

**Trabajo Final para obtener el título de Profesora
en Matemática**

Construcciones con regla y compás

Clara Pamela Perez



Universidad Nacional de Salta
Facultad de Ciencias Exactas
Departamento de Matemática

Director

Prof. Antonio Sángari

Tribunal Evaluador

Msc. Ing. Dolores Alia de Saravia

Ing. Ariel Estrada

Esp. Prof. Cristina Egüez

Fecha de graduación

21.12.2012

A mi Madre, instrumento que Dios usó para darme el ser, la vida; por su amor único e incomparable, fuente de apoyo y motivación constante a pesar de las dificultades para darme una buena educación.

Índice general

Resumen	3
Introducción	5
1. Aspectos históricos	7
1.1. El inicio de las construcciones geométricas	7
1.2. Los Problemas Clásicos	8
1.3. Euclides	11
1.4. Problemas planos, sólidos y lineales	12
1.5. Una curiosidad perdurable en el tiempo	13
2. Construcciones Elementales	17
2.1. Los Instrumentos	17
2.2. Construcciones Básicas	18
2.3. Ejemplos de construcciones elementales	18
2.3.1. Triángulo Equilátero (dado un lado)	19
2.3.2. Mediatrix de un segmento	20
2.3.3. Perpendicular a una recta dada	21
2.3.3.1. Por un punto de la recta	21
2.3.3.2. Por un punto exterior a la recta	22
2.3.4. Paralela a una recta dada	23
2.3.5. Cuadrado (dado un lado)	24
2.3.6. Bisectriz de un ángulo	25
2.3.7. División de un segmento en n partes iguales	26
2.3.8. Polígonos regulares (dada la circunferencia que lo inscribe)	27
2.3.8.1. Triángulo Equilátero	28
2.3.8.2. Polígonos regulares de 3×2^n lados, con $n > 0$	29
2.3.8.3. Cuadrado	30
2.3.8.4. Polígonos regulares de 4×2^n lados, con $n > 0$	31
2.4. Equivalencia entre el compás antiguo y el compás moderno	31
2.4.1. Transporte de Segmentos	32
3. De la Geometría al Álgebra	33
3.1. Algunos conceptos de la teoría de extensiones de cuerpos	33
3.2. Los números construibles	34

3.3. Los problemas Clásicos	39
3.3.1. Trisección de un ángulo arbitrario	39
3.3.2. Duplicación del cubo	40
3.3.3. Cuadratura del círculo	41
3.3.4. El Heptágono Regular	41
4. Polígonos Regulares	43
4.1. Construcción de polígonos regulares	44
4.1.1. Construcción del Triángulo Equilátero	45
4.1.2. Construcción del pentágono regular	45
4.1.3. Construcción del heptadecágono regular	47
Agradecimientos	55
A. Artículo de Wantzel	57
A.1. Investigaciones sobre la regla y el compás	57
B. Creación de nuevas herramientas en GeoGebra	63
B.1. <i>Creación de una nueva herramienta</i>	63
B.2. <i>Acceso a herramientas creadas</i>	63
Bibliografía	67
Nomenclatura	69
Índice alfabético	71

Índice de figuras

1.1. Cuadratura del círculo	8
1.2. Duplicación del cubo	9
2.1. Rombo	19
2.2. Construcción de un triángulo equilátero dado un lado	20
2.3. Construcción de la mediatrix de un segmento	20
2.4. Justificación de la construcción (Subsección 2.3.2)	21
2.5. Perpendicular a una recta por un punto sobre la misma	21
2.6. Construcción de la perpendicular a una recta por un punto exterior (caso 1)	22
2.7. Construcción de la perpendicular a una recta por un punto exterior (caso 2)	23
2.8. Construcción de la paralela a una recta por un punto exterior a la misma	23
2.9. Justificación de la construcción (Subsección 2.3.4)	24
2.10. Construcción de un cuadrado dado un lado.	24
2.11. Construcción de la bisectriz de un ángulo	25
2.12. Justificación de la construcción de la Subsección 2.3.6	26
2.13.	26
2.14. División de un segmento en n partes iguales	27
2.15. Construcción de un triángulo equilátero	29
2.16. Justificación de la construcción de la Subsubsección 2.3.8.1	29
2.17. Construcción de polígonos regulares de 3×2^n lados	30
2.18. Construcción de un cuadrado	30
2.19. Construcción de polígonos regulares de 4×2^n lados	31
2.20. Transporte de segmentos	32
3.1. Plano Complejo	34
3.2. Construcción de los números Enteros	35
3.3. Construcción de $z = a + bi$	35
3.4. Construcción de $a + b$ y $a - b$	36
3.5. Construcción de ab^{-1}	36
3.6. Construcción de la raíz cuadrada de un número real	37
4.1. Triángulo Equilátero	45
4.2. Pentágono Regular	47
4.3. Construcción de la raíz cuadrada	49

4.4. Construcción de puntos de abscisas	$\frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + (\sqrt{c})^2}$	50
4.5. Construcción de puntos de abscisas	$\frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - (\sqrt{c})^2}$	51
4.6. Construcción de η_1 y η_2	52
4.7. Construcción de ξ_1 , ξ_2 , ξ_3 y ξ_4	52
4.8. Construcción de λ_1 y λ_4	53
4.9. Construcción de $\frac{\lambda_1}{2}$	54
4.10. El heptadecágono	54
B.1. Paso: 1	64
B.2. Paso:2	65
B.3. Paso: 3	65
B.4. Paso: 4	66

Resumen

Este trabajo propone fundamentar las Construcciones con Regla y Compás, haciendo un estudio histórico previo de las mismas. Una vez lograda la caracterización algebraica de los construibles es posible dar el sustento teórico a aquellas construcciones que no pueden efectuarse con el sólo uso de rectas y circunferencias. Seguidamente abordaremos problemas específicos, como la imposibilidad de la construcción de los Problemas Clásicos Griegos o las construcciones de Polígonos Regulares, para las que se expone un novedoso método de construcción para efectuar en GeoGebra. Es preciso aclarar que este trabajo no fue pensado para una aplicación inmediata al aula, pero su estructura permite que un docente de cualquier nivel, interesado en esta temática, pueda usarlo como guía.

Introducción

Las construcciones geométricas tienen su importancia matemática innegable. Pero también tiene mucha importancia pedagógica por cuanto permite representar mediante dibujos un esquema deductivo. Esta faceta debiera ser suficiente para justificar su inclusión en los contenidos curriculares de matemática en todos los niveles, especialmente en el nivel medio.

El propósito de este trabajo es mostrar qué construcciones geométricas pueden hacerse con el uso de una regla y un compás. Mostraremos dos perspectivas distintas bajo las cuales se puede abordar esta temática, la primera de ellas es estudiar los procedimientos para efectuar las construcciones más comunes de la geometría euclíadiana y la segunda surge del estudio algebraico de las mismas.

Las construcciones con regla y compás han interesado a los matemáticos de todas las épocas, particularmente aquellas que sólo pueden efectuarse utilizando una regla y un compás, surgiendo de esta manera múltiples interrogantes y resultados interesantes. Por esta razón introdujimos en el primer capítulo una reseña histórica que indica los esfuerzos de muchos matemáticos para conseguir determinar qué se puede construir con tales instrumentos y qué no. Está claro que son herramientas muy potentes que nos permiten construir una infinidad de objetos pero, ¿dónde está su límite? ¿es posible construir cualquier cosa que nos planteemos? Está claro que no, pues cualquier figura que no conste de circunferencias y rectas queda fuera de su alcance (aunque se pueda acceder a una cantidad finita de puntos de dicha figura, como es el caso de la elipse).

En el segundo capítulo comenzamos destacando la esencia lógica de las construcciones con regla y compás. Resaltamos que las figuras que manejamos en geometría no existen en la realidad, son idealizaciones de objetos de la realidad material. No existe, por ejemplo, la recta ideal, pues cualquier recta material mirada al microscopio resultaría curva; no existe el punto ideal, carente de dimensiones; no existe la superficie ideal, carente de grosor. Aunque las figuras ideales no existen, se pueden estudiar con ayuda de sus representaciones materiales. Desde los griegos, la regla y el compás contribuyeron a materializar las ideas geométricas. Las construcciones que se realizan con estos instrumentos ayudan a comprender mejor las propiedades geométricas.

Seguidamente, en este capítulo, realizamos algunas construcciones elementales a partir de construcciones anteriores o de construcciones básicas. Las construcciones básicas se entienden como el trazado de rectas y circunferencias, y sus intersecciones.

Las construcciones que se realizan se hacen a modo de teoremas de existencia. Para agilizar la justificación de las construcciones, se exponen dos teoremas sencillos, uno referido a las propiedades del rombo y otro referido a los polígonos regulares.

Con las construcciones del capítulo 2, encaramos las construcciones absolutas de números del capítulo 3. Para esto, fue necesario introducir algunos conceptos de la teoría de extensiones de cuerpos. Se muestra que los números complejos construibles conforman un cuerpo cerrado bajo la extracción de raíces. También se resalta el teorema importante que muestra que los números construibles deben pertenecer a una extensión de grado una potencia de dos del cuerpo de los racionales; que resuelve la imposibilidad de la construcción de los problemas delianos.

Finalmente, en el capítulo 4 se abordan las construcciones de polígonos regulares de una cantidad prima de lados, describiéndose en cada una de ellas el procedimiento algebraico y geométrico utilizado. Aplicamos un método general para construir dichos polígonos.

Si bien ha formado parte de un periodo de investigación la construcción de los polígonos de 257 y 65537 lados, siguiendo el método general explicado en el capítulo 4, la misma no se ha logrado. Este problema consiste en encontrar un algoritmo que indique cómo agrupar las raíces complejas de la ecuación que corresponde a dicha construcción en sus diferentes pasos. Esto requiere que también tengamos en cuenta el problema de la búsqueda de primitivos¹ del grupo \mathbb{Z}_p con el producto, donde p es un primo de Fermat.

Se adjunta en un apéndice la traducción, hecha con la colaboración del Ing. Martín Miguel Herrán, de la obra de Wantzel “Recherches sur le moyens de reconnaître si un Problème Géométrie peut sé résoudre avec la règle et le compas” publicada en el prestigioso Journal de Mathématiques Pures et Appliquées en 1837. Así también, un apéndice donde se explican los pasos a seguir para crear las herramientas utilizadas para la construcción del heptadecágono regular en el capítulo 4.

¹Los primitivos del grupo \mathbb{Z}_p son los generadores del grupo \mathbb{Z}_p^*

1. Aspectos históricos

1.1. El inicio de las construcciones geométricas

Desde sus orígenes, el hombre ha tratado de comunicarse mediante grafismos o dibujos (Stewart 2008). Las primeras representaciones que conocemos son las pinturas rupestres. En ellas no sólo se intentaba representar la realidad que le rodeaba, animales, astros, al propio ser humano, etc., sino también sensaciones, como la alegría de las danzas, o la tensión de las cacerías.

Cuando el hombre adquirió un determinado desarrollo de sus ideas matemáticas necesitó también reflejarlas gráficamente, entonces necesitó instrumentos: en un principio sólo punzones y tablillas enceradas (Collette and Piga 1993); pero después herramientas que le permitan firmeza en los trazos para imitar la idealidad de los objetos a dibujar. Y así aparecen la regla y el compás.

El primer gran avance de la geometría se produjo en Grecia. Para los antiguos griegos, la matemática era un arte y estaba más vinculada con la filosofía que con los problemas prácticos de la vida ordinaria. El tratamiento que le dieron la dividió en cuatro campos diferenciales y bien reconocibles: la teoría de los números, la geometría métrica (referida al desarrollo de las fórmulas para calcular el área y el volumen de las figuras y cuerpos geométricos conocidos), la teoría del razonamiento, y la geometría no métrica centrada en las construcciones geométricas con regla y compás (la geometría deja de ser absolutamente pragmática y tiende a constituirse como ciencia basada en el razonamiento deductivo).

De todo esto, fue el último campo el que ocupó el lugar privilegiado y en el cual hicieron más aportes. “Este tipo de geometría era, según la consideración de Platón (Grecia, 427-347 a.C.), el arte de la mente. Su concepción de un mundo de las ideas y de un mundo de los sentidos se ve reflejada directamente en las construcciones. En el mundo que percibimos todos los días, el mundo real, el potencial de la regla y el compás se ve reducido a una simple aproximación que podía alcanzar mayor o menor grado de precisión. Pero en el mundo ideal, el que se manifiesta en nuestras mentes, las construcciones son perfectas y manifiestan de manera pura a la belleza.

La razón de esto se encuentra en que las rectas y las circunferencias eran vistas como las curvas perfectas y básicas a partir de las cuales todas las demás construcciones eran posibles. Y su presencia en el mundo físico se lograba a través de la regla y el compás, los denominados instrumentos divinos. Con ellos se aseguraba una geometría simple, ordenada, armónica y estéticamente bella. [...]Y fue justamente

esto, con el objetivo de mantenerla así, inalterable y cercana a lo ideal, lo que motivó la implementación de restricciones arbitrarias a lo que se podía utilizar para crear las construcciones. Además, Platón consideraba que cualquier otro instrumento haría intervenir y depender demasiado del mundo físico, dejando relegado el mundo de lo ideal y lo perfecto” Ayala (2008).

1.2. Los Problemas Clásicos

La geometría griega era incapaz de resolver tres famosos problemas geométricos (que heredarán los matemáticos posteriores), puesto que debían ser resueltos utilizando únicamente la regla y compás «ideales». Estos tres problemas son los siguientes:

- *Cuadratura del círculo*

Se considera que es el primer problema clásico que surgió. “Plutarco (Grecia, 50-100) cuenta que Anaxágoras de Chazomene (Grecia, ¿-430 a.C.) se ocupó de la cuadratura del círculo, y aquí nos encontramos con la primera mención de un problema que iba a fascinar a los matemáticos durante más de 2000 años” Boyer and Pérez (1999). No se tiene más información sobre el origen de dicho problema, ni tampoco las reglas que lo regían, pero más tarde se sobreentendía ya que el cuadrado buscado, de área igual a la del círculo, habría de ser construido utilizando la regla y el compás solamente.

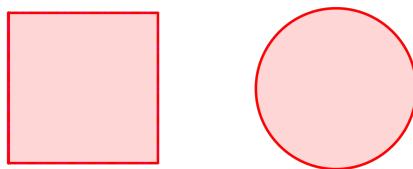


Figura 1.1.: Cuadratura del círculo

Esto ha sido resuelto de muchas maneras, pero siempre utilizando otros medios, como por ejemplo:

- Cuadratriz de Hipias (¿-425 a.C.).
- Espiral de Arquímedes (287-212 a.C.).
- Cuadratriz de Tschirnhausen (1651-1708).

El asunto alcanzó al fin su solución definitiva en 1882, en un artículo de Lindemann, titulado “Über die Zahl π ”.

- *Duplicación del cubo*

Hay dos versiones del surgimiento de este problema, el cual consiste en construir un cubo cuyo volumen sea equivalente al doble del volumen de un cubo inicial. La primera se refiere a que Minos, rey de Creta, había quedado muy disconforme con el tamaño de la tumba (de forma cúbica) levantada para honrar a su hijo Graucus, y ordenó que se duplicara el volumen de la misma.

La otra versión (Pastor and Babini (2000)) surge de una obra de Eratóstenes (Grecia, 284-192 a.C.). Cuenta la leyenda que una terrible peste asolaba la ciudad de Atenas, hasta el punto de llevar a la muerte a Pericles. Una embajada de la ciudad fue al oráculo de Delfos, consagrado a Apolo, para consultar qué se debía hacer para erradicar la mortal enfermedad. Tras consultar al Oráculo, la respuesta fue que se debía duplicar el altar consagrado a Apolo en la isla de Delos. El altar tenía una peculiaridad: su forma cúbica. Prontamente, los atenienses construyeron un altar cúbico cuyos lados eran el doble de las del altar de Delos, pero la peste no cesó, se volvió más mortífera. Consultado de nuevo, el oráculo advirtió a los atenienses que el altar no era el doble de grande, sino 8 veces mayor, puesto que el volumen del cubo es el cubo de su lado ($(2l)^3 = 2^3 l^3 = 8l^3$). Nadie supo cómo construir un cubo cuyo volumen fuese exactamente el doble del volumen de otro cubo dado, y el problema matemático persistió durante siglos (no así la enfermedad)

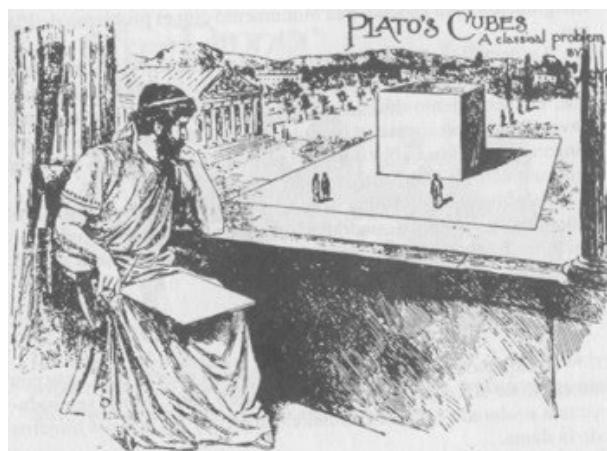


Figura 1.2.: Duplicación del cubo

Este problema fue tratado por importantes personajes de la historia, como por ejemplo:

- Arquitas de Tarento,
- Hipócrates de Quío,
- Eratóstenes de Cirene (Grecia, 275-194 a.C.),
- Menecmo (Grecia, siglo IV a.C.)

- Johannes Werner (Alemania, 1462-1522);

Ninguno logró resolver el problema bajo las reglas prescritas, sino que fue necesario modificarlas para encontrar una solución. “Esto último fue lo que hicieron Menecmo y Werner, quienes lograron duplicar el cubo al construir el segmento buscado por medio de la intersección de una parábola con una hipérbola. Werner, en su obra “Elementos de las cónicas” de 1522, incluso presentó las ecuaciones y la construcción de estas curvas a partir de un cono, y demostró cómo obtener una parábola con regla y compás, de manera muy similar a las realizadas por los griegos en la antigüedad” Ayala (2008).

En 1837, el francés Pierre Wantzel probaría definitivamente que es imposible duplicar el cubo con regla y compás.

- *Trisección de un ángulo arbitrario.*

Dada la facilidad para realizar la bisectriz de un ángulo y la trisección de un segmento, parece natural que en el 500 a.C. algunos griegos se planteasen cómo dividir un ángulo en tres partes iguales. Encontraron solución a casos concretos (por ejemplo para trisecar el ángulo de 90 grados basta con construir un triángulo equilátero y trazarle la bisectriz).

Este problema difiere de los otros dos. En primer lugar, no hay una historia real que relacione la forma en que el problema se empezó a estudiar. En segundo lugar, es un problema de un tipo distinto. Uno no puede cuadrar ningún círculo ni duplicar ningún cubo y, sin embargo, es posible trisecar ciertos ángulos.

“A lo largo de la historia han aparecido falsas demostraciones e incluso soluciones aproximadas. Es curioso que incluso en nuestros días aparezcan demostraciones como la del padre Callaham, de EEUU, en 1921, pues en 1837 el francés Wantzel demostró la imposibilidad de trisecar un ángulo arbitrario. Este personaje ha llegado incluso a reclamar que existe una conspiración en su contra por parte de los matemáticos profesionales. Lógicamente la comunidad matemática ya no presta atención a esta "secta de trisecadores", que se empeña en proporcionar demostraciones tan enrevesadas que incluso resulta difícil encontrar dónde está el error” Collantes (2005).

A veces se agrega a los problemas clásicos, la construcción del heptágono regular Boyer and Pérez (1999)(el primero de los infinitos polígonos regulares imposibles de construir con regla y compás).

“En realidad, estos problemas son generalizaciones de otros problemas ya propuestos por los griegos, teniendo en cuenta que la importancia de su geometría no es sólo el aspecto teórico, sino también en lo práctico; se preocuparon de construir sistemáticamente cada figura que imaginaban. Puesto que cualquier ángulo puede ser bisecado de una manera sencilla, era natural plantearse la trisección. Sí la diagonal de un cuadrado es igual al lado de un cuadrado cuya área es el doble que la del primero, ¿por qué no intentar algo similar con dos cubos?. Y el caso de la cuadratura encaja dentro de un conjunto de problemas muy habituales para los griegos en los

que se debía construir una figura de una forma dada y de área igual a la otra figura dada. Por último el trazado del polígono de siete lados se desprende directamente de la posibilidad real de construir triángulos, cuadrados, pentágonos y hexágonos regulares.

La otra característica particular de estos problemas es la sencillez del enunciado, el cual podría pertenecer de manera perfecta a cualquier libro de enseñanza de nivel primario o secundario, pero sin embargo han interesado a la humanidad durante más de 2000 años. Así, el problema puede ser comprendido por una persona ajena a las matemáticas. Al respecto, es de anotar que su solución está relacionada con la teoría de cuerpos. Se han encontrado numerosas soluciones aproximadas con regla y compás, y soluciones exactas utilizando otros instrumentos. Y aunque se demostró consistentemente que estos problemas no pueden resolverse como pedían los griegos, todavía en nuestros días siguen apareciendo trabajos erróneos que aseguran haber encontrado la verdadera solución” Ayala (2008).

1.3. Euclides

“El matemático Euclides (Grecia, siglo IV-III a.C.) organizó el trabajo de todos los matemáticos que lo habían precedido en una unidad bien estructurada, usando la lógica de Aristóteles y creando un modelo deductivo que por mas de 2000 años se consideró perfecto y que influenció la manera de pensar de la humanidad y también la enseñanza de la geometría en todas las escuelas del mundo.

Nos referimos a los “Elementos”, un compendio que reunió y sistematizó todo el conocimiento matemático presente en su época Boyer and Pérez (1999). Este contó de treces volúmenes dedicados a distintos aspectos de la matemática, pero se centró en una serie de demostraciones realizadas exclusivamente con regla y compás. Así, incluyó más de cien soluciones a diversos problemas geométricos utilizando únicamente esos instrumentos. Empezando por el primer volumen que incluye los teoremas sobre las construcciones básicas actuales, Euclides aplicó un compás que se cierra al separarse de la superficie en la cual se está trabajando: el compás ideal o, desde entonces, el compás euclídeo” Ayala (2008).

Los Elementos coronan una tradición de tratados elementales hoy desaparecidos. Parece ser que los primeros tratados elementales consistían en principios instrumentales, asunciones que aglutinaban un núcleo de resultados o proposiciones conocidas en torno a una cuestión determinada. Todo esto hasta llegar a unos “elementos” fundados en principios y asunciones que tejen un cuerpo de conocimientos como una teoría deductiva. Esto es una conjectura, ya que no hay pruebas documentales por la desaparición de los tratados anteriores al de Euclides. Es así, que la solución mediante regla y compás de dos problemas recogidos en el libro I (I. 12- Construir la recta perpendicular a otra por un punto exterior; I. 23- Transportar un ángulo sobre una semirrecta), se le atribuye a un matemáticos del V a.C., por tanto la con-

tribución plasmada en dicho tratado se reduciría a la explicitación de los supuestos de este antiguo método.

Además, y más allá del aspecto teórico, Euclides apuntó a lo práctico: construyó sistemáticamente cada figura que imaginaba y determinó que a partir de un determinado polígono, mediante un simple proceso de bisección, era posible construir otro polígono con el doble de lados.

1.4. Problemas planos, sólidos y lineales

Los geómetras griegos, de acuerdo a las fuentes que nos permiten conocer su obra, habían llegado a distinguir tres tipos de problemas:

- los planos¹, para cuya solución bastaban rectas y circunferencias. Son las únicas que se pueden solucionar con regla y compás;
- los sólidos, que suponían el uso de secciones cónicas;
- los lineales, que requerían curvas más complicadas llamadas *curvas mecánicas* porque se necesitaba cierto mecanismo especial para construirla (espiral, cuadratriz, etc.).

Algunas bibliografías como Boyer and Pérez (1999) aseguran que esta primera clasificación se expuso en el libro III de “Colección matemática” de Pappus (s. III d.C.). El criterio elegido fue el tipo de curvas necesarias para encontrar la solución de cada problema.

La segunda clasificación apareció en 1637 cuando René Descartes (Francia, 1596-1650) publicó su obra llamada “La geometría”. Allí buscó clasificar los problemas para entender lo que había en cada uno de ellos y así saber cómo proceder para resolverlos. El criterio usado se refiere al grado de la ecuación algebraica a la que se llega una vez formulado el problema de la construcción.

Descartes analizó la clasificación de Pappus y determinó que incluso la recta y la circunferencia requieren de algún instrumento para su construcción, por lo cual deben ser consideradas *mecánicas* (Ver Pastor and Babini (2000)). Pero esto implicaría que su construcción dejaba de ser absolutamente segura, por más que dependieran de los instrumentos ideales. Ante esto, concluyó que los instrumentos físicos no tienen ningún valor frente a la precisión matemática del razonamiento y que todas las curvas tienen la misma importancia a la hora de ser utilizadas. Por último, estableció que las curvas geométricas son todas aquellas que pueden expresarse por medio de una ecuación algebraica (de grado finito) en X e Y , con lo que la conoide y la cisoide

¹En la introducción de los “Elementos”, Pappus considera que Euclides ha ofrecido un criterio para identificar los problemas planos: “ \mathcal{A} es un problema plano sólo si es efectivamente soluble por el procedimiento de regla y compás; luego si \mathcal{A} es un problema plano, \mathcal{A} tiene una construcción efectiva sobre la base sentada en los Elementos”. (Euclides 1991, págs. 55-56). (Abrale (2007))

pertenecen a este grupo, mientras que llamó mecánicas a todas las demás curvas, como la espiral y la cuadratriz.

Su clasificación de los problemas geométricos es:

- Si el grado de la ecuación que permite la solución es uno o dos, la construcción puede efectuarse con rectas y circunferencias.
- Si el grado es tres o cuatro, deben emplearse cónicas.
- Y si el grado es superior a cuatro, se requieren curvas más complicadas que las cónicas para hallar la solución.

Con esto, Descartes llegó a que la duplicación del cubo y la trisección del ángulo involucran ecuaciones cúbicas, por lo cual no pueden resolverse únicamente con reglas y compás. La cuadratura del círculo quedó sin clasificar. Sin embargo, es necesario mencionar que sus demostraciones de la imposibilidad de construir los otros dos problemas eran en realidad incorrectas.

1.5. Una curiosidad perdurable en el tiempo

Existieron considerables intentos para la construcción de figuras con regla y compás entre ellas se encuentra: Abul Wefa (Persa del siglo X), que se preocupó por los objetos que podían ser construidos sólo con regla y compás rígido o compás oxidado, un instrumento que permitía trazar circunferencias de único radio prefijado (Ver Collantes (2005)).

Para la época del Renacimiento, Leonardo Da Vinci (Italia, 1452-1519) y otros se preocuparon por este tipo de construcciones sobre todo para intentar inscribir polígonos regulares en una circunferencia. A partir de esto, su utilización se volvió algo común. Se lo empleó para resolver de manera sencilla los problemas que surgían al levantar edificaciones; dentro de los cuales se destacó la construcción del pentágono regular que aparecía con frecuencia en las fortificaciones.

“En 1673, apareció en Ámsterdam un libro anónimo (posteriormente se supo que el autor fue George Mohr), llamado Compendius Euclidis Curiosi que daba un tratamiento serio al problema. Más adelante en Londres, William Leybourn, escribió un libro acerca de “juegos y pasatiempos con regla y tenedor” (un tenedor puede hacer las veces de compás rígido)” Chaparro (2011).

En 1794 el italiano Lorenzo Mascheroni prueba que toda construcción con regla y compás podía ser realizada únicamente con el compás (aunque esto fue un aporte por Mohr). En el siglo XIX el francés Poncelet, demostró que toda construcción con regla y compás puede ser llevada únicamente con regla y compás rígido (o sea un tenedor); y, el suizo Jacob Steiner, prueba que bastaba únicamente con una regla y una circunferencia fija en el papel para realizar las construcciones.

Sólo hasta el siglo XIX, las demostraciones de los teoremas fundamentales sobre ecuaciones polinómicas, la comprensión de los números irracionales y trascendentales, y el álgebra abstracta fueron explicadas a través de la regla y compás, pero hubo otros teoremas que no fueron posibles de explicar a través de estos instrumentos tales como: la construcción de la cuadratura del círculo, la duplicación del cubo y la trisección del ángulo y la construcción del heptágono regular , y el endecágono regular.

La historia muestra, que Napoleón pudo haber demostrado, en el momento en que le propone a Mascheroni la posibilidad de realizar cualquier construcción con regla y compás a partir de una colección infinita de palillos de dientes planos y del mismo tamaño; esta demostración, sólo fue validada en el año de 1939 por Dawson. Para el siglo XX, finalmente se prueba que sólo hacía falta la regla, el centro de la circunferencia y un arco de tamaño arbitrario de la misma.

Por su parte, Gauss, a los 19 años encontró una construcción geométrica para construir el polígono regular de 17 lados (heptadecágono regular), (1796). Euclides proporcionó construcciones, utilizando regla y compás, para polígonos regulares con 3, 5 y 15 lados; también sabía que estos números podían duplicarse repetidamente bisecando ángulos, lo que daba polígonos regulares con 4, 6, 8 y 10 lados, y así sucesivamente, pero no dio construcciones para polígonos de 7 lados, de 9 lados o de cualquier otro número de los recién listados. Durante aproximadamente dos mil años el mundo matemático supuso que Euclides había dicho la última palabra y no se podía construir ningún otro polígono regular. Gauss demostró que no era así. De esta manera se hizo definitivamente con un nombre en la escena científica mundial al demostrar que un polígono regular con un número p de lados, siendo p un número primo de Fermat puede ser construido con regla y compás.

El propio Gauss estaba tan orgulloso de este resultado que pidió que un heptadecágono como el que le sirvió de ejemplo para ilustrar este resultado fuera inscrito en su tumba. Sin embargo el encargado de hacer la lápida se negó a hacerlo porque mantenía que la difícil construcción de este polígono haría que pareciera casi un círculo. En 1796 Gauss demostró que se puede construir un polígono de 17 lados para 5 años después, en 1801, desarrollar la teoría de períodos Gaussianos en su libro “Disquisiciones Aritméticas” Hernández (2006). Esta teoría le permitió formular una condición suficiente para demostrar qué polígonos regulares se pueden construir con regla y compás y cuáles no. En 1837, Wantzel probó que también la anterior condición es necesaria, cosa que Gauss creyó también pero de la que no dio demostración alguna.

En la actualidad solo se saben construir de forma exacta 5 polígonos regulares, tales que el número de sus lados, n , sea un número primo ($n = 3, 5, 17, 257$ y $65,537$ y se sospecha que no existen más), el de 257 lados lo construyó Richelot en 1832 y el de 65.537, De Lingen en 1894.

Pierre Laurent Wantzel (1814 – 1848) fue un matemático francés nacido en París que en 1837 publicó su obra “Recherches sur le moyens de reconnaître si un Problème

Géométrie peut sé résoudre avec la règle et le compas” en el prestigioso Journal de Mathématiques Pures et Appliquées. En esta obra, Wantzel da respuesta a los problemas de la duplicación del cubo, la trisección del ángulo y la construcción de polígonos regulares con regla y compás. Para ello lo que hace es abordar estos problemas de geometría a través del álgebra. Elabora una teoría por la cual concluye que aquellos problemas de geometría que conducen a la resolución de una ecuación cuyo grado no es una potencia de 2 no pueden ser resueltos con regla y compás, o lo que es lo mismo, como intersección de líneas y círculos (Ver Apéndice A).

El número π tuvo desconcertados a los matemáticos bastante más tiempo que el número e , tanto Lambert como Legendre habían demostrado que tanto π como $\sqrt{\pi}$ eran irracionales, pero estas demostraciones no resolvían el viejo problema de la cuadratura del círculo. El asunto alcanzó al fin su solución definitiva en 1882, en un artículo de Lindenman, “Über die Zahl π ”.

Lo primero que hacía era demostrar que π era un número trascendente. Si los coeficientes de la ecuación:

$$ax^n + bx^{n-1} + \dots + px + q = 0$$

son números enteros a, b, \dots, p, q , y $n > 2$, entonces las raíces de la ecuación no se pueden en general construir por métodos euclídeos. Las raíces de una ecuación algebraica de este tipo, siendo $n > 0$, reciben el nombre de “números algebraicos”. Y como todo número racional es raíz de una ecuación tal, con $n = 1$, surge de manera natural la cuestión de si todo número irracional será o no raíz de una ecuación de esta forma, para algún $n \geq 2$. La respuesta negativa a esta pregunta la dio finalmente Liouville en 1844, al construir una amplia clase de números reales no algebraicos. Este tipo de números se llamó “números trascendentes”.

En su demostración continuaba con la demostración que la ecuación $e^{ix} + 1 = 0$ no se verifica para x algebraico, ahora bien, como Euler había demostrado que $x = \pi$ satisface la ecuación, la única posibilidad es que π no sea algebraico. Aquí estaba por fin la respuesta definitiva al clásico problema de la cuadratura del círculo. Para que la cuadratura del círculo fuera posible con una raíz expresable por medio de raíces cuadradas. Dado que π no es algebraico, el círculo no es cuadradable con regla y compás según las reglas clásicas (Chaparro (2011)).

2. Construcciones Elementales

2.1. Los Instrumentos

Las construcciones con regla y compás consisten en el trazado de rectas y circunferencias y la determinación de puntos de intersección entre las mismas a partir del uso exclusivo de una regla y un compás ideales o teóricos. Este adjetivo se refiere a que estos son idealizaciones de las reglas y compases del mundo real. Son conceptos matemáticos abstractos, no son instrumentos físicos. Representan la perfección de la mente y deben utilizarse para crear construcciones ideales las cuales son tan concluyentes como el álgebra (Collantes (2005)). Es importante destacar que las construcciones con regla y compás no tienen por objetivo la realización efectiva de la construcción, sino mostrar por un encadenamiento lógico de proposiciones que algo es construible con regla y compás. El verbo *trazar* se refiere, también, a un ente abstracto, pues es humanamente imposible el trazado, por ejemplo, de una recta. Es decir, con regla y con compás, nos referiremos a procedimientos teóricos, no concretos ni prácticos. Hecha esta aclaración estamos en condiciones de caracterizar tales instrumentos:

- La *regla* es un instrumento para trazar una recta, dados dos puntos diferentes. Podemos decir intuitivamente que la *regla* es "infinitamente larga" (es decir, puede prolongar una recta tanto como se quiera), carece de marcas que permitan medir con ella, y sólo tiene un borde. Puede usarse sólo con un fin : trazar una recta entre dos puntos que ya existan en el papel, o bien "prolongar" (tanto como se deseé) una de esas rectas.
- El *compás* (o *compás antiguo*¹) solamente traza circunferencias (perfectas) entre puntos dados o construidos de antemano, usando uno de los puntos como centro y el otro como un punto por donde pasa la misma. Intuitivamente, tiene la particularidad de que se cierra al instante de separarse del papel, "*olvidando*" el último radio utilizado. Esto impide repetir o reutilizar una abertura predeterminada entre sus puntas y trasladar distancias de manera directa (Ivorra (2009)).

¹A diferencia de éste, el compás denominado compás Moderno conserva su abertura y por tanto puede utilizarse para transportar distancias (Abrate (2007)). (Ver Sección 2.4)

2.2. Construcciones Básicas

Es claro que a partir de un único punto es imposible realizar construcción alguna. El menor número de puntos para iniciar una construcción es dos. Una construcción a partir de dos puntos es una construcción *absoluta* (Ivorra (2009)).

Ejemplo 1. Dados los puntos O y U encontrar un punto A tal que U sea punto medio del segmento \overline{OA} .

Una construcción que acepte como datos más de dos puntos es una construcción *relativa* a los datos.

Ejemplo 2. Dada una recta² r y un punto P exterior a dicha recta, determinar tres puntos distintos que pertenezcan a la parábola de foco P y de directriz r .

Llamaremos construcciones básicas a las siguientes cinco construcciones:

1. Trazar la recta que pasa por dos puntos.
2. Trazar la circunferencia con centro en un punto y que pasa por otro punto.
3. Determinar el punto de intersección de dos rectas.
4. Determinar el punto de intersección de una circunferencia con una recta.
5. Determinar el punto de intersección de dos circunferencias.

2.3. Ejemplos de construcciones elementales

Todas las construcciones elementales con regla y compás se logran a partir de sucesivas aplicaciones de las cinco *construcciones básicas*. Y estas, a su vez, utilizan los puntos construidos en los pasos anteriores. Las construcciones elementales se usan en el sentido de los *teoremas de existencia* (Abrate (2007)), o sea para demostrar que algunas entidades existen realmente. Para agilizar la justificación de las construcciones, exponemos dos teoremas sencillos, uno referido a las propiedades del rombo³ y otro referido a los polígonos regulares.

Teorema 3. *Un rombo es un paralelogramo. Las diagonales de un rombo se bisecan en ángulo recto y están sobre las bisectrices de los ángulos (interiores) del rombo. Además, si uno de sus ángulos interiores es recto, es un cuadrado.*

²Cuando se da un objeto geométrico como una recta, se da la posibilidad de decidir qué puntos están en relación de incidencia con dicha recta, es decir, se da el conocimiento de los puntos que están en ella y de los que no. Por ejemplo, se puede tomar un punto cualquiera de la recta, o tomar uno cualquiera que no esté en la misma; lo que no significa que se tenga determinado algún punto sobre ella. Así también, si se da un segmento, se conocen los extremos, pero **no** el punto medio.

³Rombo es un cuadrilátero con sus cuatro lados congruentes

Demostración. Sea el rombo $ABCD$ como el de la Figura 2.1.

El triángulo ABC es congruente con el ACD por la definición de rombo por el criterio de congruencia de triángulos LLL . Además ABC y ACD son isósceles y por lo tanto

$$\widehat{BAC} \equiv \widehat{BCA} \equiv \widehat{DAC} \equiv \widehat{DCA} \quad (2.1)$$

Con razonamientos similares

$$\widehat{ABD} \equiv \widehat{ADB} \equiv \widehat{CBD} \equiv \widehat{CDB} \quad (2.2)$$

En consecuencia \overline{BC} y \overline{AD} son paralelos pues Ecuación 2.1 o Ecuación 2.2 son ángulos alternos internos de dos rectas cortadas por una transversal. Por las mismas razones expuestas queda que los segmentos \overline{AC} y \overline{BD} están sobre las bisectrices interiores de los ángulos interiores del rombo. Sea E la intersección de las diagonales. Como AB y BC son congruentes por definición de rombo, y $\widehat{BAC} \equiv \widehat{BCA}$ por la Ecuación 2.1, y $\widehat{ABE} \equiv \widehat{CBE}$ pues BE es la bisectriz de \widehat{ABC} , los triángulos ABE y CBE son congruentes. Por esto los ángulos nombrados con vértice en E son rectos y E es punto medio de \overline{AC} . Por último, si el ángulo con vértice en A es recto en virtud de Ecuación 2.1, el ángulo con vértice en C también es recto; y por Ecuación 2.2, los ángulos con vértice en D y B son rectos.

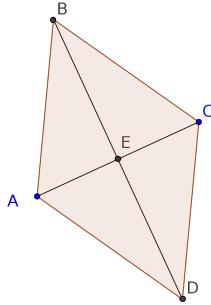


Figura 2.1.: Rombo

□

2.3.1. Triángulo Equilátero (dado un lado)

Construcción 2.3.1. Sea el segmento \overline{AB} . Con centro en A , trazamos la circunferencia \mathcal{C}_1 que pasa por B y también la circunferencia \mathcal{C}_2 con centro en B que pasa por A . Cualquiera de las intersecciones de \mathcal{C}_1 y \mathcal{C}_2 puede ser tomado como el tercer vértice del triángulo equilátero de lado \overline{AB} (Ver Figura 2.2).

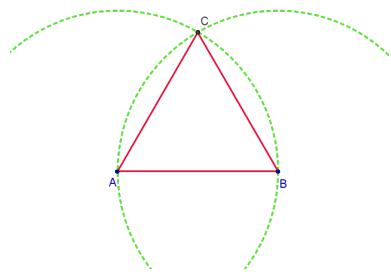


Figura 2.2.: Construcción de un triángulo equilátero dado un lado

Justificación: Notemos lo siguiente, si llamamos C a una de las intersecciones entre \mathcal{C}_1 y \mathcal{C}_2 , $\overline{AC} \equiv \overline{AB}$ (son radios de la circunferencia \mathcal{C}_1) y $\overline{AB} \equiv \overline{BC}$ (son radios de \mathcal{C}_2). Luego, por la transitividad de la congruencia, puede deducirse que:

$$\overline{AB} \equiv \overline{BC} \equiv \overline{AC}$$

Así, el triángulo de vértices A , B y C es equilátero.

2.3.2. Mediatriz de un segmento

Construcción 2.3.2. Sea el segmento \overline{AB} . Con centro en A , trazamos la circunferencia \mathcal{C}_1 que pasa por B y también la circunferencia \mathcal{C}_2 con centro en B que pasa por A . Sean C y D los puntos de intersección de \mathcal{C}_1 y \mathcal{C}_2 . CD es la recta mediatrix del segmento inicial (Ver Figura 2.3).

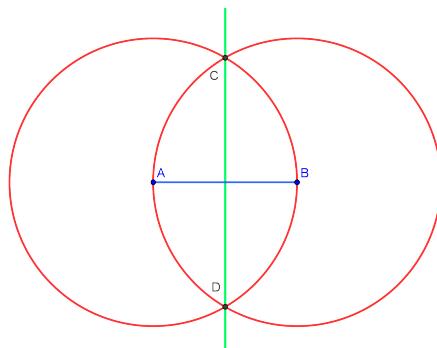


Figura 2.3.: Construcción de la mediatrix de un segmento

Justificación: Notemos que $ACBD$ es un rombo y por Teorema 3, CD es la mediatrix de AB . (Ver Figura 2.4)

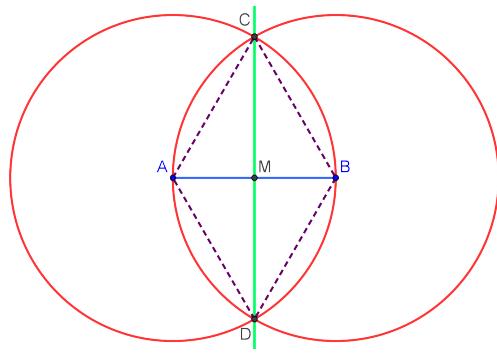


Figura 2.4.: Justificación de la construcción (Subsección 2.3.2)

Es preciso destacar que, a partir de la construcción de la mediatrix de un segmento es posible construir el punto medio del mismo (Ver Ejemplo 1).

2.3.3. Perpendicular a una recta dada

2.3.3.1. Por un punto de la recta

Construcción 2.3.3. Sea $r = AP$ la recta dada. Con centro en P tracemos una circunferencia \mathcal{C}_1 que pase por A . Llaremos B a la intersección de r y \mathcal{C}_1 . Luego tracemos la mediatrix m de \overline{AB} . Esta recta es la perpendicular a r por P (Ver Figura 2.5).

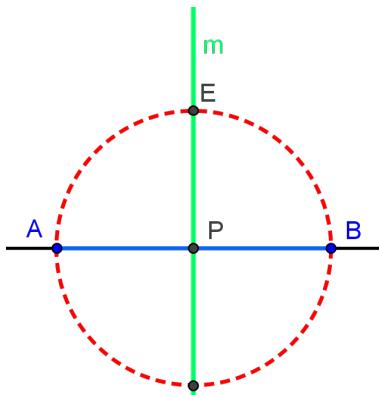


Figura 2.5.: Perpendicular a una recta por un punto sobre la misma

Justificación: P es punto medio de AB , entonces m pasa por P y es perpendicular a r .

2.3.3.2. Por un punto exterior a la recta

Sea r la recta dada, y sea C un punto *exterior* a esta. Tracemos una circunferencia \mathcal{C}_1 con centro en C que pase por un punto de r .

Construcción 2.3.4. Si la intersección entre \mathcal{C}_1 y r es un único punto, entonces r es tangente a \mathcal{C}_1 . Llamemos A el punto de tangencia. La recta CA es la perpendicular a r por C (Ver Figura 2.6).

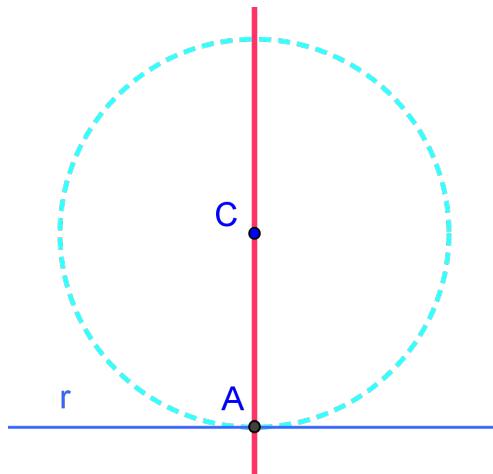


Figura 2.6.: Construcción de la perpendicular a una recta por un punto exterior (caso 1)

Justificación: La tangente a una circunferencia es perpendicular al radio por el punto de tangencia.

Construcción 2.3.5. Si la intersección entre \mathcal{C}_1 y r son dos puntos distintos, llamemos A y B a tales puntos. Luego tracemos la mediatriz m del segmento \overline{AB} (es decir, con centro en A tracemos una circunferencia \mathcal{C}_2 que pase por B y con centro en B una \mathcal{C}_3 que pase por A), dicha recta es la perpendicular a r por C (Ver Figura 2.7)

Justificación: Dado que $\overline{CA} \equiv \overline{CB}$ (pues son radios de \mathcal{C}_1), se deduce que $C \in m$, luego por la unicidad de la perpendicular a una recta por un punto, concluimos que m es la perpendicular a r por C .

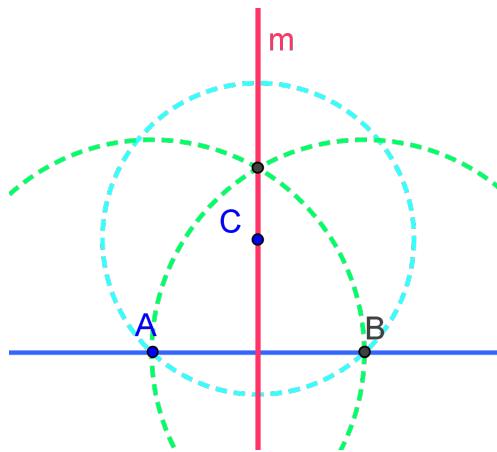


Figura 2.7.: Construcción de la perpendicular a una recta por un punto exterior (caso 2)

2.3.4. Paralela a una recta dada

Construcción 2.3.6. Sea r la recta que pasa por A y B (distintos), y sea C un punto exterior a r . Construir la paralela a una recta dada se reduce a construir un rombo tal que uno de sus lados este contenido en la recta dada y el punto, exterior a la misma, sea un vértice de dicho rombo. Ahora bien, con centro en A tracemos una circunferencia \mathcal{C}_1 que pase por C . Llámese D al punto de intersección de \mathcal{C}_1 con r . Ahora, con centro en D y C tracemos las circunferencias \mathcal{C}_2 y \mathcal{C}_3 que pasen por A . Llámese E a la otra intersección de \mathcal{C}_2 y \mathcal{C}_3 . La recta que pasa por C y E es paralela por C a la recta r (Ver Figura 2.8).

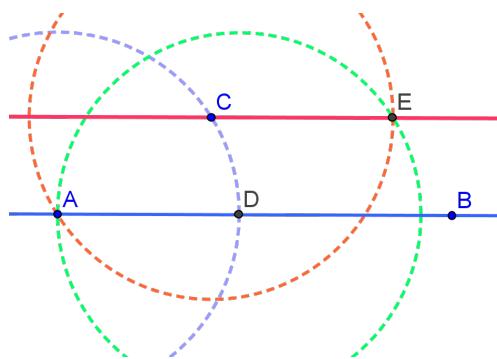


Figura 2.8.: Construcción de la paralela a una recta por un punto exterior a la misma

Justificación: El cuadrilátero de vértices A, D, E, C es un rombo, y por Teorema 3 sus lados opuestos \overline{AD} y \overline{CE} están contenidos en rectas paralelas.

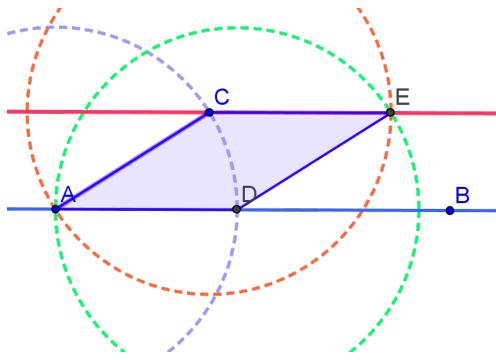


Figura 2.9.: Justificación de la construcción (Subsección 2.3.4)

2.3.5. Cuadrado (dado un lado)

Construcción 2.3.7. Sea \overline{AB} el lado del cuadrado a construir. Con centro en A tracemos una circunferencia \mathcal{C}_1 que pase por B , y por el punto A , la recta s , perpendicular a AB . Llamemos C a la intersección de \mathcal{C}_1 y s . Con centro en C tracemos una circunferencia \mathcal{C}_2 que pase por A , y con centro en B una circunferencia \mathcal{C}_3 que también pase por A . Llamemos D a la intersección distinta de A entre \mathcal{C}_2 y \mathcal{C}_3 . Los puntos A, B, D y C son los vértices de un cuadrado de lado \overline{AB} (Ver Figura 2.10).

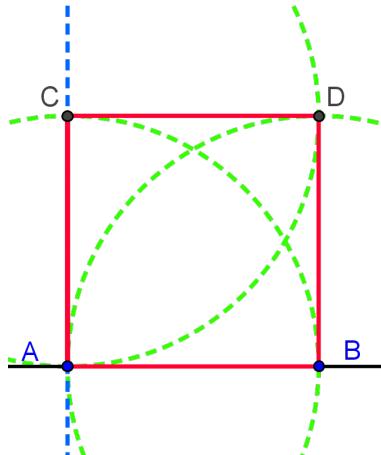


Figura 2.10.: Construcción de un cuadrado dado un lado.

Justificación: Es claro que $\overline{AC} \equiv \overline{CD} \equiv \overline{DB} \equiv \overline{BA}$, puesto que son radios de una misma circunferencia o de circunferencias congruentes. Por lo tanto, el cuadrilátero de vértices A, C, D y B es un rombo. Además, el ángulo en A es recto, entonces por Teorema 3 el cuadrilátero $ACDB$ es un cuadrado.

2.3.6. Bisectriz de un ángulo

Construcción 2.3.8. Sea \widehat{BAC} un ángulo. Con centro en A trazamos una circunferencia \mathcal{C}_1 , que pase por B . Sea D la intersección con el otro lado del ángulo. Luego, tracemos las circunferencias \mathcal{C}_2 y \mathcal{C}_3 con centros en B y D respectivamente que pasen por A . Sea E la intersección entre \mathcal{C}_2 y \mathcal{C}_3 distinta de A . La semirrecta, con origen en A que pasa por E es la bisectriz de dicho ángulo \widehat{BAC} (Ver Figura 2.11).

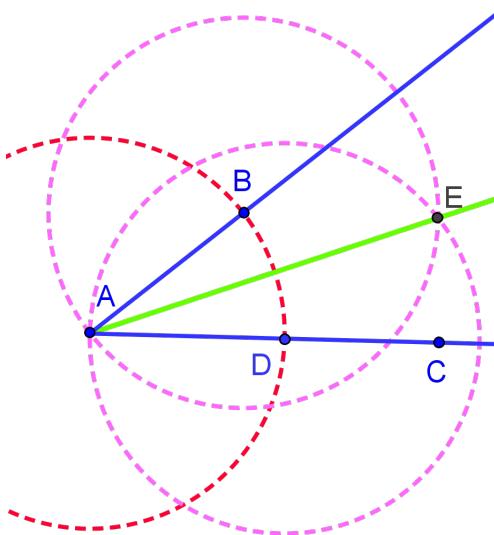


Figura 2.11.: Construcción de la bisectriz de un ángulo

Justificación: Para justificar que la semirrecta AE es bisectriz del ángulo \widehat{BAC} , tengamos en cuenta lo siguiente (Ver Figura 2.12) :

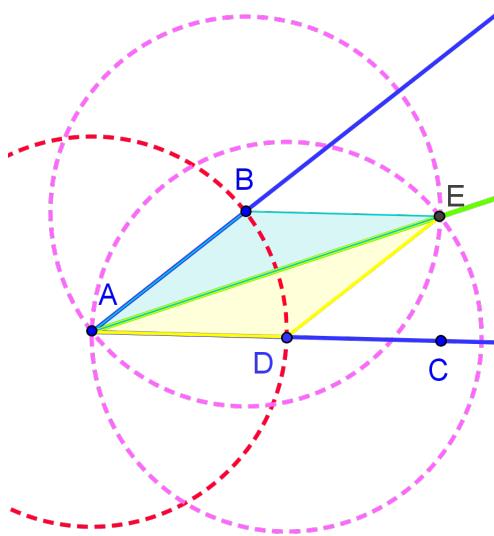


Figura 2.12.: Justificación de la construcción de la Subsección 2.3.6

Todas las circunferencias usadas en esta construcción son congruentes, luego $ABED$ es un rombo. Por Teorema 3, AE está sobre la bisectriz de \widehat{BED} .

2.3.7. División de un segmento en n partes iguales

Construcción 2.3.9. Sea el segmento \overline{AB} . Sea P_1 un punto que no está en la recta AB . Tracemos la semirrecta a de origen A que pasa por P_1 . Con centro en P_1 trazamos la circunferencia \mathcal{C}_1 que pasa por A . Sea P_2 el otro punto de intersección de a con \mathcal{C}_1 . Luego, con centro en P_2 trazamos la circunferencia \mathcal{C}_2 , que pasa por P_1 . \mathcal{C}_2 cortará a a en otro punto, P_3 . Continuamos con el proceso hasta que hayamos construido sobre r , n puntos (Ver (Figura 2.13)).

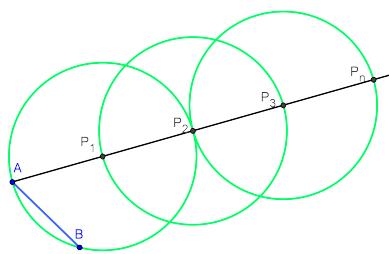


Figura 2.13.:

Ahora trazamos el segmento que une P_n con B y las rectas paralelas a éste que pasan

por cada uno de los puntos obtenidos en la semirrecta a y que corten al segmento \overline{AB} .

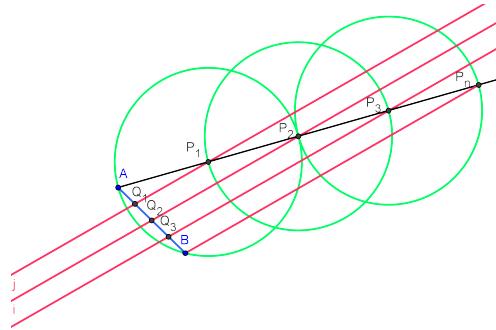


Figura 2.14.: División de un segmento en n partes iguales

Así conseguimos dividirlo en n partes iguales.

Justificación: Para justificar que $\overline{AQ_1} \equiv \overline{Q_1Q_2} \equiv \dots \equiv \overline{Q_{n-2}Q_{n-1}} \equiv \overline{Q_{n-1}B}$ vamos a tener en cuenta el hecho de que los puntos Q_1, Q_2, \dots, Q_{n-1} en AB son las proyecciones paralelas de los puntos P_1, P_2, \dots, P_{n-1} en a . Si consideramos el sistema de abscisas asociado al par (A, P_n) , el sistema de abscisa asociado al par (A, B) será la proyección paralela del mismo, y en consecuencia los puntos Q_1, Q_2, \dots, Q_{n-1} tendrán las mismas abscisa que los puntos P_1, P_2, \dots, P_{n-1} con lo que podemos concluir que si

$$\overline{AP_1} \equiv \overline{P_1P_2} \equiv \dots \equiv \overline{P_{n-2}P_{n-1}} \equiv \overline{P_{n-1}P_n}$$

también se cumplirá que

$$\overline{AQ_1} \equiv \overline{Q_1Q_2} \equiv \dots \equiv \overline{Q_{n-2}Q_{n-1}} \equiv \overline{Q_{n-1}B}$$

2.3.8. Polígonos regulares (dada la circunferencia que lo inscribe)

En esta subsección haremos construcciones de algunos polígonos regulares a partir de las construcciones básicas. El problema lo consideraremos terminado cuando hayamos encontrado los vértices del polígono buscado. En todos los casos tendremos como dato el punto A centro de la circunferencia que circunscribe a los distintos polígonos y un punto B por donde ella pasa.

Entendemos como polígonos regulares a los polígonos convexos que tienen todos sus ángulos interiores congruentes y sus lados congruentes. Para agilizar la justificación de estas construcciones nos referiremos al siguiente

Teorema 4. Los polígonos regulares están inscriptos en una circunferencia. Los arcos que dos vértices sucesivos determinan sobre dicha circunferencia son congruentes y su amplitud es $\frac{2\pi}{n}$. Recíprocamente, si un polígono está inscripto en una circunferencia y dos vértices consecutivos determinan arcos congruentes, el polígono es regular.

Demostración. Sean P_1, \dots, P_n los vértices de un polígono. Sea b_i la bisectriz de $\widehat{P_{i-1}P_iP_{i+1}}$, b_1 la bisectriz de $\widehat{P_nP_1P_2}$ y b_n la bisectriz de $\widehat{P_{n-1}P_nP_1}$. Por ser el polígono convexo, b_1 y b_2 se contarán en un punto O . Como los ángulos en P_1 y P_2 del triángulo P_1P_2O son congruentes, P_1P_2O es isósceles. Los triángulos P_1P_2O y P_2P_3O son congruentes por el criterio *LAL* ya que P_2O es común, b_2 es bisectriz de $\widehat{P_1P_2P_3}$ y $\overline{P_1P_2} \equiv \overline{P_2P_3}$. Se deduce que $\overline{P_1O} \equiv \overline{P_2O} \equiv \overline{P_3O}$ y $\widehat{P_1OP_2} \equiv \widehat{P_2OP_3}$. Repitiendo este argumente se llega a que

$$\overline{P_1O} \equiv \cdots \equiv \overline{P_nO} \quad (2.3)$$

y $\widehat{P_1OP_2} \equiv \cdots \equiv \widehat{P_{n-1}OP_n}$. Por último, mediante el criterio *LLL*, los triángulos P_1P_2O y P_nP_1O son congruentes, ya que $\overline{P_1O} \equiv \overline{P_nO}$, $\overline{P_1O}$ es un lado común y $\overline{P_1P_2} \equiv \overline{P_nP_1}$. En definitiva

$$\widehat{P_1OP_2} \equiv \cdots \equiv \widehat{P_nOP_1} \quad (2.4)$$

El resultado de la Ecuación 2.3 indica que todos los vértices del polígono están sobre una circunferencia de centro O , y la Ecuación 2.4 indica que los arcos tienen la misma amplitud $2\pi/n$.

Para probar el recíproco, sea \mathcal{C} la circunferencia de centro O y que pasa por P_1, \dots, P_n . Por el criterio *LAL*

$$P_1OP_2 \equiv \cdots \equiv P_nOP_1.$$

Entonces los ángulos en O son todos congruentes. \square

El Teorema 4 permite definir de manera natural el centro y el ángulo central de un polígono. También, nos permite considerar terminada la construcción de un polígono regular, cuando hayamos encontrado los vértices de dicho polígono o uno de sus ángulos centrales. En todos los casos tendremos como dato el centro de la circunferencia que circunscribe a los distintos polígonos.

2.3.8.1. Triángulo Equilátero

Construcción 2.3.10. Sean A y B dos puntos. Sea \mathcal{C}_1 la circunferencia con centro en A que pasa por B y \mathcal{C}_2 la circunferencia con centro en B que pasa por A . Llámemos D y E a las intersecciones entre \mathcal{C}_1 y \mathcal{C}_2 . Luego, con centro en D tracemos una circunferencia \mathcal{C}_3 que pase por E y llamemos C a la intersección de \mathcal{C}_1 y \mathcal{C}_3 distinta de E . Los puntos C, D y E son los vértices de un triángulo equilátero inscripto en \mathcal{C}_1 (Ver Figura 2.15).

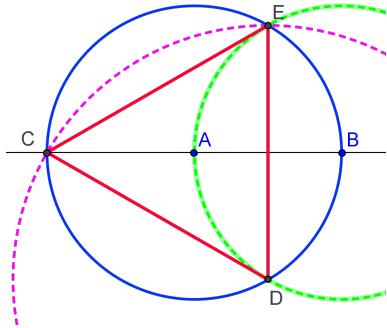


Figura 2.15.: Construcción de un triángulo equilátero

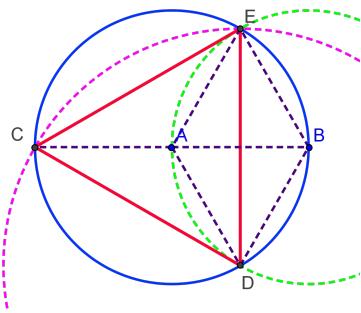


Figura 2.16.: Justificación de la construcción de la Subsubsección 2.3.8.1

Justificación: Tengamos en cuenta las siguientes congruencias de triángulos (Ver Figura 2.16):

Por criterio *LLL*,

$$ABE \equiv ABD$$

y además equiláteros. Por lo tanto

$$\widehat{EAD} = \frac{2}{3}\pi \quad (2.5)$$

Por Teorema 4 el triángulo ECD es equilátero.

2.3.8.2. Polígonos regulares de 3×2^n lados, con $n > 0$.

Los polígonos como el hexágono ($n = 1$) o el dodecágono ($n = 2$), son ejemplos de este tipo (Ver Figura 2.17).

Construcción 2.3.11. El polígono de cantidad de lados 3×2^n se obtiene, simplemente, trazando la bisectriz de los ángulos centrales del polígono de $3 \times 2^{n-1}$ lados y marcando las intersecciones de éstas con la circunferencia en la que está inscripto (Ver Figura 2.17).

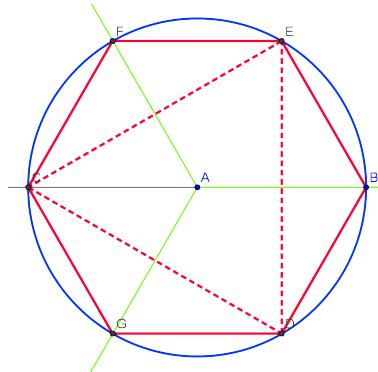


Figura 2.17.: Construcción de polígonos regulares de 3×2^n lados

2.3.8.3. Cuadrado

Construcción 2.3.12. Sean A y B dos puntos. Sea \mathcal{C}_1 la circunferencia con centro en A que pasa por B y r la recta que pasa por ambos puntos. Llamemos C al punto de intersección de \mathcal{C}_1 y r . Luego, tracemos por A la perpendicular s a r y llamemos D y E a las intersecciones de s con \mathcal{C}_1 . Los puntos B , D , C y E son los vértices de un cuadrado inscripto en \mathcal{C}_1 (Ver Figura 2.18).

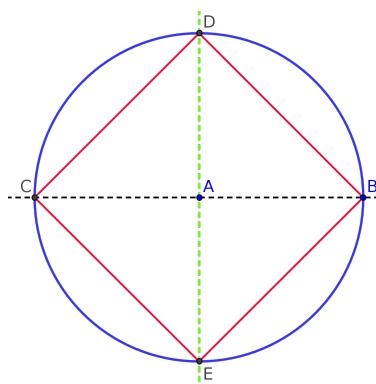


Figura 2.18.: Construcción de un cuadrado

Justificación: El ángulo central es recto. Se aplica Teorema 4

2.3.8.4. Polígonos regulares de 4×2^n lados, con $n > 0$.

Construcción 2.3.13. Se obtiene de la misma forma que Subsubsección 2.3.8.2 (Ver Figura 2.19)

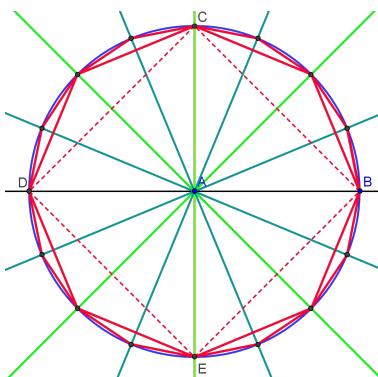


Figura 2.19.: Construcción de polígonos regulares de 4×2^n lados

Ya vimos que los polígonos de 3, 6, 12, 24, ... lados son construibles con regla y compás. Y también los de 4, 8, 16, 32, ... lados. Pero, ¿el pentágono regular? ¿y los demás?. La pregunta concreta es: ¿Para qué valores de n se puede construir un polígono regular de n lados con regla y compás?, este interrogante será respondido en los capítulos siguientes.

2.4. Equivalencia entre el compás antiguo y el compás moderno

Puede parecer que el compás moderno es más potente que el compás antiguo pero no es así. “En Eves H. (1969) se encuentra una referencia al respecto, se indica que cualquier construcción que pueda efectuarse con un compás moderno también puede llevarse a cabo (tal vez por un camino más largo) por el compás antiguo” (Abrate (2007)). En otras palabras, el compás antiguo y el moderno resultan equivalentes. Para probar esto, es suficiente probar que podemos con el compás antiguo construir una circunferencia dados un centro y un radio. En efecto si es posible transportar un segmento sobre una semirrecta dada se demuestra la equivalencia de los mismos, ya que a partir de esto podemos usar el compás como transportador de segmentos. Esto permite en forma teórica transportar distancias; no sólo nos da la posibilidad de transportar un segmento, sino que además nos habilita a transportar una circunferencia (transportar una circunferencia es construir una circunferencia con centro en un punto dado y el mismo radio que el de la circunferencia dada) y a construir una circunferencia dados un centro y un radio. A partir de este resultado el “compás antiguo” puede materializarse por nuestro compás físico, el compás moderno.

2.4.1. Transporte de Segmentos

Construcción 2.4.1. Para esta construcción partiremos de un segmento \overline{AB} y una semirrecta a , de origen C dada:

Si uno de los extremos del segmento es el origen de la semirrecta dada, la construcción es inmediata.

Sea B el punto más alejado de C que A (Ver Figura 2.20). Tracemos las circunferencias \mathcal{C}_1 y \mathcal{C}_2 de radio BC con centros en B y C respectivamente. Llámese F y E las intersecciones entre \mathcal{C}_1 y \mathcal{C}_2 . Con centro en B tracemos una circunferencia \mathcal{C}_3 que pase por A . Tomemos uno de los puntos de intersección de \mathcal{C}_2 y \mathcal{C}_3 , y le llamemos G . Tracemos una circunferencia \mathcal{C}_4 de centro F que pase por G . Sea H el punto de intersección de \mathcal{C}_1 con \mathcal{C}_4 , mas cercano a C . Tracemos una circunferencia \mathcal{C}_5 de centro C que pase por H . Sea D el punto de intersección de \mathcal{C}_5 con a . El segmento CD es congruente con AB .

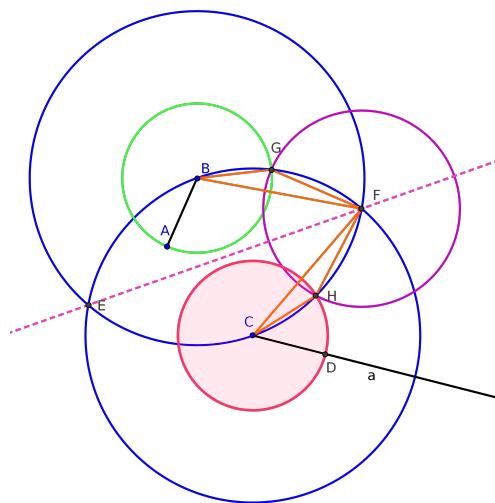


Figura 2.20.: Transporte de segmentos

justificación: Los segmentos GF y FH son congruentes pues son radios de una circunferencia. Los ángulos \widehat{FCH} y \widehat{FBG} son congruentes porque subtienen cuerdas congruentes de circunferencias congruentes desde el mismo lado del centro. Los ángulos \widehat{FHC} y \widehat{FBG} son congruentes porque subtienen cuerdas congruentes de circunferencias congruentes desde el otro lado del centro. Por el criterio *ALA*, los triángulos FCH y FBG son congruentes. En consecuencia, $BG \equiv HC$.

3. De la Geometría al Álgebra

Los problemas planteados por los griegos no tuvieron respuesta por más de 2000 años, hasta que tuvieron una formulación algebraica. En esta sección estudiaremos las construcciones con regla y compás desde el Álgebra, por lo que será necesario introducir algunos conceptos de la teoría de cuerpos.

3.1. Algunos conceptos de la teoría de extensiones de cuerpos

Definición 5. Dados dos cuerpos K y K' , se dice que K' es una extensión de K si $K \subset K'$.

Nos centraremos únicamente en las extensiones de la forma $K' = K(x)$, esto es, el menor cuerpo que contenga a K y a x , siendo x un elemento que no pertenezca a K (si perteneciese, entonces $K(x) = K$).

Definición 6. Se define el grado de una extensión $K \subset K'$ y se simboliza por $|K' : K|$ como la dimensión de K' considerado como espacio vectorial sobre K . Una extensión de cuerpos se dice finita o infinita dependiendo del grado (Ver Ivorra (2012)).

Es fácil probar que si la extensión es de la forma $K \subset K(x)$ el grado coincide con el grado del polinomio irreducible con coeficientes en K que verifica x . Redondo (2004)

Ejemplo 7. Consideremos el cuerpo \mathbb{Q} , y el elemento $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. Entonces tenemos la extensión $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$, que será de grado 2, pues cualquier elemento de este nuevo cuerpo será de la forma $a + b\sqrt{2}$ con $a, b \in \mathbb{Q}$ (una base estaría formada por 1 y $\sqrt{2}$). Además, observemos que verifica el polinomio irreducible en \mathbb{Q} , $x^2 - 2 = 0$. Luego la extensión $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ es de grado 2.

Ejemplo 8. Sabemos que i verifica el polinomio irreducible en \mathbb{R} , $x^2 + 1 = 0$, luego la extensión $\mathbb{R} \subset \mathbb{R}(i) = \mathbb{C}$ es de grado dos también.

Definición 9. Los números algebraicos son los números complejos que son solución de alguna ecuación polinómica cuyos coeficientes son números racionales. Si un número no es algebraico es trascendente.

Existen extensiones de cualquier grado. Sin ir más lejos, en 1882 Linderman probó que π es *transcendente*; esto es, no verifica ningún polinomio con coeficientes racionales. Luego la extensión $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\pi)$ es de grado infinito (*extensión transcendente*).

Teorema 10. Sean K , F y H tres cuerpos con $K \subset F \subset H$. Se verifica que

$$|H : K| = |H : F| \cdot |F : K|$$

Definición 11. El grupo de todos los K -automorfismo de F se llama el grupo de Galois de F sobre K y se nota $Aut_K F$.

Definición 12. El cuerpo H se llama el cuerpo fijo de H en F . También notaremos $Fij_F(H) = \{v \in F : \sigma(v) = v, \forall \sigma \in H\}$ donde F es una extensión de K y H un subgrupo de $Aut_K F$.

Definición 13. Sea F una extensión de K tal que el cuerpo fijo del grupo de Galois $Aut_K F$ es el mismo K . Entonces F se dice que es una extensión de Galois de K o que es Galois sobre K .

3.2. Los números construibles

En esta sección seguiremos el desarrollo sugerido por Ivorra (2009).

Consideremos un sistema de referencia ortonormal en un plano euclídeo. Cada punto del plano se corresponde a través de este sistema con un único número complejo. Podemos elegir arbitrariamente los puntos que se corresponden con 0 y 1. Trazamos la recta que contiene a ambos y la perpendicular a ella por 0. La circunferencia de centro 0 y radio 1 corta a estas rectas en los puntos ± 1 y $\pm i$ (Ver Figura 3.1).

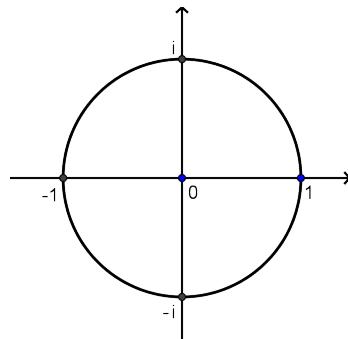


Figura 3.1.: Plano Complejo

Tenemos libertad para decidir quién es i y quién es $-i$. Una vez hecha esta elección, cada punto del plano tiene asignado un único número complejo.

Definición 14. Llamaremos números construibles a los números complejos asociados a puntos del plano construibles con regla y compás (Únicamente a partir de 0 y 1).

Llamaremos \mathcal{C} al conjunto de todos los números complejos construibles.

Ejemplo 15. Podemos construir los números enteros a partir de la elección de los puntos que se corresponden con 0 y 1, trazando una circunferencia con centro en 1 que pase por 0 y a continuación todas las circunferencias con centro en los puntos obtenidos a derecha e izquierda de 1 como intersección de las mismas con la recta que pasa por 0 y 1 (Ver Figura 3.2).

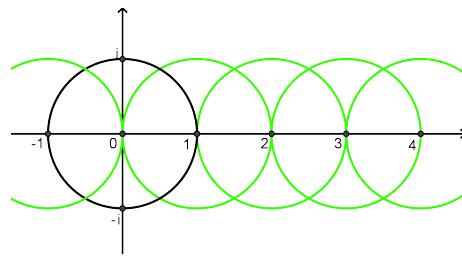


Figura 3.2.: Construcción de los números Enteros

Notemos que si un número real a es construible, también lo es la circunferencia de centro 0 y radio a , y ésta corta al eje imaginario en ai , luego también éste es construible. En general, si $z = a+bi$ es construible, entonces también lo son las rectas que pasan por z perpendiculares a los ejes, es decir que también son construibles los puntos de intersección con los ejes, y en consecuencia los números a y bi , luego a y b son construibles (Ver Figura 3.3).

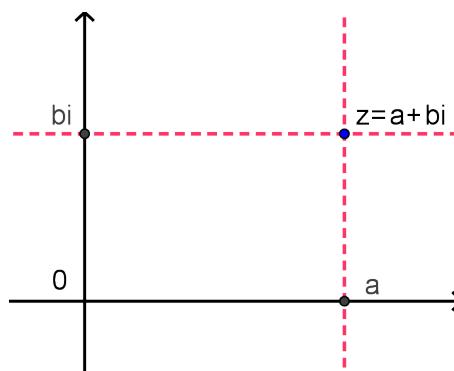


Figura 3.3.: Construcción de $z = a + bi$

El recíproco se prueba igualmente.

Por consiguiente tenemos:

Definición 16. Un número complejo es construible si y sólo si lo son su parte real y su parte imaginaria.

Ahora podemos probar un resultado básico sobre constructibilidad:

Teorema 17. El conjunto \mathcal{C} de los números complejos construibles es un subcuerpo de \mathbb{C} .

Demostración. Veamos en primer lugar que $\mathcal{C} \cap \mathbb{R}$ es un subgrupo de \mathbb{R} , es decir que debe cumplirse que $\forall a, b \in \mathcal{C} \cap \mathbb{R}, a - b \in \mathcal{C} \cap \mathbb{R}$.

Sean $a, b \in \mathcal{C} \cap \mathbb{R}$. Si $b = 0$, entonces $a - b = a \in \mathcal{C} \cap \mathbb{R}$. En otro caso, la circunferencia de centro a y radio $|b|$ es construible y corta al eje real en $a + b$ y $a - b$, luego $a - b \in \mathcal{C} \cap \mathbb{R}$.

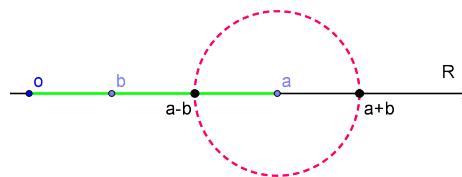


Figura 3.4.: Construcción de $a + b$ y $a - b$

Luego, $\mathcal{C} \cap \mathbb{R}$ es un subgrupo de \mathbb{R} .

Ahora supongamos que $b \neq 0$ y veamos que $ab^{-1} \in \mathcal{C} \cap \mathbb{R}$, lo que probará que es un subcuerpo. Podemos suponer que $a, b > 0$. Usando las construcciones que hemos visto antes es claro que todos los puntos marcados en la figura son construibles.

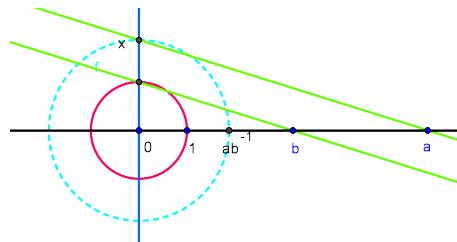


Figura 3.5.: Construcción de ab^{-1}

El teorema de Thales nos da que

$$\frac{x}{1} = \frac{a}{b} \longrightarrow x = ab^{-1}$$

Dados z_1 y z_2 en \mathcal{C} , tenemos que sus partes reales e imaginarias son construibles, de donde se sigue fácilmente, aplicando la parte ya probada, que las partes reales e imaginarias de $z_1 - z_2$ y $z_1 z_2^{-1}$ (si $z_2 \neq 0$) son construibles, luego también lo son estos números y el teorema queda probado. \square

En particular todos los números racionales son construibles, pues \mathbb{Q} es el menor cuerpo contenido en \mathbb{C}

Vamos a dar una caracterización puramente algebraica de los números complejos construibles. Para ello necesitamos un último resultado auxiliar:

Afirmación 18. Las raíces cuadradas de los números construibles son construibles.

Probamos primero que si $a \in \mathcal{C} \cap \mathbb{R}$ y $a > 0$, entonces $\sqrt{a} \in \mathcal{C} \cap \mathbb{R}$.

Si tengo un punto A al cual le corresponde el real a , encontrar un punto al que le corresponda \sqrt{a} se reduce a encontrar un cateto de un triángulo rectángulo cuya hipotenusa tiene longitud $a + \frac{1}{4}$ y un cateto $a - \frac{1}{4}$. Para hacer dicha construcción, trazamos una circunferencia de radio $\frac{1}{4}$ y centro el punto A . Llamamos B y C a los puntos de intersección con la recta que pasa por O y A . Notemos que el real que le corresponde a B es $a - \frac{1}{4}$. Llamamos D al simétrico de O respecto a A . Sea E un punto de la intersección de la circunferencia con centro en B y que pasa por D con la perpendicular a la recta \overleftrightarrow{OA} por O . La longitud del segmento \overline{BE} es igual a la del segmento \overline{BD} , que es igual a $a + \frac{1}{4}$. Por esto la longitud del segmento \overline{OE} es \sqrt{a} Sángari and Perez (2011).

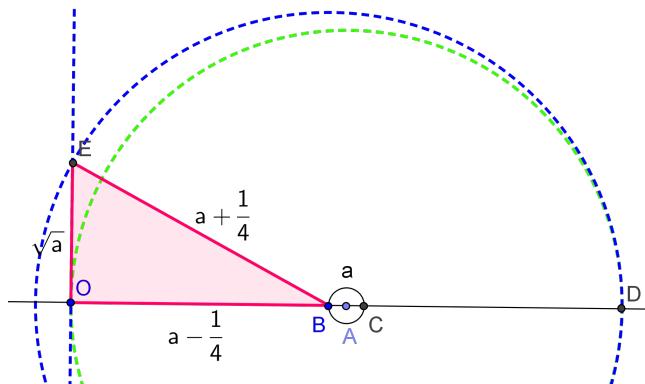


Figura 3.6.: Construcción de la raíz cuadrada de un número real

Teorema 19. Un número complejo z es construible si y sólo si existe una cadena de cuerpos

$$\mathbb{Q} = F_0 \subset F_1 \subset \cdots \subset F_n \subset \mathbb{C}$$

de modo que $|F_{j+1} : F_j| = 2$ y $z \in F_n$.

Demostración. Si z es construible podemos considerar la sucesión de puntos intermedios que se trazan en una construcción de z :

$$z_0 = 0, z_1 = 1, z_2, \dots, z_n = z$$

Así cada z_j se construye directamente a partir de los puntos intermedios anteriores, bien como intersección de dos rectas que pasan por dos de los puntos anteriores,

o bien como intersección de dos circunferencias con centros en dos de los puntos anteriores y radios iguales a las distancias entre dos puntos anteriores o bien como intersección de una recta y una circunferencia en estas mismas condiciones.

Vamos a probar que existe una sucesión de cuerpos

$$\mathbb{Q} = K_0 \subset K_1 \subset \cdots \subset K_n \subset \mathbb{R}$$

tales que $|K_{j+1} : K_j| \leq 2$ y las partes reales e imaginarias de cada z_j están en K_j . Lo demostraremos por inducción. Todo se reduce a probar que si un cuerpo K contiene las partes reales e imaginarias de los puntos anteriores a z_j entonces las partes real e imaginaria de z_j están en K o en una extensión cuadrática de K .

Sea $z_j = (x, y)$. Supongamos que z_j es la intersección de dos rectas que pasan por dos puntos de entre los anteriores, en particular dos puntos con coordenadas en K . La recta que pasa por dos puntos (a, b) y (c, d) en K^2 tiene vector director $v = (c-a, d-b)$, luego está formada por los puntos (x, y) tales que $(x-a, y-b)$ es múltiplo de v o, equivalentemente, tales que

$$\begin{vmatrix} x - a & c - a \\ y - b & d - b \end{vmatrix} = 0$$

Al desarrollar obtenemos una ecuación $Ax + By = C$ con coeficientes en K . Tenemos, pues, que $z_j = (x, y)$ es la solución única de dos ecuaciones de este tipo, y al resolver explícitamente el sistema, obtenemos una expresión de x e y en función de los coeficientes, lo que prueba que ambos están en K .

Supongamos ahora que z_j está en la intersección de una recta que pasa por dos puntos de K^2 y una circunferencia con centro en un punto de K^2 y radio r igual a la distancia entre dos puntos de K^2 . Entonces $r^2 \in K$, luego tenemos que (x, y) satisface las ecuaciones

$$\begin{cases} Ax + By = C \\ x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \end{cases}$$

donde todos los coeficientes están en K . Uno de los coeficientes A o B ha de ser no nulo. Al despejar la variable correspondiente en la primera ecuación y sustituirla en la segunda obtenemos una ecuación de segundo grado con coeficientes en K que ha de tener entre sus soluciones una de las coordenadas de z_j , luego ésta se encuentra en una extensión de $K(\sqrt{\alpha})$ de K , donde α es el discriminante de la ecuación, que está en K . La otra coordenada se despeja de la primera ecuación, luego está también en $K(\sqrt{\alpha})$. Claramente $|K(\sqrt{\alpha}) : K| \leq 2$.

Por último suponemos que z_j está en la intersección de dos circunferencias construibles a partir de los puntos anteriores. Por el mismo razonamiento de antes, sus coordenadas cumplen dos ecuaciones de la forma

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \\ x^2 + y^2 + a'x + b'y + c' = 0 \end{cases}$$

con los coeficientes en K . Restando ambas ecuaciones obtenemos la ecuación

$$(a - a')x + (b - b')y + c - c' = 0$$

que también es satisfecha por las coordenadas de z_j y cuyos coeficientes no pueden ser todos nulos, o si no las dos circunferencias serían la misma. En definitiva tenemos que z_j está también en una recta cuya ecuación tiene sus coeficientes en K y este caso se reduce al anterior.

Tenemos, pues, la sucesión K_j en las condiciones pedidas. Ahora observamos que $z_j \in K_j(i)$ y la sucesión

$$\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}(i) \subseteq K_0(i) \subseteq K_1(i) \subseteq \dots \subseteq K_n(i)$$

cumple las condiciones del teorema.

Recíprocamente, si z cumple las condiciones del enunciado, entonces es claro que $F_{j+1} = F_j(\sqrt{\alpha_j})$ para un cierto $\alpha_j \in F_j$, y si $F_j \subset \mathcal{C}$, entonces $\sqrt{\alpha_j} \in \mathcal{C}$, luego $F_{j+1} \subseteq \mathcal{C}$. Así pues, $z \in F_n$ es construible. \square

Teorema 20. *Si z es un número complejo construible entonces es algebraico y $|\mathbb{Q}(z) : \mathbb{Q}|$ es potencia de 2.*

Esta condición no es en general necesaria, pero tenemos un recíproco parcial:

Teorema 21. *Si K es una extensión finita de Galois de \mathbb{Q} , entonces $K \subset \mathcal{C}$ si y sólo si $|K : \mathbb{Q}|$ es potencia de 2.*

3.3. Los problemas Clásicos

Como hemos visto, para decidir si un problema geométrico se puede resolver mediante construcciones con regla y compás, hay que encontrar una ecuación algebraica equivalente al problema dado, determinar el factor irreducible que corresponde a la solución del problema, y determinar si esa ecuación se puede resolver utilizando raíces cuadradas.

Con este criterio, vamos a demostrar, uno a uno la imposibilidad de los tres problemas Clásicos:

3.3.1. Trisección de un ángulo arbitrario

Utilizando las fórmulas del coseno y del seno de la suma, tengamos en cuenta lo siguiente:

$$\cos(3\alpha) = \cos(2\alpha + \alpha)$$

$$\cos(3\alpha) = \cos(2\alpha)\cos(\alpha) - \sin(2\alpha)\sin(\alpha)$$

$$\cos(3\alpha) = [\cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha)]\cos(\alpha) - [2\sin(\alpha)\cos(\alpha)]\sin(\alpha)$$

$$\cos(3\alpha) = \cos^3(\alpha) - 3\sin^2(\alpha)\cos(\alpha)$$

$$\cos(3\alpha) = \cos^3(\alpha) - 3[1 - \cos^2(\alpha)]\cos(\alpha)$$

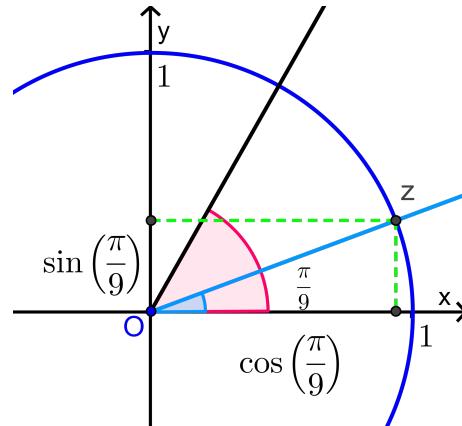
luego:

$$\cos(3\alpha) = 4\cos^3(\alpha) - 3\cos(\alpha) \quad (3.1)$$

Reemplazando $\alpha = \frac{\pi}{9}$ en la Ecuación 3.1, tenemos que

$$4\cos^3\left(\frac{\pi}{9}\right) - 3\cos\left(\frac{\pi}{9}\right) - \frac{1}{2} = 0$$

es decir que el coseno del ángulo $\frac{\pi}{9}$ es raíz del polinomio $f(X) = X^3 - \frac{3}{4}X - \frac{1}{8}$. Este polinomio es irreducible en $\mathbb{Q}(X)$ ya que tiene grado 3 y se puede ver que no tiene raíces en \mathbb{Q} usando el Lema de Gauss¹ con el polinomio $8 \times f$ (las únicas posibles son $\pm 1, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{4}$ y $\pm \frac{1}{8}$, pero ninguna sirve por Criterio de Eisenstein²). Si el ángulo de $\frac{\pi}{3}$ (que ya construimos en Subsubsección 2.3.8.1) se pudiese trisecar, podríamos construir el número complejo $z = \cos\left(\frac{\pi}{9}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{9}\right)$ y el número $\cos\left(\frac{\pi}{9}\right)$ sería construible, pero como es raíz de un polinomio irreducible de grado 3, resulta que $|\mathbb{Q}(\cos(\frac{\pi}{9})) : \mathbb{Q}| = 3$ que no es una potencia de 2, lo que es un absurdo. Luego, el ángulo $\frac{\pi}{3}$ no se puede trisecar por aplicación del Teorema 21.



3.3.2. Duplicación del cubo

Vamos a mostrar que no se puede duplicar el volumen de un cubo de lado 1.

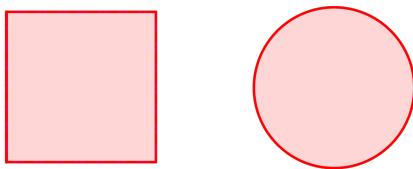
¹Sea $p \in \mathbb{Z}[x]$. p es irreducible sobre \mathbb{Z} si y sólo si lo es sobre \mathbb{Q}

² Sean $p(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$ y p un número primo. Si $p \nmid a_n$, $p \mid a_i$, para $0 < i < n$ y $p^2 \nmid a_0$, entonces $p(x)$ es irreducible en $\mathbb{Q}[x]$.

Supongamos un cubo de lado 1, y por tanto volumen 1. Si se pudiese duplicar su volumen obtendríamos un segmento s tal que $s^3 = 2$, esto es, s verificaría el polinomio $f(X) = X^3 - 2$, que es irreducible en $\mathbb{Q}(X)$ por Criterio de Eisenstein. Por lo tanto, $|\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) : \mathbb{Q}| = 3$ que no es potencia de 2, lo cual contradice todos los razonamientos anteriores.

3.3.3. Cuadratura del círculo

Si se pudiese cuadrar un círculo de radio 1, tendríamos que poder construir un cuadrado con un lado de longitud $\sqrt{\pi}$ y, por lo tanto, π sería construible. Si esto fuese cierto, $|\mathbb{Q}(\pi) : \mathbb{Q}|$ sería una potencia de 2. Sin embargo, como se aclaró anteriormente Lindemann probó en 1882 que $|\mathbb{Q}(\pi) : \mathbb{Q}| = \infty$.



3.3.4. El Heptágono Regular

Alguna bibliografías (Boyer and Pérez (1999)) suelen incluir dentro de los problemas clásicos a la construcción del Heptágono Regular cuya imposibilidad mostraremos a continuación.

En general, se sabe que si es posible construir las raíces complejas de la ecuación:

$$x^n - 1 = 0 \quad (3.2)$$

para algún n determinado, podremos construir los vértices de un n -gono regular de radio unitario (esto será analizado con más detalle en el próximo capítulo). En el caso particular del heptágono regular, el problema se reduciría a construir la primera raíz compleja de la ecuación $x^7 - 1 = 0$.

El número complejo $\gamma = \cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{7}\right)$, por la fórmula de De Moivre satisface $\gamma^7 = 1$. Por lo tanto tenemos que γ es raíz del polinomio

$$(x - 1)(x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$$

y como $\gamma \neq 1$ satisface

$$x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$$

sacando γ^3 factor común, tenemos que

$$\begin{aligned}0 &= \gamma^3 + \gamma^2 + \gamma + 1 + \gamma^{-1} + \gamma^{-2} + \gamma^{-3} \\&= (\gamma + \gamma^{-1})^3 + (\gamma + \gamma^{-1})^2 - 2(\gamma + \gamma^{-1}) - 1\end{aligned}$$

pero $\gamma + \gamma^{-1} = 2 \cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)$ resulta ser raíz del polinomio $X^3 + X^2 - 2X - 1$, que es irreducible en $\mathbb{Q}[X]$. Luego, $|\mathbb{Q}\left(2 \cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)\right) : \mathbb{Q}| = 3$ que no es una potencia de 2. Por lo tanto, el número $2 \cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)$ no es construible con regla y compás y, entonces, $\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)$ tampoco lo es, con lo que el heptágono regular no es construible.

4. Polígonos Regulares

Ya vimos en el Capítulo 1 que los polígonos de 3, 6, 12, 24... lados son construibles con regla y compás. Y también los de 4, 8, 16, 32, ... lados. Pero, ¿y el pentágono? ¿Y los demás?

La pregunta concreta es: ¿Para qué valores de n se puede construir un polígono regular de n lados con regla y compás?

Es especialmente interesante la teoría en torno a la construcción de polígonos regulares. Para evitar una digresión sobre polígonos en general daremos una definición fuerte Ivorra (2009).

Definición 22. Diremos que n puntos P_1, \dots, P_n , con $n \geq 3$ son los vértices de un polígono regular de n lados si están contenidos en una circunferencia y los arcos menores $\widehat{P_1P_2}, \widehat{P_2P_3}, \dots, \widehat{P_nP_1}$ no se solapan y tienen amplitud $\frac{2\pi}{n}$. Los lados del polígono son los segmentos $\overline{P_1P_2}, \overline{P_2P_3}, \dots, \overline{P_nP_1}$, el polígono con los vértices indicados es la intersección de todos los semiplanos respecto a las rectas $\overleftrightarrow{P_1P_2}, \dots, \overleftrightarrow{P_nP_1}$ que contienen a los vértices restantes. La circunferencia que contiene a los vértices de un polígono regular se llama circunferencia circunscrita al polígono (también se dice que el polígono está inscrito en la circunferencia). El centro y el radio de la circunferencia se llaman también centro y radio del polígono.

Fijada una circunferencia \mathcal{C} y un punto en ella, podemos tomar como 0 el centro y como 1 el punto dado, de modo que los vértices del n -gono regular serán los números complejos de módulo 1 y argumento $\frac{2k\pi}{n}$, para $k = 0, \dots, n-1$.

Construir dicho polígono es, por definición, construir estos vértices, pero en realidad basta construir $\zeta_n = 1_{\frac{2\pi}{n}}$ pues, una vez construido éste, la circunferencia de centro ζ_n que pasa por 1 corta a \mathcal{C} en $1_{\frac{4\pi}{n}}$, la circunferencia de centro $1_{\frac{4\pi}{n}}$ y que pasa por $1_{\frac{2\pi}{n}}$ corta a \mathcal{C} en $1_{\frac{6\pi}{n}}$, y de este modo se construyen los vértices restantes. Así pues, un polígono regular de n vértices es construible si y sólo si lo es el número complejo

$$\zeta_n = \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n}$$

Estos números tienen una caracterización algebraica muy simple. Notemos que

$$\zeta_n^k = 1_{\frac{2\pi}{n}}^k = 1_{\frac{2k\pi}{n}} = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n}$$

luego los números ζ_n para $k = 0, \dots, n-1$ son los vértices del n -gono regular y $\zeta_n^n = 1$.

En términos algebraicos, ζ_n es una raíz n -sima primitiva de la unidad, el cuerpo $\mathbb{Q}(\zeta_n)$ es una extensión de Galois de grado $\varphi(n)$, donde φ es la función de Euler¹.

Teorema 23. *Los polígonos regulares de n vértices son construibles con regla y compás si y sólo si $\varphi(n)$ es potencia de 2.*

Definición 24. Los números primos de la forma $2^n + 1$ se llaman primos de Fermat.

En estos términos:

Teorema 25. *El polígono regular de n vértices es constructible con regla y compás si y sólo si n es producto de una potencia de 2 y de primos de Fermat con exponente 1.*

La demostración de este teorema requiere un estudio minucioso de la Teoría de Galois, especialmente de las extensiones ciclotómicas

Ejemplo 26. Polígonos construibles con cantidad de lados un número primo son el triángulo equilátero, el pentágono regular, el heptadecágono regular, el polígono regular de 257 lados y el de 65537.

Por lo visto en el capítulo uno, polígonos construibles con cantidad de lados una potencia de 2 son el cuadrado, el octógono regular y el exadecágono regular.

El polígono regular de 30 lados se puede construir con regla y compás, ya que $30 = 2 \times 3 \times 5$, es decir es el producto de una potencia de 2, el primer primo de Fermat y el segundo primo de Fermat, respectivamente.

El Eneágono Regular no puede construirse con regla y compás, ya que $9 = 3^2$, es decir es el producto de una potencia de 2 y de un primo de Fermat con exponente distinto de 1.

4.1. Construcción de polígonos regulares

Nos centramos primeramente en los casos en que n es un primo de Fermat.

La ecuación

$$x^n - 1 = 0$$

factorizada resulta:

$$(x - 1) (x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1) = 0$$

Ahora bien, llamemos $P_{n-1} = x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1$. Si encontramos la primera raíz de P_{n-1} , habremos resuelto el problema.

¹ $\varphi(n)$ es el número de números naturales menores que n y primos con n .

4.1.1. Construcción del Triángulo Equilátero

En este caso $n = 3$. O sea que $\varphi(3) = 2 = 2^1$, es decir que el triángulo equilátero es construible. La descomposición de 3 es $2^{2^0} + 1$ que es un primo de Fermat.

La ecuación equivalente al problema de construir con regla y compás el triángulo equilátero es $x^3 - 1 = 0$ que factorizada resulta

$$(x - 1)(x^2 + x + 1) = 0$$

En este caso: $P_2 = x^2 + x + 1$ y sus raíces son:

$$\zeta^1 = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{3}{2}}i$$

$$\zeta^2 = -\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{3}{2}}i$$

Construyendo el punto de abscisa $-\frac{1}{2}$ y la perpendicular al eje real por ese punto, tendremos construidas las raíces intersectando dicha recta con la circunferencia de radio unidad centrada en el origen (Ver Figura 4.1).

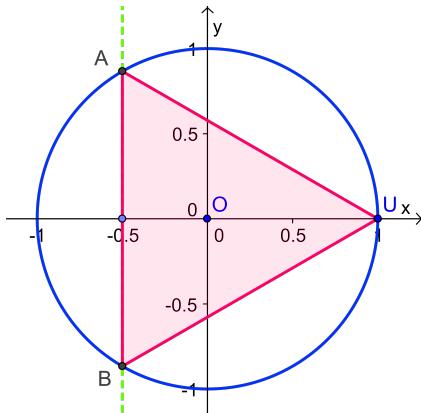


Figura 4.1.: Triángulo Equilátero

4.1.2. Construcción del pentágono regular

La ecuación equivalente al problema de construir con regla y compás el pentágono regular es $x^5 - 1 = 0$

En este caso:

$$P_4 = x^4 + \dots + x + 1 \quad (4.1)$$

Sean $\zeta^1, \zeta^2, \zeta^3$ y ζ^4 las raíces de este polinomio (ζ^1 es la raíz primitiva). Debemos recordar que las mismas son complejas conjugadas de a pares. Llamemos:

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \zeta^1 + \zeta^4 = 2\operatorname{Re}\zeta^1 \\ \lambda_2 &= \zeta^2 + \zeta^3 = 2\operatorname{Re}\zeta^2\end{aligned}$$

y observando que

$$\begin{aligned}\zeta \cdot \zeta^4 &= 1 \\ \zeta^2 \cdot \zeta^3 &= 1\end{aligned}$$

obtenemos que ζ y ζ^4 , por propiedades de las raíces de ecuaciones cuadráticas, son las raíces de

$$x^2 - \lambda_1 x + 1 = 0 \quad (4.2)$$

y ζ^2 y ζ^3 son raíces de

$$x^2 - \lambda_2 x + 1 = 0 \quad (4.3)$$

Las raíces de Ecuación 4.2 y Ecuación 4.3 respectivamente son:

$$x_{1,2} = \frac{\lambda_i}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\lambda_i}{2}\right)^2 - 1} \quad i = 1, 2$$

Por otro lado notemos que:

$$\lambda_1 + \lambda_2 = -1 \quad (4.4)$$

pues $\lambda_1 + \lambda_2 = \zeta + \zeta^4 + \zeta^2 + \zeta^3 = -1$, ya que ζ es una raíz de Ecuación 4.1

Y además que:

$$\lambda_1 \cdot \lambda_2 = -1 \quad (4.5)$$

pues $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = (\zeta + \zeta^4)(\zeta^2 + \zeta^3) = \zeta + \zeta^4 + \zeta^2 + \zeta^3 = -1$

Por lo tanto, por Ecuación 4.4 y Ecuación 4.5, λ_1 y λ_2 son las raíces de la ecuación $x^2 + x - 1 = 0$.

Así

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= -\frac{1}{2} + \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1} \\ \lambda_2 &= -\frac{1}{2} - \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1}\end{aligned}$$

Construyendo $\frac{\lambda_1}{2}$, teniendo en cuenta que $\frac{\lambda_1}{2} = \operatorname{Re}\zeta^1$, trazamos la perpendicular por ese punto a la recta OU , de tal manera que las intersecciones con la circunferencia de radio unidad centrada en O , nos proporcionan las raíces ζ y ζ^4 . El pentágono quedará finalmente construido trazando dos circunferencias con centro en ζ^1 y ζ^4 respectivamente y que pasen por el punto U . Las intersecciones con la circunferencia centrada en el punto O de radio unidad nos proporcionan las raíces faltantes, ζ^2 y ζ^3 (Ver Figura 4.2).

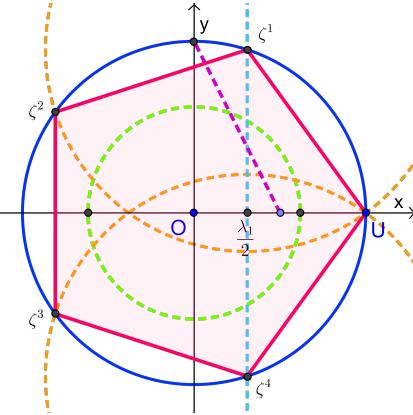


Figura 4.2.: Pentágono Regular

4.1.3. Construcción del heptadecágono regular

Construir este polígono regular consiste en encontrar las raíces de la ecuación

$$x^{17} - 1 = 0 \quad (4.6)$$

que factorizada resulta

$$(x - 1)(x^{16} + x^{15} + \dots + x + 1) = 0$$

Sean ζ^i , $1 \leq i \leq 16$ las raíces complejas de la Ecuación 4.6. Llamemos

$$\lambda_i = \zeta^i + \zeta^{17-i} \quad 1 \leq i \leq 8 \quad (4.7)$$

a las sumas de los pares de raíces conjugadas.

Teniendo en cuenta que

$$\zeta^i \zeta^{17-i} = 1 \quad (4.8)$$

es claro que ζ^i y ζ^{17-i} son las raíces del polinomio $x^2 - \lambda_i x + 1$, por Ecuación 4.7 y Ecuación 4.8.

Llamemos

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \lambda_1 + \lambda_4 = \zeta + \zeta^{16} + \zeta^4 + \zeta^{13} \\ \xi_2 &= \lambda_2 + \lambda_8 = \zeta^8 + \zeta^{15} + \zeta^2 + \zeta^9 \\ \xi_3 &= \lambda_3 + \lambda_5 = \zeta^3 + \zeta^{14} + \zeta^5 + \zeta^{12} \\ \xi_4 &= \lambda_6 + \lambda_7 = \zeta^6 + \zeta^{11} + \zeta^7 + \zeta^{10} \end{aligned} \quad (4.9)$$

Por esto

$$\lambda_1 \cdot \lambda_4 = (\zeta^1 + \zeta^{16})(\zeta^4 + \zeta^{13}) = \zeta^5 + \zeta^{14} + \zeta^3 + \zeta^{12} = \xi_3 \quad (4.10)$$

Por lo tanto λ_1 y λ_4 son las raíces de

$$x^2 - \xi_1 x + \xi_3 = 0 \quad (4.11)$$

por Ecuación 4.9 y Ecuación 4.10.

Por último, llamemos

$$\eta_1 = \xi_1 + \xi_2 \quad (4.12)$$

$$\eta_2 = \xi_3 + \xi_4 \quad (4.13)$$

Notemos que

$$\eta_1 + \eta_2 = \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 + \xi_4 = \zeta^{16} + \zeta^{15} + \dots + \zeta^2 + \zeta = -1 \quad (4.14)$$

y además

$$\eta_1 \eta_2 = (\xi_1 + \xi_2)(\xi_3 + \xi_4) = -4 \quad (4.15)$$

y por lo tanto, son raíces de la ecuación

$$x^2 + x - 4 = 0 \quad (4.16)$$

por Ecuación 4.14 y Ecuación 4.15. Con lo cual

$$\eta_1 = -\frac{1}{2} + \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 4} \quad (4.17)$$

y

$$\eta_2 = -\frac{1}{2} - \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 4} \quad (4.18)$$

Por otro lado se comprueba que ξ_1 y ξ_2 son las raíces de

$$x^2 - \eta_1 x - 1 = 0 \quad (4.19)$$

por Ecuación 4.12 y porque $\xi_1 \cdot \xi_2 = (\zeta + \zeta^{16} + \zeta^4 + \zeta^{13})(\zeta^8 + \zeta^{15} + \zeta^2 + \zeta^9) = \zeta^{16} + \zeta^{15} + \dots + \zeta^2 + \zeta = -1$.

Igualmente se comprueba que ξ_3 y ξ_4 son las raíces de

$$x^2 - \eta_2 x - 1 = 0 \quad (4.20)$$

por Ecuación 4.13 y porque $\xi_3 \cdot \xi_4 = (\zeta^3 + \zeta^{14} + \zeta^5 + \zeta^{12})(\zeta^6 + \zeta^{11} + \zeta^7 + \zeta^{10}) = \zeta^{16} + \zeta^{15} + \dots + \zeta^2 + \zeta = -1$

Explícitamente

$$\xi_1 = \frac{\eta_1}{2} + \sqrt{\left(\frac{\eta_1}{2}\right)^2 + 1} \quad (4.21)$$

y

$$\xi_3 = \frac{\eta_2}{2} + \sqrt{\left(\frac{\eta_2}{2}\right)^2 + 1} \quad (4.22)$$

que son coeficientes de la Ecuación 4.11, y por lo tanto encontraríamos explícitamente sus raíces, una de las cuales es λ_1 .

En la construcción geométrica del heptadecágono regular, utilizaremos el software libre GeoGebra para efectuar su representación. Esta decisión se fundamenta en la agilidad y eficiencia del software en contraposición a los elementos de uso tradicional en geometría (regla y compás) y también por la ventajas de poder crear herramientas.

Tengamos en cuenta que nuestro problema estaría resuelto si solamente dispusiéramos de un método geométrico para encontrar las raíces de una ecuación cuadrática. Más precisamente, si tuviéramos los puntos de abscisas ν y μ , con μ positivo, debemos encontrar puntos de abscisas Sángari and Perez (2011)

$$x_{1,2} = \frac{\nu}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\nu}{2}\right)^2 \pm \mu}$$

o

$$x_{1,2} = \frac{\nu}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\nu}{2}\right)^2 \pm (\sqrt{\mu})^2} \quad (4.23)$$

La Ecuación 4.23 nos muestra que si tenemos métodos geométricos (con regla y compás) para sumar, restar, multiplicar, dividir y extraer raíces cuadradas, este problema estaría resuelto. Tales métodos ya fueron detallados en los capítulos precedentes, por tanto estamos listos para desarrollar un procedimiento geométrico para encontrar puntos con abscisas los miembros de Ecuación 4.23 y por consiguiente nuevas herramientas en GeoGebra.

Tengamos en cuenta lo siguiente:

- Obtener el punto medio con regla y compás es un procedimiento sencillo . No nos detendremos en esto y simplemente mencionamos que el GeoGebra tiene un procedimiento para obtener puntos medios de los segmentos.
- Con el procedimiento para encontrar el punto al cual le corresponde una abscisa que es la raíz cuadrada de otra (recordar construcción hecha en Afirmación 18) diseñamos una herramienta que devuelve una circunferencia centrada en el punto O y radio la raíz cuadrada de una abscisa (mayor que cero)

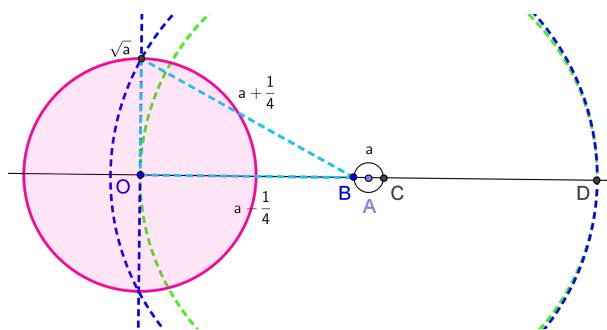


Figura 4.3.: Construcción de la raíz cuadrada

- Ya estamos listos para desarrollar una herramienta con GeoGebra para encontrar puntos con abscisas Ecuación 4.23. Desarrollamos dos herramientas para dibujar los puntos de abscisas Ecuación 4.23. La primera herramienta dibuja puntos de la forma

$$x_{1,2} = \frac{\nu}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\nu}{2}\right)^2 + (\sqrt{c})^2} \quad (4.24)$$

y la segunda

$$x_{1,2} = \frac{\nu}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\nu}{2}\right)^2 - (\sqrt{c})^2} \quad (4.25)$$

- Para crear la primera herramienta, debemos construir los puntos cuyas abscisas sea un miembro de Ecuación 4.24. Sobre la recta OU ubicamos puntos B y C de abscisas b y c respectivamente (tal que $c > 0$) (Ver Figura 4.4). Agreguemos el punto medio M del segmento OB que tiene abscisa $\frac{b}{2}$, una circunferencia C_1 con centro en O de radio \sqrt{c} y el punto A intersección de una perpendicular a OU por O con C_1 (ya detallamos un procedimiento para obtener un punto de abscisa \sqrt{c}). La hipotenusa del triángulo rectángulo MOA tiene longitud

$$\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + (\sqrt{c})^2}$$

Entonces, las intersecciones de la circunferencia de centro M y radio MA con OU determinará puntos de abscisas

$$\frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + (\sqrt{c})^2}$$

ver figura (Figura 4.4).

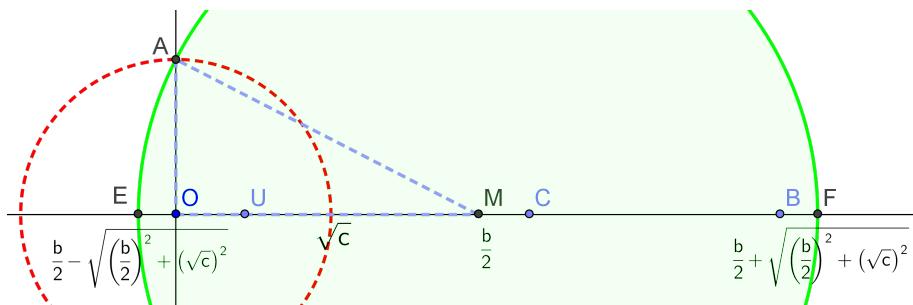


Figura 4.4.: Construcción de puntos de abscisas $\frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + (\sqrt{c})^2}$

- Para crear la segunda herramienta, debemos construir los puntos cuyas abscisas es los miembros de Ecuación 4.25. Para ello basta construir un

triángulo rectángulo de hipotenusa $\frac{b}{2}$ y con un cateto \sqrt{c} . El otro cateto tendrá la forma $\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - (\sqrt{c})^2}$. Construyamos una circunferencia de centro un punto de abscisa $\frac{b}{4}$ y de radio $\frac{b}{4}$. Llamémosle C_1 . Sea M el punto de abscisa $\frac{b}{2}$, como en la Figura 4.5. G es un punto en la intersección de C_1 con la circunferencia de centro en el origen y radio \sqrt{c} . Notemos que el triángulo rectángulo OMG cumple con los estos requerimientos. Esta procedimiento proporciona una circunferencia de centro M y de radio MH . Las intersecciones de esta circunferencia con OU son los puntos de abscisas $\frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - (\sqrt{c})^2}$.

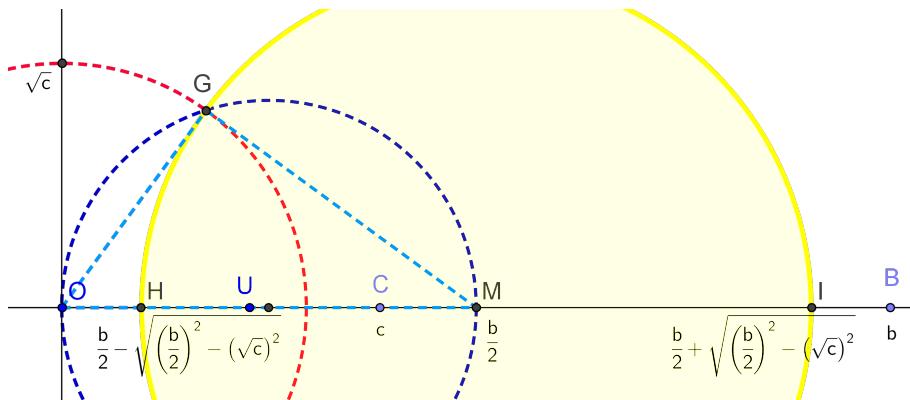


Figure 4.5.: Construcción de puntos de abscisas

$$\frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - (\sqrt{c})^2}$$

Construidas estas herramientas podemos encarar el problema de construir el heptadecágono. Iniciemos la construcción de Ecuación 4.17 y Ecuación 4.18 que son las raíces izquierda y derecha respectivamente de Ecuación 4.16. El valor numérico de $\eta_1 = \frac{\sqrt{17}}{2} - \frac{1}{2}$ es aproximadamente $1,5615528128088\dots$ y el valor de $\eta_2 = -\frac{\sqrt{17}}{2} - \frac{1}{2}$ aproximadamente $-2,5615528128088\dots$, los mismos se construyen con la herramienta 1 (Ver Figura 4.6)

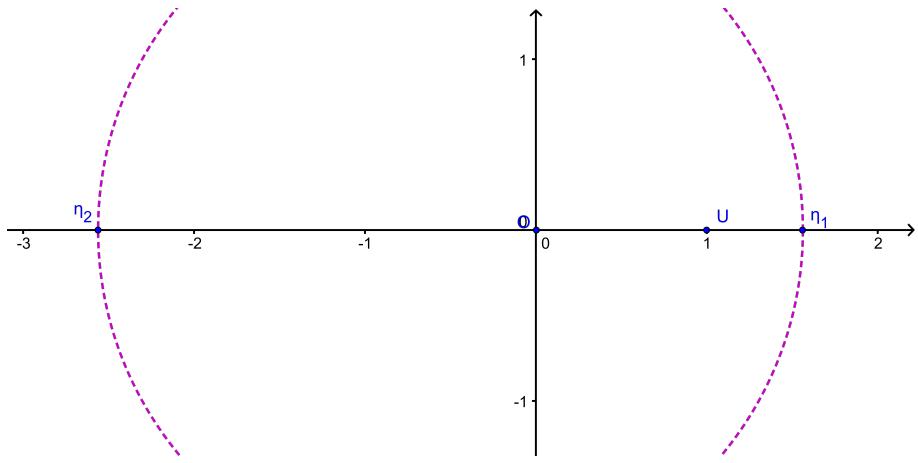


Figura 4.6.: Construcción de η_1 y η_2

Pasemos, ahora, a la construcción de las raíces de (Ecuación 4.19). El dibujo resultante después de la aplicación de la herramienta 1 se muestra en la figura Figura 4.7. Explícitamente $\xi_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{17}}{2} - \frac{1}{2} \right) + \sqrt{1 + \frac{1}{4} \left(\frac{\sqrt{17}}{2} - \frac{1}{2} \right)^2}$ es aproximadamente 2,04948 en tanto que $\xi_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{17}}{2} - \frac{1}{2} \right) - \sqrt{1 + \frac{1}{4} \left(\frac{\sqrt{17}}{2} - \frac{1}{2} \right)^2}$ es aproximadamente -0,487928.

Construyamos las raíces de Ecuación 4.20 como se ve en la figura Figura 4.7. La expresión para $\xi_3 = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{17}}{2} \right) + \sqrt{1 + \frac{1}{4} \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{17}}{2} \right)^2}$ que es aproximadamente 0,344151 y $\xi_4 = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{17}}{2} \right) - \sqrt{1 + \frac{1}{4} \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{17}}{2} \right)^2}$ que es aproximadamente -2,9057.

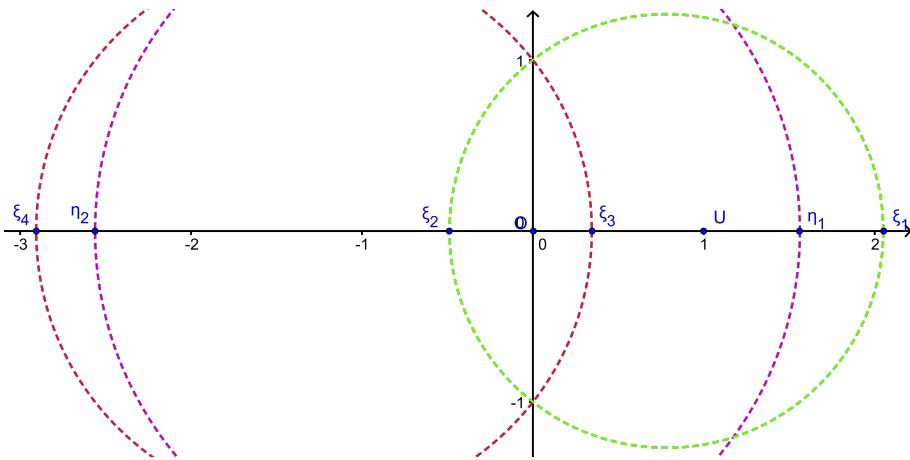


Figura 4.7.: Construcción de ξ_1 , ξ_2 , ξ_3 y ξ_4

Ahora debemos construir λ_1 que es la primera raíz de (Ecuación 4.11). Tenemos

$$\lambda_1 = \frac{\xi_1}{2} + \sqrt{\left(\frac{\xi_1}{2}\right)^2 - \xi_3}$$

que es:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{17}}{2} - \frac{1}{2} \right) + \sqrt{1 + \frac{1}{4} \left(\frac{\sqrt{17}}{2} - \frac{1}{2} \right)^2} \right) + \\ & + \sqrt{\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{17}}{2} \right) - \sqrt{1 + \frac{1}{4} \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{17}}{2} \right)^2} + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{17}}{2} - \frac{1}{2} \right) + \sqrt{1 + \frac{1}{4} \left(\frac{\sqrt{17}}{2} - \frac{1}{2} \right)^2} \right)^2} \end{aligned}$$

que es aproximadamente 1,86494. Este valor es $2 \arccos(2\pi/17)$ como esperábamos. Usemos ahora la herramienta 2 creada para el resolvente de segundo grado, para encontrar gráficamente el valor de λ_1 (ver figura Figura 4.8)

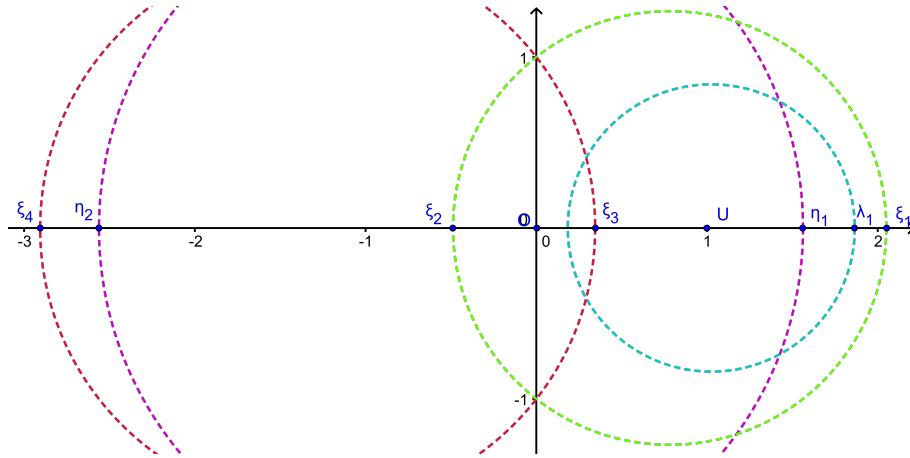


Figura 4.8.: Construcción de λ_1 y λ_4

Por último, tracemos una perpendicular r a la abscisa por el punto de abscisa $\lambda_1/2$. La intersección de r con la circunferencia unitaria determinará la primera y la última raíz compleja de la ecuación Ecuación 3.2, con $n = 17$ (Ver Figura 4.9)

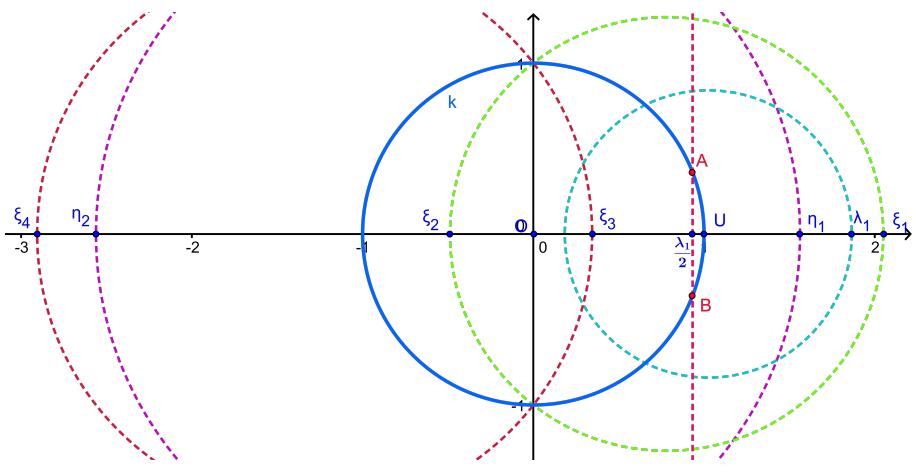


Figura 4.9.: Construcción de $\frac{\lambda_1}{2}$

Y esto es todo lo que necesitamos para construir el heptadecágono regular.

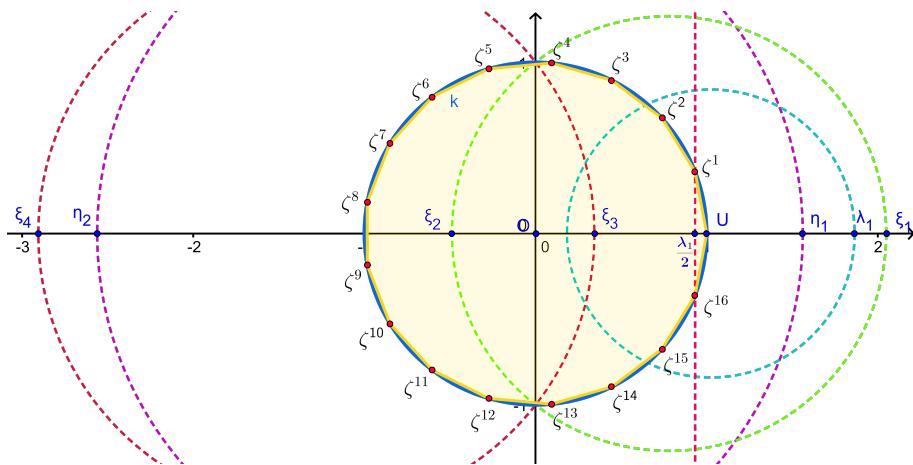


Figura 4.10.: El heptadecágono

Agradecimientos

Agradezco ante todo, a Dios Nuestro Señor, que ha sido mi compañía y principal sustento en esta etapa, por haberme regalado momentos en su presencia.

A mi familia, por haber confiado en mi y brindarme el apoyo necesario para seguir.

Al profesor Antonio Sángari, por su dedicación, motivación y ejemplo, en la realización y culminación de este trabajo.

A María Zalazar, por ser mi fiel compañera de estudio, por su amistad y la motivación para luchar por este sueño.

A Julieta Flores, por su cálida y divertida compañía de hermana estos últimos años, por su afecto, su confianza y por sostenerme en momentos difíciles.

A Fernando, por su confianza y apoyo en el logro de esta meta.

A mis amigos y compañeros de estudio, Luis Justiniano, Luis Crespo, Lorena Torres, Natalia Vega, Eliana Risso, Gustavo Díaz, Fernando Jaime, Ruth Thames, por brindarme su ayuda y divertidos momentos en esta etapa de formación profesional.

A todos los docentes que he tenido a lo largo de estos años, por su dedicación a los alumnos y particularmente porque han marcado cada etapa de mi paso por la universidad.

A la profesora Lidia Ibarra, por su inmenso cariño y amabilidad.

Al profesor Martín Herrán, por su colaboración en la traducción de la obra de Wantzel.

Y a todas las personas que la vida ha puesto en mi camino.

A. Traducción del artículo de Wantzel en el Journal de Mathématiques

A.1. Investigaciones sobre los medios de reconocer si los problemas de geometría pueden resolverse con la regla y el compás:

Traducción de Recherches sur les moyens de reconnaître si un problème de Géométrie peut se résoudre avec la règle et le compas. Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 2 (1837), p. 366-372.
WANTZEL

Por M.L. Wantzel-alumno-ingeniero de puentes y carreteras

Parte I

Supongamos que un problema de Geometría pueda ser resuelto por intersecciones de líneas rectas y circunferencias de círculos: Al combinar los puntos así obtenidos con los centros de los círculos y con los puntos que determinan las rectas, el resultado es un conjunto de triángulos cuyos elementos pueden ser calculados mediante fórmulas trigonométricas. Además estas fórmulas serán ecuaciones algebraicas de primer y segundo grado. Así el problema se reduce a resolver series de ecuaciones cuadráticas cuyos coeficientes son funciones racionales de las raíces de las ecuaciones precedentes. Para reconocer si la construcción de un problema de geometría puede efectuarse con regla y compás, las raíces de las ecuaciones de las que partimos deberán ser algebraicas.

Parte II

Consideremos ahora la serie de ecuaciones siguientes

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1^2 + Ax_1 + B = 0 \\ x_2^2 + A_1x_2 + B_1 = 0 \\ \vdots \\ x_{n-1}^2 + A_{n-2}x_{n-1} + B_{n-2} = 0 \\ x_n^2 + A_{n-1}x_n + B_{n-1} = 0 \end{array} \right. \quad (\text{A.1})$$

en las cuales A y B representan funciones racionales de las cantidades dadas p, q, r, \dots ; A_t y B_t , funciones racionales de x_1, p, q, r, \dots y en general A_m o B_m funciones racionales de $x_m, x_{m-1}, \dots, x_1, p, q, \dots$

Toda función racional de x_m tal que A_m o B_m , tome la forma $\frac{C_{m-1}x_m + D_{m-1}}{E_{m-1}x_m + F_{m-1}}$ si se elimina las potencias de x_m superiores a la primera por medio de la ecuación $x_m^2 + a_{m-1}x_m + B_{m-1} = 0$, nombrando por $C_{m-1}, D_{m-1}, E_{m-1}, F_{m-1}$ funciones racionales de $x_m, x_{m-1}, \dots, x_1, p, q, \dots$; ella se convertirá a continuación a la forma $A'_{m-1}x_m + B'_{m-1}$ multiplicando los dos términos de la ecuación cociente de $\frac{C_{m-1}x_m + D_{m-1}}{E_{m-1}x_m + F_{m-1}}$ por $-E_{m-1}(A_{m-1} + D_m) + F_{m-1}$.

Multipliquemos una por la otra los dos valores que toma el primer miembro de la última Ecuación A.1 cuando ponemos sucesivamente en lugar de x_{m-1} en A_{n-1} y B_{n-1} las dos raíces de la ecuación precedente obtenemos un polinomio de cuarto grado en x_n cuyos coeficientes de expresaran en función racional de $x_{n-1}, \dots, x_1, p, q, \dots$; reemplazemos de la misma manera sucesivamente en este polinomio x_{n-1} por las dos raíces de la ecuación correspondientes, obtendremos dos resultados que resulta ser un polinomio en x_n de grado 2^3 , con coeficiente racional en relación a $x_{n-3}, \dots, x_1, p, q, \dots$ y continuando de la misma manera llegaremos a un polinomio en x_n de grado 2^n cuyos coeficientes serán funciones racionales p, q, r, \dots . Este polinomio igualado a cero dará la ecuación final $f(x_n) = 0$ o $F(x) = 0$ que encierra todas las soluciones de la incógnita. Se puede siempre suponer que antes de hacer el cálculo se ha reducido la Ecuación A.1 al mínimo grado posible. Entonces una cualquiera entre las siguientes $x_{m+1}^2 + A_mx_{m+1} + B_m = 0$, no puede ser satisfecha por una función racional de las cantidades dadas y raíces de las ecuaciones precedentes. Pues, si fuera así, el resultado de la sustitución sería una función racional de $x_m, x_{m-1}, \dots, x_1, p, q, \dots$ que se puede poner bajo la forma $A'_{m-1}x_m + B'_{m-1}$ y tendríamos entonces $A'_{m-1}x_m + B'_{m-1} = 0$ se sacaría de esta relación un valor racional de x_m que sustituido en la ecuación de segundo grado en x_m conduciría a un resultado de la forma $A'_{m-2}x_{m-1} + B'_{m-2} = 0$. Continuando así se llegaría a $A'x_1 + B' = 0$, es decir que la ecuación $x_1^2 + Ax_1 + B = 0$ tendría por raíces funciones racionales de p, q, \dots ; el sistema (Ecuación A.1) podría ser entonces reemplazado por dos sistemas de $n - 1$ ecuaciones de segundo grado, independiente una de la otra, lo que esta en contra de la suposición inicial. Si una de las relaciones intermediarias $A'_{m-1}x_{m-1} + B'_{m-1} = 0$, por ejemplo, fuera satisfecha

idénticamente, las dos raíces de la ecuación $x_{m-1}^2 + A_{m-1}x_m + B_{m-1} = 0$, serían funciones racionales de x_{m-1}, \dots, x_1 para todos los valores que puedan tomar estas cantidades, de manera que se podría suprimir la ecuación en x_m y reemplazar las raíces sucesivamente por sus dos valores en las ecuaciones siguientes, lo que llevaría al sistema (Ecuación A.1), a dos sistemas de $n - 1$ ecuaciones.

Parte III

Planteado esto la ecuación de grado 2^n , $f(x) = 0$ que da todas las soluciones de un problema susceptibles de ser resueltos por medio de n ecuaciones de segundo grado, es necesariamente irreducible, es decir que no puede tener raíces comunes con ecuación de grado menor cuyos coeficientes sean funciones racionales de los datos p, q, \dots

En efecto, supongamos que la ecuación $F(x) = 0$, con coeficientes racionales sea satisfecha por una raíz de la ecuación $x_n^2 + A_{n-1}x_n + B_{n-1} = 0$, atribuyendo algunos valores convenientes a las cantidades x_{n-1}, \dots, x_1 . La función racional $F(x_n)$ de una raíz de esta última ecuación puede llevarse a la forma $A'_{n-1}x_n + B'_{n-1}$, nombrando siempre a A'_{n-1} y B'_{n-1} a funciones racionales de $x_{n-1}, \dots, x_1, p, q, \dots$; de la misma manera A'_{n-1} y B'_{n-1} pueden tomar una y otra la forma $A'_{n-1}x_n + B'_{n-1}$, y así sucesivamente; se llegará de tal manera a $A'_1x_2 + B'_1$ donde A'_1 y B'_1 pueden ser puestos bajo la forma $A'y + B'$ en la cual A' y B' representan funciones racionales de los datos p, q, \dots . Ya que $F(x_n) = 0$ para algún valor de x_n , se tendrá que $A'_{n-1}x_n + B'_{n-1} = 0$, y será necesario que A'_{n-1} y B'_{n-1} sean números separadamente, sin lo que la ecuación $x_n^2 + A_{n-1}x_n + B_{n-1} = 0$ sería satisfecha por el valor $-\frac{B'_{n-1}}{A'_{n-1}}$ que es una función racional de $x_{n-1}, \dots, x_1, p, q, \dots$, lo que es imposible; de la misma manera A'_{n-1} y B'_{n-1} siendo nulos, A'_{n-2} y B'_{n-2} lo serán también y así sucesivamente hasta que A' y B' sean nulos idénticamente, ya que no encierran más que los datos dados. Pero entonces A'_1 y B'_1 , que toman igualmente la forma $A'y + B'$ cuando se pone por x_1 cada una de las raíces de la ecuación $x_1^2 + Ax_n + B = 0$ se anularán para estos dos valores de x_1 ; similarmente, los coeficientes A'_2 y B'_2 pueden ser puestos bajo la forma $A'_1x_2 + B'_1$ tomando por x_1 una u otra de las raíces de la ecuación $x_2^2 + A_1x_2 + B_1 = 0$, correspondiente a cada uno de los valores de x_1 , y por consecuente se anularán para los cuatro valores de x_2 y para los dos valores de x_1 que resulten de la combinación de las dos primeras ecuaciones de Ecuación A.1. Se demostrará de la misma manera que A'_3 y B'_3 serán nulas poniendo para los x_3 los 2^3 valores sacados de las tres primeras ecuaciones de Ecuación A.1 conjuntamente con los valores correspondientes de x_2 y x_1 ; y continuando de esta manera se concluirá que $F(x_n)$ se anulará para los 2^n valores de x_n a los cuales conduce el sistema de todas las ecuaciones de Ecuación A.1, o para las 2^n raíces de $f(x) = 0$. De esta manera, la ecuación $F(x) = 0$ con coeficientes racionales no puede admitir una raíz de $f(x) = 0$ sin admitirlas a todas; por lo tanto la ecuación $f(x) = 0$ es irreducible.

Parte IV

Resulta inmediatamente del teorema precedente que todo problema que conduce a una ecuación irreducible cuyo grado no es una potencia de 2, no puede ser resuelto con la linea recta y el círculo. De esta manera *la duplicación del cubo*, que depende de la ecuación $x^3 - 2a^3 = 0$ siempre irreducible, no puede ser obtenida por la Geometría elemental. El problema de *las dos medias proporcionales* que conduce a la ecuación $x^3 - a^2b = 0$ es en el mismo caso todas la veces que la relación de b a a no sea un cubo. *La trisección del ángulo* depende de la ecuación $x^3 - \frac{3}{4}x + \frac{1}{4}a = 0$; esta ecuación es irreducible si no tiene raíces que sean una función racional de a y esto sucede mientras a sea algebraico. De esta manera el problema no puede ser resuelto en general con regla y compás. Nos parece que no había sido todavía rigurosamente demostrado que estos problemas tan celebres en los antiguos, no fuesen susceptibles de solución por las construcciones geométricas a las cuales están vinculados particularmente.

La división de la circunferencia en partes iguales puede siempre llevarse a la resolución de la ecuación $x^m - 1 = 0$, en la cual m es un número primo o una potencia de un número primo. Cuando m es primo, la ecuación $\frac{x^m-1}{x-1} = 0$ de grado $m-1$ es irreducible, como M. Gauss lo ha hecho ver en sus *Disquisitiones arithmetiae*, sección VII; así también la división puede ser efectuada por construcciones geométricas salvo en el caso que $m-1 = 2^n$. Cuando m es de la forma a^α , se puede probar modificando ligeramente la demostración del M. Gauss que la ecuación de grado $(a-1)a^{\alpha-1}$ obtenida igualando a cero el cociente de $x^{a^\alpha} - 1$ por $x^{a^{\alpha-1}} - 1$, es irreducible; sería necesario entonces que $(a-1)a^{\alpha-1}$ fuera de la forma 2^n al mismo tiempo que $(a-1)$, lo cual es imposible a menos que $a = 2$. De esta manera la división de la circunferencia en N partes no puede ser efectuada con la regla y compás solamente en el caso que los factores primos de N diferentes de 2 sean de la forma $2^n + 1$ y si están solamente elevados a la primera potencia de este número. Este principio está enunciado por M. Gauss al final de su obra pero no ha dado la demostración.

Si se pone $x = k + A' \sqrt[m]{a'} + A'' \sqrt[m]{a''} + \text{etc. } m, m' \dots$ siendo potencias de 2 y $k, A', A'' \dots a', a'' \dots$ números commensurables, el valor de x se construirá por la linea recta y el círculo, de manera que x no puede ser raíz de una ecuación irreducible de grado m que no sea potencia de 2. Por ejemplo, no podemos tener $x = A \sqrt[p]{a}$, si $(\sqrt[m]{a})^p$ es irracional para $p < m$; se demostraría fácilmente que x no puede tomar este valor mientras m sea una potencia de 2. Nosotros encontramos de esta manera muchos casos particulares de los teoremas sobre los números incommensurables que nosotros habíamos establecido ¹.

¹Journal de l'École Polytechnique, Cahier XXVI

Parte V

Supongamos que un problema haya conducido a una ecuación de grado 2^n , $F(x) = 0$ y que nos hayamos asegurado que esta ecuación es irreducible; se trata de reconocer si la solución puede obtenerse por medio de una serie de ecuaciones de segundo grado.

Retomemos las ecuaciones de Ecuación A.1

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1^2 + Ax_1 + B = 0 \\ x_2^2 + A_1x_2 + B_1 = 0 \\ \vdots \\ x_{n-1}^2 + A_{n-2}x_{n-1} + B_{n-2} = 0 \\ x_n^2 + A_{n-1}x_n + B_{n-1} = 0 \end{array} \right.$$

Será necesario construir la ecuación $f(x) = 0$, con coeficientes racionales, que de todos los valores de x_n e identificarla con la ecuación dada $F(x) = 0$. Para hacer estos cálculos se remarca que A_{n-1} y B_{n-1} se llevan a la forma $a_{n-1}x_{n-1} + a'_{n-1}$ y $b_{n-1}x_{n-1} + b'_{n-1}$, de manera que la eliminación de x_{n-1} entre las dos últimas ecuaciones de Ecuación A.1 se hace inmediatamente, lo que da una ecuación de cuarto grado en x_n ; se reemplazara a continuación a_{n-1} por $a''_{n-1}x_{n-1} + a'''_{n-1}$, a'_{n-1} por $a''_{n-1}x_{n-1} + a^v_{n-1}$ y b_{n-1} por $b''_{n-1}x_{n-1} + b'''_{n-1}$, b'_{n-1} por $b''_{n-1}x_{n-1} + b^v_{n-1}$ y A_{n-2} , B_{n-1} por $a_{n-2}x_{n-2} + a'_{n-2}$ y $b_{n-2}x_{n-2} + b'_{n-2}$, luego se eliminará x_{n-2} entre la ecuación de 4º grado ya obtenida y la ecuación $x_{n-2}^2 + A_{n-3}x_{n-2} + B_{n-3} = 0$; y así sucesivamente. Los últimos términos de la serie $a_{n-1}, a'_{n-1}, a''_{n-1} \dots b_{n-1}, b'_{n-1}, b''_{n-1} \dots$ etc., deben ser funciones racionales de los coeficientes de $F(x) = 0$; si se puede asignar valores racionales que satisfagan las ecuaciones de condiciones obtenidas identificando se reproducirán las ecuaciones de Ecuación A.1, cuyo sistema equivale a la ecuación $F(x) = 0$; si las condiciones no pueden ser verificadas dando valores racionales a las indeterminadas introducidas, el problema no puede ser llevado al segundo grado.

Se puede simplificar este procedimiento suponiendo que las raíces de cada una de las ecuaciones de Ecuación A.1, dan el último término de la siguiente, de esta manera, se puede tomar B_{n-1} como incógnita de la ante-última ecuación, ya que $B_{n-1} = b_{n-1}x_{n-1} + b'_{n-1}$ de donde $x_{n-1} = \frac{B_{n-1} - b'_{n-1}}{b_{n-1}}$; de esta manera las eliminaciones se hacen más rápidamente y se introduce cuatro cantidades de indeterminadas en la ecuación de cuarto grado que resulta de la primera eliminación, ocho en la ecuación de octavo grado, etc., de manera que las condiciones obtenidas identificando están en misma cantidad que las cantidades a determinar. Pero evitamos también de antemano el caso en el cual una de las cantidades tal que b_{n-1} sería nula, y hay que estudiar este caso separadamente.

Sea, por ejemplo, la ecuación $x^4 + px^2 + qx + r = 0$, tomemos a continuación la ecuación de segundo grado bajo la forma $x_1^2 + Ax_n + B = 0$, y $x^2 + (ax_1 + a')x + x_1 = 0$;

eliminando x_1 e identificando, se tendrá, $2a_1 - Aa = 0$, $a'^2 - Aaa' - A + a^2B = p$, $2aB - aA' = q$, $B = r$, de donde $B = r$, $a = \frac{2q}{4r-A^2}$, $a' = \frac{Aq}{4r-A^2}$, $A^3 + pA^2 - 4rA + q^2 - 4rp = 0$. Como B , a y a' son expresadas racionalmente por medio de A , p , q , r es necesario y suficiente que la ecuación de tercer grado en A tenga como raíz una función racional de los datos. La condición es siempre satisfecha cuando $q = 0$, sean cuales sean p y r , ya que $A = -p$ satisface entonces a la última ecuación.

Tomando x_1 como último término de la ecuación de segundo grado, se ha excluido el caso en el cual este término sería independiente de la raíz de la primera ecuación; pero tratándolo directamente, no se encuentra ninguna solución de la ecuación que no esté comprendido en la ecuación de mas arriba.

Así, con un cálculo más o menos largo, se podrá siempre asegurar si un problema dado es susceptible de ser resuelto por medio de una serie de ecuaciones de segundo grado siempre que se sepa reconocer si una ecuación puede ser satisfecha por una función racional de los datos, y si ella es irreducible. Una ecuación de grado n será irreducible cuando buscando los divisores de su primer miembro de grado $1, 2, \dots, \frac{n}{2}$, no encontremos ninguno cuyos coeficientes sean funciones racionales de las cantidades dadas.

La cuestión puede entonces siempre ser llevada a buscar si una ecuación algebraica $F(x) = 0$ con una sola incógnita puede tener como raíz una ecuación de este tipo. Para esto hay muchos casos a considerar. 1º Si los coeficientes no dependen más que del número de datos enteros o fraccionarios, será suficiente aplicar el método de las raíces commensurables. 2º Puede suceder que los datos representados por la letra p, q, r, \dots , sean susceptibles de tomar una infinidad de valores sin que la condición deje de ser cumplida, como cuando ellas nombran muchas líneas tomadas arbitrariamente; entonces, luego de haber llevado la ecuación $F(x) = 0$ a una forma tal que sus coeficientes sean fracciones enteras de p, q, r, \dots y que el coeficiente del primer término sea la unidad, se reemplazara x por $a_m p^m - a_{m-1} p^{m-1} + \dots + a_0$, y se igualara a cero los coeficientes de las diferentes potencias en el resultado; las ecuaciones obtenidas en a^m, a_{m-1}, \dots , serán tratadas como las ecuaciones en x , es decir que se reemplazara en ellas las cantidades por funciones enteras de q , y así sucesivamente hasta que habiendo agotado todas las letras lleguemos a ecuaciones numéricas que volverán al primer caso. 3º Cuando los datos son números irracionales, deben ser raíces de ecuaciones algebraicas que se pueda suponer irreducibles; en este caso si se reemplaza x por $a_m p^m + \dots + a_0$ en $F(x) = 0$, el primer miembro de la ecuación en p , así obtenida, deberá ser divisible por el de la ecuación irreducible cuyo miembro p es raíz, expresando que esta división se hace exactamente, se llegará a ecuaciones en a_m, a_{m-1}, \dots que serán tratadas como la ecuación $F(x) = 0$, hasta que se llegue a ecuaciones numéricas. Se debe remarcar que m puede siempre ser tomada inferior al grado de la ecuación que da p .

Estos procedimientos son de una aplicación penosa en general, pero se los puede simplificar y obtener resultados más precisos en algunos casos bastante numerosos, que nosotros estudiaremos especialmente.

B. Creación de nuevas herramientas en GeoGebra

En pocas palabras, GeoGebra es un software matemático interactivo libre, principalmente diseñado para la educación en todos los niveles educativos. Se lo utiliza, generalmente, para aplicaciones en Geometría y Álgebra. El uso que le dimos a este soft para el desarrollo de este trabajo es la construcción de herramientas que permitan la construcción de polígonos regulares con regla y compás.

Las herramientas permiten crear nuevos objetos a través de mecanismos de señalamiento y acción. Los objetos pueden ser de distintos tipos, en general nos ocuparemos de los *objetos geométricos* Sángari and C. (2012).

B.1. Creación de una nueva herramienta

Desde una construcción existente, se pueden crear herramientas propias.

Menú de Herramientas→ Creación de Herramienta Nueva

Se despliega una ventana de diálogo donde se especifican los objetos de salida (desplegar la barra de arriba y seleccionar), los objetos de entrada, el nombre de la herramienta, el nombre del comando, una breve ayuda para usar la herramienta y el ícono con que aparecerá en la barra de herramientas.

Cuando se guarda el archivo en que se creó la nueva herramienta, ésta también queda automáticamente salvada con un archivo .ggb como parte del mismo, y queda accesible para emplearse con el mouse o ratón.

B.2. Acceso a herramientas creadas

Se pueden guardar las herramientas creadas como archivos .ggt, para poder reutilizarlas en otras construcciones de GeoGebra.

Menú de Herramientas→ Gestión de Herramientas→ Guarda como...

Para que esta herramienta quede disponible para otras construcciones:

Menú Archivo → Abre → Todos los archivos → clic en el archivo .ggt correspondiente → Apariencias → Guarda la Apariencia Actual

EJEMPLO: *Creación de la herramienta “Raíz cuadrada”*

- Paso 1: Efectuar en GeoGebra la construcción descripta en Afirmación 18 (Ver Figura B.1)

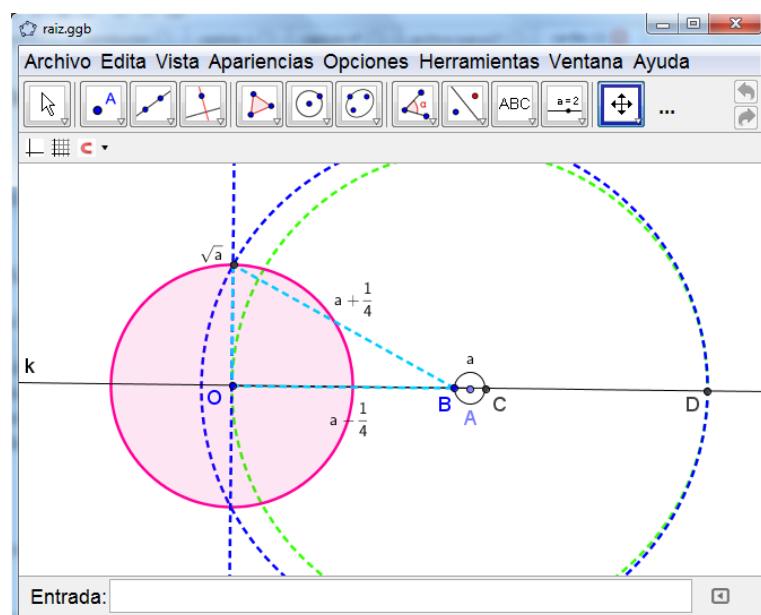


Figura B.1.: Paso: 1

- Paso 2: Ir a

Menú de Herramientas → Creación de Herramienta Nueva

Especificar objeto de salida, en este caso, la circunferencia p, que es la que tiene su centro en O y pasa por E (Ver Figura B.2)

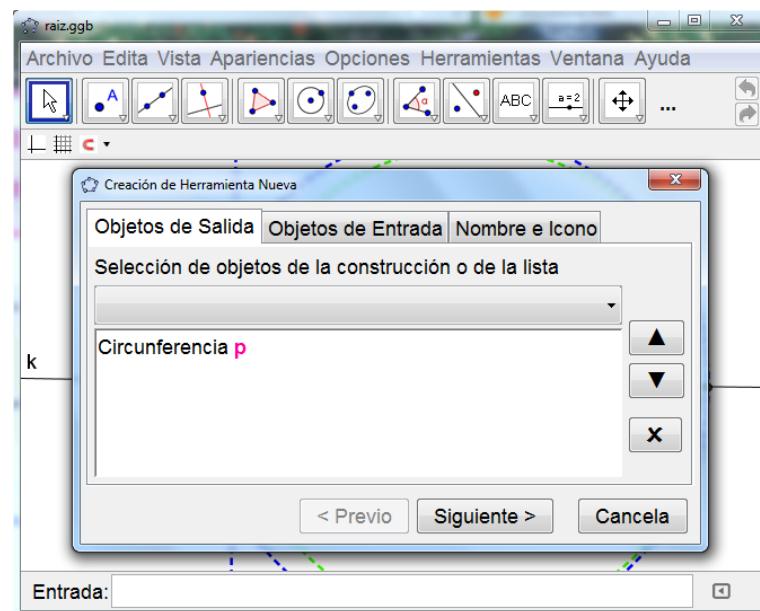


Figura B.2.: Paso:2

- Paso 3: Especificar objeto de Entrada, en este caso, Los puntos O , al cual le corresponde la abscisa 0; el punto U , a quien le corresponde la abscisa 1, y el punto A , al cual le corresponde la abscisa $|a|$ (Ver Figura B.3)

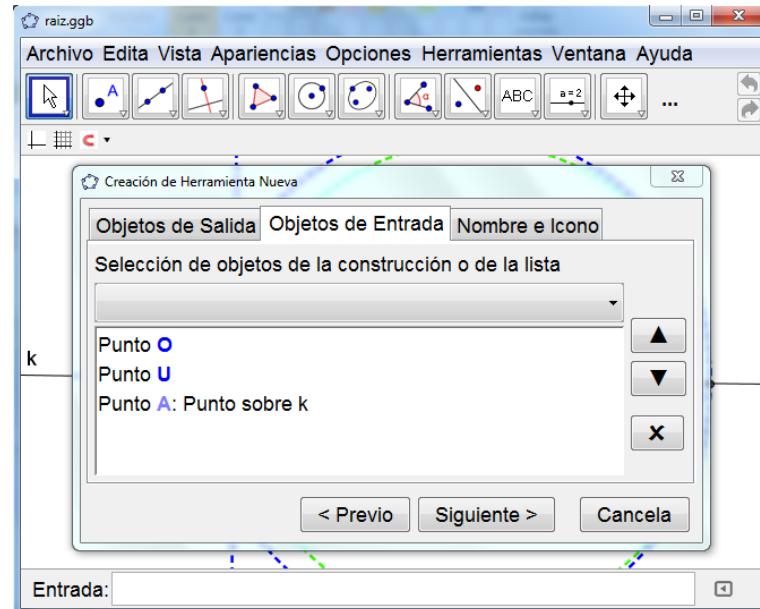


Figura B.3.: Paso: 3

- Paso 4: Especificar el nombre de la herramienta, el nombre del comando, una breve ayuda para usar la herramienta y el icono con que aparecerá en la barra

de herramientas (Ver Figura B.4) y concluir.

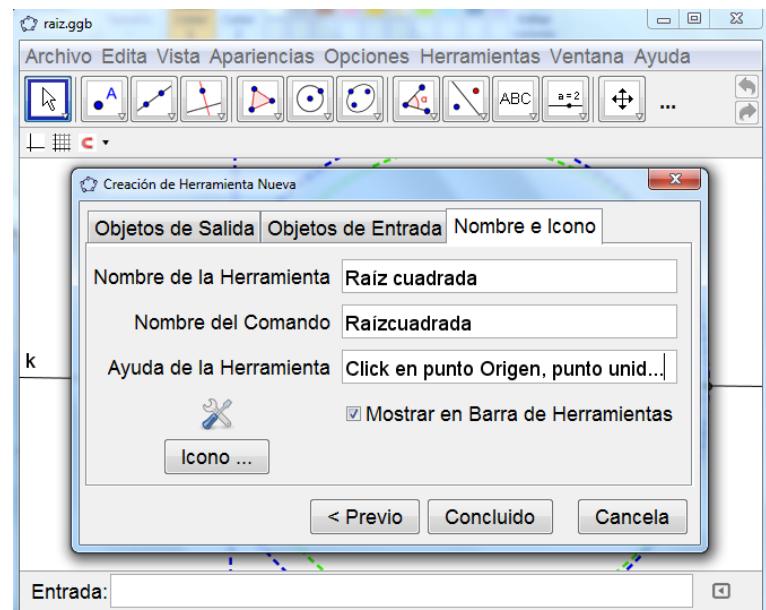


Figura B.4.: Paso: 4

De esta manera, ya tenemos a disposición una nueva herramienta.

Bibliografía

- Abrate, R. & Pochulu, M. (2007). *Experiencias, propuestas y reflexiones para la clase de Matemática*. Universidad Nacional de Villa María.
- Ayala, N. (2008). Construcciones con regla y compás.pasos.
- Boyer, C. and Pérez, M. (1999). *Historia de la matemática : Versión de Mariano Martínez Pérez*. El Libro Universitario - Manuales. Grupo Anaya Comercial.
- Chaparro, R. R. (2011). Construcción de polígonos regulares.
- Collantes, A. J. P. (2005). Construcciones con regla y compás. *Acta de Mathematica Vulgata -Universidad de Cádiz -Departamento de Matemática*, 1:29–36.
- Collette, J. and Piga, A. (1993). *Historia de las matemáticas, volumen 2*. Number v. 2 in Ciencia y Técnica. Siglo XXI de España Editores.
- Hernández, P. G. (2006). Carl friedrich gauss: Estudio de su obra *disquisitiones arithmeticæ* y construcción de polígonos regulares con regla y compás.
- Ivorra, C. (2009). *Geometría*. Recuperado de <http://www.uv.es/> ivorra/Libros/Geometria.pdf.
- Ivorra, C. (2012). *Álgebra*. Recuperado de <http://www.uv.es/> ivorra/Libros/Algebra.pdf.
- Pastor, J. and Babini, J. (2000). *Historia de la matemática*. Historia. Serie Cladema. Gedisa.
- Redondo, M. (2004). Teoría de galois. *Trabajos de Matemática de la FaMAF*, (31/04).
- Sángari, A. and C., E. (2012). Resolución de problemas con geogebra.
- Sángari, A. and Perez, C. (2011). Construcciones de polígonos regulares con regla y compás con la asistencia del geogebra. *Memorias del 20º Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones*, 1:307–314.
- Stewart, I. (2008). *Historia de las matemáticas: En los últimos 1000 años*. Crítica.

Nomenclatura

\mathbb{Z}_p^*	Grupo de los enteros módulo p multiplicativo sin el cero
\equiv	Símbolo de congruencia
\mathbb{Z}	El conjunto de los números enteros
\mathbb{Z}_p	Grupo de los enteros módulo p
\mathbb{C}	El conjunto de los números complejos
\mathbb{Q}	El conjunto de los números racionales
\mathbb{R}	El conjunto de los números reales
\mathcal{C}_i	i -esima circunferencia en una construcción
\overline{AB}	Segmento de extremos A y B
ρ_ϑ	El número complejo de módulo ρ y argumento ϑ es equivalente a $e^{i\vartheta}$
φ	Función de Euler
\widehat{BAC}	Ángulo de vértice A
ζ_n^k	k -esima raíz compleja del polinomio $x^n - 1 = 0$ es decir $1_{\frac{2\pi}{n}}$
AB	recta que pasa por A y B o semirrecta con origen en A y que pasa por B según el contexto
ABC	Triángulo de vértices A , B y C
$ABCD$	Cuadrilátero de vértices A , B , C y D
$Aut_K F$	El grupo de Galois de F sobre K
$Fij_F(H)$	El cuerpo fijo de H sobre F
O	Centro de Circunferencias u origen de coordenadas
U	Punto de abscisa 1

Índice alfabético

- Abul Wefa, 13
- Anaxágoras de Chazomene, 8
- Apolo, 9
- Aristóteles, 11
- Arquitas de Tarento, 9
- Atenas, 9
- Callaham, 10
- Cisoide, 12
- Compás
 - Antiguo, 17, 31
 - Euclídeo, 11
 - Ideal, 11
 - Moderno, 31
 - Oxidado, 13
 - Rígido, 13
- Compendius Euclidis Curiosi, 13
- Concoide, 12
- Construcción
 - Bisectriz, 25
 - Cuadrado, 24, 30
 - División de un segmento, 26
 - Dodecágono, 29
 - Heptadecágono regular, 47, 49
 - Hexágono, 29
 - Mediatriz, 20
 - Paralela, 23
 - Pentágono regular, 45
 - Perpendicular, 21, 22
 - Polígonos regulares, 27, 43, 44
 - Polígonos regulares de 3×2^n lados, 29
 - Polígonos regulares de 4×2^n lados, 31
- Raíces de una ecuación cuadrática, 50
- Raíz cuadrada, 49, 64
- Triángulo equilátero, 19, 28, 45
- Construcciones
 - Absolutas, 18
 - Básicas, 18
 - Elementales, 18
 - Relativas, 18
- Cuadratriz, 12
 - de Hipias, 8
 - de Tschirnhausen, 8
- Cuadratura del círculo, 8, 41
- Curvas
 - Mecánicas, 12
- Dawson, 14
- De Lingen, 14
- De Moivre, 41
- Delfos, 9
- Descartes, 12, 13
- Disquisiciones Aritméticas, 14
- Duplicación del cubo, 8, 40
- Eisenstein
 - Criterio de, 40, 41
- Elementos, 11, 12
- Elementos de las cónicas, 10
- Eratóstenes, 9
- Eratóstenes de Cirene, 9
- Espiral
 - de Arquímedes, 8
- Euclides, 11, 12, 14
- Extensiones de Cuerpos, 33
 - de Galois, 34, 39, 44

- Fermat
 - Primo de, 14, 44
- Función
 - de Euler, 44
- Galois, 34
- Gauss, 14, 60
 - Lema de, 40
- GeoGebra, 49, 63
 - Herramienta, 50, 63, 64
- Geogebra
 - Herramienta, 63
- Grecia, 7
- Heptágono Regular, 41
- Heptágono regular, 41
- Heptadecágono, 44
- Hipócrates de Quío, 9
- Lambert, 15
- Legendre, 15
- Leonardo Da Vinci, 13
- Leybourn, 13
- Lindemann, 41
- Lindenman, 8, 15
- Linderman, 34
- Liouville, 15
- Mascheroni, 13, 14
- Menecmo, 9, 10
- Minos, rey de Creta, 9
- Mohr, 13
- Números
 - Algebraicos, 33, 39
 - Construibles, 34–37
 - Trascendentes, 33
- Napoleón, 14
- Pappus, 12
- Pentágono, 44
- Pericles, 9
- Platón, 7, 8
- Plutarco, 8
- Poncelet, 13
- Problemas
 - Clásicos, 8, 39
 - Geométricos
 - Clasificación, 13
 - Lineales, 12
 - Planos, 12
 - Sólidos, 12
 - Richelot, 14
 - Rombo, 18
 - Secta de trisecadores, 10
 - Steiner, 13
 - Tenedor, 13
 - Transporte de Segmentos, 32
 - Triángulo equilátero, 44
 - Trisección de un ángulo, 10, 39
 - Wantzel, 10, 14, 57
 - Werner, 10