tener en cuenta las respuestas proferidas en una entrevista sino también observar su práctica en el aula. Con lo que hi-

cimos no se puede determinar la concepción que tienen los docentes de la demostración. Únicamente se establece una aproximación a ésta.

- Dado el análisis y las conclusiones de este trabajo, surge como inquietud: Si el grupo de docentes que está formando a los estudiantes del Departamento de Matemáticas de la UPN tienen diferentes visiones en torno a la demostración, ¿cuáles son las visiones que tienen los estudiantes del Departamento respecto a dicha actividad? y ¿cómo afecta la formación matemática y didáctica de los futuros educadores matemáticos el hecho de que los docentes tengan diferentes visiones de la demostración?
- Este estudio nos permitió reconocer que nuestra concepción de la demostración coincide con lo descrito como categoría C, pues ésta promulga la actividad demostrativa. Surgió entonces otra inquietud: ¿será que podremos propiciar actividad demostrativa en nuestro quehacer docente a nivel escolar? Responderla es la meta de nuestro actual trabajo de maestría en Docencia de las Matemáticas en la UPN, siendo lo aquí expuesto un elemento del marco teórico que usaremos.

REFERENCIAS

- Camargo, L., Samper, C. y Perry, P. (2006). Una visión de la actividad demostrativa en geometría plana para la educación matemática con el uso de programas de geometría dinámica. *Lecturas Matemáticas*, volumen especial, 371-383.
- de Villiers, M. (1993). El papel y la función de la demostración en matemáticas. *Epsilon*, 26, 15-29.
- Godino, J. y Recio, A. (2001). Significados institucionales de la demostración. Implicaciones para la educación matemática. *Enseñanza de las ciencias*, 19(3), 405-414.
- Recio, T. (2001). *La mecánica de la demostración y la demostración mecánica*. Tomado de <http://www.uv.es/~didmat/angel/seiem.html>

UN EJEMPLO DE ACTIVIDAD DEMOSTRATIVA DE ESTUDIANTES DE SEXTO GRADO

Tatiana Ospina¹, Tania Plazas¹ y Carmen Samper²

Universidad Pedagógica Nacional

tatiana.ospina.usaquet@gmail.com, tania.plazas@gmail.com, csamper@pedagogica.edu.co

El constructo *actividad demostrativa*, desarrollado por el grupo de investigación $\mathcal{A} \cdot \mathcal{G}$ de la Universidad Pedagógica Nacional, se generó a partir de las investigaciones realizadas por ellos con estudiantes universitarios. En este artículo se presenta un ejemplo de las tareas que se propusieron a estudiantes de grado sexto con el fin de que ellos realizaran actividad demostrativa. Se analiza la tarea y se muestran evidencias de las acciones de los estudiantes que concuerdan con las incluidas en la actividad demostrativa.

A continuación se presenta un reporte parcial del trabajo de grado que estamos realizando como requisito de la Maestría en Educación Matemática de la Universidad Pedagógica Nacional (UPN). El trabajo se encuentra adscrito al grupo de investigación *Aprendizaje y Enseñanza de la Geometría* ($\mathcal{A} \cdot \mathcal{G}$) de dicha universidad. En particular, presentaremos una tarea que se propuso a los estudiantes de grado sexto, las acciones que realizaron y el análisis de ellas desde el constructo actividad demostrativa.

MARCO DE REFERENCIA

En el Departamento de Matemáticas de la UPN, la demostración, como objeto de estudio en la educación matemática, ha sido centro de interés del grupo $\mathcal{A} \cdot \mathcal{G}$. Durante los últimos años dicho grupo ha adelantado un buen número de investigaciones con estudiantes de la Licenciatura en Matemáticas de la misma universidad, sobre la enseñanza y el aprendizaje de la demostración.

El grupo $\mathcal{A} \cdot \mathcal{G}$ señala “la demostración como medio de descubrimiento, comunicación, explicación y sistematización” Camargo, Samper y Perry (2006), funciones estas que de Villiers (1993) asigna a la demostración. A partir de ello, proponen el constructo *actividad demostrativa* conformado por dos pro-

¹ Estudiantes de Maestría en Docencia de la Matemática.

² Profesora titular.

Ospina, T., Plazas, T. y Samper, C. (2011). Un ejemplo de actividad demostrativa de estudiantes de sexto grado. En P. Perry (Ed.), *Memorias del 20º Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones* (pp. 261-268). Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

cesos: (1) producción de conjeturas y (2) producción de justificaciones. Nos concentraremos, en este momento, en el proceso de producción de conjeturas. Las acciones que realizan los estudiantes dentro de este marco deben llevar a que comprendan mejor la propiedad y el objeto matemático trabajado y que posiblemente adquieran ideas que les ayude a construir la justificación correspondiente.

Proceso de producción de conjeturas

Este proceso consta de cuatro acciones de tipo heurístico que se describen a continuación, como lo proponen Camargo, Samper y Perry (2006, pp. 373-374):

- Visualización: consiste en percibir, observar, detallar y detectar las propiedades geométricas de un objeto a partir de su representación gráfica.
- Exploración: tiene que ver con el estudio de una situación, construyendo una representación o usando materiales concretos, con el fin de descubrir propiedades o relaciones entre ellas para identificar aquellas que permanecen invariantes.
- Generalización: es la acción de establecer un enunciado, como conjetura en términos matemáticos, de lo que se descubre a partir de la exploración y la visualización.
- Verificación: el propósito es poner a prueba la conjetura formulada, realizando otras acciones de exploración.

La tarea propuesta

Como lo dicen Camargo, Samper y Perry (2006) uno de los factores que propician el desarrollo de actividad demostrativa en el aula es el tipo de tarea que se propone a los estudiantes. En particular, es necesario diseñar tareas de exploración que no tengan respuesta inmediata, con el fin de propiciar las acciones de tipo heurístico del proceso de producción de conjeturas. Ello concuerda con las tareas que da Ponte (2004) cataloga como actividades de tipo de exploración (abierto-accesible) o de investigación (abierto-difícil) en contextos matemáticos, que según el investigador son las adecuadas para generar la actividad matemática en el aula, ya que “este tipo de tareas permiten que el alumno

se dé cuenta de cómo se desarrolla la actividad matemática de los matemáticos profesionales” (da Ponte, 2004, p. 33).

El tema central de la secuencia de tareas que se trabajó en esta ocasión fue el triángulo y sus propiedades. Para el diseño de las tareas se utilizó como referencia el texto *Geometría* (Samper, 2008), dirigido a estudiantes de secundaria. En particular, la tarea que presentamos es una modificación de un ejemplo encontrado en el libro; el propósito de la tarea era ilustrar la propiedad conocida como desigualdad triangular, según la cual la suma de las medidas de dos lados cualesquiera de un triángulo es mayor que la medida del tercer lado del triángulo. Específicamente, se transformó para que los estudiantes llegaran a descubrir esa propiedad a través de la manipulación de materiales concretos.

La tarea propuesta fue:

- Los palitos de color amarillo, azul y rojo, tienen diferentes medidas. ¿Podemos escoger uno de cada color y unirlos para formar un triángulo? Anote en la tabla, en la columna del color correspondiente, la medida del palito y si se formó o no un triángulo. Haga diez intentos diferentes.
- Con base en la información recolectada en la tabla, describa cuándo se forma un triángulo y cuándo no se forma un triángulo. Por último, escriba una conjetura.

ANÁLISIS

Para el análisis de las acciones de los estudiantes al resolver la tarea, se observaron los videos que se realizaron cuando estaban trabajando y se tuvieron en cuenta las respuestas consignadas por los estudiantes en la hoja.

Para comenzar, se expondrá el análisis que se realizó de la tarea previamente y la razón por la cual se creía que propiciaría cada una de las acciones del proceso de conjeturación. Luego se presentará un fragmento del protocolo de clase en donde se evidencian algunas de las acciones.

Visualización

El primer punto de la tarea propicia la visualización. Los estudiantes intentarán construir una figura con forma de triángulo con los palitos. Para esto de-

ben evocar la definición de triángulo y ver si la figura formada con los palitos satisface dicha definición.

- 25 Paula: Ahh si... El de 6 [toma el amarillo] el de 2 [toma el azul] y el rojo es éste. [Con los palitos escogidos pueden formar un triángulo.]
- 26 Profesora: A ver. Vuélvanlo a armar [colocando] puntica con puntica de cada palito.
- 27 Paula: ¡Ay! ¡No! [Lo trata de armar pero al palito amarillo le sobra un pedazo.]
- 28 Vanessa: Pero ahorita nos quedó.
- 29 Profesora: Vuelve a intentar. [Las niñas logran armar el triángulo.] ¿Si se puede o no se puede?
- 30 Vanessa: Sí, señora.
- 31 Profesora: Listo, ahora. ¿Cuál fue el [caso en] que no pudo?
- 32 Paula: El de tres [cm]...
- 33 Profesora: Tres amarillo.
- 34 Paula: Tres centímetros amarillo, cuatro centímetros azul y siete centímetros rojo.
- 35 Profesora: Traten de hacerlo. Muéstrenme como lo tratan de hacer.
- 36 Paula: Mira no se puede [muestran que, con los palitos mencionados anteriormente, no se puede formar un triángulo.]

Ejemplo visualización

Los estudiantes encuentran una combinación entre palitos que les permite formar un triángulo: el que mide seis cm (amarillo), el de dos cm (azul) y el que mide cinco cm (rojo). Los estudiantes recuerdan la forma que describe un triángulo y observan que la representación lograda con los palitos coincide con las características de un triángulo. Un segundo momento de esta acción se puede evidenciar cuando descartan la figura formada por los palitos que miden tres, cuatro y siete centímetros, puesto que la figura lograda no concuerda con la imagen que tiene de triángulo.

Exploración

Al darles varios palos de cada color y solicitar que realicen diez intentos, se favorece que el estudiante explore la situación. Dada la inexperiencia de los estudiantes con este tipo de tarea, la profesora los guía en lo que se refiere a

cómo debe ser el proceso de exploración, y qué tipo de inquietudes deben guiar ese proceso.

83 Profesora: Por ejemplo, tres [cm], uno [cm] y siete [cm]. ¿Ya están mirando? ¿Qué tienen estos numeritos para que sea o no sea triángulo? Ya tienen las medidas... ¿qué pasa con esas medidas para que dé eso? Miren qué pasa con las medidas.

84 Luisa: No se forman porque no se pueden unir los palitos.

85 Profesora: Pero, ¿por qué no se pueden unir? ¿Qué tienen de especial? y ¿Qué pasa con las medidas? ¿Por qué no se puede?

86 Luisa: Es que no alcanza.

...

90 Luisa: Por ejemplo, acá el rojo es demasiado grande para poder unirlo... Sí. Dígamos es muy grande para que se formen, porque le falta mucho.

91 Profesora: Revisa que pasa con las medidas. A ver... Hay unos triángulos que no se pueden hacer y hay unos que sí se pueden hacer. ¿Por qué se pueden y por qué no se pueden hacer?

...

98 Luisa: Cuando sumamos... Se forma, cuando la suma de los más pequeños supera al más pequeño, digo al más grande.

Ejemplo de exploración

Los estudiantes han realizado diez posibilidades de combinación de palos y han determinado si se forman o no triángulos. La profesora intenta que los estudiantes centren la atención en las medidas de los palos y los múltiples ejemplos que tienen para que detecten alguna regularidad entre ellas que asegure la construcción de un triángulo.

Generalización

El segundo punto de la actividad tiene como objetivo que los estudiantes realicen una generalización de la situación. Si bien en la exploración ya detectaron la propiedad que les permite formar un triángulo con las medidas de los palitos, aún no la han formulado explícitamente como una generalización de la situación. Es importante aclarar que los estudiantes no cuentan con un lenguaje formal matemático ni una estructura lógica que les permita escribir su generalización como una proposición condicional. Sin embargo, hacen uso de al-

gunas expresiones que la profesora ha convenido con ellos, como por ejemplo referirse a las medidas de los lados y no a los palitos o intentar expresar la condición que permite la formación de los triángulos con base en las medidas de sus lados como una situación causa-efecto.

207 Profesora: ... ¿Qué dice la primera conjetura?

208 Paula: Cuando las medidas más pequeñas se suman y no alcanzan a superar el mayor número.

209 Profesora: ¿Qué pasa cuando las medidas se suman y no alcanzan el mayor número?
¿Se forma o no se forma el triángulo?

210 Paula: No se forma, porque la idea es que cuando nos dan tres medidas, entonces tú tienes que sumar las medidas más pequeñas que tiene el triángulo y si lo sumas y no supera la mayor, no supera la medida mayor, no puede hacerse el triángulo.

211 Profesora: ¿Qué decía la segunda conjetura?

212 Paula: Cuando las medidas más pequeñas se suman y si alcanza a superar el mayor número.

213 Profesora: ¿Se puede o no se puede armar un triángulo?

214 Paula: Sí... Se forma un triángulo.

Ejemplo de generalización

En la primera intervención del protocolo la profesora pregunta a los estudiantes sobre las conjeturas, es decir, les pide una generalización sobre las condiciones necesarias para que se forme un triángulo y para que no se forme. Ellos expresan una primera regularidad: si la suma de las medidas de los lados menores de un triángulo no supera la medida del lado mayor entonces no se forma un triángulo.

La segunda regularidad que mencionan es que la suma de las medidas de los lados del triángulo debe ser mayor que la medida del lado mayor para que exista un triángulo. De cierta forma, descubren el Teorema de la desigualdad triangular, y lo expresan en términos no formales usando la contrarrecíproca, en el primer caso, y el teorema mismo en el segundo caso, pero se refieren solamente a la relación entre los lados más cortos y el más largo. Es tarea de la profesora mostrar a los estudiantes que esa propiedad es válida para cualquier par de lados del triángulo con respecto al tercer lado y que ello se tiene para cualquier triángulo.

Verificación

Después de que queda establecida la conjetura en la que sólo se menciona la relación entre la suma de las medidas de los lados más cortos y la medida del lado más largo, la profesora propone algunos ejemplos para que, sin usar los palos, dejen a un lado la experiencia concreta y pasen a un plano más abstracto.

216 Laura: Digamos, las medidas menores son dos y cuatro. Las vamos a coger y las sumo. Entonces cuando sumo dos y cuatro nos da seis y seis no alcanza a superar al número de la medida mayor que es catorce.

...

233 Profesora: El que tiene siete, ocho y doce ¿se forma o no se forma [triángulo]?

234 Laura: Siii.

235 Profesora: ¿Por qué se forma?

236 Laura: Porque siete más ocho es igual a quince y supera a...

237 Profesora: ¿Cómo?

238 Laura: Porque siete más ocho es igual a quince y supera a doce

239 Profesora: Entonces en general vamos a decir que Si la suma de dos de los lados es mayor que el tercer lado, no, la suma de la medida de dos lados es mayor que la medida del tercero, del tercer lado, se forma el triángulo.

Ejemplo de verificación

La exploración ya no es con el material concreto, pues los estudiantes no buscan palos con las medidas que se sugieren. El trabajo realizado les permite analizar la situación sin ello. Esto muestra que han logrado convencerse de la propiedad con los ejemplos que hicieron, tal vez porque varios estudiantes llegaron a la misma conclusión. Es decir, no hubo necesidad de verificar su conjetura. Los estudiantes ya pueden usar ese hecho para determinar, a partir de las medidas y no de la representación del triángulo, cuándo tres números corresponden a las medidas de los lados de un triángulo.

CONCLUSIONES

En este análisis parcial pudimos evidenciar que las tareas propuestas permiten propiciar las acciones de tipo heurístico del constructo actividad demostrativa. Además se observa que la actividad genera una participación genuina en los

estudiantes a través de la propuesta de ideas, la discusión de éstas en los grupos y la formulación de las conjeturas.

Es de aclarar que con las actividades propuestas no se pretendía que los estudiantes demostraran la propiedad descubierta, dado el nivel de escolaridad. Sin embargo se esperaba que los estudiantes usaran la propiedad para resolver otros problemas y justificaran la solución de éstos a partir de su conjetura.

El análisis de las acciones muestra que la actividad demostrativa evidenciada en el trabajo de estudiantes universitarios se puede llevar a cabo con estudiantes de básica secundaria. Sin embargo, esto depende del tipo de tareas que se propongan en el aula de clase.

Con este análisis podemos vislumbrar que las acciones de la profesora juegan un papel importante en el desarrollo de la actividad, en la gestión de la clase y participación de los estudiantes, en la construcción del conocimiento matemático, en la apropiación del lenguaje, y en el desarrollo de la cultura de argumentar con razones matemáticas fundadas, asunto central de interés en nuestro trabajo de grado.

REFERENCIAS

- Camargo, L., Samper, C. y Perry, P. (2006). Una visión de la actividad demostrativa en geometría plana para la educación matemática con el uso de programas de geometría dinámica. *Lecturas Matemáticas* (volumen especial), 371-383.
- da Ponte, J. (2004). Problemas e investigaciones en la actividad matemática de los alumnos. En L. Santos, J. Giménez, y J. da Ponte (Coords.), *La actividad matemática en el aula: homenaje a Paulo Abrantes* (pp. 25-34). Barcelona, España: Graó.
- de Villiers, M. (1993). El papel y la función de la demostración en Matemáticas. *Epsilon*, 6, 15-29.
- Samper, C. (2008). *Geometría*. Bogotá, Colombia: Grupo Editorial Norma.

ANÁLISIS COMPARATIVO DE LA ENSEÑANZA DE POLIEDROS EN ESTUDIANTES DE AULA REGULAR Y ESTUDIANTES DE AULA EXCLUSIVA

Madelyn Piñeros y Diana García

Universidad Distrital Francisco José de Caldas

mardemadri@gmail.com, dipatri37@gmail.com

En el presente documento se encontrará un análisis comparativo de los resultados obtenidos en el proceso de enseñanza y aprendizaje de poliedros, con estudiantes de aula regular y estudiantes en condición de deficiencia cognitiva leve, tomando como fundamento los planteamientos de los esposos van Hiele y las habilidades geométricas propuestas por Hoffer. Así mismo se hace énfasis en la resolución de problemas y en la utilización de material didáctico como mecanismo que conduce al estudiante hacia un aprendizaje significativo.

LA GEOMETRÍA EN EL AULA REGULAR Y EN AULA EXCLUSIVA

Al hablar de Geometría Activa se presume de manera directa un cambio significativo en la enseñanza, ya que a partir de ésta se espera que el estudiante pueda establecer diferentes acciones, como lo son: manipular, modelar, explorar y representar un objeto geométrico; esto enmarca el trabajo en situaciones contextualizadas y promueve la resolución de problemas en el aula de matemáticas. En conjunto se trata de una apuesta que conduce al estudiante hacia el aprendizaje significativo (Ministerio de Educación Nacional, 1998). En este sentido, actualmente puede evidenciarse la desarticulación de algunos elementos de la Geometría Activa en el aula de matemáticas, donde de manera paulatina se intenta introducir la utilización de recursos didácticos, presentándolos de manera inadecuada. Así mismo al centrar la mira en el aula regular puede notarse el olvido con respecto a la contextualización y la resolución de problemas, ya que se ven como una condición poco necesaria para que el estudiante se apropie del conocimiento, lo que conduce a dificultades puntuales al momento de enfrentar al estudiante a un problema del contexto real, en el cual deba ponerse en juego dicho conocimiento.

Sin embargo, se logran evidenciar dichos aspectos no sólo al centrar la mirada en el aula regular sino también en las aulas exclusivas, en las cuales hace aparición la población con Necesidades Educativas Especiales (NEES), y especí-

Piñeros, M. y García, D. (2011). Análisis comparativo de la enseñanza de poliedros en estudiantes de aula regular y estudiantes de aula exclusiva. En P. Perry (Ed.), *Memorias del 20º Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones* (pp. 269-276). Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

ficamente población con deficiencia cognitiva leve. Cabe resaltar que en las aulas exclusivas en las cuales ha de desarrollarse la investigación, la resolución de problemas y la utilización de recursos didácticos ha quedado totalmente de lado, pasando a establecer clases que sólo responden a conceptos matemáticos de manera superficial, y centrando su preocupación únicamente en la función social y laboral que los estudiantes han de tener, esto debido a los mitos existentes sobre la incapacidad para la adquisición de conocimiento de carácter formal como, por ejemplo, lectura, escritura y cálculo, tal y como se menciona en Secretaría de Educación Distrital (2007).

Es así como nace la tensión fundamentada en la creación de una secuencia didáctica para cada población mencionada, teniendo en cuenta para su realización, aspectos como: a) la presencia de situaciones contextualizadas, b) la necesidad de la utilización de recursos didácticos y c) el trabajo con poliedros, con el fin de identificar los procesos, las dificultades y progresos que los estudiantes de ambas poblaciones pueden tener con respecto a este objeto geométrico, siendo de vital importancia desmentir los mitos sobre el aprendizaje de la población con discapacidad cognitiva leve, de conocimientos formales como las matemáticas y evidenciar que al hacer buen uso de los recursos didácticos los dos grupos estarán en capacidad de comprender la utilidad que el concepto tiene.

MARCO DE REFERENCIA CONCEPTUAL

A continuación se presenta el marco de referencia que se tuvo en cuenta para el diseño y la planeación de las secuencias didácticas realizadas.

Al centrar la mirada en los *Lineamientos curriculares* (Ministerio de Educación Nacional, 1998), se propone –como se dijo anteriormente– la geometría activa. Ésta establece para su desarrollo el “hacer cosas que impliquen moverse, dibujar, construir, producir y tomar de estos esquemas operatorios el material para la conceptualización” (p. 37), que realizarán los estudiantes en un inicio a través del lenguaje y posteriormente la planeación de algunas definiciones y simbología matemática formal. A partir de esto, es necesario conocer o manejar el modelo de van Hiele para el desarrollo del pensamiento geométrico, que caracteriza diversos aspectos en una serie de niveles. En nuestro caso, sólo se tienen en cuenta los dos primeros, presentados a continuación:

Nivel 1: Es el nivel de la visualización, llamado también de familiarización, en el que el alumno percibe las figuras como un todo global, sin detectar relacio-

nes entre la forma o entre sus partes. En este nivel, los objetos sobre los cuales los estudiantes razonan, son las clases de figuras reconocidas visualmente como de “la misma forma”.

Nivel 2: Es el nivel de análisis, de conocimiento de las componentes de las figuras, de sus propiedades básicas. Estas propiedades se hacen comprensibles a través de observaciones efectuadas durante trabajos prácticos como mediciones, dibujo, construcciones de modelos, etc. En este nivel los objetos sobre los cuales los estudiantes razonan son las clases de figuras y piensan en términos de conjuntos de propiedades que pueden asociarse con ellas.

Al tomar como referencia lo propuesto por los esposos van Hiele, se encuentra una relación estrecha con las habilidades geométricas a desarrollar, expuestas por Hoffer (1990), ya que él realiza una descripción de cada una de las habilidades, teniendo en cuenta los niveles de van Hiele. Esto se evidencia a la siguiente tabla tomada de Hoffer (1990):

Nivel Habilidad	I Reconocimiento	II Análisis
Visual	Reconoce diferentes figuras de un dibujo. Reconoce información contenida en una figura.	Notar las propiedades de una figura. Identificar una figura como parte de una mayor.
Verbal	Asociar el nombre correcto a una figura dada. Interpretar frases que describen figuras.	Describir adecuadamente las propiedades de una figura.
Dibujo	Hacer dibujos de figuras nombrando adecuadamente sus partes.	Traducir información verbal dada en un dibujo. Utilizar las propiedades dadas de una figura, para dibujarla o construirla.
Lógica	Darse cuenta de que hay diferencias y similitudes entre figuras. Comprender la conservación de figuras en distintas posiciones.	Comprende que las figuras pueden clasificarse en diferentes tipos. Notar que las propiedades sirven para distinguir figuras.
Aplicada	Identificar formas geométricas en objetos físicos.	Reconocer propiedades geométricas de objetos físicos. Representar modelos de un objeto.

Por otro lado, se presentan los planteamientos de Godino (1998) centrados en la utilización de material didáctico en el aula de matemáticas, ya que se consi-

dera –como lo indica Kennedy (1986, citado en Godino, 1998)– que los materiales manipulativos contribuyen a la comprensión del significado de nociones matemáticas y de sus respectivas aplicaciones contextualizadas con el mundo real. Es así como Godino expone la siguiente clasificación en el manejo de materiales didácticos, resaltando que un material didáctico es “entendido como cualquier medio o recurso que se usa en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas:

Ayudas al estudio: Son recursos que el docente utiliza para el diseño y planeación de una clase, como: ejercicios, tutoriales de ordenadores, entre otros.

Instrumentos semióticos para el aprendizaje matemático: Son objetos físicos tomados del entorno o preparados tales como: material gráfico, palabras, textos; que funcionan como medios de expresión, exploración y cálculo en el trabajo matemático. También se denotan como: manipulativos u objetos ostensivos, clasificándose a su vez, de esta manera:

- *Manipulativos tangibles:* Asociados a la percepción táctil.
- *Manipulativos visual- textual-gráfico:* asociados a la percepción visual y/o auditiva.

Resaltando estos dos materiales como funciones semióticas: extensivas, intensivas, ostensivas y actuativas, pueden considerarse como recursos simbólicos (sistema de signos matemáticos). De esta forma, la utilización de estos materiales didácticos tiene como prioridad el fomento de la reflexión matemática en el estudiante.

DESCRIPCIÓN DE LA METODOLOGÍA

El desarrollo de la propuesta estará enmarcado desde la perspectiva de las situaciones didácticas de Brousseau (1986), donde se plantea la necesidad de poner en escena no sólo las acciones del estudiante sino también la de los maestros, y el conocimiento que se construye. A partir de ello se plantea cuatro etapas indispensables en la realización de la actividad matemática, en las cuales el alumno no sólo contará con los diferentes recursos sino que a partir de ellos debe lograr la significación y apropiación del objeto matemático, en este caso el de poliedros.

Acción: El estudiante debe actuar sobre un medio didáctico, teniendo en cuenta únicamente los conocimientos implícitos, es decir, se entregará un problema del

que no obtendrá una respuesta inmediata, pero que a partir de sus conocimientos previos tratará de brindar una solución, haciendo un proceso de retroalimentación.

Formulación: Esta etapa se realiza de manera grupal. La función aquí, es que cada estudiante en un grupo determinado pueda realizar diferentes debates o interacciones, llevando a este proceso a la construcción de conocimiento.

Validación: Para este momento, es necesario que los estudiantes hayan cruzado por los anteriores, ya que es justo aquí donde el maestro hará intervención con el fin de aprobar si los procesos llevados a cabo por los estudiantes en el uso del medio didáctico es adecuado o no.

Institucionalización: Finalmente en esta etapa, el maestro recoge lo que se ha hecho durante el trayecto y lo formaliza, complementa, hace algunas observaciones y da a conocer lo que se pretendía con las situaciones.

ANÁLISIS DE DATOS

A continuación se presentan los resultados obtenidos al implementar una secuencia didáctica para grado cuarto de aula regular. Tal secuencia, cuyos autores son una de las ponentes de esta comunicación y otros cinco estudiantes de la Licenciatura en Educación Básica, se construyó como parte del trabajo asignado en un espacio de formación de la carrera y se enmarca en la construcción del parque de diversiones “Charman diversiones”. También cabe señalar que fue planteada a partir de las dificultades conceptuales encontradas en los estudiantes en la actividad de diagnóstico, y que para su diseño se procuró tomar varios elementos expuestos por van Hiele y Hoffer, con el fin de identificar qué aspectos manejaban los estudiantes, haciendo referencia a figuras planas y poliedros. Es por ello, que al realizar el análisis de los resultados se evidenció que no se podría ubicar a los estudiantes de manera específica en alguno de los niveles expuestos anteriormente, ya que daban cuenta de manera esporádica del manejo de algunas habilidades. Por lo tanto, se recurrió a la categorización por niveles según el desarrollo de cada ítem, es decir, dependiendo de las acciones que los estudiantes registraron en la resolución de cada tarea planteada.

Escribe el nombre de las figuras geométricas que se encuentran en el parque de diversiones			
Identifican figuras planas y al menos una figura sólida en el parque de diversiones (dibujo).	6 estudiantes	Reconocen únicamente las figuras planas en el parque de diversiones (dibujo).	9 estudiantes
¿Cuántas caras tiene la base que sostiene los aviones de la atracción de “Los Avioncitos”?			
Identifican que las figuras sólidas poseen caras dentro de su estructura		8 estudiantes	

Evaluación

La evaluación que se llevó a cabo durante la implementación de las actividades fue procesual, es decir, se tuvieron en cuenta aspectos conceptuales, procedimentales y actitudinales. Ya en la actividad de final (evaluación) dichos niveles se plantearon teniendo en cuenta los niveles y las habilidades que finalmente se querían contemplar en el proceso de los estudiantes.

Dirigido al primer nivel de van Hiele y a las habilidades visual, verbal, lógica y aplicada propuestas por Hoffer			
Reconoce los sólidos que entran en la conformación del robot, asignando el nombre correcto a cada uno atendiendo a qué parte del robot pertenece.	16 estudiantes	Reconoce los sólidos pero muestra dificultad en la diferenciación de cubo-paralelepípedo, pirámide triangular – pirámide cuadrangular.	19 estudiantes
Dirigido al nivel de reconocimiento y a la habilidad de dibujo propuesta por Hoffer y al nivel de análisis y habilidades verbal, visual, dibujo, lógica y aplicada			
Asigna las propiedades correctas a un sólido determinado, reconociendo que ese sólido hace parte del robot y que entre sus partes existen similitudes y diferencias.	6 estudiantes	No tiene en cuenta las propiedades y realiza construcciones de las partes del robot sin ninguna relación establecida.	12 estudiantes

Dirigido al nivel de análisis de van Hiele y a las habilidades visual, verbal y aplicada propuestas por Hoffer			
Reconoce un sólido determinado dando ciertas características e identifican la parte del robot al que corresponde.	15 estudiantes	No tiene en cuenta las propiedades dadas de un sólido determinado y asigna nombres incorrectos a éste y a la parte del robot.	15 estudiantes

A partir de los resultados obtenidos se evidencia un progreso significativo en los estudiantes, ya que en general adquirieron el desarrollo de las habilidades geométricas correspondientes al nivel de reconocimiento de van Hiele. Cabe resaltar que algunos de los estudiantes lograron establecer las relaciones expresadas en el nivel de análisis, aunque no se desarrollaron todas las habilidades de manera paralela sino que se adquirieron de manera aleatoria. Por otra parte, es necesario mencionar que algunos estudiantes sólo lograron llegar al manejo básico de dichas habilidades del nivel de reconocimiento.

Así mismo, se puede afirmar que por medio del trabajo de la secuencia didáctica los estudiantes lograron avances en:

- Procesos de modelación matemática con material manipulativo.
- Estrategias de resolución de problemas implícitas en la implementación de la secuencia didáctica.
- Manejo y utilización de diferentes representaciones de una misma figura

Con respecto a los resultados de los procesos de aulas exclusivas, la secuencia de actividades: “Feria Artesanal: República de Bolivia” se encuentra en proceso de implementación, por tal razón los resultados y el análisis comparativo serán mostrados en la exposición de este documento.

CONCLUSIONES

- A través del trabajo realizado se observa la importancia de contextualizar e implementar en el aula de matemáticas la utilización de recursos didácticos, debido a que a partir de ellos, los estudiantes logran conceptualizar el objeto de estudio y así mismo realizan de manera constante procesos de modelación matemática vitales para la comprensión de un concepto matemático.

- En el proceso de implementación de la secuencia didáctica a estudiantes con NEES hasta el momento llevado a cabo, se ha evidenciado que es fundamental respetar los tiempos en los que ellos realizan las actividades, es decir, debe haber una prevalencia por el respeto a los estilos y ritmos de aprendizajes, para proporcionar un ambiente de aprendizaje óptimo donde el estudiante cambia el papel pasivo por un papel activo, es decir por ser agente de su propio aprendizaje.
- Por medio de planeación y diseño de secuencias didácticas, el docente debe ser consciente de las variables didácticas que se pueden generar en la implementación de las actividades, y de la pertinencia y función de cada uno de los materiales didácticos que se pondrán en juego, ya que a partir de la motivación y los intereses que logre producir en los estudiantes, se evidenciarán estrategias claras de resolución de problemas lo que conduce al aprendizaje significativo deseado.

REFERENCIAS

- Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 7(2), 33-115. (Traducido al castellano como: *Fundamentos y métodos de la didáctica de las matemáticas*, por Julia Centeno, Begoña Melendo y Jesús Murillo, en 1989).
- Godino, J. (1998). Uso de material tangible y gráfico-textual en el estudio de las matemáticas: superando algunas posiciones ingenuas. En A.M. Machado et al. (Eds.), *Actas do ProfMat 98* (pp. 117-124). Guimaraes, Portugal: Associaçao de Professores de Matemática.
- Hoffer, A. (1990). La geometría es más que demostración. *Notas de matemáticas*, 25, 10-24.
- Ministerio de Educación Nacional (1998). *Lineamientos curriculares de matemáticas*. Bogotá, Colombia: Magisterio.
- Ministerio de Educación Nacional (2007). *Estándares curriculares de matemáticas*. Bogotá, Colombia: Magisterio.
- Secretaría de Educación Distrital (2004). *Modalidad educativa de atención exclusiva para escolares con deficiencia cognitiva*. Bogotá, Colombia: SED.

EL PAPEL DE LAS TAREAS PARA PROPICIAR ACTIVIDAD DEMOSTRATIVA

Ivon Pinzón¹, José Rodríguez¹ y Carmen Samper²

Universidad Pedagógica Nacional

ivon084@gmail.com, antonio82rs@gmail.com, carmensamper@gmail.com

Se presenta el análisis de un conjunto de tareas diseñadas para propiciar la actividad demostrativa en grado noveno. En primer lugar, se presenta un marco conceptual relacionado con la actividad demostrativa y el uso de herramientas de mediación; en segundo lugar, se describen las tareas involucradas en cada actividad, sus objetivos y cómo ellas pueden dar lugar a las acciones y procesos propios de la actividad demostrativa.

INTRODUCCIÓN

Tanto en los lineamientos curriculares como en los estándares básicos de competencias en matemáticas que deben orientar la educación matemática en Colombia, se destaca la importancia del desarrollo de la argumentación como medio apropiado para validar y rechazar conjeturas, y avanzar hacia la demostración (MEN, 2003). Algunas investigaciones muestran que en diferentes grados de escolaridad los estudiantes pueden realizar procesos de prueba. Ello obedece a que se tiene una idea amplia de demostración, que permite desarrollar esa actividad en cualquier grado. La construcción de discursos de índole argumentativa por parte de estudiantes de la educación básica depende del tipo de mediación que lleva a cabo el docente junto con un adecuado diseño didáctico (Pinzón y Rodríguez, 2006), por un lado, y de lo que la comunidad del aula acepta como demostración (Stylianides, 2007), por otro lado.

Con base en estas ideas surge como pregunta orientadora del trabajo de grado: ¿qué tipo de tareas debe proponer el profesor y cómo debe gestionar la actividad en torno a ellas para propiciar actividad demostrativa en estudiantes de grado noveno? En este artículo solamente nos referiremos al tipo de tarea.

¹ Estudiante de Maestría en Docencia de la Matemática.

² Profesora titular del Departamento de Matemáticas.

Pinzón, I., Rodríguez, J. y Samper, C. (2011). El papel de las tareas para propiciar actividad demostrativa. En P. Perry (Ed.), *Memorias del 20º Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones* (pp. 277-284). Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

MARCO CONCEPTUAL

Para realizar la construcción de nuestro marco conceptual nos basamos en planteamientos que sobre la prueba y el uso de herramientas de mediación en el aula hace el grupo de investigación *Aprendizaje y Enseñanza de la Geometría (AEG)* de la Universidad Pedagógica Nacional (UPN).

Actividad demostrativa

La actividad demostrativa se entiende como el conjunto de acciones que una persona lleva a cabo para descubrir y mostrar que una afirmación puede justificarse dentro de un sistema teórico disponible, bajo condiciones establecidas en el grupo ante el cual se hace esa justificación. La actividad demostrativa está conformada tanto por acciones heurísticas, para descubrir, como por procesos de justificación, para validar (Perry, Camargo, Samper y Rojas, 2006). A continuación nos referiremos a cada una de las acciones y procesos que conforman la actividad demostrativa.

Acciones heurísticas

Visualización. Se entiende como una acción que, a diferencia del simple hecho de observar, involucra el establecimiento de relaciones que permitan identificar propiedades específicas de un objeto geométrico. Es decir, un objeto geométrico se distingue, en primera instancia, a partir de las unidades figurales que lo componen y luego, a partir de la identificación de propiedades relevantes. En este sentido, la acción de visualizar potencia la construcción (o reconstrucción) de definiciones, pues durante la visualización surge o se evoca imágenes mentales de conceptos.

Exploración. En esta acción se verifican propiedades y relaciones perceptuales con el uso de una herramienta de mediación como regla y compás o geometría dinámica, que genera interacciones entre el sujeto y el objeto geométrico, por medio de acciones como medir, comparar, clasificar o arrastrar. Se puede inducir la acción de exploración a partir de discusiones en las que se cuestionan las afirmaciones que resultaron de la acción de visualización, es decir, se posibilita la comprobación, de manera intuitiva, de la veracidad de lo observado.

Generalización. A partir de las acciones de visualización y exploración, el sujeto encuentra algunas propiedades que comprueba empíricamente por medio de la exploración; ello lo lleva a formularlas de manera general. En esta ac-

ción, los procesos discursivos juegan un papel fundamental, pues interactúan tres tipos de registro: el figural, el matemático y el discursivo (Duval, 1999).

Verificación. Es la acción en la que el sujeto ratifica las conjeturas elaboradas usando sus conocimientos y los elementos que brinda la herramienta de mediación, a partir de acciones como las utilizadas en la exploración.

Procesos de justificación

Explicación. Corresponde a un proceso discursivo en el que se busca mostrar la validez de una conjetura apoyándose principalmente en la figura y en las acciones específicas que se hicieron sobre ella; es decir, los argumentos se basan en percepciones y se expresan en lenguaje natural. Es un reporte del tratamiento que se le hace al registro figural con la intención de proveer un registro discursivo (Duval, 1999).

Prueba. La conjetura que se quiere validar se considera general con base en las acciones realizadas sobre una figura específica; por ende, las propiedades y relaciones dependen exclusivamente de dicha figura y el proceso de justificación que se lleva a cabo no es suficientemente riguroso por la falta de generalidad. Aquí, la discusión cobra importancia, pues puede servir para confirmar la conjetura o encontrar contraejemplos; esto lleva a argumentos más estructurados para la validación que los que se dan en la explicación, acercándose así a la demostración formal.

Demostración formal. Es un proceso en el que se llevan a cabo pasos deductivos de proposiciones, enmarcados en un sistema teórico, encadenados a partir de esquemas lógicos válidos, que permiten llegar a la conclusión. No es necesario remitirse a una figura específica y se privilegia el lenguaje matemático.

Herramientas de mediación en el aula

Uno de los aspectos que se debe tener en cuenta en el ambiente de aprendizaje son las herramientas de mediación que se utilizan en el aula. Varias investigaciones (e.g., Perry, Camargo, Samper y Rojas, 2006) han confirmado que la geometría dinámica (e.g., Cabri) proporciona elementos y experiencias para propiciar la actividad demostrativa en el aula. Las principales características del entorno Cabri están relacionadas con la coexistencia de elementos primitivos de dibujo y elementos de la geometría, junto con la manipulación directa del dibujo (Laborde, 1996). Es decir, si se arrastra uno de los elementos base

del dibujo, éste se deforma respetando las propiedades geométricas usadas para su trazado y las que se deriven de ellas. El entorno impulsa a los estudiantes a realizar construcciones que no se basan sólo en características visuales y a establecer relaciones, deducir propiedades y determinar condiciones suficientes para representar la situación. El arrastre es el componente que ofrece la retroacción a las acciones del alumno, permitiendo así la experimentación para verificar propiedades o relaciones.

DESCRIPCIÓN DE LAS TAREAS PROPUESTAS

Para diseñar las actividades se tuvieron en cuenta los siguientes aspectos:

- Se quería propiciar la actividad demostrativa.
- De acuerdo con el contenido involucrado, era importante determinar el concepto que tenían los estudiantes de los diferentes cuadriláteros.
- Los estudiantes no habían trabajado con geometría dinámica, por lo tanto, era necesario dar a conocer diferentes herramientas de Cabri.
- La geometría dinámica facilita la emergencia de las acciones propias de la actividad demostrativa.

A continuación se presentan las actividades diseñadas y sus objetivos.

Actividad 1

Objetivos

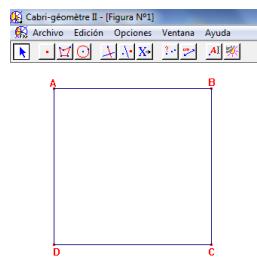
- Propiciar el reconocimiento de propiedades del cuadrado.
- Fomentar el desarrollo de la *visualización*.
- Promover la *exploración* como herramienta para comprobar propiedades identificadas visualmente.

Primera Tarea

Construya un cuadrado $KLMN$ en una hoja en blanco y luego describa el proceso que siguió.

Segunda Tarea

Mencione las propiedades de la figura que observa en la pantalla. ¿Cómo pueden comprobar que su afirmación es correcta?



Tercera Tarea

Utilizando la función arrastre, mueva cada vértice de la figura dada. ¿Qué ocurrió al mover cada punto? ¿Qué propiedades de las mencionadas se mantienen? ¿Cuáles cambian?

Cuarta Tarea

Construya un cuadrado $JKLM$, a partir de las herramientas “segmento”, “perpendicular”, “compás”, “etiqueta” y “ocultar/mostrar”. Describa su proceso de construcción.

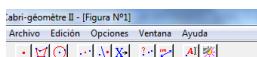
Actividad 2

Objetivos

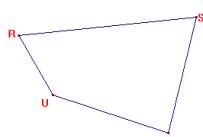
- Propiciar el reconocimiento de propiedades y relaciones de cuadriláteros.
- Promover la acción de *generalización* a partir de la construcción y exploración de cuadriláteros.
- Impulsar la *justificación* de las conjeturas.

Primera Tarea

Construya los puntos medios de los lados \overline{RS} , \overline{ST} , \overline{TU} y \overline{UR} y nómbrélos X , Y , Z y W , respectivamente.



Construya el cuadrilátero $XYZW$.



Segunda Tarea

A través del arrastre, convierta el $\square RSTU$ en un cuadrilátero especial. Complete la siguiente tabla:

<input type="checkbox"/> $RSTU$	Propiedades	<input type="checkbox"/> $XYZW$	Propiedades

Tercera Tarea

Escriba una conjetura sobre el cuadrilátero $XYZW$ a partir de los resultados obtenidos en la tabla.

Actividad 3

Objetivos

- Propiciar el reconocimiento de propiedades y relaciones de rectángulos y cuadrados.
- Promover la acción de *generalización* a partir de la construcción y exploración de rectángulos y cuadrados.
- Impulsar la *justificación* de conjeturas usando conocimiento teórico.

Primera Tarea

Construya un rectángulo o un cuadrado $RSTU$; construya los puntos medios de \overline{RS} , \overline{ST} , \overline{TU} y \overline{UR} y nómbrelos X , Y , Z y W , respectivamente.

Segunda Tarea

Complete la siguiente tabla:

<input type="checkbox"/> $RSTU$	Propiedades	<input type="checkbox"/> $XYZW$	Propiedades
Rectángulo			
Cuadrado			

Tercera Tarea

Escriba una conjetura sobre el cuadrilátero $XYZW$, a partir de los resultados obtenidos en la tabla.

ANÁLISIS DE TAREAS

Las tareas que se pueden plantear usando el entorno Cabri se dividen en dos categorías: problemas de producción de dibujos o problemas de demostración (Laborde, 1996). Bajo estas consideraciones, la Actividad 1 pretendía en primer lugar, familiarizar a los estudiantes con el entorno de geometría dinámica, mediante la diferenciación entre el trabajo con papel y lápiz y el trabajo realizado en el entorno Cabri; en segundo lugar, promover la visualización y la exploración desde la perspectiva de la actividad demostrativa. Las dos primeras tareas permitieron evidenciar el concepto que los estudiantes tenían de cuadrado. En la tercera, al arrastrar para verificar las propiedades observadas, los estudiantes se dieron cuenta de que algunas de las que habían asumido como válidas cambiaron, pues sólo un par de ángulos opuestos se mantenían rectos y dos lados adyacentes congruentes. Ello los obligó a observar geométricamente la figura, dando lugar a la acción de visualización. Las Tareas 1 y 4 corresponden a la producción de dibujos y las Tareas 2 y 3 a problemas de demostración.

La Actividad 2 exigía que los estudiantes visualizaran y exploraran para establecer conjeturas sobre propiedades que subyacen a la relación entre los dos cuadriláteros, y que utilizaran propiedades que conocían de ellos para justificar sus conjeturas. Corresponde, por ello, a los dos tipos de tareas propuestos por Laborde. Además, las dos primeras tareas de esta actividad dieron lugar a la visualización, es decir, a identificar propiedades y explorar por medio del arrastre, para obtener otras propiedades y relaciones entre los dos cuadriláteros, como consecuencia, a establecer conjeturas sobre lo que reconocieron en las anteriores tareas.

En el momento de la aplicación, los estudiantes no proporcionaron una justificación. Por ello se propuso la Actividad 3, en la que se enfoca el trabajo en dos cuadriláteros especiales, rectángulo y cuadrado, para brindar la oportunidad de que se realizara el proceso de justificación. La Tarea 1 es del tipo construcción de dibujos y las Tareas 2 y 3 corresponden al tipo problemas de demostración.

Luego de establecer conjeturas, los estudiantes tuvieron el espacio para justificarlas. Se evidenciaron diferentes procesos de justificación: algunos estudiantes las explicaron, basándose en la figura; otros las probaron, o sea, establecieron generalidades y las comprobaron a partir de un caso particular; y unos po-

cos las demostraron, utilizando conocimientos previos para encadenar deductivamente proposiciones y llegar a una conclusión.

CONCLUSIONES

- El uso de geometría dinámica permite la identificación de propiedades relevantes para la construcción de figuras geométricas que no se perciben cuando se hace un dibujo en el papel.
- La herramienta de arrastre da lugar a la necesidad de una justificación que no se limita al uso de la medida sino que implica el establecimiento de relaciones entre unidades figurales, con lo que se propician acciones como la visualización y la exploración.
- El tipo de tareas propuestas genera en el estudiante la necesidad de observar geométricamente las figuras, realizar construcciones haciendo uso de propiedades relevantes y necesarias, establecer conjeturas y comprobar la validez de sus afirmaciones, es decir, hacer actividad demostrativa.

REFERENCIAS

- Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano*. (Trad. Myriam Vega del original publicado en francés en 1995). Cali: Universidad del Valle.
- Laborde, C. (1996). Cabri-Geómetra o una nueva relación con la geometría. En L. Puig y J. Calderón (Eds.), *Investigación y didáctica de las matemáticas* (pp. 67-85). Madrid, España: Ministerio de Educación y Ciencia.
- MEN (2003). *Estándares básicos de competencias en matemáticas*. Bogotá, Colombia: MEN.
- Perry, P., Camargo, L., Samper, C. y Rojas, C. (2006). *Actividad demostrativa en la formación inicial del profesor de matemáticas*. Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.
- Pinzón, I. y Rodríguez, A. (2006). *Construcción de pruebas y argumentos en estudiantes de grado quinto*. Trabajo de pregrado no publicado, Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá, Colombia.
- Stylianides, A.J. (2007). Proof and proving in school mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, 38(3), 289-321.

CABRI COMO HERRAMIENTA DIDÁCTICA EN UNA INSTITUCIÓN EDUCATIVA RURAL

José Quijano

Universidad del Tolima

jqmatematicas@hotmail.com

Este documento presenta el reporte escrito de un pequeño estudio realizado con estudiantes de la Institución Educativa Rural Departamental Chimbe (Albán, Cundinamarca). Se hace una descripción de la manera como la implementación de un software de geometría dinámica, como herramienta didáctica en el aula, ayuda en la compresión de algunos conceptos matemáticos como los que se tratan al estudiar el Teorema de la suma de ángulos internos de un triángulo.

METODOLOGÍA Y ACCIONES DEL ESTUDIO

Aspecto matemático

Establecimos un marco de referencia matemático al que nos podemos remitir y en el cual nos podemos apoyar durante el avance de nuestro trabajo, cuya importancia se centra en la presentación del *Teorema de la suma de ángulos internos de un triángulo*, haciendo uso de una herramienta tecnológica (Cabri-Géomètre para PC), y para lo que es indispensable el manejo, uso y correcta interpretación de las definiciones y conceptos incluidos en el mismo.

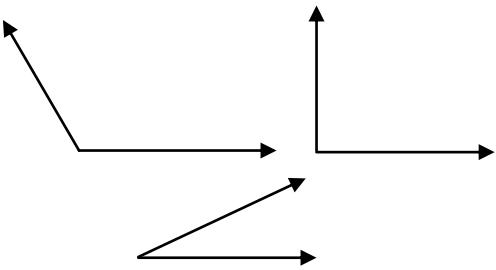
Los contenidos matemáticos involucrados en las actividades de diagnóstico e instrucción que se desarrollaron con los estudiantes fueron: definición de ángulo, medida de ángulo, suma de ángulos internos de un triángulo, relación de orden de la medida de ángulos; se buscaba precisar un poco los aspectos teóricos que tomamos como referencia para la evolución de la propuesta.

Para precisar las definiciones que tomamos como marco de referencia y en procura de una definición que se ajuste a lo que queremos desarrollar en nuestro trabajo, analizamos definiciones del mismo objeto matemático en diferentes textos de geometría (e.g., Alfonso, 1997; Moise, 1986). Encontramos que la definición de ángulo no es universal; hay libros de texto que definen ángulo como una región del plano, otros se remiten a la definición atribuida a Hilbert “corresponde a dos rayos, o semirrectas, con un origen común”, en otros casos se considera un ángulo como una rotación, lo que amplía el concepto y quita Quijano, J. (2011). Cabri como herramienta didáctica en una institución educativa rural. En P. Perry (Ed.), *Memorias del 20º Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones* (pp. 285-291). Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

algunas restricciones que implica la concepción clásica, para los efectos de adición y medición. Al ver que existen diversas definiciones para ángulo y medida de ángulo, nos interesa consultar y contrastar esas definiciones.

Luego de un análisis y teniendo en cuenta la temática que queremos introducir, suma de ángulos internos de un triángulo, se decidió tomar como referencia para el desarrollo de nuestro estudio la definición de ángulo propuesta en Moise (1986, p. 75):

“un ángulo es una figura como un de estas:



Definición:

Si dos rayos tienen el mismo origen o extremo, pero no están en la misma recta, entonces su reunión es un ángulo. Los dos rayos se llaman lados del ángulo y el extremo común se llama vértice. Si los rayos son \overrightarrow{AB} y \overrightarrow{AC} , entonces el ángulo se indica con $\angle BAC$ o con $\angle CAB$ [...]”

Las razones que nos llevaron a dicha elección son: el lenguaje con el que se presenta facilita su interpretación y en un triángulo los ángulos nunca son nulos ni llanos; en esta definición al igual que en la de Euclides se omiten los ángulos llanos al imponer la condición de que los rayos no pueden pertenecer a una misma recta, y por último la ventaja que presenta sobre otras definiciones, es el omitir implícitamente que un ángulo sea la región comprendida entre las dos semirrectas, así como lo afirma el autor, “al dibujar un triángulo no estamos dibujando sus ángulos”, lo que nos indica que un triángulo no contiene sus propios ángulos y debemos interpretar los ángulos de un triángulo como la prolongación de sus lados.

Aspecto didáctico

En este apartado se presentan los referentes teóricos para el estudio realizado alrededor de la temática suma de ángulos internos de un triángulo, contando con el software Cabri¹ como herramienta didáctica, en la que se involucran

¹ Cabri-Géomètre es un programa desarrollado por Ives Baulac, Franck Bellemain y Jean-Marie Laborde del laboratorio de estructuras discretas y de didáctica del Instituto de Informática y Matemáticas Aplicadas de Grenoble, Francia. Es un programa netamente didáctico geométrico, es decir un programa que ayuda a aprender cómo se hace geometría o mejor, a

aspectos que tienen que ver con las propiedades de verificación, representación y manipulación de elementos geométricos, brindados por el software.

CABRI COMO HERRAMIENTA MEDIADORA

Cabri cobró importancia en el estudio de la geometría por ser un sistema de representación que modela los elementos geométricos y permite la manipulación de éstos, teniendo en cuenta que las representaciones forman parte de los elementos que se van estructurando en la interacción entre el sujeto y el concepto que se está formando, esto enfocado siempre en la geometría euclíadiana (Laborde, Laborde, Moreno, Vasco y Acosta, 2003).

Siendo Cabri el programa de geometría dinámica para PC que se utilizó como herramienta mediadora, destacamos algunos aspectos importantes de éste, tales como la posibilidad de manipulación de elementos geométricos, el arrastre, la medida y la importancia que tiene el uso de representaciones geométricas que visualmente guardan propiedades perceptibles por medio de la presentación en la pantalla y las que se pueden verificar con herramientas del mismo; todo esto facilita el trabajo con los estudiantes.

TIEMPO Y ACTIVIDADES

El tiempo de duración de este estudio fue de dos semestres. En el primero se trabajó con todos los grupos de secundaria de la institución (sexto a noveno); los temas que se trabajaron son los dispuestos en el proyecto educativo institucional de la Institución. La elaboración y la aplicación de las pruebas tuvieron lugar en el segundo semestre. En este estudio se utilizó un computador por estudiante, dado que el interés era ver cómo los estudiantes argumentan respecto a la solución de un problema antes y después de la intervención hecha por los docentes haciendo uso de Cabri como herramienta mediadora.

En este estudio se trabajaron elementos y actividades encaminadas a aportar al estudiante herramientas que le facilitaran enfrentar situaciones problema y búsqueda de soluciones, haciendo uso de herramientas tecnológicas, al mismo tiempo que se tomaban ideas y apuntes que mostraran el mejor camino para dirigirlo.

estudiar las propiedades geométricas de las figuras y sus múltiples componentes para luego entender mejor la rigurosidad matemática de las demostraciones.

DEFINICIÓN DE CATEGORÍAS

Para estudiar los efectos de una intervención con el uso de Cabri, como mediador en el aula de matemáticas, se hace un análisis de la información obtenida a partir de la aplicación de pruebas, para las cuales se elaboraron un conjunto de categorías que enmarcan las respuestas dadas por los estudiantes.

Estas categorías surgieron de una prueba piloto aplicada a un grupo de estudiantes diferente del que participó en el estudio, donde se evidenciaron errores comunes cometidos por los estudiantes. Luego de discutir un gran número de categorías, las logramos comprimir en las siguientes.

Hace uso de elementos o relaciones no indicadas en la gráfica (UEN). El estudiante añade información a la presentada en la gráfica (e.g., medidas de longitud, ángulos) y hace relaciones de ser mayor, menor o igual que. De la misma forma, menciona operaciones como la suma de medidas de ángulos.

Por ejemplo, al presentarles la Figura 1 los estudiantes dicen: “Los dos triángulos son iguales porque tienen igual tamaño e iguales medidas”.

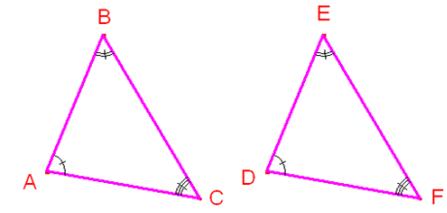


Figura 1

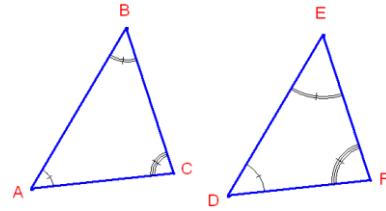


Figura 2

Centra su interpretación en lo visual (CVA). El estudiante hace su interpretación apoyado en lo que ofrece la gráfica visualmente, haciendo deducciones correctas que lo llevan a una solución acertada. Por ejemplo, dicen que la suma de los ángulos internos de los triángulos es igual porque lo único que hicieron fue agrandar las marcas de los ángulos para que se viera diferente, pero tienen las mismas medidas (Figura 2).

Argumentación basada en una visualización incorrecta (AIV). El estudiante basa su argumentación en lo que a él le parece importante para la solución y que realmente no lo encamina hacia una respuesta correcta, tales como marcas de ángulos o amplitud de los mismos, longitud de los segmentos que conforman el triángulo, tamaño de los triángulos y lo hace evidente al responder como: “yo observo...”, “se puede ver”, “la gráfica muestra”. Por ejemplo, “los triángulos se ven igual pero las medidas son diferentes”.

Respuesta correcta pero argumentación fuera de contexto (CSA). El estudiante escoge la opción de respuesta correcta pero su argumentación no tiene nada que ver con lo que se le pregunta; se puede decir que el estudiante acertó en la respuesta, no entendió la pregunta y no conoce la definición de suma de ángulos interiores de un triángulo.

Respuesta incorrecta y argumentación fuera de contexto (ISA). El estudiante escoge la opción de respuesta incorrecta y del mismo modo su argumentación no tiene nada que ver con lo que se le pregunta; se puede decir que el estudiante no entiende la pregunta o no hace una interpretación correcta de ésta.

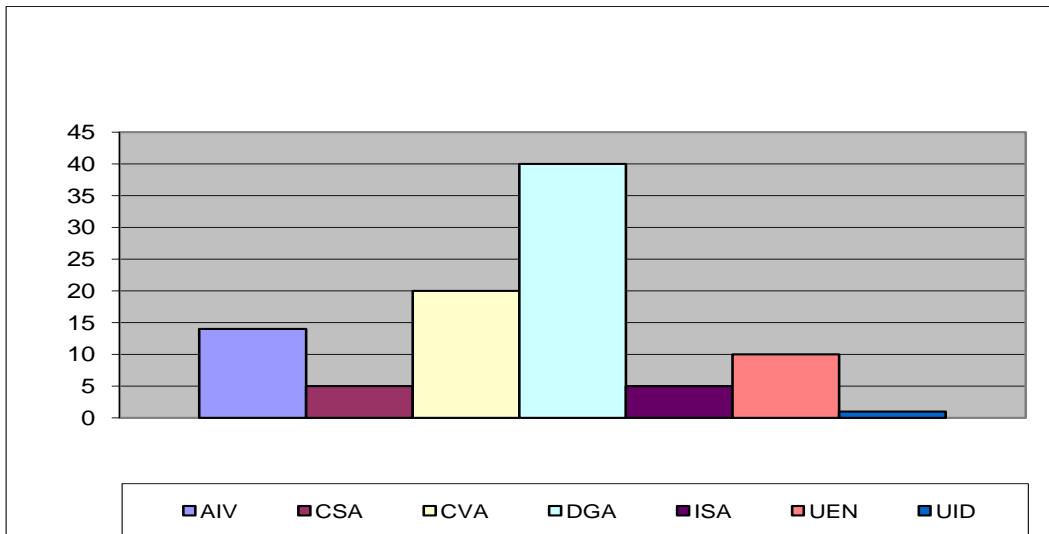
Uso inadecuado de definiciones geométricas (UID). El estudiante se apoya en definiciones o relaciones estudiadas con anterioridad, que de ninguna manera son las indicadas para argumentar lo preguntado, o se apoya en las indicadas pero las expresa de manera incorrecta.

Interpretación adecuada de una definición geométrica (DGA). El estudiante da una respuesta correcta y muestra en su argumentación conocimiento de algunas definiciones geométricas y su aplicación, tales como, definición de ángulo y suma de los ángulos internos de un triángulo. Por ejemplo, tenemos repuestas de estudiantes tales como: “Porque en todos los triángulos siempre da como me dio, 180° ”; “Porque por más que uno mueva la figura sus medidas van hacer [a ser] iguales”.

ANÁLISIS DE RESULTADOS

La gráfica resume la frecuencia y el conteo de los códigos anteriormente mencionados, que fueron obtenidos para cada una de las preguntas. Se encontró que los estudiantes después de la intervención dan mejores argumentaciones, éstas sustentadas en las conclusiones que personalmente tomaron del desarrollo de las actividades de dicha intervención; no argumentan apoyados en lo que ofrece la gráfica visualmente, sino que dan explicaciones en las que muestran seguridad y apropiación de las definiciones inmersas en la suma de ángulos interiores de un triángulo.

Resultados totales



CONCLUSIONES

En una primera presentación de la situación, los estudiantes sustentan sus respuestas dando argumentos relacionados con lo que ofrece la gráfica.

Visualmente, los estudiantes sustentan su argumentación en elementos no importantes como lo son el tamaño de las marcas de ángulo, la posición de letras con las que se designan los ángulos, y la longitud de segmentos; en otros casos, añaden información que no está presente en las gráficas, lo que los lleva a elegir una opción incorrecta y dar una explicación fuera de contexto.

A partir de la intervención didáctica en la que los estudiantes hicieron uso del software Cabri, podemos concluir que éste contribuyó para que ellos llegaran a lanzar hipótesis que los condujeron a la formulación de una conjetaura sobre la suma de los ángulos internos de un triángulo, gracias a las opciones de manipulación (arrastre), y comprobación (medidas, suma de medidas) ofrecida por el software.

El potencial ofrecido por las herramientas computacionales en cuanto a representación, modelación y animación de elementos geométricos, contribuyen a la visualización de propiedades que no son fáciles de ver con las representaciones hechas en papel y lápiz.

La elaboración de las categorías, en las que se incluyeron los estudiantes según las concepciones que tienen respecto a un objeto matemático, permitió una mejor planeación de las actividades que se debían realizar.

REFERENCIAS

- Alfonso, H. (1997). *Geometría plana y del espacio. Desde un punto de vista euclíadiano.* Bogotá, Colombia: El autor.
- Laborde, J.M., Laborde, C., Moreno, L., Vasco, C. y Acosta, M. (2003). Conversatorio. En C. Castiblanco et al. (Ed.), *Congreso Internacional: Tecnologías computacionales en el currículo de matemáticas. Memorias del Congreso Internacional* (pp. 361-369). Bogotá, Colombia: MEN.
- Moise, E. (1986). *Geometría moderna.* (Trad. Mariano García, Universidad de Puerto Rico.) Massachusetts, USA: Fondo Educativo Interamericano, Addison Wesley Iber-americana S.A.

UNA EXPERIENCIA DE AULA CON TESELADOS, ARTE Y GEOGEBRA EN EL COLEGIO CARLOS ARTURO TORRES PEÑA (SANTA ROSA DE VITERBO –BOYACÁ)

Diana Reyes y Clara Rojas

Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia

dimire55@hotmail.com, claritain@yahoo.com

El documento es producto de una investigación realizada en el marco de proyecto de grado para obtener el título de Licenciado en Matemáticas y Estadística de la Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia. El objetivo de la investigación fue incorporar el programa GeoGebra en las clases de geometría en grado 8º en la I.E. “Carlos Arturo Torres Peña” en Santa Rosa de Viterbo. Para ello se diseñó e implementó una cartilla virtual de actividades bajo el tema de teselados donde se incorpora el GeoGebra, haciendo uso de la plataforma Moodle. Se contempló el estudio de elementos básicos de geometría plana, transformaciones geométricas en el plano, y su relación con el arte, tomando como elemento motivador los diseños formados por combinaciones de figuras que permiten realizar un teselado.

INTRODUCCIÓN

Actualmente se sigue evidenciando en la escuela que los estudiantes no tienen un conocimiento amplio de la geometría, bien porque ésta se ubica dentro del plan de área de matemáticas como parte de algunos contenidos de enseñanza que a veces son difíciles de alcanzar por el tiempo o porque es más importante cubrir otros temas de matemáticas. Adicionalmente, los estudiantes conciben la geometría escolar como una materia difícil a la que se dedica poco tiempo; ellos confirman además que si se imparte, se hace al final de curso, lo que concuerda con lo que señalan Corrales et al. (2001, citado en Blanco y Barrantes, 2003, p. 16).

En la Institución donde se realiza la experiencia, lo mencionado antes no es ajeno a ella, y se suma que todos los profesores consideran que es importante el uso de la tecnología en la clase de geometría y manifiestan interés por conocer propuestas encaminadas al manejo de herramientas tecnológicas como apoyo a sus clases, aunque muy pocos hacen uso de algún software de geome-

tría como recurso didáctico en sus clases, por desconocimiento de la herramienta.

Este proyecto busca fortalecer la enseñanza de la geometría en su aplicación al arte y el uso de la tecnología. Se espera de este modo crear una nueva visión de la geometría usando software de geometría didáctica (SGD) GeoGebra como instrumento mediador en la movilización de algunos conceptos básicos de la geometría en los estudiantes de la I.E. “Carlos Arturo Torres Peña” (Figura 1). Se pretende que el estudiante descubra por sí mismo conceptos y procedimientos mediante la exploración de situaciones prácticas, la realización de construcciones, el desplazamiento de elementos, la validación y el análisis de relaciones.



Figura 1. Estudiantes de la Institución Carlos Arturo Torres Peña

REFERENTES TEÓRICOS

Con el auge de las nuevas tecnologías de la información han surgido herramientas para el trabajo con la geometría (SGD), que es importante conocer y utilizar en las clases. Un medio como GeoGebra le brinda al profesor la oportunidad de conocer más a sus estudiantes, al poder explorar acerca de sus dificultades y poder generar un ambiente de confianza en donde los estudiantes pongan en juego su creatividad sin temor a equivocarse.

Geometría dinámica

Castiblanco, Urquina, Camargo y Acosta (2004) señalan que “en particular, los programas de geometría dinámica han revolucionado la manera de hacer matemáticas y la forma de enseñarlas, proporcionando contextos de aprendizaje con nuevas y potentes posibilidades de representación” (p. xxv).

Los SGD son útiles para que el estudiante descubra por sí mismo conceptos y procedimientos mediante la exploración de situaciones prácticas. ¿De qué manera se puede implementar SGD en el aula? Estos programas posibilitan realizar construcciones, desplazar algunos elementos con el ratón para validar y analizar relaciones centradas en preguntas tales como: ¿qué varía? ¿por qué? ¿qué es lo que no varía? ¿por qué?

Por otra parte, la opción de “revisar construcción” abre la posibilidad de búsqueda de errores de construcción que afectan los resultados esperados; el programa de geometría dinámica GeoGebra cuenta con estas posibilidades que son favorables en el desarrollo del proyecto.

GeoGebra como herramienta didáctica en el aprendizaje

GeoGebra es un software libre de matemática para educación en todos sus niveles, disponible en múltiples plataformas. Reúne dinámicamente, aritmética, geometría, álgebra y cálculo en un único conjunto tan sencillo a nivel operativo como potente. Ofrece representaciones diversas de los objetos desde cada una de sus posibles perspectivas: vistas gráficas, algebraicas, estadísticas y de organización en tablas y planillas y hojas de datos dinámicamente vinculadas.

Plataforma Moodle, recurso favorable

La plataforma Moodle promueve, en su diseño, las ideas del constructivismo en pedagogía, según las cuales el conocimiento se construye en la mente del estudiante y no es transmitido, y del aprendizaje colaborativo. De acuerdo con Baños (2007), un profesor que opera desde este punto de vista crea un ambiente centrado en el estudiante que le ayuda a construir ese conocimiento con base en sus habilidades y conocimientos propios en lugar de simplemente publicar y transmitir la información que se considera que los estudiantes deben conocer.

Teselas como aplicación de la geometría al arte

La relación entre geometría y arte, presente en esta propuesta, toma como elemento motivador los diseños formados por combinaciones de figuras que permiten realizar un teselado, dibujos que encajan y sirven para hacer mosaicos, utilizados a lo largo de la historia.

Se llama *mosaico* o *teselado* a todo recubrimiento del plano mediante piezas que no pueden superponerse, ni pueden dejar huecos sin recubrir y en el que

los ángulos que concurren en un vértice deben sumar 360 grados. Existen muchas formas de obtener un teselado. Las más sencillas están formadas por un único tipo de polígono regular, como el triángulo equilátero, el cuadrilátero y el hexágono regular.

Los teselados se crean usando transformaciones isométricas sobre una figura inicial; éstas son transformaciones de figuras en el plano, que se realizan sin variar las dimensiones ni el área de las mismas; la figura inicial y la final son semejantes, y geométricamente congruentes. La palabra isometría tiene su origen en el griego *iso* (igual o mismo) y *metria* (medir); una definición cercana es *igual medida*. Existen tres tipos de isometrías: traslación, simetría y rotación.

En el arte, el cubrimiento con figuras geométricas regulares e irregulares alcanza una combinación de formas, colores y líneas que dan alguna calidad y armonía estática. La decoración es otra área donde el teselado tiene espacio de aplicación. La relación entre geometría y arte, presente en esta propuesta, toma como elemento motivador los diseños formados por combinaciones de figuras que permiten realizar un teselado, dibujos que encajan y sirven para hacer mosaicos, utilizados a lo largo de la historia. Como es el caso del artista gráfico holandés Maurits Cornelius Escher (1898-1972) quien utilizó en sus obras simetrías, traslaciones y giros. Son muy conocidas sus obras en las que aplicando estas transformaciones a determinadas figuras conseguía llenar el plano.

METODOLOGÍA

La propuesta se enmarca en el enfoque cualitativo; se implementa la metodología de investigación acción. Se plantearon los siguientes objetivos:

1. Identificar fortalezas y debilidades en el aula de clase, alrededor de los conceptos, propiedades y destrezas de construcciones geométricas, para caracterizar a los estudiantes.
2. Seleccionar, adaptar y crear actividades de aprendizaje donde el estudiante interactúe con el software geométrico y sea autor de su propio aprendizaje y así genere un conocimiento geométrico útil.
3. Implementar la plataforma Moodle, que posibilita la “interacción”, creando un aula virtual que permite el trabajo del estudiante.

4. Sistematizar los resultados obtenidos, y dar elementos para nuevas experiencias.

Plan del diseño de actividades

La propuesta se desarrolló en dos etapas:

Primera etapa: Diagnosticar la situación en la Institución Educativa; se realizó una encuesta a docentes de matemática buscando información relacionada con las clases de geometría con el fin de implementar o mejorar la estrategia de enseñanza de la geometría y observar si era viable utilizar como recurso didáctico un software de geometría dinámica.

Se estructura una fase piloto con el fin de validar el diseño general de actividades, enunciados e instrucciones, duración de las sesiones de clase, desempeño del docente, plan general del diseño de actividades (estándar curricular, recursos, objetivos, y conceptos geométricos involucrados). Por otra parte, también se pretendía determinar elementos a nivel logístico para la elaboración de la cartilla virtual, además de conocer la aplicación efectiva de las secuencia de actividades mediante GeoGebra y la exploración y uso de la plataforma Moodle.

Segunda etapa: Estructurar una cartilla¹ con las siguientes actividades haciendo uso del GeoGebra por medio de la plataforma Moodle.

1. Preconceptos geométricos
2. Primeros pasos con GeoGebra
3. Construcciones geométricas con GeoGebra
4. Estudio de ángulos
5. Transformaciones geométricas
6. Teselados, lápiz y papel
7. Tesela el plano usando transformaciones

¹ Puede acceder a la cartilla a través del sitio web: <http://geodinamica.mdl.gnomio.com>, ingresando como usuario: visitante con contraseña: 123456Gd.

Para el desarrollo y aplicación de las actividades se tuvo en cuenta que la sala de cómputo contara con acceso a internet Explorer, se instaló el GeoGebra; el único requerimiento para su funcionamiento es que el equipo de cómputo tenga instalado JAVA.

Las actividades se diseñaron con reflexiones desde la didáctica de la geometría, involucrando un lenguaje sencillo y agradable, con diseños coloridos y llamativos para que el estudiante se motive y disfrute de un trabajo agradable en la sala de cómputo con las clases de geometría (Figura 2).



Figura 2. Algunas actividades diseñadas en Moodle y GeoGebra

CONCLUSIONES

El proyecto se convirtió en un punto de partida para la dinamización y el desarrollo autónomo del trabajo del profesor y del estudiante de la Institución. En particular, incentivó hacia nuevas y diversas formas de construcción del pensamiento matemático.

Permitió también al estudiante en formación para profesor como a los profesores de la Institución, reconocer que la implementación de este tipo de actividades con geometría dinámica, va mas allá del manejo de herramientas infor-

máticas, puesto que se reflexionó en torno a algunos aspectos de la enseñanza de la geometría en cuanto a la actuación del docente en el aula y las características del conocimiento que construye el estudiante. Es decir, la incorporación de materiales tecnológicos en la enseñanza lleva a un replanteo del acto de cómo enseñar, pues no es tarea sencilla ya que exige una modificación en la actitud del docente quien deberá transformarse en observador y orientador en el sentido de acompañar e incentivar a los estudiantes en el descubrimiento de conceptos, en todo el proceso de construcción del conocimiento.

No obstante, es necesario llevar a cabo una investigación más exhaustiva para entender mejor el proceso de apropiación del software y analizar las técnicas utilizadas por el SGD, como forma de mejorar las habilidades argumentativas de los estudiantes de grado octavo y en general de secundaria. Aún existen dificultades en el desarrollo de este tipo de propuestas; en el caso que nos ocupa, no todos los niños cuentan con un computador personal con acceso a internet en su casa, no todas las instituciones educativas cuentan con los recursos informáticos necesarios y suficientes y la orientación suficiente para realizar actividades que involucren el uso de un software en términos de potenciar ambientes favorables para generar aprendizajes.

Este proyecto investigativo se constituye como producto de trabajo y entrega profesional detrás de lo cual hay un gran deseo de que la geometría ocupe un lugar importante en la enseñanza, no sólo como recurso de aprendizaje en el nivel de la educación secundaria básica y media, sino como tema de reflexión de los estudiantes en formación para profesores de matemáticas. La propuesta complementó la enseñanza de la geometría con lápiz y papel, como una alternativa para restablecer el estudio de los sistemas geométricos como herramientas de exploración y representación del espacio.

Uno de los resultados al utilizar plataformas que implican el trabajo autónomo y fuera del aula de clase se evidencia en que los estudiantes utilizan correctamente las herramientas geométricas y de medida, y consideran que GeoGebra les ayuda a visualizar situaciones geométricas que no hubiesen encontrado fácilmente al trabajar en papel y lápiz también a evitar obstáculos en la descripción y registro de sus actividades.

En cuanto a la incorporación del SGD, se crea un nuevo ambiente de aprendizaje en el aula de clase ya que se diseñan actividades que promueven en el estudiante desarrollo de procesos cognitivos que favorecen el aprendizaje de la

geometría, tales como: visualizar, explorar, medir, comparar, clasificar, analizar y explicar. También se ayuda a mejorar actitudes hacia el trabajo geométrico. De otro lado, propicia el trabajo autónomo y colaborativo, ya que el estudiante puede manipular e interactuar con los objetos matemáticos contribuyendo en la búsqueda de comprensión de los contenidos geométricos involucrados, mediante la exploración y manejo del GeoGebra.

Por último, se considera que abordar la geometría involucrando el estudio y puesta en práctica de las transformaciones geométricas en el plano a través del arte es interesante porque, además de estructurar el pensamiento espacial y los sistemas geométricos, permite rescatar la identidad artística, admirar, valorar y creer en lo significativo de su legado, ya que estudiar matemáticas a través del arte, puede ser un contexto nuevo y motivador tanto para el docente como para el estudiante.

REFERENCIAS

- Baños, J. (2007). *Moodle versión 1.8 - Manual de consulta para el profesorado*. Madrid, España: IES Satafi (Getafe). Disponible en:
<http://es.scribd.com/doc/3086874/Moodle18-Manual-Prof>
- Blanco, L.J. y Barrantes, M. (2003). Concepciones de los estudiantes para maestro en España sobre la geometría escolar y su enseñanza – aprendizaje. *RELIME*, 6(2), 107-132.
- Castiblanco, C., Urquina, H., Camargo, L. y Acosta, M.E. (2004). *Pensamiento geométrico y tecnologías computacionales*. Bogotá, Colombia: Ministerio de Educación Nacional.

GEOGEBRA COMO HERRAMIENTA QUE FACILITA LA COMPRENSIÓN Y LA GENERALIZACIÓN DEL TEOREMA DE PITÁGORAS

Eridson Rodríguez

LICEO V.A.L. (*Vida, Amor, Luz*)

cienciasbasicas.val@gmail.com

El impacto de la tecnología en la vida cotidiana hoy es indiscutible, el acceso a la información desde múltiples dispositivos móviles, contar con medios permanentes y eficaces de comunicación oral, escrita y visual, almacenar gran cantidad de datos y archivos en espacios muy pequeños, son ejemplos que corroboran lo afirmado. La tecnología ha puesto a disposición de la educación algunos softwares que apoyan la adquisición y la comprensión del conocimiento en diferentes áreas. Uno de éstos es GeoGebra, programa de geometría dinámica que se ha usado en el presente estudio como herramienta para comprender y demostrar la interpretación geométrica del Teorema de Pitágoras y a partir de éste, explorar los procesos de generalización.

INTRODUCCIÓN

La idea de llevar a cabo la presente propuesta surge con el propósito de emplear una herramienta tecnológica, que facilite la comprensión de una temática común en el currículo para el área de matemáticas. La herramienta permite agilizar el quehacer matemático como centro de la actividad, donde también se busca que los integrantes empiecen a adquirir conocimientos y hábitos en el campo investigativo, y ¿qué mejor que hacerlo al interior de un club de matemáticas o semillero matemático?

En principio, el semillero de matemáticas de la Institución se creó para profundizar en algunas temáticas propias del área, explorar actividades complementarias y fortalecer el gusto por las matemáticas. Este año, un objetivo primordial que persigue dicho semillero es socializar los resultados obtenidos mediante la exploración de la interpretación geométrica del Teorema de Pitágoras, utilizando los cuadrados construidos sobre los lados de un triángulo rectángulo, y posteriormente emplear otras figuras geométricas regulares, para observar los procesos de generalización en los integrantes del semillero.

El software utilizado en la propuesta contribuye en las clases de geometría para los grados de bachillerato de la Institución, a la implementación de la meto-

Rodríguez, E. (2011). GeoGebra como herramienta que facilita la comprensión y la generalización del Teorema de Pitágoras. En P. Perry (Ed.), *Memorias del 20º Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones* (pp. 301-306). Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

dología de autoaprendizaje que propone el colegio, según la cual el estudiante es el actor principal en su proceso de enseñanza aprendizaje.

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

La innovación respecto al proceso de enseñanza aprendizaje es una razón por la cual se han integrado las tecnologías de la información y comunicación (TIC) al la vida académica de los estudiantes y profesores. Además, la motivación que despierta la visualización de procesos, el uso de la tecnología (que hoy en día es tan cercana a los jóvenes), la agilidad en la construcción de figuras, la facilidad en la modificación de algunas de sus características –sin que ello altere las propiedades generales que tienen las figuras una vez construidas– sin la dependencia de los instrumentos convencionales de geometría (que para algunos estudiantes su uso es complejo retrasando así su avance), entre otros, son motivos por los cuales se ha implementado el software de geometría dinámica GeoGebra como facilitador y herramienta tecnológica teniendo en cuenta que el uso de las TIC no involucra sólo aprendizajes en el aula, como lo evidencia el documento Educación: Visión 2019 del MEN:

No cabe duda de que saber manejar computadores es una competencia esencial en el mundo de hoy, pero mucho más importante es saber utilizarlos con sentido: para aprender, para solucionar problemas, para mejorar la productividad del trabajo. Las TIC no sólo ponen al alcance de docentes y estudiantes grandes volúmenes de información, sino que promueven el desarrollo de destrezas y habilidades esenciales como son la búsqueda, selección y procesamiento de información, así como la capacidad para el aprendizaje autónomo. También amplían las fronteras del aprendizaje al poner a disposición nuevos recursos así como la forma para aprender con otros, incluyendo comunidades remotas. (Peña, 2006, p. 49)

Se ha observado que la incorporación del software GeoGebra en la materia de geometría al interior de la Institución, ha posibilitado la comprobación y descubrimiento de algunas propiedades de las figuras geométricas que en algunas ocasiones habían sido únicamente aprendidas del texto sin ningún tipo de reparo, o que para llegar a ellas el común de los estudiantes demora en el proceso de representar la figura o construcción y en la medida de las variables involucradas cuando así se requiere. Por otra parte, si se tiene en cuenta que algunos estudiantes presentan dificultad en el empleo de los instrumentos propios de la geometría como lo son el compás, las escuadras y el transportador, el uso de esta herramienta es un elemento auxiliar de vital importancia.

Normalmente el Teorema de Pitágoras es asimilado por gran parte de la comunidad de estudiantes como la forma, o la ecuación para determinar uno de los lados de un triángulo rectángulo, olvidando el concepto referente a la suma de cuadrados y su comprensión desde el punto de vista geométrica.

El estudio de esta propuesta ayudará a comprender la interpretación geométrica del Teorema de Pitágoras haciendo modificaciones de longitud y tamaño del triángulo rectángulo pero observando que la suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre los catetos es igual al área del cuadrado construido sobre la hipotenusa; además se mostrará al estudiante una alternativa adicional con polígonos regulares iguales y se invitará a que explore otras figuras para que establezca una generalización.

OBJETIVOS

Objetivo general

- Observar el uso del software GeoGebra como herramienta facilitadora en la interpretación geométrica del Teorema de Pitágoras y su generalización.

Objetivos específicos

- Explorar las propiedades del triángulo rectángulo.
- Observar las habilidades y dificultades presentadas por los integrantes al construir polígonos regulares y al determinar su área.
- Identificar el concepto que tienen los integrantes del semillero acerca del Teorema de Pitágoras y sus aplicaciones.
- Dar a conocer y explorar el software de GeoGebra a los integrantes del semillero que no lo manejan.
- Utilizar el software para explorar características de figuras geométricas.
- Comprobar el teorema y propender por la generalización utilizando el software.

- Fomentar la reflexión acerca del uso del software con los integrantes del semillero.

MARCO DE REFERENCIA CONCEPTUAL

Temario

- Elementos básicos de la geometría.
- Triángulo rectángulo: construcción, propiedades.
- Polígonos regulares: construcción, determinación del área.
- Teorema de Pitágoras: conceptos, aplicaciones.
- Tecnologías de la Información y la Comunicación.
- Software Geogebra.

METODOLOGÍA

Población

Estudiantes que hacen parte del semillero matemático del Liceo V.A.L.

Material

Instrumentos convencionales de geometría, tablero inteligente, computadores, software GeoGebra,

Toma de datos

Grabaciones de voz, videos, fotografías, encuestas.

Fase inicial

Se observan los conceptos que tienen los integrantes acerca de los elementos de la geometría, las figuras planas y su construcción, se proponen actividades a desarrollar y consultas, se hace retroalimentación.

Fase intermedia

Se explora la construcción de polígonos regulares con implementos convencionales y se hacen los correspondientes cálculos de área. Se indaga por el concepto del Teorema de Pitágoras y sus aplicaciones, se hace la realimentación.

Fase final

Se explora el software de GeoGebra haciendo figuras, comprobando las propiedades de éstas y verificando lo que sucede al variar algunas características de las figuras. Se hace la demostración geométrica del Teorema de Pitágoras y se explora con otras figuras para establecer la generalización. Finalmente se socializa el uso del software.

Tiempo

Se trabaja una sesión semanal de dos horas. Cada fase se desarrolla en un mes.

RESULTADOS ESPERADOS

Es importante aclarar que la propuesta está en plena ejecución, y que por lo tanto no hay resultados ni conclusiones finalmente establecidas, sin embargo para la fecha programada para la presentación este estudio ya habrá culminado.

Los resultados esperados en los integrantes del semillero de matemáticas son los siguientes:

- Que reflexionen sobre la importancia de la utilización de la tecnología como herramienta facilitadora para el aprendizaje de la geometría.
- Que logren una motivación adicional.
- Que comprendan la interpretación geométrica del Teorema de Pitágoras.
- Que lleven a cabo procesos de generalización.
- Que se aumente el espíritu investigativo.

CONCLUSIONES

- Se incorpora la tecnología al interior del aula demostrando que las instituciones deben estar dispuestas a interactuar con esta herramienta para fomentar el aprendizaje.
- La utilización de un programa de geometría dinámica permite estimular la creatividad de los estudiantes y minimiza la oposición existente a la manipulación consecutiva de implementos propios de la geometría, en la construcción manual de los objetos.
- Posibilita de manera particular ir al ritmo de los estudiantes, ya sea con necesidades educativas especiales (habilidades excepcionales o déficit cognitivo) y estudiantes típicos, ya que encuentran un soporte para entender mejor los conceptos a partir de las construcciones realizadas.
- Siendo la geometría una disciplina que requiere de la observación y medición reiterativa, tener y saber manipular un programa de geometría dinámica, permite agilizar los procesos que llevan a la comprobación y conocimiento de teoremas, leyes y regularidades.
- Exige enseñar a pensar ya que se debe atender en todo momento este importante objetivo que tiene la enseñanza de las matemáticas y de las ciencias, más allá de los procesos mecánicos y de los algoritmos repetitivos.

REFERENCIAS

- Cortez, C. *Desarrollo de actividades matemáticas de enseñanza media con GeoGebra*. Recuperado el 21 de febrero de 2011, de <http://departamento.pucp.edu.pe/ciencias/matematicas/irem/Coloquio-internacional/Talleres/Taller%20geogebra-%20Carlos%20Cortez.pdf>.
- Martín, A. y Martín, M. (2009). *Iniciación a la geometría con alumnado con necesidades educativas especiales*. Ponencia presentada en XIV Jornadas para el Aprendizaje y la Enseñanza de las Matemáticas (JAEM), 1 al 4 de julio, Girona, España. Recuperado el 25 de febrero de 2011, de http://www.aulacasio.com/ficheros/noticias/pdf_35.pdf
- Peña, M. (2006). *Educación: Visión 2019*. Bogotá, Colombia: Ministerio de Educación Nacional.

CONSTRUCCIONES DE POLÍGONOS REGULARES CON REGLA Y COMPÁS CON LA ASISTENCIA DEL GEOGEBRA

Antonio Sángari y Clara Pérez

Universidad Nacional de Salta, Argentina

asangari2000@gmail.com, pame-pe-05@hotmail.com

Nos proponemos estudiar las construcciones de polígonos regulares con regla y compás con la asistencia del GeoGebra, y presentar una secuencia de acciones que pueden resultar de base para enseñar estos conceptos. Para un mejor aprovechamiento de este trabajo, los lectores deberían tener nociones de geometría, particularmente estar familiarizados con los problemas de construcciones con regla y compás. También es recomendable tener conocimientos de estructuras algebraicas, especialmente de extensiones de cuerpos. Por estos motivos está dirigido a docentes de educación terciaria y a estudiantes que tengan los conocimientos mencionados anteriormente.

EL PROBLEMA

Las construcciones con regla y compás siempre han llamado la atención de los matemáticos y de los profesores de matemática, surgiendo de esta manera múltiples interrogantes y resultados interesantes.

En cuanto a lo que en esta ponencia nos proponemos, partamos de la pregunta: ¿Será siempre posible construir un polígono regular (con regla y compás)? Y en los casos que fuera posible, ¿cómo se construyen? Sabemos que la respuesta a la primera pregunta es no, y que los únicos polígonos regulares construibles son aquellos cuya descomposición en factores primos del número de lados es un producto de primos de Fermat por potencias de dos. Además, los primos de Fermat que aparecen, lo hacen solamente a la primera potencia. La justificación de estos hechos requiere un poco de esfuerzo y algún conocimiento de álgebra que no desarrollaremos en esta ponencia.

Responderemos la segunda pregunta con algún detalle. La construcción de triángulos equiláteros, incluso de pentágonos regulares, se encuentra con alguna frecuencia en textos básicos de geometría, pero no es tan común la construcción, por ejemplo, del heptadecágono regular.

Sángari, A. y Pérez, C. (2011). Construcciones de polígonos regulares con regla y compás con la asistencia del GeoGebra. En P. Perry (Ed.), *Memorias del 20º Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones* (pp. 307-314). Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

Pero además de justificar algebraicamente las construcciones, para lo cual nos valimos de Hungerford (1974), estamos interesados en realizarlas con asistencia del software libre GeoGebra. Esta decisión se fundamenta en la agilidad y eficiencia del software en contraposición a los elementos de uso tradicional en geometría (regla y compás).

RESOLUCIÓN DEL PROBLEMA

Convenios y notaciones

A lo largo de este documento usaremos los siguientes convenios: a la recta OU le llamaremos abscisa, a la semirrecta OU lado derecho o positivo; el punto O diremos que tiene abscisa 0 y que es el origen y, al punto U le asignamos la abscisa 1.

Si a un punto cualquiera lo designamos con una letra mayúscula de imprenta, a la longitud del segmento determinado por este punto y el origen lo designamos con una letra minúscula de imprenta, por ejemplo a la longitud del segmento OC lo designamos por c .

Si es posible construir las raíces complejas de la ecuación: $x^n - 1 = 0$ para algún n determinado, podremos construir los vértices de un n -gono regular de radio unitario. Si n cumple con las condiciones de constructibilidad enunciadas más arriba, el problema se reduce a encontrar la primera raíz compleja de la ecuación $x^n - 1 = 0$. Más concretamente, si encontramos la parte real de dicha raíz, trazando una perpendicular al eje real por ese punto habremos encontrado la raíz buscada.

Nos centramos primeramente en los casos en que n es un primo de Fermat $2^{2^m} + 1$ con $m \in \mathbb{N}$.

La ecuación $x^n - 1 = 0$ factorizada resulta: $(x - 1)(x^{n-1} + \dots + x + 1) = 0$

Ahora bien, llamemos $P_{n-1} = x^{n-1} + \dots + x + 1$. Si encontramos la primera raíz de P_{n-1} , habremos resuelto el problema. Hallar las raíces de P_{n-1} consistirá en resolver ecuaciones cuadráticas, tantas como sean necesarias. Detallaremos en la exposición de los métodos utilizados para construir los distintos polígonos el por qué de esta consideración.

En la sección Apéndice, explicamos el método utilizado para construir la raíz cuadrada de un número y las raíces de una ecuación cuadrática.

Construcción del triángulo equilátero

En este caso: $P_2 = x^2 + x + 1$ y sus raíces son: $\zeta_1 = -1/2 + \sqrt{3}/2i$
 $\zeta_2 = -1/2 - \sqrt{3}/2i$.

Construyendo el punto de abscisa $-1/2$ y la perpendicular al eje real por ese punto, tendremos construidas las raíces intersecando dicha recta con la circunferencia de radio unidad centrada en el origen.

Construcción algebraica del pentágono regular

En este caso: $P_4 = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$. Sean $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4$ las raíces de este polinomio. Debemos recordar que las mismas son complejas conjugadas de a pares.

Llamemos:

$$\lambda_1 = \zeta_1 + \zeta_4 = 2\operatorname{Re}(\zeta_1) \quad \lambda_2 = \zeta_2 + \zeta_3 = 2\operatorname{Re}(\zeta_2)$$

y observando que

$$\zeta_1 \zeta_4 = 1 \quad \zeta_2 \zeta_3 = 1$$

obtenemos que, ζ_1 y ζ_2 , por propiedades de las raíces de ecuaciones cuadráticas, son raíces de $x^2 - \lambda_1 x + 1 = 0$ (3), y ζ_3 y ζ_4 son las raíces de $x^2 - \lambda_2 x + 1 = 0$ (4).

Las raíces de las ecuaciones (3) y (4) respectivamente son:

$$x_{1,2} = \frac{\lambda_i}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\lambda_i}{2}\right)^2 - 1} \quad i = 1, 2$$

Por otro lado notemos que:

$$\lambda_1 + \lambda_2 = -1, \text{ pues } \lambda_1 + \lambda_2 = \zeta_1 + \zeta_4 + \zeta_2 + \zeta_3 = \zeta_1 + \zeta_1^4 + \zeta_1^2 + \zeta_1^3 = -1$$

Y además que:

$$\lambda_1 \lambda_2 = -1, \text{ pues } \lambda_1 \lambda_2 = (\zeta_1 + \zeta_4)(\zeta_2 + \zeta_3) = \zeta_1 + \zeta_1^4 + \zeta_1^2 + \zeta_1^3 = -1$$

Por lo tanto, λ_1 y λ_2 son las raíces de la ecuación $x^2 + x - 1 = 0$.

Así:

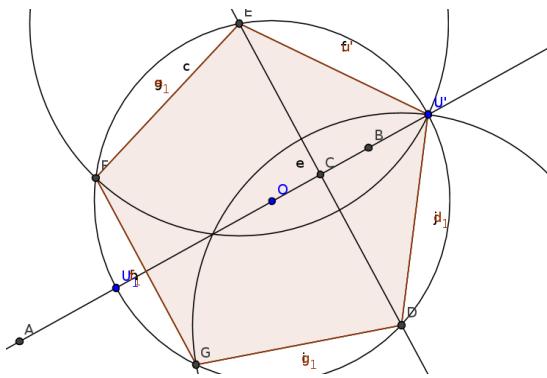
$$\lambda_1 = -\frac{1}{2} + \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1} \quad \lambda_2 = -\frac{1}{2} - \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1}$$

Construyendo $\lambda_1/2$, teniendo en cuenta que $\lambda_1/2 = \operatorname{Re}(\zeta_1)$, trazamos la perpendicular por ese punto a la recta OU , de tal manera que las intersecciones con la circunferencia de radio unidad centrada en O , nos proporcionan las raíces ζ_1 y ζ_4 .

El pentágono quedará finalmente construido trazando dos circunferencias con centro en ζ_1 y ζ_4 respectivamente y que pasen por el punto U . Las intersecciones con la circunferencia centrada en el punto O de radio unidad nos proporcionan las raíces faltantes, ζ_2 y ζ_3 .

Construcción geométrica del pentágono regular

Contando con la herramienta para la resolución geométrica de la ecuación $x^2 + x - 1 = 0$, que es la primera que aparece en la construcción del pentágono regular tenemos que los datos de entrada son O , U , $-U$ y U para la segunda herramienta, o sea la que tiene un signo $+$ en el argumento de la raíz. Con la aplicación de esta herramienta, obtenemos los puntos A y B que tienen respectivamente abscisas λ_2 y λ_1 . Los puntos de intersección de la circunferencia unitaria con la mediatrix del segmento OB , son dos vértices del pentágono regular. Los otros vértices se obtienen fácilmente usando el compás.



Construcción del heptadecágono regular

En este caso $P_{16} = x^{16} + \dots + x + 1$. Sean $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_{15}, \zeta_{16}$ las raíces de este polinomio, las cuales son complejas conjugadas de a pares, en este caso, ζ_1 y ζ_{16} son conjugadas, también ζ_2 y ζ_{15} ; ζ_3 y ζ_{14} ; ζ_4 y ζ_{13} ; ..., etc.

Llamemos: $\lambda_1 = \zeta_1 + \zeta_{16} = 2\operatorname{Re}(\zeta_1)$; $\lambda_2 = \zeta_2 + \zeta_{15}$; $\lambda_3 = \zeta_3 + \zeta_{14}$; $\lambda_4 = \zeta_4 + \zeta_{13}$;

$$\lambda_5 = \zeta_5 + \zeta_{12}; \quad \lambda_6 = \zeta_6 + \zeta_{11}; \quad \lambda_7 = \zeta_7 + \zeta_{10}; \quad \lambda_8 = \zeta_8 + \zeta_9$$

y teniendo en cuenta que $\zeta_1\zeta_{16} = 1$; $\zeta_2\zeta_{15} = 1$; $\zeta_3\zeta_{14} = 1$; $\zeta_4\zeta_{13} = 1$; $\zeta_5\zeta_{12} = 1$; $\zeta_6\zeta_{11} = 1$; $\zeta_7\zeta_{10} = 1$; $\zeta_8\zeta_9 = 1$, deducimos que: ζ_1 y ζ_{16} son raíces de la ecuación $x^2 - \lambda_1 x + 1 = 0$

y además:

ζ_i y ζ_j son raíces de $x^2 - \lambda_i x + 1 = 0$ con $i + j = 17$ y $1 \leq i \leq 8$

Ahora hagamos:

$$\xi_1 = \lambda_1 + \lambda_4; \quad \xi_2 = \lambda_2 + \lambda_8; \quad \xi_3 = \lambda_3 + \lambda_5; \quad \xi_4 = \lambda_6 + \lambda_7$$

Y calculando los productos obtenemos que:

$$\lambda_1\lambda_4 = \xi_3; \quad \lambda_2\lambda_8 = \xi_4; \quad \lambda_3\lambda_5 = \xi_2; \quad \lambda_6\lambda_7 = \xi_1$$

Con lo que deducimos, por ejemplo que:

λ_1 y λ_4 son raíces de la ecuación $x^2 - \xi_1 x + \xi_3 = 0$.

Seguidamente, llamamos:

$$\eta_1 = \xi_1 + \xi_2 = \lambda_1 + \lambda_4 + \lambda_2 + \lambda_8; \quad \eta_2 = \xi_3 + \xi_4 = \lambda_3 + \lambda_5 + \lambda_6 + \lambda_7$$

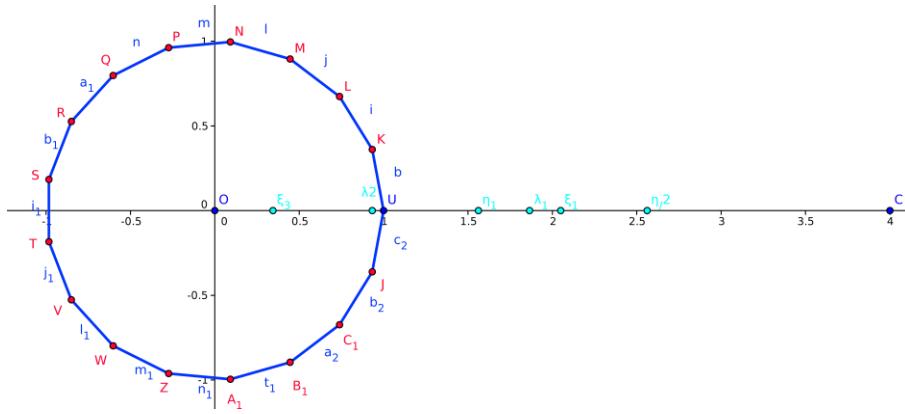
Teniendo en cuenta que $\eta_1 + \eta_2 = -1$ y $\eta_1\eta_2 = -4$ inferimos que η_1 y η_2 son raíces de la ecuación: $x^2 + x - 4 = 0$.

Además se comprueba que ξ_1 y ξ_2 son raíces de $x^2 - \eta_1 x - 1 = 0$ y que ξ_3 y ξ_4 son raíces de $x^2 - \eta_2 x - 1 = 0$.

Por lo tanto $\eta_1 \approx 1,5615528128088\dots$ y $\eta_2 \approx -2,5615528128088\dots$. Estos datos nos permiten ascender gradualmente hasta construir ζ_1 .

Tal como fueron calculados η_1 y η_2 , se calcula λ_1 que resulta ser $\lambda_1 \approx 1,8649657832962\dots$ y recordando que $\lambda_1 = \zeta_1 + \zeta_{16} = 2\operatorname{Re}(\zeta_1)$, es decir, $\lambda_1/2 = \operatorname{Re}(\zeta_1)$, trazando por ese punto la perpendicular a la recta OU , obtene-

mos ζ_1 y su conjugada sin más que marcar las intersecciones con la circunferencia con centro en el punto O y radio unidad.



APÉNDICE

Creación de una herramienta para encontrar gráficamente una raíz cuadrada con GeoGebra

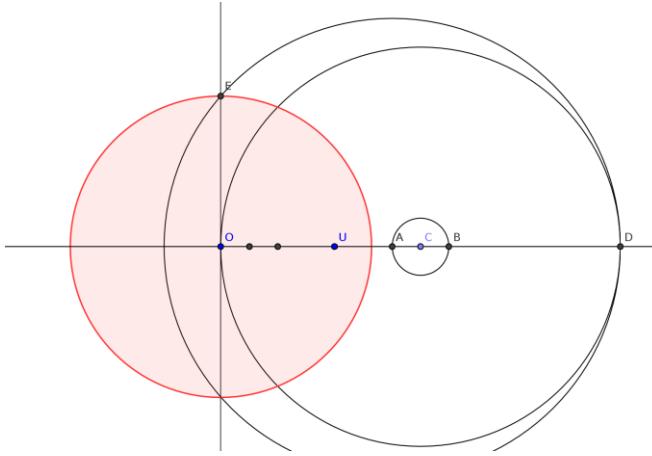
Una característica muy útil que tiene el programa GeoGebra es la capacidad de permitir la creación de una macro o una herramienta. En este caso necesitamos una herramienta que nos proporcione, dados tres puntos O , U y C , con C en la semirrecta \overrightarrow{OU} (al sentido inducido por esta semirrecta le llamaremos “positivo” o “derecho” y al otro sentido “negativo” o “izquierdo”); una circunferencia centrada en O y con radio de longitud raíz de OC , considerando al segmento OU de longitud unitaria.

Primeramente, necesitamos construir una circunferencia centrada en C y de radio un segmento de longitud $1/4$. Llamemos a esta circunferencia γ .

Como es muy sencilla la construcción del punto medio de un segmento, omitimos la construcción con regla y con compás y la haremos usando una herramienta predefinida del GeoGebra. También usaremos el compás como un transportador de segmentos. En el Apéndice mostraremos cómo transportar segmentos usando un compás antiguo solamente.

Llamemos A y B a los puntos de intersección de la recta OU con γ , en los lados izquierdo y derecho de C , respectivamente. Sea D la otra intersección de la circunferencia de centro C y que pasa por O . Sea E una de las intersecciones de la circunferencia de centro A y que pasa por D , con la perpendicular

lar a OU por O . Notemos que el triángulo rectángulo AOE tiene un cateto de longitud $OC - 1/4$ y la hipotenusa de longitud $OC + 1/4$. Por esto la circunferencia de centro en O y que pasa por D es la circunferencia buscada.



Creación de una herramienta para resolver gráficamente una ecuación cuadrática con GeoGebra

En este caso necesitamos dos herramientas. Una herramienta que nos proporcione, dados cuatro puntos O , U , B y C , con C en la semirrecta \overrightarrow{OU} ; una circunferencia centrada en el punto medio del segmento OB y con radio de longitud:

$$\sqrt{(b/2)^2 + (\sqrt{c})^2} \quad (3)$$

y otra herramienta que construya otra circunferencia con el mismo centro que la anterior pero con radio de longitud:

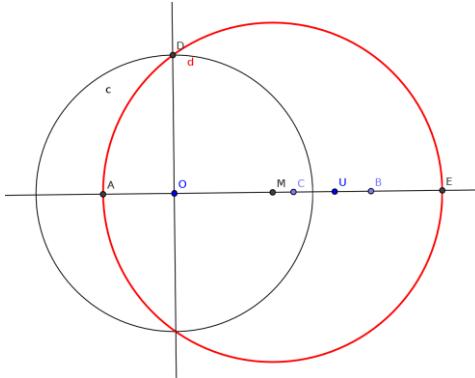
$$\sqrt{(b/2)^2 - (\sqrt{c})^2} \quad (4)$$

Nótese que (3) es la longitud de la hipotenusa de un triángulo rectángulo de catetos $b/2$ y \sqrt{c} y (4) es la longitud de un cateto de un triángulo rectángulo de hipotenusa $b/2$ y cateto \sqrt{c} .

Como ya contamos con una herramienta que construye una circunferencia de radio \sqrt{c} centrada en el origen, si trazamos la perpendicular a la abscisa por el origen y tomamos un punto D en la intersección de esta recta con esta circunferencia, habremos determinado el triángulo rectángulo EOM , con M el punto medio del segmento OB . El segmento ME tiene longitud (3). La circunferen-

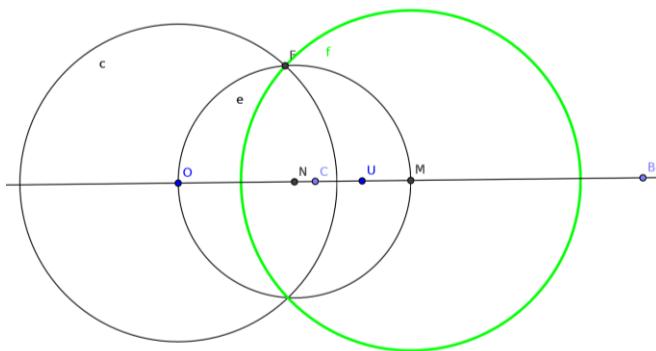
cia con centro en M y que pasa por E es la buscada. Observemos que las intersecciones de esta circunferencia con la abscisa tienen por abscisa:

$$\frac{-b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + (\sqrt{c})^2}$$



Para la segunda herramienta, a diferencia del procedimiento utilizado anteriormente, en lugar de trazar la perpendicular desde O se traza una circunferencia de diámetro el segmento OM y centro el punto medio de dicho segmento. Sea F una de las intersecciones de la circunferencia de radio \sqrt{c} con la circunferencia que tiene por diámetro al segmento OM . El segmento MF tiene longitud (4). Por lo tanto las abscisas de los puntos de intersección de una circunferencia con centro en M y que pase por F serán:

$$\frac{-b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - (\sqrt{c})^2}$$



REFERENCIAS

Ivorra, C. (2009). *Geometría*. Recuperado de:
<http://www.uv.es/ivorra/Libros/Geometria.pdf>.

Hungerford, T.W. (1974). *Algebra*. Nueva York, USA: Springer.

¿SE MODIFICAN LOS ARGUMENTOS DE LOS ESTUDIANTES CUANDO SE PRIORIZA LO TEÓRICO SOBRE LO EMPÍRICO?

Claudia Vargas¹, Leidy Cepeda¹ y Carmen Samper²

Universidad Pedagógica Nacional

claudiavargas90@gmail.com, marcela_cepedab@hotmail.com, carmensamper@gmail.com

En el artículo se presenta un análisis de los argumentos utilizados por un grupo de estudiantes de la Universidad Pedagógica Nacional en dos momentos de su formación como licenciados en matemáticas. Para ello, se hace uso del modelo de Toulmin para estudiar la estructura de los argumentos y de la caracterización realizada por Viholainen, respecto a los argumentos formales e informales.

INTRODUCCIÓN

El estudio que se presenta es relativo a la argumentación que realizan unos estudiantes de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional, cuando tratan de resolver un problema, que en esencia es el mismo, en dos momentos: en el primer semestre de su formación y cuando cursaban el tercer semestre. Para determinar semejanzas y diferencias, se analizan los argumentos usando el modelo de argumentación propuesto por Toulmin (1974, citado en Boero, Douek, Morselli y Pedemonte, 2010).

EL MODELO DE TOULMIN Y LOS TIPOS DE ARGUMENTOS

El modelo de Toulmin para la argumentación es una herramienta que permite determinar la estructura y la profundidad de un proceso de argumentación y caracterizar algunos tipos de argumentos (Cramer, 2011). Los elementos esenciales del modelo de Toulmin son la *conclusión*, los *datos* y el *garante*. La *conclusión* es el elemento sobre el cual se desarrolla el argumento, y se define como la opinión del hablante o la afirmación que establece como certera. Los *datos* son hechos incuestionables que sustentan la conclusión. El *garante* es un enunciado general que puede ser regla de inferencia, convención, principio o supuesto, que permite relacionar los datos con la conclusión (Boero, Douek, Morselli y Pedemonte, 2010).

¹ Estudiantes de la Licenciatura en Matemáticas.

² Profesora titular del Departamento de Matemáticas.

Vargas, C., Cepeda, L. y Samper, C. (2011). ¿Se modifican los argumentos de los estudiantes cuando se prioriza lo teórico sobre lo empírico? En P. Perry (Ed.), *Memorias del 20º Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones* (pp. 315-322). Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

En ocasiones, en un argumento se evidencian otros tres elementos, también contemplados en el modelo, que se denominan *respaldo*, *refutador* y *calificador*. Cuando el *garante* en sí mismo no es suficiente para conectar la conclusión con los datos, se hace uso del *respaldo*. Éste es una evidencia adicional que le da fuerza al *garante*. En caso de que en un argumento exista una afirmación o hecho que invalide la conclusión, éste se denomina *refutador*. Por último, el *cualificador* establece el grado de certeza que se tiene sobre la conclusión (Boero et al., 2010).

Además, el modelo de Toulmin es útil para distinguir entre *argumentos formales* e *informales*; en un *argumento formal*, el *garante* es elemento de un sistema teórico, mientras que en un *argumento informal*, el *garante* está basado en interpretaciones de propiedades matemáticas que se infieren a partir de una imagen visual o de una afirmación proferida por una autoridad externa, es decir, una persona que es autoridad para el sujeto, como el profesor, un texto, un compañero, un profesor de un curso anterior (Viholainen, 2011).

DESCRIPCIÓN DE LA SITUACIÓN

A continuación, se realiza una breve descripción de los dos experimentos. El primero se realizó con un grupo de estudiantes (Camila, Pilar y Daniel) del primer curso de la línea de geometría de la Universidad Pedagógica Nacional, curso en el cual el acercamiento a los conceptos y relaciones geométricos se hace de manera informal. Se centra en el desarrollo de competencias como la visualización, el lenguaje y la argumentación informal. Se les propuso el siguiente problema cuyo propósito era que descubrieran el hecho geométrico según el cual, en una circunferencia, los ángulos inscritos que subtienden el mismo arco son congruentes, y que justificaran informalmente su conjectura.

Se tiene una circunferencia con centro en el punto O , y un punto fijo P en el interior de tal circunferencia, \overline{AC} y \overline{BD} y son dos cuerdas cualesquiera de la misma circunferencia que contienen a dicho punto P . ¿En qué casos se tiene que $AP/BP=DP/CP$?

El segundo experimento fue cuando dos de ellos (Camila y Daniel) se encontraban en el tercer curso de la línea de geometría. Tanto el segundo como el tercer curso están enfocados en el desarrollo formal de un sistema teórico referente a la geometría euclíadiana plana y del espacio. Se les propuso resolver el mismo problema, planteado de forma diferente porque el nivel de trabajo formal y de conocimientos de los estudiantes era mayor, con el objetivo de que

ellos demostrarían no sólo su conjetura sino también el hecho geométrico nombrado anteriormente:

Construya una circunferencia con centro en C y un punto fijo en P en el interior de esta circunferencia. ¿Para qué cuerda \overline{AB} , de la misma circunferencia, que contenga dicho punto P se tiene que el producto $AP \times BP$ es máximo?

En ambos casos, se les pedía dar una anticipación, realizar la construcción, reportar los pasos de esta última y la forma como exploraron, producir una conjetura y justificarla. El primer experimento se realizó en el aula de clase y la docente desarrolló el papel de profesora-observadora. El segundo experimento fue una prueba clínica, en la cual se contó con dos observadoras, una de ellas la profesora que habían tenido en el curso del primer semestre.

En el primer experimento, el enunciado del problema nombraba dos cuerdas, puesto que se consideró que difícilmente los estudiantes en ese nivel piensan en construir otra cuerda para comparar resultados. Además, tener las cuerdas les podría sugerir construir segmentos para conformar triángulos que descubren semejantes, y que les permitiría justificar la respuesta al problema.

ANÁLISIS

Situación 1: Descubren el invariante

El primer momento que se analiza es cuando el grupo encuentra la invariancia, ya sea del cociente (experimento 1) o del producto (experimento 2). En ambos casos, habían realizado la construcción de la circunferencia, del punto P en el interior de la misma y de la cuerda AB . En el primer experimento, habían construido además la cuerda CD .

En el primer caso Pilar y Daniel encuentran las medidas de los segmentos determinados por P en las cuerdas AB y CD , y calculan las razones indicadas, cada uno de ellos en calculadoras diferentes. Los cocientes que encuentra Daniel no corresponden con los pedidos, obteniendo datos diferentes, mientras que Pilar lo hace correctamente y descubre que éstos son iguales.

231. Obs: ¿Qué paso Pilar?

232. Pilar: Que da igual. [Vuelve a calcular el cociente DP/CP .] Da igual.

233. Camila: [Mirando la calculadora de Pilar.] Rótalo a ver si cambia algo.
234. Pilar: No, siempre da igual. Mira [Arrastra al punto D.] Está igual. Está muy raro.
235. Daniel: Voy a volver a hacer lo de las razones a ver si fue que yo medí mal. Voy a volver a medir los segmentos y volver a hacer la división. Debo tener entonces algo mal, porque tiene que dar en éste entonces igual. [Se refiere a la calculadora que él está usando.]
236. Camila: O es Pilar la que dividió mal, porque es imposible...
237. Pilar: Pero es que lo dividí tres veces los dos. Así mueva el punto P a cualquier lugar. [Mueve el punto P por la pantalla.]
[...]
241. Camila: Intenta mover la recta AB .
[...]
244. Pilar: [Arrastra la recta AB .] Vea, sí. Sigue siendo igual.
[...]
267. Daniel: Siempre dan igual. [Observa el nuevo resultado que obtuvo.]

En el anterior fragmento, se observa que el grupo de estudiantes, haciendo uso de Cabri, llega a establecer que los cocientes entre las longitudes de los segmentos determinados por P , en las dos cuerdas son iguales, siendo esto la *conclusión* de acuerdo con el modelo de Toulmin. Ésta se origina a partir de las medidas de los segmentos determinados por P , que en este caso serían los *datos* del argumento. El *garante*, que les permite relacionar los datos con la conclusión obtenida, es la evidencia que provee la calculadora al comparar los cocientes. En este proceso, la cuerda CD permanece fija, mientras que la cuerda AB es arrastrada. Esto permite que la comparación realizada, no sólo sea entre dos segmentos fijos, sino de innumerables casos.

En este caso, se identifica un *refutador* en el argumento: la evidencia encontrada por Daniel en su calculadora. Ésta habría podido invalidar la conclusión porque no corresponde con los resultados de Pilar. Este elemento pierde validez cuando Daniel vuelve a realizar el procedimiento y se da cuenta de que

había cometido un error al calcular los cocientes. Por otra parte, frases como las proferidas en [236] y [237] muestran que la realimentación inmediata que les da el software no siempre es suficiente para tener certeza de la conclusión. Estas acciones de verificación eran necesarias para que ellos determinaran el *cualificador*.

En el segundo experimento, Camila y Daniel determinan las medidas de los segmentos AP y PB , y posteriormente calculan el producto de ellas. Al arrastrar la cuerda AB , Daniel observa que la medida es constante. Establecen como primera conjetura “No importa cuál sea la cuerda, el producto va a ser siempre constante”.

27. Camila: [Toma las medidas AP y PB , y luego calcula el producto entre éstas.] Ahora tocaría hacer otras rectas ...

[...]

31. Obs1: ¿Por qué dices que tocaría hacer otra recta?

32. Camila: Para comprobar si sí es la misma. O sea ya tenemos como una cuerda y ahora hacer otra por otro, sí otra recta que contenga a P y volver a medir si es...

33. Daniel: [Desoculta la recta AB y la mueve haciendo varios giros completos sobre la circunferencia.] O puedes mover la recta que construiste al principio como estoy haciendo yo...

[...]

37. Daniel: No importa cuál sea la cuerda, el producto va a ser siempre constante...

En este argumento, se tiene que el *dato* es la existencia de una cuerda de la circunferencia que contiene al punto P , junto con las medidas de los segmentos determinados por éste (AP y PB). El *garante*, utilizado por Daniel, es la evidencia encontrada en Cabri al considerar los innumerables casos obtenidos al arrastrar la recta. En el fragmento, se puede observar que Camila sugiere utilizar como *garante* la consideración de dos cuerdas cualesquiera, para comparar los productos de los segmentos determinados por P . Finalmente, la *conclusión* es la afirmación en la cual establecen que el producto siempre va a ser constante.

En ambos experimentos, el *garante* utilizado se deriva de la evidencia que brinda la calculadora. Por esta razón, los argumentos desarrollados son informales.

Situación 2: Acercamiento al teorema

En el primer experimento, Daniel hace uso de una propiedad geométrica que conocía con anterioridad (HG semicircunferencia: todo ángulo inscrito en una semicircunferencia es recto) para determinar si obtiene el mismo resultado con cualquier ángulo inscrito en la circunferencia. Ello lo lleva a descubrir que todos los ángulos inscritos que subtienden la misma cuerda son congruentes, acercándose al hecho geométrico que se quería que reconocieran.

487. Daniel: Construí el ángulo; construí el triángulo CDA , volviendo a buscar lo mismo del hecho geométrico de la semicircunferencia. No me dio recto pero el ángulo se mantiene.

[...]

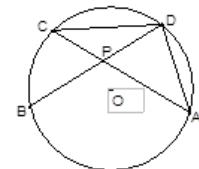
489. Daniel: Cuando arrastro.

[...]

491. Daniel: El ángulo D , que sería...

492. Obs: ¿Cuál ángulo se mantiene?

493. Daniel: Construí el triángulo ACD , AC lo tomé como si fuera el..., tomé la semicircunferencia ADC



494. Obs: Pero no es una semicircunferencia.

495. Daniel: Pero no es una semicircunferencia. Pero medí el ángulo ADC y se mantiene. [...] Siempre se mantiene.

En este fragmento podemos observar que los *datos* son los ángulos inscritos que subtienden la cuerda CA , parcialmente implícitos porque Daniel no saca a relucir que todos subtienden esa cuerda. Con la intención de usar como *garante* el HG Semicircunferencia, él desea llegar a la *conclusión* de que todo ángulo inscrito en una circunferencia, que subtienda la misma cuerda, es recto. No obstante, al arrastrar el punto D sobre el arco menor determinado por A y C observa que este ángulo no es recto pero que su medida se mantiene. Por tanto, la evidencia suministrada por la calculadora se convierte en un *refuta-*

dor de su primer argumento y en un *garante* que lo lleva a replantear su *conclusión* de la siguiente forma: la medida del $\angle ADC$ siempre se mantiene.

En el segundo experimento, en el intento de justificar la congruencia de dos ángulos, Camila recuerda vagamente un teorema sobre ángulos inscritos que le permite justificarla. Para estar totalmente segura de esto, se fija en la medida de dos ángulos que había obtenido en la calculadora.

521. Camila: ¡Ay, sí!... Tú no te acuerdas una vez que... una vez Leo [un compañero de Camila y Daniel] nos decía que la medida de los ángulos... que cuando un ángulo estaba inscrito... o sea que compartían el mismo arco, eran congruentes... ¿Sí te acuerdas?

[Pausa.] Es que no me acuerdo cómo era que decía Leo...

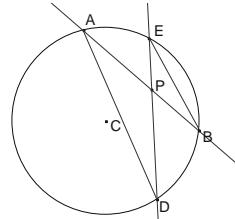
[...]

569. Camila: Bueno el otro, el segmento que está acá, ¿sí ves que comparten el mismo arco? Entonces lo que es... sí es eso: sí tienen el mismo arco, son congruentes [refiriéndose a los $\angle AED$ y $\angle ABP$].

[...]

574. Obs2: ¿Te fijaste en ese ángulo?

575. Camila: Sí porque son los congruentes, cuando los medimos...



En este caso, los *datos* son los ángulos AED y ABD que subtienden el mismo arco, y la *conclusión* es la congruencia de ellos. En este argumento, el *garante* utilizado es el hecho de que en una circunferencia, los ángulos que subtienden el mismo arco son congruentes. Como los estudiantes no están seguros de la veracidad de este garante, recurren a la calculadora para comprobar el hecho. Por esta razón, el *respaldo* es la evidencia que obtienen al medir los ángulos en la calculadora.

En el primer experimento el *garante* para justificar la congruencia de los ángulos fue la evidencia suministrada por la calculadora. En el segundo caso, el *garante* provenía de una autoridad externa, un compañero de Camila y de Daniel, quien en el primer experimento llegó a esa conclusión y la compartió cuando socializó su respuesta al problema. Pero, Camila busca el respaldo a ese *garante* con evidencia suministrada por Cabri. Por tanto, es posible decir que ambos argumentos fueron informales. No obstante, en el primer caso la

exploración realizada en Cabri estuvo influenciada por el intento de generalizar un hecho geométrico que se conocía dándole un tinte de formalismo al argumento.

CONCLUSIONES

Con el análisis realizado es posible determinar en ambos experimentos que el papel de Cabri en los argumentos del primer momento, formulación de conjectura, es de garante ya que les permite tener certeza de ésta; actúa también como una herramienta para descubrir y explorar. En el segundo momento, difiere el papel de Cabri en los argumentos. En el primer experimento, resultado de la exploración en Cabri, hubo un descubrimiento de un hecho geométrico, que se convirtió en la conclusión de un argumento. Por el contrario, en el segundo experimento los estudiantes recordaron vagamente el hecho geométrico que se pretendía demostrar. En este caso, Cabri verifica el garante, enmarcado en el sistema teórico, que quieren usar; Cabri actuó como una herramienta para verificar pero no para descubrir.

En ambos casos los argumentos fueron informales a pesar de que los estudiantes en el tercer curso ya tenían un sistema teórico con el cual podían haber respaldado sus argumentos. En el primer experimento Cabri actuó como garante para llegar a una conclusión, mientras que en el segundo, Cabri actuó con verificador de un garante del cual no se tenía plena certeza.

REFERENCIAS

- Boero, P., Douek, N., Morselli, F. y Pedemonte, B. (2010). Argumentation and proof: A contribution to theoretical perspectives and their classroom implementation. En M.F.F. Pinto y T.F. Kawasaki (Eds.), *Proceedings of the 34th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 1, pp. 179-205). Belo Horizonte, Brazil: PME.
- Cramer, J. (2011). *Everyday argumentation and knowledge construction in mathematical tasks*. Tomado de: http://www.cerme7.univ.rzeszow.pl/WG/1/CERME7_WG1_Cramer.pdf
- Viholainen, A. (2011). *The view of mathematics and argumentation*. Recuperado de: http://www.cerme7.univ.rzeszow.pl/WG/1/CERME7_WG1_Viholainen.pdf

GEOMETRÍA EN UNA PLAZA DE MERCADO

Jennyfer Zambrano y Jenny González

Universidad Distrital Francisco José de Caldas

nifer86@gmail.com, madelein883@hotmail.com

Se presenta parte de un proceso de investigación etnográfica que corresponde a las diferentes *prácticas matemáticas* que realiza un grupo de trabajadores del mercado Corabastos, vistas desde la etnomatemática enfocada en un contexto urbano y desde las *actividades universales* presentadas por Bishop (1999). Sin embargo, en esta ponencia centraremos la mirada en la actividad matemática que corresponde a *diseñar* en un contexto laboral, específicamente se trata de la aplicación de conceptos geométricos en una plaza de mercado, donde se da evidencia de un conocimiento matemático no escolarizado, sino desarrollado a partir de las prácticas cotidianas.

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Teniendo en cuenta las experiencias vividas en prácticas docentes que hacen parte de la formación como profesores de matemáticas, se hace una mirada al contexto como un factor fundamental en el desarrollo de la educación matemática, que se entiende no como la enseñanza de fórmulas para resolver problemas de matemáticas, sino como la formación de ciudadanos que, a partir de la comprensión de su realidad, se enfrentan a los problemas que se les presentan, haciendo uso de un razonamiento matemático.

Por ello, se pensó en llevar esa mirada a una plaza de mercado, que es un contexto familiar para muchas personas; en tal contexto se puede percibir toda una cultura alrededor de una actividad comercial. En este caso, la plaza de mercado a la que se hace referencia es Corabastos, considerada actualmente como la central de distribución de alimentos más grande de Suramérica, donde diariamente se comercializan más de 500 productos de tipo perecedero, granos y procesados provenientes de diferentes regiones de Colombia y del mundo entero.

Por otro lado, se cree que existe un conocimiento que no se ha desarrollado en el aula, lo que lleva a plantear las preguntas: ¿la matemática sólo se aprende en espacios de escolarización?, ¿son de alguna utilidad las *estrategias mentales* utilizadas por las personas en su cotidianidad laboral para resolver proble-

Zambrano, J. y González, J. (2011). Geometría en una plaza de mercado. En P. Perry (Ed.), *Memorias del 20º Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones* (pp. 323-330). Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

mas matemáticos?, ¿el contexto, la política, la cultura y la sociedad son factores influyentes para desarrollar destrezas matemáticas?, ¿qué situaciones les permiten a las personas aplicar las matemáticas fuera del contexto escolar? Estas y muchas otras preguntas sirvieron de puente e inspiración para estructurar este proyecto y encaminarlo hacia una visión etnomatemática centrada en un grupo de trabajadores de Corabastos. Finalmente, queremos resaltar que esta es una propuesta para analizar *¿Cómo surgen y se aplican las matemáticas en un contexto no educativo, donde se desarrollan nociones geométricas que difícilmente son comprendidas en la escuela?*

MARCO DE REFERENCIA CONCEPTUAL

Se ha construido el marco teórico teniendo como base la etnomatemática, luego se presenta una definición de *prácticas matemáticas* que se evidencian en *situaciones matemáticas*, siendo éstas el foco de la observación en el trabajo de campo. Para finalizar, se presentan las seis actividades universales identificadas en Bishop (1999), las cuales brindan bases para corroborar si una actividad puede ser considerada matemática o no.

Etnomatemática

Como punto de partida, se quiere aclarar que el término “etnomatemática” fue ideado primero por D’Ambrosio (1985), matemático y educador brasileño, quien usó el término para referirse a “los procesos matemáticos, símbolos, jergas, mitologías, modelos de razonamientos, etc., practicados por grupos culturales identificados, inclusive clases profesionales” (p. 16). Pero, la etnomatemática en sus inicios se utilizó en comunidades étnicas mientras que en la actualidad se acepta como cualquier tipo de matemática en una comunidad particular; puede ser “matemática en la escuela”, “matemática universitaria”, “matemática profesional”, o la “matemática urbana”.

De acuerdo con Alberti (2007, p. 12), “la escuela no es el único foco de conocimiento matemático” sino que es una parte de las prácticas cotidianas de los seres humanos y, en este sentido, Bishop (1999) presenta seis actividades matemáticas de índole universal: contar, medir, diseñar, localizar, jugar y explicar que se atribuyen a prácticas matemáticas.

Prácticas matemáticas

El planteamiento de Alberti (2007) nos indica que “una práctica se compone de cuatro aspectos fundamentales: autores, procedimientos, tecnología y objetivo”, en donde se entiende como *autores* a las personas que realizan la práctica; los *procedimientos*, como todas las acciones realizadas durante la práctica (e.g., estimar, operar, calcular, organizar); la *tecnología*, como todos aquellos instrumentos o herramientas que se utilizan en la práctica (e.g., calculadora, pesas, metro); y por último, el *objetivo* es el propósito fundamental para realizar una práctica.

Profundizando en la postura de Alberti, se puede decir que una situación matemática tiene prácticas matemáticas inmersas; sin embargo, es necesario identificar *¿qué hace que una situación se califique como matemática?* Lograr tal precisión implica la necesidad de buscar problemas que se les presentan a los trabajadores de Corabastos, en cuya solución se haga uso de las matemáticas, luego interactuar con dichos trabajadores para identificar de qué manera son conscientes de sus estrategias matemáticas para la solución de dichos problemas. En este caso Bishop (1999), nos muestra que en toda actividad que se considere matemática se deben evidenciar acciones como: *contar, localizar, medir, jugar, explicar y diseñar*.

En esta ponencia se hará una descripción de cómo los distribuidores de mazorcas en Corabastos *diseñan* flores para dar a conocer su producto y llamar la atención de sus clientes. En este sentido, tal práctica corresponde a la actividad de *diseño* que según Bishop (1999), se refiere a la tecnología, los artefactos y los objetos manufacturados, que todas las culturas crean para su vida doméstica, para el comercio, como adorno, etc. Se hará una mirada a la acción de diseñar que involucra conceptos geométricos y métricos a la vez.

METODOLOGÍA

La metodología está dirigida bajo las características de una investigación etnográfica, que Goetz y LeCompte (1988, p. 56) definen como “una descripción o reconstrucción analítica de escenarios y de grupos culturales intactos”, orientado por el método cualitativo. Atendiendo indicaciones de estos autores, en el proceso de investigación se llevaron a cabo las siguientes fases:

Fase de exploración

En esta fase se realizó una delimitación geográfica del área, se reconocieron diferentes puntos de observación y se establecieron los instrumentos que se utilizarían para recolectar los datos. Por otro lado, se realizó una observación no participante, que permitió identificar los diferentes contextos o actividades laborales a observar (mazorcas, huacales, auyamas, camiones y arvejas).

Fase de recolección de información

Se realizó una inmersión en la comunidad de Corabastos durante 45 días consecutivos, con un horario de 3:00 a.m. a 7:00 a.m., dentro del cual se distribuyó el tiempo para la observación de los cuatro casos (Mazorcas, Huacales, Auyamas, Camiones y arvejas). Se destinó una semana de observación ya participante para cada caso, realizando protocolos de observación a partir de los diarios de campo, imágenes, videos y por otro lado, las entrevistas aplicadas a los trabajadores.

Fase de análisis de la información

Para analizar la información se retomaron los protocolos de observación y se sistematizaron los datos, haciendo un paralelo entre lo registrado en el protocolo, lo observado en los videos y lo afirmado en las entrevistas.

A continuación se presenta lo encontrado con relación a lo geométrico, ya que éste es el objetivo del artículo; se quiere aclarar que en el trabajo original se hace relación a las demás actividades matemáticas.

Flores de mazorcas

Situación matemática: Cuando una persona en Corabastos quiere vender su producto tiene que hacerlo llamativo al ojo del cliente, por ello los vendedores de mazorcas cada día diseñan nuevas y diferentes flores de mazorcas. Tomando el papel de aprendices tuvimos la oportunidad de que el trabajador que distribuye mazorcas en Corabastos nos enseñara como hace estas flores. En la Tabla 1, se recuenta el procedimiento usado para construir una flor de mazorcas y también se explicitan los conceptos geométricos implicados que identificamos:

Proceso	Imagen	Conceptos geométricos implicados
Se escoge un bulto de mazorcas al azar, luego se hace una clasificación de las mazorcas teniendo en cuenta su tamaño, volumen, forma del maíz y el color del maíz. Una vez clasificadas se seleccionan las más bonitas para ponerlas en la parte superior de la flor y las demás conformarían la base.	 Forma de destapar la mazorca	Clasificación y seriación de objetos. Identificación de diferentes magnitudes en diferentes formas de caracterizar objetos (peso, longitud, volumen)
Se ubican mazorcas acostadas en el fondo del bulto para ir formando el tallo de la flor, luego se ponen más o menos ocho mazorcas verticales para darle altura a la base.	 Tallo de la flor	Concepto de resistencia Concepto de base Concepto de altura (dimensiones de un objeto)
Una vez hecha la base, se ubican las mazorcas más grandes alrededor del círculo que forma el bulto, las cuales se encajan con las mazorcas que hacen de tallo, para que la flor tenga más resistencia.	 Mazorcas ubicadas al borde del	Noción de circunferencia y círculo Simetría Noción de distancia Nociones topológicas (interior, exterior)
Se hace un diseño inicial de la forma de la flor, donde depende de las mazorcas que haya el trabajador piensa en la forma.	 Estructura de la flor.	Nociones topológicas (cerrada o abierta, extendida o sencilla) Simetría
Luego se utiliza una pita para hacer un polígono utilizando como vértices las puntas de las mazorcas; este polígono garantiza la resistencia de las hojas de la flor, para que no se caigan debido a que las mazorcas más grandes están en la parte superior.	 Estructura de la flor.	Nociones geométricas fundamentales (punto, línea, superficie)

<p>Se prosigue amarrando cada una de las mazorcas más o menos desde el centro hacia las puntas (esta persona utiliza un palo en el centro para darle equilibrio a la flor). Geométricamente, si estas mazorcas fueran proporcionales y de igual forma habría quedado la misma distancia entre cada dos consecutivas. Se modela la construcción de un polígono regular de 12 lados.</p>		<p>Polígonos Simetría Tesselación Resistencia Nociones geométricas fundamentales</p>
<p>Pone las siguientes mazorcas de forma intercalada con las mazorcas del borde, (segunda ronda de mazorcas), la tercera ronda se va poniendo más hacia el centro, pero siempre conservando la estructura del principio, es decir, a modo de circunferencia. Para hacerse una idea: es como si empezara a rellenarse el área de la circunferencia con mazorcas, empezando desde el borde y haciendo así círculos más pequeños hasta completar toda el área. Por otra parte, para que las mazorcas se entierren mejor y con más facilidad, se enrollan en el tallo de la mazorca, las hojas que quedaron colgadas después de destapar la mazorca.</p>	 <p>Flor terminada</p> <p>Otros ejemplos de flores</p> <p>Flor extendida cerrada</p>  <p>Flor acostada</p>  <p>Flor extendida abierta</p> 	<ul style="list-style-type: none"> - Noción de cubrir (área) - Reconocimiento de las características de un círculo (radio, centro, diámetro) - Nociones geométricas fundamentales - Formas geométricas - Tesselaciones <p>Flor pirámide</p> 

Tabla 1. Proceso de construcción de una flor de mazorcas

CONCLUSIONES

En el caso de las Mazorcas, es evidente que la necesidad de exhibir su producto para atraer clientes, es lo que lleva a los trabajadores a desarrollar nociones geométricas implícitas en los diseños de las flores de mazorcas, ya que día a día toman un bulto al azar, y a partir de las mazorcas que salgan, (teniendo en

cuenta dimensiones del objeto como tamaño, color, maduración, forma etc.,) imaginan y crean un nuevo y diferente diseño.

Aunque estos trabajadores tienen una escolaridad mínima (sólo llegaron a algún curso de la básica primaria) y no reconocen su conocimiento matemático, en su lenguaje, al explicar el proceso de construcción de la flor, utilizan palabras como “punta de la mazorca” (noción de punto), “círculo que forma el bulto”, “borde del círculo” (noción de circunferencia y límite o borde), “base de la flor”, “formamos una figura con las puntas de las mazorcas y las amarramos con una pita” (noción de polígono y línea). Como también necesitan crear técnicas para medir (medidas objetales para clasificar las mazorcas), al hacerlo se evidencia que pueden con la construcción de polígonos a partir de circunferencias y tienen en cuenta la simetría en la teselación que realizan para hacer una sucesión de figuras iguales. Estos conceptos implícitos son comprendidos, pues son evidentes en las prácticas de diseño y elaboración de arreglos con mazorcas.

Tales nociones se desarrollan gracias a sus actividades laborales y no a la enseñanza en una escuela. Esta afirmación no es para decir que la escuela no es importante, sino que nos invita a reflexionar en cómo se está llevando la geometría y los demás conceptos matemáticos al aula, con situaciones creadas de un imaginario o situaciones reales que viven personas día a día.

Esta mirada se lleva, para ver la importancia de la etnomatemática, como una herramienta de investigación para el docente de matemáticas, quien explorando en las diferentes culturas de los diferentes grupos sociales de nuestra sociedad, puede tener todo un laboratorio de matemáticas, donde lleve a sus estudiantes a ser una microsociedad científica que modele situaciones a partir de la experiencia de conocer su entorno.

¡Qué bueno sería una clase de matemáticas en una plaza de mercado, o en una carpintería o en una obra de construcción...! Profesores, hay más situaciones de las que se pueden leer en los libros.

REFERENCIAS

- Alberti, M. (2007). *Interpretación situada de una práctica artesanal*. Tesis doctoral no publicada, Universidad Autónoma de Barcelona, Barcelona, España.

- Bishop, A. (1999). *Enculturación matemática. La educación matemática desde la perspectiva cultural*. Barcelona, España: Paidós.
- D'Ambrosio, U. (1985). *Etnomatemática*. São Paulo, Brasil: Atica.
- Goetz, J.P. y LeCompte, M. (1988). *Etnografía y diseño cualitativo en investigación educativa*. Madrid, España: Editorial Morata S.A.

Conferencias

EL TETRIS COMO MEDIADOR VISUAL PARA EL RECONOCIMIENTO DE MOVIMIENTOS RÍGIDOS EN EL PLANO (ROTACIÓN Y TRASLACIÓN)

Jenny Acevedo y Leonor Camargo

Universidad Minuto de Dios, Universidad Pedagógica Nacional

jpar_2005@hotmail.com, leonor.camargo@gmail.com

El videojuego hace parte de la realidad de los jóvenes de la actualidad. En procura de aprovechar algunos beneficios del entorno visual del videojuego, en el aula de matemáticas, como: dinamizar la reflexión, desarrollar competencia de resolución de problemas, estimular capacidad deductiva, entre otros, se desarrolló un proyecto de investigación que hace uso del videojuego en tareas de acercamiento a los conceptos geométricos de rotación y traslación. En esta conferencia presentamos un marco analítico para identificar procesos y habilidades de visualización que se desarrollan al aprovechar el videojuego como mediador visual e ilustramos los efectos del uso del Tetris en la resolución de tareas desarrolladas por tres estudiantes con necesidades particulares de aprendizaje del Gimnasio Los Robles (Bogotá).

INTRODUCCIÓN

El Gimnasio Los Robles, institución educativa de Bogotá, busca atender niños que tienen dificultades de aprendizaje y/o emocionales, para lo cual considera un modelo que incluye un conjunto de funciones intelectuales correspondientes a estructuras cognitivas básicas, que sirven de soporte a ciertas acciones u operaciones con las que se resuelven situaciones problema. Las funciones y operaciones son de carácter general; por esta razón no se discriminan acciones específicas asociadas al uso de conceptos y procedimientos matemáticos, hecho que dificulta poner en funcionamiento el modelo sugerido por el colegio. Este hecho nos condujo a desarrollar un proyecto de investigación tendiente a seleccionar, redefinir y caracterizar a partir del análisis de las actuaciones de estudiantes, algunas funciones y operaciones del modelo que consideramos más propias de la actividad geométrica y particularmente aquellas asociadas a habilidades y procesos de visualización.

En esta conferencia presentamos un marco analítico para dar cuenta de procesos y habilidades de visualización que se estimulan con el uso del videojuego *Tetris* construido a partir de la selección de algunas categorías de visualiza-

Acevedo, J. y Camargo, L. (2011). El *Tetris* como mediador visual para el reconocimiento de movimientos rígidos en el plano (rotación y traslación). En P. Perry (Ed.), *Memorias del 20º Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones* (pp. 333-344). Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

ción sugeridas en la literatura de referencia. Además, presentamos algunos resultados de una aproximación metodológica que busca aprovechar dichos procesos y habilidades de visualización en una propuesta cuyo propósito es acercar intuitivamente a estudiantes con necesidades particulares de aprendizaje a los conceptos de rotación y traslación. Ilustramos, con ejemplos, el análisis realizado a algunos extractos de interacciones entre la profesora y un estudiante de grado quinto. Por último, exponemos unas reflexiones frente al trabajo investigativo desarrollado.

PROCESOS Y HABILIDADES DE VISUALIZACIÓN

Partimos de la definición de visualización sugerida por Gal y Linchevski (2010) quienes la conciben como el conjunto de habilidades y procesos necesarios para representar, transformar, generalizar, comunicar, documentar, y reflexionar sobre información visual. Según estos autores, la visualización interviene en tres momentos del proceso cognitivo: en la *organización*, o momento inicial de captura de información por medio de los sentidos; en el *reconocimiento*, o momento de aprovechamiento de la información visual en el trabajo cognitivo propiamente dicho; y de *representación* de información, o momento de comunicar los resultados del funcionamiento mental. A partir de estos momentos organizamos procesos y habilidades de visualización sugeridos por Presmeg (1986), Duval (1995), Bishop (1983) y Del Grande (1990), los cuales se constituyeron en categorías de análisis del estudio investigativo que adelantamos.

En el momento de *organización* ubicamos las siguientes habilidades sugeridas por Del Grande (1990), las cuales definimos y exemplificamos con datos obtenidos en nuestro estudio.

Coordinación óculo-manual. Es la habilidad para seguir con los ojos el movimiento de los objetos de forma ágil y eficaz. Por ejemplo, en el uso del videojuego *Tetris*, esta habilidad se ve cuando los estudiantes logran coordinar los controles del juego (representados por flechas) y los movimientos propios del mismo; por ejemplo: ↑: giro de 90°, →: desplazamiento a la derecha.

Identificación visual. Es la habilidad para reconocer una figura aislando de su contexto. El estudiante centra la atención en la figura, sin distraerse con estímulos irrelevantes. Por ejemplo, al jugar *Tetris* los estudiantes centran la atención en la ficha que va bajando por el tablero del juego para poder ubicar-

la adecuadamente en el tablero, y olvidan por un momento la ficha siguiente o los elementos distractores del entorno.

Conservación de la percepción. Es la habilidad para reconocer que un objeto tiene propiedades invariantes tales como forma y tamaño, a pesar de la variabilidad dada por el movimiento. Por ejemplo, al jugar *Tetris* los estudiantes reconocen que las fichas están compuestas por configuraciones iguales de cuatro cuadros de igual tamaño, y que el movimiento de giro o desplazamiento, no cambia ni la forma ni el tamaño.

Reconocimiento de posiciones espaciales. Es la habilidad para relacionar la posición de un objeto con uno mismo, es decir el observador. Por ejemplo decimos que un estudiante tiene esta habilidad cuando logra identificar que una ficha se ha desplazado hacia la derecha o izquierda de la pantalla, según la posición del jugador.

Reconocimiento de relaciones espaciales. Es la habilidad que permite identificar correctamente las características de relaciones entre diversos objetos situados en el espacio. Por ejemplo, al jugar *Tetris* el estudiante es capaz de identificar los giros y desplazamientos necesarios para hacer encajar la ficha en un determinado espacio del tablero, e incluso, es capaz de predecir que la ficha que va bajando en el tablero y la futura ficha, pueden unirse para encajar en una determinada posición del tablero.

Discriminación visual. Es la habilidad que permite comparar dos o más objetos identificando sus semejanzas y diferencias. Por ejemplo, esta habilidad es evidente cuando los estudiantes son capaces de comparar un espacio del tablero con la configuración de una ficha en particular, estableciendo si la configuración es igual o no.

Memoria visual. Es la habilidad para recordar las características visuales y de posición que tenía un conjunto de objetos que estaba a la vista pero que ya no se ve o que ha sido cambiado de posición. Por ejemplo, cuando los estudiantes son capaces de proponer fichas que podrían llenar un espacio en particular, a partir de su configuración, en caso de no tenerlas presentes y puede recordar la dirección de los giros de las fichas.

En el momento de *reconocimiento*, ubicamos dos tipos de aprehensiones definidas por Duval (1995) y los procesos de visualización señalados por Bishop (1983). Duval (1995) hace mención a la identificación visual de las figuras

con base en leyes de organización perceptiva, y que, a su vez, se pueden usar para representar objetos reales u objetos matemáticos. Plantea tres tipos de funciones cognitivas, que denomina como aprehensiones de las cuales sólo hacemos referencia a la aprehensión operativa y la aprehensión discursiva, pues son las que usamos en los análisis.

Aprehensión operativa. Se produce cuando el sujeto lleva a cabo alguna modificación a la configuración inicial para resolver un problema geométrico y recuerda propiedades, movimientos y estrategias para llevar a cabo una tarea propuesta. Por ejemplo, en el caso particular del videojuego *Tetris*, los estudiantes son capaces de organizar un conjunto de estrategias para ponerlas en práctica a la hora de completar líneas del juego.

Aprehensión discursiva. Se produce cuando hay una asociación de una configuración con afirmaciones matemáticas (definiciones, teoremas, axiomas). Por ejemplo, cuando un estudiante es capaz de codificar y decodificar el lenguaje que le plantea el videojuego haciendo asociaciones geométricas con los controles. Además, el estudiante es capaz de expresar y argumentar sus propias ideas para resolver la situación planteada.

Por su parte, Bishop (1983) se refiere a dos procesos: Interpretación de la Información Figural (IFI) y Procesamiento Visual (VP), procesos que incluimos en el momento de reconocimiento.

Interpretación de la Información Figural (IFI). Es el proceso de interpretación de representaciones visuales para extraer información de ellas. Para que haya Interpretación de la Información Figural debe existir un referente físico y de esta forma el individuo puede empezar a hacer el respectivo análisis. Por ejemplo, cuando los estudiantes, al enfrentarse al problema de escoger el camino óptimo para llegar a un espacio señalado en el tablero, son capaces de interpretar y argumentar sobre la información que extraen para decidir cómo hacer líneas y ganar más puntos en el juego.

Procesamiento Visual (VP). Es el proceso de conversión de la información no figurativa en imágenes visuales o transformación de unas imágenes visuales ya formadas en otras. Por ejemplo, cuando un estudiante es capaz de interpretar si una ficha, que está bajando en el tablero, encaja en un espacio señalado en el tablero.

En el momento de *representación*, ubicamos los tipos de imágenes mentales sugeridos por Presmeg (1986), entendidas como las escenas mentales que describen información visual o espacial de un objeto sin requerir su presencia u otra representación externa. Presmeg diferencia tipos de imágenes con las que un individuo puede interactuar en una situación, de las cuales nosotros sólo presentamos dos: imágenes cinéticas e imágenes dinámicas.

Imágenes cinéticas. Son imágenes en parte físicas y en parte mentales, ya que en ellas tiene un papel muy importante el movimiento de manos, cabeza, etc. En nuestro estudio estas imágenes se hacen evidentes cuando los estudiantes quieren expresar el giro de un objeto que tienen en su mente y señalan con sus manos, u otra parte de su cuerpo o con un objeto externo a su cuerpo, como la ficha del *Tetris*, la dirección de esta rotación.

Imágenes dinámicas. Son imágenes mentales en las que los objetos o algunos de sus elementos se desplazan. Por ejemplo, estas imágenes se aprecian cuando un estudiante está interactuando con imágenes del videojuego *Tetris* y predice los movimientos; estas predicciones corresponden a imágenes de su mente que están en movimiento.

UN ACERCAMIENTO INTUITIVO A LA ROTACIÓN Y LA TRASLACIÓN

En el estudio investigativo en el que usamos el marco analítico esbozado en la sección previa, consideramos un acercamiento intuitivo a la rotación y la traslación. Por eso resaltamos el potencial de las habilidades y procesos de visualización en el reconocimiento de algunas propiedades matemáticas de dichas isometrías. Nuestro acercamiento tiene las siguientes características:

Aproximación visual. A partir de figuras geométricas que muestran el giro o desplazamiento de una figura referenciada, las posiciones que ocupa en un plano (tablero de *Tetris*), las posiciones relativas al observador (o jugador), y las relaciones de las figuras entre sí, con el objeto de cumplir una tarea (ganar el juego).

Acercamiento por invariantes. En el caso de la rotación, los estudiantes deben reconocer giros de 90° en un mismo sentido y deben asociar los giros a efectos producidos por el control ↑ del juego. En las traslaciones, los estudiantes deberán reconocer los desplazamientos en tres direcciones: derecha (→), izquierda (←) y abajo (↓). Deben poder reconocer que, en el caso de experimentar una rotación, las figuras mantienen la forma y el tamaño pero cambian

de orientación; en cambio, en el caso de experimentar una translación, las figuras mantienen la forma, el tamaño y la orientación, pero su posición varía.

Uso de vocabulario informal. Asociamos la palabra “girar” con el movimiento de rotación y las palabras “correr”, “bajar” o “mover” con el movimiento de translación.

Además cuando los estudiantes mencionan “cambio” aceptamos que se están refiriendo, en general, al uso de uno de los movimientos rígidos en el plano, o a la combinación de ellos.

UN EJEMPLO DE ANÁLISIS

El estudio investigativo se desarrolló analizando los procesos y habilidades de visualización de los que hacen uso tres estudiantes de quinto grado del Gimnasio Los Robles, quienes participaron en la implementación de una secuencia de actividades de enseñanza diseñadas con el fin de acercar intuitivamente a estudiantes, con necesidades particulares de aprendizaje, a los conceptos de rotación y translación. La descripción detallada de las actividades puede consultarse en Acevedo (2010). A manera de ilustración, presentamos dos extractos de conversaciones con el estudiante Juan David en las fases de entrada y de elaboración de la secuencia. Este estudiante ingresó al Gimnasio a los nueve años y siempre se ha caracterizado por su comportamiento hiperactivo. Tiene dificultades para: fijar, mantener y distribuir la atención, clasificar elementos de acuerdo con atributos comunes, comprender y resolver situaciones problema sencillas, así como analizar y sintetizar información. Se observa buen desempeño en control oculomotor, fijación y seguimiento visual, respeto de límites, uniformidad y direccionalidad, además de buenas habilidades de percepción visual (figura-fondo, constancia perceptual, relaciones espaciales y análisis y síntesis visual). Se observa aceptable memoria y buena motivación. Al momento de participar en el presente estudio, Juan David tenía trece años y se encontraba haciendo quinto de primaria.

Ejemplo 1 (Fase de entrada). El siguiente extracto de conversación está sacado de una interacción con el estudiante, en la fase de entrada e ilustra la manera como Juan David se refiere a las características de la configuración de las fichas que no pertenecen al videojuego *Tetris*, por medio de Interpretación de la Información Figural.

La profesora muestra al grupo de estudiantes la representación de una figura compuesta por cuatro cuadrados de igual tamaño, pero unidos por los vértices, formando una cadena. Su intención es que los estudiantes reconozcan que las fichas del *Tetris* están conformadas por cuatro cuadrados de igual tamaño que están unidos por los lados. Después de mostrar la ilustración, la profesora les pregunta a los estudiantes si la figura puede ser parte del juego. Responden varios estudiante al tiempo pero la voz de Juan David se diferencia de las demás, a pesar de no ser el directamente interrogado.

1. Profesora: O sea que si yo pusiera esta ficha, [muestra la Figura 1(i)] ¿podría ser parte del juego?
2. Juan David: No, porque está mal... armada
3. Profesora: ¿Por qué sabemos que está mal armada? [Muestra la Figura 1(i); los estudiantes reaccionan con murmullos].
4. Juan David: Todos los cuadros tienen que estar llenos [varios niños aprueban lo que él dice]. Tienen que estar rectos. No se puede dejar ningún espacio. [Muestra con su mano derecha y un movimiento sobre la horizontal lo que parecen ser los espacios que deja la unión de los cuadrados por los vértices].
5. Profesora: O sea que por ejemplo, esta ficha sí podría estar [muestra la Figura 1(iii)].
6. Juan David: No, se dejaron espacios.
7. Profesora: ¿Cuáles son los espacios a los que se refiere?, ¿estos? [Muestra los espacios alrededor de los cuadros de la Figura 2(i) o ¿estos? [Señala los espacios mostrados por las flechas de la Figura 2(ii).]
8. Juan David: No.
9. Profesora: O ¿estos? [Señala los espacios mostrados por las flechas de la Figura 2(iii).]
10. Juan David: [Afirma que son los espacios señalados en la Figura 2(iii) con movimiento aprobatorio con la cabeza.] Los cuatro.
11. Profesora: [Dibuja una de las figuras del *Tetris*.]
12. Juan David: Sí, así sí sirve.
13. Andrés: Tienen que estar unidas por los lados.
14. Profesora: ¿Todos están de acuerdo con lo que dijo Andrés?

15. Juan David: [Hace movimiento aprobatorio con la cabeza].

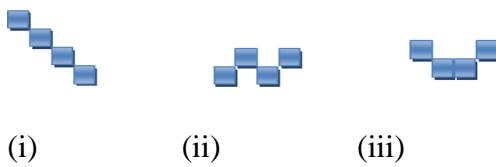


Figura 1. Opciones de ubicación de los cuadrados en las fichas

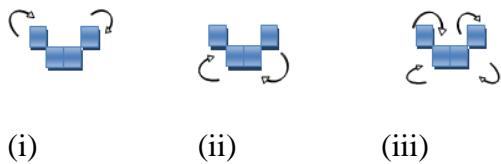


Figura 2. Opciones de espacios señalados por el estudiante

En un primer momento, Juan David reconoce que una figura no tiene la configuración de las fichas del *Tetris* y se refiere a ella como “mal armada” [2]. Identifica visualmente la diferencia que existe entre las fichas del *Tetris* y la figura que se muestra. A petición de la profesora, argumenta por qué no es una ficha del *Tetris*. Para ello se refiere a que no se pueden dejar espacios [6] y explica a qué se refiere con la expresión “los cuadros tienen que estar rellenos” [7]; entonces hace la comparación y posiblemente imagina los cuadros en teselado formando una figura, para diferenciar las figuras del *Tetris* con la que se le muestra, pero no usa el vocabulario adecuado para hacer la explicación. Para confirmar que el estudiante se refiere a los espacios que dejan los cuadrados cuando se unen por los vértices, la profesora muestra otra figura con una configuración similar. Efectivamente, el estudiante responde que se siguen dejando espacios y lo confirma ante la insistencia de la profesora [8-13]. Finalmente, ella muestra una figura del *Tetris* que Juan David reconoce como correcta [15]. Andrés, un compañero explica que los cuadrados se unen por los lados, expresando con claridad lo que Juan David estaba tratando de decir, y Juan David asiente.

El desempeño en la tarea confirma que Juan David interpreta la configuración patrón de las fichas del *Tetris*, pero no hace uso del vocabulario adecuado ya que lo que es más evidente es la dificultad de estudiantes para comunicar lo que está pensando en relación con la operación identificar.

Juan David lleva a cabo la operación de identificación por medio de Interpretación de la Información Figural aunque no expresa sus ideas de manera adecuada, en la medida en que el estudiante logra extraer características generales de la ficha que no pertenece al *Tetris*, la compara con las fichas que sí pertenecen desde el referente físico mostrado en el tablero. El hecho de reconocer la configuración de la ficha está muy relacionado con los invariantes *se mantiene la forma y tamaño*, en el caso de la rotación, y en traslación *se conservan forma, tamaño y orientación*.

Frente al uso del videojuego, la manifestación muestra cómo el estudiante hace reflexionar al estudiante y estimula su capacidad deductiva para reconocer las características de la configuración de las fichas que pertenecen o no al videojuego *Tetris*.

Ejemplo 2 (Fase de elaboración). El siguiente extracto de conversación está sacado de una interacción con el estudiante, en la fase de elaboración de la propuesta de enseñanza para analizar el proceso de aprehensión operativa. Con las fichas en movimiento, la profesora pregunta si las fichas que van bajando por el tablero llenan el espacio que se muestra y si además completan alguna línea.

1. Profesora: ¿Usted cree que la figura que va bajando me completaría línea? [Pausa.]
2. Juan David: Eh... No.
3. Profesora: ¿Por qué?
4. Juan David: Porque faltaría una acá para completar línea. [Muestra el espacio señalado con una flecha amarilla en la Figura 3.]
5. Profesora: ¿Cuántos cuadritos harían falta por llenar?
6. Juan David: Dos.
7. Profesora: Dos cuadritos. Baje y compruébelo.
8. Juan David: ¡Ah! No. Uno. [Se pausa de nuevo el juego]



Figura 3. Pantalla del *Tetris* con respecto a la cual se conversa

Al realizar una comparación de la ficha que va bajando con el espacio que se debe llenar, Juan David presupone que la ficha no llena el espacio y afirma que se necesitan dos cuadros para llenarlo; sin embargo, al compararlo se da cuenta que hace falta sólo un espacio.

La respuesta que da Juan David con base en una medición que hace a “ojo” corresponde a una hipótesis errada que plantea para después verificar utilizando los controles [2-8]. Esto nos permite ver que Juan David da muestras de poner en juego la función “Tratamiento de estrategias para verificar hipótesis”, sin tener éxito en el desarrollo de la tarea. De lo anterior podemos concluir que el estudiante no logra una aprehensión operativa, pues aunque tiene presente la jugada, no logra reunir una o un grupo de estrategias adecuadas para llegar a la solución de la situación.

Aunque el efecto del videojuego en esta situación no sea positivo, dicho ejemplo sirve para ilustrar cómo el estudiante se apropiá de la situación para dar solución a la misma. Esto es, el estudiante logra poner en juego competencia de resolución de problemas, mediante el uso de estrategias o hipótesis planteadas y aunque son erradas, él logra darse cuenta de esto posteriormente con la solución del mismo.

ALGUNAS REFLEXIONES

Sobre el comportamiento de estudiantes con necesidades particulares de aprendizaje. El videojuego permite que los estudiantes del estudio de caso muestren desempeños exitosos al desarrollar las tareas propuestas en el dispositivo didáctico, en tareas que apuntan a la noción de traslación y rotación. La componente visual de la herramienta del *Tetris* logra centrar la atención y dis-

tribuirla para realizar adecuadamente tareas que implican movimientos rígidos en el plano, además de permitir la motivación del estudiante para que las estrategias que plantee le ayuden a ganar el juego. Esto implica que algunas de las dificultades de un estudiante con necesidades particulares de aprendizaje sean compensadas con otras habilidades desarrolladas por él durante la actividad, al utilizar el recurso tecnológico.

Sobre el videojuego y el aprendizaje en matemáticas. Se puede observar que el videojuego *Tetris*, acompañado de un diseño pedagógico apropiado, favorece el desempeño en el acercamiento a las nociones matemáticas de niños que tienen necesidades particulares de aprendizaje frente a reflexión, desarrollo de competencias de resolución de problemas, y capacidad deductiva. Vale la pena resaltar que aunque existen diferentes tipos de videojuegos que son llamativos por su entorno visual, y de sumo interés para los estudiantes, no todos ofrecen el entorno necesario para tratar con conceptos matemáticos sencillos.

Sobre el manejo de grupo en la implementación de estas actividades. Es muy probable que el uso de este tipo de actividades en grupos grandes no dé resultados positivos, ya que la preparación y aplicación de las mismas demandan tiempo y atención constante en cada uno de los “videojugadores”.

Sobre la actividad investigativa. La toma de decisiones frente a este tipo de análisis es complicada, ya que hay que hacer una inspección minuciosa de la información relevante, manteniendo presentes, de un lado el marco teórico, y de otro, la actividad matemática que despliegan los estudiantes asociada a las nociones de traslación y rotación. Esto es, se debe mantener el “lente investigativo” para poder hacer el filtro de la información realmente importante. El tiempo dedicado al análisis de los estudios de caso requiere de bastante tiempo, lo que nos hace reflexionar sobre la complejidad de los análisis cualitativos.

REFERENCIAS

- Acevedo, J. (2010). *Modificabilidad estructural cognitiva vs. visualización: un ejercicio de análisis del uso del Tetris en tareas de rotación y traslación*. Tesis de pregrado no publicada, Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, Colombia.
- Bishop, A. (1983). *Spatial abilities and mathematical thinking*. En M. Zweng, T. Green, J. Kilpatrick, H. Pollak y M. Suydam (Eds.), *Proceedings of the Fourth International Congress on Mathematical Education* (pp. 176-178). Boston, USA: Birkhäuser.

- Del Grande, J. (1990). Spatial sense. *Arithmetic Teacher*, 37(6), 14-20.
- Duval, R. (1995). Geometrical pictures: Kinds of representation and specific processings. En R. Sutherland y J. Mason (Eds.), *Exploiting mental imagery with computers in mathematics education* (pp. 142-158). Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag. Consultado el 16 de junio de 2010 en:
http://books.google.com/books?id=R6PC_8GCt2AC&printsec=frontcover&dq=Computers&as_brr=3&cd=90&source=gbs_slider_thumb#v=onepage&q&f=false
- Gal, H. y Linchevski, L. (2010). To see or not to see: Analyzing difficulties in geometry from the perspective of visual perception. *Educational Studies in Mathematics*, 74(2), 163-183.
- Presmeg, N. (1986). *Visualization in high school mathematics. For the learning of mathematics*, 6(3), 42-46.

APROXIMACIÓN AL TRATAMIENTO ESCOLAR DE LA GEOMETRÍA A TRAVÉS DE MATERIALES MANIPULATIVOS

Gilbert Cruz y Carlos Montenegro

Colegio Lacordaire

andrescruz1008@hotmail.com, cemn_1987@hotmail.com

En años recientes, un cuerpo creciente de investigaciones en didáctica de las matemáticas han identificado algunas dificultades en relación con el aprendizaje de contenidos temáticos, procesos y contextos relacionados con el pensamiento espacial y sistemas geométricos, siendo comúnmente atribuidas a causas de orden epistemológico, cognitivo, curricular y didáctico. En este sentido se revela como prometedor el estudio del proceso de integración al currículo y a las prácticas escolares, de *recursos*, concretamente lo que se refiere a materiales manipulativos. Esto con la intención de fortalecer en los estudiantes los conocimientos adquiridos para resolver algunos problemas de su entorno escolar y cotidiano, a medida que avanza su proceso de aprendizaje.

PLANTEAMIENTO DEL TEMA

En años recientes, un cuerpo creciente de investigaciones en didáctica de las matemáticas han identificado algunas dificultades en relación con el aprendizaje de contenidos temáticos, procesos y contextos relacionados con el pensamiento espacial y sistemas geométricos, siendo comúnmente atribuidas a causas de orden epistemológico, cognitivo, curricular y didáctico. En este sentido, resulta importante explorar nuevas perspectivas para el estudio de los fenómenos relativos a la enseñanza y el aprendizaje de la geometría que permitan la formulación y eventual puesta en *práctica de alternativas de intervención*¹ en las aulas de matemáticas. Un campo que se revela prometedor es el estudio del proceso de integración al currículo y a las prácticas escolares, de *recursos*², concretamente lo que se refiere a materiales manipulativos. Ahora

¹ Entendemos por *práctica de alternativas de intervención* un hecho que sucede al interior de las aulas en el que se tienen distintas visiones sobre cómo abordar un mismo contenido. Puede considerarse como una opción y no como una imposición institucional para brindarle a los estudiantes una o distintas maneras de asimilar un mismo contenido.

² En este sentido las prácticas de alternativas de intervención se enriquecen a partir de los distintos medios físicos o virtuales, de lectura o de exploración, de práctica o invención, etc., con la intención de enriquecer los procesos cognitivos y metacognitivos no sólo de los Cruz, G. y Montenegro, C. (2011). Aproximación al tratamiento escolar de la geometría a través de materiales manipulativos. En P. Perry (Ed.), *Memorias del 20º Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones* (pp. 345-354). Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

bien, aunque estas investigaciones cuentan con cierta tradición en el campo de la didáctica de las matemáticas, el impacto en las prácticas de enseñanza todavía parece débil y sólo recientemente han presenciado un interés renovado sobre sus alcances y proyecciones en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en el ámbito escolar.

En este punto se hace visible la importancia del estudio de las dificultades, obstáculos y errores de los estudiantes en relación con el aprendizaje de la geometría, el estudio y análisis de las concepciones y creencias de los docentes de matemática en relación con la enseñanza, aprendizaje y evaluación de las matemáticas, concretamente en geometría, y el papel de las propuestas curriculares vigentes sobre las iniciativas de integración de materiales didácticos en las aulas de matemáticas y la indagación de otros que sirvan de realimentación a dichos procesos. De manera particular, se retoma el aporte de las investigaciones sobre el impacto de la integración de un tipo de recursos didácticos, los manipulativos.

MARCO DE REFERENCIA

Al respecto puede señalarse que las investigaciones en didáctica de las matemáticas desarrolladas en las últimas décadas reconocen un interés creciente por precisar el impacto de los recursos (material manipulativo) en el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas, discutir las limitaciones de su uso y estudiar las posibilidades de su integración en la clase de matemáticas (Post, 1981; Godino y Recio, 1998). En general, se señala la existencia de una importante relación entre el uso de recursos y materiales didácticos y el desempeño de los estudiantes:

El uso de los *manipulativos*, un tipo particular de recursos, se presenta en el marco de las investigaciones realizadas desde las primeras décadas del siglo XX en relación con la formación y evolución de conceptos en los niños (Piaget, 1971; Dewey, 1938; Bruner, 1960; Dienes, 1969). Estas investigaciones sugieren que en algunos momentos los conceptos de los niños evolucionan a través de la interacción directa con el ambiente y que precisamente los manipulativos son vehículos que permiten que esto suceda. La importancia de este tipo de estudios, se asocia al reconocimiento de la posibilidad de que se proporcione un conjunto de evidencia “persuasiva” para los docentes de matemáticas en rela-

estudiantes sino también de los docentes que intervienen en el proceso de enseñanza y aprendizaje.

ción con el uso de *materiales manipulativos* en la clase de matemáticas. (Post, 1981)

Este es un asunto complejo, pues también se señala que existen relativamente pocos programas curriculares que incorporan un componente experimental significativo y la mayoría se concentra en el trabajo con textos y guías escolares:

En cuanto concierne a la presencia en las distintas propuestas curriculares de muchos países, prevalece la idea de que el uso de materiales didácticos constituye un factor importante para mejorar la calidad de la enseñanza, particularmente en los primeros niveles de escolaridad. Se suele señalar la influencia profunda que, desde la década de 1980, tienen los trabajos del NCTM sobre esta visión. (Post, 1981)

El estudio de la dimensión curricular se revela como un escenario adecuado para analizar y comprender el desarrollo del pensamiento matemático vinculado a la comprensión y desarrollo de procesos y contextos matemáticos.

Sin embargo dicho análisis está sujeto a ciertas consideraciones ya que el diseño, planificación y desarrollo de una propuesta curricular o de una unidad didáctica no se reduce a la selección y secuenciación de un conjunto de conceptos y procedimientos sobre unos tópicos matemáticos determinados, si no que incorpora otro tipo de informaciones que aportan diferentes sentidos al conocimiento matemático y que a la vez lo enriquecen. En este orden de ideas nace la necesidad de una reformulación innovadora y local del currículo de matemáticas, la cual requiere de nuevos organizadores del currículo para los diferentes niveles de concreción. De allí emerge la necesidad de una propuesta denominada *Análisis Didáctico* en la que se tiene como elementos teóricos y metodológicos, articuladores y facilitadores la noción de organizadores del currículo de matemáticas (conocimientos que se adoptan como componentes fundamentales para articular el diseño, desarrollo y evaluación del currículo). (Bedoya, 2011, pp. 2-10)

Ahora bien, también puede señalarse que a finales de la década de 1990, como resultado de la emergencia de nuevos modelos teóricos en Didáctica de las Matemáticas, se plantean nuevos interrogantes en relación con el uso de materiales manipulativos en el estudio de las matemáticas. En algunos casos, estos plantean la necesidad de precisar: (1) la noción de material didáctico y sus tipos; (2) las funciones semióticas e instrumentales de los sistemas de signos; (3) las relaciones entre materiales manipulativos, problemas matemáticos y

situaciones didácticas; (4) la ingeniería didáctica como marco integrador de la investigación científica y la práctica de la enseñanza (Godino y Recio, 1998).

Otra dimensión de análisis en relación con el uso de los recursos en la enseñanza de las matemáticas se relaciona con las funciones asociadas a ellos, particularmente a los materiales manipulativos. Se suele referenciar fundamentalmente las funciones que pueden desempeñar estos materiales dentro del marco más general del papel de los medios de expresión en la actividad matemática, y de manera más general dentro del estudio de las relaciones entre lenguaje y pensamiento (Vigotsky, 1934, citado en Godino y Recio, 1998). A partir de esta aproximación, se plantea que los recursos expresivos desempeñan un papel esencial en el triángulo epistemológico (signo, concepto, objeto), en sus distintas formulaciones, y en las funciones semióticas que se establecen entre dichos elementos (Godino y Recio, 1998).

En general, se considera desde la perspectiva de Brousseau (1983) que:

Un conocimiento, como un obstáculo, es siempre el fruto de una interacción del alumno con su medio y más precisamente con una situación que hace el conocimiento “interesante”, quiero decir “óptima” en un cierto dominio definido por características numéricas “informacionales” de este conocimiento.

Reiterando que:

[...] en el conocimiento, el hombre y el medio siendo lo que son, es inevitable que esta interacción desemboque a concepciones³ “erróneas”. De todos modos estas concepciones son comandadas por las condiciones de la interacción que uno puede más o menos modificar. Esta declaración tiene importantes consecuencias, en principio para la enseñanza: así, si uno quiere desestabilizar una noción bastante enraizada, será ventajoso que el estudiante pueda invertir suficientemente sus concepciones dentro de situaciones. (Brousseau, 1983)

Esta aproximación permite reconocer importantes consecuencias para la organización de situaciones problemáticas. En efecto, como señala Brousseau, la concepción del aprendizaje que se apoya sobre el estudio del desarrollo de los conocimientos en términos de obstáculos difiere sensiblemente de la concep-

³ En este sentido se guarda la perspectiva que Brousseau propone al respecto: la concepción se constituye en una herramienta para el análisis del saber y el diseño de situaciones didácticas que permitan analizar las actuaciones de los estudiantes en relación con un concepto matemático.

ción clásica de aprendizaje, sobre todo en lo que concierne al rol y a la organización de las situaciones de problemas. En consonancia con esto, se señala que:

Plantear un problema consiste en encontrar una situación con la cual el estudiante va a emprender una sucesión de intercambios relativos a una misma cuestión que forma un “obstáculo” para él, y sobre el cual va a apoyarse para apropiarse, o construir, un conocimiento nuevo. (Brousseau, 2007, p. 6)

Adicionalmente, se considera que el proceso de superar un obstáculo comporta necesariamente una sucesión de interacciones entre el estudiante y el medio que ponen en juego distintos sistemas de representación y pueden a menudo ser interpretados como intercambios de mensajes. Para Brousseau, organizar el franqueamiento de un obstáculo consistirá en proponer una situación susceptible de evolucionar y de hacer evolucionar al estudiante según una dialéctica conveniente. Estas aproximaciones reivindican la importancia de la Teoría de Situaciones Didácticas de Brousseau (1986)⁴ y la Teoría de la Educación Matemática Realista⁵ desarrollada en el Instituto Freudenthal (Gravemeijer, 1994) como marcos de referencia para el estudio del uso de los recursos en la enseñanza de las matemáticas. En general, sostienen que debe analizarse cuidadosamente el uso de materiales manipulativos tangibles en los primeros niveles de enseñanza y el rol de éstos como apoyo ostensivo para la reflexión matemática.

Así, y desde ciertas propuestas, se señala la importancia del trabajo experimental en matemáticas, de manera que los estudiantes puedan simular las distintas situaciones o experiencias escolares que se presentan en su quehacer. De esta forma emerge la importancia de implementar en las clases de matemáticas la utilización de materiales manipulativos que le permitan al estudiante explo-

⁴ Su contribución teórica esencial al campo de la Didáctica de las Matemáticas es la Teoría de Situaciones Didácticas, una teoría cuyas primeras formulaciones fueron hechas a comienzos de la década de los años setenta. Brousseau propone un modelo desde el cual pensar la enseñanza como un proceso centrado en la **producción** y la **validación** de los conocimientos matemáticos.

⁵ Esta teoría comenzó a gestarse en el Instituto Freudenthal a comienzos de los años setenta. Propone que los estudiantes deben aprender matemáticas desarrollando y aplicando los conceptos y herramientas matemáticas en situaciones que tengan sentido para ellos. Es decir, que no necesariamente están ligadas a situaciones de la vida real sino a situaciones que pueden *imaginar* pero que son “reales” para ellos.

rar ciertos conceptos de una manera diferente y en este sentido validar o no un conocimiento que se ha puesto en un contexto diferente al habitual. Ahora bien, así se reconoce, desde una perspectiva didáctica, que las concepciones y prácticas escolares en relación con este tipo de prácticas docentes están estrechamente asociadas a las creencias y concepciones de los profesores sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, y sobre la naturaleza y el rol otorgado a las mismas en estos procesos. De esta manera, es posible reconocer que para la integración de una propuesta docente que se inspire en la utilización de materiales manipulativos se requiere de un enriquecimiento a nivel de una cultura escolar, que responda al reconocimiento de las expectativas, necesidades, ventajas y desventajas de docentes, estudiantes y directivos de una institución educativa.

PRESENTACIÓN DE LA TESIS

En general, como maestros de matemáticas, la necesidad de reconocer las concepciones, creencias, intereses y necesidades de los estudiantes surge como una manera de poder crear condiciones que les permitan a los estudiantes usar los conocimientos adquiridos para resolver algunos problemas de su entorno escolar y de su entorno cotidiano a medida que avanza su proceso de aprendizaje. Este presupuesto nos lleva a conceder especial valor al estudio de los sistemas de creencias de profesores y estudiantes, dado que éstos inciden en sus comportamientos, ayudan a explicarlos y ofrecen pistas para tratar de modificarlos o mejorarlos. Se acepta que las creencias influyen en la forma en que se aprende, se enseña y se aplica la matemática; a su vez, la forma de aprender y utilizar las matemáticas, configuran las creencias y los sistemas de creencias. De aquí que las creencias matemáticas de un individuo y su punto de vista matemático, formen un sistema regulador de su estructura de conocimiento; dentro de este marco actúa y piensa, y a su vez este marco influye fuertemente en su rendimiento. Este es un asunto central en la propuesta, que permite plantear un escenario de indagación e intervención, más amplio en el que se inscriben, el trabajo con materiales y recursos manipulativos, a saber, el **trabajo experimental en las clases de matemáticas**. Ahora bien, como este proceso es social y culturalmente condicionado –y muchas veces– determinado o limitado por la cultura escolar, se requiere un enriquecimiento colectivo que tome en cuenta e integre de manera concertada las expectativas, necesidades, percepciones y creencias de docentes, estudiantes y directivos de una institución educativa.

A partir de estas consideraciones formulamos una propuesta de trabajo que permita abordar desde las perspectivas epistemológica, matemática, didáctica y curricular la integración de recursos y materiales manipulativos en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la geometría en el ámbito escolar.

De igual manera, nos proponemos caracterizar algunas de las concepciones y creencias de estudiantes, docentes y directivos de educación básica sobre el aprendizaje de la geometría mediada por recursos manipulativos y su impacto en el diseño y/o rediseño de planes de aula en una institución escolar. También nos proponemos vincular los aportes que esto nos brindaría a una iniciativa de carácter institucional, que nace en el marco del *Laboratorio de Matemáticas*. Esta iniciativa se ha venido implementando de manera experimental, a partir de la elaboración, por parte de los estudiantes, de algunos materiales como: geoplanos, juegos de cartas poligonales, bloques poligonales, dominós poligonales, entre otros. Materiales estos que han sido usados en distintas clases para el fortalecimiento y enriquecimientos de estrategias didácticas enfocadas en la práctica docente, obteniendo resultados que aportan a estrategias que potencian y facilitan el proceso educativo de un conocimiento matemático en particular.

Así, el uso adecuado de materiales manipulativos puede llegar a ser un excelente recurso didáctico para dirigir el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, ya que le da la oportunidad al docente de mejorar su labor pedagógica, y a los estudiantes la opción de transformarse en personas *originales*⁶ junto con sus pares (compañeros, docentes, etc.): constructores del conocimiento, imaginativos, dinámicos, y creadores de ideas.

En consecuencia, es posible afirmar que es a partir de las concepciones que surgen al momento de que los estudiantes son puestos a prueba dentro de las prácticas escolares, como se evidencian las limitaciones teóricas e inclusive, en el plano operativo, un nivel limitado de desempeños. Por esta razón, la formación de los docentes se revela entonces como una alternativa para superar este estado. Para el docente llegar a conocer las concepciones de los estudiantes, podría dar puntos de vista más fundamentados sobre la enseñanza y el aprendizaje de otros conceptos matemáticos en el ámbito escolar. De allí que la mayoría de las dificultades que presentan los estudiantes en su vida es-

⁶ *Originales*, hace referencia al hecho de que los estudiantes se conviertan en personajes propositivos y no sólo sea el maestro quien lo es.

colar, se deben a falencias conceptuales que le impiden apropiarse de nuevos conceptos y/o relacionarlos con otros.

En la medida en que el profesor conozca las concepciones de los estudiantes, propondrá ciertos problemas o situaciones que conduzcan a evidenciar, modificar o completar tales concepciones, de tal manera que éstas se aproximen cada vez más al concepto en cuestión. El estudio de las concepciones es igualmente revelador de la falta de conexión tanto en el plano de la enseñanza como en el curricular de estos conceptos con aspectos de la realidad cotidiana que podría abordarse ampliando los contextos en los cuales se les presenta el concepto a los estudiantes. En general, los aportes y proyecciones de este trabajo busca crear un nivel de comprensión y de compromiso en la comunidad educativa, de tratamientos escolares que superen la manera convencional en que se introducen ciertas temáticas en las clases y que sirva en un futuro para hacer más visible una toma de conciencia en torno a lo que los estudiantes están considerando o no como relevante en su proceso de enseñanza y aprendizaje, el por qué y el sentido del mismo. De esta forma se estaría mejorando la labor docente de forma cualitativa y se estaría dotando a los estudiantes de herramientas que les permitirían interactuar de mejor forma con el medio en el que se encuentren inmersos.

Por otra parte, en un acto de enseñanza el lenguaje es el “medio” que regula la interacción entre los individuos y permite la relación maestro-estudiante y viceversa; por esta razón en el proceso de construcción de un conocimiento se hace necesario reconocer al estudiante como ser pensante, que puede llegar a la apropiación de un conocimiento por la vía de la experimentación, el análisis y la reflexión. Asimismo se hace necesario que durante este proceso el docente tenga una participación activa y significativa, que motive y muestre al estudiante que, en su hacer matemáticas, un objeto matemático puede tener diferentes formas de ser representado o abordado, según la situación o actividad en la que se enmarque. Como lo plantea Bishop (1999): las actividades que se consideran matemáticas son aquellas que producen distintas ideas matemáticas; igualmente plantea que los cimientos del conocimiento matemático en distintas culturas son las que se indican a continuación: contar, localizar medir, dibujar, jugar y explicar. De esta forma se hace pertinente tener en cuenta las siguientes consideraciones:

- Se hace indispensable que el docente adquiera conciencia de la necesidad que existe en el aula, de incorporar herramientas didácticas innovadoras para estimular la “creatividad” de sus estudiantes.
- Por otro lado, le permitirá incluir interrogantes a través de actividades por niveles, y trabajar tanto con las necesidades como con las potencialidades de una manera personalizada.

Reconocemos que existen herramientas instructivas convencionales (e.g., la “teoría” acerca de un tema específico sin contexto, la exemplificación a través de gráficos, etc.) que de igual forma contribuyen en el desarrollo cognitivo del educando. Pero, a diferencia de éstas, mediante el uso del geoplano⁷ se busca despertar el potencial creativo de los estudiantes y obtener resultados trascendentales, que no sólo tendrán implicaciones en las matemáticas sino en otras áreas de estudio. En este sentido, el geoplano, las cartas poligonales, los bloques, etc., se convierten en un recurso didáctico para dirigir el proceso de enseñanza-aprendizaje de la geometría, permitiendo a los estudiantes la verificación de propiedades, la socialización de ideas, la indagación sobre distintas formas, la apropiación de nuevas ideas acerca de distintos objetos, figuras y propiedades geométricas.

CONCLUSIONES

En general, es posible señalar que las actividades con materiales manipulativos se pueden ver como una *actividad humana* que puede potenciar ciertas capacidades humanas que podrían fortalecer y facilitar procesos de enseñanza. Sin embargo, es necesario aclarar que no todos los juegos son significativos desde el punto de vista matemático, ¿Qué los hace significativo? ¿Solamente el hecho de emplear consciente o inconscientemente un conocimiento matemático? Se considera que se debe ir más allá, pues dentro de una actividad significativa que propicie la apropiación de un conocimiento matemático, pueden reconocerse factores que en un futuro llevarían a facilitar la comprensión de un objeto matemático abstracto; por ejemplo, el reconocer las normas, procedimientos estrategias modelos, etc. De igual manera, la implementación de actividades matemáticas fundamentadas con materiales manipulativos requiere de un análisis especial, pues como se pudo notar en los interrogantes

⁷ Se presenta como anexo una de las actividades diseñadas para la utilización del geoplano; está orientada a reforzar los conceptos de perímetro y área.

planteados son muchos los factores que se deben estudiar para ver si en verdad se pueden utilizar en pro de un conocimiento matemático o solamente como algo lúdico que rompe el esquema de una clase magistral.

REFERENCIAS

- Bedoya, E. (2011). *Formación profesional del profesor de matemáticas: Conocimiento y análisis didáctico*. Documento de trabajo en elaboración, Universidad del Valle, Cali, Colombia.
- Bishop, A. (1999). *Enculturación matemática. La educación matemática desde una perspectiva cultural*. Barcelona, España: Paidós.
- Brousseau, G. (1983). Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 4(2), 165-198.
- Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 7(2), 33-115. (Traducido al castellano como: *Fundamentos y métodos de la didáctica de las matemáticas*, por Julia Centeno, Begoña Melendo y Jesús Murillo, en 1989).
- Brousseau, G. (2007). *Introducción al estudio de la Teoría de las Situaciones Didácticas*. Buenos Aires, Argentina: Libros del Zorzal.
- Godino, J. y Recio, A. (1998). Uso de material tangible y gráfico-textual en el estudio de las matemáticas: superando algunas posiciones ingenuas. En A.M. Machado et al. (Eds.), *Actas do ProfMat 98* (pp. 117-124). Guimaraes, Portugal: Associaçao de Professores de Matemática:
- Gravemeijer, K. (1994). Educational development and developmental research in mathematics education. *Journal for Research in Mathematics Education*, 25(5), 443-471.
- Post, T. (1981). The role of manipulative materials in the learning of mathematical concepts. En *Selected issues in mathematics education* (pp. 109-131). Berkeley, CA: National Society for the Study of Education and National Council of Teachers of Mathematics, McCutchan Publishing Corporation.

FIGURAS DE ANCHO CONSTANTE: UN TEMA POR EXPLORAR

Leidi Gil y Martha Orjuela

Universidad Pedagógica Nacional

leidifuentes@yahoo.es, tuchisgomez@hotmail.com

El objetivo de la ponencia es describir algunos métodos de construcción en el entorno Cabri Geometry II Plus que generan figuras de ancho constante; tales métodos son producto de un estudio sobre algunas propiedades y la historia de figuras con esta característica. Para el desarrollo de esta propuesta, presentamos específicamente un contexto que provee información sucinta de las propiedades básicas de estas figuras. Luego exponemos métodos de construcción que las generan y describimos los caminos que se utilizaron para poder deducirlos.

CONTEXTUALIZACIÓN

Las figuras geométricas de ancho constante son aquellas *que tienen el mismo ancho en cualquier dirección*. El *ancho de una figura* se refiere a la distancia entre dos rectas paralelas entre sí y perpendiculares a la dirección dada; estas rectas, conocidas como rectas soporte, intersecan a la figura en un solo punto y son perpendiculares a una cuerda de la figura que indica dicha dirección (Montejano, 1998). Si los extremos de esta cuerda están contenidos, uno en cada una de las rectas soporte, la magnitud de esta cuerda indica el ancho de la figura.

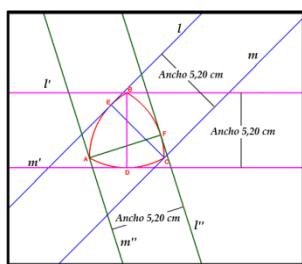


Gráfico 1. Figura de ancho constante

Las figuras de ancho constante son convexas y se pueden generar infinitas copiando métodos de construcción o simplemente modificando algunos pasos de tales métodos. Por otro lado, estas figuras han sido estudiadas desde Euler, quien las conocía como orbiformes; además se les han dado distintas aplicaciones en la ingeniería, la arquitectura y la mecánica.

MÉTODOS DE CONSTRUCCIÓN DE FIGURAS DE ANCHO CONSTANTE

Exponemos a continuación algunos resultados de nuestro estudio exploratorio. Para iniciar este apartado mostramos el método de construcción del Triángulo de Reuleaux (figura de ancho constante presentada en 1976 por el ingeniero y matemático Franz Reuleaux), generado a partir de su definición. Específicamente, *dado un equilátero de lado L, un Triángulo de Reuleaux es la unión de los tres arcos de circunferencia cuyos extremos son dos vértices del triángulo, el centro de la circunferencia es el vértice restante y el radio de la misma es L*". El procedimiento se ilustra en el Gráfico 2.



a. Construimos un triángulo equilátero ABC

b. Construimos $\odot A_{AB}$, $\odot B_{AB}$ y $\odot C_{CA}$



c. Construimos $\odot A_{AB}$, $\odot B_{AB}$ y $\odot C_{CA}$

d. Ocultamos las circunferencias y el triángulo.

Gráfico 2. Triángulo de Reuleaux $\hat{\Delta}ABC$

Con base en este método, nos surgieron los siguientes interrogantes: ¿Se originan figuras de ancho constante si en lugar de utilizar un triángulo equilátero, utilizamos cualquier polígono regular? Si no es así, ¿qué cambios podríamos plantear en el método para obtener figuras con esta propiedad? Gracias a la característica esencial de Cabri, su dinamismo producto de la función de arrastre, logramos dar respuesta a esos interrogantes y encontrar generalidades que nos permitieron obtener figuras de ancho constante. Por ejemplo, al partir de polígonos regulares de un número impar de lados, observamos que utilizando el mismo método de construcción para el Triángulo de Reuleaux, obtenemos

figuras de ancho constante tales que su ancho es igual a la longitud del diámetro del polígono (ver Gráfico 3).

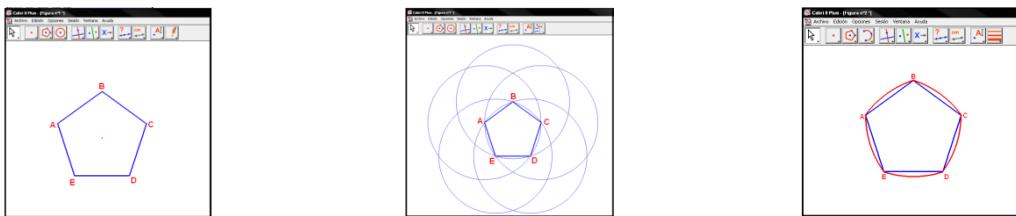


Gráfico 3. Pentágono de ancho constante

Por otro lado, con polígonos regulares de un número par de lados se mostró que el método de construcción anterior no genera figuras de ancho constante, pero que al utilizar nuevos arcos de circunferencia en el método, se obtienen figuras de ancho constante, no sólo una por polígono, sino varias dependiendo de su número de lados. Por ejemplo, si se parte del hexágono se obtienen dos figuras de ancho constante (ver Gráfico 4).

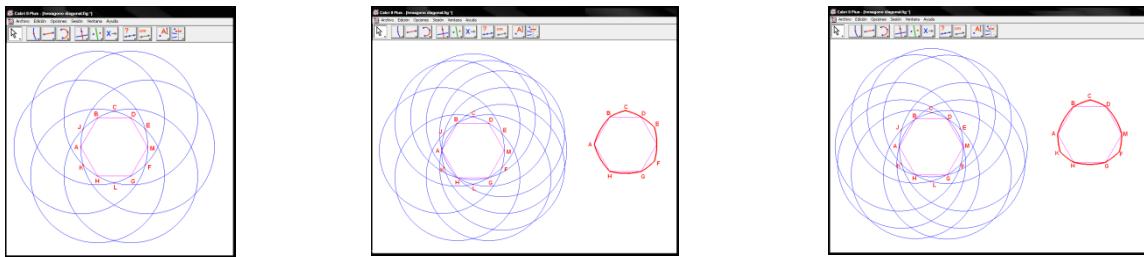


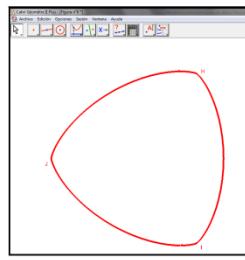
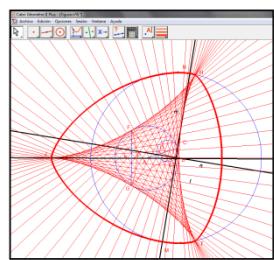
Gráfico 4. Hexágonos de ancho constante

Indagando un poco más en la historia de las figuras de ancho constante, se logró establecer otra figura de ancho constante llamada Curva de ancho constante de Euler, citada por Montejano (1998) quien afirma que esta curva surge de la Hipocicloide de Steiner y su evoluta. A partir de esta idea y luego de realizar una exploración en Cabri logramos construir la figura de ancho constante construyendo inicialmente dicha hipocicloide y luego su evoluta (Gráfico 5).



a. El lugar BFG es la hipocicloide de Steiner

b. El lugar HIJ es la evoluta de la hipocicloide de Steiner

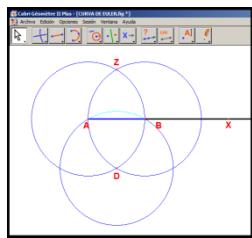


c. Construcciones auxiliares que generan la curva de Euler

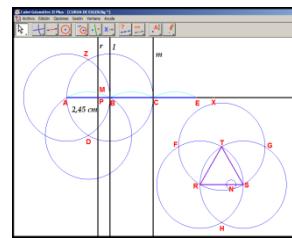
d. Curva de Euler, después de ocultar algunos objetos geométricos

Gráfico 5. Curva de ancho constante de Euler φIJH

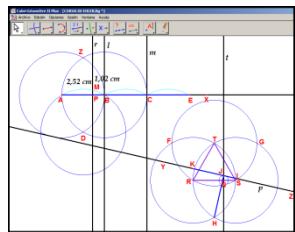
Como podemos observar la Curva de ancho constante de Euler se parece al Triángulo de Reuleaux, pero gracias a las características que tiene el software Cabri, como la visualización, la exploración y la justificación se pudo establecer que la curva de ancho constante no cumple con la definición del triángulo de Reuleaux.



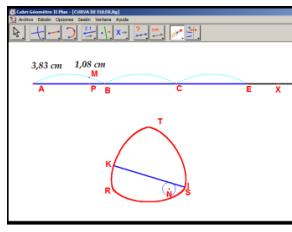
a. Construcción de un arco del Triángulo de Reuleaux



b. Construcción del punto P , de tal manera que al animarlo genere nuestra figura de ancho constante



c. Construcción del \overline{KI} tangente a los arcos simétricos de los arcos que conforman al Triángulo de Reuleaux



d. Figura de ancho constante después de animar el punto P y activar la traza de los puntos I y K

Gráfico 6. Figura de ancho constante a partir de un triángulo equilátero

A continuación mostramos una figura de ancho constante generada a partir de un triángulo equilátero y del segmento que cumple con la propiedad de ser tangente a los arcos simétricos de los arcos que conforman un Triángulo de Reuleaux con respecto a cada uno de los lados del triángulo equilátero (Gráfi-

co 6). Es importante resaltar que la figura generada a partir de este método tiene un parecido a la Curva de ancho constante de Euler, pero no contamos con las herramientas suficientes para probarlo.

Un resultado importante que se estableció después de la exploración del método de construcción anterior, fue la relación existente entre el número de lados y la cantidad de pétalos de las flores que se originan copiando este método partiendo de cualquier polígono regular. Aunque estas flores no originan figuras de ancho constante, ya que no son cerradas y no son convexas (Gráfico 7), decidimos mostrar el resultado, primero porque poseen propiedades interesantes, y segundo porque queríamos mostrar que no siempre se pueden generar figuras de ancho constante copiando todos los métodos de construcción expuestos.

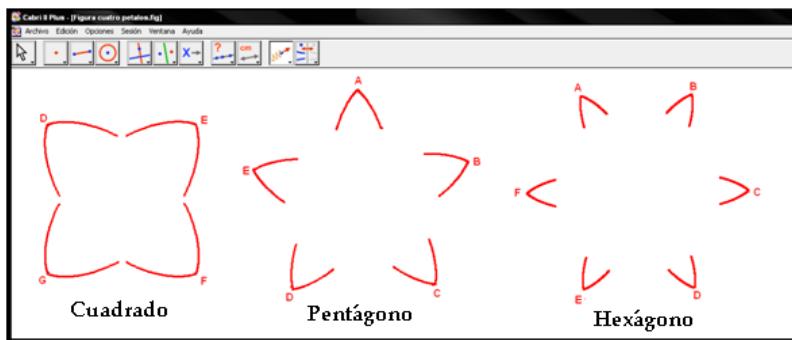
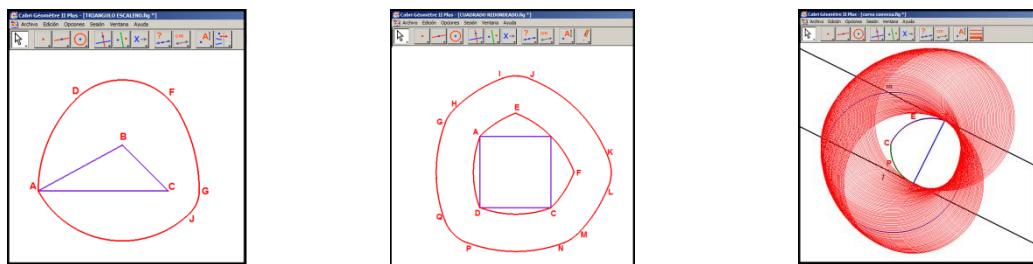


Gráfico 7. Flores de varios pétalos

Otros métodos de construcción que permiten generar figuras de ancho constante, se encontraron a partir de la exploración de figuras no regulares como el triángulo escaleno, el cuadrado, etc. (Gráfico 8). Los métodos se basaron en la construcción de arcos y en la construcción del lugar geométrico generado por puntos, segmentos o circunferencias.



a. Con base en un triángulo escaleno

b. Con base en el cuadrado

c. Con base en lugar geométrico de circunferencias

Gráfico 8

CONCLUSIONES

Cada uno de los procedimientos que presentamos están justificados; las construcciones realizadas en Cabri nos proporcionaron ideas para justificar por qué la figura construida tienen la propiedad de ancho constante debido a la relación existente entre el software y la teoría de la geometría plana euclíadiana (Mariotti, 1997). Las exploraciones consistieron básicamente en la copia de algunos procedimientos de construcción que son válidos y la modificación de los mismos a través de ensayos para obtener figuras de ancho constante; estas exploraciones nos permitieron plantear conjeturas, con lo cual Cabri se convirtió en un “*motor del pensamiento deductivo, pues las propiedades explícitamente construidas se convierten en premisas, siendo las conclusiones otras propiedades verificadas en la construcción*” (Castiblanco, Camargo, Rodríguez, Acosta, Urquina, Cuéllar y Moreno (2003).

REFERENCIAS

- Castiblanco, C., Camargo, L., Rodríguez, F., Acosta, E., Urquina, H., Cuéllar, H., Moreno, L. (2003). *Tecnologías computacionales en el currículo de matemáticas. Memorias del Congreso Internacional* (pp. 82-90). Bogotá, Colombia: MEN.
- Mariotti, M.A. (1997). Justifying and proving in geometry: The mediation of a microworld. En M. Hejny y J. Novotna (Eds.), *Proceedings of the European Conference on Mathematical Education* (pp. 21-26). Prague: Prometheus Publishing House.
- Montejano, L.P. (1998). *Cuerpos de ancho constante*. México, D.F.: Fondo de Cultura Económica.

GEOMETRÍA EN EL ALFABETO LÓGICO DE ZELLWEGER

Leonardo Granados y Norman Aya

Universidad del Tolima

olgranados@ut.edu.co, ayalar07@hotmail.com

Se presenta la geometría en el Alfabeto Lógico de Shea Zellweger a partir de la construcción de modelos de \mathbb{R}^2 a \mathbb{R}^4 , y el correspondiente análisis algebraico que permite establecer grupos de simetría.

INTRODUCCIÓN

A lo largo del siglo XX, de manera desapercibida para las principales corrientes de la matemática, diversos autores propusieron notaciones para los conectivos proposicionales binarios de la lógica clásica. La primera de ellas fue la que diseñó en 1902 el notable científico y filósofo norteamericano Charles S. Peirce. Posteriormente aparecen muchas otras que, con el tiempo, pueden clasificarse en las *alfabéticas*, las que emplean las letras del alfabeto común u otros signos convencionales, y, por otro lado, las *geométricas* que, como la de Peirce, representan cada conectivo mediante un dibujo que procura sintetizar la definición del mismo.

La única notación que combina de manera armoniosa estas dos cualidades, alfabética y geométrica según investigaciones recientes, es la propuesta por el norteamericano Shea Zellweger¹ desde hace casi cincuenta años, tiempo que su autor ha dedicado a investigaciones profundas y progresivas sobre este sistema de signos y sobre el simbolismo en general (Zellweger, 1997a, 1997b, 2003).

La idea tiene lugar en la ciudad de Chicago alrededor del año 1953, cuando el profesor Zellweger se interesó por la lógica matemática, en un viaje maravi-

¹ Shea Zellweger nació el 7 de septiembre de 1925 en Chicago Illinois, USA; se desempeñó desde 1969-1993 como profesor y presidente del Departamento de Psicología en Mount Union College en Alliance, Ohio. Probablemente es mejor conocido por la creación del más sencillo y mentalmente intuitivo sistema de notación lógica, que bien llamó Alfabeto Lógico o Alfabeto Lógico X-tremidad (XLA) por su sigla en inglés. El sistema de notación XLA contiene un enfoque visual único e iconográfico para el aprendizaje y la realización de las operaciones lógicas. Disponible en Internet: <http://www.logic-alphabet.net/>

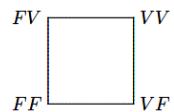
Granados, L. y Aya, N. (2011). Geometría en el alfabeto lógico de Zellweger. En P. Perry (Ed.), *Memorias del 20º Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones* (pp. 361-369). Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

lloso y obsesivo que eventualmente lo llevaría a la invención y desarrollo guiado por su innato amor por los patrones, a una nueva notación para los conectivos proposicionales binarios como un sistema visual que llamó Alfabeto Lógico, el cual se compone de dieciséis ($16=2^{2^2}$) formas o letras cuya clave de interpretación está en las “extremidades”. Por ejemplo, la letra **x** del Alfabeto Lógico tiene cuatro extremidades, **q** tiene una, y **o** no tiene ninguna. Con la convención adecuada, se puede pasar del signo a la tabla de verdad del conectivo que representa y viceversa. Por otra parte, los movimientos rígidos de los signos corresponden a operaciones lógicas, por ejemplo, a partir de la expresión **A d B** se pasa a **NA d B** donde *N* denota la negación y es equivalente a **A b B**, de hecho en general *negar la primera proposición* corresponde a *reflejar el signo en el eje vertical*. Esto a su vez conduce a interpretar en la lógica las simetrías que tengan los signos, por ejemplo, un conectivo es conmutativo, si y solo si, su signo en el Alfabeto Lógico es simétrico respecto a la diagonal ascendente.

Zellweger en su larga investigación alrededor del Alfabeto Lógico demuestra una sugestiva originalidad en la construcción de modelos físicos para el sistema de signos. Elaboró modelos unidimensionales, bidimensionales y tridimensionales que él insiste son proyecciones de modelos en cuatro dimensiones, y de esta manera la lógica se conecta con la geometría en la búsqueda de la verdad científica. Esa búsqueda nos ha permitido investigar y estudiar con mucho detalle los movimientos rígidos de los diversos modelos que revelan sorprendentes e insospechadas simetrías en el sistema de los conectivos binarios y su posible extensión a cuatro dimensiones. Asimismo establecer correspondencias explícitas de los movimientos rígidos de los modelos con los de las letras del Alfabeto Lógico, y la proyección de \mathbb{R}^4 a \mathbb{R}^3 para la cual la imagen es un rombododecaedro (Granados y Aya, 2010).

ALFABETO LÓGICO

El Alfabeto Lógico se fundamenta en un “cuadrado básico”. A cada vértice del cuadrado se le asigna una combinación de valores de verdad teniendo en cuenta la configuración del diagrama que se presenta al lado:



Cuadro básico

Cuando en un conectivo alguna de las combinaciones de valores de verdad es verdadera, el vértice correspondiente se marca con un punto aumentado, dando lugar a 16 posibles casos, por ejemplo, \square^{\bullet} . Estos diagramas a su vez se reducen a una forma cursiva que es propiamente el Alfabeto Lógico. (La forma cursiva de los diagramas está en la Tabla 1).

El mecanismo de construcción del Alfabeto Lógico consiste en ver la posición de los puntos en las esquinas del cuadrado para fijar el número de extremidades y, con ello, la letra misma. Por ejemplo, la ausencia de puntos en las esquinas del diagrama \square , le corresponde una letra que carece de extremidades como \circ ; en este diagrama no hay combinaciones de los valores donde el conectivo es verdadero y sus valores son $FFFF$. La presencia del punto en la esquina superior izquierda en el diagrama \square^{\bullet} indica una extremidad que corresponde a FV y tiene asociada una letra con una extremidad que es b . Los valores de este conectivo son $FFVF$. El diagrama $\square^{\bullet\bullet}$ tiene tres puntos que corresponden a una letra con tres extremidades: una en la esquina superior izquierda y dos en las esquinas inferiores. La letra que corresponde a este diagrama es la letra h . Los valores de este conectivo son $FVVV$, que son los de la “barra de Sheffer”. A continuación se expone la interrelación de los cuadros con las formas de letras del Alfabeto Lógico.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
VV	F	F	F	F	V	V	V	F	F	F	F	V	V	V	V	
VF	F	F	F	V	F	V	F	F	V	V	F	V	V	V	V	
FV	F	F	V	F	F	F	V	F	V	F	V	V	V	F	V	
FF	F	V	F	F	F	F	F	V	F	V	V	V	V	F	V	
	\square	\square^{\bullet}	$\square^{\bullet\bullet}$	$\square^{\bullet\bullet\bullet}$	$\square^{\bullet\bullet\bullet\bullet}$	$\square^{\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet}$	$\square^{\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet}$	$\square^{\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet}$	$\square^{\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet}$	$\square^{\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet}$	$\square^{\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet}$	$\square^{\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet}$	$\square^{\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet}$	$\square^{\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet}$	$\square^{\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet}$	
	\circ	p	b	q	d	c	u	s	z	n	ɔ	h	p	r	q	x

Tabla 1. El Alfabeto Lógico de Shea Zellweger

La continua exploración lo lleva a considerar la dimensión o tamaño que adquiere cada letra, las dieciséis letras las divide en dos conjuntos (8, 8). Las primeras ocho las denomina “altas”, tal vez porque tratan de ser alargadas con respecto a un eje vertical, ellas son: $p b q d h p r q$. Considerando el número de extremidades, este grupo se divide en dos (4, 4), las de una y las de tres. Las otras sutilmente las llama “encogidas”, en razón de ver ajustado su ancho: $o c u s z n \circ x$, tienen un número par de extremidades organizadas de la siguiente manera (1, 6, 1).

Una característica propia a la anatomía tiene su origen en el instante de combinar la conversión, cuando $(A * B)$ cambia a $(B * A)$. El autor separa las letras en otro par de conjuntos (8, 8) tomando como criterio los puntos del cuadrado y las diagonales que pasan desde la esquina superior derecha a la inferior izquierda, de este modo las letras (**p d h y o z s x**) adquieren la propiedad de simetría y conversión, mientras las otras (**b q u n c u n c**) carecen de la propiedad de conversión. En ese sentido el criterio pone a todas las letras en cuatro niveles de simetría y asimetría.

En la interacción de las funciones del Alfabeto Lógico, las letras toman diferentes posiciones cuando participan en operaciones lógicas. Disponer de una elegante y sencilla anatomía permite ver cómo ambas cualidades interactúan de una forma armoniosa, para llevar a cabo las mismas operaciones de simetría. La idea conduce a crear al interior del Alfabeto Lógico, sencillas reglas que permiten llevar a cabo variados movimientos con las letras que generan interesantes y elegantes representaciones de simetría, integradas por los modelos a partir de las propiedades del Alfabeto Lógico y los conectivos proposicionales, como en los cálculos de simetría, porque al diseñar las letras se genera la interrelación entre la tabla, el punto en el cuadrado y la correspondiente letra.

Las cuatro reglas de simetría o de movimiento vistas en acción, consisten en general en tomar las letras y hacerlas girar o buscar su complemento (Zellweger, 2003). Ellas se aplican a todas las expresiones pero se trabaja con una genérica, denotada $(A * B)$. Las cuatro reglas de simetría a exponer se expresan como sigue:

- **R1 Negar el miembro izquierdo del asterisco.** El movimiento resultante consiste en reflejar la letra de izquierda a derecha.
- **R2 Negar la letra del Alfabeto.** $N*$ consiste en el complemento de las letras, es decir todas las posiciones de las extremidades se invierten.
- **R3 Negar el miembro derecho del asterisco.** El movimiento consiste en reflejar la letra de arriba hacia abajo.
- **R4 Convertir.** Consiste en hacer una reflexión en la diagonal en el cuadrado que viene desde la esquina superior derecha a la esquina inferior izquierda.

R1	$(NA \text{ } d \text{ } B)$	cambia a	$(A \text{ } b \text{ } B)$
R2	$(A \text{ } N \text{ } d \text{ } B)$	cambia a	$(A \text{ } h \text{ } B)$
R3	$(A \text{ } d \text{ } NB)$	cambia a	$(A \text{ } q \text{ } B)$
R4	$(A \text{ } d \text{ } B)$	cambia a	$(B \text{ } d \text{ } A)$ Porque el punto de la letra d permanece en el mismo lugar en el cuadrado al momento de aplicar el giro en la diagonal; la razón, la conjunción es conmutativa
	$(A \text{ } b \text{ } B)$	cambia a	$(B \text{ } q \text{ } A)$

Tabla 2. Ejemplo de la aplicación de las reglas de simetría

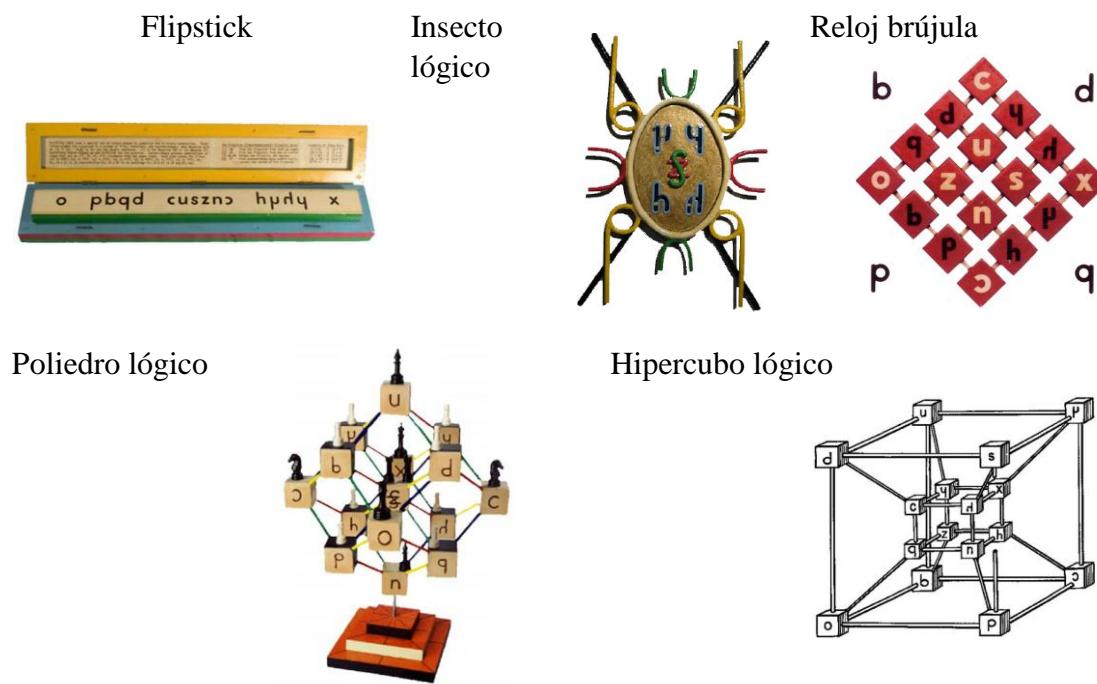
Estas cuatro operaciones propuestas por Zellweger son casos particulares de los automorfismos lógicos (García, Gómez y Oostra, 2001) considerados ahora en el Alfabeto Lógico, donde la negación se convierte en una acción totalmente sometida a la simetría como el principal motor del Alfabeto.

MODELOS DEL ALFABETO LÓGICO

Los modelos físicos de Zellweger encierran en su estructura propiedades de simetría que reflejan el potencial de su Alfabeto. La búsqueda se centra en la idea en que los diagramas deben ser claros, por lo menos más sencillos e isomorfos a aquello que representan (Oostra, 2001, 2004).

El modelo *Flipstick* o *Regla giratoria* está construido en una sola dimensión a partir de la Tabla 1, con las letras en las dos caras. Como se verá en los demás modelos, esta configuración es una proyección unidimensional de un plano, que a su vez es una sombra en el espacio de un hipercubo. El *Insecto lógico* es un modelo bidimensional con “brazos” (**b** **d**) y “piernas” (**p** **q**), que puede ser visto como una proyección en el plano de una sombra en el espacio de un cubo de cuatro dimensiones. Esto hace del Insecto lógico una proyección de una proyección, desde el cubo de cuatro dimensiones a la sombra en el espacio en un plano. El *Poliedro lógico*, aparece como un “esqueleto” en el espacio de un cubo de cuatro dimensiones diseñado a partir del conjunto de letras. Este modelo esconde maravillosas simetrías pues los movimientos rígidos coinciden con los movimientos de las letras y en sí con los de los conectivos. La figura es un rombododecaedro, un modelo de tres dimensiones construido de la misma forma en que un cubo en el espacio colapsa a lo largo de una de sus diag-

nales mayores. El modelo ordena los 16 vértices del cubo de cuatro dimensiones en los de un rombododecaedro. El rombododecaedro tiene 14 vértices, los otros dos conectivos se ubican en el centro. La importancia del Poliedro lógico está determinada en que incorpora todas las propiedades de simetría originadas por las reglas. A continuación se presentan modelos físicos del Alfabeto Lógico.

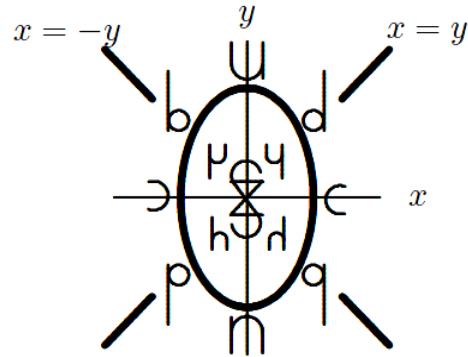


GEOMETRÍA EN EL ALFABETO LÓGICO

En el campo dimensional el Alfabeto Lógico permite maravillosos modelos geométricos que proporcionan simetrías partiendo de una adecuada configuración, dando la posibilidad de crear diseños y asimismo presentar de forma atractiva al explorador de notaciones diagramáticas, una herramienta muy útil para recorrer y conocer en detalle esta encantadora notación para los conectivos proposicionales binarios.

El modelo más simple para representar el Alfabeto Lógico es el modelo unidimensional *Flipstick* o *Regla giratoria*, que exhibe los conectivos lógicos con la limitación en sus posibles movimientos. Sin embargo el modelo *Insecto lógico* tiene algunas características especiales que generan mayor interés y curiosidad por la relación entre la lógica y la geometría bidimensional, el cual integra los 16 conectivos binarios de tal forma que permite observar con ma-

yor facilidad los movimientos de cada signo según los cuatro ejes que en él se encuentran, uno horizontal x , uno vertical y , y dos oblicuos, $x = y$ (diagonal ascendente) $x = -y$ (diagonal descendente), como se muestran a continuación.



Así, los signos se pueden clasificar en seis diferentes grupos según el nivel de simetría y asimetría, que surgen al llevar a cabo los movimientos al interior del modelo. Es propio tener en cuenta la posibilidad de realizar las rotaciones desde cualquiera de los 4 ejes señalados en sentido contrario a las manecillas del reloj. Además todo conectivo tiene rotaciones, reflexiones y su complemento, sin embargo no todos al realizar los anteriores movimientos quedan invariantes como es el caso de los conectivos **o** y **x**.

De este modo, presentaremos una tabla con cada uno de los movimientos realizados por el modelo bidimensional para los signos, y la respectiva operación lógica. El análisis es similar para los otros modelos.

GRUPO	SIGNO	INVARIANTES
1	o x	<ul style="list-style-type: none"> Reflexión respecto a los 4 ejes Rotación según los ángulos 90°, 180° y 270°
2	s z	<ul style="list-style-type: none"> Reflexión respecto a los ejes $x = y$ y $x = -y$ Rotación en un ángulo de 180°
3	c ↗	<ul style="list-style-type: none"> Reflexión respecto al eje x Rotación según ningún ángulo
4	u n	<ul style="list-style-type: none"> Reflexión respecto al eje y Rotación según ningún ángulo
5	p d h ↘	<ul style="list-style-type: none"> Reflexión respecto al eje $x = y$ Rotación según ningún ángulo
6	b q μ ↙	<ul style="list-style-type: none"> Reflexión respecto al eje $x = -y$ Rotación según ningún ángulo

Tabla 3. Clasificación de simetría en el modelo bidimensional

Movimiento del MODELO	Movimiento del SIGNO	Operación LÓGICA
Reposo	Reposo	A * B
Rotación 90°	Rotación 90°	B * NA
Rotación 180°	Rotación 180°	NA * NB
Rotación 270°	Rotación 270°	NB * A
Reflexión eje x	Reflexión eje horizontal	A * NB
Reflexión eje y	Reflexión eje vertical	NA * B
Reflexión eje $x = y$	Reflexión diagonal ascendente	B * A
Reflexión eje $x = -y$	Reflexión diagonal descendente	NB * NA

Tabla 4. Movimientos y operaciones lógicas para un modelo bidimensional

RESULTADOS

El Alfabeto Lógico combina de manera armoniosa las cualidades alfabética y geométrica de las notaciones para los conectivos proposicionales binarios. Los signos tienen nombres naturales pues (casi todos) son letras del alfabeto occidental; por otro lado, ellos tienen la forma adecuada para considerar sus movimientos rígidos, lo cual permite estudiar la simetría del sistema. Todos los movimientos rígidos de las letras del Alfabeto Lógico corresponden a operaciones lógicas efectuadas sobre la proposición compuesta. Más aún, todas estas operaciones lógicas se pueden generar a partir de la negación y el intercambio de las variables.

Los modelos físicos del Alfabeto Lógico permiten ver cómo, en algunos casos excepcionales, los movimientos rígidos del modelo coinciden en alguna medida con los movimientos rígidos de cada una de las letras y, en consecuencia, corresponden a ciertas operaciones lógicas. De esta manera, las simetrías del modelo muestran ciertas simetrías del Alfabeto Lógico y, por tanto, del sistema de conectivos que representa.

Un detallado análisis geométrico y algebraico a los diferentes modelos propuestos por Zellweger, permitió establecer distintos grupos de simetría según sus movimientos en los diagramas. Un caso particular es el Poliedro lógico que tiene la misma simetría de su figura envolvente, el rombododecaedro, cuyos movimientos rígidos a su vez son los mismos del cubo de dimensión 3. De estos 48 movimientos, 16 corresponden a las operaciones lógicas. Queda aún abierto el problema de dar una interpretación lógica a los otros 32 movimientos del poliedro. Por otro lado, la deficiencia de este modelo se concentra en

los conectivos “centrales” **s** y **z**. Pues en todos los movimientos rígidos del Poliedro lógico permanecen ambos en el centro del modelo, luego es imposible saber si cierto movimiento los intercambia o los deja invariantes. Quizás el modelo físico más adecuado para el Alfabeto Lógico es el hipercubo o cubo de cuatro dimensiones, dado que la cantidad de sus vértices coincide con la de conectivos proposicionales binarios. Las dificultades para estudiar este modelo incluyen la imposibilidad de visualizar sus movimientos y la incógnita de cuál conectivo se debe asignar a cuál vértice. Una gran ayuda en este sentido lo constituyen las proyecciones del hipercubo al espacio, de hecho se pudo mostrar de manera explícita una proyección cuya imagen en el espacio es el rombododecaedro, sobre el cual Zellweger ya había elaborado el mejor de sus modelos tridimensionales. Se espera que este puente sirva como orientación para investigaciones futuras sobre el Alfabeto Lógico.

REFERENCIAS

- García, M., Gómez, J.F. y Oostra, A. (2001). Simetría y lógica: la notación de Peirce para los 16 conectivos binarios. En *Memorias del XII Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones* (pp. 1-26). Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.
- Granados, L. y Aya, R. (2010). *Acerca de la geometría del Alfabeto Lógico de Shear Zellweger*. Trabajo de pregrado en matemáticas, Universidad del Tolima, Ibagué, Colombia.
- Oostra, A. (2001). Los diagramas de la matemática y la matemática de los diagramas. *Boletín de Matemáticas*, VIII, 1-7.
- Oostra, A. (2004). La notación diagramática de C. S. Peirce para los conectivos proposicionales binarios. *Revista de la Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales*, XXVIII(106), 57-70.
- Zellweger, Sh. (1997a). On a deep correspondence between sign-creation in logic and symmetry in crystallography. En I. Rauch y G.F. Carr (Eds.), *Semiotics around the world: Synthesis in diversity* (pp. 821-824). New York: Mouton de Gruyter.
- Zellweger, Sh. (1997b). Untapped potential in Peirce’s iconic notation for the sixteen binary connectives. En N. Houser, D.D. Roberts y J. Van Evra (Eds.), *Studies in the logic of Charles Sanders Peirce* (pp. 334-386). Bloomington, Indianapolis: Indiana University Press.
- Zellweger, Sh. (2003). Mathelogical semiotics: a lesson in constructing a shape – value notation for elementary logic. En M. Anderson, A. Sáenz-Ludlow, Sh. Zellweger y V. Cifarelli (Eds.), *Educational perspectives on mathematics as semiosis: From thinking to interpreting to knowing* (pp. 285-356). Toronto: Legas.

EL PASO DE LA RAZÓN A LA FUNCIÓN TRIGONOMÉTRICA: REVISIÓN DE ALGUNOS ELEMENTOS HISTÓRICOS EN LA CONSTRUCCIÓN DE LA FUNCIÓN TRIGONOMÉTRICA

Carlos León

Universidad La Gran Colombia

carlos.leon@ugc.edu.co

La noción de función trigonométrica ha estado asociada a diversas prácticas que la han convertido en un concepto complejo que tiene sus orígenes en los primeros cálculos astronómicos y que adquiere su formalización con el planteamiento de respuestas a problemas generados en contextos físicos. El análisis de los episodios asociados a la evolución del concepto de función trigonométrica nos permite identificar una serie de herramientas que se vuelven pertinentes para el planteamiento de escenarios en donde se resignifiquen algunas características de la función en torno a su uso y a una nueva interpretación de la misma.

INTRODUCCIÓN

En esta ponencia se pretende realizar una reseña de algunos momentos históricos que resaltan el uso en ciertas mediciones que se le dio a la razón trigonométrica y su relación con algunos resultados geométricos que permitieron establecer un paso hacia el concepto de función trigonométrica.

La trigonometría es una rama de las matemáticas que cuenta con diversas aplicaciones en campos como la topografía, la cartografía, la astronomía y la física, haciéndose necesario su estudio en los niveles básicos de carreras relacionadas con la ingeniería o la administración. Los estándares curriculares localizan la trigonometría como un tema fundamental de la matemática de grado décimo y la proponen como una herramienta para resolver problemas tanto de las matemáticas como de otras disciplinas.

Por estas razones, es muy importante relacionar la trigonometría con otras ciencias para responder a los requerimientos presentes en nuestro sistema escolar, tanto en el colegio como en la universidad. Además, esto revela una necesidad social del conocimiento escolar el cual, según Suárez (2008), el estudiante debe adquirirlo para que le sirva en ámbitos formativos y profesionales y que le ayude a construir y transformar su vida.

León, C. (2011). El paso de la razón a la función trigonométrica: revisión de algunos elementos históricos en la construcción de la función trigonométrica. En P. Perry (Ed.), *Memorias del 20º Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones* (pp. 371-378). Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

Sin embargo, es común en el ambiente escolar encontrar actividades alrededor de la trigonometría desprovistas de significado para el estudiante. Según Orhun (2000, citado en Maldonado, 2005), en la educación secundaria, la enseñanza de la trigonometría se limita, en buena medida, a la obtención de razones para un ángulo particular.

Esta falta de significación, especialmente de las funciones periódicas, la reportan Cordero y Martínez (2001) como causada por privilegiar argumentos de corte analítico en los que los conceptos matemáticos se consideran objetos elaborados, alejados totalmente de argumentos situacionales.

Es en el tránsito entre diferentes disciplinas científicas como se puede estudiar la generación de un conocimiento matemático, dotado de un contexto significativo y de las actividades y herramientas que permiten su construcción (Buendía, 2004). Por ejemplo, los conceptos trigonométricos han evolucionado dando explicación a fenómenos físicos relacionados con el movimiento de los planetas, el calor, el sonido, entre otros, y en donde a partir de las preguntas que se plantearon para resolver un problema, nos situamos en una época y en un contexto social para tratar de reconstruir el desarrollo de nociones trigonométricas.

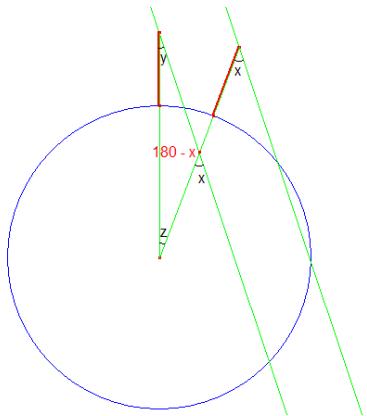
UTILIZACIÓN DE LA RAZÓN EN LA TRIGONOMETRÍA CLÁSICA

La razón trigonométrica y las propiedades de los triángulos son la base del estudio de la trigonometría clásica. Gracias a estos conceptos se pudieron ejecutar novedosos cálculos astronómicos para la medición de distancias estelares.

Fue Aristarco quien por primera vez utilizó la geometría con un fin trigonométrico: poder deducir una relación entre las distancias entre el sol y la luna, y la luna y la tierra. Aristarco comienza haciendo su análisis a partir de la idea de que la media luna tenía que ser el vértice de un ángulo recto formado por las líneas de sol-luna y luna-tierra. Aunque el cálculo resultó erróneo, el método fue correcto y utiliza la razón trigonométrica que hoy conocemos como la tangente de un ángulo.

Eratóstenes tomó la idea de que la tierra no era plana, para plantear su procedimiento; en primer lugar, aseguró que las sombras de dos estacas clavadas en el suelo sobre el mismo meridiano no tendrían, a la misma hora, la misma lon-

gitud, para lo cual utilizó la tangente como razón entre la longitud de la sombra y la de la estaca.



$$\tan y = \frac{S_1}{h} \quad \tan x = \frac{S_2}{h}$$

Siendo S_1 y S_2 las sombras respectivas de la primera y la segunda estaca y h la altura de las estacas, con las igualdades anteriores y utilizando la función arco-tangente se encuentra el valor de los ángulos x , y . Ahora, si se toma el triángulo cuyos ángulos son y , z y $(180 - x)$ (por formar par lineal con x) se tiene que:

$$180 = y + z + (180 - x)$$

$$z = x - y$$

Teniendo la longitud del arco entre las dos estacas y la medida del ángulo z se puede establecer la siguiente regla de tres:

Medida del arco L	\longrightarrow	Medida del ángulo z	Obteniendo: $C = \frac{L \times 360}{z}$
Medida de la circunferencia terreste (C)	\longrightarrow	360°	

Pero como la longitud de una circunferencia está dada por la fórmula $C = 2\pi R$, siendo R el radio terrestre, podemos igualar ambos resultados y obtenemos

$$\frac{L \times 360}{z} = 2\pi R, \quad R = \frac{L \times 360}{2\pi z}$$

Eratóstenes pensó que si en alguno de los lugares en donde estaban las estacas, los rayos solares inciden de forma perpendicular, el ángulo y sería 0 y tendríamos que el ángulo central sería igual al ángulo x , y cuya medida se obtiene

con la utilización de la razón trigonométrica. Realizando los respectivos cálculos, Eratóstenes estimó en 40.000 kilómetros aproximadamente, el radio de la tierra y esta medida se estima actualmente en 40.075 kilómetros.

Estos cálculos y algunos otros fundamentaron la trigonometría al dar aproximaciones del seno de ciertos ángulos y utilizar triángulos y relaciones entre sus lados. Para Montiel (2005), el elemento más importante en la construcción de nociones trigonométricas es la proporción expresada como razón en un sentido matemático abstracto y no como la relación de dos catetos en un triángulo.

Aunque existió un avance significativo en la visión de la trigonometría como rama independiente, ésta aún mantiene una estrecha relación con algunos cálculos astronómicos. Fue hasta el siglo XVII cuando adopta un carácter de tipo analítico, al estudiar las razones trigonométricas desde una óptica distinta al contexto geométrico representado por las cuerdas subtendidas en un arco.

Según Katz (1987) se debe interpretar esto como una mirada distinta de las propiedades de las relaciones trigonométricas. Un ejemplo de esto son propiedades como la periodicidad y lo acotado de los valores de las cuerdas, ya que en el contexto astronómico, una vez encontrados el período y la posición del planeta no se estudiaba la relación trigonométrica que se involucraba en los cálculos.

DE LA RAZÓN A LA FUNCIÓN TRIGONOMÉTRICA: UN CONTEXTO FÍSICO

La física, a lo largo de la historia ha abastecido a la matemática de situaciones y planteamientos en donde han nacido conceptos matemáticos, creciendo una relación constituyente entre las dos ciencias, pero según Arrieta (2003), el peso de los fenómenos físicos en clase es escaso, a pesar de las nociones y procedimientos matemáticos que ha surgido del proceso de comprender fenómenos reales.

Además, se ha adquirido una interpretación disyunta del conocimiento matemático; por ejemplo, la periodicidad es un concepto que está presente en la matemática y la física escolar, formando parte de una sola cultura científica del estudiante, pero en el discurso escolar suelen estar separadas, a tal punto que lo periódico viene a ser relativo dependiendo del referente (matemático y físico) que se tenga en cuenta.

Buendía (2004) propone un ejemplo de esta circunstancia: en Cálculo una función es o no es periódica según cumpla o no la definición, mientras que al estudiar lo periódico con osciladores, se habla de funciones casi periódicas, pareciendo que existe una confrontación entre la periodicidad definida a partir de una función y los comportamientos periódicos asociados a fenómenos con lo que se impone una separación disciplinar que no favorece un conocimiento científico articulado, si solamente se estudia este concepto de forma individual y sin conexión entre las dos disciplinas.

Los conceptos físicos están asociados a uno o varios conceptos matemáticos guardando así una relación constituyente más que experimental (Levy- Leblond, 1999). Esta integración entre la física y la matemática le dará al docente de matemáticas nuevos escenarios de enseñanza, y propiciará la conformación de comunidades de estudios con docentes no sólo de física sino de otras áreas, que ampliarán considerablemente los contextos en donde se puede apreciar la matemática.

EL PROBLEMA DE LA CUERDA VIBRANTE

En el siglo XVII, Huygens y Hooke empiezan a realizar el estudio del movimiento oscilatorio a partir del péndulo y el resorte respectivamente, y son estos nuevos usos los que determinan el cambio de percibir las relaciones trigonométricas como líneas en un círculo a cantidades que describen movimientos periódicos.

En 1739, Euler expone su trabajo sobre un oscilador armónico dirigido sinusoidalmente, que generó un problema llamado “la cuerda vibrante” en el que se considera el movimiento de un objeto en dos partes, una proporcional a la distancia y la otra como variación sinusoidal en el tiempo, al cambiar el foco de atención del período al movimiento.

El problema de la cuerda vibrante es uno de los problemas más importante en el desarrollo de conceptos tan importantes como el de función o el de serie trigonométrica. Su solución generó una gran discusión entre los matemáticos más destacados del siglo XVIII.

Daniel Bernoulli en su obra *Teorema sobre oscilaciones de cuerpos conectados por un hilo flexible y de una cadena verticalmente suspendida* explica en qué consiste el problema. Así lo reseña Sánchez (2007, p. 126) recurriendo a la siguiente cita de D. Bernoulli:

Una cuerda musical tensa puede producir sus vibraciones isócronas de muchas maneras, incluso, de acuerdo con la teoría, hasta de diferentes maneras, el primer y más natural armónico tiene lugar cuando la cuerda produce en sus oscilaciones un solo arco; se produce entonces la oscilación más lenta y se emite el tono más bajo de entre los posibles, fundamental respecto al resto. El siguiente armónico exige que la cuerda produzca dos arcos a lados opuestos (de la posición de equilibrio de la cuerda) siendo entonces la oscilación el doble de rápida y emitiéndose ahora la octava del sonido fundamental.

Este problema data de 1727 cuando Johann Bernoulli envía dos cartas a su hijo Daniel en donde resume los avances alcanzados por él y por otros matemáticos acerca de la cuerda vibrante.

En 1749 D'Alembert en su obra *Investigaciones sobre la curvatura que forma una cuerda extendida puesta a vibrar* estudia las oscilaciones pequeñas que adquiere una cuerda homogénea de longitud fija 1 en sus extremos, hallando la ecuación diferencial que rige este movimiento:

$$\frac{\partial^2 y(t,x)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 y(t,x)}{\partial x^2}$$

Y cuya solución tiene la siguiente forma:

$$y(t,x) = \frac{1}{2} h(at+x) - \frac{1}{2} h(at-x)$$

Se destaca que la función h es una función periódica, impar y debe coincidir en el intervalo $0 < x < 1$ con la función que describe la forma inicial de la cuerda. Ademas D'Alembert intenta demostrar que las curvas que describen la forma de la cuerda no son solamente sinusoidales sino que también pueden ser distintas a una combinación de senos y cosenos.

Tiempo después Euler en su artículo sobre las oscilaciones de cuerdas, estudia las condiciones iniciales de la cuerda y gracias a argumentos físicos y aceptando curvas no algebraicas antepone un nuevo concepto de función al considerar estas curvas como expresiones que analíticamente son polinomios con infinitos términos.

En 1753 Daniel Bernoulli establece que existe un enfrentamiento entre las ideas sobre soluciones sinusoidales y la variedad de soluciones distantes a las sinusoidales descritas en los trabajos de Euler y D'Alembert. Bernoulli plan-

tea, apoyándose solamente en argumentos físicos, que cualquier movimiento correspondiente a una curva inicial no es más que una suma de armónicos periódicos sinusoidales (Jácome y Montiel, 2007).

Aunque existía un consenso en que mediante una función se podía expresar todo tipo de curva, Daniel Bernoulli había planteado una solución menos general que la de Euler y D'Alembert, al limitarse únicamente a funciones de tipo trigonométrico implicando el carácter periódico de dichas funciones. A pesar de que las soluciones de Euler utilizaban una función arbitraria, no necesariamente eran funciones periódicas y eso lo obligó a demostrar que cualquier tipo de función podía admitir una representación en series trigonométricas.

En 1753, Joseph Lagrange, gracias a un intercambio de correspondencia con Euler, plantea en su obra *Investigaciones sobre la naturaleza y la propagación del sonido* una mediación entre las soluciones propuestas al problema de la cuerda con lo que obtiene, de forma analítica, la representación en funciones trigonométricas de la solución general.

Por lo tanto, el problema de la cuerda vibrante es un hito en la historia de las matemáticas, al plantear una discusión sobre la definición de función, y fundamentar el trabajo de Fourier acerca del análisis armónico en la identificación de la propiedad de periodicidad dentro de las características de las funciones que pertenecen a la solución del problema.

Según Buendía (2004), varios autores coinciden en señalar este momento como el de la introducción del tratamiento formal que define las funciones trigonométricas numéricamente y no simplemente como líneas de un círculo.

REFERENCIAS

- Arrieta, J.L. (2003). *Las prácticas de modelación como proceso de matematización en el aula*. Tesis de doctorado no publicada, Centro de Investigación y Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, Ciudad de México, México.
- Buendía, G. (2004). *Una socioepistemología del aspecto periódico de las funciones*. Tesis de doctorado no publicada, Centro de Investigación y Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, Ciudad de México, México.
- Cordero, F. y Martínez, J. (2001). La comprensión de la periodicidad en los contextos discreto y continuo. En G. Beitía (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (volumen 14, pp. 422–431). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

- Jácome, G. y Montiel, G. (2007). Construyendo la razón trigonométrica. Una secuencia basada en la actividad. En G. Buendía y G. Montiel (Eds.), *Memoria de la XI Escuela de Invierno en Matemática Educativa* (pp. 433-436). Yucatán, México: Red Cimates.
- Katz, V. (1987). The calculus of the trigonometric functions. *Historia Mathematica*, 14(4), 311-324.
- Lévy-Leblond, J.M. (1999). Física y matemáticas. En F. Guénard y G. Lelièvre (Eds.), *Pensar la matemática*. (Cuarta edición.) Barcelona, España: Tusquets Editores.
- Maldonado, E.S. (2005). *Un análisis didáctico de la función trigonométrica*. Tesis de maestría no publicada. Centro de Investigación y Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, Ciudad de México, México.
- Montiel, G. (2005). *Estudio socioepistemológico de la función trigonométrica*. Tesis de doctorado no publicada, Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del Instituto Politécnico Nacional, Ciudad de México, México.
- Sánchez, C. (2007). *Las funciones: un paseo por su historia*. Madrid, España: Nivola Libros y Ediciones.
- Suarez, L. (2008). *Modelación-Graficación, una categoría para la matemática escolar. Resultados de un estudio socioepistemológico*. Tesis de doctorado no publicada, Centro de Investigación y Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, Ciudad de México, México.

DE LA GEOMETRÍA A LA BIOLOGÍA: “UNA EXPERIENCIA DE INVESTIGACIÓN ESCOLAR”

Martha Mosquera

Universidad Surcolombiana

martha.mosquera@usco.edu.co, grupoe.mat.h@gmail.com

Se pretende mostrar un ejemplo de aplicación de la investigación como estrategia pedagógica del Programa ONDAS en el área de matemáticas de grado séptimo. Con esta estrategia se espera que maestros y maestras logren pensar una práctica pedagógica integrada, enfocada en el desarrollo de capacidades para la investigación que permitan aprender temas propios de la matemática y su relación con otras áreas del conocimiento, en este caso la biología, sin perder el rigor propio de cada disciplina.

Sería muy deseable que todos los miembros de la comunidad matemática y científica nos esforzáramos muy intensamente por hacer patente ante la sociedad la presencia influyente de la matemática y de la ciencia en la cultura. Una sociedad con el conocimiento cabal de lo que la ciencia representa para su desarrollo se hará colectivamente más sensible ante los problemas que la educación de los más jóvenes en este sentido representa.

Miguel de Guzmán

La investigación como estrategia pedagógica (IEP) (Manjarrés y Mejía, 2009) del Programa ONDAS es el medio por el cual Colciencias pretende permear la escuela, propiciando y fortaleciendo la cultura investigativa desde el quehacer del maestro¹ en el aula, como acompañante coinvestigador de los grupos infantiles y juveniles; facilitador de aprendizajes y promotor del desarrollo de capacidades para diseñar y desarrollar proyectos de investigación en todas las áreas del saber; que además de preparar a los aprendientes para enfrentar los retos que el medio les plantea, adquieran familiaridad con los métodos y el lenguaje de la ciencia y se reconozcan como individuos capaces de generar conocimiento e incidir en la identificación y solución de los problemas de su región y del país.

¹ Entiéndase este término como uno genérico. El mismo comentario para el término “niño”. [N.E.]

Mosquera, M. (2011). De la geometría a la biología: “una experiencia de investigación escolar”. En P. Perry (Ed.), *Memorias del 20º Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones* (pp. 379-384). Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

Como coordinadora departamental del Programa, cargo que ejercí entre septiembre de 2010 y enero de 2011, me llamaron la atención algunas estadísticas referentes a las temáticas de los problemas propuestos por los niños y los jóvenes huilenses en la convocatoria abierta en 2010. Por ejemplo, la estadística que generó el trabajo que aquí se reporta y otros del mismo tipo hace referencia específica a que de 100 problemas planteados solamente 4 (4%) se refieren al área de matemáticas. Al analizar detenidamente estos problemas hay una situación que desalienta aún más: el hecho de que ellos no buscan desarrollar temas o contenidos propios de la matemática, sino que hacen referencia a la motivación, a la didáctica y otros aspectos que a nuestro modo de ver deberían ser preocupaciones propias de los maestros y no de los aprendientes.

En el siguiente cuadro se presentan ejemplos de los problemas del área de matemáticas planteados por aprendientes huilenses en la convocatoria de 2010.

Nº	Pregunta	Institución Educativa	Municipio	Grado
1.	¿Cómo hacemos que las clases de matemáticas sean más divertidas?	Jardín Infantil Alegría	Neiva	Preescolar
2.	¿Sería que con la utilización de actividades lúdicas en el aula y la vinculación del aprendizaje matemático a las actividades cotidianas de los niños, se mejora el rendimiento académico y el comportamiento de los niños de 5D de la IE Elisa Borrero De Pastrana JT en el área de Matemáticas?	Elisa Borrero de Pastrana	la Argentina	Quinto
3.	¿Cómo aprender álgebra lúdicamente y aplicándola a la vida cotidiana?	Misael Pastrana Borrero	Teruel	Noveno
4.	¿Por qué la mayoría de los alumnos de la IE San Marcos no les gusta el área de matemáticas?	San Marcos	Acevedo	Once

Al hablar con niños y docentes para reconocer sus imaginarios y analizar las bitácoras que recogen los antecedentes propios de cada situación problemática

encontramos cinco situaciones que se han tipificado como obstáculos y que recogen en gran medida la problemática de la región² huilense. Ellos son:

- 1) La carga de actividades para el maestro: en las instituciones educativas se desarrollan cuatro proyectos pedagógicos obligatorios por ley, a saber: (i) educación ambiental, (ii) recreación y buen uso del tiempo libre, (iii) educación sexual y (iv) educación para la justicia, la paz, ..., y, en general, la formación en los valores humanos; además de otros proyectos derivados del Proyecto Educativo Institucional (PEI) y de otras políticas de orden institucional, regional y/o nacional. La actividad de desarrollo de un proyecto se circunscribe en muchos casos al hecho de llenar una serie de formularios pero no hay ni tiempo, ni recursos, ni orientación para investigar; los proyectos no son transversales y en algunos casos inclusive no tienen en cuenta el PEI ni son parte de él y mucho menos de la política institucional.
- 2) El desconocimiento de los preceptos del programa ONDAS (Manjarrés y Mejía, 2009) implica que en algunos casos se crea que “dictar la clase y desarrollar los contenidos” es una cosa e “investigar” es una actividad adicional y por ello no se quiere asumir.
- 3) En otros casos: el considerar la ciencia que se enseña en la escuela como algo terminado; el desconocimiento por parte de algunos maestros de las conexiones entre su área del saber y las otras áreas que se estudian en la escuela o del uso práctico de los contenidos y/o de las investigaciones que se adelantan actualmente alrededor de su área de conocimiento, hacen que encontrar un tema de investigación sea una labor destinada a “los científicos” porque según ellos “no hay nada que investigar en el aula”.
- 4) Otra creencia frecuente de algunos maestros consiste en pensar que la única forma de aprender es dentro del aula de clase o a través de tareas y ejercicios repetitivos; esta situación impide el desarrollo de capacidades para leer y entender la realidad y contextualizarla al área de trabajo.
- 5) Y otra que se presenta con alta frecuencia es que el maestro se considera el dueño del saber y sus métodos generalmente apuntan a que los estudiantes reproduzcan los contenidos que él enseña, convirtiéndose el “discurso del maestro” en el único material educativo en el aula.

² En algunos de los trabajos de investigación del Grupo E.MAT.H, se han encontrado estos mismos obstáculos por ello hemos decidido tipificarlos.

Sin embargo, el hecho de que algunas preguntas consideren “la vinculación del aprendizaje matemático a las actividades cotidianas de los niños” o “la aplicación del álgebra a la vida cotidiana” además de los otros planteamientos en los que se pretende mejorar el clima de la clase o la comprensión, me llevaron a consultar y/o a desarrollar algunas investigaciones modelo (Bolt, 1992), con el fin de presentar ejemplos que permitan a profesores y aprendientes buscar caminos de transformación para su práctica pedagógica, tendientes a que los niños y jóvenes desarrolle tareas de investigación escolar, en el marco de la IEP del programa ONDAS (Manjarrés y Mejía, 2009).

La propuesta consiste en formular una línea semiestructurada³, es decir, una en la que las áreas de investigación se dan pero los niños y los jóvenes pueden proponer sus trabajos alrededor de ellas, por ejemplo “Historia hoy”.

En ese orden de ideas lo que se espera es que los maestros progresen del modelo tradicional centrado en la enseñanza de contenidos declarativos a otro centrado en el desarrollo de habilidades de pensamiento y capacidades para investigar en el aula.

Para el desarrollo del ejemplo, trabajo inicialmente la matriz de cambio conceptual SQAT (S: ¿qué se?, Q: ¿qué quiero aprender?, A: ¿qué aprendí?, T: ¿cómo se aplican los conceptos?). Al diligenciar esta matriz pretendo que los profesores y sus aprendientes aprendan a orientar el curso de la acción pedagógica identificando, en primer lugar, los conocimientos previos necesarios para abordar el estudio de un tema; en segundo lugar, se tenga claro qué es lo que se va a aprender y qué es lo que se va a aprender a hacer; en tercer lugar, que se desarrollen estrategias cognitivas y metacognitivas para evaluar a los aprendizajes y finalmente que se aprenda a transferir, es decir a aplicar los conceptos en áreas diferentes de aquellas en las que se han aprendido. Vale decir que en estos modelos se consideran los tres aspectos fundamentales: el ser, el saber y el hacer.

El tema de trabajo en al área de geometría son las homotecias y la aplicación en biología es en el crecimiento de los cuerpos. Se espera que al final de las

³ En el programa ONDAS, los proyectos de investigación corresponden a dos líneas: la de proyectos preestructurados: derechos humanos y ambiental, y la línea de proyectos abiertos. En la primera, la ruta de investigación viene preconcebida desde Colciencias y, en cambio, en la segunda, las rutas de investigación son libres (Manjarrés y Mejía, 2009).

sesiones de trabajo cada participante desarrolle su propia tarea de investigación. En el siguiente cuadro se presenta la síntesis de la propuesta.

Preguntas iniciales formuladas para que niños y jóvenes hablen con el maestro de biología (Bolt, 1992)	Contenidos de clase Lo que los aprendientes deben saber	Desarrollo de talleres Lo que los aprendientes deben saber hacer
<p>¿Cuál es el tamaño máximo que puede alcanzar un conejo?</p> <p>¿Cómo logra un ratón mantenerse caliente en invierno?</p> <p>¿Por qué las moscas huyen ante el peligro de mojarse?</p> <p>¿Por qué los animales más grandes como las ballenas o los tiburones son animales marinos?</p> <p>¿Cuál es la altura máxima que puede alcanzar una montaña?</p>	<p>Geometría: medición de longitudes, áreas, volúmenes y pesos. Homotecias o ampliaciones (Steen, 1999)</p> <p>Biología: proporciones del cuerpo humano (Hogarth, 1988, 1989; Loomis, 1980), problemas de crecimiento, sección transversal de los huesos, los músculos, la estructura ósea</p>	<p>Clasificar, planificar, formular hipótesis, experimentar y comprobar hipótesis</p> <p>Sobre los talleres, las visitas guiadas y el uso del internet.</p> <p>Producción de informes, escritura de ensayos, artículos, ponencias</p>

La implementación de este tipo de propuestas permite que niños y jóvenes desarrollen su pensamiento y la capacidad para investigar, cumpliendo así con la misión de formar ciudadanos que entienden el medio en que viven y trabajan por mejorarlo.

REFERENCIAS

- Bolt, B. (1992). *101 Proyectos matemáticos*. Barcelona, España: Labor.
- Hogarth, B. (1989). *Drawing the human head*. New York, USA: Watson-Guptill Publications. Disponible en: <http://es.scribd.com/doc/959209/Burne-Hogarth-Drawing-the-Human-head-eng>
- Hogarth, B. (1988). *Drawing dynamic hands*. New York, USA: Watson-Guptill Publications. Disponible en: <http://es.scribd.com/doc/2883561/Burne-Hogarth-Drawing-Dynamic-Hands>
- Loomis, A. (1980). *El dibujo de figura en todo su valor*. (12^a edición). Buenos Aires, Argentina: Hachette S.A.
- Manjarrés, M.E. y Mejía, M.R. (2009). *Caja de herramientas para maestro(as) On-das*. Bogotá, Colombia: Editorial Edeco.

Steen, L.A. (Ed.) (1999). *Las matemáticas en la vida cotidiana*. (Trad. Jody L. Doran y Eugenio Hernández, del original *Mathematics today*). Madrid, España: Addison-Wesley/Universidad Autónoma de Madrid.

REGLAS Y SÍMBOLOS CON L-SISTEMAS

Claudia Orjuela, Clara Rojas, Jorge Páez y José Ramírez

*Universidad Autónoma de Colombia, Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia,
Universidad Pedagógica Nacional, Universidad Sergio Arboleda*

claudia.orjuela@fuac.edu.co, clara.rojas@uptc.edu.co, jopaez@pegagogica.edu.co, josel.ramirez@usa.edu.co

En este artículo se presenta una síntesis del trabajo abordado en el grupo de investigación Fractales DMA-UPN, sobre la incorporación de los L-sistemas como objeto de estudio en el campo de la geometría fractal, en particular en la generación de algoritmos asociados a la representación gráfica de plantas, árboles y estructuras fractales. Se adelantan reflexiones alrededor de la importancia de introducir esta temática en la enseñanza de la geometría fractal, así como del uso de software especializado (e.g., Fractal Time, L-system4, JFLAB) como herramienta didáctica para su visualización; de manera paralela se abordan reflexiones alrededor de la experiencia investigativa realizada.

INTRODUCCIÓN

La inclusión de los fractales como objeto de estudio en el currículo de matemáticas está en desarrollo, y el grupo Fractales DMA-UPN contribuye en este sentido. Para este artículo sólo se presentará el estudio de los L-sistemas como una de las representaciones finitas del objeto fractal. Se pretende aportar en primera instancia al campo de la Didáctica de las Matemáticas. Por otro lado, se considera que con el estudio de la geometría fractal, específicamente con el estudio de los L-sistemas, se logra establecer la relación entre el componente geométrico y la mediación computacional como herramienta de apoyo a la labor docente, con el fin de incorporarla al aula de clase acorde con el nivel de formación de los estudiantes.

El equipo de trabajo ha abordado este objeto de estudio partiendo de la premisa según la cual el estudiante es el centro de la actividad académica, razón por la cual las actividades de aprendizaje deben llevar implícita una participación activa del educando, que se distancia de la realización de ejercicios rutinarios, mecánicos y repetitivos que poco aportan para la construcción de la comprensión en matemáticas. La población con la que se ha contado para la validación de la propuesta del Grupo está constituida por los estudiantes del curso electivo *Fractales*, ofrecido en la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional.

Orjuela, C., Rojas, C., Páez, J. y Ramírez, J. (2011). Reglas y símbolos con L-sistemas. En P. Perry (Ed.), *Memorias del 20º Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones* (pp. 385-395). Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

En el curso ha tenido lugar el estudio de L-sistemas con el propósito principal de que el estudiante comprenda, por una parte, cómo las reglas de sustitución de símbolos ejercen sobre el axioma inicial el mismo efecto que tienen las reglas geométricas o algoritmos en la generación de curvas de estructura fractal, y, por otra parte, cómo el uso de la tecnología, por ser ésta un recurso mediador, simplifica procesos y permite ser la interfaz gráfica con el estudiante.

En lo que sigue, se hará una exposición de índole conceptual sobre qué es la teoría de L-sistemas, articulada con ejemplos gráficos que inducen al docente a usar una forma de representación y generación de estructuras fractales que simulan elementos de la naturaleza, para de este modo planificar actividades de exploración, innovación e investigación en el aula de matemáticas.

La fundamentación de este trabajo tiene como referentes teóricos a Peitgen, Jürgens, Saupe, Maletsky, Perciante y Yunker (1991), Mandelbrot (1982), Rubiano (2002) y Prusinkiewicz y Lindenmayer (2004/1990), entre otros.

UN NUEVO LENGUAJE

Los L-sistemas se pueden definir mediante un conjunto de símbolos que forman cadenas generadas por un conjunto de reglas de sustitución; al respecto, se puede resaltar que aunque estas cadenas no tienen un significado particular se generan figuras de gran complejidad, para la cual se hace necesaria una interpretación geométrica de los símbolos utilizados.

En consecuencia, los L-sistemas permiten abordar y profundizar en conceptos geométricos conocidos por el estudiante, e introducirlo a una nueva geometría, a un nuevo lenguaje que permite la interacción entre elementos propios del currículo de matemáticas y los ambientes computacionales, favoreciendo los procesos iterativos, la visualización de las cadenas, el proceso recursivo asociado; de esta manera, el uso de L-sistemas se convierte en una experiencia motivadora para el estudiante.

¿QUÉ SON LOS L-SISTEMAS?

Los *L-sistemas* fueron introducidos por Aristid Lindenmayer (1925-1989) en su artículo *Mathematical models for cellular interactions in development*, publicado en 1968 en el *Journal of Theoretical Biology*. En pocas palabras, el autor expuso un modelo matemático para el desarrollo y el crecimiento de las plantas. Dicho modelo se basaba en la teoría de lenguajes formales, en particu-

lar tomaba como base los estudios de Noam Chomsky sobre gramáticas. En 1984, Alvy Ray Smith adapta el lenguaje de los L-sistemas a la tecnología PC como herramienta para la simulación del desarrollo de las plantas y estudia su relación con los fractales ampliando sus posibilidades de estudio.

D0L-sistemas

El más simple de los L-sistemas se llama *D0L-sistema*, y su concepto principal es el de re-escritura. Se parte de un objeto inicial simple, una cadena o palabra definida sobre un alfabeto dado, y luego de manera determinista se van sustituyendo cada uno de los símbolos; esta sustitución se realiza en paralelo de acuerdo a un determinado conjunto de reglas de reemplazamiento. A ese *objeto inicial*, que describe el sistema antes de que comience el crecimiento se le denomina *axioma* o *semilla*. Al conjunto de reglas de reemplazamiento, que van a determinar cómo se realiza la generación o la evolución del objeto se le denomina *reglas de producción*.

De esta manera, se puede decir que un D0L-sistema está compuesto por:

Un alfabeto: es un conjunto finito Σ de símbolos. Usualmente se usan letras ordinarias del alfabeto como F, G, R, f, y algunos símbolos adicionales como + y -, que también fueron usados por Lindenmayer.

Un axioma: el axioma, también llamado iniciador o semilla, es una cadena o palabra W compuesta de símbolos de Σ . El conjunto de todas las cadenas de símbolos de Σ se denota Σ^* .

Un conjunto de reglas de producción: es un conjunto de funciones de Σ en Σ^* tal que cada función p asocia un símbolo a una cadena, es decir $p : \Sigma \rightarrow \Sigma^*$.

Si un símbolo no tiene una regla explícita de producción, se asume que éste se transforma en sí mismo. En este caso se dice que el símbolo es una constante del D0L-sistema. Por lo tanto un D0L-sistema se define como una tripleta $L = \langle \Sigma, W, p \rangle$, donde Σ es un alfabeto, W es un axioma y p es un conjunto de reglas de producción.¹

¹ La traducción de la expresión “D0L” hace referencia a que: el sistema es determinista, es decir, cada regla de producción sustituye cada símbolo de manera única (D); la reescritura es independiente del contexto (0); el creador del L-sistema fue Lindenmayer (L).

Cada D0L-sistema define una *D0L-sucesión* y a cada uno de los términos de la sucesión se le puede asociar una representación gráfica.

D0L-sucesión: sea $L = \langle \Sigma, W, p \rangle$, un D0L-sistema. La generación de L se define como una sucesión $\{l_n\}$, $n = 0, 1, 2, \dots$, donde cada $\{l_n\}$ es una cadena sobre Σ^* tal que ésta fue generada por $\{l_{n-1}\}$ aplicando la regla de producción p a cada uno de los símbolos de $\{l_{n-1}\}$. La primera generación l_0 es el axioma W .

Otra definición importante es la *longitud de una cadena*, que corresponde al número de símbolos que conforman una cadena, y para una palabra H se denota por $|H|$.

Ejemplo 1

D0L-sistema de Fibonacci: Sea $\Sigma = \{F, G\}$ un alfabeto, $W = G$ un axioma y dos reglas de producción dadas por $p_1 : F \rightarrow FG$; $p_2 : G \rightarrow F$. La tripleta $\langle \Sigma, W, p_i \rangle$ es conocida como el *L-sistema de Fibonacci*. Los primeros cinco términos de la sucesión y las longitudes del L-sistema de Fibonacci se muestran en la siguiente tabla.

Sucesión	Generación	Longitud
l_0	G	$ l_0 = G = 1$
l_1	F	$ l_1 = F = 1$
l_2	FG	$ l_2 = FG = 2$
l_3	FGF	$ l_3 = FGF = 3$
l_4	$FGFFG$	$ l_4 = FGFFG = 5$
l_5	$FGFFGFGF$	$ l_5 = FGFFGFGF = 8$

Tabla 1. D0L-sistema de Fibonacci

Como se puede observar, las longitudes de las primeras cinco generaciones corresponden a los primeros cinco números de la sucesión de Fibonacci, de aquí que éste L-Sistema lleve dicho nombre.

Interpretación gráfica de un D0L-sistema

Existe una interpretación gráfica de los D0L-sistemas basada en lenguaje LOGO o Lenguaje de la Tortuga; fue introducida por Aono y Kunii (1984, y Smith, 1984, citados en Prusinkiewicz y Lindenmayer, 2004/1990) quienes la utilizaron para crear modelos de crecimiento de plantas y árboles. Casi al mismo tiempo Siromoney y Subramanian mostraban que los L-sistemas podían ser interpretados para la generación de algunas curvas fractales, así mismo el trabajo de Prusinkiewicz (1986) aborda la representación gráfica de los L-sistemas.

Funcionamiento de la Tortuga

Para convertir una cadena de símbolos en una imagen fractal, hay que recorrerla de una manera particular. Para ello, a cada uno de los símbolos de la cadena se le asigna un orden que será interpretado por una “tortuga” hipotética que irá recorriendo el plano de un lado a otro, realizando una determinada acción, la cual dependerá del símbolo que lea. Algunas de estas órdenes únicamente alterarán el estado interno de la tortuga, por ejemplo, la dirección le indicará a la tortuga que se mueva por el plano dibujando una línea o que se mueva en línea recta pero sin dejar rastro. Una vez que la tortuga ha recorrido toda la cadena, la imagen fractal quedará definida; vale la pena mencionar y aclarar que el resultado es una aproximación de la imagen fractal, ya que es un proceso finito de su construcción.

Como se ha comentado anteriormente, la tortuga posee un estado interno y una posición en el plano; estos dos elementos, junto con la cadena de salida, serán los únicos elementos necesarios para generar la imagen fractal.

Estado de la Tortuga: es una tripleta (x, y, θ) , donde la coordenada cartesiana (x, y) representa la posición de la tortuga y θ , el ángulo de dibujo, es la dirección en que está mirando la tortuga, es decir, la dirección en la que dibujará la siguiente línea.

Además, se definen una longitud, notada como d , que es la mínima distancia que la tortuga puede recorrer, y un ángulo δ de incremento, que es el ángulo mínimo que será capaz de girar la tortuga.

La tortuga responde a los comandos representados por los siguientes símbolos, que son los más frecuentes para generar L-sistemas a partir de un software.

Símbolo	Función
F	Da un paso hacia adelante dibujando una línea de longitud d . Es decir el estado de la tortuga cambia a (x, y, θ) , donde $x' = x + d \cos \theta$ y $y' = y + d \sin \theta$. Por lo tanto, la tortuga dibuja un segmento entre los puntos (x, y) y (x', y') .
f	Da un paso hacia adelante a una distancia d pero sin dibujar línea.
$+$	Gira en sentido anti-horario un ángulo δ , por lo tanto el siguiente estado de la tortuga es $(x, y, \theta + \delta)$.
$-$	Gira en sentido horario un ángulo δ , por lo tanto el siguiente estado de la tortuga es $(x, y, \theta - \delta)$.

Tabla 2. Comandos asociados con la Tortuga

Ejemplo 2

D0L-sistemas de cuadrados: Sea $(2,5, 45^\circ)$ el estado inicial, $d = 1.0$ la distancia y $\delta = 90^\circ$ o $\delta = 4$; y $F - F - FF + F + F + FF + f$ una palabra, entonces la interpretación de la tortuga se muestra en la Figura 1, donde las flechas punteadas indican la dirección y la longitud.

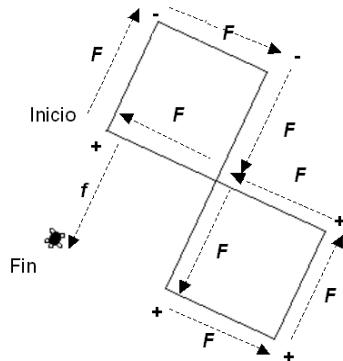


Figura 1. Visualización del Ejemplo 2

Ejemplo 3

D0L-Triángulo de Sierpinski: Sea el D0L-sistema $H = \langle \Sigma, W, p \rangle$, tal que: $\Sigma = \{F, X, Y, +, -\}$, $W = YF$, $p = \{p_1 : X \rightarrow YF + XF + Y, p_2 : Y \rightarrow XF - YF - X\}$. La tortuga no realiza acción cuando encuentra el símbolo Y o X . El Estado de la Tortuga es:

Parámetro	Valor
D	1.0
Δ	$60^\circ/6$
Coordenada x	0
Coordenada y	0
Ángulo θ	0°

Tabla 3. Estado de la Tortuga, Triángulo de Sierpinski

La gráfica de la primera generación es: $XF - YF - XF$

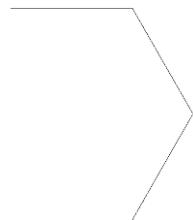


Figura 2. Generación 1, Triángulo de Sierpinski

A continuación se muestran algunas generaciones:

Paso	Representación gráfica	Generación
h_2		$YF + XF + YF - XF - YF - XF - YF + XF + YF$
h_3		$XF - YF - XF + YF + XF + YF + XF - YF - XF - YF + XF + YF - XF - YF + XF - YF + XF + YF - XF - YF - XF$

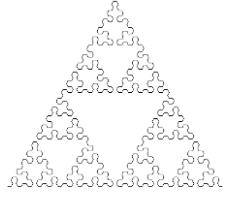
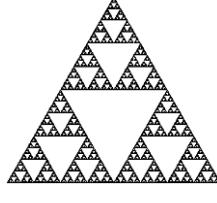
h_6		No se escriben los símbolos por su cantidad
h_{10}		No se escriben los símbolos por su cantidad

Tabla 4. Generaciones D0l-Sistema del Triángulo de Sierpinski

Como se puede observar se vuelve dispendioso el manejo de las cadenas de símbolos en la escritura del L-sistema.

Ramificaciones generadas a partir de L-sistemas

Para generar imágenes fractales provistas de ramificaciones como por ejemplo un arbusto, se necesita introducir dos nuevos símbolos, los cuales indican el inicio y el fin de una ramificación. En ese momento, la tortuga volvería a la posición donde comenzó la rama, logrando así seguir su recorrido por otras ramas.

Ejemplo 4

Arbusto: Sea el *DOL-Sistema* $H = \langle \Sigma, W, p \rangle$, tal que: $\Sigma = \{F, +, -, [,]\}$ $W = F$, $p : F \rightarrow F[-F]F [+F][F]$, además, el Estado de la Tortuga es:

Parámetro	Valor
D	1.0
Δ	$36^\circ/10$
Coordenada x	0
Coordenada y	0
Ángulo θ	90°

Tabla 5. Estado de la Tortuga, Arbusto

Así las primeras generaciones son:

Paso	Representación gráfica	Generación
h_1		$F[-F]F[F][F]$
h_2		$F[-F]F[F][F][-F[-F]F[F][F]]F[-F]F[F][F]$ $[+F[-F]F[F][F]]F[-F]F[F][F]$
h_3		Tiene alrededor de 472 símbolos
h_6		Tiene alrededor de 54.372 símbolos

Tabla 6. Generaciones DOL-sistema Arbusto

EL SOFTWARE COMO RECURSO DIDÁCTICO

Se observa que en cada generación el número de símbolos aumenta de forma exponencial, dificultando la interpretación gráfica de estos, sin embargo, existen programas que interpretan estos símbolos, entre ellos L-System 4, Fractal Time (Derlinchán, 2004), y JFLAB.

La introducción de ambientes computacionales ha favorecido el trabajo con este objeto de estudio. Por su capacidad de iteración rápida e interactiva, con la ayuda de algoritmos y procedimientos relativamente sencillos, es el instru-

mento ideal para el trabajo con los fractales, en particular los L-sistemas. Con su capacidad de interacción con el usuario, el software permite un ajuste rápido entre las intuiciones establecidas en términos de procedimientos espaciales y la formulación definitiva de estos procedimientos como algoritmos, mediante contrastes sucesivos con variaciones en los parámetros y en las reglas de producción. Hasta ahora la variación de las condiciones en los modelos sólo se podían seguir mediante procesos realizados con lápiz y papel, que eran tediosos dada la complejidad en la generación de la cadena.

CONCLUSIONES

El estudio de los L-sistemas ha venido consolidándose como una línea de investigación, enmarcada en el estudio de los fractales y su incorporación en el currículo de matemáticas. No se puede dejar de lado, la importancia de las tecnologías en el desarrollo de los L-sistemas. Como se indicó, existe una variedad de softwares que permiten ser la interfaz entre la representación visual y la teoría de L-sistemas, posibilitando al estudiante reflexionar, visualizar, relacionar y comprobar algunas propiedades de los objetos geométricos en juego. Además, propicia condiciones para que el profesor pueda reforzar los conceptos abordados en sus clases y establecer sus relaciones con otros conceptos matemáticos como lo son los fractales.

Para terminar, se invita a los docentes a discutir e indagar sobre qué tipo de actividades se pueden proponer a los estudiantes y hasta dónde se puede aprovechar la teoría de los L-sistemas para favorecer el aprendizaje o la construcción de nuevos conceptos; también, a determinar el potencial y la dificultad que implica el uso de recursos tecnológicos en la enseñanza de las matemáticas. Para apoyarlos se sugiere consultar trabajos que son producto de las reflexiones del grupo de investigación en torno a este objeto de estudio (ver, e.g., Orjuela, Páez y Ramírez, 2010).

REFERENCIAS

- Derlinchán, D. (2004). *Generación gráfica de fractales*. Proyecto de fin de carrera no publicado, Escuela Técnica Superior de Ingeniería Informática, Sevilla, España.
- Mandelbrot, B. (1982). *The fractal geometry of nature*. (Primera edición.) San Francisco, USA: W. H. Freeman.
- Orjuela, C., Páez, J. y Ramírez, J. (2010). *Generación de plantas, árboles y estructuras fractales a partir de L-sistemas*. Ponencia presentada en Primer Congreso Internacio-

nal y Tercero Nacional de Matemáticas Asistidas por Computador, 28 de septiembre al 1 de octubre de 2010, Universidad de Caldas, Manizales, Colombia. Disponible en: <http://es.scribd.com/doc/45294881/15>.

Peitgen, H.O., Jürgens, H., Saupe, D., Maletsky, E., Perciante, T. y Yunker, L. (1991). *Fractals for the classroom: Strategic activities.* (Volumen 1). Nueva York: Springer-Verlag & NCTM.

Prusinkiewicz, P. (1986). Graphical applications of L-systems. En M. Wein y E.M. Kidd (Eds.), *Proceedings of graphics interface '86/Vision interface '86* (pp. 247-253). Toronto, Canadá: Canadian Information Processing Society.

Prusinkiewicz, P. y Lindenmayer, A. (2004/1990). *The algorithmic beauty of plants.* Nueva York: Springer-Verlag. Versión electronica disponible en:
<http://algorithmicbotany.org/papers/abop/abop.lowquality.pdf>

Rubiano, G. (2002). *Fractales para profanos.* Bogotá, Colombia: Editorial Universidad Nacional de Colombia.

CONTRIBUCIÓN DE LA GEOMETRÍA A LA FORMACIÓN DE LA NOCIÓN DE ESTRUCTURA DE GRUPO. UNA VISIÓN HISTÓRICO-EPISTEMOLÓGICA

Erdulfo Ortega
Universidad de Nariño
veortegap@hotmail.com

Frente al enfoque que ha enfatizado, bien sea explícita o implícitamente, que el concepto de grupo abstracto surgió al finalizar el siglo XIX, por abstracción de la noción de grupo de permutaciones, derivada de la teoría de ecuaciones algebraicas, se trata de presentar argumentos históricos y epistemológicos que han conducido a esclarecer el hecho de que el proceso de formación de la noción abstracta de estructura de grupo tuvo tres raíces, y una de ellas es la geometría que, además, junto con la teoría de números, hizo posible que la idea de estructura matemática surgiera a partir de la toma de conciencia de profundos fenómenos de isomorfismos.

INTRODUCCIÓN

No cabe duda de que el surgimiento de la geometría analítica cartesiana, en el siglo XVII, constituyó una ruptura metodológica con la geometría clásica griega, sin embargo, las primeras etapas fundamentales que se orientaron a hacer a un lado el viejo punto de vista acerca de la naturaleza de la geometría, solamente tuvieron lugar hacia finales del siglo XVIII. Es claro también que el álgebra y el análisis, antes que la geometría, fueron las disciplinas que asumieron el liderazgo en superar las visiones clásicas. Se presentaba así un notable y sorprendente contraste. Mientras que los cambios fundamentales en geometría quedaron a la zaga, en el álgebra y el análisis los cambios se desarrollaron explosivamente, tanto en extensión como en profundidad, hasta la finalización del siglo XIX.

MONGE Y LA GEOMETRÍA DESCRIPTIVA

Al hacer referencia al extraordinario crecimiento de la geometría en el siglo XIX, Wussing (1984) observa que este provino directamente de la Revolución Industrial al elevar las exigencias para los ingenieros matemáticamente preparados. Agrega que, el denominado por Monge, *lenguaje de la ingeniería* llegó

Ortega, E. (2011). Contribución de la geometría a la formación de la noción de estructura de grupo. Una visión histórico-epistemológica. En P. Perry (Ed.), *Memorias del 20º Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones* (pp. 397-408). Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

a ser dominante en la Escuela Politécnica de París, fundada de acuerdo con las exigencias de la Gran Revolución Francesa. La geometría descriptiva, creada por Monge, ejerció una fuerte influencia en las matemáticas de los gimnasios y universidades y preparó el terreno para el desarrollo de la geometría. Monge, al crear la geometría descriptiva, introdujo las consideraciones proyectivas en la geometría finalizando el siglo XVIII. Esta ciencia, que tuvo su origen en el proyecto de fortificaciones, contiene una forma de representar y analizar objetos tridimensionales por medio de sus proyecciones sobre ciertos planos. Eves (1969, p. 273, 274) afirma que los trabajos de Desargues y de Poncelet, lo mismo que los de sus seguidores, condujeron a los geómetras a clasificar las propiedades geométricas en dos categorías: las propiedades métricas, en las que intervienen las medidas de las distancias y de los ángulos, y las propiedades descriptivas, en las que sólo se trata la relación de las posiciones de los elementos geométricos entre sí. El Teorema de Pitágoras, por ejemplo, es una propiedad métrica. La geometría proyectiva estudia las propiedades descriptivas de las figuras geométricas. Todas las propiedades de incidencia, exceptuando únicamente propiedades métricas especiales, son proyectivas.

EL PAPEL DE LA GEOMETRÍA PROYECTIVA

Poncelet, discípulo de Monge, fue quien impulsó el resurgimiento real de la geometría proyectiva especialmente, según Eves, con la publicación en París, en el año de 1822, de su obra *Traité des propriétés projectives des figures*, con la cual “dio un ímpetu tremendo al estudio del tema e inició el llamado gran período de la historia de la geometría proyectiva”, en cuyo campo entraron muchos matemáticos, como Gergone, Brianchon, Chasles, Plücker, Steiner, Von Staudt, Reye y Cremona, destacadas figuras de la historia de la geometría y, en particular, de la historia de la geometría proyectiva (Eves, 1969, p. 273). La obra de Poncelet y el desarrollo de la geometría proyectiva fueron realizaciones inmediatas del poderoso impulso impartido por Monge y la Escuela Politécnica. Monge planteaba el uso general de *proyecciones ortogonales*, en cambio para Poncelet la principal herramienta era el concepto más general de *proyección central*. De la misma manera, introdujo la distinción fundamental entre propiedades *proyectivas* y *no proyectivas* de figuras; es decir, entre propiedades que son siempre preservadas por proyecciones centrales y propiedades que no se preservan por tales proyecciones. Según Wussing, la revolución en geometría empezó al finalizar el siglo XVIII, llegando a cambiar la milenaria tradición euclidiana tanto en contenido como en método, y

una vez abandonada la idea de una única geometría, todo el trabajo se orientó hacia la posibilidad de generalización o a la necesidad de revisión crítica. Merecen especial atención ciertos aspectos de esta evolución por cuanto fueron puntos de partida u origen de un modo de pensamiento implícito en geometría sobre teoría de grupos. Los cuatro aspectos más importantes que se señalan en este sentido son:

1. La eliminación del aparentemente indisoluble lazo entre geometría y métrica, y el surgimiento del problema de la conexión entre geometría proyectiva y geometría métrica.
2. La extensión del concepto de coordenadas más allá del tradicional, de coordenadas (cartesianas) paralelas.
3. El desarrollo de las geometrías no euclidianas.
4. El giro hacia la abstracción debido a la introducción de un arbitrariamente amplio número (finito) de dimensiones. (Wussing, 1984, p. 26, 27)

Poncelet pudo anticipar la idea principal de desarrollos posteriores al considerar *propiedades invariantes* de figuras bajo proyecciones centrales así como *propiedades invariantes* bajo otras proyecciones. Esta clase de aproximaciones y el tratamiento analítico de figuras geométricas, es decir, el cambio de proyecciones sintéticas hacia el estudio analítico de transformaciones de coordenadas, investigando sus invariantes, hizo posible aplicar la *teoría de los invariantes*, relacionada con otras partes de las matemáticas, en la *clasificación de objetos geométricos*.¹

En el desarrollo de la geometría proyectiva, Poncelet y más tarde Möbius, Steiner y otros, utilizaron consideraciones métricas y la razón doble² en la de-

¹ Es oportuno recordar aquí, como lo señala Bell, que “con la *invariancia*, íntimamente relacionada con el *concepto de grupo*, la teoría de los grupos en el siglo XIX transformó y unificó partes muy separadas de las matemáticas, revelando insospechadas *analogías de estructura* en diferentes teorías” (Bell, 2002, p. 244). Por éstas y otras razones más, el concepto de *invariancia* ha sido considerado como un notable y elevado aporte del siglo XIX al desarrollo del pensamiento matemático.

² Si A, B, C, D son cuatro puntos distintos de una recta, se designa la relación de las razones $(AC/CB)/(AD/DB)$ por el símbolo (AB,CD) , y se llama *razón cruzada* o *doble* o *relación anarmónica* del intervalo de puntos A, B, C, D , en este orden. Se demuestra que la razón

finición de coordenadas proyectivas, manteniendo de esta manera la dependencia métrica. Esta brecha fue cerrada con la aparición de las obras: *Geometría de la posición* (*Geometrie der Lage*) y *Consideraciones sobre la geometría de la posición* de Von Staudt, sucesor de Steiner y profesor en Erlangen, quien se interesó por la fundamentación de la geometría. Von Staudt es considerado como el fundador de la geometría de posición pura, es decir, de una geometría completamente libre de relaciones métricas. Se esforzó por tratar de eliminar ciertas dificultades encontradas en la utilización de la geometría proyectiva e intentó reconstruir el conjunto de la misma, independientemente de toda noción métrica, con ayuda sólo de axiomas relativos a la posición o al orden de los elementos fundamentales. Precisamente en la segunda de sus obras realizó un tratamiento de la *relación anarmónica*³ exento de consideraciones métricas.

Las investigaciones de Poncelet tenían como propósito constituir una doctrina geométrica general en la que intervendrían principalmente la *relación anarmónica* que se conserva en una transformación proyectiva, los puntos imaginarios y el principio de continuidad. A su vez, con Chasles y Steiner, después de constituida la doctrina proyectiva, surgieron dos ideas de gran relevancia como son: la distinción entre propiedades métricas y propiedades descriptivas, por una parte y, por otra, el papel de las transformaciones. Von Staudt, al igual que Poncelet y sus sucesores, se propuso desarrollar la geometría sin recurrir a los métodos analíticos pero, a diferencia de los anteriores, entendió que debía introducir las nociones proyectivas sin que intervinieran consideraciones métricas e inició la reconstrucción geométrica con base en los axiomas referidos únicamente a la posición o al orden de los elementos fundamentales. Poncelet, Chasles, Steiner y Von Staudt conocieron con nitidez la diferencia entre las propiedades proyectivas y las propiedades métricas, pero no llegaron a explicar las relaciones entre ellas. Más tarde, Laguerre, en 1853, encaminado a establecer las propiedades métricas de la geometría euclídea sobre la base de conceptos proyectivos, comenzó a desarrollar algunas investigaciones, relacionando la medida de un ángulo con la razón anarmónica de sus lados y de las dos rectas del mismo origen que unen su vértice a los puntos cíclicos. Las

doble de cuatro puntos es invariante en la proyección. La notación (AB, CD) fue introducida por Möbius en 1827.

³ En la geometría proyectiva, el concepto de relación anarmónica se ha convertido en un concepto básico, por cuanto su poder y aplicabilidad son de fundamental importancia.

ideas de Laguerre fueron desarrolladas independientemente por Cayley, de tal manera que sus investigaciones generalizaron las de Laguerre. Entonces, la medida proyectiva, por ejemplo, fue definida claramente, en dos dimensiones, mediante la razón anarmónica de los cuatro puntos de una recta, de los cuales dos son los extremos del segmento medio y los otros dos son los puntos de intersección de la recta con una cónica sometida a la transformación. Al respecto, Cayley consideraba que la geometría métrica se manifiesta como una parte de la geometría proyectiva.

La base de la geometría de Steiner estaba constituida por la relación proyectiva entre las formas fundamentales en una dimensión. Por su parte, Von Staudt se propuso desarrollar esta relación de una manera puramente descriptiva, esto es, independiente del concepto de distancia. Así mismo, antes de Von Staudt, fueron utilizados en geometría los llamados *elementos imaginarios*, de los cuales sólo se sabía que no eran reales, como el punto en el infinito; no obstante, Von Staudt intentó definirlos adecuadamente como elementos esenciales de la geometría proyectiva. Así, en su segunda obra los definió como elementos dobles de involuciones elípticas y demostró que satisfacían los axiomas fundamentales. En este orden de ideas, Von Staudt, con su teoría, llegó a eliminar el concepto de longitud de la geometría proyectiva y en el mismo sentido las operaciones usuales de la aritmética se traducían en construcciones geométricas que operaban sobre las coordenadas de acuerdo con las leyes de la aritmética. De este modo construyó una parte importante de la geometría proyectiva clásica y la presentó como un tema independiente del concepto de distancia. Sin embargo, su obra fue objeto también de análisis críticos debido, principalmente, a que no aparecía en ella el postulado euclíadiano de las paralelas e igualmente a que la formulación del axioma de continuidad adolecía de imprecisiones. Por último, Von Staudt resolvió expulsar los imaginarios de la geometría, para lo cual los reemplazó por infinidads de puntos reales asemejándose, en este caso, al pensamiento matemático de Dedekind de recurrir a conjuntos infinitos para resolver un problema finito en aritmética, como en el tema de los ideales.

EL PROGRAMA DE ERLANGEN Y LAS GEOMETRÍAS NO EUCLIDIANAS

Hacia 1871, Klein presentó una definición no métrica de coordenadas proyectivas, basándose en la razón doble, lo cual solventó la exigencia, debida a consideraciones metodológicas, de un desarrollo, de esta temática, estrictamente proyectiva. Como se verá más adelante, sería a partir de este punto de vista, o

nueva forma de pensamiento, relacionado con la búsqueda y/o identificación de propiedades que permanecen invariantes bajo trasformaciones proyectivas, que Félix Klein llegaría a plantear su célebre *Programa de Erlangen* de 1872, en virtud del cual se pudo, entre otras cosas, clarificar la conexión interna entre geometría métrica y geometría proyectiva, lo mismo que hacer uso explícito de la teoría de grupos. De esta manera Klein logró la unificación de las diversas geometrías por medio de la teoría de grupos. Así mismo entre 1870 y 1874, Klein hizo aportes complementarios importantes a los trabajos fundamentales y muy originales de Von Staudt. Posteriormente los esfuerzos de los matemáticos se orientaron esencialmente hacia la revisión de los principios y de la estructura en la geometría. Klein, en su *Programa*, mostró cómo el concepto de grupo podía ser aplicado de manera conveniente en la caracterización de las diferentes geometrías elaboradas durante el siglo XIX. Este programa contiene ideas maestras provenientes de diversas fuentes. Tal es el caso de la noción de aplicación de una superficie sobre otra, de correspondencia entre conjuntos geométricos, así como de la teoría general de los invariantes. Volviendo a emplear las ideas de Cayley acerca de la formulación de nociones métricas como las de ángulo y distancia entre dos puntos, en términos proyectivos, a partir de las relaciones entre las geometrías euclídea y proyectiva, se propuso generalizarlas de tal manera que incluyeran las geometrías no euclidianas. El concepto de grupo de transformaciones le permitió elaborar una síntesis extraordinaria en la cual propuso la definición de una geometría como el estudio de aquellas propiedades de un conjunto que permanecen invariantes cuando los elementos del mismo se someten a las transformaciones de un cierto grupo, también de transformaciones. A partir de estas ideas planteó un programa que constituía una concepción orgánica de la geometría con fundamento en una jerarquización de los grupos de transformaciones. El advenimiento de las primeras geometrías no euclidianas constituyó una etapa importante en la génesis del *Programa de Erlangen*. Tales geometrías no sólo dieron lugar al surgimiento de otras geometrías diferentes a la clásica de Euclides, sino también a las ideas que permitirían llegar a la matemática moderna. Las geometrías no euclidianas fueron el punto de partida de un análisis más profundo tanto del método axiomático como de la relación de la geometría con el mundo exterior. Igualmente, al parecer fue Klein quien puso de manifiesto la naturaleza proyectiva de las geometrías no euclidianas, que por otra parte, en el caso de Lobachevski, hizo posible la concepción del espacio como concepto *a posteriori* consecuencia del movimiento de los cuerpos físicos, en oposición a la concepción kantiana del espacio como noción a priori.

En cuanto al tema de la extensión del concepto de coordenadas, Wussing (1998) señala que el desarrollo de la geometría proyectiva en profundidad estuvo estrechamente vinculado a descartar la visión tradicional que limitó el concepto de coordenadas al de coordenadas (cartesianas) paralelas. Para el surgimiento del punto de vista sobre la teoría de grupos fue especialmente significativa la extensión del concepto de coordenadas de puntos más allá de la tradición euclíadiana que consideraba el punto como el elemento fundamental de toda la geometría.

EL APORTE DE PLÜCKER

Plücker, considerado el mayor especialista del enfoque algebraico de la geometría, en una memoria titulada *Sobre un nuevo sistema de coordenadas* (1829), marcó una nueva etapa de la geometría con el concepto de sistema de coordenadas, entendido como todo procedimiento particular para fijar la posición de un punto con respecto a puntos o líneas considerados como de posición conocida. En esta memoria dejó de utilizar las coordenadas cartesianas e introdujo las nuevas coordenadas homogéneas que posteriormente las aplicó, de manera sistemática, al estudio de curvas en general. Así, Plücker encontró lo que se podría llamar la contraparte analítica del principio geométrico de dualidad, que había sido examinado detalladamente por Poncelet y Gergone. Entonces, al sustituir, en geometría pura, el *punto* por la *recta* y viceversa, se tendría el equivalente a intercambiar, en álgebra, las expresiones *constante* y *variable* con respecto a la ecuación de una recta en coordenadas homogéneas. Consecuencia lógica importante de esta radicalmente novedosa idea de Plücker es que tanto el punto como la recta son elementos igualmente fundamentales para la geometría plana. Para el caso del espacio de tres dimensiones los elementos fundamentales son el punto y el plano.

Hacia 1831, en el segundo tomo de una de sus obras, sobre el desarrollo de la geometría analítica (*Analytisch-geometrische Entwickelungen*), hizo la precisión y generalización de los conceptos de ecuación, de coordenadas tangenciales y de clase de una curva. Observó, en particular, que una misma curva puede ser considerada como una colección de puntos o como una colección de rectas tangenciales a la curva porque, según él, las tangentes determinan la forma de una curva tanto como los puntos. La familia de las tangentes es una curva de líneas y posee una ecuación en términos de coordenadas de líneas. La clase de la curva la hacía corresponder al grado de la ecuación, mientras que el grado de la ecuación, expresado en términos de coordenadas de puntos, lo de-

nominó el *orden de la curva*. Posteriormente, en sus obras *Sistema de geometría analítica*, de 1835 y *Teoría de las curvas algebraicas*, de 1839, desarrolló ampliamente el estudio y la clasificación de las curvas algebraicas utilizando como nuevo principio la *enumeración de las constantes*, basado en sus fórmulas duales que relacionan el orden, la clase y los números de los diferentes tipos de singularidades ordinarias de una curva de un género dado. Así mismo, realizó un completo análisis de todos los sistemas lineales posibles de coordenadas de punto en el espacio de tres dimensiones, expresado en términos de que cada sistema de coordenadas planas está dado mediante ecuaciones lineales. La notable obra de Plücker, que con la extensión del concepto de coordenadas dio una nueva orientación y contribuyó a la renovación de la geometría analítica, fue proseguida por Hesse, en Alemania, mediante los determinantes e igualmente aplicando la teoría de las formas algebraicas y la teoría de los invariantes a la ordenación de los razonamientos de dicha geometría. De la misma manera, en Inglaterra, Cayley y Salmon continuaron en esta nueva dirección, para lo cual utilizaron ampliamente los conceptos y procesos del álgebra lineal, y así, además de realizar trabajos sumamente originales, aportaron a la difusión de los nuevos métodos que el matemático italiano Chelini, enriqueció y extendió. Igualmente, Hesse, Cayley, Salmon, Jordan, Klein, Cremona entre otros, al emprender la utilización de la teoría de las formas algebraicas y de los invariantes, posibilitaron el avance en el estudio de las curvas y de las superficies algebraicas. También, como ya se ha dicho, Laguerre, Cayley y Klein establecieron las propiedades métricas de la geometría euclídea mediante conceptos proyectivos. En este orden de ideas, el desarrollo de la geometría después de Plücker comprendería una complejidad de trabajos relacionados con los comienzos de la geometría algebraica, con el surgimiento de la topología, con las geometrías en n dimensiones, así como con la geometría infinitesimal y diferencial entre otros.

Cabe recordar que la teoría de grupos se desarrolló, en primer lugar, a nivel de teoría de grupos finitos de permutaciones, a raíz de la publicación que hizo Hermite de los manuscritos de Galois. En 1870, Jordan publicó su *Tratado de las sustituciones y de las ecuaciones algebraicas*, en el cual resumió y perfeccionó los trabajos de sus antecesores sobre propiedades especiales de los grupos de permutaciones y estudió también grupos particulares, los grupos lineales y sus subgrupos. Introdujo además la noción de representación de un grupo en otro y demostró parcialmente el denominado Teorema de Jordan-Hölder. Entre 1868 y 1869 emprendió el primer estudio importante de los grupos infi-

nitos en su obra *Memoria sobre los grupos de movimientos*, en la cual estudió las traslaciones y las rotaciones, dando origen así a los estudios de las *transformaciones geométricas* por medio del *concepto de grupo*. Pero no hay que olvidar la advertencia que hace Wussing cuando afirma que el avance logrado por Cayley hacia 1854, orientado a la definición de *grupo abstracto*, resultó históricamente prematuro, ya que no se habían desarrollado plenamente las condiciones para una apreciación favorable de una aproximación abstracta y formal. Igualmente, mientras los grupos de permutaciones eran los únicos en investigación, no había interés en la generalización de dicho concepto, ni motivos para obrar en tal sentido. De tal modo que los artículos de Cayley de 1854 no tuvieron impacto inmediato en marcha hacia la abstracción.

EL ESTUDIO DE LAS TRANSFORMACIONES

Con respecto a las investigaciones por el ordenamiento, en geometría, de los principios a través del examen de las relaciones geométricas, Wussing señala que en el estudio de estas relaciones, la geometría descriptiva y la geometría proyectiva, hicieron énfasis en aquellas relaciones entre figuras geométricas que estaban asociadas con formaciones particulares. Afirma además, que Carnot en su *Géométrie de position* expresó este punto de vista, el cual se reflejaba en el principio fundamental del método de Carnot que establecía que *dos figuras geométricas, conectadas por una proyección, comparten un cuerpo de propiedades*. Sin embargo, interesaba que tales propiedades compartidas fueran trasladadas a las transformaciones mismas, lo que implicaba especiales relaciones entre figuras. Este principio que ya había sido aplicado tácitamente por Monge, se transformó en una tendencia que claramente tomó forma reconocible en el *principio de continuidad* de Poncelet, quien enfocó su uso sobre el problema de las transformaciones continuas incluyendo en todo caso proyecciones centrales y, a partir del mismo, asignó estatus equivalente a dos figuras conectadas por una transformación continua. Así las cosas, el estudio de las *relaciones geométricas entre figuras* se convirtió en el *estudio de las transformaciones asociadas*. Según Wussing, entre 1830 y 1870, las transformaciones se convirtieron en objeto de prolíficas investigaciones especializadas e independientes, las cuales dieron origen a las teorías de transformaciones circulares, transformaciones esféricas, inversiones, afinidades, colineaciones, entre otras. Desde luego que algunas de estas transformaciones no eran enteramente nuevas, por cuanto ya se había hecho uso esporádico de ellas desde el siglo XVI.

A medida que se realizaban estos avances, el estudio de las relaciones geométricas entró gradualmente a una tercera fase, en la cual se investigó las conexiones lógicas entre transformaciones. Esto condujo al *problema de la clasificación de las transformaciones* y hacia la síntesis “*grupo-teorética*” de la geometría. Es importante tener en cuenta, en este caso, los esfuerzos de clasificación de Möbius en geometría. Al respecto, Wussing observa que a pesar de que Möbius se había mantenido alejado de la comunidad matemática, sus investigaciones en geometría abarcaban todos los desarrollos de su tiempo en este campo, razón por la cual en sus comienzos su trabajo fue ignorado, pero posteriormente alcanzó la más alta consideración cuando se reconoció que sus ideas, a pesar de haber sido desarrolladas silenciosa y aisladamente, anticiparon la posterior evolución de la geometría y aún del mismo *Programa de Erlangen*. Precisamente Wussing destaca dos elementos del pensamiento geométrico de Möbius que dan testimonio de la lógica interna y la inevitabilidad del desarrollo matemático. En primer lugar, hizo una significativa contribución a la remoción del concepto tradicional de coordenadas y, en segundo lugar, aunque sin tomar conciencia del concepto de grupo, condujo, como guiado por instinto, la *organización grupo-teorética de la geometría que más tarde sería resuelta de manera clara en el Programa de Erlangen* de 1872. Rasgos distintivos estos, que estaban ya presentes en su principal trabajo inicial sobre el *cálculo baricéntrico*. Sostiene además Wussing que la actividad creativa de Möbius, en una segunda fase, estuvo dedicada principalmente a las matemáticas aplicadas en temas que comprendían sistemas de lentes, mecánica celeste, sistemas de cristales y *equilibrio de fuerzas*. Este último tema constituiría la base de su texto sobre estática hacia 1837. El gran interés por los problemas prácticos y las preguntas específicas relacionadas con los mismos, lo impulsaron a continuar en la investigación acerca de relaciones geométricas más amplias. Con tal motivo se interesó por la generalización del tradicional concepto de *adición*.

Es oportuno recordar aquí que a comienzos del siglo XIX, Argand, Wessel y Gauss, independientemente, introdujeron la representación geométrica de los números complejos, la cual no sólo hizo posible efectuar las *operaciones fundamentales* realizando sencillas construcciones, sino que contribuyó a disipar la desconfianza y a clarificar las ideas sobre los que se consideraban números ficticios o irreales, es decir, *imaginarios*, y además, anunciaba el principio de una futura teoría científica rigurosa. En particular, la suma de números com-

plejos se construyó, desde entonces, utilizando la llamada *regla del paralelogramo* para la suma de vectores.

MOVIMIENTOS Y COMPOSICIÓN DE FUERZAS

Möbius pudo observar, mediante la *regla del paralelogramo*, que la *composición de fuerzas* produce una *fuerza*, la *composición de movimientos* produce un *movimiento*. En estos términos, observa Wussing, que la *composición de operaciones sucesivas* de una clase determinada, involucra el uso de una *regla de composición*, y la difícil tarea matemática, implícita en los precitados ejemplos físicos, consistía en expresar la *regla de composición* dentro de un cálculo apropiado. Lo arduo de esta tarea, advierte Wussing, está ilustrado por los esfuerzos extremos de Grassmann para entender la esencia de la adición de segmentos; esfuerzos que eventualmente condujeron al concepto de vector y al cálculo vectorial. Agrega, además, que el interés de Möbius en las matemáticas aplicadas lo condujo hacia *varias reglas de composición* y así, entre 1838 y 1850, publicó varios trabajos sobre el tema. Si bien estos trabajos promovieron en gran medida el *concepto de composición*, en el sentido de que ellos ayudaron a crear un completo espectro de *leyes de composición* para una diversidad de operaciones, sin embargo, ellos hicieron muy poco en forma directa para preparar el, más tarde, *concepto general de grupo*, y menos aún, llevar hacia adelante los *métodos de la teoría de grupos*. En ese tiempo, la *composición de operaciones* no pudo por sí misma inducir el *concepto de grupo*. Lo que faltaba en este nivel de desarrollo de la geometría, según Wussing, era el reconocimiento del hecho de que una *composición* sobre un conjunto determina un *subconjunto cerrado* relativo a la *composición*, hecho que después resultó decisivo en el estudio de las permutaciones.

El problema de las *reglas de composición* dio origen al tercer período creativo de Möbius y, comenzando en 1853, publicó trabajos sobre transformaciones geométricas especiales. Dice Wussing, que luego siguieron numerosos artículos que versaban sobre involución de puntos y que, además, se ocupó de algunas transformaciones especiales. En estos trabajos, Möbius se propuso, como parte de un proyecto o programa, asignar su propio lugar a cada una de las *geometrías* asociadas con transformaciones particulares de congruencia, semejanza, afinidad y colineación. Finalmente, agrega Wussing, que por carecer de recursos técnicos, estos intentos no pudieron llegar a feliz término; no obstante, ellos proporcionaron un amplio impulso a la síntesis conceptual del edificio de la geometría. Además, a partir de 1858, Möbius se aventuró en un estudio

de las llamadas “*relaciones elementales*”, más generales que las colineaciones, razón por la que tales transformaciones, desde el punto de vista moderno, estarían más o menos cercanas a la topología.

REFERENCIAS

- Bell, E.T. (2002). *Historia de las matemáticas*. México, D. F.: Fondo de Cultura Económica.
- Eves, H. (1969). *Estudio de las geometrías* (tomo 1). México: Unión Tipográfica Editorial Hispano Americana.
- Ortega, V. E. (2010). *Formación de la noción abstracta de estructura algebraica. A partir del estudio histórico-epistemológico de los aportes de Cantor y Dedekind*. Tesis de maestría no publicada, Universidad del Valle, Cali, Colombia.
- Wussing, H. (1984). *The genesis of the abstract group concept*. Londres, Inglaterra: The MIT Press.
- Wussing, H. (1998). *Lecciones de historia de las matemáticas*. Madrid, España: Siglo XXI.

SOMBREROS Y ZAPATOS PARA DESARROLLAR EL PENSAMIENTO LATERAL

Laura Peña y Germán Torres

*Club de Matemática Recreativa, Grupo Pirámide,
Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia*
laurgiv@hotmail.com, torresroa@gmail.com

Esta conferencia tiene el propósito de que los participantes vivan una breve experiencia que ilustre, mediante algunas situaciones geométricas, cómo constantemente, cuando nos encontramos con caminos sin salida, el pensamiento lógico (llamado también vertical o convencional) no es suficiente para salir del atasco, quedando limitados. Al dar pequeñas muestras de cómo abordar las situaciones, pretendemos que cada quien contemple la existencia de otra vertiente del pensamiento para resolver problemas que parecen no tener solución. Entonces se podrá establecer la pertinencia educativa que tiene la consideración de formas para pensar y para actuar que desarrollan el pensamiento lateral, cuyo estudio inicial se debe al doctor Edward de Bono.

PRESENTACIÓN

El Club de Matemática Recreativa de la Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia es un escenario donde se experimenta con el enfoque de planteamiento y resolución de problemas para acompañar los procesos de formación de licenciados en matemáticas y de cualificación de docentes en ejercicio. Desde esta perspectiva, se enfatiza en la apropiación de conocimientos mediante la resolución de problemas y la reflexión acerca de lo realizado. Así, los conocimientos matemáticos se ponen en juego a partir del abordaje de problemas que imponen desafíos. El trabajo no culmina, entonces, con la resolución de los problemas sino con diferentes instancias de explicitaciones, justificaciones, confrontaciones, análisis y establecimiento de conclusiones.

Pero frecuentemente dicha actividad exige estrategias que no son convencionales y como tal, inscritas en una manera de pensar unidireccional. Por ello nos remitimos a la propuesta de Edward de Bono en la que encontramos nuevos elementos que acompañan o suplen las estrategias experimentadas previamente. Aquí se presentan algunas ilustraciones de esas formas distintas de pensar y proceder.

Peña, L. y Torres, G. (2011). Sombreros y zapatos para desarrollar el pensamiento lateral. En P. Perry (Ed.), *Memorias del 20º Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones* (pp. 409-419). Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

PENSAMIENTO LATERAL

El término “pensamiento lateral” fue introducido en 1970 por el médico inglés especialista en psicología y fisiología Edward de Bono, quien lo acuñó para establecer diferencia con respecto al pensamiento lógico, denominado por él como vertical. Este autor encuentra en el pensamiento lógico (fundamentalmente hipotético deductivo) una gran limitación de posibilidades cuando se trata de buscar soluciones eficientes a nuevos problemas.

La mente tiende a crear modelos fijos de conceptos, lo que limitará el uso de la nueva información disponible a menos que se disponga de algún medio de reestructurar los modelos ya existentes, actualizándolos objetivamente con nuevos datos. (de Bono, 1970)

El pensamiento lateral actúa liberando la mente del efecto polarizador de las viejas ideas para estimular las nuevas, lográndolo a través de la perspicacia, la creatividad y el ingenio, procesos mentales con los que se encuentra íntimamente relacionado. En lugar de esperar que estas tres características se manifiesten de manera espontánea, de Bono propone el uso del pensamiento lateral como una técnica, de manera consciente y deliberada.

El pensamiento vertical o lógico se caracteriza por el análisis y el razonamiento. Así, se utiliza el valor intrínseco de la información mediante su inclusión en modelos existentes con el fin de encontrar una solución al problema inicialmente planteado. Por el contrario, el pensamiento lateral es libre y asociativo. La información se usa no como fin sino como un medio para provocar una disolución de parámetros o esquemas a los que se recurriría usualmente, y su consiguiente reestructuración en nuevas y eficaces ideas.

Estamos acostumbrados a pensar en una sola dirección y dar por obvio algo que no lo es; el pensamiento lateral está concebido hacia la generación de distintas direcciones del pensamiento, ignorando paradigmas previamente establecidos. Asimismo, el pensamiento lateral se fundamenta en la búsqueda de soluciones distintas para proceder ante un mismo problema, ...en ser creativo, pensar como un niño, imaginar lo que a nadie se le ha ocurrido y ofrecer soluciones y/o caminos diferentes frente a una situación (Torres, 2005).

Finalmente es apropiado tener en cuenta el planteamiento de Edward de Bono (1970) en el sentido de que:

La enseñanza del Pensamiento Lateral durante una hora a la semana a lo largo de todo el periodo de asistencia a la escuela sería suficiente para desarrollar una actividad creativa en los niños y mucho más eficaz que intentar introducir sus principios en el transcurso de clases que versan acerca de otros temas.

DIFERENCIAS ENTRE EL PENSAMIENTO VERTICAL Y EL PENSAMIENTO LATERAL	
PENSAMIENTO VERTICAL	PENSAMIENTO LATERAL
Es selectivo.	Es creador.
Se mueve sólo si hay una dirección en qué moverse.	Se mueve para crear una dirección.
Sabe lo que está buscando.	Busca pero no sabe lo que busca hasta que lo encuentra.
Es analítico.	Es provocativo.
Se basa en la secuencia de las ideas.	Puede efectuar saltos.
Cada paso ha de ser correcto.	No es preciso que cada paso sea correcto.
Se usa la negación para bloquear bifurcaciones y desviaciones laterales.	No se rechaza camino alguno.
En él se excluye lo que no parece relacionado con el tema.	Se explora incluso lo que parece completamente ajeno al tema.
Las categorías, clasificaciones y etiquetas son fijas.	Las categorías, clasificaciones y etiquetas no son fijas.
Sigue caminos evidentes.	Sigue los caminos menos evidentes.
Es un proceso finito.	Es un proceso probabilístico.

Tabla 1. Diferencias entre el pensamiento vertical y el pensamiento lateral

Formas para pensar y para actuar

Las seis formas para pensar (sombreros) y para actuar (zapatos) son métodos muy sencillos y prácticos propuestos en de Bono (1996, 1999) que permiten, de una manera diferente, resolver problemas de diversa índole.

El pensamiento es uno de los aspectos de las cosas. El otro es la acción. Muy pocas personas toman asiento y se dedican a pensar. Usualmente la mayoría entra inmediatamente en acción.

Seis sombreros para el pensamiento

Es una técnica creada por Edward de Bono, que presenta un concepto muy sencillo que le permite al pensador hacer una cosa por vez. Podemos conducir nuestro pensamiento tal como un director podría dirigir su orquesta. Cada uno de los seis sombreros para pensar tiene un color: blanco, rojo, negro, amarillo, verde, azul. El color da el nombre al sombrero y está relacionado con su función.

Sombrero blanco

- “Sólo los hechos, por favor, sin los argumentos”.
- El pensamiento del sombrero blanco es una manera de pedir que las cifras y los hechos se expongan objetiva y neutralmente.
- Sistema doble: hechos creídos y hechos verificados.
- Tu opinión nunca es admisible en el pensamiento de sombrero blanco.
- La noción japonesa es que las ideas surgen como semillas y pequeños brotes a los que después se nutre y se les permite que crezcan y tomen forma.

Sombrero rojo

- Pensamiento de sombrero rojo: emociones, sentimientos y aspectos no racionales del pensar.
- El pensamiento de sombrero rojo es casi exactamente el opuesto al de sombrero blanco.
- Con el pensamiento de sombrero rojo nunca hace falta justificar o explicar lo que se siente.
- Se puede tratar a la intuición como se trata a un consejero.

- Los sentimientos de sombrero rojo se pueden mostrar en cualquier momento durante el transcurso de una reunión.

Sombrero negro

- La opinión mayoritaria cree que la función principal del pensamiento consiste en usar el sombrero negro.
- Este sombrero presenta el aspecto lógico-negativo: por qué algo no funciona. Con este sombrero se deben dar razones lógicas y relevantes.
- La intención del pensador de sombrero negro es señalar las fallas en forma objetiva.
- El propósito del pensamiento de sombrero negro es ocuparse del pensamiento negativo serio y no de la complacencia negativa infantil.

Sombrero amarillo

- No se trata sólo de dar un juicio positivo sobre algo que se plantea. Es una búsqueda deliberada de lo positivo.
- Respaldo lógico: discutimos los posibles beneficios y buscamos justificarlos. Esta justificación es un intento por fortalecer la sugerencia.
- Las ideas, sugerencias y propuestas deben surgir de este pensamiento.
- El pensamiento de sombrero amarillo se ocupa de la generación de propuestas y también de la evaluación positiva de ellas.
- La aplicación eficaz de ideas viejas constituye un ejercicio adecuado de pensamiento de sombrero amarillo.

Sombrero verde

- El sombrero verde para pensar se ocupa específicamente de ideas nuevas y de nuevas formas de enfocar las cosas.
- La creatividad implica provocación, exploración y riesgo.
- Pensamiento lateral.
- Podemos sentarnos a esperar provocaciones o podemos decidir producirlas deliberadamente.

- La naturaleza ofrece provocaciones. Su rol es sacar el pensamiento de las pautas usuales.
- Operación provocadora “op”: indicador simbólico de que se está exponiendo una idea como provocación y por su valor de movimiento.
- La búsqueda de alternativas implica una actitud creativa: el reconocimiento de que existe diversos planteos.

Sombrero azul

- Con el pensamiento de sombrero azul nos decimos a nosotros mismos o a otros cuál de los otros cinco sombreros usar.
- El sombrero azul es el sombrero programador del pensamiento humano.
- El papel del pensador de sombrero azul es también establecer tareas específicas de pensamiento.
- El pensador de sombrero azul considera el pensamiento que se desarrolla. Él es el coreógrafo que diseña los pasos, pero también el crítico que observa lo que acontece.

Seis pares de zapatos para la acción

El marco de los seis pares de zapatos creado por Edward de Bono ayuda en el desarrollo de las habilidades para actuar y también para emplearlas cuando se actúe. Cada par de zapatos para actuar tiene un color diferente y cubre un estilo particular de la acción. Podemos visualizar que para el método de los seis sombreros sólo podemos usar un sombrero en cada ocasión. En el método de los seis pares de zapatos existe una ventaja: hay dos zapatos en un par. Podemos realizar una combinación de dos clases de zapatos.

Zapatos formales de color azul marino

- La forma de actuar con estos zapatos abarca las rutinas y los procedimientos formales. Se elige la rutina apropiada, se cumple y se respecta tanto como sea posible.
- Un ejemplo de rutina en matemáticas es recurrir a una fórmula para resolver un ejercicio o un problema.

- Utilizar rutinas en nuestra vida diaria nos permite ahorrar tiempo y emplearlo en cosas que verdaderamente valen la pena.
- Una rutina es tomar el teléfono celular y oprimir el botón para contestar cuando éste timbra. Si no utilizáramos esta rutina, perderíamos demasiado tiempo pensando cómo hacerlo.

Zapatillas de deporte gris

- La forma de actuar con estos zapatos es obtener información y usarla. Su acumulación requiere acción y hace falta capacidad para decidir cómo buscarla, qué hacer con ella, y adoptar la mejor aplicación.
- Estas zapatillas se utilizan cuando es necesario encontrar información para apoyar o refutar cualquier idea que tengamos de un problema o de la solución de dicho problema.

Zapatos marrones

- La forma de actuar con estos zapatos es ser práctico y pragmático utilizando la iniciativa y la efectividad. La flexibilidad es el aspecto clave. Usted va cambiando su comportamiento a medida que cambia la situación.
- La acción, con estos zapatos, se dedica a lo que es factible y valioso.
- El pragmatismo se ocupa de la dirección de una acción: a dónde podría conducirnos, y del efecto o las consecuencias de la acción.
- La iniciativa: analice la situación y determine las prioridades y los objetivos. Compórtese de la manera más común y conocida.
- La efectividad: actuar para conseguir resultados.

Las botas de goma naranjas

- Del color y el estilo de las botas de goma tenemos la sensación de que la forma de actuar con ellas concierne de manera directa a las situaciones de emergencia. Una vez que algo ha sido clasificado como emergencia cambian las prioridades. Aparecen reglas nuevas para la acción.

- Nos colocamos las botas de goma color naranja particularmente cuando estamos estancados con un problema.
- Es necesario diseñar las acciones naranjas. Debe actuarse con las zapatillas grises de deporte para reunir información y luego desplazarse a la forma naranja y diseñar una estrategia.

Las pantuflas rosadas

- La forma de actuar con las pantuflas rosadas está relacionada con los sentimientos humanos, la compasión, la simpatía y la atención tierna.
- El sentimiento no basta. Debe expresarse con la acción. Si el sentimiento está presente, la intención de ayudar será cristalizada en una acción.
- Escuchar es una parte importante de la atención. A veces la atención es el propósito principal de la acción.
- Nos colocamos estas pantuflas específicamente cuando nos estamos dirigiendo a una persona o a un público con el fin de no herir susceptibilidades.

Las botas de montar de color púrpura

- La forma de actuar con las botas de montar color púrpura es autoritaria pero civilizada. Corresponde a las posiciones oficiales. Éstas no son necesariamente superiores, pero cuando un oficial actúa dentro de los límites de ese papel, tiene más autoridad que alguien que no las tiene puestas. Lo que importa ya no es la persona que actúa sino el papel oficial.
- Nos colocamos estas botas cuando estamos dirigiendo una actividad en particular. Representamos una autoridad pero sin abusar de ella.

SITUACIONES ILUSTRATIVAS DE ALGUNAS FORMAS PARA PENSAR Y PARA ACTUAR EN EL DESARROLLO DEL PENSAMIENTO LATERAL

Nº	Situación	Indicadores de pensamiento lateral
1.	<p>El rectángulo (Townsend, 1988)</p> <p>Acomode estos cuatro rectángulos de tal manera que formen un cuadrado perfecto. Los números indican el tamaño de las piezas.</p>	<p>Esta actividad permite evidenciar cómo el pensamiento lógico resulta ineficaz; al vernos estancados en el problema se obliga a una reorganización de la información que ya se encuentra en la mente, para así pensar de una forma diferente a la convencional.</p> <p>Señalar que algo no funciona dando razones lógicas y relevantes.</p> <p>Surgimiento de ideas, propuestas concretas y sugerencias.</p> <p>Pensar específicamente en ideas nuevas y en nuevas formas de enfocar las cosas.</p>
2.	<p>Cuadratura de la svástica (Gardner, 1996)</p> <p>Corte la svástica en cuatro partes que puedan formar un cuadrado.</p>	<p>Mirar con una diferente perspectiva esta situación, ser creativo y no selectivo, no crear límites donde no los hay y no enfrascarse en una sola solución.</p> <p>Señalar y justificar lo que está mal, los riesgos y peligros.</p> <p>Demostrar optimismo, señalando que con respaldo del pensamiento lógico una idea, por absurda que parezca, sí puede funcionar.</p> <p>Implica provocación, exploración y riesgo.</p>
3.	<p>Simetría mayúscula (King, 1997)</p> <p>Reordene las siete piezas de la ilustración para dejar una letra E mayúscula que sea verticalmente simétrica y que tenga las tres barras horizontales de igual longitud.</p>	<p>Abordar un problema desde diferentes enfoques, dejar que vuele la imaginación y no conformarse con la primera solución encontrada.</p> <p>Cambian las prioridades. Aparecen reglas nuevas para la acción.</p> <p>Expresar cualquier sentimiento durante la sesión sin justificarlo o explicarlo.</p> <p>Actitud creativa en la búsqueda de otras alternativas.</p> <p>Iniciar una exploración detallada.</p>

4.	<p>La cruz y la luna creciente (Gardner, 1996)</p>  <p>Corte la luna en 6 o 10 partes, y forme una cruz griega.</p>	<p>Siempre vemos las cosas o las personas desde el mismo ángulo. Aquí se nos obliga invertir una o varias piezas resultantes de la disección para llegar a la solución.</p> <p>Lograr identificar los diferentes caminos que se pueden tener en cuenta en la búsqueda de soluciones. Se nos advierte por lo menos la existencia de dos.</p> <p>Procurar avanzar desde una idea para alcanzar otra.</p> <p>Se necesita reunir información y luego diseñar una estrategia.</p> <p>Se necesita una agudeza visual especial.</p>
----	----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

Tabla 2. Situaciones ilustrativas de algunas formas para pensar y para actuar en el desarrollo del pensamiento lateral

CONCLUSIONES

- El pensamiento lateral es un poder latente que todos tenemos; puede desarrollarse mediante el entrenamiento, exigiendo sólo un cambio de actitud mental y un enfoque abierto a la solución de problemas.
- Cultivar el pensamiento lateral simultáneamente con el pensamiento lógico en los docentes de matemáticas, tanto en formación como en ejercicio; fomenta personas flexibles, creativas, de mente abierta; en otras palabras, pensadores lógico-laterales dispuestos a generar nuevas e imaginativas soluciones a los diferentes problemas que propicia el aprendizaje de la matemática.
- El pensamiento lateral constituye una valiosa ayuda para enfatizar el enfoque de planteamiento y resolución de problemas.
- En cuanto nos vamos convirtiendo en mejores pensadores laterales hacemos más conciencia de las formas para pensar y para actuar, y su estrecha interrelación entre ellas.

- El mundo necesita pensadores laterales, personas que den un nuevo enfoque a los problemas que se presentan en todos los ámbitos de la vida.

REFERENCIAS

- de Bono, E. (1970). *El pensamiento lateral - Manual de creatividad*. Barcelona, España: Paidós Ediciones.
- de Bono, E. (1996). *Seis sombreros para pensar*. Barcelona, España: Paidós Ediciones.
- de Bono, E. (1999). *Seis pares de zapatos para la acción*. Barcelona, España: Paidós Ediciones.
- Gardner, M. (1996). *Nuevos acertijos de Sam Loyd - Colección de Mente*. Madrid, España: Zugarto Ediciones.
- King, L. (1997). *Ejercicios de inteligencia asociativa - Colección de Mente*. Madrid, España: Zugarto Ediciones.
- Torres, A. (2005, septiembre). Pensamiento lateral. *Boletín TRESS*. Tomado de:
<http://www.tress.com.mx/boletin/sept2005/lateral.htm>
- Townsend, C.B. (1988). *Acertijos extraordinarios*. México: Selector.

ALGORITMOS COMO HERRAMIENTA EN LA BÚSQUEDA DE NUEVOS DATOS PARA LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS SOBRE ISOMETRÍAS DEL PLANO

Brigitte Sánchez y Jaime Fonseca

Universidad Distrital Francisco José de Caldas

bjsanchezr@udistrital.edu.co, jaimejaimef@udistrital.edu.co

Reconociendo la importancia que tienen los algoritmos en el proceso de resolución de problemas, particularmente en la geometría, se identificaron algunas formas en las que se usan algoritmos que son conocidos para los resolutores, durante la resolución de algún problema. A tales formas se les ha dado el nombre de *uso de algoritmos* y, específicamente, se describen y se muestran evidencias de los usos relacionados con la obtención de nueva información que permita ampliar los caminos considerados para la solución del problema.

INTRODUCCIÓN

En Fonseca y Sánchez (2007) se estudiaron los procedimientos que emplean un profesor de matemáticas, un estudiante que se está preparando para ser profesor de matemáticas y un estudiante de educación media para resolver problemas, analizando, específicamente, el uso de algoritmos conocidos.

Como resultado se encontraron diversos usos, que se clasificaron en las siguientes dos categorías: solución del problema usando algoritmos para hallar datos y solución del problema usando algoritmos para determinar relaciones entre los elementos del problema. En este documento se desarrollarán los aspectos más relevantes de la primera categoría, tales como caracterización inicial y evidencias obtenidas a partir de la aplicación de dos cuestionarios que se validaron mediante pilotaje y revisión de expertos.

ALGORITMOS Y RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Polya (1965/2002) propone cuatro fases para la resolución de un problema: comprender el problema, concebir un plan, ejecutar el plan y examinar la solución obtenida; si durante las dos últimas fases es posible perfeccionar, sistematizar y eximir de ambigüedades un conjunto finito de pasos que den solución al problema, se dice que éste admite al menos un *algoritmo de solución*.

Sánchez, B. y Fonseca, J. (2011). Algoritmos como herramienta en la búsqueda de nuevos datos para la resolución de problemas sobre isometrías del plano. En P. Perry (Ed.), *Memorias del 20º Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones* (pp. 421-430). Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

De ser así, existe correspondencia entre las partes del problema (datos, condiciones e incógnita) y los componentes del algoritmo (datos iniciales, pasos y datos finales) respectivamente.

Por ejemplo, en el problema de reflejar un punto C del plano, a través de otro punto X del mismo plano (esto es $[X](C)$, la reflexión de C por X), se puede observar los siguiente:

Problema	Algoritmo
Datos: Puntos C y X , $[X]$	Datos iniciales: Puntos C y X , $[X]$
Condición: El punto resultante debe ser la reflexión de C a través de $[X]$; debe ser el punto C' tal que C , X y C' son colineales y $\overline{CX} \cong \overline{XC'}$.	Pasos de un algoritmo de solución: Trazar \overrightarrow{XC} . Trazar una circunferencia de centro X y radio \overline{XC} . La circunferencia construida tiene dos puntos de intersección con \overrightarrow{XC} : C y C' (que corresponde a la reflexión de C a través de X).
Incógnita: $[X](C) = C'$	Datos finales: $[X](C) = C'$

Tabla 1. Relación entre problema y algoritmo

El algoritmo de solución de un determinado problema (denominado problema auxiliar) se puede usar durante la resolución de otro, ya sea para encontrar más información de los datos o para encontrar nuevas relaciones entre ellos. Los dos propósitos que se acaban de mencionar determinan las dos categorías que se consideraron durante la investigación y que permitieron clasificar y caracterizar usos de algoritmos propuestos a partir de los planteamientos de Polya sobre resolución de problemas. Sin embargo, este documento se centrará en los usos asociados a la primera categoría se enuncian y describen a continuación.

SOLUCIÓN DEL PROBLEMA USANDO ALGORITMOS PARA HALLAR DATOS

En esta categoría se encuentran aquellos usos que se presentan cuando se emplean los algoritmos de solución de problemas conocidos para encontrar la

incógnita o elementos adicionales que no pertenecen al problema inicial, pero que aportan información importante para su solución. Estos últimos son denominados *elementos auxiliares*.

Una revisión del trabajo de Polya condujo a proponer los siguientes usos de algoritmos, que se verificaron en la experimentación y cuya caracterización se amplió:

- Solución inmediata del problema por medio de un algoritmo.
- Composición iterada de un mismo algoritmo.
- Composición de dos o más algoritmos diferentes.
- Uso de un algoritmo análogo.
- Uso de un algoritmo para determinar elementos auxiliares.

Solución inmediata del problema por medio de un algoritmo

Dentro de los procedimientos que propone Polya para resolver un problema se encuentra la *generalización*, que consiste en pasar del examen de un problema o un conjunto de problemas al examen de un conjunto más amplio de problemas que lo(s) contiene(n). El problema que consiste en solucionar todos los problemas del conjunto más amplio recibe el nombre de *problema general*, mientras que cada uno de los problemas de este conjunto recibe el nombre de *problema particular*.

Cuando el problema general admite un algoritmo de solución, éste puede usarse para resolver el problema particular, como lo muestra el siguiente esquema:

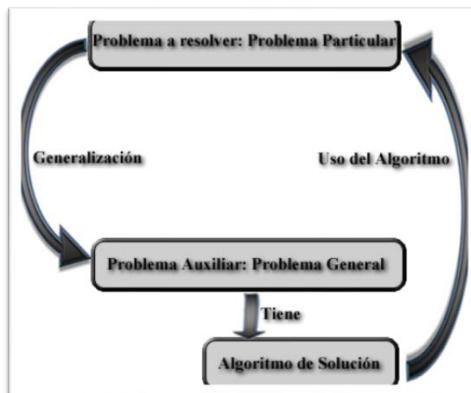


Figura 1. Esquema del uso de algoritmo para resolver un problema particular

En el caso en que se conozca un algoritmo de solución del problema general y se aplique sin mayores variaciones a los datos del problema particular dado, se dice que se ha realizado una *solución inmediata del problema por medio de un algoritmo*.

Composición iterada de un mismo algoritmo y composición de dos o más algoritmos diferentes

Otro de los procedimientos propuestos por Polya (1965/2002) es la *descomposición y recomposición*, donde se fija una idea directriz para la solución del problema y éste se divide de tal manera que el tratamiento se centre en los detalles del problema y cada uno de ellos se convierta en un problema auxiliar. Luego de solucionar cada uno de estos problemas auxiliares, la directriz antes fijada permitirá componer todas las soluciones y encontrar la solución del problema original. De hecho, es natural intentar descomponer el problema en otros conocidos, de modo que si éstos tienen un algoritmo de solución, su concatenación permita, la solución del problema original o la construcción de un algoritmo que se use para su solución.

En el caso en el que se tome una parte o la totalidad de los algoritmos de solución de los problemas auxiliares para encontrar la solución del problema original, se pueden presentar la *composición iterada de un mismo algoritmo* y la *composición de dos o más algoritmos diferentes*. El primer uso puede presentarse cuando: se utiliza repetidas veces un mismo algoritmo, los algoritmos de solución de los problemas auxiliares en los que se descompuso el problema original comparten la secuencia de pasos, o cuando los problemas auxiliares hacen parte de un problema general cuya solución se puede obtener mediante la aplicación de un algoritmo. El segundo uso puede presentarse si se aplican dos o más algoritmos que dan solución a los problemas auxiliares en los que se descompuso el problema original, donde cada uno de los algoritmos difieren en al menos uno de sus pasos.

Uso de un algoritmo análogo

En la analogía, como otro de los procedimientos que propone Polya, es posible utilizar el método o el resultado obtenido de la solución de problemas análogos para solucionar el problema original (si se desea profundizar sobre analogía, se sugiere consultar a Polya, 1965/2002). Específicamente, si se utiliza el algoritmo de solución de un problema análogo, ya sea repitiendo algunos pa-

sos, variando únicamente los datos iniciales, o tomando los datos finales como elementos auxiliares del problema original, se dirá que se usó un algoritmo análogo para hallar datos.

USO DE UN ALGORITMO PARA DETERMINAR ELEMENTOS AUXILIARES

En la resolución de un problema es necesario introducir elementos auxiliares con frecuencia, ya sea para ampliar la cantidad de datos, determinar nuevas relaciones, o simplemente comprender el problema; más aún, en geometría donde algunos de los elementos que se introducen se obtienen por construcción y la representación gráfica es frecuentemente empleada para comprender el problema. Por lo tanto, el uso de algoritmos para determinar elementos auxiliares se presenta cuando el elemento introducido es de vital importancia en la resolución del problema original.

ALGUNAS EVIDENCIAS DE LOS USOS DE ALGORITMOS PARA HALLAR DATOS

Los casos de usos de algoritmos que se presentarán se obtuvieron de la aplicación del siguiente problema:

Dado el triángulo ABC y su imagen $A'B'C'$ por la translación PQ , encuentre el triángulo $A'B'C'$ a partir de ABC aplicando isometrías distintas a la translación PQ .

The diagram shows two triangles, ABC and $A'B'C'$. Triangle ABC is on the left, with vertices A , B , and C labeled. Triangle $A'B'C'$ is on the right, with vertices A' , B' , and C' labeled. Above the triangles, a horizontal blue arrow points from point P to point Q , representing the direction of the translation.

Figura 2. Problema aplicado

En la solución elaborada por el estudiante que se está formando como profesor se observó que asoció el problema con la construcción de dos reflexiones axiales que aplicadas a un polígono, determinan una imagen equivalente a la de aplicar una traslación. Este problema había sido abordado anteriormente por el estudiante y su algoritmo de solución se aplicó de manera directa, sin mayores variaciones a la solución de este problema, obteniendo *la solución inmediata*

del problema por medio de un algoritmo. Esta inferencia se hace, teniendo en cuenta la siguiente afirmación hecha por el estudiante durante la resolución del problema:

En este caso diría: pues **como la más directa** (se refiere a una solución de un problema similar) que yo vería en este caso, sería [...] dos simetrías axiales, más o menos perpendiculares a ésta (\overleftrightarrow{PQ}), la primera perpendicular a ésta [señala \overleftrightarrow{PQ}] por este punto (P o B) y bueno, procedo. (Transcripción de lo dicho por el estudiante al resolver el problema.)

La solución obtenida fue:

1. Construye la recta l_1 perpendicular a \overleftrightarrow{PQ} por C.
2. Refleja ΔABC por l_1 .
3. Construye la mediatrix de $\overline{CC'}$ y la nombra l_2 .
4. La composición $[l_2][l_1](\Delta ABC)$ es $\Delta A'B'C'$.

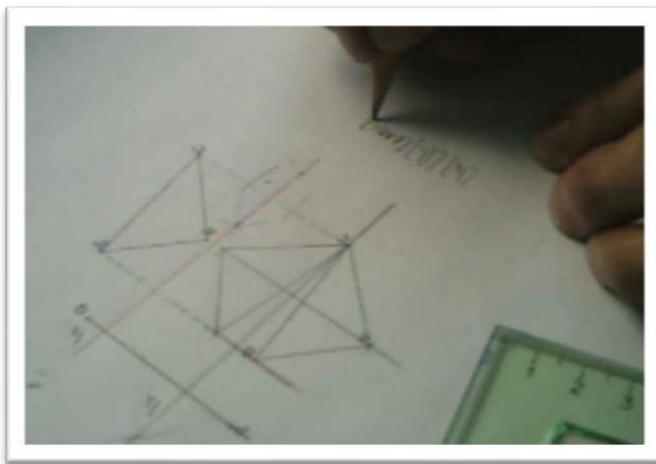


Figura 3. Evidencia de la solución inmediata del problema por medio de un algoritmo

Buscando un forma diferente de resolver el problema, el estudiante plantea la intención de usar únicamente rotaciones con centros convenientes, de tal modo que haga coincidir la imagen del ΔABC por $[l_1]$ con $\Delta A'B'C'$. De esta forma, como lo describe durante el proceso de resolución, el estudiante da evidencias de su intención de usar el algoritmo de manera repetida, para realizar la rotación de un triángulo a través de un punto, con el fin de obtener otras dos transformaciones cuya imagen sea equivalente a la de una traslación, usando

de esta manera, *la composición iterada de un mismo algoritmo*. La transcripción de lo expresado por el estudiante se encuentra a continuación:

[...] la reflexión la puedo ver como una rotación. Y después lo vuelvo a rotar y vuelve a quedar en el mismo sitio pero más lejos, entonces estoy viendo en ésta (señala la gráfica de la primera solución), debe haber algún punto especial (indica $[l_1](\Delta ABC)$) sobre el cual rotar, para convertir éste, y aquí ya pasarlo al otro lado.

Este intento resulta fallido debido a que según el estudiante, no encontró el centro de la rotación que le permitiera, solucionar el problema y en cambio, le estaba generando confusión.

Otro intento fallido consistió en aplicar una rotación y luego una traslación. Sin embargo, esta composición no le sirvió porque la aplicación de la rotación le mostraba un cambio en la dirección con respecto al $\Delta A'B'C'$.

Llegué a esa idea porque estaba pensando en rotación y después traslación, pero no me servía con rotación y después trasladar porque quedaba al revés, no quedaba; quedaba en otra posición, entonces pensé en otro movimiento y se me vino fue rotación, ehh... traslación. (Transcripción de lo dicho por el estudiante al resolver el problema.)

La idea a la que el estudiante se refiere, es la composición de traslaciones para resolver el problema. El intento anterior, evidencia el *uso de composición de dos o más algoritmos diferentes* y le permitió establecer una segunda forma de solucionar el problema: utilizar dos traslaciones de tal manera que su composición, sea $[\overrightarrow{PQ}]$, por tanto, *usa composición iterada de un mismo algoritmo*.

La traslación la veo como, [...] podría hacer esta otra traslación (traslación que parte de P , diferente a $[\overrightarrow{PQ}]$ y se visualiza en la Figura 4), [...] y después de aquí hasta acá a este punto (hace referencia a la traslación determinada por Q , diferente a $[\overrightarrow{PQ}]$ y cuya representación la expresa con la escuadra como se visualiza en la Figura 4), y sería lo mismo trasladar el triángulo (ΔABC) acá (señala la ubicación de la imagen) y pasarlo acá (señala la ubicación de $\Delta A'B'C'$). Pues es algo. No sé. Me parece tonto. Esa sería como una solución, pero no estaría a la altura, y pues quiero hacer algo distinto a una traslación. (Transcripción de lo dicho por el estudiante al resolver el problema).

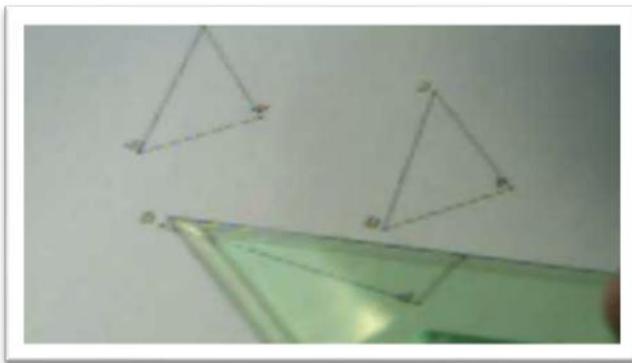


Figura 4. Evidencia de la composición de dos o más algoritmos diferentes

En esta intervención, el estudiante hace explícito su plan: descomponer el problema para realizar sólo traslaciones, dado que conoce algoritmos para realizarlas. El procedimiento de solución consiste en componer de manera iterada este mismo algoritmo y así, encontrar otro que le permita solucionar el problema.

Una evidencia del uso de algoritmo para hallar elementos auxiliares fue obtenida en el proceso de resolución de este mismo problema, realizado por el profesor de matemáticas. En la búsqueda de una tercera solución, expresó su interés en usar composición de diversas isometrías.

[...] Pensaba de pronto en otro, en otra, [...] en otro movimiento que me permitiera obtener esa figura, pero tendría que hacer una composición de movimientos para obtener [...] (quiere obtener $\Delta A'B'C'$)

[...] Estoy pensando en si hago una reflexión central aquí (indica punto C) y podría obtener una, hacer una después, o sea, primero hacer una reflexión central teniendo como centro C ¿sí? obtenemos una figura y si me daría podría obtener esta figura (posible imagen de ΔABC por $[C]$), también a partir de ahí o sea, después hacer una reflexión axial. (Transcripción de lo dicho por el estudiante al resolver el problema.)

Durante esa búsqueda, la imagen de ΔABC por $[C]$, le permitió observar que la segunda isometría que debía usar no era una reflexión axial, sino una reflexión central; también, usó esta imagen y el triángulo $A'B'C'$ para obtener el centro de la reflexión. Por tanto, la imagen de ΔABC por $[C]$ fue un elemento auxiliar fundamental en la resolución del problema, obtenido por la aplicación del algoritmo de la reflexión central. Por ello, se *usó un algoritmo para determinar elementos auxiliares*.

Una evidencia del uso de un algoritmo análogo para hallar datos, se obtuvo de la aplicación del siguiente problema:

Dado tres puntos A , B y C , considere un punto X distinto de ellos. Si el punto X tiene que ser reflejado por lo menos una vez por cada uno de los punto A , B y C . ¿Qué isometrías se deben realizar para volver al mismo punto de partida? Las isometrías deben definirse a partir de los puntos A , B o C , o de objetos construidos con base en tales puntos.

Una solución propuesta por el estudiante que se está formando para profesor fue:

1. Refleja X''' por C , obteniendo X''
2. Refleja X'' por B , obteniendo X'
3. Refleja X' por A , obteniendo X .

En la búsqueda de otra solución, el estudiante construye mediatrices y medianas de ΔABC intentando encontrar alguna relación entre éstas y datos del problema. Sin embargo, no tiene éxito alguno, por lo que cambia la estrategia y quiere variar el orden de aplicación de las reflexiones centrales consideradas en la anterior solución. Por tanto, usa el algoritmo de la solución anterior en la búsqueda de otra solución. Esto es, *uso de un algoritmo análogo* para hallar datos, específicamente para encontrar X . Este plan de solución del problema, se puede evidenciar en la siguiente intervención:

No, no me salió nada, por ninguna, por ningún punto especial.

Estoy pensando en este momento en otra solución, ya dejé a un lado lo que estaba pensando. Ahora estoy pensando en si influye el orden de las reflexiones que haga respecto a cada punto; si yo digo que hago respecto a A (reflejar X'''), primero me quedaría el punto por acá (indica una aproximación de $[A](X''')$)
(Transcripción de lo dicho por el estudiante al resolver el problema.)

Como se puede observar, el estudiante que se está formando para profesor plantea explícitamente el cuestionamiento que se hace respecto a la imagen que podría obtener al cambiar el orden de las reflexiones consideradas en la anterior solución.

CONCLUSIONES

En el estudio realizado se encontró que el profesor de matemáticas, el profesor en formación y el estudiante:

- reconocieron la existencia de algoritmos en geometría donde, las construcciones son un caso particular de los mismos.
- calificaron como importante el papel de los algoritmos al resolver problemas de matemáticas en general.
- concibieron los algoritmos en geometría en el mismo sentido considerado en esta investigación y como la secuencia de acciones asociadas a la resolución de los problemas.
- usaron algoritmos de solución a problemas conocidos, en la resolución de problemas relacionados con este objeto matemático.
- resolvieron problemas usando de diversas maneras, algoritmos para encontrar datos o relaciones entre los elementos del problema.

Por otra parte, el estudiante para profesor privilegió el uso de algoritmo análogo para encontrar datos, la solución inmediata del problema por medio de un algoritmo y la composición iterada de un mismo algoritmo y de algoritmos diferentes, al momento de resolver problemas sobre isometrías del plano.

Finalmente, en términos generales, puede establecerse que al estudiar los procesos enmarcados en la resolución de problemas, un factor que se ha de considerar son los algoritmos involucrados, así como el uso que se le dé a los mismos.

REFERENCIAS

Fonseca, J. y Sánchez, B. (2007). *Uso de algoritmos en la resolución de problemas sobre isometrías del plano. Un estudio de caso*. Tesis de maestría no publicada, Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, Colombia.

Polya, G. (1965/2002). *Cómo plantear y resolver problemas*. México: Trillas.

Cursillos

LA VISUALIZACIÓN EN MATEMÁTICAS CON AYUDA DE LA GEOMETRÍA DINÁMICA Y SUS APORTES A LA MODELACIÓN

Francisco Córdoba y Pablo Ardila

Instituto Tecnológico Metropolitano

fjcordob@yahoo.es, franciscocordoba@itm.edu.co, pabloardila@itm.edu.co

Cualquier propuesta que se precie de ser efectiva para la enseñanza de la geometría y en general de las matemáticas debe considerar que el vínculo entre la visualización, la experimentación, el razonamiento lógico, la argumentación y la aplicación es indisoluble. Tal vínculo puede lograrse en alguna medida con la ayuda de la geometría dinámica. La enseñanza actual de la geometría y de algunos temas del cálculo diferencial está centrada en el profesor y en la habilidad que él tenga para hacer representaciones gráficas. Si bien estas representaciones son didácticas y contribuyen al aprendizaje, su carácter estático no permite la flexibilidad suficiente para que las condiciones cambien y los estudiantes puedan observar lo que ocurre y las relaciones que se establecen al variar ciertos parámetros.

¿Cómo lograr un aprendizaje significativo de las matemática, en general, y de la geometría y el cálculo diferencial, en particular, con el uso de herramientas informáticas y desarrollar al mismo tiempo habilidades de razonamiento analítico, argumentativo y propositivo que estructuren mejores procesos mentales en los estudiantes? Esta es tal vez una pregunta frecuente, de respuesta compleja, que se hacen los profesores de matemáticas.

La enseñanza actual de la geometría y de algunos temas del cálculo diferencial está centrada en el profesor y en la habilidad que él tenga para hacer representaciones gráficas en el tablero. Si bien estas representaciones son didácticas y contribuyen al aprendizaje, su carácter estático no permite la flexibilidad suficiente para que las condiciones cambien y los estudiantes puedan observar lo que ocurre y las relaciones que se establecen al variar ciertos parámetros.

PROPÓSITOS DEL CURSILLO

- Mostrar la importancia de la visualización en matemáticas como ayuda al desarrollo del pensamiento matemático mediante el uso de ayudas computacionales y mostrar cómo la visualización puede conver-

Córdoba, F. y Ardila, P. (2011). La visualización en matemáticas con ayuda de la geometría dinámica y sus aportes a la modelación. En P. Perry (Ed.), *Memorias del 20º Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones* (pp. 433-436). Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

tirse en un elemento central en la enseñanza de las matemáticas que despierta el interés de los estudiantes y permite crear nuevos ambientes de trabajo.

- Resolver algunos problemas de la geometría y el cálculo con la ayuda de la geometría dinámica y discutir sus potencialidades como ayuda a la modelación.

FUNDAMENTACIÓN DE LA PROPUESTA

Cualquier propuesta que se precie de ser efectiva para la enseñanza de la geometría y, en general, de las matemáticas debe considerar que el vínculo entre la visualización, la experimentación, el razonamiento lógico, la argumentación (comunicación matemática) y la aplicación es indisoluble (Abrate, Delgado y Pochulu, 2006).

Para de Faria (2005), por ejemplo, y con el uso de Cabri:

La aplicación Cabri Geometry nos permite por un lado realizar “experimentos” geométricos, de manera que los estudiantes lleguen a establecer las relaciones adecuadas y obtener sus propias conclusiones, y por otro lado facilita la conexión interna entre distintas representaciones matemáticas. (p. 1)

Es en este punto en el que la visualización toma sentido y se convierte en facilitadora de este proceso. En matemáticas, visualizar no significa simplemente ver el objeto matemático, ya sea una figura, gráfica, representación algebraica o cualquiera otra, sino que se refiere a un proceso más complejo en donde las imágenes estimulan el pensamiento abstracto del que las percibe o genera (Kerlegand, 2008).

Por su parte Castañeda (2004, p. 114), frente a la pregunta sobre la visualización, se remite a las palabras de Guzmán (1996)

Nuestra percepción es muy primordialmente visual y así no es de extrañar en absoluto que el apoyo continuo en lo visual esté tan presente en las tareas de matematización, [...]. Y aun en aquellas actividades matemáticas en las que la abstracción parece llevarnos mucho más lejos de lo perceptible por la vista, los matemáticos muy a menudo se valen de procesos simbólicos, diagramas visuales [...] que les acompañan en su trabajo [...]. La visualización aparece así como algo profundamente natural [...] en la transmisión y comunicación propias del quehacer matemático. (p. 114)

Para otros autores como Zimmermann y Cunningham (1991) (citados por Kerlegand, 2008) por ejemplo, la visualización es un proceso mediante el cual se forman imágenes (mentalmente, con lápiz y papel, o con ayuda de la tecnología) y se utilizan para una mejor comprensión de los objetos matemáticos y para estimular el proceso de descubrimiento y construcción de las nociones. La experimentación y la visualización permiten reorganizar el pensamiento matemático, elaborar más fácilmente conjeturas que promuevan la investigación y construcción de conocimiento. Balacheff (2000) (citado por Scaglia y Götte, 2008) reflexiona en torno al uso de entornos informáticos en la enseñanza de las matemáticas, señalando que “modifican el tipo de matemáticas que se puede enseñar, el conjunto de problemas y las estrategias didácticas. El conocimiento profesional del profesor también debe modificarse” (p. 36).

Para Scaglia y Götte (2008), un cambio de herramientas durante la enseñanza conduce a un cambio en los problemas interesantes que se pueden plantear. En este sentido plantea dos tipos de transformaciones que se presentan:

- Por un lado, la tecnología informática ofrece la posibilidad de tratar problemas y experimentar situaciones que sin ella no serían accesibles para la enseñanza y el aprendizaje.
- Por otro lado, dicha tecnología abre la posibilidad de adoptar un enfoque experimental de las matemáticas que cambia la naturaleza de su aprendizaje” (p. 36)

Para Suárez y Cordero (2005), el potencial de la graficación puede ir más allá si se le considera en sí misma una modelación. Las características que debería cumplir son: (1) las gráficas se obtienen a partir de una simulación que lleva a cabo múltiples realizaciones y hace ajustes en el movimiento para producir un resultado deseable en la gráfica, (2) tiene un carácter dinámico que permite crear modelos gráficos que se convierten en argumentos para nuevas descripciones de movimientos, (3) propicia la búsqueda de explicaciones y enfatiza los comportamientos invariantes en las situaciones. La práctica de la graficación soporta el desarrollo del razonamiento y de la argumentación y así mismo se puede estudiar como categoría que sirva de vehículo para implementar el trinomio modelación-graficación-tecnología en la construcción de conocimiento matemático en el salón de clases.

En este cursillo se pretende mostrar cómo el proceso de visualización se puede favorecer mediante el uso de un software de geometría dinámica (GeoGebra¹) y de qué manera se pueden implementar algunas acciones en el aula que favorezcan el aprendizaje de conceptos matemáticos y ayuden en la modelación.

REFERENCIAS

- Abrate, R., Delgado, G. y Pochulu, M. (2006). Caracterización de las actividades de geometría que proponen los textos de matemática. *Revista Iberoamericana de Educación*. Tomado de: <http://www.rieoei.org/deloslectores/1290Abrate.pdf>
- Castañeda, F. (2004). *Visualización y matemáticas*. Universidad del País Vasco. Tomado de: <http://divulgamat.ehu.es/weborriak/TestuakOnLine/03-04/PG03-04-fcataneda.pdf>
- de Faria, E. (2005). *Geometría con Cabri: un viaje con Voyage 200*. Ponencia presentada en X Congreso Nacional de Matemática Educativa. Universidad de San Carlos de Guatemala, 21 al 25 de noviembre del 2005.
- Kerlegand, C. (2008). *Desarrollo de dos propiedades de la circunferencia usando el modelo de van Hiele y la visualización*. Tesis de maestría no publicada, CICATA, Instituto Politécnico Nacional, México.
- Scaglia, S. y Götte, M. (2008). Una propuesta de capacitación docente basada en el uso de un software de geometría dinámica. *Revista Electrónica de Investigación en Educación en Ciencias*, 3(1).
- Suárez, L. y Cordero, F. (2005). Modelación en matemática educativa. En J. Lezama, M. Sánchez y J.G. Molina (Eds.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (vol. 18, pp. 639-644). México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa. Tomado de: www.clame.org.mx/documentos/alme%2018.pdf.

¹ Este software, de acceso gratuito, se puede descargar de: <http://www.geogebra.org>.

LOS NIVELES DE VAN HIELE, EJEMPLO EN UN MODELO DE GEOMETRÍA EUCLÍDEA DONDE LAS RECTAS SON REDONDAS

Jhonathan Cuevas, Jonathan Gamba, Sandra Macana y John Puentes

Universidad Distrital Francisco José de Caldas

Jhonathan_2589@hotmail.com, Jogago_5@hotmail.com, Lavacana902@hotmail.com,
John27_puma@hotmail.com

Se presentan algunos resultados del trabajo realizado por estudiantes del curso *Didáctica de la Geometría*, en el que se estudió la relación de las representaciones de algunos axiomas en un modelo diferente al euclídeo, donde cualquier recta debe pasar por un punto afín, con los niveles de razonamiento presentados por van Hiele y las habilidades propuestas por Hoffer para estos niveles.

REFERENTES TEÓRICOS

En 1957, los profesores holandeses de matemáticas Pierre, M. van Hiele y Dina van Hiele-Geldof presentaron en sus tesis doctorales, respectivamente, un modelo de enseñanza aprendizaje de la geometría (van Hiele, 1957 citado por Jaime, 1993) y un ejemplo concreto de la aplicación de ese modelo en unos cursos de geometría (Van Hiele-Geldof, 1957 citado por Jaime, 1993)

El modelo de van Hiele está dividido en dos partes: los niveles de razonamiento geométrico (aspecto descriptivo) y las fases de aprendizaje (aspecto instructivo). La descripción hecha por Wirsup (1957, citado en Jaime, 1993) de los niveles de razonamiento propuestos por van Hiele muestra que son cinco – aunque en un principio eran tres – y presenta un modo de estructurar el aprendizaje de la geometría de manera jerárquica –secuencial y ordenada. Estos niveles son:

Primer nivel: Visualización o reconocimiento

Los objetos sobre los cuales se razona en el nivel 0 son formas y se idean según su apariencia. Los estudiantes reconocen las figuras y las nombran basándose en las características visuales que tienen. Los estudiantes que razonan según este nivel no piensan explícitamente sobre las propiedades de las figuras. Lo que define una forma es su apariencia, lo cual hace que sea un factor dominante en este nivel.

Cuevas, J., Gamba, J., Macana, S. y Puentes, J. (2011). Los niveles de van Hiele, ejemplo en un modelo de geometría euclídea donde las rectas son redondas. En P. Perry (Ed.), *Memorias del 20º Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones* (pp. 437-440). Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

Segundo nivel: Análisis

En este nivel se analiza el conocimiento de las componentes de las figuras, de sus propiedades básicas. Estas propiedades van siendo comprendidas a través de la observación realizada durante trabajos prácticos como medición, dibujo, construcción de modelos, etc.

Tercer nivel: ordenamiento y clasificación

Las relaciones y definiciones empiezan a ser claras, pero sólo con ayuda y guía. Los estudiantes pueden clasificar figuras jerárquicamente mediante la ordenación de sus propiedades y son capaces de dar argumentos informales para justificar sus clasificaciones; comienzan a establecerse las redes lógicas a través de la experimentación y el razonamiento.

Cuarto nivel: Razonamiento deductivo

En este nivel los estudiantes son capaces de observar y analizar algo más que las propiedades de las formas, además, se comprenden los axiomas, las definiciones, los teoremas, pero no se hacen razonamientos abstractos, ni se entiende completamente el significado de las demostraciones, pero aceptan la posibilidad de llegar a un mismo resultado por medio de diferentes formas de demostración, ya sea por el método directo, indirecto, inducción o por medio de un contraejemplo

Quinto nivel: Rigor

En este nivel el razonamiento se hace rigurosamente deductivo. Los estudiantes razonan formalmente sobre sistemas matemáticos, pueden estudiar geometría sin modelos de referencia y razonar formalmente manipulando enunciados geométricos tales como axiomas, definiciones y teoremas.

Axiomas de Hilbert y los niveles de van Hiele en rectas redondas

A continuación se presenta como ejemplo el análisis de un axioma de Hilbert interpretado en el modelo de las rectas redondas. Se señalan los niveles de van Hiele y las habilidades propuestas por Hoffer: habilidades visuales, habilidades verbales, habilidades para dibujar, habilidades lógicas y habilidades de aplicación.

Axioma: Un triángulo queda definido por tres segmentos de la forma AB , BC y CA . Dichos segmentos son los lados del triángulo, y los tres puntos A , B y C son sus vértices. El triángulo divide el plano definido por sus tres vértices en interior y exterior, con las mismas propiedades que en el caso de los ángulos. Al ángulo definido por los dos semirrayos que salen de A y pasan por B y C respectivamente se le denota por $\angle BAC$, y su interior contiene todos los puntos del interior del triángulo ABC .

En el nuevo modelo, la representación del punto es el mismo que en la geometría euclíadiana. Ahora, la recta se define como las circunferencias que pasan por un punto afín X ; en este contexto un segmento sería un arco definido por dos puntos A y B sobre la recta. En la figura se muestran las representaciones realizadas por los autores del presente trabajo; una de ellas es la representación de un segmento en el modelo euclídeo y para elaborarla fue necesario pasar por el nivel 1 de van Hiele, así como también se pusieron en juego las habilidades visuales para dibujar y las lógicas.



Figura 1. Representación de un segmento AB en una recta euclídea y en una recta redonda

A partir de la representación de la Figura 1 se construyó la representación del axioma 3, nivel 3 de van Hiele (Figura 2).

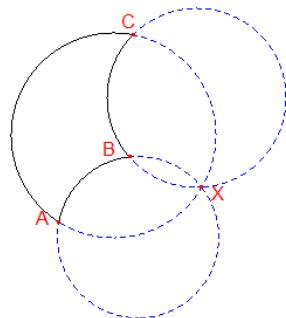


Figura 2. Representación de un triángulo ABC en el modelo de rectas redondas

CONCLUSIONES

A partir de este trabajo se concluye que al realizar las representaciones en un modelo euclídeo donde cualquier recta debe pasar por un punto afín, se adaptan características de los niveles de van Hiele, realizando una transición que empieza en el primer nivel y llega hasta el cuarto. Además se desarrollan más las habilidades de visualizar, dibujo y lógica presentadas por Hoffer para los niveles de van Hiele.

REFERENCIAS

- Jaime, A. (1993). *Aportaciones a la interpretación y aplicación del modelo de van Hiele: La enseñanza de las isometrías del plano. La evaluación del nivel de razonamiento*. Tesis doctoral no publicada, Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Valencia, Valencia, España.

CABRI 3D: INTRODUCCIÓN AL ESTUDIO DE POLIEDROS DUALES, ARQUIMEDIANOS Y REGULARES

**Óscar Molina, Armando Echeverry, Carmen Samper,
Leonor Camargo y Patricia Perry**
Grupo $\mathcal{AE} \bullet \mathcal{G}$, Universidad Pedagógica Nacional
oscarjmolina@gmail.com, armandoech@gmail.com

Cabri 3D es un software de geometría dinámica que permite estudiar la geometría del espacio. Posibilita construir, visualizar y explorar en tres dimensiones diferentes objetos mediante la manipulación directa de otros como puntos, rectas y planos. Este cursillo propone actividades en el entorno de Cabri 3D, susceptibles de ser llevadas a la escuela, relativas al estudio de los poliedros regulares, duales y arquimedianos. Por medio de las herramientas que tiene el software se pretende mostrar diferentes formas de construcción de dichos poliedros y establecer relaciones entre ellos para potenciar así procesos de exploración y conjeturación en la geometría espacial.

UNA BREVE CONTEXTUALIZACIÓN

Desde hace aproximadamente 25 años nacen los proyectos de software de geometría dinámica con el objetivo de facilitar el aprendizaje y la enseñanza de la geometría en dos dimensiones. Ello abrió nuevas perspectivas con respecto a las construcciones clásicas que utilizan papel, lápiz, regla y compás. Sin embargo, el estudio de la geometría espacial (3D) no había sido considerado de igual manera que la geometría en dos dimensiones (2D) por los desarrolladores de estos softwares. Hasta el momento, los softwares en 2D permiten el tratamiento de la geometría plana con gran sencillez y dinamismo, ayudando a profesores y alumnos en la enseñanza y aprendizaje de una disciplina que parecía condenada al olvido: la geometría.

Ahora con Cabri 3D existe una misma filosofía que la existente en las otras versiones del entorno: se construyen objetos rápidamente, se visualizan, se manipulan y se exploran con un ingrediente más, la tercera dimensión. Así, se pueden crear construcciones dinámicas, de la más elemental a la más compleja.

Producto de la no existencia de softwares masivos que permitieran el estudio de la geometría espacial, existía la dificultad de visualizar los objetos en 3D, razón por la cual esta rama de las matemáticas fue, y quizás sigue siendo, un dominio parcialmente explorado. Cabri 3D con su aporte de la tercera dimensión, potencia entonces actividades matemáticas como la visualización, la exploración y la conjeturación en la geometría espacial. Proporciona a docentes, alumnos e investigadores una herramienta precisa para investigar y descubrir propiedades nuevas para ellos.

En ese sentido, desde meses atrás, ha sido interés del grupo $\mathcal{A} \bullet \mathcal{G}$ comenzar a incorporar este software en el curso *Geometría del espacio* del programa de Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional. Ello con el propósito de llevar a cabo un proceso de innovación curricular similar al que ya se realizó en el curso *Geometría plana* en torno a la *actividad demostrativa*¹ (Perry, Camargo, Samper y Rojas, 2006; Perry, Samper, Camargo, Echeverry y Molina, 2007).

El uso de Cabri 3D en el aula de clase ha permitido que los estudiantes desarrollen habilidades de visualización y exploración en tres dimensiones, hecho que a su vez les ha permitido potenciar la actividad de conjeturar enunciados de la geometría del espacio, algo que antes no se lograba. En definitiva, Cabri 3D se ha convertido en un artefacto que facilita el involucramiento de los estudiantes en la actividad demostrativa: antes la realización de elegantes construcciones no estaba al alcance de los alumnos; ellos se limitaban a contemplar construcciones realizadas por otros o presentes en algunos textos, debían creer sus propiedades quizás sin observarlas y comprobarlas aún sin estar seguros de ellas. El entorno Cabri 3D cambia esta perspectiva proveyendo a los estudiantes una herramienta mediante la cual pueden hacer actividad matemática en los términos antes mencionados.

¹ El constructo *actividad demostrativa*, elaborado por el grupo de investigación $\mathcal{A} \bullet \mathcal{G}$ de la Universidad Pedagógica Nacional, abarca dos procesos: *conjeturación* y *justificación*, los cuales no se constituyen como procesos independientes; además las acciones que los componen no se consideran secuenciales. El proceso de conjeturación se compone de acciones de tipo heurístico, tales como: visualizar, explorar, generalizar y verificar. En el proceso de justificación las acciones son: explicar, probar y justificar.

DEFINICIONES

Antes de precisar algunas de las actividades que se pretenden desarrollar en el cursillo, vale la pena precisar las definiciones de los objetos que en ellas se encuentran involucrados, para lo cual recurrimos a Alfonso (1997) y a Sutton (2005).

Poliedro regular convexo: Es un poliedro cuyos vértices tienen el mismo orden (i.e., en cada vértice confluye el mismo número de aristas del poliedro) y cuyas caras son polígonos regulares. Las caras del poliedro regular convexo deben ser congruentes.

Poliedro dual de un poliedro dado: Poliedro cuyos vértices son los centros de las caras del poliedro dado.

Poliedro arquimediano: Poliedro convexo cuyas caras son polígonos regulares de dos o más tipos, y para el que todos sus vértices tienen el mismo orden.

ALGUNAS ACTIVIDADES

Actividad 1. Construcción del cubo y del tetraedro regular

Objetivo: Familiarizarse con algunas herramientas del entorno Cabri 3D, específicamente con las referidas a las transformaciones rígidas en el espacio.

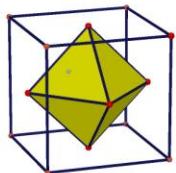
1. Proponga dos métodos para construir un cubo partiendo de un cuadrado.
2. Proponga dos métodos para construir un tetraedro regular partiendo de un triángulo equilátero.

Actividad 2. Acerca de los poliedros duales

Objetivo: Identificar, mediante construcción de algunos casos, las características de un poliedro dual de un poliedro dado.

1. Determine el centro de cada cara del cubo.
2. Determine el poliedro cuyos vértices son los puntos construidos en el ítem anterior.
3. ¿Qué relación encuentra entre el número de lados de cada cara del poliedro resultante en el ítem 2, con el orden de cada vértice del cubo?

4. Repita el ejercicio pero tomando como poliedro base el tetraedro regular.



Dual del cubo



Dual del tetraedro regular

5. Haga lo mismo tomando como base un octaedro regular.

6. ¿Qué puede concluir de los ejercicios anteriores? Establezca conjeturas.

7. ¿Qué sucederá con un icosaedro regular? ¿Qué con el dodecaedro regular?

Actividad 3. Poliedro arquimediano y poliedro de Catalán

Objetivo: Mediante construcción de casos, identificar la relación entre los poliedros arquimedios y los poliedros de Catalán.

1. Construya un cubo. ¿Qué construcciones auxiliares le realizaría para determinar un poliedro arquimediano?
2. Determine el centro de cada cara del poliedro resultante en el ítem 1.
3. Determine el poliedro cuyos vértices son los puntos construidos en el ítem anterior. ¿Qué sucede?

REFERENCIAS

- Alfonso, H. (1997). *Geometría plana y del espacio desde un punto de vista euclíadiano*. Bogotá, Colombia: El autor.
- Perry, P., Camargo, L., Samper, C. y Rojas, C. (2006). *La actividad demostrativa en la formación inicial del profesor de matemáticas*. Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.
- Perry, P., Samper, C., Camargo, L., Echeverry, A. y Molina, Ó. (2008). Innovación en la enseñanza de la demostración en un curso de geometría para formación inicial de profesores. En *Libro electrónico del XVII Simposio Iberoamericano de Enseñanza de las Matemáticas: “Innovando la enseñanza de las matemáticas”*. Toluca, México: Universidad Autónoma del Estado de México.
- Sutton, D. (2005). *Sólidos platónicos y arquimedios*. Barcelona, España: Oniro S. A.

POLIEDROS HECHOS CON NUDOS IDEALES

José Panqueva

raulpanqueva@yahoo.com

A partir de nudos hechos con tiras de papel se pueden obtener poliedros que envuelven el espacio. El procedimiento teórico consiste en hacer un nudo cerrado con una tira de papel y reducir suavemente la longitud de la tira hasta obtener una configuración mínima sin que el papel se arrugue. Esta configuración, en que la longitud de la tira es mínima, se conoce como nudo ideal y en algunos casos es un poliedro que envuelve el espacio. En la práctica, primero se identifican los nudos ideales que pueden ser poliedros y previamente se hacen los pliegues necesarios para luego hacer el nudo y formar el poliedro. Este tipo de figuras son de gran importancia en la teoría de nudos, la teoría de poliedros y en el origami.

POLIEDROS HECHOS CON NUDOS IDEALES

En teoría de nudos, un nudo ideal se obtiene al hacer un nudo cerrado con una cuerda de diámetro constante y reducir la longitud de la cuerda hasta obtener una configuración mínima. Con métodos numéricos se busca la forma y la longitud de la cuerda en los nudos ideales.

Un proceso análogo y experimentalmente más viable consiste en hacer un nudo con una tira de cinta o de papel y buscar el nudo ideal reduciendo la tira hasta obtener una configuración mínima sin que la cinta se arrugue. En algunos casos, el nudo ideal obtenido con una tira de papel es un poliedro que envuelve el espacio y surge la necesidad de investigar qué nudos pueden formar poliedros, cuál es la forma de cada poliedro y cuál sería su proceso de elaboración.

El poliedro obtenido depende del nudo, del número de vueltas que se le hagan a la tira de papel y del proceso de reducción de la longitud ya que un mismo nudo puede tener varias configuraciones ideales.

El poliedro anudado más conocido es el nudo trébol, que al hacerlo y reducir su tamaño forma un hexaedro uniforme cuyas caras son triángulos rectángulos isósceles. Las palaspas son figuras hechas con tiras de hoja de palma y entre ellas se encuentra el nudo ocho que forma un octaedro regular cuyos lados son

triángulos rectángulos isósceles y el antiprisma cuadrado también conocido como botón de cuero.

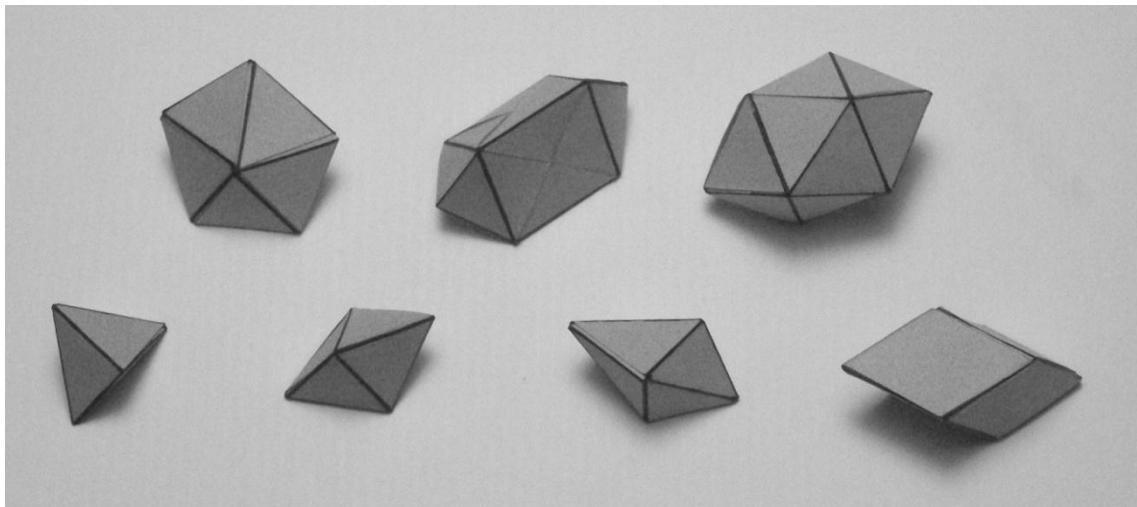


Figura 1. Algunos ejemplos de poliedros anudados, hechos cada uno con una sola tira de papel y sin pegante

En la lista de poliedros que pueden hacerse a partir de una sola tira de papel se cuentan también algunas pirámides, bipirámides, bipirámides elongadas y giroelongadas.

Para hacer poliedros con esta técnica, el problema consiste en identificar los nudos que puedan formar poliedros, buscar la configuración del nudo ideal, el patrón de plegado y la forma de hacer el nudo. Experimentalmente existen tres estrategias:

- Hacer el nudo y reducir suavemente su longitud hasta identificar la configuración ideal y el patrón de plegado, para posteriormente hacer los pliegues y hacer el nudo.
- Identificar otros poliedros anudados a partir de poliedros anudados previamente conocidos.
- Armar poliedros con los métodos tradicionales de cortar y pegar, e identificar si es posible hacer con ellos poliedros anudados.

A nivel teórico y desde el punto de vista numérico se puede investigar la forma que tiene una cinta anudada a medida que se reduce su longitud. Starostin y van der Heijden (2007) identificaron la forma de una cinta de Möbius con

diferentes longitudes cuando se reduce su longitud y este procedimiento se puede aplicar a otros nudos.

LA INVESTIGACIÓN Y SUS ANTECEDENTES

La investigación que sustenta la actividad que se realizará en este cursillo surgió de la idea de hacer adornos con tiras de cinta. La búsqueda se concentró en figuras hechas con nudos hasta que se encontró una que por su simetría y belleza se encuentra en trámite de patente que se radicó ante la Superintendencia de Industria y Comercio bajo el título “Nudo decorativo elaborado con cinta y procedimiento para elaborarlo” (Panqueva, 2008). El objeto en trámite de patente es un nudo toroidal $T(n,n+1)$ elaborado con una tira de cinta. Algunas de las figuras producidas con nudos ideales hechos con tiras de cinta se pueden observar en la galería de Flickr, www.flickr.com/photos/raulpanqueva/.

Louis Kaufman (2004) resalta la importancia del estudio de la minimización de la longitud de una cinta anudada en el espacio tridimensional y a partir de esta lectura surgió la idea de hacer poliedros anudados y al complementar con los trabajos de Heins Strolb (2006), el tema se amplió a los poliedros estrellados.

Hay algunos poliedros hechos con tiras anudadas que son conocidos en la tradición popular (e.g., palaspas, botón de cuero, pirámide pentagonal, bola de *sepak tarraw* –hecho de seis tiras anudadas).

Está considerablemente documentado el nudo pentagonal o nudo plano (Kaufman, 2004), a partir del cual se forma un pentágono y que a trasluz forma una estrella pentagonal. Con la misma técnica se pueden hacer polígonos de un número arbitrario de lados.

Es muy nombrado el trabajo de Jean Pedersen (1973) quien describió en detalle la forma de hacer los poliedros platónicos con tiras de papel, incluido el icosaedro, y la forma de dividir una tira en ángulos iguales.

En la última década, Heins Strolb (http://www.knotology.eu/index_en.html) desarrolló la técnica de hacer figuras con tiras de papel, especialmente estrellas, a la que llamó *knotology*. Actualmente, se destaca el trabajo de Dasa Severova (<http://www.flickr.com/photos/dasssa/sets/72157614203354042>) quien en su galería de Flickr muestra una serie de poliedros de gran complejidad y algunas guías de elaboración.

DESARROLLO DEL CURSILLO

El cursillo se desarrollará en dos sesiones. En la primera se describirá la técnica empleada para hacer poliedros anudados, la forma de plegar el papel y el método de anudarlos para hacer poliedros. En la segunda sesión se describirá la técnica para hacer poliedros estrellados y poliedros que requieren de más de una tira de cinta.

REFERENCIAS

- Kauffman, L.H. (2004). *Minimal flat knotted ribbons*, 14. Recuperado 17/05/2011 de: http://arxiv.org/PS_cache/math/pdf/0403/0403028v4.pdf
- Panqueva, J.R. (2008). *Nudo decorativo elaborado con cinta y procedimiento para elaborarlo*. Patente Colombia No. 8 83114. Bogotá DC. Superintendencia de Industria y Comercio. Gaceta de Propiedad industrial. No. 598 P. 169.
- Pedersen, J. (1973). Plaited Platonic puzzles. *The Two-Year College Mathematics Journal*, 4(3), 23-37.
- Starostin, E.L. y van der Heijden, G.H.M. (2007). The shape of a Möbius strip. *Nature materials*. 6, 563-567.

TRANSFORMACIONES DE FUNCIONES Y TRANSFORMACIONES GEOMÉTRICAS

Mario Pérez y Adelina Ocaña

Universidad de Bogotá Jorge Tadeo Lozano

mario.perez@utadeo.edu.co, adelina.ocana@utadeo.edu.co

El cursillo que presentamos va dirigido a profesores de educación media y primeros niveles universitarios. En él se proponen actividades que buscan establecer conexiones entre las transformaciones de funciones y las transformaciones geométricas. Consideramos que estas actividades pueden contribuir a enriquecer el concepto de función en el nivel de objeto (categoría de la teoría APOS) al trabajar las funciones como elementos de conjuntos particulares (familias de funciones); también se puede enriquecer el concepto de transformación geométrica, ya que no se limita a las transformaciones euclídeas.

PRIMERA SESIÓN

1) Se revisan los conceptos de *transformación de funciones* y de *transformación geométrica* (Breidenbach, 1992):

- Transformación (T) de funciones: función cuyo dominio y rango son funciones (consideramos las que tienen como dominio y rango, subconjuntos de números reales): $T: f \rightarrow g$.
- Transformación geométrica τ : función uno a uno del plano (\mathbb{R}^2) en sí mismo: $\tau: (x, y) \rightarrow (x', y')$ (Eccles, 1971).

Se presentan algunos ejemplos.

2) Las transformaciones de funciones en las que se centrará la atención son las de la forma $T(f(x)) = A f(B(x + C)) + D$ y las de la forma $T(f(x)) = |f(x)|$; $T(f(x)) = f(|x|)$.

3) Se pueden establecer conexiones entre algunas de las transformaciones (Stewart, 2007) de la forma $T(f(x)) = A f(B(x + C)) + D$ y las transformaciones geométricas euclídeas, de manera “natural”, como se aprecia en los siguientes ejemplos:

Pérez, M. y Ocaña, A. (2011). Transformaciones de funciones y transformaciones geométricas. En P. Perry (Ed.), *Memorias del 20º Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones* (pp. 449-452). Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

Transformación	Descripción verbal	Transformación geométrica	Descripción
$g(x) = f(x + 2)$	Desplaza la gráfica de f dos unidades a la izquierda	$\tau(x, y) = (x - 2, y)$ (euclídea)	Desplaza los puntos del plano dos unidades a la izquierda
$g(x) = -f(x)$	Refleja la gráfica en el eje x	$\tau(x, y) = (x, -y)$ (euclídea)	Refleja los puntos del plano en el eje x

4) A una transformación que hace estiramiento en dirección vertical, como por ejemplo $T(f(x)) = 2f(x)$, le corresponde de manera natural la transformación geométrica.

$\tau(x, y) = (x, 2y)$. Observemos el efecto que tiene en un triángulo como el de la Figura 1:

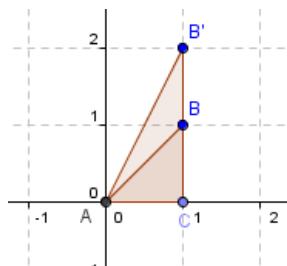


Figura 1

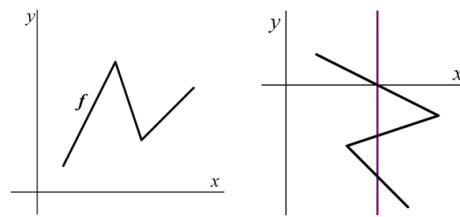


Figura 2

Podemos advertir que esta transformación geométrica no preserva la distancia ni la medida angular y por tanto no es una transformación euclídea.

5) No se han mencionado hasta ahora transformaciones a las que se les haga corresponder rotaciones u homotecias. Examinemos las rotaciones. Si la gráfica de una función se rota puede suceder que la obtenida no sea la gráfica de una función como se aprecia en la gráfica de la Figura 2, utilizando el criterio de la recta vertical.

6) El efecto que produce una homotecia como $\tau(x, y) = (2x, 2y)$ puede conseguirse en las gráficas de funciones con la composición de un estiramiento vertical y un estiramiento horizontal:

$$T(f(x)) = 2f(\frac{1}{2}x)$$

Si partimos de las transformaciones geométricas podemos entonces concluir, con los ejemplos anteriores, que hay algunas que envían gráficas de funciones

en gráficas de funciones. De las transformaciones geométricas que tienen esa propiedad diremos que *conservan la funcionalidad*.

SEGUNDA SESIÓN

1) Tanto la composición de transformaciones de funciones como de transformaciones geométricas son operaciones asociativas pero no conmutativas. Se examina por ejemplo el orden en que se pueden realizar transformaciones como:

$$T_1(f(x)) = -2f(x-3) + 1; T_2(f(x)) = -2f(-x-3) + 1; \text{ tomando a } f \text{ como: } f(x) = x; f(x) = x^2; f(x) = \sqrt{x}$$

2) Se determina los posibles órdenes en que se puede realizar las transformaciones de la forma $T(f(x)) = Af(B(x+C))+D$, para cualquier función f , con su correspondiente contraparte geométrica.

3) Se examina qué transformaciones de la forma $T(f(x)) = Af(B(x+C))+D$ aplicadas a las siguientes familias particulares de funciones las transforma en funciones de la misma familia (con su correspondiente contraparte geométrica).

- | | |
|---------------------------------------------|--------------------------------|
| a) $\{f(x) = mx, m \text{ constante}\}$ | e) Funciones racionales |
| b) $\{f(x) = mx + b, m \text{ constante}\}$ | f) $\{f(x) = b \cdot a^x\}$ |
| c) $\{f(x) = a x^2\}$ | g) $\{f(x) = a \cdot \log x\}$ |
| d) Funciones polinómicas | h) $\{f(x) = a \cdot \sin x\}$ |

El caso de las funciones exponenciales es llamativo: si éstas se definen como funciones de la forma $f(x) = b \cdot a^x$, para $b \neq 0, a > 0, a \neq 1$, entonces una traslación vertical como $T(f(x)) = f(x)+1$ envía a la función $f(x) = 2^x$ en la función $g(x) = 2^x + 1$ la cual no es expresable en la forma $f(x) = b \cdot a^x$. Algunos textos (e.g., Stewart, 2007) pasan esto por alto y la siguen llamando función exponencial.

Con transformaciones $T(f(x)) = Af(B(x+C))+D$ se puede conseguir cualquier función lineal a partir de la función potencia $f(x) = x$; también puede conseguirse cualquier función cuadrática a partir de la función potencia $f(x) = x^2$. Podría pensarse que esto mismo sucede para el caso de las funciones cúbicas con la función potencia $f(x) = x^3$. Pero esto no es cierto; por ejemplo la fun-

ción $g(x) = x^3 - x$ no puede escribirse en la forma $g(x) = A f(B(x + C)) = A(B(x + C))^3 + D$ pues si C es diferente de cero, en el desarrollo del cubo del binomio aparece un elemento cuadrático y si C es cero entonces no hay elemento lineal. Geométricamente se expresa esto diciendo que las transformaciones geométricas de traslación, reflexión y estiramiento o compresión vertical u horizontal no permiten transformar la gráfica de la función $f(x) = x^3$ en la gráfica de la función $g(x) = x^3 - x$

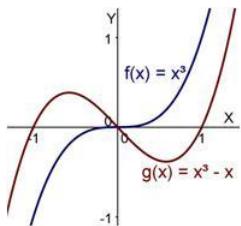


Figura 3

4) ¿Qué tipo de transformación geométrica permite transformar la gráfica de la función $f(x) = x^3$ en la gráfica de la función $g(x) = x^3 - x$? La respuesta se obtiene con las cizalladuras: $T(x, y) = (x + a, v x + y + b)$, tomando $a = 0$ $v = -1$, $y = f(x)$, $b = 0$. Lo anterior puede apreciarse visualmente con la manipulación de herramientas como el deslizador en GeoGebra o en Cabri.

5) Se examinan situaciones similares en familias de funciones racionales, exponenciales, logarítmicas, sinusoidales.

Se hacen las descripciones correspondientes a los efectos que producen en las gráficas de funciones las transformaciones de la forma $T(f(x)) = |f(x)|$; $T(f(x)) = f(|x|)$. Se examina si las extensiones correspondiente a los puntos del plano determinan o no transformaciones geométricas.

REFERENCIAS

- Breidenbach, D. (1992). Development of the process conception of function. *Educational Studies in Mathematics*, 23(3), 247-285.
- Eccles, F. (1971). *An introduction to transformational geometry*. Philippines: Addison-Wesley.
- Stewart, J. (2007). *Precálculo. Matemáticas para el cálculo*. México: Thomson Learning.

DISEÑO DE SITUACIONES DIDÁCTICAS EN EDUCACIÓN PRIMARIA: EL CASO DE LA TRANSFORMACIÓN DE ROTACIÓN EN UN AGD

Marisol Santacruz

Universidad del Valle, IE José María Córdoba

mary21391@yahoo.es

Este cursillo, dirigido a profesores de matemáticas en educación básica, pretende aportar algunos elementos teóricos y metodológicos para el diseño de secuencias didácticas alrededor de la transformación de rotación en grado quinto. El diseño de esta secuencia considera la integración de un AGD (Ambiente de Geometría Dinámica), tomando como referente la Teoría de Situaciones Didácticas (TSD) y la orquestación instrumental. En esta perspectiva, la gestión didáctica del profesor aparecerá con un elemento central que da cuenta de la intencionalidad de las situaciones propuestas.

PRESENTACIÓN

La integración de Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC) a la enseñanza de las matemáticas representa algunos puntos de tensión para el profesor: ¿cómo enseño?, ¿qué sentido tiene aprender matemáticas haciendo uso de TIC?, ¿qué tipo de situaciones proponer?

En este sentido, investigaciones en el campo de la Didáctica de las Matemáticas han reportado diversas reservas de los profesores frente al uso de TIC en la clase de matemáticas, asociadas principalmente a una sensación de “desplazamiento” profesional, donde el profesor se siente en franca desventaja frente a las “posibilidades técnicas” de ciertos artefactos computacionales.

La propuesta de este cursillo parte de estas concepciones y pretende, desde un punto de vista didáctico, centrar la mirada en el papel del profesor cuando se integran artefactos computacionales a la clase de matemáticas, como un Ambiente de Geometría Dinámica (AGD).

De esta manera, se abordan algunos referentes teóricos y metodológicos que sustentan la concepción, diseño, puesta en obra y evaluación, de una Secuencia Didáctica (SD) en grado quinto de educación básica, en la cual se intenta movilizar la transformación de rotación en un AGD como Cabri Géomètre.

ALGUNOS REFERENTES TEÓRICOS PARA EL DISEÑO DE SITUACIONES EN UN AGD

La integración didáctica de un AGD a la clase de matemáticas supone una reflexión epistemológica sobre la naturaleza de los objetos matemáticos considerados, una mirada instrumental referida al campo de acciones posibles de los artefactos que se van a integrar (Rabardel, 1999), una consideración frente al diseño de las situaciones (Brousseau, 1986) y al papel de la gestión didáctica del profesor.

En este sentido, interesa enfatizar en la noción de *orquestación instrumental* (Trouche, 2002), como aquella que orienta el diseño de la SD, en relación con su propósito fundamental de proponer una organización particular de la clase con el objeto de acompañar las génesis instrumentales de los estudiantes.

Desde esta perspectiva, se intenta dar cuenta de algunas situaciones didácticas que componen la SD. Para esto se propone un ejercicio en el cual los profesores se enfrentan al diseño de algunas situaciones, e intentan explorar posibles características, restricciones y limitaciones propias del diseño.

Se propone una mirada centrada en la actividad de los estudiantes y en el profesor, como protagonistas de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, donde los instrumentos juegan el papel fundamental de mediar en la construcción del conocimiento.

Rabardel (1999) explica que los profesores de matemáticas consideran los instrumentos como elementos neutros que no intervienen en la construcción de conocimientos por parte de los estudiantes. Al respecto, subraya el riesgo de promover integraciones ingenuas de artefactos en la clase, sin mayores consideraciones acerca del papel que pueden llegar a jugar en cuanto a la actividad del estudiante y del profesor.

Uno de los supuestos de la aproximación instrumental se centra en el papel que juegan los instrumentos en la concepción y desarrollo de SD, donde la acción del profesor es fundamental. Se hace necesario repensar la acción del profesor en el sentido de gestor de los sistemas de instrumentos en la clase y el impacto de éstos en el diseño y puesta en escena de secuencias didácticas que contemplen la mediación instrumental en el aprendizaje.

El propósito de la SD propuesta en el cursillo recoge restricciones importantes en relación con la actividad instrumentada de los estudiantes en relación con el arrastre exploratorio (Restrepo, 2008): los componentes de la transformación de rotación (figura que se va a transformar, centro de rotación y ángulo orientado de giro) y la congruencia como propiedad invariante de la transformación.

El arrastre exploratorio aparece entonces articulado a un propósito de enseñanza en términos de un Esquema Social de Uso (ESU) (Trouche, 2002) que se pretende movilizar en la SD. De esta manera, se posibilita la delimitación de determinadas variables microdidácticas relacionadas con la organización de la SD y que van a aparecer reseñadas en los análisis *a priori* a realizar en cada situación.

En el sentido que orienta este cursillo, los análisis *a priori* se realizarán a partir de tres aspectos fundamentales: el análisis de las situaciones adidácticas propuestas, retomando principalmente las dialécticas de la acción, la formulación, la comunicación y la validación, en relación con las unidades de análisis respecto a la consigna de la tarea, la intención que se determina para el medio adidáctico, las reglas de juego que se determinan para la situación y la estrategia ganadora propuesta, articulada a todas las anteriores.

Naturalmente, en estos análisis aparece la gestión didáctica del profesor como aspecto central. El diseño de las situaciones propuestas propone una relación directa entre la naturaleza de las situaciones adidácticas propuestas y la gestión del profesor.

La estructura propuesta en este análisis *a priori* pone en juego no sólo el papel del profesor respecto a la gestión didáctica del ESU del arrastre, sino que también pone de manifiesto el papel de Cabri de acuerdo con el tipo de situación que se propone, y especialmente en el medio adidáctico y las posibles retroacciones, que el mismo pueda hacer frente a la actividad matemática de los estudiantes.

TEMAS A TRATAR EN EL CURSILLO

El enfoque instrumental en didáctica de las matemáticas, la orquestación instrumental y la gestión didáctica del sistema de instrumentos a cargo del profesor, diseño de situaciones didácticas, el papel de Cabri como medio, análisis *a priori* y algunos resultados de una SD.

REFERENCIAS

- Brousseau, G. (1986). La relation didactique: le milieu. En *Actes de la IVème école d'été de didactique des mathématiques et de l'informatique* (pp. 54-58). París, Francia: IREM de Paris VII.
- Rabardel, P. (1999). Éléments pour une approche instrumentale en didactique des mathématiques. En M. Bailleul (Ed.), *Actes de la dixième université d'été de didactique des mathématiques. Évolution des enseignants de mathématiques; rôle des instruments informatiques et de l'écrit. Qu'apportent les recherches en didactique des mathématiques* (pp. 203-213). Caen, Francia: IUFM de Caen.
- Restrepo, Á. (2008). *Genèse instrumentale du déplacement en géométrie dynamique chez des élèves de 6eme*. Tesis de doctorado no publicada, Université Joseph Fourier, Grenoble, Francia.
- Trouche, L. (2002). Genèses instrumentales, aspects individuels et collectifs. En D. Guin, y L. Trouche (Ed.), *Calculatrices symboliques. Transformer un outil en un instrument du travail informatique: un problème didactique* (pp. 243-275). Grenoble, Francia: La Pensée Sauvage.

Pósters

ANÁLISIS DEL FENÓMENO GRAVITACIONAL A TRAVÉS DE LAS FORMAS DIFERENCIALES

Yadir Garnica

Universidad Distrital Francisco José de Caldas

alex_garnica_417@hotmail.com

Se compara el formalismo vectorial clásico de la gravitación newtoniana con el tratamiento de las formas diferenciales, de tal manera que se puedan visualizar geométricamente los dos métodos y analizar las ventajas de éstos. Se describirán las ecuaciones fundamentales que rigen los fenómenos gravitacionales mostrando una alternativa para conceptualizar y abordar los problemas que se tratan en dicha teoría.

INTRODUCCIÓN

En los cursos introductorios de mecánica newtoniana, el tratamiento usual del campo gravitacional es netamente algorítmico, es decir, se enmarca en la manipulación de las magnitudes físicas como variables algebraicas. Sólo en algunos textos formales hacen uso de herramientas vectoriales para su descripción. Sin embargo, el formalismo vectorial no permite una representación lo suficientemente geométrica del fenómeno gravitacional con lo cual se pierde la intuición (que es la que permite el acceso directo al conocimiento del fenómeno sin una previa formalización matemática) y la conceptualización física.

Por otro lado, las formas diferenciales brindan la posibilidad de una representación geométrica del campo gravitacional (Misner, Thorne y Wheeler, 1973) permitiendo al estudiante una mejor comprensión e interiorización del fenómeno.

Las ecuaciones que describen los fenómenos gravitacionales (Kleppner, 1973; Alonso, 1995) vienen dadas por:

$$-\nabla U(\vec{r}) = \vec{F}$$

$$\nabla^2 \varphi = 4\pi G\rho$$

$$\nabla \cdot g = 4\pi \rho$$

Garnica, Y. (2011). Análisis del fenómeno gravitacional a través de las formas diferenciales. En P. Perry (Ed.), *Memorias del 20º Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones* (pp. 459-460). Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

Las formas diferenciales permiten expresar el campo gravitacional como una 1-forma; el flujo del campo gravitacional como una 2-forma y la densidad volumétrica de masa como una 3-forma. Éstas permiten una interpretación geométrica más amplia del fenómeno gravitacional.

CONCLUSIONES

- El formalismo matemático de las formas diferenciales permiten un análisis geométrico del fenómeno gravitacional mejorando la conceptualización de los estudiantes.
- Desde la representación diferencial del cálculo vectorial la noción de superficie no está explícita, por otro lado desde el punto de vista de las formas diferenciales esta noción geométrica es evidente.
- Las dos representaciones se complementan la una a la otra, pues existe una correspondencia dual entre las formas diferenciales y los vectores.

REFERENCIAS

- Alonso, M. (1995). *Física*. México: Addison Wesley Iberoamericana S. A.
- Kleppner, D. (1973). *An introduction to mechanics*. San Francisco, CA: McGraw-Hill.
- Misner, C., Thorne K. y Wheeler J. (1973). *Gravitation*. San Francisco, CA: W.H. Freeman.

POLITOPOS: UNA PRIMERA APROXIMACIÓN

Edward Latorre

Universidad Nacional de Colombia

edword183@hotmail.com

Los politopos son generalizaciones de un polígono o un poliedro a cualquier otra dimensión. Entre ellos se destacan los politopos convexos, los cuales están constituidos de forma iterativa, es decir mediante politopos de dimensiones menores; por ser convexos satisfacen la Fórmula de Euler-Poincaré, que describe propiedades topológicas sobre cada una de sus celdas (caras en cualquier dimensión). Como caso especial se presentan los politopos regulares: se exhiben los “triviales” para cualquier dimensión y se describen casos particulares para las dimensiones 3 y 4. Finalmente se hace mención de la posibilidad de representación de cualquier politopo regular mediante un *polígono Petrie*.

POLITOPOS CONVEXOS

Como *politopo convexo* definiremos a la envolvente convexa de algún subconjunto finito de un espacio afín de dimensión n . En bajas dimensiones tenemos: un punto (0-dim.), un intervalo (1-dim.), un polígono (a -dim.), etc.

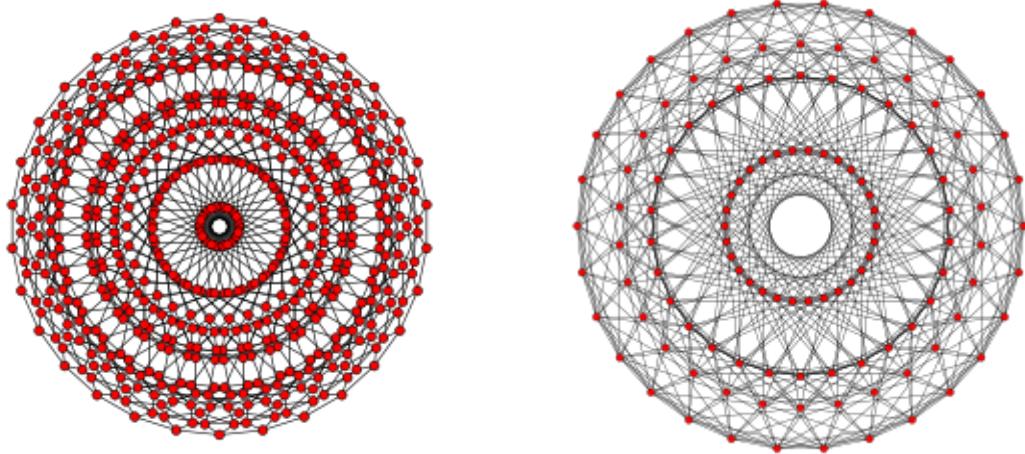
Politopos regulares

Un politopo \mathbf{P} (n -dim.) se dice *regular* si sus celdas son regulares, todas iguales y existe una figura de vértice en cada vértice (politopo $(n-1)$ -dim.) iguales también. Gracias al geómetra suizo Ludwig Schläfli (1860), tenemos una simbología especial para cualquier politopo regular \mathbf{P} (n -dim.), mediante un vector dirigido conocido como símbolo de Schläfli: (p, q, \dots, v) , donde cada componente es un número entero mayor o igual a 3, el cual es único salvo una isometría o una homotecia. El símbolo de Schläfli de un n -gono es (n) ; su grupo simétrico es el grupo Dihedral \mathbf{D} (n -dim).

En cada dimensión $n > 2$ existen tres politopos regulares “triviales” clasificados gracias a Schläfli, a saber: El n -simplex *estándar* cuyo símbolo de Schläfli es $(3, \dots, 3) = (3(n-1 \text{ veces}))$ auto dual, su grupo simétrico \mathbf{S} asociado es el $n+1$; El n -cubo o *politopo de medida* generado por $[-1, 1]$ (n -dim.), con símbolo de Schläfli $(4, 3, \dots, 3) = (4, 3(n-1 \text{ veces}))$; el n -octaedro o *politopo cruz* con símbolo de Schläfli $(3, \dots, 3, 4) = (3(n-2 \text{ veces}), 4)$, sobre los últi-

mos dos anotamos que uno es el dual del otro pues sus símbolos correspondientes son uno el inverso del otro, y como consecuencia comparten el mismo grupo simétrico: el grupo Octaedral **G** (n -dim.). En general, el símbolo de Schläfli de cualquier politopo regular permite describir una matriz simétrica (matriz de Coxeter) que determina un grupo de Coxeter finito con lo cual la clasificación de dichos politopos se centra en el estudio de estos grupos: generalizaciones de los grupos simétricos.

En particular para el caso 3-dim. existen otros dos politopos regulares además del *tetraedro*, el *cubo* y el *octaedro*: el *dodecaedro* y su dual el *icosaedro*. Sus símbolos de Schläfli respectivos son $(5,3)$, $(3,5)$. Para el caso 4-dim. existen otros tres politopos no triviales: el *24-celda* $(3, 4, 3)$ auto dual; el *120-celda* $(5, 3, 3)$ y su dual el *600-celda* $(3, 3, 5)$. Todos los politopos regulares tienen, mediante proyección ortogonal, su representación en el plano conocida como *polígono de Petrie* que para los “triviales” permite la visualización de todos sus vértices. Como aporte estético e informativo presento los *polígonos de Petrie* del *120-celda* y el *600-celda*:



ANÁLISIS DE LOS FENÓMENOS ELECTROMAGNÉTICOS A TRAVÉS DE LAS FORMAS DIFERENCIALES Y LOS TENSORES

John Salas y Yesid Cruz

Universidad Distrital Francisco José de Caldas

jfargos@hotmail.com, yesidjaviercruz@yahoo.com

Se utilizará el formalismo de los tensores y las formas diferenciales aplicados al electromagnetismo clásico, de tal manera que se puedan visualizar geométricamente los diferentes métodos para analizar los mismos fenómenos físicos. Se estudiarán las ecuaciones de Maxwell por medio de los dos métodos para comparar las ventajas de uno respecto al otro en la conceptualización y el abordaje de situaciones problemáticas.

INTRODUCCIÓN

En los cursos introductorios de electromagnetismo comúnmente se hace uso de las herramientas que brinda el cálculo vectorial para la descripción formal de los campos electromagnéticos (Gibbs, 1901); pero el uso de tales herramientas hace tediosa la manipulación de las ecuaciones que rigen estos fenómenos; además las nociones geométricas no son lo suficientemente explícitas. Existen otras maneras alternativas de describir los fenómenos electromagnéticos, las cuales resaltan su componente geométrico haciendo más intuitiva la comprensión de estos (Misner, Thorne y Wheeler, 1973).

Las expresiones fundamentales que describen el campo electromagnético son las ecuaciones de Maxwell que en forma integral vienen dadas por:

$$\begin{aligned}\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{l} &= -\frac{d}{dt} \int_A \vec{B} \cdot d\vec{A} \\ \oint_{\Gamma} \vec{H} \cdot d\vec{l} &= \frac{d}{dt} \int_A \vec{D} \cdot d\vec{A} + \int_A \vec{J} \cdot d\vec{A} \\ \oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} &= \int_V q dv \\ \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} &= 0\end{aligned}\tag{1.1}$$

Infortunadamente, estas ecuaciones dependen del sistema de coordenadas elegido.

Salas, J. y Cruz, Y. (2011). Análisis de los fenómenos electromagnéticos a través de las formas diferenciales y los tensores. En P. Perry (Ed.), *Memorias del 20º Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones* (pp. 463-464). Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

Ahora bien, la representación tensorial de (1.1) está descrita por medio de un tensor covariante de orden 2, que en la literatura se denomina *tensor electromagnético* (Sommerfeld, 1952), el cual permite compactar la notación y mantener invariante bajo una transformación arbitraria de coordenadas los fenómenos electromagnéticos.

Por otro lado, la imagen que brindan las formas diferenciales resaltan características geométricas de estos fenómenos, dando al estudiante la posibilidad de aprehender de una manera más intuitiva; aquí el campo electromagnético queda descrito a través de una 1-forma, sobre el espacio vectorial dual euclídeo.

CONCLUSIONES

- La notación tensorial deja invariante los fenómenos electromagnéticos bajo transformaciones de coordenadas arbitrarias.
- Las formas diferenciales omiten el uso de índices; es decir, de coordenadas y así permiten el análisis de los fenómenos electromagnéticos, sin necesidad de recurrir a las cartas coordenables.
- El álgebra de las formas diferenciales reemplazan el conjunto de largas y tediosas identidades vectoriales, facilitando los cálculos.
- Las formas diferenciales proveen de un modelo visual a través de tubos y cajas que representan las integrales de superficie y volumen permitiendo entender el concepto de flujo electromagnético y densidad que ayuda a los estudiantes a formalizar e interiorizar los fenómenos electromagnéticos de mejor manera.

REFERENCIAS

- Misner C., Thorne K. y Wheeler J. (1973). *Gravitation*. San Francisco, CA: W.H. Freeman.
Sommerfeld, A. (1952). *Electrodynamics: Lectures on theoretical physics* (volumen III). New York, USA: Academic Press.

PROYECTO SILUETA: DELINEANDO EL MUNDO CON DERIVE 5

Astrid Torregroza

Colegio Abraham Lincoln

alizbel14@hotmail.com

Trabajos de los estudiantes de Cálculo del Colegio Abraham Lincoln, Bogotá D.C., Colombia, relacionados con el uso del Derive 5 y la modelación de bocecos realizados a lápiz, que posteriormente fueron ubicados en el plano cartesiano, modelados con funciones reales y delimitados con desigualdades.

INTRODUCCIÓN

En el Análisis Matemático o Cálculo confluyen todos los aprendizajes previos que han adquirido los estudiantes, y para desarrollarlo se requiere de la aritmética, el álgebra, la geometría euclíadiana y analítica y la trigonometría. El lenguaje matemático del cálculo es muy riguroso y es, para muchos estudiantes, un monólogo del maestro, parece un idioma desconocido que no posibilita un diálogo a nivel cognitivo entre maestro y estudiante.

¿Cómo lograr que los estudiantes se hagan conscientes de que las matemáticas permiten modelar el mundo, describiéndolo con un lenguaje que utiliza unos códigos especiales? ¿Qué herramientas se deben utilizar para traducir la modelación matemática a imágenes significativas para los estudiantes? ¿Cuáles son los mundos en los que viven y conviven los estudiantes? ¿Cómo conectar esos mundos e intereses con el Cálculo?

LA PROPUESTA

La propuesta consiste en que los estudiantes, en equipos de trabajo, plasmen en un dibujo algunos de sus intereses personales, de sus gustos y aficiones, los cuales posteriormente serán ubicados en el plano cartesiano de manera estratégica, buscando la simetría, de ser posible. Los estudiantes traducirán al lenguaje matemático cada una de los segmentos y curvas de sus dibujos y delimitarán los espacios que ocupan en el plano. Posteriormente utilizarán el software Derive 5 para que al introducir sus modelaciones algebraicas logren darle vida y precisión a su idea inicial, a su creación.

Objetivos

El objetivo, específico, del Proyecto Silueta es generar investigación en el aula, a través de la implementación de herramientas tecnológicas, que al ingresar al aula bajo un diseño curricular previo, impacten las prácticas pedagógicas, dándoles un tinte innovador, pero lo más importante es que conviertan a los actores del proceso educativo en agentes de cambio, para que promuevan en la comunidad un aprendizaje significativo.

Metodología

El proyecto se divulga y promueve desde el primer período, se desarrolla y expone durante el segundo, se comparte con la comunidad en el tercero y se usan las habilidades adquiridas con el uso del Derive 5 en el cuarto período.

Entre los materiales empleados tenemos: fuentes que traen los estudiantes para hacer sus dibujos, material bibliográfico para repasar los modelos funcionales, carteleras, ploteados, Derive 5, Cabri Geometry, Paint, Power point, Word, Bloggers.

RESULTADOS

- El uso de las tecnologías de la información y la comunicación como recurso didáctico (Derive 5, Cabri Geometry, calculadoras graficadoras TI 84 Plus, Paint, Power Point, creación de blogs, digitalización de video, creación de marcas para productos comerciales, entre otras).
- La formación de una actitud favorable al emprendimiento, la innovación y la creatividad, mediante el desarrollo de nuevos productos y su difusión utilizando tecnologías de la información y la comunicación.

IMPACTO

- El proyecto beneficia a los maestros de matemáticas porque los motiva al uso de herramientas tecnológicas en la adquisición de conocimientos, haciéndolos transitar de lo tradicional a lo moderno.

Para ver algunas de las evidencias del Proyecto Silueta visiten:
<http://proyectosilueta.blogspot.com/>