Variable Compleja

Luis David Diaz Chica

Septiembre 19, 2016

Departamento de Matemáticas y Estadística, Universidad del Norte

Ejercicios

1. Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un dominio. Pruebe que si f es holomorfa en Ω con $|f|$ constante, entonces f es constante.

   Demostración:
   Sea $f = u + \boldsymbol{i}v$, tal que $|f| = |u + \boldsymbol{i}v| = \sqrt{u^2 + v^2}$.

   Partiendo del supuesto inicial que $|f|$ es constante, se tendría entonces que $u^2 + v^2 = A$, donde A es una constante cualquiera. Se considerarán los casos $A = 0$ y $A \neq 0$.

   - Si $A = 0$ ya se tendría la demostración pues la única opción para que $A = 0$ es que $u = 0$ y $v = 0$ pues $u^2 + v^2 = A$, es decir $u \geq 0$ y $v \geq 0$. Por lo tanto, $f = u + \boldsymbol{i}v = 0$ lo cual es constante.
   - Si $A \neq 0$ y se consideran las derivadas parciales de $u^2 + v^2 = A$ se obtiene:

     $$2u\frac{\partial u}{\partial x} + 2v\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial A}{\partial x} = 0$$

     $$2u\frac{\partial u}{\partial y} + 2v\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial A}{\partial y} = 0$$

     Al tomar como factor común 2 en estas dos expresiones se obtiene lo siguiente:

     $$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial A}{\partial x} = \frac{0}{2} = 0 \tag{0.1}$$
     $$u\frac{\partial u}{\partial y} + v\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial A}{\partial y} = \frac{0}{2} = 0 \tag{0.2}$$

Como f es holomorfa en Ω entonces se satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemman, esto es:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \tag{0.3}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \tag{0.4}$$

Reemplazanado (0.3) y (0.4) en (0.1) y (0.2) respectivamente se obtiene:

$$u\frac{\partial v}{\partial y} + v\frac{\partial v}{\partial x} = 0 \tag{0.5}$$

$$-u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} = 0 \tag{0.6}$$

Se multiplicará la expresión (0.5) por v y la expresión (0.6) por u, esto es:

$$uv\frac{\partial v}{\partial y} + v^2\frac{\partial v}{\partial x} = 0 \tag{0.7}$$

$$-u^2\frac{\partial v}{\partial x} + uv\frac{\partial v}{\partial y} = 0 \tag{0.8}$$

Al igualar las ecuaciones (0.7) y (0.8) se obtiene:

$$uv\frac{\partial v}{\partial y} + v^2\frac{\partial v}{\partial x} = -u^2\frac{\partial v}{\partial x} + uv\frac{\partial v}{\partial y} \tag{0.9}$$

Se suman los términos de los dos lados de esta última igualdad, esto es:

$$(u^2 + v^2)\frac{\partial v}{\partial x} = 0 \tag{0.10}$$

Entonces, de la ecuación (0.10) se tiene que:

$$u^2 + v^2 = 0 \quad ó \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \tag{0.11}$$

Si $u^2 + v^2 = 0$, es decir considerando $A = 0$ ya se obtuvo que la única forma es que $u = 0$ y $v = 0$ y por tanto $f = 0$ lo cual es constante.

Por otro lado, si $\frac{\partial v}{\partial x} = 0$, por las ecuaciones de Cauchy-Riemman se cumple también que:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

Reemplazando estos resultados en las derivadas parciales de $u^2 + v^2 = A$ se obtendría que:

$$\frac{\partial v}{\partial y} = 0 = \frac{\partial u}{\partial x}$$

Es decir, $f'(z) = 0$ y para que esto se de la única opción es que f sea constante.

2. Verifique que la función $u : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$u(x, y) = e^{-x}(x \sin y - y \cos y)$$

es armónica. Halle v tal que $f = u + iv$ sea holomorfa.

Demostración: Para verificar que la función $u : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ es armónica se debe probar que tiene derivadas parciales de segundo orden continuas y además que se satisface la ecuación de Laplace, esto es:

$$\begin{aligned} \triangle u &= 0 \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= 0 \end{aligned}$$

Esto es,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

A continuación se obtendrán las derivadas de primer y segundo orden de la función u:
Primero se obtendrán las derivadas de primer y segundo orden con respecto a x:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= e^{-x} \sin y - x e^{-x} \sin y + y e^{-x} \cos y \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= -e^{-x} \sin y - e^{-x} \sin y + x e^{-x} \sin y - y e^{-x} \cos y \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= -2e^{-x} \sin y + x e^{-x} \sin y - y e^{-x} \cos y \end{aligned}$$

Y ahora se obtendrán con respecto a y:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = xe^{-x}\cos y - e^{-x}\cos y + ye^{-x}\sin y$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -xe^{-x}\sin y + e^{-x}\sin y + e^{-x}\sin y + ye^{-x}\cos y$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2e^{-x}\sin y - xe^{-x}\sin y + ye^{-x}\cos y$$

De las derivadas parciales de u se observa que se satisface que son continuas, ahora se comprobará que se satisface la ecuación de Laplace:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$
$$-2e^{-x}\sin y + xe^{-x}\sin y - ye^{-x}\cos y = -(2e^{-x}\sin y - xe^{-x}\sin y + ye^{-x}\cos y)$$
$$-2e^{-x}\sin y + xe^{-x}\sin y - ye^{-x}\cos y = -2e^{-x}\sin y + xe^{-x}\sin y - ye^{-x}\cos y$$

Y de esta forma, se comprueba que también se satisface la ecuación de Laplace y así las condiciones necesarias para comprobar que u es armónica.
Para hallar v de tal forma que $f = u + \boldsymbol{i}v$ sea holomorfa, se debe hallar la función armónica conjugada de u.
Como el próposito de esta función f es que sea holomorfa, esta función armónica debe cumplir las ecuaciones de Cauchy-Riemman.
Esto es,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \tag{0.12}$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \tag{0.13}$$

De la expresión (0.12) es posible obtener v como se muestra a continuación:

$$v = \int \frac{\partial u}{\partial x}\, dy$$
$$v = \int (e^{-x}\sin y - xe^{-x}\sin y + ye^{-x}\cos y)\, dy$$
$$v = xe^{-x}\cos y + ye^{-x}\sin y + h(x) \tag{0.14}$$

A continuación se derivará la expresión (0.14) con respecto a x y con la segunda condición de las ecuaciones de Cauchy-Riemman, es decir la expresión (0.13) se hallará $h(x)$.

$$\frac{\partial v}{\partial x} = e^{-x}\cos y - xe^{-x}\cos y - ye^{-x}\sin y + h'(x) \tag{0.15}$$

Y por la condición de Cauchy-Riemman se debe cumplir que:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} \tag{0.16}$$

Pero ya se había obtenido que:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = xe^{-x}\cos y - e^{-x}\cos y + ye^{-x}\sin y \tag{0.17}$$

Reemplazando (0.17) en (0.16) y (0.15) en (0.16) se obtiene:

$$e^{-x}\cos y - xe^{-x}\cos y - ye^{-x}\sin y + h'(x) = -(xe^{-x}\cos y - e^{-x}\cos y + ye^{-x}\sin y)$$

De lo cual se obtiene que:

$$h'(x) = 0$$

Por lo que:

$$h(x) = A, \qquad A \in \mathbb{R}.$$

Y así la armónica conjugada v de u es:

$$v = xe^{-x}\cos y + ye^{-x}\sin y + A$$

Donde u y v son continuas en todo $\mathbb{R}^2$ y por tanto $f = u + iv$ es holomorfa.

3. Sea $D = B(0_{\mathbb{R}^2}, 2)\setminus\{0_{\mathbb{R}^2}\}$. Considere la función $u : \mathbf{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $u(x, y) = \log(x^2 + y^2)$. Muestre que u es armónica en $\mathbf{D}$ y que u no tiene una armónica conjugada en $\mathbf{D}$.

   Demostración: Para verificar que u es armónica en D se debe probar que tiene derivadas parciales de segundo orden continuas y además que se satisface la ecuación de Laplace, esto es:

   $$\triangle u = 0$$

   Por la definición de u y el dominio en el que está definida se observa que tiene derivadas de segundo orden continuas por lo que se procederá a probar que se satisface la ecuación de Laplace.
   Reescribiendo la ecuación de Laplace se tiene:

   $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \tag{0.18}$$

A continuación se obtendrán las derivadas de primer y segundo orden para luego comprobar que se satisface la ecuación de Laplace.

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{2x}{x^2+y^2}\\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{2(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}\end{aligned} \tag{0.19}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{2y}{x^2+y^2}\\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}\end{aligned} \tag{0.20}$$

Reemplazando la expresión (0.19) y (0.20) en (0.18) se obtiene:

$$\frac{2(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2} = -\frac{2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

Y así al probar que se cumplen las dos condiciones para que una función sea armónica se obtiene entonces que en efecto u es armónica en D.
Por otro lado, de existir una conjugada armónica de u se deberían satisfacer las ecuaciones de Cauchy-Riemman. Se pretende llegar a una contradicción asumiendo que si existe una armónica conjugada de u en D.
Esto es,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \tag{0.21}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \tag{0.22}$$

Se obtendrá v a partir de la expresión (0.21), esto es:

$$\begin{aligned}v &= \int \frac{\partial u}{\partial x} \; dy\\ v &= \int \frac{2x}{x^2+y^2} \; dy\end{aligned} \tag{0.23}$$

Esta integral se resolverá por sustitución trigonometrica, realizando las siguientes sustituciones:

$$y = x\tan z \tag{0.24}$$

$$dy = x\sec^2 z \;\; dz \tag{0.25}$$

Al sustituir la expresión (0.24) y (0.25) en la expresión (0.23) se obtiene lo siguiente:

$$v = \int \frac{2x(x\sec^2 z)dz}{x^2(1+\tan^2 z)} \tag{0.26}$$

Para proceder con la integral se considerará la identidad trigonométrica siguiente:

$$1 + \tan^2 z = sec^2 z \tag{0.27}$$

Y de esta forma, al reemplazar la expresión (0.27) en la expresión (0.26) se obtiene:

$$v = \int 2 \ \ dz$$
$$v = 2z + h(x)$$

De la expresión (0.24) se despejará z como se presenta a continuación:

$$z = \arctan(\frac{y}{x})$$

Y entonces,

$$v = 2\arctan(\frac{y}{x}) + h(x) \tag{0.28}$$

Con el supuesto de armónica conjugada también se debe satisfacer la otra ecuación de Cauchy-Riemman, esto es:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \tag{0.29}$$

A continuación se derivará la expresión (0.28) con respecto a x, esto es:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{-2y}{x^2+y^2} + h'(x) \tag{0.30}$$

Al reemplazar la expresión (0.30) en la expresión (0.29) se obtiene:

$$-(\frac{-2y}{x^2+y^2} + h'(x)) = \frac{\partial u}{\partial y} \tag{0.31}$$

Pero $\frac{\partial u}{\partial y}$ ya se había obtenido,

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{2y}{x^2+y^2}$$

Al reemplazar esta expresión en (0.31) se obtiene lo siguiente:

$$-(\frac{-2y}{x^2+y^2}+h'(x))=\frac{2y}{x^2+y^2}$$

De aquí se obtiene $h'(x)=0$.

Sí $h'(x)=0$ entonces se sigue que $h(x)=C$ donde C es la constante de integración. Y finalmente:

$$v=\int\frac{2x}{x^2+y^2}\,dy=2\arctan(\frac{y}{x})+C$$

Y entonces para que v sea armónica conjugada de u debe ser de la forma:

$$v=\arctan(\frac{y}{x})+C$$

Pero, a pesar que v satisface las ecuaciones de Cauchy-Riemman no es posible que sea una armónica conjugada pues en el dominio definido la función v presenta discontinuidades $\forall x=0\in \boldsymbol{D}$ lo cual significaría que v no seria diferenciable en todo el dominio y por tanto $f=u+\boldsymbol{i}v$ no sería holomorfa.

A continuación se mostrará una solución alternativa para demostrar que u no tiene armónica conjugada en **D** la cual es presentada en el texto *Complex Analysis de John Duncan*.
Para esta solución alternativa se procederá nuevamente por contradicción, es decir suponiendo que si existe una armónica conjugada de u en D.
Además se utilizará una función auxiliar g. Se define $g:[0,2\pi]\longrightarrow\mathbb{R}$. como:

$$g(t)=v(\cos t,\sin t)\quad t\in[0,2\pi]$$

Se observa que $g\in C_R([0,2\pi])$, donde C_R denota el conjunto de todas las funciones continuas en ese intervalo, con $g(0)=g(2\pi)$ por la periodicidad en los complejos.
Al derivar esta expresión teniendo en cuenta la regla de la cadena se obtiene:

$$g'(t)=\frac{\partial v}{\partial x}(\cos t,\sin t)(-\sin t)+\frac{\partial v}{\partial y}(\cos t,\sin t)(\cos t)$$

Como el supuesto es que u y v son armónicas, con u armónica conjugada de u, entonces se deben cumplir las ecuaciones de Cauchy-

Riemman, esto es:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$$
$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

Y por tanto:

$$g'(t) = -\frac{\partial u}{\partial y}(\cos t, \sin t)(-\sin t) + \frac{\partial u}{\partial x}(\cos t, \sin t)(\cos t) \qquad (0.32)$$

A continuación se encontrarán cada uno de los terminos de la expresión (0.21), esto es:

$$\frac{\partial u}{\partial y}(\cos t, \sin t) = \frac{2\sin t}{\cos^2 t + \sin^2 t} \qquad (0.33)$$
$$\frac{\partial u}{\partial x}(\cos t, \sin t) = \frac{2\cos t}{\cos^2 t + \sin^2 t} \qquad (0.34)$$

Al reemplazar las expresiones (0.22) y (0.23) en la expresión (0.21) se obtiene:

$$g'(t) = \frac{2\sin^2 t}{\cos^2 t + \sin^2 t} + \frac{2\cos^2 t}{\cos^2 t + \sin^2 t} \qquad (0.35)$$

Simplificando esta expresión con las identidades trigonométricas conocidas se obtiene:

$$g'(t) = 2 \quad t \in [0, 2\pi] \qquad (0.36)$$

Se integrará la expresión (0.25) para obtener $g(t)$, esto es:

$$g(t) = 2t + C \quad t \in [0, 2\pi] \qquad (0.37)$$

Donde C corresponde a la constante de integración. Nótese que $g(0) \neq g(2\pi)$. Lo cual resulta en la contradicción que se estaba buscando y la cual permite mostrar que no hay conjugada armónica de u en D.
Esta solución alternativa se basa en los resultados obtenidos en el libro guía.

4. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$. Se dice que $\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$ es de **variación acotada** en $[a, b]$ si existe $M > 0$ tal que:

$$\sum_{j=1}^{n} |\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})| \leq M$$

para toda partición $\mathbf{P} = \{a = t_0 < t1 < \cdots < t_n = b\}$ de $[a, b]$.
Pruebe que γ es de variación acotada en $[a, b]$ si y sólo si $\operatorname{Re}\gamma$ y $\operatorname{Im}\gamma$ son de variación acotada en $[a, b]$.

Demostración:
$\Longrightarrow$ Supóngase que γ es de variación acotada en $[a, b]$ para cualquier partición p en este intervalo, entonces según la definición:

$$\sum_{j=1}^{n} |\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})| \leq M \tag{0.38}$$

Como $\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$ entonces:

$$\gamma = a + \boldsymbol{i}b = \operatorname{Re}\gamma + \boldsymbol{i}\operatorname{Im}\gamma \tag{0.39}$$

Además de las propiedades del valor absoluto se tiene que:

$$|\gamma| \geqslant |\operatorname{Re}\gamma| \;\; y \;\; |\gamma| \geqslant |\operatorname{Im}\gamma|$$

Y así, para este caso se tiene lo siguiente:

$$\sum_{j=1}^{n} |\operatorname{Re}\gamma(t_j) - \operatorname{Re}\gamma(t_{j-1})| \leq \sum_{j=1}^{n} |\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})| \leq M$$
$$\sum_{j=1}^{n} |\operatorname{Im}\gamma(t_j) - \operatorname{Im}\gamma(t_{j-1})| \leq \sum_{j=1}^{n} |\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})| \leq M$$

Lo cual implica que si γ es de variación acotada, $\operatorname{Re}\gamma$ y $\operatorname{Im}\gamma$ deben serlo también.
$\Longleftarrow$ Supóngase que $\operatorname{Re}\gamma$ y $\operatorname{Im}\gamma$ son de variación acotada en $[a, b]$ para cualquier p en este intervalo, esto es:

$$\sum_{j=1}^{n} |\operatorname{Re}\gamma(t_j) - \operatorname{Re}\gamma(t_{j-1})| \leq M_1$$
$$\sum_{j=1}^{n} |\operatorname{Im}\gamma(t_j) - \operatorname{Im}\gamma(t_{j-1})| \leq M_2$$

Definase,

$$M_1 = \frac{M}{2} \;\; y \;\; M_2 = \frac{M}{2}$$

Esto es,

$$\sum_{j=1}^{n} |\operatorname{Re}\gamma(t_j) - \operatorname{Re}\gamma(t_{j-1})| \leq \frac{M}{2} \tag{0.40}$$
$$\sum_{j=1}^{n} |\operatorname{Im}\gamma(t_j) - \operatorname{Im}\gamma(t_{j-1})| \leq \frac{M}{2} \tag{0.41}$$

Nuevamente, como $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ entonces $\gamma = a + \boldsymbol{i}b = \operatorname{Re}\gamma + \boldsymbol{i}\operatorname{Im}\gamma$.
Además, considerando la siguiente propiedad del valor absoluto:

$$|\gamma| \leq |\operatorname{Re}\gamma| + |\operatorname{Im}\gamma| \tag{0.42}$$

Al reescribir la expresión (0.16) se obtiene:

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n}|\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})| &\leq \sum_{j=1}^{n}|\operatorname{Re}\gamma(t_j) - \operatorname{Re}\gamma(t_{j-1})| + \sum_{j=1}^{n}|\operatorname{Im}\gamma(t_j) - \operatorname{Im}\gamma(t_{j-1})| \\ &\leq \frac{M}{2} + \frac{M}{2} \\ &\leq M\end{aligned}$$

Lo cual demuestra que si $\operatorname{Re}\gamma$ y $\operatorname{Im}\gamma$ son de variación acotada entonces γ también lo es.