



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA - UFSC
CENTRO TECNOLÓGICO - CTC
DEPARTAMENTO DE INFORMÁTICA E ESTATÍSTICA - INE

Cálculo Numérico em Computadores:

Capítulo 3

Sistemas de Equações Lineares

Autores: Prof. Sérgio Peters
Acad. Andréa Vergara da Silva

e-mail: sergio.peters@ufsc.br

Florianópolis, 2013.

3.1 - INTRODUÇÃO

Uma equação é considerada linear quando as operações envolvidas entre incógnitas são apenas operações lineares.

Por exemplo:

- a). $x + y / 4 - z = 0$ equação linear
- b). $x^2 + 2y + 1 = 0$ equação não linear
- c). $1 / x + y + z = 0$ equação não linear

Quando várias equações lineares são agrupadas, de modo que todas devam ser satisfeitas simultaneamente por uma mesma solução, tem-se um sistema de equações lineares.

Existem aplicações de sistemas de equações lineares nos mais variados segmentos da ciência e tecnologia.

Def.: Um sistema de ordem n, constituído por n equações lineares a n incógnitas, é toda expressão do tipo:

$$A x = b \Rightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \quad (1)$$

onde A é a matriz de coeficientes, x é o vetor de incógnitas e b é o vetor de termos independentes.

Exemplos de sistemas de equações lineares:

a). $\begin{cases} x_1 + x_2 = 20 \\ x_1 - x_2 = 4 \end{cases}$

b). $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ 4 \end{bmatrix}$ Representação matricial do sistema (a).

A resolução de sistemas de equações lineares pode ser obtida através de métodos diretos, iterativos ou de otimização.

3.2). Métodos Diretos:

São métodos que permitem obter a solução do sistema realizando-se um número finito de operações aritméticas. Portanto, o esforço computacional necessário para se obter uma solução do sistema é perfeitamente previsível. Esta solução seria exata se não fosse a presença de erros de arredondamento.

São normalmente empregados a sistemas lineares com matrizes de coeficientes densas e de porte médio (até 1000 equações).

Dentre os métodos diretos mais comuns estão:

3.2.1). Método de Eliminação de Gauss:

Consiste na transformação da matriz expandida (matriz de coeficientes acrescida da coluna de termos independentes) em matriz triangular, superior ou inferior, seguida de um processo de substituições sucessivas para explicitar a solução do sistema. Esta transformação em matriz triangular (ou escalonamento) é conseguida através da aplicação sucessiva de operações elementares sobre linhas (ou sobre colunas) na matriz expandida, buscando a eliminação seletiva de elementos não nulos para torna-la uma matriz triangular. Podemos associá-lo a um processo de pivotamento, parcial ou total, que promove uma troca seletiva de linhas (ou colunas), visando tomar pivôs (elementos da diagonais principais) com maior módulo possível, e assim procurando evitar a presença de pivôs nulos.

Ex. 1): Resolver o seguinte sistema de equações lineares pelo método de eliminação de Gauss **sem pivotamento** adotando operações aritméticas com 4 (quatro) dígitos significativos e arredondamento ponderado.

$$\begin{cases} 0.448x_1 + 0.832x_2 + 0.193x_3 = 1 \\ 0.421x_1 + 0.784x_2 - 0.207x_3 = 0 \\ -0.421x_1 + 0.784x_2 + 0.279x_3 = 0 \end{cases}$$

Na forma matricial tem-se

$$\begin{bmatrix} 0.448 & 0.832 & 0.193 \\ 0.421 & 0.784 & -0.207 \\ -0.421 & 0.784 & 0.279 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

1º). Geração da matriz expandida:

$$\begin{bmatrix} 0.448 & 0.832 & 0.193 & \vdots & 1 \\ 0.421 & 0.784 & -0.207 & \vdots & 0 \\ -0.421 & 0.784 & 0.279 & \vdots & 0 \end{bmatrix}$$

2º). Triangularização correspondente a primeira coluna (k = 1):

$$\begin{bmatrix} 0.448 & 0.832 & 0.193 & \vdots & 1 \\ 0.421 & 0.784 & -0.207 & \vdots & 0 \\ -0.421 & 0.784 & 0.279 & \vdots & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} k = 1 \\ L_2 \leftarrow L_2 - 0.421/(0.448)L_1 \Rightarrow L_2 \leftarrow L_2 - 0.9397.L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - (-0.421)/(0.448)L_1 \Rightarrow L_3 \leftarrow L_3 + 0.9397.L_1 \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0.448 & 0.832 & 0.193 & \vdots & 1 \\ 0 & 0.002143 & -0.38837 & \vdots & -0.93973 \\ 0 & 1.56586 & 0.46037 & \vdots & 0.93973 \end{bmatrix}$$

3º). Triangularização correspondente a segunda coluna (k = 2):

$$k = 2$$

$$\begin{bmatrix} 0.448 & 0.832 & 0.193 & \vdots & 1 \\ 0 & 0.002143 & -0.38837 & \vdots & -0.93973 \\ 0 & 1.56586 & 0.46037 & \vdots & 0.93973 \end{bmatrix} L_3 \leftarrow L_3 - (1.5659 / 0.002143)L_2 \Rightarrow L_3 \leftarrow L_3 - 730.7046L_2$$

$$\begin{bmatrix} 0.448 & 0.832 & 0.193 & \vdots & 1 \\ 0 & 0.002143 & -0.38837 & \vdots & -0.93973 \\ 0 & 0 & 284.25403 & \vdots & 687.63333 \end{bmatrix}$$

4º). Processo de retrossubstituição sucessiva:

Após a triangularização analisa-se o sistema de equações equivalente, gerado a partir do processo de eliminação empregado:

$$\begin{cases} 0.448x_1 + 0.832x_2 + 0.193x_3 = 1 \\ 0x_1 + 0.002143x_2 - 0.38837x_3 = -0.93973 \\ 0x_1 + 0x_2 + 284.25403x_3 = 687.63333 \end{cases}$$

Obs.: Note-se que o valor de x_3 pode ser diretamente obtido a partir da equação 3, uma vez que esta equação independe de x_1 e x_2 . Posteriormente os valores de x_2 e x_1 são obtidos das equações 2 e 1, respectivamente.

$$x_3 = 687.63333 / 284.25403 \quad x_3 = 2.41908$$

$$x_2 = (-0.93973 - (-0.38837x_3)) / 0.002143 \quad x_2 = -0.10821$$

$$x_1 = (1 - 0.832x_2 - 0.193x_3) / (0.448) \quad x_1 = 1.39629$$

Portanto, a solução do sistema correspondente ao exemplo 1 é:

$$\mathbf{S} = \{ 1.39629, -0.10821, 2.41908 \}$$

Se os resíduos ($r = |b - Ax|$) de cada uma das equações do sistema linear proposto forem avaliados, normalmente são obtidos valores residuais não nulos das equações, decorrentes de erros de arredondamento.

Por exemplo,

$$r_1 = |0.448x_1 + 0.832x_2 + 0.193x_3 - 1| = 0.00000$$

$$r_2 = |0.421x_1 + 0.784x_2 - 0.207x_3 - 0| = 0.00001$$

$$r_3 = |-0.421x_1 + 0.784x_2 + 0.279x_3 - 0| = 0.00000$$

Neste caso, também pode ser calculado o erro exato, dado por
erro = $|X_{\text{exato}} - X_{\text{aproximado}}|$.

A solução exata estimada abaixo foi encontrada através do OCTAVE (cgs(A, b)), com 16 dígitos significativos :

$$X_{\text{exato}_1} = 1.396286256155218$$

$$X_{\text{exato}_2} = -0.111080218034935$$

$$X_{\text{exato}_3} = 2.419080303873203$$

Ex. 2): Resolver o seguinte sistema de equações lineares pelo método de eliminação de Gauss com **pivotamento parcial** utilizando operações aritméticas com 4 (quatro) dígitos significativos e arredondamento ponderado.

$$\begin{cases} -0.421x_1 + 0.784x_2 + 0.279x_3 = 0 \\ 0.421x_1 + 0.784x_2 - 0.207x_3 = 0 \\ 0.448x_1 + 0.832x_2 + 0.193x_3 = 1 \end{cases}$$

Na forma matricial tem-se

$$\begin{bmatrix} -0.421 & 0.784 & 0.279 \\ 0.421 & 0.784 & -0.207 \\ 0.448 & 0.832 & 0.193 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

1º). Geração da matriz expandida:

$$\begin{bmatrix} -0.421 & 0.784 & 0.279 & 0 \\ 0.421 & 0.784 & -0.207 & 0 \\ 0.448 & 0.832 & 0.193 & 1 \end{bmatrix}$$

2º). Pivotação parcial, correspondente ao primeiro pivô (k=1):

(i). Busca do maior elemento em módulo da coluna k = 1:

$$i = 3 \begin{bmatrix} -0.421 & 0.784 & 0.279 & 0 \\ 0.421 & 0.784 & -0.207 & 0 \\ (0.448) & 0.832 & 0.193 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{(maior módulo da coluna k=1 está na linha i = 3).}$$

(ii). troca de linhas:

$$\begin{bmatrix} -0.421 & 0.784 & 0.279 & 0 \\ 0.421 & 0.784 & -0.207 & 0 \\ (0.448) & 0.832 & 0.193 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} L_1 \leftarrow L_3 \\ \\ L_3 \leftarrow L_1 \end{matrix} \quad \text{(Troca da linha } L_1 \text{ com } L_3 \text{ e vice-versa)}$$

(iii). Matriz pivotada:

$$\begin{bmatrix} (0.448) & 0.832 & 0.193 & :1 \\ 0.421 & 0.784 & -0.207 & :0 \\ -0.421 & 0.784 & 0.279 & :0 \end{bmatrix}$$

3º). Processo de triangularização, correspondente ao primeiro pivô (k=1):

$$\begin{bmatrix} (0.448) & 0.832 & 0.193 & \vdots & 1 \\ 0.421 & 0.784 & -0.207 & \vdots & 0 \\ -0.421 & 0.784 & 0.279 & \vdots & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - (0.421/0.448)L_1 \Rightarrow L_2 \leftarrow L_2 - 0.9397 L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - (-0.421/0.448)L_1 \Rightarrow L_3 \leftarrow L_3 + 0.9397 L_1 \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} (0.448) & 0.832 & 0.193 & \vdots & 1 \\ 0 & 0.002143 & -0.3884 & \vdots & -0.9397 \\ 0 & 1.5659 & 0.4604 & \vdots & 0.9397 \end{bmatrix}$$

Obs.: Note que as operações elementares aplicadas acima eliminam os elementos abaixo da diagonal principal na primeira coluna $k=1$. A operação de eliminação acontece sempre que subtrai-se de cada linha i , a linha do pivô $i=k$ multiplicada pelo elemento a ser eliminado dividida pelo elemento pivô.

4º). Pivotação Parcial, correspondente ao segundo pivô ($k=2$):

(i). Busca parcial do maior módulo da coluna $k = 2$ (busca a partir da segunda linha e da segunda coluna, pois a primeira coluna já foi anulada)

$$\begin{array}{c} k=2 \\ \begin{bmatrix} (0.448) & 0.832 & 0.193 & \vdots & 1 \\ 0 & 0.002143 & -0.3884 & \vdots & -0.9397 \\ 0 & (1.5659) & 0.4604 & \vdots & 0.9397 \end{bmatrix} \end{array} \quad \text{(maior módulo da coluna } k=2 \text{ está na linha } i = 3).$$

$$\begin{bmatrix} (0.448) & 0.832 & 0.193 & \vdots & 1 \\ 0 & 0.002143 & -0.3884 & \vdots & -0.9397 \\ 0 & (1.5659) & 0.4604 & \vdots & 0.9397 \end{bmatrix} \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_3 \\ L_3 \leftarrow L_2 \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} (0.448) & 0.832 & 0.193 & \vdots & 1 \\ 0 & (1.5659) & 0.4604 & \vdots & 0.9397 \\ 0 & 0.002143 & -0.3884 & \vdots & -0.9397 \end{bmatrix}$$

(ii). Observe que o pivo antigo, $a_{22}=0,002143$ era um valor pequeno e poderia propagar erros nas próximas operações de eliminação.

5º). Processo de triangularização, correspondente ao segundo pivô ($k=2$):

$$\begin{bmatrix} (0.448) & 0.832 & 0.1930 & \vdots & 1 \\ 0 & (1.5659) & 0.4604 & \vdots & 0.9397 \\ 0 & 0.002143 & -0.3884 & \vdots & -0.9397 \end{bmatrix} L_3 \leftarrow L_3 - (0.002143 / 1.5659)L_2 \Rightarrow L_3 \leftarrow L_3 - 0.00136767 .L_2$$

$$\begin{bmatrix} (0.448) & 0.832 & 0.1930 & \vdots & 1 \\ 0 & (1.5659) & 0.4604 & \vdots & 0.9397 \\ 0 & 0 & -0.3884 & \vdots & -0.9410 \end{bmatrix}$$

6º). Processo de retrossubstituição sucessiva:

Primeiramente analisa-se o sistema de equações equivalente, gerado a partir do processo de eliminação empregado:

$$\begin{cases} 0.448x_1 + 0.832x_2 + 0.193x_3 = 1 \\ 0x_1 + 1.5659x_2 + 0.4604x_3 = 0.9397 \\ 0x_1 + 0x_2 - 0.3890x_3 = -0.9410 \end{cases}$$

Obs.: Note-se que o valor de x_3 pode ser diretamente obtido a partir da equação 3, e posteriormente x_2 e x_1 a partir dos valores obtidos anteriormente.

$$x_3 = -0.9410 / (-0.3890) \quad x_3 = 2.41908$$

$$x_2 = (0.9397 - 0.4604x_3) / 1.5659 \quad x_2 = -0.11115$$

$$x_1 = (1 - 0.832x_2 - 0.193x_3) / 0.448 \quad x_1 = 1.39629$$

Portanto a solução do sistema dado no exemplo 2 é:

$$\mathbf{S} = \{ 1.39629, -0.11115, 2.41908 \}$$

Os resíduos ($r = |b - Ax|$):

$$r_1 = |-0.421x_1 + 0.784x_2 + 0.279x_3 - 0| = 0.0002$$

$$r_2 = |0.421x_1 + 0.784x_2 - 0.207x_3 - 0| = 0.0000$$

$$r_3 = |0.448x_1 + 0.832x_2 + 0.193x_3 - 1| = 0.0001$$

Neste caso, também pode ser calculado o erro exato, dado por $\text{erro} = |X_{\text{exato}} - X_{\text{aproximado}}|$, através da solução exata encontrada através do OCTAVE (`cgs(A, b)`):

$$X_{\text{exato}_1} = 1.396286256155218$$

$$X_{\text{exato}_2} = -0.111080218034935$$

$$X_{\text{exato}_3} = 2.419080303873203$$

Obs.: Note que com o processo de pivotamento parcial:

- Eliminam-se os possíveis pivôs nulos, caso a matriz de coeficientes seja não singular (determinante zero);
- Também consegue-se uma redução nos efeitos de erros de arredondamento (diminuição da perda de significação), imperceptível para sistemas pequenos (poucas equações).

Alternativamente, pode-se implementar o método de eliminação de Gauss usando a pivotação total, que é computacionalmente 'um pouco' mais eficiente, induzindo um menor erro de arredondamento acumulado, de forma a se obter soluções computacionalmente mais estáveis em relação às perturbações introduzidas por erros de arredondamento. No **pivotamento total, ou completo**, procura-se o elemento de maior módulo dentre todos os elementos disponíveis na matriz de coeficientes, promovendo trocas de linhas e/ou colunas conforme a necessidade. Para avaliar as consequências destas trocas de linhas e colunas deve-se interpretar os elementos da matriz expandida em termos das equações do sistema, assim:

Troca de **linhas** implica apenas em trocar a ordem na apresentação das **equações**;

Troca de **colunas** implica na troca da ordem de apresentação das **variáveis** (incógnitas) do sistema.

Ex. 3): Resolver o seguinte sistema de equações lineares, usando a **pivotação total** e operações aritméticas com 4 (quatro) dígitos significativos e arredondamento ponderado.

$$\begin{cases} -0.421x_1 + 0.784x_2 + 0.279x_3 = 0 \\ 0.448x_1 + 0.832x_2 + 0.193x_3 = 1 \\ 0.421x_1 + 0.784x_2 - 0.207x_3 = 0 \end{cases}$$

Na forma matricial tem-se

$$\begin{bmatrix} -0.421 & 0.784 & 0.279 \\ 0.448 & 0.832 & 0.193 \\ 0.421 & 0.784 & -0.207 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

1º). Geração da matriz expandida:

$$\begin{bmatrix} -0.421 & 0.784 & 0.279 & \vdots & 0 \\ 0.448 & 0.832 & 0.193 & \vdots & 1 \\ 0.421 & 0.784 & -0.207 & \vdots & 0 \end{bmatrix}$$

2º). Pivotação total, correspondente ao primeiro pivô (k=1):

(i). Busca do maior módulo dentre todos os elementos da matriz:

$$\begin{array}{ccccc} & & j = 2 & & \\ i = 2 & \begin{bmatrix} -0.421 & 0.784 & 0.279 & \vdots & 0 \\ 0.448 & (0.832) & 0.193 & \vdots & 1 \\ 0.421 & 0.784 & -0.207 & \vdots & 0 \end{bmatrix} & & & \text{(o elemento de maior módulo está na coluna } j = 2 \\ & 1 & 2 & 3 & \text{e na linha } i = 2). \end{array}$$

Obs.: Observa-se que foi acoplada uma linha adicional na matriz de coeficientes para o armazenamento da ordem de apresentação das variáveis envolvidas. Então, inicialmente tem-se a ordem natural das variáveis x_1 , x_2 e x_3 , cujos coeficientes multiplicadores são, respectivamente, os elementos da primeira, segunda e terceira colunas.

(ii). Efetua-se a troca de linhas e colunas:

$$\begin{bmatrix} -0.421 & 0.784 & 0.279 & \vdots & 0 \\ 0.448 & 0.832 & 0.193 & \vdots & 1 \\ 0.421 & 0.784 & -0.207 & \vdots & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} L_1 \leftarrow L_2 \\ L_2 \leftarrow L_1 \end{matrix} \quad \begin{matrix} \text{(Troca da linha } L_1 \text{ com a linha } L_2 \text{ e vice-versa, e} \\ \text{troca dos elementos da coluna 1 com os elementos} \\ \text{da coluna 2 e vice-versa).} \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ C_1 & C_2 \\ \uparrow & \uparrow \\ C_2 & C_1 \end{matrix}$$

(iii). Matriz pivotada:

$$\begin{bmatrix} (0.832) & 0.448 & 0.193 & \vdots & 1 \\ 0.784 & -0.421 & 0.279 & \vdots & 0 \\ 0.784 & 0.421 & -0.207 & \vdots & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} 2 & 1 & 3 \end{matrix}$$

Obs.: Note no processo de pivotamento total, a ordem de apresentação das variáveis x_i envolvidas podem ser alteradas.

3º). Processo de triangularização, correspondente ao primeiro pivô ($k=1$):

$$\begin{bmatrix} (0.832) & 0.448 & 0.193 & \vdots & 1 \\ 0.784 & -0.421 & 0.279 & \vdots & 0 \\ 0.784 & 0.421 & -0.207 & \vdots & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - (0.784 / 0.832) L_1 \Rightarrow L_2 \leftarrow L_2 - 0.9423 L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - (0.784 / 0.832) L_1 \Rightarrow L_3 \leftarrow L_3 - 0.9423 L_1 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 2 & 1 & 3 \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} (0.832) & 0.448 & 0.193 & \vdots & 1 \\ 0 & -0.8432 & 0.097 & \vdots & -0.9423 \\ 0 & -0.0012 & -0.3839 & \vdots & -0.9423 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} 2 & 1 & 3 \end{matrix}$$

4º). Pivotação total, correspondente ao segundo pivô ($k=2$):

(i). Busca do maior módulo dentre os elementos da matriz, a partir da segunda linha e segunda coluna.

$$j = 2$$

$$i = 2 \begin{bmatrix} 0.832 & 0.448 & 0.193 & \vdots & 1 \\ 0 & (-0.8432) & 0.0971 & \vdots & -0.9423 \\ 0 & -0.0012 & -0.3889 & \vdots & -0.9423 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \text{(Elemento de maior módulo localizado na coluna} \\ \text{j=2 e linha i=2).} \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 2 & 1 & 3 \end{matrix}$$

(ii). Não há troca de linhas e colunas, a matriz já está naturalmente pivotada:

5º). Processo de triangularização, correspondente ao segundo pivô (k=2):

$$\begin{bmatrix} 0.832 & 0.448 & 0.193 & \vdots & 1 \\ 0 & (-0.8432) & 0.0971 & \vdots & -0.9423 \\ 0 & -0.0012 & -0.3889 & \vdots & -0.9423 \end{bmatrix} L_3 \leftarrow L_3 - (-0.0012 / -0.8432)L_2 \Rightarrow L_3 \leftarrow L_3 - 0.001423 L_2$$

$$\begin{bmatrix} 0.832 & 0.448 & 0.193 & \vdots & 1 \\ 0 & (-0.8432) & 0.0971 & \vdots & -0.9423 \\ 0 & 0 & -0.3890 & \vdots & -0.9410 \end{bmatrix}$$

2 1 3

6º). Retrossubstituição:

$$\begin{bmatrix} 0.832 & 0.448 & 0.193 & \vdots & 1 \\ 0 & (-0.8432) & 0.0971 & \vdots & -0.9423 \\ 0 & 0 & -0.3890 & \vdots & -0.9410 \end{bmatrix}$$

2 1 3

Retornando a forma matricial (note a nova ordem das variáveis):

$$\begin{cases} 0.832 x_2 + 0.448 x_1 + 0.193 x_3 = 1 \\ 0 x_2 - 0.8432 x_1 + 0.0971 x_3 = -0.9423 \\ 0 x_2 + 0 x_1 - 0.3890 x_3 = -0.9410 \end{cases}$$

$$x_3 = -0.9410 / -0.3890$$

$$x_3 = 2.419$$

$$x_1 = (-0.9423 - 0.0971 x_3) / -0.8432$$

$$x_1 = 1.396$$

$$x_2 = (1 - 0.448 x_1 - 0.193 x_3) / 0.832$$

$$x_2 = -0.1106$$

$$\mathbf{S} = \{1.396, -0.1106, 2.419\}$$

Os resíduos ($r = |b - Ax|$) são:

$$r_1 = |-0.421x_1 + 0.784x_2 + 0.279x_3 - 0| = 0.0005$$

$$r_2 = |0.448x_1 + 0.832x_2 + 0.193x_3 - 1| = 0.0003$$

$$r_3 = |0.421x_1 + 0.784x_2 - 0.207x_3 - 0| = 0.0003$$

E o erro exato obtido foi:

$$\text{Erro}_1 = |1.396 - 1.396| = 0.0000$$

$$\text{Erro}_2 = |-0.1111 - (-0.1106)| = 0.0005$$

$$\text{Erro}_3 = |2.419 - 2.419| = 0.0000$$

Considerações:

- Observando os resíduos encontrados nos exemplos acima, nota-se que o resíduo nem sempre é um bom elemento para certificarmos a exatidão da solução, pois embora encontremos resíduos menores no método sem o uso do pivotamento, comparativamente aos métodos que se utilizaram de pivotamento parcial e total, a solução do sistema normalmente é mais exata nos métodos com pivotação. Pode-se observar que em sistemas de médio porte os métodos com pivotação total fornecem soluções mais exatas.

- Pode-se observar que nas operações elementares sobre linhas aplicadas no método de Gauss, aparece uma operação de divisão pelo pivô. Sabe-se que na maioria das operações de divisão são gerados erros de arredondamentos (vide capítulo de erros numéricos), então ao longo do processo de eliminações sucessivas, estes erros de arredondamento vão se acumulando, pois os resultados obtidos em um estágio do processo de eliminação serão usadas no estágio seguinte.

Para minimizar este efeito cumulativo dos erros de arredondamento, pode-se modificar as operações elementares do processo de escalonamento da seguinte forma:

Substitui-se a linha corrente pelo produto entre a própria linha e o elemento pivô subtraído do produto entre a linha do pivô e o elemento a ser eliminado.

Por exemplo:

Se a linha L_3 sofre a seguinte operação de eliminação do elemento a_{31} com o pivô da primeira linha a_{11} :

$$L_3 \leftarrow L_3 - \frac{a_{31}}{a_{11}} L_1$$

Sabendo-se que o objetivo desta operação é anular o elemento a_{31} , pode-se modificar esta operação, desde que se mantenha o resultado nulo na primeira coluna. Assim, se

$$L_3 - \frac{a_{31}}{a_{11}} L_1 = 0 \quad (\text{para a primeira coluna } k = 1)$$

Então, pode-se multiplicar a equação acima pelo elemento pivô a_{11} , resultando numa forma alternativa, que mantém o resultado nulo para primeira coluna da matriz.

$$a_{11} L_3 - a_{31} L_1 = 0$$

Assim, com esta forma alternativa de aplicar as operações de eliminação tem-se um menor acúmulo de erros de arredondamento, pois não haverá divisões ao longo do processo de eliminação. Será necessária apenas uma divisão em cada equação no momento de determinar as variáveis x_i .

Este procedimento alternativo pode gerar erros por perda de significação quando tem-se pivôs de grande magnitude, ou quando o número de equações é elevado, pois nestes casos o acúmulo de operações de multiplicação em cada linha do sistema, especialmente nas últimas linhas, pode conduzir a coeficientes muito grandes, podendo gerar valores que não possam ser representados (valores podem cair na região de overflow).

Exercícios:

1). Monte um algoritmo para resolver um sistema de equações lineares pelo método de Gauss utilizando:

Pivotação Parcial;

Pivotação Total.

2). Como você avaliaria o determinante da matriz de coeficientes utilizando o processo de eliminação adotado pelo método de Gauss?

3.2.2). Método de Gauss-Jordan:

Consiste na transformação da matriz expandida em matriz diagonal (normalizada com coeficientes unitários), que é equivalente a matriz identidade. Esta transformação é obtida através da aplicação sucessiva de operações elementares sobre linhas (ou sobre colunas), buscando a eliminação seletiva dos elementos não nulos externos a diagonal principal. Também pode-se associar este método a um processo de pivotamento, parcial ou total.

Ex. 3): Resolver o seguinte sistema de equações lineares usando o método de Gauss-Jordan com pivotamento parcial:

$$\begin{cases} 3x_1 + 1.5x_2 + 4.75x_3 = 8 \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 7 \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 = -12 \end{cases}$$

adota-se também, operações aritméticas com 4 (quatro) dígitos significativos e arredondamento ponderado.

Na forma matricial tem-se

$$\begin{bmatrix} 3 & 1.5 & 4.75 \\ 4 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 7 \\ -12 \end{bmatrix}$$

1º). Geração da matriz expandida:

$$\begin{bmatrix} 3 & 1.5 & 4.75 & \vdots & 8 \\ 4 & 2 & 3 & \vdots & 7 \\ 2 & 5 & 3 & \vdots & -12 \end{bmatrix}$$

2º). Pivotação parcial, correspondente ao primeiro pivô ($k = 1$):

(i). Busca do maior módulo da coluna $k = 1$

$$i = 2 \quad \begin{bmatrix} 3 & 1.5 & 4.75 & \vdots & 8 \\ (4) & 2 & 3 & \vdots & 7 \\ 2 & 5 & 3 & \vdots & -12 \end{bmatrix} \quad \text{(o elemento de maior módulo está na linha } i = 2\text{).}$$

(ii). troca de linhas:

$$\begin{bmatrix} 3 & 1.5 & 4.75 & \vdots & 8 \\ (4) & 2 & 3 & \vdots & 7 \\ 2 & 5 & 3 & \vdots & -12 \end{bmatrix} \begin{matrix} L_1 \leftarrow L_2 \\ L_2 \leftarrow L_1 \end{matrix} \quad (\text{Troca da linha } L_1 \text{ com a linha } L_2 \text{ e vice-versa})$$

(iii). Matriz pivotada:

$$\begin{bmatrix} (4) & 2 & 3 & \vdots & 7 \\ 3 & 1.5 & 4.75 & \vdots & 8 \\ 2 & 5 & 3 & \vdots & -12 \end{bmatrix}$$

Obs.: Note que até aqui tem-se um processo idêntico a eliminação de Gauss.

3º). Processo de normalização do primeiro pivô (k=1):

$$\begin{bmatrix} (4) & 2 & 3 & \vdots & 7 \\ 3 & 1.5 & 4.75 & \vdots & 8 \\ 2 & 5 & 3 & \vdots & -12 \end{bmatrix} \quad L_1 \leftarrow L_1 / 4$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0.5 & 0.75 & \vdots & 1.75 \\ 3 & 1.5 & 4.75 & \vdots & 8 \\ 2 & 5 & 3 & \vdots & -12 \end{bmatrix}$$

4º). Processo de diagonalização, correspondente ao primeiro pivô (k = 1):

$$\begin{bmatrix} 1 & 0.5 & 0.75 & \vdots & 1.75 \\ 3 & 1.5 & 4.75 & \vdots & 8 \\ 2 & 5 & 3 & \vdots & -12 \end{bmatrix} \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0.5 & 0.75 & \vdots & 1.75 \\ 0 & 0 & 2.5 & \vdots & 2.75 \\ 0 & 4 & 1.5 & \vdots & -15.5 \end{bmatrix}$$

5º). Pivotação Parcial, correspondente ao segundo pivô (k=2):

(i). Busca parcial do maior módulo da coluna k = 2 (busca a partir da segunda linha e segunda coluna, pois a primeira coluna já foi anulada)

$$\begin{matrix} k=2 \\ \begin{bmatrix} 1 & 0.5 & 0.75 & \vdots & 1.75 \\ 0 & 0 & 2.5 & \vdots & 2.75 \\ 0 & (4) & 1.5 & \vdots & -15.5 \end{bmatrix} \end{matrix} \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_3 \\ L_3 \leftarrow L_2 \end{matrix} \quad (\text{elemento de maior módulo da coluna } k=2 \text{ está na linha } i = 3).$$

(ii). troca de linhas:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0.5 & 0.75 & \vdots & 1.75 \\ 0 & (4) & 1.5 & \vdots & -15.5 \\ 0 & 0 & 2.5 & \vdots & 2.75 \end{bmatrix} \quad (\text{Troca da linha } L_2 \text{ com a linha } L_3 \text{ e vice-versa})$$

6º). Processo de normalização do segundo pivô (k=2):

$$\begin{bmatrix} 1 & 0.5 & 0.75 & \vdots & 1.75 \\ 0 & 4 & 1.5 & \vdots & -15.5 \\ 0 & 0 & 2.5 & \vdots & 2.75 \end{bmatrix} \quad L_2 \leftarrow L_2 / 4$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0.5 & 0.75 & \vdots & 1.75 \\ 0 & 1 & 0.375 & \vdots & -3.875 \\ 0 & 0 & 2.5 & \vdots & 2.75 \end{bmatrix}$$

7º). Processo de diagonalização, correspondente ao segundo pivô (k = 2):

$$\begin{bmatrix} 1 & 0.5 & 0.75 & \vdots & 1.75 \\ 0 & 1 & 0.375 & \vdots & -3.875 \\ 0 & 0 & 2.5 & \vdots & 2.75 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - 0.5 L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 0 L_2 \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0.5625 & \vdots & 3.6875 \\ 0 & 1 & 0.375 & \vdots & -3.875 \\ 0 & 0 & 2.5 & \vdots & 2.75 \end{bmatrix}$$

9º). Processo de normalização do terceiro pivô (k = 3):

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0.5625 & \vdots & 3.6875 \\ 0 & 1 & 0.375 & \vdots & -3.875 \\ 0 & 0 & 2.5 & \vdots & 2.75 \end{bmatrix} \quad L_3 \leftarrow L_3 / 2.5$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0.5625 & \vdots & 3.688 \\ 0 & 1 & 0.375 & \vdots & -3.875 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 1.1 \end{bmatrix}$$

10º). Processo de diagonalização, correspondente ao terceiro pivô (k = 3):

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0.5625 & \vdots & 3.688 \\ 0 & 1 & 0.375 & \vdots & -3.875 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 1.1 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - 0.5625 L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - 0.375 L_3 \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & 3.069 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & -4.288 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 1.1 \end{bmatrix}$$

Analisando o sistema de equações equivalente, gerado a partir do processo de eliminações sucessivas, tem-se o seguinte sistema:

$$\begin{cases} x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 3.069 \\ 0x_1 + x_2 + 0x_3 = -4.288 \\ 0x_1 + 0x_2 + x_3 = 1.1 \end{cases}$$

Obs.: Note que cada equação representa explicitamente uma incógnita, ou seja, o vetor b de termos independentes modificado guarda a própria solução do sistema. Assim,

$$x_1 = 3.069$$

$$x_2 = -4.288$$

$$x_3 = 1.100$$

A solução obtida é

$$S = \{3.069, -4.288, 1.100\}$$

Exercícios:

3). Elabore um algoritmo para resolver um sistema de equações lineares pelo método de Gauss-Jordan utilizando pivotação parcial;

3.2.3 - Método da Inversão de Matrizes:

Seja o sistema dado pela eq. (1), $A.x = b$,

onde A é a matriz de coeficientes, x é o vetor de incógnitas e b é o vetor de termos independentes.

Multiplicando a equação (1) pela matriz inversa A^{-1} de A, obtida a partir de um método qualquer, tem-se,

$$A^{-1}.(A.x) = A^{-1}.(b)$$

Utilizando a associatividade do produto matricial resulta:

$$\begin{aligned} (A^{-1}.A).x &= A^{-1}.b \\ I.x &= A^{-1}.b \\ x &= A^{-1}.b \end{aligned}$$

Portanto, pode-se obter o vetor de incógnitas x multiplicando a matriz inversa A^{-1} pelo vetor b.

Trata-se de um método eficiente quando dispomos da inversa da matriz A, caso contrário temos o custo adicional da determinação da inversa.

Ex. 4): Resolva o sistema de equações lineares indicado abaixo usando o método de inversão de matrizes. Utilize o processo de pivotamento parcial para evitar pivôs nulos.

$$\begin{cases} 3x_1 + 1.5x_2 + 4.75x_3 = 8 \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 7 \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 = -12 \end{cases}$$

Adota-se também operações aritméticas com 4 (quatro) dígitos significativos e arredondamento ponderado.

Na forma matricial tem-se

$$\begin{bmatrix} 3 & 1.5 & 4.75 \\ 4 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 7 \\ -12 \end{bmatrix}$$

1º). Geração da matriz inversa de A.

Adota-se um método prático clássico para se obter a matriz inversa:

(i). Primeiramente gera-se a matriz aumentada $[A | I]$, composta pela matriz A e pela matriz identidade I da mesma ordem de A:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 1.5 & 4.75 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

(ii). Através de operações elementares sobre linhas (ou sobre colunas) transforma-se a matriz A na matriz identidade I, e consequentemente a matriz identidade inicial transforma-se na inversa A^{-1} . Trata-se de um procedimento análogo ao utilizado no método de Gauss-Jordan.

Este procedimento também pode ser associado a um processo de pivotação parcial, para evitar pivôs nulos e diminuir a perda de significação.

Seguem-se os passos para obtenção de A^{-1} :

a). Pivotação parcial, correspondente ao primeiro pivô ($k=1$):

(i). Busca do maior módulo da coluna $k = 1$

$$k=1$$

$$i = 2 \quad \left[\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 1.5 & 4.75 & 1 & 0 & 0 \\ (4) & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

(Elemento de maior módulo da coluna $k=1$ está na segunda linha)

(ii). troca de linhas:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 1.5 & 4.75 & 1 & 0 & 0 \\ (4) & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \begin{matrix} L_1 \leftarrow L_2 \\ L_2 \leftarrow L_1 \end{matrix}$$

(Troca da linha L_1 com a linha L_2 e vice-versa)

(iii). Matriz pivotada:

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 & \vdots & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1.5 & 4.75 & \vdots & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & \vdots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

b). Processo de normalização do primeiro pivô (k=1):

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 & \vdots & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1.5 & 4.75 & \vdots & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & \vdots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} L_1 \leftarrow L_1 / 4$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0.5 & 0.75 & \vdots & 0 & 0.25 & 0 \\ 3 & 1.5 & 4.75 & \vdots & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & \vdots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

c). Processo de diagonalização, correspondente ao primeiro pivô (k = 1):

$$\begin{bmatrix} 1 & 0.5 & 0.75 & \vdots & 0 & 0.25 & 0 \\ 3 & 1.5 & 4.75 & \vdots & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & \vdots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - 3 L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2 L_1 \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0.5 & 0.75 & \vdots & 0 & 0.25 & 0 \\ 0 & 0 & 2.5 & \vdots & 1 & -0.75 & 0 \\ 0 & 4 & 1.5 & \vdots & 0 & -0.5 & 1 \end{bmatrix}$$

Obs.: Note que existe uma completa analogia com o método de eliminação de Gauss-Jordan.

d). Pivotação parcial, correspondente ao segundo pivô (k=2):

(i). Busca parcial do maior módulo da coluna k = 2 (busca a partir da segunda linha, pois a primeira linha já foi utilizada no processo de eliminação).

$$\begin{matrix} k=2 \\ \begin{bmatrix} 1 & 0.5 & 0.75 & \vdots & 0 & 0.25 & 0 \\ 0 & 0 & 2.5 & \vdots & 1 & -0.75 & 0 \\ 0 & (4) & 1.5 & \vdots & 0 & -0.5 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_3 \\ L_3 \leftarrow L_2 \end{matrix} \end{matrix} \quad \begin{matrix} \text{(o elemento de maior módulo da coluna} \\ \text{k = 2 está na terceira linha).} \end{matrix}$$

(ii). troca de linhas:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0.5 & 0.75 & \vdots & 0 & 0.25 & 0 \\ 0 & (4) & 1.5 & \vdots & 0 & -0.5 & 1 \\ 0 & 0 & 2.5 & \vdots & 1 & -0.75 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{(Troca da linha } L_2 \text{ com a linha } L_3 \text{ e vice-versa)}$$

Obs.: Note que a pivotação parcial eliminou um pivô nulo (processo possível em caso de matrizes não singulares).

e). Processo de normalização do segundo pivô (k=2):

$$\begin{bmatrix} 1 & 0.5 & 0.75 & \vdots & 0 & 0.25 & 0 \\ 0 & 4 & 1.5 & \vdots & 0 & -0.5 & 1 \\ 0 & 0 & 2.5 & \vdots & 1 & -0.75 & 0 \end{bmatrix} L_2 \leftarrow L_2/4$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0.5 & 0.75 & \vdots & 0 & 0.25 & 0 \\ 0 & 1 & 0.375 & \vdots & 0 & -0.125 & 0.25 \\ 0 & 0 & 2.5 & \vdots & 1 & -0.75 & 0 \end{bmatrix}$$

f). Processo de diagonalização, correspondente ao segundo pivô (k = 2):

$$\begin{bmatrix} 1 & 0.5 & 0.75 & \vdots & 0 & 0.25 & 0 \\ 0 & 1 & 0.375 & \vdots & 0 & -0.125 & 0.25 \\ 0 & 0 & 2.5 & \vdots & 1 & -0.75 & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - 0.5L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 0L_2 \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0.5625 & \vdots & 0 & 0.3125 & -0.125 \\ 0 & 1 & 0.375 & \vdots & 0 & -0.125 & 0.25 \\ 0 & 0 & 2.5 & \vdots & 1 & -0.75 & 0 \end{bmatrix}$$

g). Processo de normalização do terceiro pivô (k = 3):

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0.5625 & \vdots & 0 & 0.3125 & -0.125 \\ 0 & 1 & 0.375 & \vdots & 0 & -0.125 & 0.25 \\ 0 & 0 & 2.5 & \vdots & 1 & -0.75 & 0 \end{bmatrix} L_3 \leftarrow L_3 / 2.5$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0.5625 & \vdots & 0 & 0.3125 & -0.125 \\ 0 & 1 & 0.375 & \vdots & 0 & -0.125 & 0.25 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 0.4 & -0.3 & 0 \end{bmatrix}$$

h). Processo de diagonalização, correspondente ao terceiro pivô (k = 3):

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0.5625 & \vdots & 0 & 0.3125 & -0.125 \\ 0 & 1 & 0.375 & \vdots & 0 & -0.125 & 0.25 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 0.4 & -0.3 & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - 0.5625L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - 0.375L_3 \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & -0.225 & 0.4812 & -0.125 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & -0.15 & -0.0125 & 0.25 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 0.4 & -0.3 & 0 \end{bmatrix}$$

Então, $A^{-1} = \begin{bmatrix} -0.225 & 0.4812 & -0.125 \\ -0.15 & -0.0125 & 0.25 \\ 0.4 & -0.3 & 0 \end{bmatrix}$

Para obter o vetor solução x efetua-se o produto entre A^{-1} e b:

$$x = A^{-1} \cdot b = \begin{bmatrix} -0.225 & 0.4812 & -0.125 \\ -0.15 & -0.0125 & 0.25 \\ 0.4 & -0.3 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 8 \\ 7 \\ -12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.069 \\ -4.288 \\ 1.100 \end{bmatrix}$$

Então, a solução do sistema é a seguinte:

$$x_1 = 3.069$$

$$x_2 = -4.288$$

$$x_3 = 1.100$$

$$S = \{3.069, -4.288, 1.100\}$$

Exercícios:

4). Resolva o seguinte sistema de equações lineares pelos métodos de:

Gauss com pivotamento total;

Gauss-Jordan com pivotamento total;

Inversão de matriz com pivotamento parcial;

$$\begin{cases} 3x_1 + 1.5x_2 + 4.75x_3 = 8 \\ 4.01x_1 + x_2 + 3x_3 = 7 \\ x_1 + 0.5x_2 - 0.05x_3 = -1 \end{cases}$$

5). Monte um algoritmo para determinar a matriz inversa de A, recorrendo ao pivotamento parcial (sugestão: use o algoritmo de Gauss-Jordan).

Além dos métodos de eliminação tradicionais, como Gauss, Gauss-Jordan e inversão, tem-se as suas variações classificadas como métodos de decomposição LU, conforme o procedimento que segue.

3.2.4 - Método de decomposição LU (Crout)

Nesta família de métodos diretos para a solução de um sistema linear faz-se uso do fato de que, sob certas condições, uma matriz quadrada pode ser decomposta no produto de duas matrizes triangulares. Uma destas variações do procedimento geral de eliminação é conhecida como método de Crout (ou Cholesky para o caso particular de matrizes simétricas positivas definidas).

A matriz A pode ser decomposta no produto $A=LU$, onde L é uma matriz triangular inferior e U é uma matriz triangular superior, quando a matriz for não singular ($\text{Det}(A) \neq 0$). Além disso, se atribuirmos valores fixos aos elementos da diagonal, seja de L ($l_{ii} = 1$ no Método de Doolittle) ou em U ($u_{ii} = 1$ no Método de Crout), esta decomposição será única.

Para a solução de $A \cdot x = b$, pode-se decompor A segundo o Método de Crout, conforme segue:

$$L = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{nn} \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} 1 & u_{12} & u_{1n} \\ 0 & 1 & u_{2n} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

tal que $A = L.U$. Então, o sistema torna-se $L.U.x = b$.
Fazendo $U.x = c$, resolve-se primeiro $L.c = b$ e depois $U.x = c$.

Para um sistema 3x3 podemos escrever:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} \\ 0 & 1 & u_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A multiplicação de matrizes $L.U$ pode ser usada para definir os valores de l_{ij} , u_{ij} e c_i em termos de a_{ij} e b_i :

| | |
|---|--|
| | $\begin{bmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} \\ 0 & 1 & u_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ |
| $\begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} l_{11}.1 + 0.0 + 0.0 & l_{11}.u_{12} + 0.1 + 0.0 & l_{11}.u_{13} + 0.u_{23} + 0.1 \\ l_{21}.1 + l_{22}.0 + 0.0 & l_{21}.u_{12} + l_{22}.1 + 0.0 & l_{21}.u_{13} + l_{22}.u_{23} + 0.1 \\ l_{31}.1 + l_{32}.0 + l_{33}.0 & l_{31}.u_{12} + l_{32}.1 + l_{33}.0 & l_{31}.u_{13} + l_{32}.u_{23} + l_{33}.1 \end{bmatrix}$ |

Como o produto $L.U$ gera a matriz A original, temos o seguinte sistema de equações lineares:

$$\begin{cases} l_{11}.1 + 0.0 + 0.0 = a_{11} & l_{11}.u_{12} + 0.1 + 0.0 = a_{12} & l_{11}.u_{13} + 0.u_{23} + 0.1 = a_{13} \\ l_{21}.1 + l_{22}.0 + 0.0 = a_{21} & l_{21}.u_{12} + l_{22}.1 + 0.0 = a_{22} & l_{21}.u_{13} + l_{22}.u_{23} + 0.1 = a_{23} \\ l_{31}.1 + l_{32}.0 + l_{33}.0 = a_{31} & l_{31}.u_{12} + l_{32}.1 + l_{33}.0 = a_{32} & l_{31}.u_{13} + l_{32}.u_{23} + l_{33}.1 = a_{33} \end{cases}$$

Cuja solução pode ser obtida de forma direta tratando pivôs sequencialmente:

Para a primeira coluna $k=1$:

$$\begin{array}{lcl}
 l_{11} \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = a_{11} & & l_{11} = a_{11} \\
 l_{21} \cdot 1 + l_{22} \cdot 0 + 0 \cdot 0 = a_{21} & \Rightarrow & l_{21} = a_{21} \\
 l_{31} \cdot 1 + l_{32} \cdot 0 + l_{33} \cdot 0 = a_{31} & & l_{31} = a_{31}
 \end{array}$$

Para a primeira linha k=1:

$$\begin{array}{lcl}
 l_{11} \cdot u_{12} + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 = a_{12} & & u_{12} = a_{12} / l_{11} \\
 l_{11} \cdot u_{13} + 0 \cdot u_{23} + 0 \cdot 1 = a_{13} & \Rightarrow & u_{13} = a_{13} / l_{11}
 \end{array}$$

Para a segunda coluna k=2:

$$\begin{array}{lcl}
 l_{21} \cdot u_{12} + l_{22} \cdot 1 + 0 \cdot 0 = a_{22} & & l_{22} = a_{22} - l_{21} \cdot u_{12} \\
 l_{31} \cdot u_{12} + l_{32} \cdot 1 + l_{33} \cdot 0 = a_{32} & \Rightarrow & l_{32} = a_{32} - l_{31} \cdot u_{12}
 \end{array}$$

Para a segunda linha k=2:

$$l_{21} \cdot u_{13} + l_{22} \cdot u_{23} + 0 \cdot 1 = a_{23} \quad \Rightarrow \quad u_{23} = (a_{23} - l_{21} \cdot u_{13}) / l_{22}$$

Para a terceira coluna k=3:

$$l_{31} \cdot u_{13} + l_{32} \cdot u_{23} + l_{33} \cdot 1 = a_{33} \quad \Rightarrow \quad l_{33} = (a_{33} - (l_{31} \cdot u_{13} + l_{32} \cdot u_{23}))$$

Resumindo:

$$\begin{array}{lcl}
 l_{11} = a_{11} & & \\
 l_{21} = a_{21} & u_{12} = a_{12} / l_{11} & \\
 l_{31} = a_{31} & u_{13} = a_{13} / l_{11} & (c_1 = b_1 / l_{11})
 \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl}
 l_{22} = a_{22} - l_{21} u_{12} & & \\
 l_{32} = a_{32} - l_{31} u_{12} & u_{23} = (a_{23} - l_{21} u_{13}) / l_{22} & (c_2 = (b_2 - l_{21} c_1) / l_{22})
 \end{array}$$

$$l_{33} = a_{33} - l_{31} u_{13} - l_{32} u_{23} \quad (c_3 = (b_3 - l_{31} c_1 - l_{32} c_2) / l_{33})$$

Note que o "cálculo de c, do sistema $L \cdot c = b$ pode ser feito da mesma forma que o cálculo de u".

A sequência de operações sempre é :

- 1). Calcular a primeira coluna de L, calcular a primeira linha de U e c_1 ;
- 2). Calcular a segunda coluna de L, calcular a segunda linha de U e c_2 ; e assim sucessivamente.

Os valores de x são obtidos por substituição sucessiva a partir de c ($U.x = c$)

$$x_3 = c_3$$

$$x_2 = c_2 - u_{23}x_3$$

$$x_1 = c_1 - u_{13}x_3 - u_{12}x_2$$

Note que, o vetor c também pode ser obtido do sistema parcial $L.c = b$ por substituições sucessivas.

Sugere-se usar o processo "tipo escada" para armazenar L e U na mesma área de memória A, o que torna o processo mais eficiente,

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \vdots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \vdots & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \vdots & b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11} & u_{12} & u_{13} & \vdots & c_1 \\ l_{21} & l_{22} & u_{23} & \vdots & c_2 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & \vdots & c_3 \end{bmatrix}$$

De uma forma geral, para sistemas de ordem n:

- Operações com o primeiro pivô:

Para $k = 1$

$$l_{i1} = a_{i1}$$

$$i = 1, 2, 3, \dots, n$$

$$u_{1j} = a_{1j} / l_{11}$$

$$j = 2, 3, \dots, n+1 \text{ (incluindo c)}$$

Para $k = 2, 3, \dots, n$

$$l_{ik} = a_{ik} - \sum_{r=1}^{k-1} l_{ir} u_{rk}$$

$$i \geq k \text{ (} i = k, k+1, \dots, n \text{)}$$

$$u_{kj} = \frac{1}{l_{kk}} \left(a_{kj} - \sum_{r=1}^{k-1} l_{kr} u_{rj} \right)$$

$$(j = k+1, \dots, n+1 \text{ (incluindo c)})$$

Ou somente a decomposição LU da matriz A de coeficientes:

- Operações com o primeiro pivô:

Para $k = 1$

$$l_{i1} = a_{i1}$$

$$i = 1, 2, 3, \dots, n$$

$$u_{1j} = a_{1j} / l_{11}$$

$$j = 2, 3, \dots, n$$

Para $k = 2, 3, \dots, n-1$

$$l_{ik} = a_{ik} - \sum_{r=1}^{k-1} l_{ir} u_{rk} \quad (i = k, k+1, \dots, n)$$

$$u_{kj} = \frac{1}{l_{kk}} \left(a_{kj} - \sum_{r=1}^{k-1} l_{kr} u_{rj} \right) \quad (j = k+1, \dots, n)$$

Para $k = n$

$$l_{ik} = a_{ik} - \sum_{r=1}^{k-1} l_{ir} u_{rk} \quad (i = k=n)$$

Ex. 5): Resolver o sistema abaixo pelo Método de Crout, sem estratégia de pivotamento, usando 4 dígitos significativos e arredondamento ponderado.

$$\begin{cases} 0.448x_1 + 0.832x_2 + 0.193x_3 = 1 \\ 0.421x_1 + 0.784x_2 - 0.207x_3 = 0 \\ -0.421x_1 + 0.784x_2 + 0.279x_3 = 0 \end{cases}$$

Armazenam-se os valores de b_i em a_{i4} e c_i em u_{i4} e a matriz decomposta L e U na própria área de memória de A.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \vdots & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \vdots & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \vdots & a_{34} \end{bmatrix} \text{ após a decomposição LU } \Rightarrow \begin{bmatrix} l_{11} & u_{12} & u_{13} & \vdots & u_{14} \\ l_{21} & l_{22} & u_{22} & \vdots & u_{24} \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & \vdots & u_{34} \end{bmatrix}$$

1º). Geração da matriz expandida:

$$\begin{bmatrix} 0.448 & 0.832 & 0.193 & \vdots & 1 \\ 0.421 & 0.784 & -0.207 & \vdots & 0 \\ -0.421 & 0.784 & 0.279 & \vdots & 0 \end{bmatrix}$$

2º). Decomposição LU (Método de Crout), correspondente ao processo com o primeiro pivô ($k = 1$):

Adota-se aqui a seguinte legenda:

- Representação em Negrito: para valores da matriz decomposta L e U.
- Representação normal: para valores da matriz expandida original $A | b$.

(i). Definição da primeira coluna $k = 1$ da matriz L - $l_{i1}:(i=1,2,3)$.

$$\begin{bmatrix} 0.448 & 0.832 & 0.193 & \vdots & 1 \\ 0.421 & 0.784 & -0.207 & \vdots & 0 \\ -0.421 & 0.784 & 0.279 & \vdots & 0 \end{bmatrix}$$

C_1

↑

C_1

(ii). Como não existe pivotamento, o pivô já está determinado:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{(0.448)} & 0.832 & 0.193 & \vdots & 1 \\ \mathbf{0.421} & 0.784 & -0.207 & \vdots & 0 \\ -\mathbf{0.421} & 0.784 & 0.279 & \vdots & 0 \end{bmatrix}$$

(iii). Definição da primeira linha $k = 1$ da matriz $U - u_{1j}$: ($j=2,3,4$)

$$\begin{bmatrix} \mathbf{(0.448)} & \mathbf{1.857} & \mathbf{0.4308} & \vdots & \mathbf{2.232} \\ \mathbf{0.421} & 0.784 & -0.207 & \vdots & 0 \\ -\mathbf{0.421} & 0.784 & 0.279 & \vdots & 0 \end{bmatrix} L_1 \leftarrow L_1 / l_{11}$$

5º). Decomposição LU, correspondente ao processo com o segundo pivô ($k = 2$):

(i). Definição da coluna $k = 2$ da matriz $L - l_{i2}$: ($i = 2,3$)

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0.448} & \mathbf{1.857} & \mathbf{0.4308} & \vdots & \mathbf{2.232} \\ \mathbf{0.421} & 0.784 & -0.207 & \vdots & 0 \\ -\mathbf{0.421} & 0.784 & 0.279 & \vdots & 0 \end{bmatrix}$$

C_2

\uparrow

$$C_2 - l_{i1}u_{12}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0.448} & \mathbf{1.857} & \mathbf{0.4308} & \vdots & \mathbf{2.232} \\ \mathbf{0.421} & \mathbf{0.0022} & -0.207 & \vdots & 0 \\ -\mathbf{0.421} & \mathbf{1.566} & 0.279 & \vdots & 0 \end{bmatrix}$$

(ii). Sem pivotamento.

(iii). Definição da linha $k = 2$ da matriz $U - u_{2j}$: ($j = 3,4$)

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0.448} & \mathbf{1.857} & \mathbf{0.4308} & \vdots & \mathbf{2.232} \\ \mathbf{0.421} & \mathbf{(0.0022)} & -0.207 & \vdots & 0 \\ -\mathbf{0.421} & \mathbf{1.566} & 0.279 & \vdots & 0 \end{bmatrix} L_2 \leftarrow (L_2 - l_{21}u_{1j}) / l_{22}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0.448} & \mathbf{1.857} & \mathbf{0.4308} & \vdots & \mathbf{2.232} \\ \mathbf{0.421} & \mathbf{(0.0022)} & -\mathbf{176.5} & \vdots & -\mathbf{427.1} \\ -\mathbf{0.421} & \mathbf{1.566} & 0.279 & \vdots & 0 \end{bmatrix}$$

6º). Decomposição LU, correspondente ao processo com o terceiro pivô ($k = 3$):

(i). Definição da coluna $k = 3$ da matriz $L - l_{i3}$: ($i = 3$)

$$\begin{bmatrix} 0.448 & 1.857 & 0.4308 & : & 2.232 \\ 0.421 & 0.0022 & -176.5 & : & -427.1 \\ -0.421 & 1.566 & 0.279 & : & 0 \end{bmatrix}$$

C_3

↑

$$C_3 - l_{31}u_{31} - l_{32}u_{23}$$

$$\begin{bmatrix} 0.448 & 1.857 & 0.4308 & : & 2.232 \\ 0.421 & 0.0022 & -176.5 & : & -427.1 \\ -0.421 & 1.566 & 276.9 & : & 0 \end{bmatrix}$$

(ii) Não há pivotamento.

(iii). Definição da linha $k = 3$ da matriz $U - u_{3j}$; ($j = 4$)

$$\begin{bmatrix} 0.448 & 1.857 & 0.4308 & : & 2.232 \\ 0.421 & 0.0022 & -176.5 & : & -427.1 \\ -0.421 & 1.566 & (276.9) & : & 0 \end{bmatrix} \quad L_3 \leftarrow (L_3 - l_{31}u_{14} - l_{32}u_{24}) / l_{33}$$

$$\begin{bmatrix} 0.448 & 1.857 & 0.4308 & : & 2.232 \\ 0.421 & 0.0022 & -176.5 & : & -427.1 \\ -0.421 & 1.566 & 276.9 & : & 2.419 \end{bmatrix}$$

Logo,

$$L = \begin{bmatrix} 0.448 & 0 & 0 \\ 0.421 & 0.0022 & 0 \\ -0.421 & 1.566 & 276.9 \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} 1 & 1.857 & 0.4308 \\ 0 & 1 & -176.5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$L.c = b \Rightarrow \begin{cases} 0.448.c_1 + 0.c_2 + 0.c_3 = 1 \\ 0.421.c_1 + 0.0022.c_2 + 0.c_3 = 0 \\ -0.421.c_1 + 1.566.c_2 + 276.9.c_3 = 0 \end{cases}$$

Aplicando a substituição sucessiva, a frente:

$$\begin{array}{lll} c_1 = 1/0.448 & \Rightarrow & c_1 = 2.232 \\ c_2 = (0 - (0.421.c_1))/0.0022 & \Rightarrow & c_2 = -427.1 \\ c_3 = (0 - (-0.421.c_1 + 1.566.c_2))/276.9 & \Rightarrow & c_3 = 2.419 \end{array}$$

7º). Processo de retrossubstituição sucessiva:

Deve-se observar que o vetor de termos independentes b_i pode ser transformado no vetor c_i do sistema $L.c = b$, simultaneamente ao processo de decomposição, pois o vetor c_i é calculado para mesma forma que o vetor u_{3j} para $j = 4$.

Então, extraindo da decomposição LU a matriz triangular superior U , com diagonal principal unitária (estabelecido por Crout), pode-se recuperar o sistema de equações

equivalente $Ux = c$, gerado a partir do processo de decomposição LU empregado, da seguinte forma:

$$\begin{cases} 1x_1 + 1.857x_2 + 0.4308x_3 = 2.232 \\ 0x_1 + 1x_2 - 176.5x_3 = -427.1 \\ 0x_1 + 0x_2 + 1x_3 = 2.419 \end{cases}$$

Agora é só aplicar o processo de retrossubstituição sucessiva:

$$\begin{array}{llll} x_3 = 2,419 & \Rightarrow & & x_3 = 2,419 \\ x_2 = (-427,1 + 176,5 \cdot x_3) & \Rightarrow & (-427,1 + 427,0) & x_2 = -0,1000 \\ x_1 = (2,232 - (1,857 \cdot x_2 - 0,4308 \cdot x_3)) & \Rightarrow & (2,232 + 0,1857 - 1,042) & x_1 = 1,376 \end{array}$$

A solução obtida é

$$S = \{ 1.376, -0.1000, 2.419 \}$$

Os resíduos ($r = |b - Ax|$) de cada uma das equações do sistema linear proposto são os seguintes:

$$\begin{aligned} r_1 &= |0.448x_1 + 0.832x_2 + 0.193x_3 - 1| = \mathbf{0.0001} \\ r_2 &= |0.421x_1 + 0.784x_2 - 0.207x_3 - 0| = \mathbf{0.0002} \\ r_3 &= |-0.421x_1 + 0.784x_2 + 0.279x_3 - 0| = \mathbf{0.0172} \end{aligned}$$

Neste caso, também pode ser calculado o erro exato, dado por $\text{erro} = |X_{\text{exato}} - X_{\text{aproximado}}|$. A solução exata foi encontrada através do OCTAVE, e foi obtida com 16 dígitos significativos. Vamos avaliar o erro utilizando também a precisão de 4 dígitos significativos, que foi utilizada até aqui em todas as operações. Então:

$$\begin{aligned} X_{\text{exato}_1} &= 1.396286256155218 \\ X_{\text{exato}_2} &= -0.111080218034935 \\ X_{\text{exato}_3} &= 2.419080303873203 \end{aligned}$$

Ex. 6): Resolver o sistema anterior pelo Método de Crout, **com pivotamento parcial (é imprescindível incluir o(s) vetor(es) 'b' do sistema na troca de linhas da pivotação)**, usando 4 dígitos significativos e arredondamento ponderado.

$$\begin{cases} 0.448x_1 + 0.832x_2 + 0.193x_3 = 1 \\ 0.421x_1 + 0.784x_2 - 0.207x_3 = 0 \\ -0.421x_1 + 0.784x_2 + 0.279x_3 = 0 \end{cases}$$

1º). Geração da matriz expandida:

$$\begin{bmatrix} 0.448 & 0.832 & 0.193 & : & 1 \\ 0.421 & 0.784 & -0.207 & : & 0 \\ -0.421 & 0.784 & 0.279 & : & 0 \end{bmatrix}$$

2º). Decomposição LU (Método de Crout), correspondente ao processo com o primeiro pivô (k = 1):

(i). Definição da primeira coluna k = 1 da matriz L - l_{i1} : (i=1,2,3).

$$\begin{bmatrix} 0.448 & 0.832 & 0.193 & : & 1 \\ 0.421 & 0.784 & -0.207 & : & 0 \\ -0.421 & 0.784 & 0.279 & : & 0 \end{bmatrix}$$

C_1

↑

C_1

(ii). Pivotação parcial, correspondente ao primeiro pivô (k=1):

OBSERVE que a pivotação parcial deve ocorrer depois do cálculo dos valores de l_{ik} na coluna k e antes do cálculo dos valores u_{kj} da linha k, para que os elementos l_{ii} da diagonal principal calculados sejam não nulos e tenham os maiores valores possíveis.

A matriz l_{ik} já se encontra pivotada (vide Ex. 1):

$$\begin{bmatrix} \mathbf{(0.448)} & 0.832 & 0.193 & : & 1 \\ \mathbf{0.421} & 0.784 & -0.207 & : & 0 \\ -\mathbf{0.421} & 0.784 & 0.279 & : & 0 \end{bmatrix}$$

(iii). Definição da primeira linha k = 1 da matriz U - u_{1j} : (j=2,3,4)

$$\begin{bmatrix} \mathbf{(0.448)} & \mathbf{1.857} & \mathbf{0.4308} & : & \mathbf{2.232} \\ \mathbf{0.421} & 0.784 & -0.207 & : & 0 \\ -\mathbf{0.421} & 0.784 & 0.279 & : & 0 \end{bmatrix} L_1 \leftarrow L_1 / l_{11}$$

5º). Decomposição LU, correspondente ao processo com o segundo pivô (k = 2):

(i). Definição da coluna k = 2 da matriz L - l_{i2} : (i = 2,3)

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0.448} & \mathbf{1.857} & \mathbf{0.4308} & : & \mathbf{2.232} \\ \mathbf{0.421} & 0.784 & -0.207 & : & 0 \\ -\mathbf{0.421} & 0.784 & 0.279 & : & 0 \end{bmatrix}$$

C_2

↑

$C_2 - l_{i1}u_{12}$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0.448} & \mathbf{1.857} & \mathbf{0.4308} & : & \mathbf{2.232} \\ \mathbf{0.421} & \mathbf{0.0022} & -0.207 & : & 0 \\ -\mathbf{0.421} & \mathbf{1.566} & 0.279 & : & 0 \end{bmatrix}$$

(ii). Pivotação Parcial, correspondente ao segundo pivô (k=2):

(ii)-a). Busca parcial do maior módulo da coluna $k = 2$ (busca a partir da segunda linha):

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0.448} & \mathbf{1.857} & \mathbf{0.4308} & \vdots & \mathbf{2.232} \\ \mathbf{0.421} & \mathbf{0.0022} & -0.207 & \vdots & 0 \\ -\mathbf{0.421} & \mathbf{(1.566)} & 0.279 & \vdots & 0 \end{bmatrix}$$

(ii)-b) troca de linhas.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0.448} & \mathbf{1.857} & \mathbf{0.4308} & \vdots & \mathbf{2.232} \\ -\mathbf{0.421} & \mathbf{(1.566)} & 0.279 & \vdots & 0 \\ \mathbf{0.421} & \mathbf{0.0022} & 0.207 & \vdots & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_3 \\ L_3 \leftarrow L_2 \end{matrix}$$

(iii). Definição da linha $k = 2$ da matriz $U - u_{2j}$: ($j = 3, 4$)

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0.448} & \mathbf{1.857} & \mathbf{0.4308} & \vdots & \mathbf{2.232} \\ -\mathbf{0.421} & \mathbf{(1.566)} & 0.279 & \vdots & 0 \\ \mathbf{0.421} & \mathbf{0.0022} & -0.207 & \vdots & 0 \end{bmatrix} L_2 \leftarrow (L_2 - l_{21}u_{1j})/l_{22}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0.448} & \mathbf{1.857} & \mathbf{0.4308} & \vdots & \mathbf{2.232} \\ -\mathbf{0.421} & \mathbf{(1.566)} & \mathbf{0.2940} & \vdots & \mathbf{0.6001} \\ \mathbf{0.421} & \mathbf{0.0022} & -0.207 & \vdots & 0 \end{bmatrix}$$

6º). Decomposição LU, correspondente ao processo com o terceiro pivô ($k = 3$):

(i). Definição da coluna $k = 3$ da matriz $L - l_{i3}$: ($i = 3$)

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0.448} & \mathbf{1.857} & \mathbf{0.4308} & \vdots & \mathbf{2.232} \\ -\mathbf{0.421} & \mathbf{1.566} & \mathbf{0.2940} & \vdots & \mathbf{0.6001} \\ \mathbf{0.421} & \mathbf{0.0022} & -0.207 & \vdots & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} C_3 \\ \uparrow \end{matrix}$$

$$C_3 - l_{31}u_{13} - l_{32}u_{23}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0.448} & \mathbf{1.857} & \mathbf{0.4308} & \vdots & \mathbf{2.232} \\ -\mathbf{0.421} & \mathbf{1.566} & \mathbf{0.2940} & \vdots & \mathbf{0.6001} \\ \mathbf{0.421} & \mathbf{0.0022} & -\mathbf{0.3890} & \vdots & 0 \end{bmatrix}$$

(ii) Não há pivotamento, pois é a última linha.

(iii). Definição da linha $k = 3$ da matriz $U - u_{3j}$: ($j = 4$)

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0.448} & \mathbf{1.857} & \mathbf{0.4308} & \vdots & \mathbf{2.232} \\ -\mathbf{0.421} & \mathbf{1.566} & \mathbf{0.2938} & \vdots & \mathbf{0.6001} \\ \mathbf{0.421} & \mathbf{0.0022} & (-\mathbf{0.3890}) & \vdots & 0 \end{bmatrix} L_3 \leftarrow (L_3 - l_{31}u_{14} - l_{32}u_{24})/l_{33}$$

$$\begin{bmatrix} 0.448 & 1.857 & 0.4308 & \vdots & 2.232 \\ -0.421 & 1.566 & 0.2940 & \vdots & 0.6001 \\ 0.421 & 0.0022 & -0.3890 & \vdots & 2.419 \end{bmatrix}$$

7º). Processo de retrossubstituição sucessiva:

$$\begin{cases} 1x_1 + 1.857x_2 + 0.4308x_3 = 2.232 \\ 0x_1 + 1x_2 + 0.2940x_3 = 0.6001 \\ 0x_1 + 0x_2 + 1x_3 = 2.419 \end{cases}$$

Agora é só aplicar o processo de retrossubstituição sucessiva:

$$\begin{array}{llll} x_3 = 2.419 & & & x_3 = 2.419 \\ x_2 = (0.6001 - 0.2940x_3) & \Rightarrow & (0.6001 - 0.7112) & x_2 = -0.1111 \\ x_1 = (2.232 - 1.857x_2 - 0.4308x_3) & \Rightarrow & (2.232 + 0.2063 - 1.042) & x_1 = 1.396 \end{array}$$

A solução arredondada obtida é :

$$S = \{ 1.396, -0.1111, 2.419 \}$$

Os resíduos ($r = |b - Ax|$) de cada uma das equações do sistema linear proposto são os seguintes:

$$\begin{aligned} r_1 &= |0.448x_1 + 0.832x_2 + 0.193x_3 - 1| = \mathbf{0.0002} \\ r_2 &= |0.421x_1 + 0.784x_2 - 0.207x_3 - 0| = \mathbf{0.0001} \\ r_3 &= |-0.421x_1 + 0.784x_2 + 0.279x_3 - 0| = \mathbf{0.0001} \end{aligned}$$

Cálculo do erro: $\text{erro} = |X_{\text{exato}} - X_{\text{aproximado}}|$.

Neste caso, também pode ser calculado o erro exato, dado por $\text{erro} = |X_{\text{exato}} - X_{\text{aproximado}}|$, através da solução exata encontrada através do OCTAVE (`cgs(A, b)`):

$$\begin{aligned} X_{\text{exato}_1} &= 1.396286256155218 \\ X_{\text{exato}_2} &= -0.111080218034935 \\ X_{\text{exato}_3} &= 2.419080303873203 \end{aligned}$$

Ex. 7): Resolver os 3 sistemas abaixo de $n=4$ equações pelo Método de Crout, **com pivotamento parcial** (é imprescindível incluir o(s) vetor(es) 'b' do sistema na troca de linhas da pivotação):

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 1 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 4x_4 = 0 \\ -x_1 + 0x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1 \\ x_1 - 4x_2 - x_3 + x_4 = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 1 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 4x_4 = 0 \\ -x_1 + 0x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1 \\ x_1 - 4x_2 - x_3 + x_4 = -2 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = -1 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 4x_4 = 0 \\ -x_1 + 0x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1 \\ x_1 - 4x_2 - x_3 + x_4 = 2 \end{cases}$$

Geração da matriz concatenada A (única) com os 3 vetores b^1, b^2, b^3 de termos independentes:

$$A : b^1, b^2, b^3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & -3 & -4 \\ -1 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & -4 & -1 & 1 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

1º). k = 1:

(i). Definição da primeira coluna k = 1 da matriz L - l_{i1}:(i=1,2,3,4), que é igual a matriz A:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & -3 & -4 \\ -1 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & -4 & -1 & 1 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

(ii). Pivotação parcial, correspondente ao primeiro pivô (k=1):

OBSERVE que a **pivotação parcial** deve ocorrer depois do cálculo dos valores de l_{ik} na coluna k e antes do cálculo dos valores u_{kj} da linha k, para que os elementos l_{ii} da diagonal principal calculados sejam não nulos e tenham os maiores valores possíveis.

Nesse caso, a matriz l_{ik} já se encontra pivotada (vide Ex. 1):

$$\begin{bmatrix} (1) & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & -3 & -4 \\ -1 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & -4 & -1 & 1 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

(iii). Definição da primeira linha k = 1 da matriz U - u_{1j}: (j=2,3,4) , que é igual a matriz A dividida pelo pivô l₁₁=1:

$$\begin{bmatrix} (1) & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & -3 & -4 \\ -1 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & -4 & -1 & 1 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

2º). k = 2:

(i). Definição da segunda coluna k = 2 da matriz L - l_{i1}:(i=2,3,4) , que é igual a matriz A menos o somatório dos produtos cruzados da sua linha e coluna, respectivamente.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & -3 & -4 \\ -1 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & (-6) & -1 & 1 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{matrix} 0 = 2 - (1*2) \\ 2 = 0 - (-1*2) \\ -6 = -4 - (1*2) \end{matrix}$$

(ii). Pivotação parcial, correspondente ao segundo pivô (k=2):

OBSERVE que a pivotação parcial deve ocorrer depois do cálculo dos valores de l_{ik} na coluna k e antes do cálculo dos valores u_{kj} da linha k, para que os elementos l_{ii} da diagonal principal "já calculados" sejam não nulos e tenham os maiores valores possíveis.

Nesse caso, a linha 4 é trocada com a linha 2:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & (-6) & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -3 & -4 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(iii). Definição da segunda linha k = 2 da matriz U - u_{lj} : (j=3,4), que é igual a matriz A menos o somatório dos produtos cruzados da sua linha e coluna, respectivamente, e dividido pelo pivô $l_{22}=-6$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & (-6) & \mathbf{0.67} & \mathbf{0.5} \\ -1 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -3 & -4 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{0.67} = [-1 - (1*3)]/(-6) \quad \mathbf{0.5} = [1 - (1*4)]/(-6)$$

\rightarrow

3º). k = 3:

(i). Definição da terceira coluna k = 3 da matriz L - l_{il} : (i=3,4).

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & (-6) & \mathbf{0.67} & \mathbf{0.5} \\ -1 & 2 & \mathbf{3.67} & 3 \\ 1 & 0 & -6 & -4 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{3.67} = 2 - (-1*3 + 2*0.67) \\ \mathbf{-6} = -3 - (1*3 + 0*0.67)$$

\rightarrow

(ii). Pivotação parcial, correspondente ao terceiro pivô (k=3):

OBSERVE que a pivotação parcial deve ocorrer depois do cálculo dos valores de l_{ik} na coluna k e antes do cálculo dos valores u_{kj} da linha k, para que os elementos l_{ii} da diagonal principal "já calculados" sejam não nulos e tenham os maiores valores possíveis.

Nesse caso, a linha 4 é trocada com a linha 3:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & (-6) & \mathbf{0.67} & \mathbf{0.5} \\ 1 & 0 & (-6) & -4 \\ -1 & 2 & \mathbf{3.67} & 3 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(iii). Definição da terceira linha k = 3 da matriz U - u_{lj} : (j=4)

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & (-6) & 0.67 & 0.5 \\ 1 & 0 & (-6) & 1.33 \\ -1 & 2 & 3.67 & 3 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow \mathbf{1.33} = [-4 - (1*4 + 0*0.5)]/(-6)$$

4º). k = 4:

(i). Definição da quarta coluna k = 4 da matriz L - l_{i1}:(i=4).

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & (-6) & 0.67 & 0.5 \\ 1 & 0 & (-6) & 1.33 \\ -1 & 2 & 3.67 & 1.11 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow \mathbf{1.11} = 3 - (-1*4 + 2*0.5 + 3.67*1.33)$$

Resolvendo o primeiro sistema L.C=b¹

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & (-6) & 0 & 0 \\ 1 & 0 & (-6) & 0 \\ -1 & 2 & 3.67 & 1.11 \end{bmatrix} \mathbf{x} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -0.167 \\ 0.167 \\ 1.55 \end{bmatrix}$$

Resolvendo U.x=c¹

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0.67 & 0.5 \\ 0 & 0 & 1 & 1.33 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -0.167 \\ 0.167 \\ 1.55 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.15 \\ 0.325 \\ -1.9 \\ 1.55 \end{bmatrix}$$

Resolvendo o segundo sistema L.C=b²

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & (-6) & 0 & 0 \\ 1 & 0 & (-6) & 0 \\ -1 & 2 & 3.67 & 1.11 \end{bmatrix} \mathbf{x} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.5 \\ 0.167 \\ 0.35 \end{bmatrix}$$

Resolvendo U.x=c²

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0.67 & 0.5 \\ 0 & 0 & 1 & 1.33 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.5 \\ 0.167 \\ 0.35 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.55 \\ 0.525 \\ -0.3 \\ 0.35 \end{bmatrix}$$

Resolvendo o terceiro sistema $L.C=b^3$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & (-6) & 0 & 0 \\ 1 & 0 & (-6) & 0 \\ -1 & 2 & 3.67 & 1.11 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -0.5 \\ -0.167 \\ 1.45 \end{bmatrix}$$

Resolvendo $U.x=c^3$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0.67 & 0.5 \\ 0 & 0 & 1 & 1.33 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -0.5 \\ -0.167 \\ 1.45 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.85 \\ 0.175 \\ -2.1 \\ 1.45 \end{bmatrix}$$

Considerações:

(i). O número de operações aritméticas envolvidas em cada um dos métodos de eliminação (sem pivotamento) apresentados é da seguinte ordem:

| Métodos: | Número de Operações: (sem pivotamento) |
|--------------|---|
| Gauss | $O(2n^3/3)$ |
| Gauss-Jordan | $O(n^3)$ |
| Inversão | $O(n^3)$ |
| Crout | $O(2n^3/3)$ |

Note que o método de inversão de matrizes é computacionalmente o menos eficiente, pois envolve o maior número de operações aritméticas, enquanto os métodos de Gauss e Crout são os que envolvem menor esforço computacional.

Entretanto, quando temos vários sistemas para resolver com a mesma matriz de coeficientes A e com diferentes vetores de termos independentes b (em $Ax = b^k$), pode-se obter a matriz decomposta $L.U$ dos coeficientes uma única vez e efetuar as substituições sucessivas $L.c^k = b^k$ e $U.x^k = c^k$, tantas vezes quantas forem necessárias para se obter as respectivas soluções c^k e x^k , correspondentes a cada b^k .

Nestes casos, tem-se apenas um custo da ordem de $O(n^2)$ operações, referente às substituições sucessivas, para se obter a solução x^k .

(ii). O número total de operações aritméticas utilizado no método de decomposição LU de Crout é $(4n^3+15n^2-13n)/6$, que é praticamente igual ao do Método de Gauss que realiza $(4n^3+9n^2-7n)/6$. Veja a tabela comparativa entre as operações realizadas pelos dois métodos:

| Operação | Método de Crout | Método de Gauss |
|--------------------------|--|--------------------------------------|
| Adição +Subtração | $(2n^3+9n^2-11n)/6$ | $(2n^3+3n^2-5n)/6$ |
| Multiplicação | $(2n^3+3n^2-5n)/6$ | $(2n^3+3n^2-5n)/6$ |
| Divisão | $(n^2+n)/2$ | $(n^2+n)/2$ |
| Total | $(4n^3+15n^2-13n)/6$ | $(4n^3+9n^2-7n)/6$ |

Outro importante aspecto a ser considerado é que a acumulação de erros de arredondamento no método de Crout é menor que no de Gauss, isto se deve a menor propagação dos erros gerados nas divisões sucessivas.

(iii). No caso particular de sistemas com matrizes **simétricas** ($U = L^T$) e positivas definidas pode-se obter uma simplificação no método de decomposição para obter as matrizes L e U, chamado de Método de Cholesky ($O(n^3/6)$ operações). Neste caso a matriz U pode ser obtida diretamente pela transposta de L ($A = L L^t$), segundo as seguintes equações:

- Operações com o primeiro pivô: $k = 1$

$$l_{11} = \sqrt{a_{11}}$$

$$l_{i1} = a_{i1} / l_{11} \quad (i = 2, 3, \dots, n)$$

- Operações com pivô genérico: $k = 2, 3, \dots, n-1$.

$$l_{kk} = \left[a_{kk} - \sum_{r=1}^{k-1} l_{kr}^2 \right]^{1/2}$$

$$l_{ik} = \frac{1}{l_{kk}} \left(a_{ik} - \sum_{r=1}^{k-1} l_{ir} l_{kr} \right) \quad i = k+1, \dots, n$$

- Operações com o último pivô: $k = n$

$$e \quad l_{nn} = \left[a_{nn} - \sum_{r=1}^{n-1} l_{nr}^2 \right]^{1/2}$$

O método de Cholesky também é utilizado para fazer um teste rápido se uma dada matriz simétrica é positiva definida ou não. Caso a decomposição seja possível (radicando positivo) então a matriz simétrica é positiva definida.

Exercícios:

6). Resolva o seguinte sistema de equações lineares pelo método de Cholesky:

$$\begin{cases} 4x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ -x_1 + 4.25x_2 + 2.75x_3 = 1 \\ x_1 + 2.75x_2 + 3.5x_3 = -1 \end{cases}$$

7). Para resolver um sistema de equações lineares ordem 10 (10 equações por 10 incógnitas) um computador (Pentium 133), utilizando o método de Eliminação de Gauss s/ pivotamento, levou **0.11 segundos** para encontrar a solução. Estime o tempo que este mesmo computador levaria para resolver um sistema de ordem 100, utilizando o mesmo método.

3.2.5 - Métodos específicos para matrizes de coeficientes do tipo banda:

Dado o seguinte sistema de equações:

$$\begin{bmatrix} r_1 & d_1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ t_2 & r_2 & d_2 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & t_3 & r_3 & d_3 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & t_{n-1} & r_{n-1} & d_{n-1} \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & t_n & r_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ b_{n-1} \\ b_n \end{bmatrix} \quad (3)$$

Nota-se que a estrutura da matriz de coeficientes é do tipo Matriz Banda Tridiagonal, onde existem apenas três diagonais não totalmente nulas, uma diagonal principal r_i e duas diagonais paralelas t_i e d_i , os demais coeficientes são todos nulos.

Este sistema de equações pode ser resolvido por um método direto, como Gauss por exemplo, o qual promove as devidas eliminações tornando a matriz de coeficientes uma matriz do tipo triangular superior. Neste procedimento, o método de Gauss opera as devidas eliminações inclusive nas posições dos elementos nulos, que não necessitam ser manipulados. No caso de matrizes de grande porte teríamos um custo excessivo com operações desnecessárias.

Então, para sistemas com matrizes de coeficientes do tipo banda é possível adaptar os métodos diretos tradicionais, de modo que os valores nulos não sejam manipulados desnecessariamente.

Assim, pode-se implementar um método de eliminação otimizado envolvendo apenas os elementos não nulos, conforme a sequência a seguir, baseada no método de Gauss:

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} r_1 & d_1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & b_1 \\ t_2 & r_2 & d_2 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & t_{i-1} & r_{i-1} & d_{i-1} & \vdots & \vdots & b_{i-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & t_i & r_i & d_i & \vdots & b_i \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & t_n & r_n & b_n \end{array} \right] \quad L_2 \leftarrow L_2 - \frac{t_2}{r_1} L_1$$

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} r_1 & d_1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & b_1 \\ 0 & r_2^* & d_2 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & b_2^* \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & t_{i-1} & r_{i-1} & d_{i-1} & \vdots & \vdots & b_{i-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & t_i & r_i & d_i & \vdots & b_i \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & t_n & r_n & b_n \end{array} \right]$$

onde $r_2^* = r_2 - \frac{t_2}{r_1} d_1$ e $b_2^* = b_2 - \frac{t_2}{r_1} b_1$

Generalizando para uma linha i qualquer, tem-se:

$$\left[\begin{array}{ccccccc|c} r_1 & d_1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & b_1 \\ 0 & r_2^* & d_2 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & b_2^* \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & 0 & r_{i-1}^* & d_{i-1} & \vdots & \vdots & b_{i-1}^* \\ \vdots & \vdots & \vdots & t_i & r_i & d_i & \vdots & b_i \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & t_n & r_n & b_n \end{array} \right] L_i \leftarrow L_i - \frac{t_i}{r_{i-1}^*} L_{i-1}$$

$$\left[\begin{array}{ccccccc|c} r_1 & d_1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & b_1 \\ 0 & r_2^* & d_2 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & b_2^* \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & 0 & r_{i-1}^* & d_{i-1} & \vdots & \vdots & b_{i-1}^* \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 & r_i^* & d_i & \vdots & b_i^* \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & r_n^* & b_n \end{array} \right] \quad (4)$$

onde $r_i^* = r_i - \frac{t_i}{r_{i-1}^*} d_{i-1}$ e $b_i^* = b_i - \frac{t_i}{r_{i-1}^*} b_{i-1}^*$

Assim, chega-se a um algoritmo simples para efetuar a triangularização da matriz de coeficientes:

Genericamente, para $i = 2, 3, \dots, n$ tem-se

$$r_i^* = r_i - \frac{t_i}{r_{i-1}^*} d_{i-1}$$

$$b_i^* = b_i - \frac{t_i}{r_{i-1}^*} b_{i-1}^*$$

com $r_1^* = r_1$ e $b_1^* = b_1$.

Como a solução de (3) é a mesma de (4), então por retrossubstituição sucessiva obtem-se:

$$x_n = b_n^* / r_n^*$$

Para $i = n-1, n-2, \dots, 2, 1$ tem-se

$$x_i = (b_i^* - d_i x_{i+1}) / r_i^*$$

Assim, a solução do sistema de equações é obtida com o mínimo de operações possíveis, manipulando apenas os elementos não nulos.

Nestes casos o pivotamento de linhas ou colunas não deve ser aplicado, pois isto alteraria a estrutura em forma de banda da matriz.

Ex. 8): Resolva o seguinte sistema de equações de forma otimizada:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & \vdots & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & \vdots & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & \vdots & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & \vdots & -2 \end{bmatrix}$$

Solução:

(i). Triangularização baseada no pivô $k = 1$:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & \vdots & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & \vdots & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & \vdots & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & \vdots & -2 \end{bmatrix} L_2 \leftarrow L_2 - \frac{1}{1}L_1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & \vdots & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & \vdots & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & \vdots & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & \vdots & -2 \end{bmatrix}$$

(ii). Triangularização baseada no pivô $k = 2$:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & \vdots & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & \vdots & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & \vdots & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & \vdots & -2 \end{bmatrix} L_3 \leftarrow L_3 - \frac{1}{2}L_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & -0.5 & 1 & 0 & \vdots & 1.5 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & \vdots & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & \vdots & -2 \end{bmatrix}$$

(iii). Triangularização baseada no pivô $k = 3$:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & : & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & : & 1 \\ 0 & 0 & -0.5 & 1 & 0 & : & 1.5 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & : & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & : & -2 \end{bmatrix} L_4 \leftarrow L_4 - \frac{(-1)}{(-0.5)} L_3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & : & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & : & 1 \\ 0 & 0 & -0.5 & 1 & 0 & : & 1.5 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & : & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & : & -2 \end{bmatrix}$$

(iv). Triangularização baseada no pivô k = 4:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & : & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & : & 1 \\ 0 & 0 & -0.5 & 1 & 0 & : & 1.5 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & : & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & : & -2 \end{bmatrix} L_5 \leftarrow L_5 - \frac{(-1)}{(-1)} L_4$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & : & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & : & 1 \\ 0 & 0 & -0.5 & 1 & 0 & : & 1.5 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & : & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & : & 2 \end{bmatrix}$$

(v). Retrossubstituição:

$$\begin{array}{ll} 1 \cdot x_5 = 2 & x_5 = 2 \\ -1 \cdot x_4 + 1 \cdot x_5 = -4 & x_4 = 6 \\ -0.5 \cdot x_3 + 1 \cdot x_4 = 1.5 & x_3 = 9 \\ 2 \cdot x_2 - 1 \cdot x_3 = 1 & x_2 = 5 \\ 1 \cdot x_1 - 1 \cdot x_2 = 0 & x_1 = 5 \end{array}$$

$$\text{Solução} = \{5, 5, 9, 6, 2\}$$

Considerações finais:

(i). Em sistemas de equações lineares que relacionam variáveis com grandezas de magnitudes diferentes, como por ex.: metros e milímetros, podem existir coeficientes também com magnitudes bastante diferentes. Nestes casos recomenda-se normalizar os coeficientes das equações do sistema, dividindo cada equação pelo coeficiente de maior módulo. Este procedimento reduz os erros por perda de significação;

(ii). A avaliação do determinante da matriz de coeficientes é uma questão estrategicamente importante para que se possa classificar as possibilidades de soluções do sistema de equações lineares. Se o cálculo do determinante for efetuado via a sua definição clássica, dada pela "Soma do termo principal, dada pelo produto da diagonal principal da matriz, com os produtos dos elementos do termo principal permutando-se os seus segundos índices", tem-se um número de operações aritméticas envolvidas muito elevado.

Por isso, adota-se uma forma de cálculo alternativa, baseada nas operações elementares utilizadas nos métodos de resolução do sistema de equações lineares.

Por exemplo, no método de Gauss aplica-se um conjunto de operações elementares para triangularizar a matriz expandida, mas nenhuma destas operações aplicadas altera a magnitude do determinante, podem alterar apenas o sinal do determinante quando acontecem as trocas de linhas ou colunas.

Então, após o procedimento de eliminações sucessivas gera-se a matriz triangularizada, cujo determinante pode ser obtido pelo simples produto dos elementos da diagonal principal.

Uma desvantagem deste cálculo do determinante sobre a matriz triangular processada, através das operações elementares, é o fato de que esta forma final sofreu o acúmulo de erros de arredondamentos sucessivos. Então, esta forma de cálculo do determinante não é exata, e pode gerar inconsistências. Por exemplo, em matrizes singulares é possível avaliar um determinante residual diferente de zero decorrente de erros de arredondamento acumulados, gerando uma solução inconsistente para o sistema original.

(iii). As soluções dos sistemas de equações lineares podem ser classificadas segundo três casos distintos:

(a). **Sistema Determinado:** quando o sistema de equações tem **solução única**, nestes casos a matriz de coeficientes é não singular e o determinante é não nulo. Ocorrem quando todas as equações do sistema são linearmente independentes (LI), nenhuma é combinação linear de outras.

(b). **Sistema Indeterminado:** quando o sistema de equações tem infinitas soluções, neste caso a matriz de coeficientes é singular, ou seja, o seu determinante é nulo. Ocorrem quando se tem um sistema de equações lineares, cujos coeficientes possuem alguma relação de dependência, por exemplo, uma equação é gerada a partir da combinação linear de outras. Pode-se concluir que a(s) equação(es) gerada(s) a partir da combinação linear de outras existentes, não acrescenta(m) informações novas ao conjunto de equações do sistema. Desta forma, o sistema se comporta como se tivesse menos equações que incógnitas, deixando alguma(s) incógnita(s) livre(s) de equações próprias que restrinjam o seu(s) valor(es). No Método de eliminação de Gauss com pivotamento total, pode-se constatar este fato observando que no final do processo de eliminação, uma, ou mais, linhas inteiras da matriz expandida se anulam e seu termo independente também se anula.

(b). **Sistema Impossível:** quando o sistema de equações não tem solução alguma, neste caso a matriz de coeficientes também é singular, e seu determinante é nulo. Ocorrem quando alguma equação do sistema é impossível de ser satisfeita. Por exemplo, se alguma equação do sistema é gerada a partir da combinação linear de apenas um dos membros de duas outras equações, gerando uma equação inconsistente. No Método de Gauss com pivotamento total, pode-se constatar este fato observando que no final do processo de eliminação, uma, ou mais, linhas da matriz de coeficientes se anulam, mas o termo independente não se anula. Na prática, significa ter uma equação com todos os coeficientes nulos e que deve satisfazer a um termo independente não nulo, o que é impossível de ser satisfeito.

Exercícios:

7). Classifique as possíveis soluções dos seguintes sistemas de equações lineares, através do método de Gauss com pivotamento total:

$$\text{a). } \begin{cases} 3x_1 + 1.5x_2 + 4.75x_3 = 8 \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 7 \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 = -12 \end{cases}$$

$$\text{b). } \begin{cases} x_1 + 0.5x_2 - 1.75x_3 = -1 \\ 3x_1 + 1.5x_2 + 4.75x_3 = 8 \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 7 \end{cases}$$

$$\text{c). } \begin{cases} x_1 + 0.5x_2 - 1.75x_3 = 0 \\ 3x_1 + 1.5x_2 + 4.75x_3 = 8 \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 7 \end{cases}$$

3.3 - Sistemas Lineares Mal Condicionados:

Considere o seguinte sistema linear:

$$\text{a). } \begin{cases} x_1 + 3x_2 = 4 \\ x_1 + 3.00001x_2 = 4.00001 \end{cases}$$

cuja solução exata é $S = \{1,1\}$

Toma-se agora um sistema de equações derivado do sistema (a), e que sofreu uma pequena perturbação em dois de seus coeficientes, impondo-se uma variação ao coeficiente a_{22} , de 3.00001 para 2.99999 e em b_2 , de 4.00001 para 4.00002, conforme segue:

$$\text{b). } \begin{cases} x_1 + 3x_2 = 4 \\ x_1 + 2.99999x_2 = 4.00002 \end{cases}$$

cuja solução exata é $S = \{10,-2\}$

Note que uma pequena variação em dois coeficientes, da ordem de 0.025% acarreta uma variação enorme de 900% na solução do sistema. Classificam-se estes sistemas altamente sensíveis a variações nos seus coeficientes como sistemas mal condicionados.

Imagine agora que esta pequena variação é devida a uma perturbação decorrente de erros de arredondamento, que estão presentes em todo método direto, na manipulação dos coeficientes das equações. Então, nestes casos pode-se obter soluções irreais, decorrentes de pequenas alterações nos coeficientes.

Por isso, é necessário tomar cuidados especiais na resolução destes sistemas mal condicionados, devido a grande sensibilidade da solução em relação aos seus coeficientes, deve-se então conhecer uma maneira de identificar o sistema de equações mal condicionado, de preferência antes de resolver o sistema. Para isto pode-se recorrer a alguns critérios:

a). Se o determinante da matriz A for considerado relativamente pequeno, ou melhor, se o determinante normalizado de A ($\|\det(A)\|$) for muito pequeno:

$$\|\det(A)\| = \frac{|\det(A)|}{\prod_{i=1}^n \alpha_i} \ll 1, \text{ onde}$$

$$\alpha_i = \sqrt{\sum_{j=1}^n a_{ij}^2} \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$$

Então, se $\|\det(A)\| \ll 1$ o sistema é considerado mal condicionado.

Na prática pode-se adotar um limite, onde $\|\det(A)\| < 0,1$ representa mal condicionamento do sistema $Ax = b$.

b). Ou se o número de condicionamento, $\text{Cond}(A)$, for considerado muito grande, ou seja:

$$\text{Cond}(A) = \|A\|_{\infty} \cdot \|A^{-1}\|_{\infty} \gg 1$$

Então, se $\text{Cond}(A) \gg 1$ o sistema é considerado mal condicionado.

Também para efeitos práticos, pode-se estabelecer que se $\text{Cond}(A) > 10$, então, o sistema $Ax = b$ é mal condicionado.

A norma de A ($\|A\|_{\infty}$) estabelecida é definida da seguinte forma:

$$\|A\|_{\infty} = \max_{1 \leq i \leq n} \left\{ \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \right\}$$

que corresponde a maior soma dos módulos dos elementos de uma linha da matriz A.

Ex. 9: Avaliar o condicionamento do sistema

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 4 \\ x_1 + 3.00001x_2 = 4.00001 \end{cases}$$

a). Verificar se $\|\det(A)\| \ll 1$

$$\det(A) = 0,00001$$

$$\alpha_1 = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}$$

$$\alpha_2 = \sqrt{1^2 + (3,00001)^2} \cong \sqrt{10}$$

$$\|\det(A)\| = \frac{0.00001}{\sqrt{10}\sqrt{10}} = 10^{-6}$$

$$\|\det(A)\| = 10^{-6} \ll 1 \Rightarrow \text{mal condicionado}$$

(por convenção, usaremos $< 0,1$ como mal condicionado)

b). ou Verificar se $\text{Cond}(A) \gg 1$

$$\|A\| = |1 + 3,00001| = 4,0001 \cong 4$$

$$\|A^{-1}\| = |300.001 + 300.000| = 600.001 \quad \text{onde } A^{-1} = \begin{bmatrix} 300001 & -300000 \\ -100000 & 100000 \end{bmatrix}$$

$$\text{Cond}(A) = 4,00001 \times 600.001 \cong 2,4 \cdot 10^6$$

$\text{Cond}(A) \cong 2,4 \cdot 10^6 \gg 1 \Rightarrow$ confirma o mal condicionamento.
(por convenção, usaremos >10 como mal condicionado)

Exercícios:

8). Avalie o condicionamento do sistema abaixo pelos dois critérios estabelecidos:

$$\begin{cases} x_1 + 0,5x_2 - 0,05x_3 = -1 \\ 3x_1 + 1,5x_2 + 4,75x_3 = 8 \\ 4,01x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 7 \end{cases}$$

Considerações:

(i). Neste caso é interessante usar um método de solução que não altere a forma original das equações, como é o caso dos métodos iterativos (vide capítulo). Porém, os métodos iterativos nem sempre convergem, como visto;

(ii). No caso da necessidade de aplicação de métodos diretos, deveríamos adotar procedimentos com menor número de operações aritméticas possível, e consequentemente arredondamentos menores. Neste caso sugere-se a aplicação de métodos diretos de decomposição LU, que apesar de terem um número total de operações da mesma ordem que o método de Gauss ($O(n^3/3)$ - para o método de Crout), mas acumulam menos erros de arredondamento, devido a menor influência das operações de divisão.

(iii). O processo de pivotamento é indispensável sempre que surgem zeros nas posições dos pivôs durante a aplicação das operações elementares, no caso de matrizes de coeficientes não singulares ($\det(A) \neq 0$). No entanto, nos casos específicos de sistemas mal condicionados, o processo de pivotação é considerado imprescindível e a pivotação normalmente é insuficiente para estabilizar os efeitos dos arredondamentos, nestas situações recomenda-se o uso da pivotação total, ou completa, que torna a solução do sistema menos sensível aos efeitos dos erros de arredondamento.

(iv). Uma forma de minimizar os erros de arredondamento, principalmente em sistemas mal condicionados, é utilizar a precisão dupla na implementação dos cálculos envolvidos na resolução do sistema. É interessante resolver o sistema de equações usando precisão simples e precisão dupla, para depois fazer uma comparação e verificar se os erros decorrentes de arredondamentos sucessivos é significativo ou não, dependendo da tolerância requerida.

(v). Em sistemas de equações mal condicionados tem-se uma característica peculiar na avaliação dos resíduos das equações, onde se pode notar que nem sempre a solução mais exata gera os menores resíduos.

Vamos analisar a seguinte situação prática:

Suponha que temos duas soluções aproximadas S_1 e S_2 para o sistema apresentado anteriormente,

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 4 \\ x_1 + 3,00001x_2 = 4,00001 \end{cases}$$

onde $S_1 = \{4,0\}$ e $S_2 = \{1.5,1\}$.

Calculando os resíduos das equações do sistema para cada solução proposta tem-se:

$$R = \{r_1, r_2\} \Rightarrow \begin{cases} r_1 = 4 - (x_1 + 3x_2) \\ r_2 = 4.00001 - (x_1 + 3.00001x_2) \end{cases}$$

Para $S_1 \Rightarrow R_1 = \{0, 0.00001\}$ e

para $S_2 \Rightarrow R_2 = \{0.5, 0.5\}$

Aparentemente, pela avaliação dos resíduos das equações, a solução mais exata é S_1 , pois gera menores resíduos, porém, sabendo que a solução exata é $S = \{1,1\}$, conclui-se que a solução S_2 está mais próxima da solução exata do que S_1 .

Então, conclui-se que a avaliação dos resíduos das equações de um sistema não pode ser usada como critério para análise da proximidade de uma solução em relação ao seu valor exato (não pode ser usado como critério de convergência).

(vii). Sabe-se que todos os métodos diretos, de eliminação e de decomposição, geram soluções com erros de arredondamento, então, quando são avaliados os resíduos das equações a partir das soluções obtidas, geram-se valores não nulos decorrentes do acúmulo de arredondamentos ao longo das operações.

Uma forma alternativa para minimização dos efeitos dos arredondamentos sucessivos, é o chamado processo de refinamentos sucessivos, em que cada solução obtida sofre uma correção E na direção da solução exata.

Suponhamos que se queira refinar a solução S_1 obtida para o sistema $Ax = b$. Então, vamos impor uma correção E sobre S_1 , e supor que esta correção seja suficiente para conduzir a solução exata s :

$$S = S_1 + E \Rightarrow E = S - S_1$$

Multiplicando a matriz A na equação acima temos,

$$A E = A (S - S_1)$$

$$A E = A S - A S_1$$

Como S é a solução exata do sistema $A x = b$, então $A S = b$ e logo,

$$A E = b - A S_1$$

Sabe-se que $b - A S_1$ corresponde ao resíduo das equações do sistema em relação a solução proposta S_1 , tem-se que

$$r = b - A S_1$$

$$A E = r$$

Então, resolvendo o sistema $A E = r$, obtém-se o valor da correção E , que só não é a correção exata para a solução, porque os erros de arredondamento ainda estão presentes. Então, na verdade, se obtém uma solução nova (S_2) para $A x = b$, que deve ser mais exata que S_1 , conforme segue:

$$S_2 = S_1 + E$$

Caso a solução S_2 ainda esteja significativamente afetada por erros de arredondamento, pode-se aplicar novamente o mesmo procedimento de correção, até que a solução obtida se torne suficientemente próxima da solução exata, para ser adotada como solução do sistema.

(viii). Uma limitação deste processo de refinamentos sucessivos, além do alto custo, é o fato dele se utilizar do mesmo procedimento de resolução que gerou os arredondamentos iniciais, então, estes arredondamentos vão continuar também presentes ao longo do processo de refinamento.

3.4 - Solução de Sistemas Lineares por Métodos Iterativos

3.4.1- Introdução

Quando o sistema de equações lineares $A x = b$ possuir algumas características especiais, tais como:

- a). Ordem n elevada (n é o número de equações);
- b). A matriz dos coeficientes possuir grande quantidade de elementos nulos (matriz esparsa);
- c). Os coeficientes puderem ser gerados através de alguma lei de formação;

em geral, será mais eficiente resolvê-lo através de um método iterativo, desde que a convergência seja possível.

Obs.: Note que se um algoritmo de um método direto, como o do Método de Gauss, for aplicado ao um sistema com matriz de coeficientes esparsa, muitas operações aritméticas desnecessárias serão empregadas, por exemplo na manipulação de zeros com outros zeros.

A solução iterativa de $A x = b$ consiste em se tomar uma solução inicial x^0 para a solução $\alpha = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n]^T$ procurada e construir uma sequência $S = \{x^k\}_{k=0}^{\infty}$ de soluções aproximadas tal que

$\lim_{k \rightarrow \infty} x^k = \alpha$, se esta sequência for convergente.

A questão fundamental é como gerar esta sequência convergente.

Em $A x = b$, tomando a matriz A e particionando-a na forma canônica, $A = B + C$, com B não singular, resulta que:

$$(B + C) x = b \Rightarrow B x = b - C x \Rightarrow x = B^{-1} b - B^{-1} C x \quad (1)$$

Então, aplicando a solução inicial x^0 na eq. (1), resulta

$$x^1 = B^{-1} b - B^{-1} C x^0$$

reaplicando x^1 em (1), obtém-se x^2 e assim sucessivamente, resultando numa sequência

$$S = \{x^k\}_{k=0}^{\infty}, \text{ onde}$$

$$x^{k+1} = B^{-1} b - B^{-1} C x^k \quad (2)$$

Se a sequência (2) for convergente, então existe

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x^{k+1} = \lim_{k \rightarrow \infty} x^k \quad (3)$$

Aplicando o limite a ambos os termos da eq. (2), tem-se

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x^{k+1} = B^{-1} b - B^{-1} C \lim_{k \rightarrow \infty} x^k \quad (4)$$

Aplicando a eq. (3) na eq. (4), tem-se

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x^{k+1} = B^{-1}b - B^{-1}C \lim_{k \rightarrow \infty} x^{k+1} \Rightarrow (1 + B^{-1}C) \lim_{k \rightarrow \infty} x^{k+1} = B^{-1}b \quad (5)$$

Multiplicando a eq. (5) a esquerda pela matriz B, tem-se

$$(B + C) \lim_{k \rightarrow \infty} x^{k+1} = b \quad (6)$$

Mas $A = B + C$, então

$$A \lim_{k \rightarrow \infty} x^{k+1} = b$$

Logo,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x^{k+1} = \alpha$$

O problema agora é que para se gerar a sequência (2) necessita-se da matriz inversa B^{-1} e portanto esta inversa, por questão de eficiência, tem que ser obtida facilmente. A seguir serão abordadas duas maneiras, não exclusivas, de se particionar a matriz A de modo que a matriz B seja trivialmente invertida.

3.4.2. Método iterativo de Jacobi

No sistema $Ax = b$ tomando a matriz A e particionando-a na forma

$$A = D + L + U,$$

onde

D = Diagonal principal de A;

L = Matriz triangular inferior estrita obtida dos elementos infradiagonais de A;

U = Matriz triangular superior estrita obtida dos elementos supradiagonais de A.

Então, considerando na forma canônica que $B = D \Rightarrow C = L + U$

e aplicando-as na eq. (2) vem:

$$x^{k+1} = D^{-1}b - D^{-1}(L + U)x^k \quad (7)$$

onde os elementos de D^{-1} são trivialmente obtidos tomando-se os recíprocos dos elementos diagonais de A. Expressando a eq. (7) na forma desenvolvida resulta

$$x_i^{k+1} = (b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n a_{ij} x_j^k) / a_{ii} \Rightarrow i = 1, 2, \dots, n \quad (8)$$

Logo, para se resolver $A x = b$ por Jacobi, toma-se uma solução inicial $x^0 = [x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0]^T$, isola-se a i -ésima incógnita x_i na i -ésima equação e aplica-se (2) para se tentar obter a sequência convergente.

Ex. 9): Resolver o seguinte sistema pelo método de Jacobi.

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 5 \\ 2x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 4 \end{cases}$$

Montando as equações evolutivas para as variáveis do sistema tem-se:

$$\begin{cases} x_1^{k+1} = (1 + x_2^k + x_3^k) / 3 \\ x_2^{k+1} = (5 - x_1^k - x_3^k) / 3 \\ x_3^{k+1} = (4 - 2x_1^k + 2x_2^k) / 4 \end{cases}$$

Valor inicial: $(x_1^0, x_2^0, x_3^0) = (0,0,0)$

| k | x_1^k | x_2^k | x_3^k |
|---|---------|---------|---------|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0,333 | 1,667 | 1 |
| 2 | 1,222 | 1,222 | 1,667 |
| 3 | 1,296 | 0,704 | 1 |
| 4 | 0,901 | 0,901 | 0,704 |
| 5 | 0,868 | 1,132 | 1 |
| 6 | 1,044 | 1,044 | 1,132 |

Pode-se notar que a sequência evolutiva obtida para as variáveis x_i^k está convergindo para a solução S, que no caso é dada por $S = \{1,1,1\}$.

Neste ponto é necessário estabelecer um critério de parada que determine o quão próxima da solução exata está a sequência convergente x_i^k , dentre os critérios mais comuns estão:

$$(i). \text{Max} \left\{ |x_i^{k+1} - x_i^k| \right\} \leq \epsilon \quad \Rightarrow \quad i = 1,2,3,\dots,n$$

Corresponde à máxima diferença absoluta entre valores novos e antigos de todas as variáveis.

$$(ii). \text{Max} \left\{ \left| \frac{x_i^{k+1} - x_i^k}{x_i^{k+1}} \right| \right\} \leq \epsilon \quad \Rightarrow \quad i = 1,2,3,\dots,n$$

Corresponde à máxima diferença relativa entre valores novos e antigos de todas as variáveis.

$$(iii). \text{Max} \{ |R_i^{k+1}| \} \leq \varepsilon \quad \Rightarrow \quad i = 1, 2, 3, \dots, n$$

Corresponde ao maior resíduo dentre todas as equações, onde $R_i^{k+1} = b_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j^{k+1}$

No caso do exemplo 7 anterior, aplicando-se o critério (i), tem-se:

| k | x_1^k | x_2^k | x_3^k | $ x_1^{k+1} - x_1^k $ | $ x_2^{k+1} - x_2^k $ | $ x_3^{k+1} - x_3^k $ |
|---|---------|---------|---------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|
| 0 | 0 | 0 | 0 | - | - | - |
| 1 | 0,333 | 1,667 | 1 | 0,333 | 1,667 | 1 |
| 2 | 1,222 | 1,222 | 1,667 | 0,889 | 0,555 | 0,333 |
| 3 | 1,296 | 0,704 | 1 | 0,074 | 0,518 | 0,333 |
| 4 | 0,901 | 0,901 | 0,704 | 0,395 | 0,197 | 0,296 |
| 5 | 0,868 | 1,132 | 1 | 0,033 | 0,197 | 0,296 |
| 6 | 1,044 | 1,044 | 1,132 | 0,176 | 0,088 | 0,132 |

Portanto, neste exemplo, o critério alcançado é $\text{Max} |x_i^{k+1} - x_i^k| \leq 0,176$.

Obs.: Note que, neste exemplo, o processo iterativo é do tipo oscilatório, onde as variáveis aumentam e diminuem alternativamente. Este efeito prejudica a convergência, tornando o processo lento.

3.4.3 - Método Iterativo de Gauss Seidel

Em $Ax = b$ com a partição de A na forma $A = D + L + U$ como no Jacobi, porém tomando $B = D + L$ para a canônica, tem-se de (2) que:

$$x^{k+1} = (D + L)^{-1} b - [(D + L)^{-1} U] x^k \quad (9)$$

Multiplicando a eq. (9) pela matriz $(D+L)$, tem-se

$$(D + L)x^{k+1} = b - Ux^k$$

$$Dx^{k+1} = b - Lx^{k+1} - Ux^k$$

$$x^{k+1} = D^{-1} (b - Lx^{k+1} - Ux^k) \quad (10)$$

que expressa na forma desenvolvida, torna-se

$$x_i^{k+1} = (b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j < i}}^{i-1} a_{ij} x_j^{k+1} - \sum_{\substack{j=i+1 \\ j > i}}^n a_{ij} x_j^k) / a_{ii} \quad \Rightarrow \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (11)$$

cuja operacionalização é semelhante à do método de Jacobi, exceto que em (11) utiliza-se sempre o último valor obtido e em (8) utiliza-se o último vetor obtido.

Ex. 10): Resolver o seguinte sistema pelo método de Gauss-Seidel:

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 5 \\ 2x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 4 \end{cases}$$

Montando as equações evolutivas para as variáveis do sistema temos:

$$\begin{cases} x_1^{k+1} = (1 + x_2^k + x_3^k) / 3 \\ x_2^{k+1} = (5 - x_1^{k+1} - x_3^k) / 3 \\ x_3^{k+1} = (4 - 2x_1^{k+1} + 2x_2^{k+1}) / 4 \end{cases}$$

Note que as equações evolutivas se utilizam dos valores disponíveis mais atualizados.

Valor inicial: $(x_1^0, x_2^0, x_3^0) = (0, 0, 0)$

| K | x_1^k | x_2^k | x_3^k | $ x_1^{k+1} - x_1^k $ | $ x_2^{k+1} - x_2^k $ | $ x_3^{k+1} - x_3^k $ |
|---|---------|---------|---------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|
| 0 | 0 | 0 | 0 | - | - | - |
| 1 | 0,333 | 1,555 | 1.611 | 0.333 | 1.555 | 1.611 |
| 2 | 1.388 | 0.666 | 0.638 | 1.055 | 0.888 | 0.972 |
| 3 | 0.768 | 1.197 | 1.214 | 0.620 | 0.531 | 0.575 |
| 4 | 1.137 | 0.882 | 0.872 | 0.368 | 0.314 | 0.341 |
| 5 | 0.918 | 1.069 | 1.075 | 0.218 | 0.186 | 0.202 |
| 6 | 1.048 | 0.958 | 0.955 | 0.129 | 0.110 | 0.120 |

Aplicando o critério (i), tem-se: $\text{Max } |x_i^{k+1} - x_i^k| \leq 0,129$.

Obs.: Note que, no mesmo exemplo, o processo iterativo correspondente a aplicação do Método de Gauss-Seidel também é um processo oscilatório, porém neste caso tem-se um processo de convergência um pouco mais rápido, por que no método de Gauss-Seidel são tomados os valores disponíveis mais atualizados.

3.4.4 - Convergência dos Métodos Iterativos

Nos tópicos anteriores foram desenvolvidas duas formas (expressões (8) e (11)) de se construir uma sequência $S = \{x^k\}_{k=0}^{\infty}$ de possíveis aproximações para a solução de $Ax = b$. Aqui, será abordada a questão de quando esta sequência será convergente. Para tanto, necessita-se de mais dois conceitos.

Definição 1: No sistema $Ax = b$, sejam $S_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}|$, $i = 1, \dots, n$. Daí, diz-se que ele é diagonal

dominante se ocorrer:

- 1º) $|a_{ii}| \geq S_i$, $i = 1, \dots, n$ e
- 2º) $|a_{ii}| > S_i$, para pelo menos uma linha i de A .

Definição 2: No sistema $Ax = b$ se ocorrer $|a_{ii}| > S_i$, $i = 1, \dots, n$ diz-se que o mesmo é diagonal estritamente dominante.

Definição 3: Um sistema $Ax=b$ é irreduzível se for impossível obter algum(ns) valor(es) isolado(s) de sua solução sem resolver o sistema todo.

Por exemplo:

O sistema $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 4 \\ x_1 - x_3 = 2 \\ 2x_1 + x_3 = 1 \end{cases}$ é redutível, uma vez que pode-se obter os valores de x_1 e x_3 resolvendo-se um sistema de ordem $n = 2$ correspondente as duas últimas linhas.

Teorema (Convergência):

Se o sistema $Ax = b$ for irreduzível e diagonal dominante, ou diagonal estritamente dominante, então tanto a seqüência construída pelo método de Jacobi, quanto a de Gauss-Seidel convergem para a solução.

Vide exemplos 7 e 8.

Com relação à convergência dos métodos iterativos, algumas características importantes devem ser salientadas, dentre as quais destacam-se:

1º) A convergência de $S = \{x^k\}_{k=0}^{\infty}$ não depende do valor inicial x^0 . Portanto, a escolha do x^0 adequado afeta apenas na quantidade de iterações a serem efetuadas. Verificar isto, a título de exemplo, em $\begin{cases} x_1 - x_2 = 1 \\ x_1 + 2x_2 = 5 \end{cases}$ com vários x^0 diferentes;

2º) O teorema da convergência contém uma condição suficiente, porém não necessária. Portanto, se for verdadeiro, a seqüência S convergirá e se não for verdadeiro nada pode-se afirmar. Verificar que em $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 3 \\ x_1 - 3x_2 = -2 \end{cases}$ Gauss-Seidel fornece a seqüência convergente, mesmo não satisfazendo o teorema;

3º) Um sistema que não seja diagonal dominante, ou diagonal estritamente dominante, pode em alguns casos ser transformado, através de troca de linhas e/ou colunas (pivotamento parcial e total), para satisfazer esta condição;

4º) Existem sistemas, muitos até triviais, que não são solúveis por estes métodos iterativos, a menos que $x^0 = \alpha$. Testar isto em $\begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 = 3 \end{cases}$;

5º) A validade da condição suficiente de convergência do teorema citado estende-se também aos sistemas lineares que são diagonal estritamente dominante sobre as colunas da matriz de coeficientes.

Verificar que $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 5 \\ x_1 + 5x_2 = 4 \end{cases}$ é diagonal estritamente dominante sobre as colunas e portanto tem convergência assegurada.

6º) O teorema da convergência enunciado anteriormente não é o único e nem o mais abrangente. Verificar na literatura outros critérios de convergência.

3.4.5 - Aplicação de coeficientes de Relaxação

Caso o sistema de equações lineares não satisfaça os critérios de convergência o processo iterativo poderá oscilar ou até mesmo divergir. Nestes casos pode-se tentar desacelerar o processo de atualização iterativa usando fatores de sub-relaxação em cada equação.

Por exemplo, para obter o valor mais atualizado de uma variável x_i^{k+1} qualquer, tem-se

$$x_i^{k+1} = x_i^k + \Delta x_i^{k+1}$$

onde x_i^k é o valor antigo, Δx_i^{k+1} é o valor da atualização imposta ao valor antigo x_i^k para atingir o valor novo x_i^{k+1} .

Caso se queira aplicar um fator de desaceleração, ou amortecimento na atualização do valor novo, impõe-se um fator de subrelaxação λ , com $0 < \lambda \leq 1$, da seguinte forma,

$$x_i^{k+1} = x_i^k + \lambda \Delta x_i^{k+1}$$

Alternativamente, pode-se substituir o valor da atualização total $\Delta x_i^{k+1} = x_i^{k+1} - x_i^k$ na equação anterior, o que gera a seguinte forma,

$$x_i^{k+1} = x_i^k + \lambda (x_i^{k+1} - x_i^k)$$

$$x_i^{k+1} = (1 - \lambda) x_i^k + \lambda x_i^{k+1}$$

Por exemplo, a aplicação de subrelaxação para o método de Gauss-Seidel gera a seguinte equação geral,

$$x_i^{k+1} = (1 - \lambda)x_i^k + \lambda(b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j < i}}^{i-1} a_{ij}x_j^{k+1} - \sum_{\substack{j=i+1 \\ j > i}}^n a_{ij}x_j^k) / a_{ii} \quad \Rightarrow \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (11)$$

Ex. 11): Resolver o seguinte sistema pelo método de Gauss-Seidel adotando uma subrelaxação $\lambda = 0.5$ (lembrando que no exemplo 8 este mesmo sistema foi resolvido e sofreu oscilações).

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 5 \\ 2x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 4 \end{cases}$$

Montando as equações evolutivas para as variáveis do sistema temos:

$$\begin{cases} x_1^{k+1} = (1 - \lambda) x_1^k + \lambda (1 + x_2^k + x_3^k) / 3 \\ x_2^{k+1} = (1 - \lambda) x_2^k + \lambda (5 - x_1^{k+1} - x_3^k) / 3 \\ x_3^{k+1} = (1 - \lambda) x_3^k + \lambda (4 - 2x_1^{k+1} + 2x_2^{k+1}) / 4 \end{cases}$$

Note que as equações evolutivas se utilizam dos valores disponíveis mais atualizados.

Valor inicial: $(x_1^0, x_2^0, x_3^0) = (0,0,0)$ e $\lambda = 0.5$

| K | x_1^k | x_2^k | x_3^k | $ x_1^{k+1} - x_1^k $ | $ x_2^{k+1} - x_2^k $ | $ x_3^{k+1} - x_3^k $ |
|---|---------|---------|---------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|
| 0 | 0 | 0 | 0 | - | - | - |
| 1 | 0.166 | 0.805 | 0.659 | 0.166 | 0.805 | 0.659 |
| 2 | 0.494 | 1.043 | 0.967 | 0.327 | 0.238 | 0.307 |
| 3 | 0.748 | 1.069 | 1.063 | 0.254 | 0.025 | 0.096 |
| 4 | 0.896 | 1.041 | 1.067 | 0.147 | 0.027 | 0.004 |
| 5 | 0.966 | 1.014 | 1.046 | 0.069 | 0.026 | 0.021 |
| 6 | 0.993 | 1.000 | 1.024 | 0.026 | 0.014 | 0.021 |

Aplicando o critério (i), tem-se: $\text{Max } |x_i^{k+1} - x_i^k| \leq 0,026$.

Obs.: Note que o processo iterativo com o fator de subrelaxação é mais estável, gerando um processo de convergência monotônico (com erro sempre decrescente), e consequentemente tem-se um processo iterativo mais rápido. Note que com as mesmas 6 iterações do método de Gauss-Seidel atinge-se um erro máximo de 0,026 com sub-relaxação contra um erro de 0,129 sem sub-relaxação.

Considerações:

- (i). A utilização de fatores de sub-relaxação não garante a convergência do processo, mas pode agilizar esta convergência (vide exemplo 9).
- (ii). Se o sistema satisfizer os critérios de convergência, provavelmente não haverá necessidade de aplicação de fatores de sub-relaxação, pois nestes casos o processo iterativo normalmente já é monotônico. Em algumas destas situações práticas é possível acelerar o processo iterativo com o uso de fatores de sobre-relaxação, com $1 \leq \lambda < 2$. Este método de Gauss-Seidel modificado é conhecido na literatura pertinente como SOR ("Sucessive Over Relaxation").
- (iii). A escolha adequada do fator λ ($1 \leq \lambda < 2$) pode conduzir o processo iterativo a uma performance ótima, com o menor número possível de iterações. Acima deste fator ótimo o processo iterativo começa a oscilar, tornando a convergência difícil.