

Amortiguadores de masa sintonizados - Parte 1

Luis Damián García Vega, José de Jesús García Piña, Gabriel Peytral Borja

09/12/2021

Proyecto final de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias:

Amortiguadores de masa sintonizados

Introducción

Los amortiguadores de masa sintonizada son masas vibrantes que se mueven fuera de fase con el movimiento de alguna estructura en la que se está suspendida, generalmente se instalan en la parte superior de los edificios y que al estar en sintonía con la frecuencia de movimiento del edificio funcionan como un contrapeso que oscila y contrarresta el movimiento del edificio disipando la energía de un terremoto o del viento.

Esta no es la única aplicación práctica que tienen, también pueden ser usados en mesas de cirugía para evitar el movimiento de estas durante una intervención quirúrgica de alta precisión.

La eficacia de disipación de energía de un TMD depende de la precisión de su sintonía, el tamaño de su masa en comparación con la masa modal de su modo objetivo, es decir, su relación de masa, y la extensión de la amortiguación interna incorporada en el amortiguador de masa sintonizado.

Básicamente, uno puede pensar en un TMD como un contrapeso mecánico para una estructura que consta de una masa en movimiento (aproximadamente 1 a 2% de la masa de la estructura).

Modelado de un amortiguador de masa sintonizado

Representamos la rigidez de la masa original de un sistema usando un resorte y la absorción de energía usando un amortiguador. Adjuntaremos un resorte y un amortiguador (TMD) a la masa original y exploraremos qué tanto se puede reducir las vibraciones debidas a fuerzas externas. Se caracterizará el desplazamiento de la masa sobre una posición de equilibrio inicial por un solo grado de libertad. Sin embargo, en el caso del TMD, agregaremos una segunda masa y un resorte a la masa primaria. El desplazamiento de la masa TMD se caracterizará por un grado separado de libertad sobre su propia posición de equilibrio inicial. Por lo tanto, un TMD es un par de osciladores armónicos amortiguados acoplados.

Una gran masa m_1 en un “resorte” con constante de resorte k_1 se acopla a una masa más pequeña m_2 por un resorte con constante de resorte k_2 y un amortiguador con coeficiente de amortiguación c_2 . La gran masa también podría estar naturalmente amortiguada con un coeficiente de amortiguación o de restauración c_1 . Para nuestro estudio, tomamos $c_1 = 0$ y $c_2 = 0$. Es decir, supondremos que no hay resistencia ni amortiguamiento de la masa original o del TMD. Al ajustar los valores de m_2 y k_2 la amplitud máxima de las oscilaciones de m_1 se puede reducir.

En este caso sin resistencia ($c_1 = 0$ y $c_2 = 0$) cuando aplicamos una carga externa o fuerza impulsora, $f(t)$, tenemos el siguiente modelo de ecuación diferencial de un solo grado de libertad para el desplazamiento, $y(t)$, de nuestra masa desde su equilibrio estático, es decir, un sistema de resorte-masa (sin salpicadero):

$$my''(t) + ky(t) = f(t), \quad (1)y(0) = y_0, y'(0) = v_0;$$

La frecuencia natural de masa m_1 se puede obtener de la solución de la porción homogénea, (2), de nuestra ecuación diferencial (1),

$$my''(t) + ky(t) = 0, \quad (2)y(0) = y_0, y'(0) = v_0;$$

De (3) vemos que la frecuencia natural de la solución no impulsada u homogénea de (2) es $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ mientras que la solución homogénea completa para (1) es:

$$y(t) = \frac{v_0 \sqrt{m} \sin(\sqrt{\frac{k}{m}} t) + y_0 \sqrt{k} \cos(\sqrt{\frac{k}{m}} t)}{\sqrt{k}}, \quad (3)$$

Recuerde lo que sucede si la función del controlador $f(t)$ tiene la misma frecuencia que la frecuencia natural, del sistema resorte-masa - RESONANCIA y problema. Para ver ésto dividimos ambos lados de (1) por m y reordene la ecuación resultante usando

$$t\omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

para obtener (4):

$$y''(t) + \omega_0^2 y(t) = \frac{1}{m} f(t), \quad (4)y(0) = y_0, y'(0) = v_0$$

Ahora, si $f(t) = \sin(\omega t)$ y este controlador tiene la misma frecuencia natural que nuestro sistema de masas, es decir, $\omega = \omega_0$, entonces nuestra solución de (4) es:

$$y(t) = -\frac{t \cos(\omega t)}{2m\omega_0} + \frac{\sin(\omega_0 t)}{2m\omega_0^2} - \frac{\sin(\omega_0 t) \cos^2(\omega_0 t)}{2m\omega_0^2} + \frac{\sin(2\omega_0 t) \cos(\omega t)}{4m\omega_0^2} + \frac{v_0 \sin(\omega_0 t)}{\omega_0} + y_0 \cos(\omega_0 t), \quad (5)$$

El término clave en esta solución es el primer término. Todos los demás términos son del periodo $\frac{2\pi}{m}$ con amplitudes finitas. El primer término $\frac{-t \cos(\omega_0 t)}{2\omega_0}$ crece sin límite y en consecuencia nos referimos a este fenómeno de solución como resonancia. Para los siguientes valores, $\omega_0 = 1$, $y_0 = 2$, $v_0 = 0$ y $m = 1$ se grafique nuestra solución (5) sobre el intervalo de tiempo $[0, 100]$ en la Figura 1 y observe que la solución crece indefinidamente; esto es resonancia.

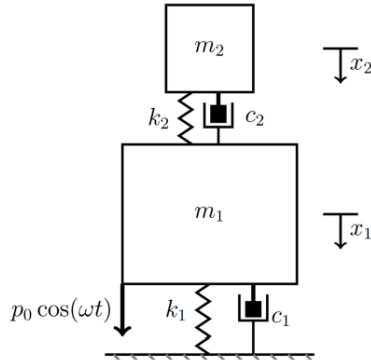
Actividad 1

Usando la Segunda Ley de Newton, que dice que la masa multiplicada por la aceleración de esa masa es igual a la suma de todas las fuerzas externas que actúan sobre la masa, y la Figura 4 como fuente del Diagrama de cuerpo libre, muestran que las ecuaciones que gobiernan los movimientos de la estructura y el amortiguador están dadas por:

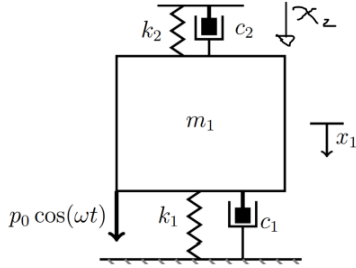
$$m_1 x_1''(t) = -k_1 x_1(t) - c_1 x_1'(t) - k_2(x_1(t) - x_2(t)) - c_2(x_1'(t) - x_2'(t)) + p_0 \cos(\omega t), \quad (1)$$

$$m_2 x_2''(t) = -k_2(x_2(t) - x_1(t)) - c_2(x_2'(t) - x_1'(t)), \quad (2)$$

Observando el diagrama del TMD, notamos que podemos dividir en las dos masas junto con sus componentes aledaños.



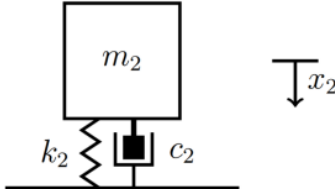
La ecuación (1) se describe dividiendo el sistema:



$$F_0 m_1 + F_1 c_1 + F_2 k_1 + F_3 k_2 + F_4 c_2 = P_0 \cos(\omega t)$$

Puesto que $x(t)$ está en unidades de fuerza, sustituimos las diferentes formulas y obtenemos (1)

La ecuación (2) se da mediante el siguiente diagrama:



$$F_0 m_2 + F_2 k_2 + F_3 c_2 = 0$$

Por lo tanto las ecuaciones iniciales se dan mediante la 2da ley de Newton, sustituyendo la suma de todas las fuerzas.

Actividad 2

- a) Determine la forma de las ecuaciones de la actividad anterior cuando $c_1 = 0$ y $c_2 = 0$.

$$m_1 x_1''(t) = -k_1 x_1(t) - k_2(x_1(t) - x_2(t)) + p_0 \cos(\omega t), (1^*)$$

$$m_2 x_2''(t) = -k_2(x_2(t) - x_1(t)), (2^*)$$

- b) En el sistema resultante use $m_1 = 10$ y $k_1 = 90$ con $y(0) = 0$ y $y''(0) = 0$, mientras que $f(t) = 10 \cos(3t)$ y establezca $m_2 = 1$ con $k_2 = 0$, es decir, retirando el segundo sistema de masas. Explique los resultados de importancia física e impacto de los números 10, 90 y 3 en la oración anterior en términos del movimiento del oscilador inicial.

$$10x_1''(t) = -90x_1(t) + 10\cos(3t)$$

$$x_2''(t) = -x_1(t)$$

Los valores de las variables del sistema nos proveen de información útil para interpretar nuestras ecuaciones. El valor de $k_2 = 0$ elimina por completo la constante del resorte quedándonos solamente con la fuerza aplicada a la estructura. El valor $m_1 = 10$ en contraste con $m_2 = 1$ nos indica que m_2 es el 10% de m_1 . Esto es una relación de masa un poco exagerado en términos prácticos. El valor $k_1 = 90$ nos indica una constante alta que indica que requerirá una fuerza mayor para mover la masa. El valor de $\omega = 3$ nos indica que $k = 9m$. Es decir que la frecuencia natural da como resultado 3.

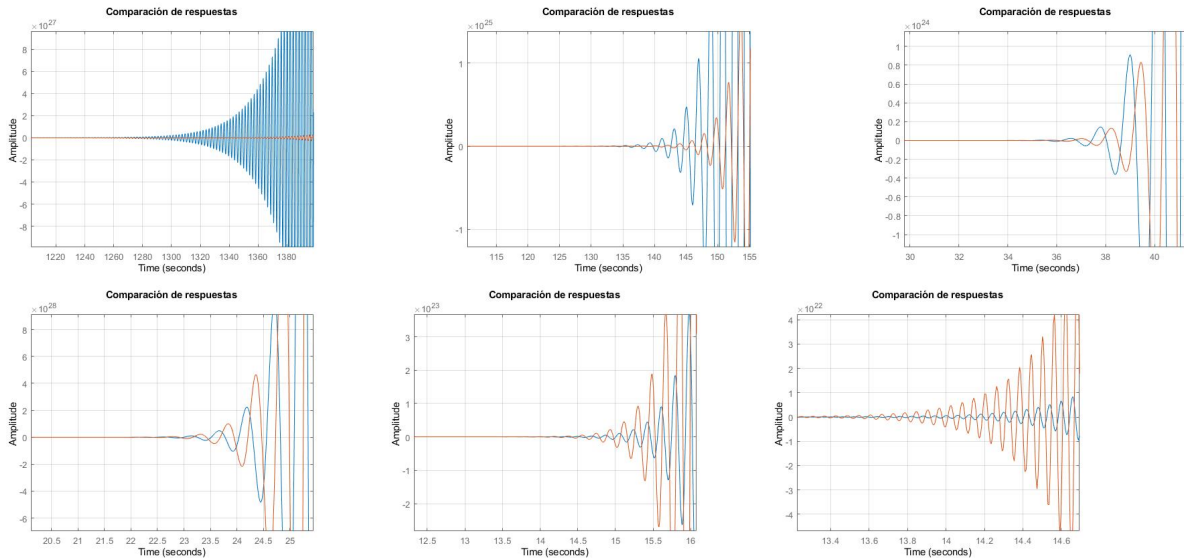
- c) Resuelva la ecuación diferencial simple resultante para el movimiento de la masa m_1 durante un intervalo de tiempo de 20 unidades y grafique el desplazamiento de esa masa, $x_1(t)$, durante ese intervalo de tiempo. Explique las observaciones. *Cálculos:*

https://drive.google.com/file/d/1IIkrJmsNC-0gljtXQ_LOO4ae-1JUD1a6/view?usp=sharing

<https://drive.google.com/file/d/1IZ9YWFgteNLFU6vdUNTTEpDHn0TNbrJn/view?usp=sharing>

- d) En las ecuaciones de la actividad anterior use los valores $m_1 = 10$ y $k_1 = 90$ con $y(0) = 0$ y $y'(0) = 0$ mientras $f(t) = 10 \cos(3t)$ y establezca $m_2 = 1$ con valores variables de k_2 . Mantenga $c_1 = 0$ y $c_2 = 0$. ¿Qué observa en la amplitud máxima de la masa inicial m_1 cuando se cambia k_2 ?

A medida que k_2 aumenta, la amplitud máxima de m_1 disminuye.

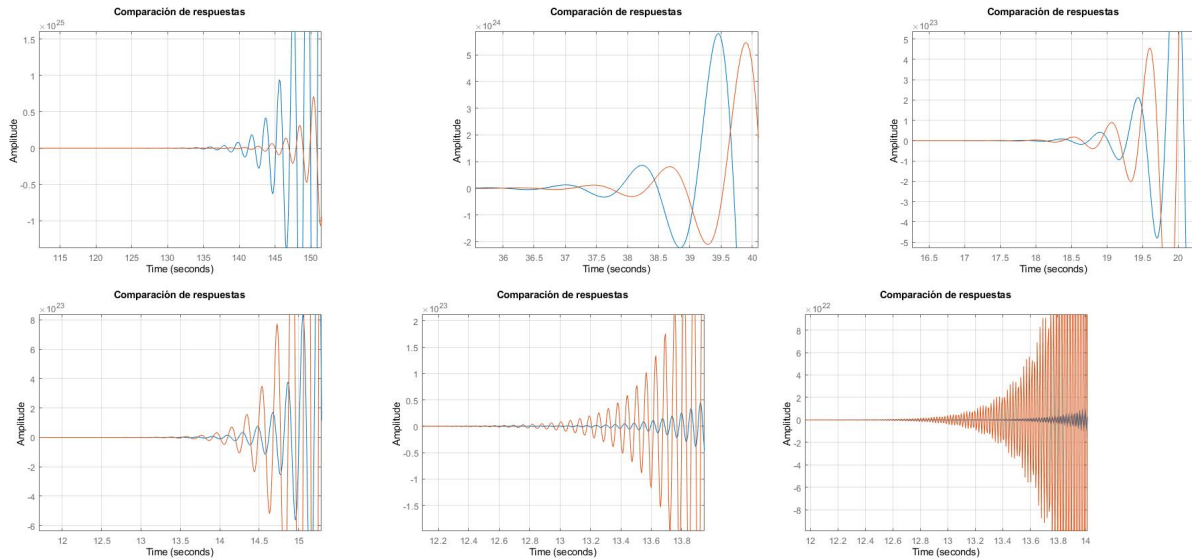


- e) De (d) ¿cuál es el “mejor” valor de k_2 ?
- Un valor más alto en k disminuye el tiempo de respuesta y las oscilaciones de la masa más grande. Por lo tanto el valor para la constante del resorte $k_2 = 10,000$ es el mejor valor.
- f) Para obtener el mejor valor de k_2 , determine el desplazamiento de amplitud máximo para la masa m_1 , $x_1(t)$ en un rango de frecuencias

Actividad 3

Consideremos otra configuración comparable a la Actividad 2 para la práctica. Observe que la masa m_2 es solo el 1% de la masa m_1 , lo cual es bastante realista en el diseño estructural cuando se utilizan TMD.

- a) Determine la forma de las ecuaciones de la actividad anterior cuando $c_1 = 0$ y $c_2 = 0$ b) En el sistema resultante use $m_1 = 10$ y $k_1 = 90$ con $y(0) = 0$ y $y'(0) = 0$ mientras $f(t) = 10 \cos(3t)$ y ajuste $m_2 = 0.1$ con $k_2 = 0$, es decir, retire el segundo sistema de masa. Explique la importancia física e impacto de los números 10, 90 y 3 en la oración anterior en términos del movimiento del oscilador inicial. c) Resuelva la ecuación diferencial simple resultante para el movimiento de la masa m_1 durante un intervalo de tiempo de 20 unidades y grafique el desplazamiento de esa masa, $x_1(t)$, durante ese intervalo de tiempo. Explique las observaciones.
- d) En las ecuaciones de la actividad anterior use los valores $m_1 = 10$ y $k_1 = 90$ con $y(0) = 0$ y $y'(0) = 0$ mientras $f(t) = 5 \cos(3t)$ y establezca $m_2 = 0.1$ con valores variables de k_2 . Mantenga $c_1 = 0$ y $c_2 = 0$. ¿Qué observa en la amplitud máxima de la masa inicial m_1 cuando se cambia k_2 ? A medida que k_2 aumenta, la amplitud máxima de m_1 disminuye.



- e) De (d) ¿cuál es el “mejor” valor de k_2 ? Un valor más alto en k disminuye el el tiempo de respuesta y las oscilaciones de la masa más grande. Por lo tanto el valor para la constante del resorte $k_2 = 10,000$ es el mejor valor.
- f) Para obtener el mejor valor de k_2 , determine el desplazamiento de amplitud máximo para la masa $m_1, x_1(t)$ en un rango de frecuencias

Actividad 4

Del material introductorio para este escenario ofrecido anteriormente y los análisis en las Actividades 2 y 3 realiza una descripción de cómo construir un TMD para detener los fenómenos de resonancia en el caso de las siguientes ecuaciones, que son el caso de las ecuaciones de la actividad 1 donde no hay amortiguamiento, es decir, $c_1 = 0$ y $c_2 = 0$:

$$m_1 x_1''(t) = -k_1 x_1(t) - k_2(x_1(t) - x_2(t)) + p_0 \cos(\omega t), (1)$$

$$m_2 x_2''(t) = -k_2(x_2(t) - x_1(t)), (2)$$

Cálculos: https://drive.google.com/file/d/1hOhWC6mFchmd_5QtLWcilszbOfT_JI1/view?usp=sharing