UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA - UFSC
CENTRO TECNOLÓGICO - CTC
DEPARTAMENTO DE INFORMÁTICA E ESTATÍSTICA - INE

Cálculo Numérico em Computadores:

Capítulo 4

Resolução de Sistemas de Equações não Lineares

Autores: Prof. Sérgio Peters
Acad. Andréa Vergara da Silva

e-mail: sergio.peters@ufsc.br

Florianópolis, 2013.

4.0 - Fundamentos

No capítulo 2 abordamos a solução de f(x) = 0 (uma equação com uma variável). Porém na modelagem matemática dos fenômenos físicos, via de regra, estão envolvidas mais de uma variável e mais de uma conseqüência (sistema de equações).

Exemplo: Sistemas de equações lineares:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{n1}x_n + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \qquad \Rightarrow \mathbf{A}x = \mathbf{B}$$

Definição 1- Um sistema de n equações não lineares com n incógnitas é toda expressão do tipo:

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = 0 \end{cases} \qquad \Rightarrow F(X) = 0$$

onde

$$F = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \cdots \\ f_n \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Exemplo:

a)

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2^3 = 3 \\ 3x_1^2 + x_2^2 = 7 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad F = \begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2) = x_1 + 2x_2^3 - 3 \\ f_2(x_1, x_2) = 3x_1^2 + x_2^2 - 7 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

b)

$$\begin{cases} 3x_1 - \cos(x_1 x_3) = 0{,}5 \\ x_1^3 - x_1 x_2 x_3 = 5 \\ e^{x_1 x_2} - \ln(x_1^2 + x_2 x_3) = 0 \end{cases}$$

Definição 2 - Solução de F(X) = 0 é todo vetor (=matriz coluna ou linha) $\alpha = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n]$ tal que $F(\alpha) = 0$.

Exemplo:

$$\begin{cases} x_1 x_2 = 1 \\ x_1^2 + x_2^2 - 4x_1 + 2x_2 = 4 \end{cases} \Rightarrow \alpha = [0{,}604068;\ 1{,}655442]$$

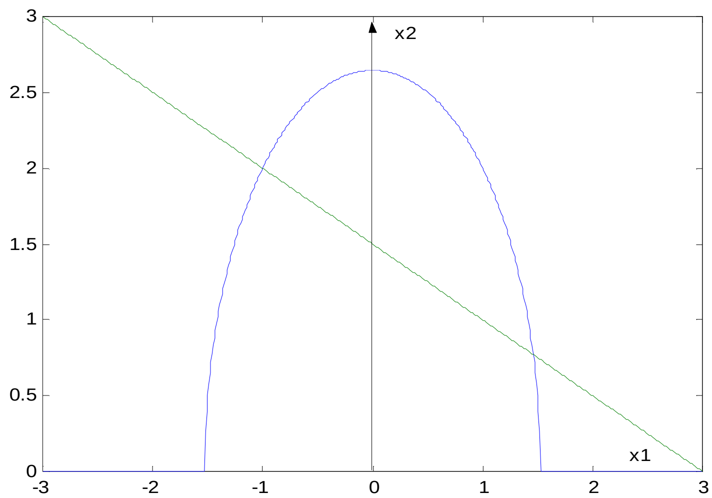
Note-se a dificuldade de se isolar α já a partir do n = 2 (o menor possível).

4.1 - Método de Newton para F(X) = 0

A solução de um sistema não-linear consiste em determinar pontos no subespaço do problema que solucione o conjunto de equações. Os pontos de solução estão na intersecção das curvas que representam as equações. O processo de solução a ser visto é uma generalização do Método de Newton-Raphson para sistemas de equações não-lineares. Na solução de sistemas lineares viu-se que tem-se apenas três tipos de solução: solução única, infinitas soluções e não existe solução. No caso de sistemas não lineares o leque de respostas é maior, no qual pode-se ter de zero a infinitas soluções.

Para exemplificar, seja o sistema de equações não lineares composto de duas equações:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3 = 0 \\ 3x_1^2 + x_2^2 - 7 = 0 \end{cases}$$



Como pode ser observado na figura, tem-se dois pontos de intersecção. Estes dois pontos pertencentes ao subespaço $\Re^2$, $\underline{x} = [1{,}461538 \quad 0{,}769230]^T$ e $\underline{x} = [-1 \quad 2]^T$, e ambos são soluções do mesmo sistema.

Seja o sistema de equações não-lineares:

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, ..., x_n) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, ..., x_n) = 0 \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, ..., x_n) = 0 \end{cases}$$

O vetor de incógnitas $[x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_n]^T$ pode ser representado de forma vetorial (sublinhada), $\underline{x} = [x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_n]^T$, o vetor de valores iniciais das incógnitas por $\underline{x}^{(0)} = [x_1^{(0)} \quad x_2^{(0)} \quad \cdots \quad x_n^{(0)}]^T$ e o vetor incremento de cada incógnita, diferença entre $\underline{x}$ e $\underline{x}^{(0)}$, dado por $\Delta \underline{x}_i^{(0)} = [\Delta x_1 \quad \Delta x_2 \quad \cdots \quad \Delta x_n]^T$.

Analogamente ao método de Newton-Raphson, utiliza-se da expansão em Série de Taylor vetorial da funções $f_i(x_1, x_2, ..., x_n)$ $\forall$ i em torno do ponto inicial $\underline{x}^{(0)} = [x_1^{(0)} \quad x_2^{(0)} \quad \cdots \quad x_n^{(0)}]^T$.

onde:

$$f_1(x_1, x_2, ..., x_n) = f_1(\underline{x}^{(0)}) + \frac{\partial f_1(\underline{x}^{(0)})}{\partial x_1}.(x_1 - x_1^{0\backslash}) + \frac{\partial f_1(\underline{x}^{(0)})}{\partial x_2}.(x_2 - x_2^{0\backslash}) + ... + \frac{\partial f_1(\underline{x}^{(0)})}{\partial x_n}.(x_n - x_n^{0\backslash}) + .. = 0$$

$$f_2(x_1, x_2, ..., x_n) = f_2(\underline{x}^{(0)}) + \frac{\partial f_2(\underline{x}^{(0)})}{\partial x_1}.(x_1 - x_1^{0\backslash}) + \frac{\partial f_2(\underline{x}^{(0)})}{\partial x_2}.(x_2 - x_2^{0\backslash}) + ... + \frac{\partial f_2(\underline{x}^{(0)})}{\partial x_n}.(x_n - x_n^{0\backslash}) + .. = 0$$

$$\vdots$$

$$f_n(x_1, x_2, ..., x_n) = f_n(\underline{x}^{(0)}) + \frac{\partial f_n(\underline{x}^{(0)})}{\partial x_1}.(x_1 - x_1^{0\backslash}) + \frac{\partial f_n(\underline{x}^{(0)})}{\partial x_2}.(x_2 - x_2^{0\backslash}) + ... + \frac{\partial f_n(\underline{x}^{(0)})}{\partial x_n}.(x_n - x_n^{0\backslash}) + .. = 0$$

Fazendo $\Delta x_i = x_i - x_i^{0\backslash}$, desprezando os termos de ordem superior e isolando dos termos Δx_i:

$$\begin{cases} \frac{\partial f_1(\underline{x}^{(0)})}{\partial x_1}.\Delta x_1 + \frac{\partial f_1(\underline{x}^{(0)})}{\partial x_2}.\Delta x_2 + ... + \frac{\partial f_1(\underline{x}^{(0)})}{\partial x_n}.\Delta x_n = -f_1(\underline{x}^{(0)}) \\ \frac{\partial f_2(\underline{x}^{(0)})}{\partial x_1}.\Delta x_1 + \frac{\partial f_2(\underline{x}^{(0)})}{\partial x_2}.\Delta x_2 + ... + \frac{\partial f_2(\underline{x}^{(0)})}{\partial x_n}.\Delta x_n = -f_2(\underline{x}^{(0)}) \\ \vdots \\ \frac{\partial f_n(\underline{x}^{(0)})}{\partial x_1}.\Delta x_1 + \frac{\partial f_n(\underline{x}^{(0)})}{\partial x_2}.\Delta x_2 + ... + \frac{\partial f_n(\underline{x}^{(0)})}{\partial x_n}.\Delta x_n = -f_n(\underline{x}^{(0)}) \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(\underline{x}^{(0)})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(\underline{x}^{(0)})}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1(\underline{x}^{(0)})}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2(\underline{x}^{(0)})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(\underline{x}^{(0)})}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n(\underline{x}^{(0)})}{\partial x_n} \\ \\ \frac{\partial f_n(\underline{x}^{(0)})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n(\underline{x}^{(0)})}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n(\underline{x}^{(0)})}{\partial x_n} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \vdots \\ \Delta x_n \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} f_1(\underline{x}^{(0)}) \\ f_2(\underline{x}^{(0)}) \\ \vdots \\ f_n(\underline{x}^{(0)}) \end{bmatrix}$$

onde

$$J(\underline{x}^{(0)}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(\underline{x}^{(0)})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(\underline{x}^{(0)})}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1(\underline{x}^{(0)})}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2(\underline{x}^{(0)})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(\underline{x}^{(0)})}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2(\underline{x}^{(0)})}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(\underline{x}^{(0)})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n(\underline{x}^{(0)})}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n(\underline{x}^{(0)})}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

é chamada de matriz Jacobiana, calculada no ponto inicial $\underline{x}^{(0)} = \begin{bmatrix} x_1^{(0)} & x_2^{(0)} & \cdots & x_n^{(0)} \end{bmatrix}^T$.

Resolvendo o sistema linearizado acima, determinamos os valores de uma aproximação para cada Δx_i e consequentemente os novos valores das incógnitas $x_i = x_i^{0\backslash} + \Delta x_i$, que foram calculados baseados nos valores iniciais $\underline{x}^{(0)} = \begin{bmatrix} x_1^{(0)} & x_2^{(0)} & \cdots & x_n^{(0)} \end{bmatrix}^T$, ou seja uma iteração baseada em $\underline{x}^{(0)}$, que precisa ser repetida para $\underline{x}^{(0)} = \underline{x}$ (atualização dos valores iniciais).

Observe que em cada iteração do Método de Newton para sistemas de equações não lineares, resolve-se um sistema de equações lineares.

Exemplo 1: Resolver $\begin{cases} e^{x_1} + x_2 = 1 \\ x_1^2 + x_2^2 = 4 \end{cases}$ por Newton com $X^0 = \begin{bmatrix} +1 \\ -1 \end{bmatrix}$ com 3 iterações.

Solução:

Temos $F(X) = \begin{cases} f_1(x_1, x_2) = e^{x_1} + x_2 - 1 \\ f_2(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 4 \end{cases}$

$$J(\underline{x}^{(0)}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(\underline{x}^{(0)})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(\underline{x}^{(0)})}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2(\underline{x}^{(0)})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(\underline{x}^{(0)})}{\partial x_2} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow J(X) = \begin{bmatrix} e^{x_1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{2x_1} & \mathbf{2x_2} \end{bmatrix} \quad \textbf{para} \quad \mathbf{X} = \mathbf{X^0} = \begin{bmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Aplicando o sistema de equações linearizado para duas equações temos:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(\underline{x}^{(0)})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(\underline{x}^{(0)})}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2(\underline{x}^{(0)})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(\underline{x}^{(0)})}{\partial x_2} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} f_1(\underline{x}^{(0)}) \\ f_2(\underline{x}^{(0)}) \end{bmatrix}$$

1ª iteração:

$$\begin{bmatrix} e^1 & \mathbf{1} \\ \mathbf{2} & \mathbf{-2} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} e-2 \\ \mathbf{-2} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \Delta x_1 = 0{,}0758 \\ \Delta x_2 = -0{,}9242 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{x_1} = 1{,}0758 \\ \mathbf{x_2} = -1{,}9242 \end{cases}$$

Erro total = $\sum|\Delta x_i|$=0,9999

2ª iteração:

$$\begin{bmatrix} 2{,}933 & \mathbf{1} \\ \mathbf{2{,}152} & \mathbf{-3{,}848} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 0{,}0080 \\ \mathbf{-0{,}8600} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \Delta x_1 = -0{,}06629 \\ \Delta x_2 = 0{,}1864 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{x_1^2} = 1{,}0095 \\ \mathbf{x_2^2} = -1{,}7378 \end{cases}$$

Erro total = $\sum|\Delta x_i|$= 0,2527

3ª iteração:

$$\begin{cases} x_1^3 = 1{,}0042 \\ x_2^3 = -1{,}7297 \end{cases}$$

Erro total = $\sum|\Delta x_i|$= 0,013474

$$\text{Solução Exata} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{x}_1 = 1 \\ \mathrm{x}_2 = 1 - \mathrm{e} \end{cases}$$

Exemplo 2: Resolver o sistema de equações não-lineares utilizando o Método de Newton para um vetor inicial $\underline{x}^{(0)} = [0{,}5 \quad 0{,}5 \quad 0{,}5]^T$.

$$x_1^{\ 2} + x_2^2 + x_3^2 - 1 = 0$$
$$2x_1^{\ 2} + x_2^2 - 4x_3 \ = 0$$
$$3x_1^{\ 2} - 4x_2 + x_3^2 \ = 0$$

O processo iterativo, em notação vetorial, é dado por:

$$J(\underline{x}^{(k)})\underline{\Delta x}^{(k)} = -F(\underline{x}^{(k)})$$

A matriz Jacobiana $J(\underline{x}^{(k)})$ é dada por:

$$J(\underline{x}^{(k)}) = \begin{bmatrix} 2x_1^{(k)} & 2x_2^{(k)} & 2x_3^{(k)} \\ 4x_1^{(k)} & 2x_2^{(k)} & -4 \\ 6x_1^{(k)} & -4 & 2x_3^{(k)} \end{bmatrix}$$

Para $\underline{x}^{(0)} = [0{,}5 \quad 0{,}5 \quad 0{,}5]^T$, tem-se:

$$J(\underline{x}^{(0)}) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -4 \\ 3 & -4 & 1 \end{bmatrix}$$

Para $\underline{x}^{(0)} = [0{,}5 \quad 0{,}5 \quad 0{,}5]^T$, $F(\underline{x}^{(0)})$ é calculado por:

$$0{,}5^2 + 0{,}5^2 + 0{,}5^2 - 1 = -0{,}25$$
$$2 \times 0{,}5^2 + 0{,}5^2 - 4 \times 0{,}5 \ = -1{,}25$$
$$3 \times 0{,}5^2 - 4 \times 0{,}5 + 0{,}5^2 = -1{,}00$$

$$F(\underline{x}^{(0)}) = [-0{,}25 \quad -1{,}25 \quad -1{,}00]^T$$

Tem-se o sistema linear:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -4 \\ 3 & -4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_1^{(0)} \\ \Delta x_2^{(0)} \\ \Delta x_3^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}25 \\ 1{,}25 \\ 1{,}00 \end{bmatrix}$$

Resultando em $\underline{\Delta x}^{(o)} = [0{,}375 \quad 0 \quad -0{,}125]^T$. Os novos valores do vetor $\underline{x}$ são dados por:

$$\underline{x}^{(1)} = \underline{x}^{(0)} + \underline{\Delta x}^{(0)} = \begin{bmatrix} 0,5 \\ 0,5 \\ 0,5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,375 \\ 0 \\ -0,125 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,875 \\ 0,5 \\ 0,375 \end{bmatrix}$$

Para $\underline{x}^{(1)} = [0,875 \quad 0,5 \quad 0,375]^T$, tem-se:

$$J(\underline{x}^{(1)}) = \begin{bmatrix} 1,7500 & 1,0000 & 0,7500 \\ 3,5000 & 1,0000 & -4,0000 \\ 5,2500 & -4,0000 & 0,7500 \end{bmatrix}$$

Para $\underline{x}^{(1)} = [0,875 \quad 0,5 \quad 0,375]^T$, $F(\underline{x}^{(1)})$ é calculado por:

$$0,875^2 + 0,5^2 + 0,375^2 - 1 = 0,1563$$
$$2 \times 0,875^2 + 0,5^2 - 4 \times 0,375 \quad = 0,2813$$
$$3 \times 0,875^2 - 4 \times 0,5 + 0,375^2 = 0,4375$$

$$F(\underline{x}^{(1)}) = [0,1563 \quad 0,2813 \quad 0,4375]^T$$

Tem-se o sistema linear:

$$\begin{bmatrix} 1,7500 & 1,0000 & 0,7500 \\ 3,5000 & 1,0000 & -4,0000 \\ 5,2500 & -4,0000 & 0,7500 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_1^{(1)} \\ \Delta x_2^{(1)} \\ \Delta x_3^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,1563 \\ 0,2813 \\ 0,4375 \end{bmatrix}$$

Resultando em $\underline{\Delta x}^{(1)} = [-0,00852 \quad -0,0034 \quad -0,0051]^T$. Os novos valores do vetor $\underline{x}$ são dados por:

$$\underline{x}^{(2)} = \underline{x}^{(1)} + \underline{\Delta x}^{(1)} = \begin{bmatrix} 0,875 \\ 0,5 \\ 0,375 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0,00852 \\ -0,0034 \\ -0,0051 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,7898 \\ 0,4966 \\ 0,3699 \end{bmatrix}$$

Para $\underline{x}^{(2)} = [0,7898 \quad 0,4966 \quad 0,3699]^T$, tem-se:

$$J(\underline{x}^{(2)}) = \begin{bmatrix} 1{,}5796 & 0{,}9932 & 0{,}7399 \\ 3{,}1593 & 0{,}9932 & -4{,}000 \\ 4{,}7389 & -4{,}0000 & 0{,}7399 \end{bmatrix}$$

Para $\underline{x}^{(2)} = [0{,}7898 \quad 0{,}4966 \quad 0{,}3699]^T$, $F(\underline{x}^{(2)})$ é calculado por:

$$0{,}7898^2 + 0{,}4966^2 + 0{,}3699^2 - 1 = 0{,}0073$$
$$2\times 0{,}7898^2 + 0{,}4966^2 - 4\times 3699 \quad = 0{,}0145$$
$$3\times 0{,}7898^2 - 4\times 0{,}4966 + 0{,}3699^2 = 0{,}0218$$

$$F(\underline{x}^{(2)}) = [0{,}0073 \quad 0{,}0145 \quad 0{,}0218]^T$$

Tem-se o sistema linear:

$$\begin{bmatrix} 1{,}5796 & 0{,}9932 & 0{,}7399 \\ 3{,}1593 & 0{,}9932 & -4{,}000 \\ 4{,}7389 & -4{,}0000 & 0{,}7399 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_1{}^{(2)} \\ \Delta x_2{}^{(2)} \\ \Delta x_3{}^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0{,}0073 \\ -0{,}0145 \\ -0{,}0218 \end{bmatrix}$$

Resultando em $\underline{\Delta x}^{(2)} = [-0{,}0046 \quad 0{,}0000 \quad 0{,}0000]^T$. Os novos valores do vetor $\underline{x}$ são dados por:

$$\underline{x}^{(3)} = \underline{x}^{(2)} + \underline{\Delta x}^{(2)} = \begin{bmatrix} 0{,}7898 \\ 0{,}4966 \\ 0{,}3659 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0{,}0046 \\ 0{,}0000 \\ 0{,}0000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}7852 \\ 0{,}4966 \\ 0{,}3699 \end{bmatrix}$$

Seguindo o mesmo procedimento, chega-se a:

$$\underline{x}^{(4)} = \begin{bmatrix} 0{,}7852 \\ 0{,}4966 \\ 0{,}3699 \end{bmatrix}$$

O processo convergiu para **Erro máximo = Max|** $\underline{\Delta x}$ **|** < 5.10^{-4} em quatro iterações.

4.2. Considerações:

Além da necessidade do X^0, o maior problema do Newton em F(X) = 0 é a necessidade de se calcular as n^2 derivadas parciais para uso na Jacobiana J(X), que são n^2 funções.

A alternativa mais simples para se contornar o problema consiste em se simular as n^2 derivadas parciais $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ através do próprio computador, via aproximações numéricas das derivadas:

$\Rightarrow$ Por definição sabemos que:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \qquad \Rightarrow \qquad f'(x) \cong \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$\Rightarrow$ Por extensão:

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_1,\ldots,x_n) = \lim_{h \to 0} \frac{f_i(x_1, x_2, \ldots, x_j + h, \ldots, x_n) - f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{h}$$

Utilizando um valor inicial pequeno para h, temos:

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \cong \frac{f_i(x_1, x_2, \ldots, x_j + h, \ldots, x_n) - f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{h}$$

$$J(X) = \begin{bmatrix} \frac{f_1(x_1+h,\ldots) - f_1(x_1,\ldots,x_n)}{h} & \frac{f_1(x_1, x_2+h,\ldots) - f_1(x_1,\ldots,x_n)}{\mathbf{h}} & \frac{f_1(x_1,x_2,\ldots,x_n+h) - f_1(x_1,\ldots,x_n)}{\mathbf{h}} \\ \frac{f_2(x_1+h,\ldots) - f_2(x_1,\ldots,x_n)}{h} & \ldots & \frac{f_2(\ldots,x_n+h) - f_2}{\mathbf{h}} \\ \vdots & & \\ \frac{f_n(x_1+h,\ldots) - f_n(x_1,\ldots,x_n)}{h} & \ldots & \frac{f_n(\ldots,x_n+h) - f_n}{\mathbf{h}} \end{bmatrix}$$

Custo Computacional = $2.n^2$ cálculos das funções originais, mas sem necessidade de se deduzir cada derivada parcial. É necessário estabelecer um h inicial que pode ser atualizado por Δx_i para cada variável i.

Exemplo 3: Resolva o sistema não linear $\begin{cases} x_1 x_2 = 1 \\ x_1 - e^{x_2} = 0 \end{cases}$ pelo método de Newton, utilizando uma aproximação numérica para a matriz Jacobiana, com $X^0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, h = 0,1 (incremento inicial) e erro $\varepsilon <= 10^{-5}$

Solução: $\begin{cases} f_1(x_1, x_2) = x_1 x_2 - 1 \\ f_2(x_1, x_2) = x_1 - e^{x_2} \end{cases}$ e $X^0 = \begin{bmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

1ª iteração:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 0 \\ 1{,}718 \end{bmatrix}$$

Achando a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} numericamente:

$$a_{11} = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \cong \frac{f_1(x_1^0 + h, x_2^0) - f_1(x_1^0, x_2^0)}{h} = \frac{(1{,}1*1-1)-0}{0{,}1} = 1$$

$$a_{12} = \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \cong \frac{f_1(x_1^0, x_2^0 + h) - f_1(x_1^0, x_2^0)}{h} \cong \frac{(1*1{,}1-1)-0}{0{,}1} = 1$$

$$a_{21} = \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \cong \frac{f_2(x_1^0 + h, x_2^0) - f_2(x_1^0, x_2^0)}{h} = \frac{(1{,}1-e^1)-(1-e^1)}{0{,}1} = 1$$

$$a_{22} = \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \cong \frac{f_2(x_1^0, x_2^0 + h) - f_2(x_1^0, x_2^0)}{h} = \frac{(1-e^{1{,}1})-(1-e^1)}{0{,}1} = -2{,}859$$

Assim teremos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2{,}859 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 0 \\ 1{,}718 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \Delta x_1 = 0{,}445 \\ \Delta x_2 = -0{,}445 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1^1 = 1{,}445 \\ x_2^1 = 0{,}555 \end{cases}$$

2ª iteração:

$$X^0 = \begin{bmatrix} x_1^1 \\ x_2^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1{,}445 \\ 0{,}555 \end{bmatrix} \text{ e } h = \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}445 \\ -0{,}445 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0{,}555 & 0{,}151 \\ 1 & -1{,}931 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}198 \\ 0{,}287 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \Delta x_1 = 0{,}348 \\ \Delta x_2 = 0{,}0316 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1^2 = 1{,}793 \\ x_2^2 = 0{,}587 \end{cases}$$

Repetimos este processo iterativo até que na sexta iteração teremos:

$$\begin{cases} x_1^6 = 1{,}76322 \\ x_2^6 = 0{,}56714 \end{cases} \cong \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix}$$