ENSEÑANZA DE CONSTRUCCIONES GEOMÉTRICAS CON RECURSOS ALGEBRAICOS

Luis Crespo

Universidad Nacional de Salta

(Avenida Bolivia N° 5150)

luiscrespo11@hotmail.com

Categoría del Trabajo: Reflexiones.

Nivel educativo: Universitario.

Palabras claves: Construcciones con regla y compás. Educación en Geometría. Extensiones de Cuerpos. Aplicaciones de la Teoría de Galois.

Resumen: En este trabajo presentamos una propuesta de una secuencia de conceptos algebraicos que explican la posibilidad o imposibilidad de las construcciones con regla y compás. En algunos planes de estudio se presentan los conceptos necesarios para justificar estos conceptos en un segundo curso de álgebra abstracta. Sin embargo estamos persuadidos que sería más provechoso e interesante presentarlo después de haber hecho una presentación de las construcciones geométricas y haber permitido a los estudiantes realizar construcciones concretas con regla y compás. Por lo tanto en una primera parte enunciaremos algunos conceptos algebraicos que servirán para mostrar que puntos en el plano complejo se pueden construir. En una segunda indicamos la imposibilidad de ciertas construcciones como por ejemplo los Problemas Delianos. Por último, presentamos argumentos algebraicos para justificar las construcciones. En todas estas partes indicamos una posible secuencia de actividades.

1. Introducción

La idea de este trabajo es ver qué construcciones geométricas pueden hacerse con el uso de una Regla no graduada, de un Compás, de un lápiz y una hoja. Los antiguos griegos se interesaron especialmente por los problemas geométricos asociados a figuras que pueden ser trazadas con los instrumentos más simples: una regla para trazar rectas y un compás para trazar circunferencias. Con más precisión, una construcción con regla y compás en sentido estricto no admite que se tracen rectas o circunferencias aleatorias. Para que una recta se pueda considerar 'construida' es necesario tener construidos dos de sus puntos, sobre los que apoyar la regla; un punto está construido cuando lo hemos determinado como intersección de dos rectas, dos circunferencias, o una recta y una circunferencia; finalmente, para construir una circunferencia tenemos que tener construido su centro, sobre el que clavar el compás, y su radio ha de ser la distancia entre dos a puntos construidos, con los que fijar la apertura del compás . Todos estamos acostumbrados en los niveles educativos a que se nos enseñen a trazar la bisectriz de un ángulo, la mediatriz de un segmento y a construir triángulos con regla y compás. Las cuestiones que pueden surgir y que trataremos de bosquejar una respuesta son:

- Dados dos puntos en el plano complejo ¿Que otros puntos podremos construir (con el uso de una regla y un compás)?
- ¿Qué puntos no podremos construir del plano complejo?

Los griegos ya tenían planteadas tres cuestiones que se denominan Problemas Delianos. (que hoy se consideran clásicas):

- La duplicación del cubo: a partir de un cubo dado, de volumen V, o construir un cubo de volumen $2V$.
- La trisección del ángulo: dado un ángulo cualquiera de medida α, construir otro ángulo de medida $\alpha/3$.
- La cuadratura del círculo: dado un círculo de área A, construir un cuadrado de área A.

Otra pregunta que puede formularse es:

- ¿Cuáles polígonos regulares pueden construirse usando regla y compás? .

2. Conceptos Necesarios

Para poder hablar de construcciones con regla y compás, se hace necesario tratar con conceptos como extensiones de cuerpos, que nos habla de posibilidad (o no) de poder construir puntos a partir de otros puntos dados. Estos conceptos fueron principalmente obtenidos del libro [Hu]. Los presentaremos sin demostración.

2.1. Extensiones de Cuerpos

Es esta sección contamos con que nuestros estudiantes hayan realizado un curso de Álgebra Abstracta, o sea que conocen los conceptos de grupos, anillos y cuerpos. Los cuales se mencionan en este trabajo. Comenzaremos con una definición básica para lo subsiguiente.

Definición 1. Un cuerpo F se dice que es una extensión de un cuerpo K (o simplemente una extensión de K) siempre que K sea un subcuerpo de F. La notación que se usa habitualmente para designar una extensión es $F : K$.

Podemos citar varios ejemplos de extensiones de cuerpos tales como $\mathbb{C} : \mathbb{R}$, $\mathbb{Q}\left(\sqrt[3]{2}\right) : \mathbb{Q}$, $\mathbb{C} : \mathbb{Q}$, $\mathbb{R}(i) : \mathbb{R}$, $\mathbb{R} : \mathbb{Q}$. Ahora a continuación damos la definición que se va a utilizar a lo largo del trabajo.

Definición 2. Se dice que una extensión $F : K$ es finita si F como K-espacio vectorial es de dimensión finita. A la dimensión de este espacio vectorial se le llama grado de la extensión y se denota $[F : K]$.

Si tomamos a F como un K-espacio vectorial, esto nos permite utilizar los conceptos y resultados del álgebra lineal en el estudio de los extensiones de cuerpos.

Un ejemplo sencillo puede estar dado si tenemos la extensión de cuerpos $\mathbb{C} : \mathbb{R}$, el grado de esta extensión es $[\mathbb{C} : \mathbb{R}] = 2$ porque $\{1, i\}$ es una base de $\mathbb{C}$, como espacio espacio vectorial. También tenemos extensiones que no son finitas tales como $\mathbb{R} : \mathbb{Q}$, $\mathbb{C} : \mathbb{Q}$, donde el grado de estas extensiones es infinita.

Definición 3. Sea $F : K$ una extensión de cuerpos. Decimos que un elemento $\alpha \in F$ es **algebraico** sobre K si existe un polinomio $p \in K[x]$, $p \neq 0$ tal que $p(\alpha) = 0$. En caso contrario, decimos que α es **trascendente**. F se llama **extensión algebraica** de K si cada elemento de F es algebraico sobre K. F se llama **extensión trascendental** si por lo menos un elemento de F es trascendental sobre K.

Por ejemplo, $i \in \mathbb{C}$ es algebraico sobre $\mathbb{R}$, pues es solución de $x^2+1 = 0$. También, $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$ es algebraico sobre $\mathbb{Q}$ pues es solución de $x^2 - 2 = 0$. Por otro lado, es posible demostrar que $\pi, e \in \mathbb{R}$ son trascendentales sobre $\mathbb{Q}$, o sea que no hay una ecuación polinómica con coeficientes en $\mathbb{Q}$ de la que π o e sean una raíz.

Definición 4. Sea F una extensión de K, y $S \subset F$ un subconjunto. Denotamos $K(S)$ al menor subcuerpo de F que contiene a K y S.

De esta definición podemos tener las extensiones de cuerpos tales como $\mathbb{Q}(i) \subset \mathbb{C}$, donde en este caso $S = \{i\}$ y $\mathbb{R}(i) = \{a + bi : a, b \in \mathbb{R}\}$ es el menor cuerpo que contiene a i y $\mathbb{R}$, esta extensión se la llama *extensión simple*, otro ejemplo puede ser la extensión $\mathbb{Q}\left(\sqrt{2}, \sqrt{3}\right) \subset \mathbb{C}$ donde $S = \left\{\sqrt{2}, \sqrt{3}\right\}$ y $\mathbb{Q}\left(\sqrt{2}, i\right) = \left\{a + b\sqrt{2} + ci + di\sqrt{2} : a, b, c, d \in \mathbb{Q}\right\}$ es el menor cuerpo que contiene a $\sqrt{2}$, i y $\mathbb{Q}$, a esta extensión se llama *extensión finitamente generada.*

Un resultado casi inmediato de estas definiciones es el siguiente, el cual, en lo que sigue sera de importancia para la resolución de uno de los problemas Delianos.

Teorema 5. *Sea F una extensión de E y E una extensión de K. Entonces* $[F : K] = [F : E]\,[E : K]$.

La utilidad de este teorema permite calcular el grado de una extensión dada, si se conoce el grado de las extensiones intermedias. Por ejemplo,el caso en de las extensiones $\mathbb{Q}\left(\sqrt{2}\right) : \mathbb{Q}$ y $\mathbb{Q}\left(\sqrt{2}, i\right) : \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ si se conoce $\left[\mathbb{Q}\left(\sqrt{2}\right) : \mathbb{Q}\right] = 2$ y $\left[\mathbb{Q}\left(\sqrt{2}, i\right) : \mathbb{Q}(\sqrt{2})\right] = 2$, se puede calcular $\left[\mathbb{Q}\left(\sqrt{2}, i\right) : \mathbb{Q}\right]$. Entonces tenemos por el teorema anterior que $\left[\mathbb{Q}\left(\sqrt{2}, i\right) : \mathbb{Q}\right] = \left[\mathbb{Q}\left(\sqrt{2}, i\right) : \mathbb{Q}(\sqrt{2}\right]\left[\mathbb{Q}\left(\sqrt{2}\right) : \mathbb{Q}\right] = 4$.

Proposición 6. *Sea $K \subseteq \mathbb{R}$ un cuerpo y sea $\alpha \in \mathbb{R}$ un elemento que es raíz de un polinomio mónico irreducible f sobre K de grado n. Entonces $[K(\alpha) : K] = n$.*

Si tomamos $K = \mathbb{Q}$ y $\alpha = \sqrt[3]{2}$, resulta que α es raíz del polinomio X^3-2, que es irreducible en $\mathbb{Q}\,[\mathbb{X}]$ por Einsestein. Por lo tanto $\left[\mathbb{Q}\left(\sqrt[3]{2}\right) : \mathbb{Q}\right] = 3$.

Definición 7. Si F es un subcuerpo del cuerpo $\mathbb{R}$ de los números reales, el **plano de** F es el subconjunto del plano formado por los puntos de la forma (c, d), con $c \in F$, $d \in F$. Si P ,Q son puntos distintos en el plano de F, la única recta que pasa por P y Q se llama **recta en** F y el círculo con centro en P y radio el segmento $\overline{PQ}$ se llama **círculo en** F. Se verifica que toda linea recta en F tiene una ecuación de la forma $ax + by + c = 0\ \ (a, b, c) \in F$ y todo círculo en F tiene una ecuación de la forma $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0\ \ (a, b, c) \in F$. Aceptaremos el siguiente resultado:

Lema 8. *Sea F un subcuerpo del cuerpo de los números reales $\mathbb{R}$ y sea L_1, L_2 lineas rectas no paralelas en F y $C_{1,}C_2$ círculos distintos en F. Entonces*

1. *$L_1 \cap L_2$ es un punto en el plano de F.*
2. *$L_1 \cap C_1 = \emptyset$ o consiste en uno o dos puntos en el plano de $F(\sqrt{u})$ para algún $u \in F$, $(u \geq 0)$.*
3. *$C_1 \cap C_2 = \emptyset$ o consiste en uno o dos puntos en el plano de $F(\sqrt{u})$ para algún $u \in F$, $(u \geq 0)$.*

3. Construcciones con Regla y Compás

Esta sección es una de las más bellas del trabajo. Veremos que el mundo artificial que hemos poblado en la anterior sección con las extensiones de cuerpos, no pertenece a la estratosfera de la abstracción matemática, sino que desciende suavemente hasta la base de nuestra historia para dar respuesta a tres cuestiones geométricas que no supieron resolver los antiguos griegos.

El problema de constructibilidad, o sea la posibilidad de ser construido, será planteado como el estudio de la posibilidad de obtener una figura geométrica en el plano complejo (o un conjunto de puntos que la determinen de modo único) a partir de dos puntos dados a los que asignaremos los reales 1 y 0, con el uso de una regla y un compás (perfectos) solamente. Por ejemplo, puesto que podemos construir lineas rectas perpendiculares, podemos construir todos los puntos en el plano de coordenadas enteras.

Un número real c se dice construible si el punto $(c, 0)$ puede ser localizado en el plano mediante una sucesión finita de construcciones con regla y compás que comiencen en un punto con coordenadas enteras. Claramente, el número c es construible si y sólo si se puede construir un segmento de longitud $|c|$. Más aún, el punto (c, d) en el plano es construible si y sólo si c y d son construibles. Notemos que los enteros son claramente construibles; además se puede probar los siguientes hechos:

1. Si c y d son construibles, entonces $c \pm d$, cd y $c/d\,(d \neq 0)$ son construibles.
2. Si c es construibles, entonces $\sqrt{c}$ también lo es.
3. Los números construibles son un subcuerpo de los números reales que contiene a los racionales y es cerrado bajo la extracción de raices cuadradas.

Este último hecho se deduce inmediatamente de los anteriores

El paso fundamental para relacionar el álgebra con las construcciones con regla y compás es calcular las posibles dimensiones de los cuerpos que generan los números construibles:

Proposición 9. *Si un número real c es construible, entonces c es algebraico de grado una potencia de 2 sobre el cuerpo $\mathbb{Q}$ de los racionales.*

Problemas Delianos

En esta parte de la sección mediante la aplicación de los conocimientos hasta ahora adquiridos sobre extensiones de cuerpos damos la solución a los problemas geométricos clásicos, que fueron la trisección de un ángulo, la duplicación del cubo y a la cuadratura del círculo, todo esto utilizando solamente la regla y el compás, estos problemas han llegado a ser famosos y han permanecido sin resolver durante mucho tiempo.

Corolario 10. *Un ángulo de α no puede ser trisecado por construcciones con regla y compás.*

Demostración. Trisecar un ángulo dado α es equivalente a: dado $\cos\alpha$, construir $\cos\alpha/3$. En efecto, tener un ángulo α es equivalente a tener el punto en la circunferencia unidad con ángulo α, es decir, a tener $(\cos\alpha, \sin\alpha)$, que es equivalente a tener sólo $\cos\alpha$.

Consideremos $\alpha = 60°$. Entonces $\cos\alpha = 1/2$. Tenemos la identidad

$\cos\alpha = 4\cos^3\alpha/3 - 3\cos\alpha/3$

En este caso si $\beta = \cos 20°$, la fórmula queda

$4\beta^3 - 3\beta - 1/2 = 0 \Rightarrow 8\beta^3 - 6\beta - 1 = 0 \Rightarrow (2\beta)^3 - 3(2\beta) - 1 = 0$

Si $\theta = 2\beta$, nos queda $\theta^3 - 3\theta - 1 = 0$. Construir β es equivalente a construir θ, pero θ es raíz del polinomio $p(x) = x^3 - 3x - 1$ de grado 3 que es irreducible sobre $\mathbb{Q}$. Tenemos entonces $[\mathbb{Q}(\theta) : \mathbb{Q}] = 3$, luego θ no es construible por proposición 9. □

Corolario 11. *Es imposible con regla y compás la construcción para duplicar un cubo de longitud de lado 1 .*

Demostración. Para duplicar el cubo unitario tendríamos que construir $\sqrt[3]{2}$ a partir de $\mathbb{Q}$, pero $\left[\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) : \mathbb{Q}\right] = 3$ que no es potencia de dos, por lo que por proposición 9, no es construible. □

Corolario 12. *Es imposible cuadrar un circulo con construcciones de regla y compás.*

Demostración. Para construir un cuadrado con misma área que un círculo de diámetro 1, tendríamos que construir $\sqrt{\pi}$. Pero si $\sqrt{\pi}$ fuera algebraico, también π sería algebraico. En efecto, si consideramos $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\pi) \subset \mathbb{Q}(\sqrt{\pi})$, entonces la transitividad de grados nos dice $[\mathbb{Q}(\sqrt{\pi}) : \mathbb{Q}] = [\mathbb{Q}(\sqrt{\pi}) : \mathbb{Q}(\pi)]\,[\mathbb{Q}(\pi) : \mathbb{Q}]$. Suponiendo el lado izquierdo finito, se tendría $[\mathbb{Q}(\pi) : \mathbb{Q}] < \infty$, absurdo. □

3.1. Polígonos Regulares.

Esta última parte de la sección, presentamos la posibilidad o imposibilidad de la construcción de los polígonos regulares que están muy presentes en el mundo real , así comenzamos dando una definición de polígono, y procederemos después a dar conceptos que nos servirá luego para justificar las construcción del pentágono y la imposibilidad de construcción del heptágono, como ejemplos de los conceptos que se darán, estos mismos fueron extraídos del libro [Iv], los cuales también se presentan sin demostración.

Definición 13. Diremos que n puntos $P_1, ..., P_n$, con $n \geq 3$ son los vértices de un polígono regular de n lados si están contenidos en una circunferencia y los arcos menores $\widehat{P_1P_2}, \widehat{P_2P_3}, ..., \widehat{P_nP_1}$ son todos disjuntos y tienen amplitud $\frac{2\pi}{n}$. Los lados del polígono son los segmentos $\overline{P_1P_2}, \overline{P_2P_3}, ..., P_nP_1$, el polígono con los vértices indicados es la intersección de todos los semiplanos respecto a las rectas $P_1P_2, P_2P_3, ..., P_nP_1$ que contienen a los vértices restantes. La circunferencia que contiene a los vértices de un polígono regular se llama circunferencia circunscrita al polígono (también se dice que el polígono está inscrito en la circunferencia). El centro y el radio de la circunferencia se llaman también centro y radio del polígono.

Fijada una circunferencia ω y un punto en ella, podemos tomar como 0 el centro y como 1 el punto dado, de modo que los vértices del n-ágono regular serían los números complejos de módulo 1y argumento $\frac{2k\pi}{n}$, para $n = 1, 2, 3, ...n - 1$.

Construir dicho polígono es, por definición, construir estos vértices, pero en realidad basta construir $\zeta_n = 1_{\frac{2\pi}{n}}$ pues, una vez construido éste, la circunferencia de centro ζ_n que pasa por 1 corta a ω en $1_{\frac{4\pi}{n}}$, la circunferencia de centro $1_{\frac{4\pi}{n}}$ y que pasa por $1_{\frac{2\pi}{n}}$ corta a ω en $1_{\frac{6\pi}{n}}$, y de este modo se construyen los vértices restantes.

Así pues, un polígono regular de n vértices es construible si y sólo si lo es el número complejo

$\zeta_n = \cos(\frac{2\pi}{n}) + i\sin(\frac{2\pi}{n})$.

En términos algebraicos, ζ_n es una raíz n-ésima primitiva de la unidad, el cuerpo $\mathbb{Q}(\zeta)$ es el cuerpo ciclotómico n-ésimo, que es una extensión de Galois de grado $\varphi(n)$, donde φ es la función de Euler. El siguiente resultado nos da una caracterización.

Teorema 14. *El polígono regular de n vértices es construible con regla y compás si y sólo si es producto de una potencia de 2 y de primos de Fermat con exponente 1.*

Teorema 15. *Los polígonos regulares de n vértices son construibles con regla y compás si y sólo si $\varphi(n)$ es potencia de 2.*

Notemos que la constructibilidad de los polígonos regulares de n vértices equivale a la constructibilidad de lo ángulos de amplitud $\frac{2\pi}{n}$.

3.1.1. El pentágono regular se puede construir con regla y compás.

Sea $F : \mathbb{Q}$ la extensión de cuerpos, donde $F = \mathbb{Q}(\zeta)$ es cuerpo ciclotómico quinto, que es una extensión de Galois de grado $\varphi(5) = 4$,que por teorema nos dice que si el polígono regular de 5 vértices es construible con regla y compás si y sólo si $\varphi(5)$ es potencia de 2, por lo tanto el pentágono regular es construible con regla y compás. Notemos que la constructibilidad del pentágono regular equivale a la constructibilidad de los ángulos de amplitud $\frac{2\pi}{5}$.

Consideremos el pentágono regular inscripto en la circunferencia de centro $(0, 0)$ y radio 1 con vértice en el $(0, 1)$. Las coordenadas del vértice en el primer cuadrante son

$(\cos\frac{2\pi}{5}, \sin\frac{2\pi}{5})$. Si lo pensamos como número complejo, es el número $\zeta = \cos\frac{2\pi}{5} + i\sin\frac{2\pi}{5}$. Y tenemos también que ζ es la raíz quinta de la unidad, osea $\zeta^5 = 1$ (fórmula de De Moivre), es decir queζ es raíz del polinomio:

$x^5 - 1 = (x-1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$

Pero como $\zeta \neq 1$, resulta que satisface

$\zeta^4 + \zeta^3 + \zeta^2 + \zeta + 1 = 0$

Sacando factor común ζ^2, se tiene que

$\zeta^2 + \zeta + 1 + \zeta^{-1} + \zeta^{-2} = (\zeta + \zeta^{-1})^2 + (\zeta + \zeta^{-1}) + 1 = 0$

Pero

$(\zeta + \zeta^{-1}) = \cos(\frac{2\pi}{5}) + i\sin(\frac{2\pi}{5}) + \cos(\frac{2\pi}{5}) - i\sin(\frac{2\pi}{5}) = 2\cos(\frac{2\pi}{5})$

Con lo que $2\cos\frac{2\pi}{5}$ resulta ser raíz positiva del polinomio $x^2 + x - 1$ que es irreducible en $\mathbb{Q}[x]$. Luego, $\left[\mathbb{Q}(2\cos(\frac{2\pi}{5}) : \mathbb{Q}\right] = 2$ que es una potencia de 2. Por lo tanto, el número $\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$ es construible con regla y compás, por lo tanto el pentágono regular es construible.

3.1.2. El heptágono regular no se puede construir con regla y compás.

El heptágono regular no se puede construir con regla y compás. Consideremos el número complejo $\zeta = \cos(\frac{2\pi}{7}) + i\sin(\frac{2\pi}{7})$. Por el mismo razonamiento que hicimos antes, tenemos que

$\zeta^6 + \zeta^5 + \zeta^4 + \zeta^3 + \zeta^2 + \zeta + 1 = 0$

Sacando factor común ζ^3, tenemos que

$\zeta^3 + \zeta^2 + \zeta + 1 + \zeta^{-1} + \zeta^{-2} + \zeta^{-3} = (\zeta + \zeta^{-1})^3 + (\zeta + \zeta^{-1})^2 - 2(\zeta + \zeta^{-1}) + 1 = 0$

Pero $(\zeta + \zeta^{-1}) = 2\cos(\frac{2\pi}{7})$ ser raíz del polinomio $X^3 + X^2 - 2X + 1$, que es irreducible en $\mathbb{Q}[X]$. Luego, $\left[\mathbb{Q}(2\cos(\frac{2\pi}{7}) : \mathbb{Q}\right] = 3$ que no es una potencia de 2. Por lo tanto, el número $2\cos\frac{2\pi}{7}$ no es construible con regla y compás y, entonces $\cos(\frac{2\pi}{7})$ tampoco lo es, con lo que el heptágono regular no es construible.

4. Conclusiones

Se cuenta que lo que llevó al matemático Gauss a dedicarse a la Matemática fue la construcción del heptadecágono regular [Pe]. Al parecer esta devoción la llevó toda su vida, hasta el punto que también se cuenta que diseñó la construcción del heptadecágono para la decoración de su propia lápida mortuoria. Este encantamiento debería servirnos en nuestro objetivo de enseñar Matemáticas, en particular Geometría. Sumado a este hecho, si podemos mostrar cómo el Álgebra Abstracta se alinea con la Geometría para responder cuestiones antiguas de esta última, tendríamos entre manos un material altamente motivador para nuestro quehacer docente.

Pensamos que este trabajo puede servir como una guía a aquellos docentes que deban incluir estos temas en su cátedra. El ordenamiento de los conceptos puede ser como el indicado anteriormente. Naturalmente, desarrollando los conceptos algebraicos de acuerdo a las propias circunstancias. Pero creemos que deben mantenerse ligados, en cada instancia, los conceptos algebraicos con las aplicaciones geométricas, para que de esa ligadura puedan brillar ambas disciplinas.

Referencias

[Hu] Hungerford, Tomas. Algebra. New York. Springer ,1974.

[Iv] Ivorra, Carlos. Geometría. Valencia. 2010.

[Pe] Perez, P. Sángari, A. Construcciones de polígonos regulares con regla y compás con la asistencia del Geogebra” Actas del Encuentro recuperado de http://www.encuentrogeometriaupn.com/ (páginas 307 a 314) Universidad Pedagógica Nacional. Bogotá – Colombia. 2011