UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA - UFSC
CENTRO TECNOLÓGICO - CTC
DEPARTAMENTO DE INFORMÁTICA E ESTATÍSTICA - INE

Cálculo Numérico em Computadores:

Capítulo 7

Integração Numérica

Autores: Prof. Sérgio Peters
Acad. Andréa Vergara da Silva

e-mail: sergio.peters@ufsc.br

Florianópolis, 2013.

Capitulo 7 – Integração Numérica

Em muitos modelos matemáticos tem-se que efetuar a operação I = $\int_a^b f(x)dx$ (ou de ordens superiores). No cálculo este problema já foi abordado, como pode ser visto na enciclopédia Wikipédia, http://pt.wikipedia.org/wiki/Integral#Integral_definida :

$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x$	A integral de $f(x)$ no intervalo [a,b] é igual ao limite do somatório de cada um dos valores que a função f(x) assume, de 0 a n, multiplicados por Δx. O que se espera é que quando n for muito grande o valor da soma acima se aproxime do valor da área abaixo da curva e, portanto, da integral de $f(x)$ no intervalo. Ou seja, que o limite esteja definido. A definição de integral aqui apresentada é chamada de soma de Riemann, mas há outras formas (equivalentes).
onde $\Delta x = \frac{b-a}{n}$	comprimento dos pequenos subintervalos nos quais se divide o intervalo [a,b]. Os extremos destes intervalos são os números $x_0\ (=a), x_1, ...x_n\ (=b)$.
onde $f(x_i^*)$	Valor ("altura") da função $f(x)$ quando x é igual ao ponto amostral x_i^*, definido como um ponto que está no subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$ (podendo até mesmo ser um destes pontos extremos do subintervalo).

Porém, as técnicas vistas são mais exemplos de tratamento algébrico e de simplificações do que de técnicas efetivas de se obter I. Veremos as duas definições de I:
1ª) I = A, onde A é a área subentendida por y = f(x), x = a, x = b e y = 0.
2ª) Efetuar I é obter a primitiva ou anti-derivada F(x) de f(x).

A conexão entre as duas definições é o Teorema Fundamental do Cálculo:

$$\text{“}\int_a^b f(x)dx = A = F(b) - F(a)\text{”}$$

Contudo, a aplicação do TFC em I = $\int_a^b f(x)dx$ ***pode ser difícil ou até impossível, uma vez que:***

a) A integranda y = f(x) é apenas uma tabela do tipo:

X	x_1	...	x_{n+1}
f(x)	y_1	...	y_{n+1}

b) A y = f(x) pode ter primitiva obtida de maneira ineficiente.

c) Existem integrandas com primitivas desconhecidas.

Ex: $\int_0^1 e^{-x^2} dx$ e $\int_2^5 \frac{dx}{\ln(x)}$

7.1 – Integração Numérica de y = f(x)

Def. – obter I = $\int_a^b f(x)dx$ numericamente significa aplicar o TFC não em y = f(x) mas em aproximadoras de y = f(x).

Os métodos de integração numérica podem ser agrupados em duas grandes famílias:
1ª) Newton;
2ª) tipo Gauss.

7.1.1 – Métodos de Newton

a) Trapézios

Para se estimar I = $\int_a^b f(x)dx$, proceder como segue:

- Dividir [a,b] em n subintervalos de comprimento $h = \frac{(b-a)}{n}$.
- Obter os n + 1 valores funcionais (x_i, y_i), onde $x_1 = a$, $x_{i+1} = x_i + h$ e $y_i = f(x_i)$.
- Para cada 2 pontos sucessivos (x_i, y_i) e (x_{i+1}, y_{i+1}) obter o interpolador de grau 1.

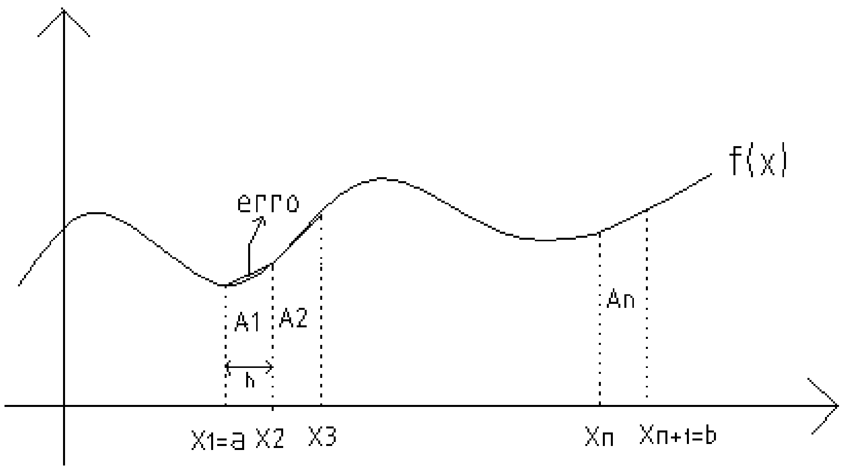
$$p_i(x) = y_i + \frac{y_{i+1} - y_i}{h}(x - x_i)$$

- Daí, $A_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} p_i(x)dx = \frac{h}{2}[y_i + y_{i+1}]$
- Finalmente, $\int_a^b f(x)dx \cong \sum_{i=1}^{n} A_i =$

$$= \frac{h}{2}[y_1 + y_2] + \frac{h}{2}[y_2 + y_3] + \ldots + \frac{h}{2}[y_n + y_{n+1}]$$

$$= \frac{h}{2}[y_1 + 2y_2 + 2y_3 + \ldots + 2y_n + y_{n+1}]$$

$$= \frac{h}{2}\left[y_1 + 2.\sum_{i=2}^{n} y_i + y_{n+1}\right] = T_n$$



Teorema:

"$\lim_{n\to\infty} T_n = \int_a^b f(x)dx$"

Exemplo: Efetue por Trapézios I = $\int_0^1 f(x)dx$, sendo

x	0	0,25	0,5	0,75	1
f(x)	3	5	8	4	2

Solução:

Temos n + 1 = 5 $\Rightarrow$ n = 4 e $x_{i+1} - x_i = 0{,}25 \Rightarrow h = 0{,}25$

Aplicando (1) $\Rightarrow \int_0^1 f(x)dx \cong \frac{0{,}25}{2}[3+2(5+8+4)+2] \cong 4{,}875$

Devemos notar que o teorema quando utilizado em precisão finita pode ser inválido, pois neste caso existe um 'n' ótimo, que não é conhecido previamente.

Teorema do Resto:

Em $\int_a^b f(x)dx$ se dividirmos o [a,b] em n partes iguais e aplicarmos Trapézios, então $E_T = \frac{-h^2(b-a)f''(\zeta)}{12}$, $\xi \in$ [a,b]

$|E_T| \leq \frac{h^2(b-a)M}{12}$ com $M = \max_{x\in[a,b]}|f''(x)|$, que é um valor limite do erro de truncamento.

Dedução do erro de truncamento Trapézios:

Para y = f(x), continuamente diferenciável dentro de [a; b], segundo o teorema de Taylor f(x) pode ser escrita exatamente, a partir de qualquer ponto β ($x>\beta$), como:

$$f(x) = f(\beta) + \frac{f'(\beta)(x-\beta)}{1!} + \frac{f''(\beta)(x-\beta)^2}{2!} + \cdots + \frac{f^n(\beta)(x-\beta)^n}{n!} + \cdots$$

onde $\beta \in [a;b]$.

Pelo teorema do resto da série de Taylor:

$$f(x) = \underbrace{f(\beta) + \frac{f'(\beta)(x-\beta)}{1!} + \cdots + \frac{f^n(\beta)(x-\beta)^n}{n!}}_{Pn(x)} + \underbrace{\frac{f^{n+1}(\xi)(x-\beta)^{n+1}}{(n+1)!}}_{Rn(x)} \qquad \xi \in [\beta; x]$$

Desse modo que f(x) = Pn(x) + Rn(x) ou f(x) $\cong$ Pn(x).

Especificamente para Aproximação Polinomial, assumindo truncamento da série a partir de n, o erro de truncamento para interpolação sobre os n+1 pontos:

x	x_0	x_1	...	x_n
y = f(x)	y_0	y_1	...	y_n

com f(x) continuamente diferenciável em $[x_0,x_n]$, então $\forall\, \overline{x} \in [x_0, x_n]$, $\exists\ \xi \in [x_0, x_n]$ /

$$E(\overline{x}) = |f(\overline{x}) - Pn(\overline{x})| = \left|\frac{f^{n+1}(\xi)\prod_{i=0}^{n}(\overline{x} - x_i)}{(n+1)!}\right|.$$

Note-se que a operacionalização do teorema acima é muito difícil pois:

(i). Pode ser muito dificil obter $f^{n+1}(\xi)$ (derivada n+1-ésima de f(x));
(ii). É impossível saber quem é exatamente o valor de ξ;
(iii). Para cada valor $\overline{x}$ a ser estimado tem-se que reavaliar o $E(\overline{x})$.

Mas esse teorema tem grande valia teórica, uma vez que:

Corolário 1 - "Sob as hipóteses do teorema anterior, se $M = \max_{x \in [x_0, x_n]} |f^{n+1}(x)|$ então

$$|E_{Pn}(\overline{x})| \leq \left|\frac{M}{(n+1)!}\prod_{i=0}^{n}(\overline{x} - x_i)\right| ".$$

No caso da aproximação com n=1, usada no método dos Trapézios, f(x) = P_1(x) + $E_{Pn}(\overline{x})$, entre x_i e x_{i+1}, temos

$$|E_{P_1}(\overline{x})| \leq \left|\frac{M}{(1+1)!}\prod_{i=0}^{1}(\overline{x} - x_i)\right| = \frac{M}{(2)!}(\overline{x} - x_i).(\overline{x} - x_{i+1}) \text{ com } M = \max_{x \in [x_i, x_{i+1}]} |f''(x)|$$

$$f(x) = P_1(x) + \frac{M}{(2)!}(\overline{x} - x_i).(\overline{x} - x_{i+1})$$

Logo,

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx = \int_{x_i}^{x_{i+1}}\left(P_1(x) + \frac{M}{(2)!}(\overline{x} - x_i).(\overline{x} - x_{i+1})\right)dx = \int_{x_i}^{x_{i+1}}(P_1(x))dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}}\left(\frac{M}{(2)!}(\overline{x} - x_i).(\overline{x} - x_{i+1})\right)dx = A_i + E_{Tn}$$

$$E_{Tn} == \int_{x_i}^{x_{i+1}}\left(\frac{M}{(2)!}(\overline{x} - x_i).(\overline{x} - x_{i+1})\right)dx = \frac{M}{(2)!}\int_{x_i}^{x_{i+1}}(\overline{x}^2 - (x_i + x_{i+1})\overline{x} + x_i x_{i+1})dx = \frac{M}{(2)!}\left(\frac{\overline{x}^3}{3} - (x_i + x_{i+1})\frac{\overline{x}^2}{2} + (x_i x_{i+1})\overline{x}\right)\Bigg|_{x_i}^{x_{i+1}}$$

onde A_i é a aproximação da área de um Trapézio, entre x_i e x_{i+1}, dada por A_i =h/2*(y_i+y_{i+1}).

Logo, o erro de truncamento no intervalo [x_i ; x_{i+1}]

$$E_{Tn} = \frac{M}{(2)!}\left[\left(\frac{x_{i+1}^{\;3}}{3} - (x_i + x_{i+1})\frac{x_{i+1}^{\;2}}{2} + (x_i x_{i+1})x_{i+1}\right) - \left(\frac{x_i^{\;3}}{3} - (x_i + x_{i+1})\frac{x_i^{\;2}}{2} + (x_i x_{i+1})x_i\right)\right]$$

$$E_{Tn}=\frac{M}{(2)!}\left[\left(\frac{x_{i+1}{}^3}{3}-(x_{i+1})\frac{x_{i+1}{}^2}{2}-(x_i)\frac{x_{i+1}{}^2}{2}+(x_i)x_{i+1}x_{i+1}\right)-\left(\frac{x_i{}^3}{3}-(x_i)\frac{x_i{}^2}{2}-(x_{i+1})\frac{x_i{}^2}{2}+(x_{i+1})x_ix_i\right)\right]$$

$$E_{Tn}=\frac{M}{(2)!}\left[\left(-\frac{x_{i+1}{}^3}{6}+(x_i)\frac{x_{i+1}{}^2}{2}\right)-\left(-\frac{x_i{}^3}{6}+(x_{i+1})\frac{x_i{}^2}{2}\right)\right]=\frac{M}{(2)!}\left[-\frac{1}{6}\left(x_{i+1}{}^3+3(x_i)x_{i+1}{}^2-3(x_{i+1})x_i{}^2-x_i{}^3\right)\right]$$

$$E_{Tn}=\frac{M}{(2)!}\left[-\frac{1}{6}\left(x_{i+1}{}^3+3(x_i)x_{i+1}{}^2-3(x_{i+1})x_i{}^2-x_i{}^3\right)\right]=-\frac{M}{12}(x_{i+1}-x_i)^3=-\frac{M}{12}(h)^3$$

E o erro de truncamento total no intervalo [a,b], com h=(b-a)/n -> n.h=(b-a)

$$\int_a^b f(x)dx\cong\sum_{i=1}^{n}\left(A_i-\frac{M}{12}.h^3\right)=\sum_{i=1}^{n}(A_i)-\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{M}{12}.h.h^2\right)=Tn-n.\frac{M}{12}.h.h^2=Tn-\frac{M}{12}.nh.h^2=Tn-\frac{M}{12}.(b-a).h^2$$

E $\boxed{E_{Tn}=\frac{M}{12}.(b-a).h^2}$, com $M=\max_{x\in[a;b]}|f''(x)|$

Exemplo: Determine o n mínimo para que o erro de truncamento seja menor que $\varepsilon = 10^{-6}$ ao efetuar I = $\int_1^6 \frac{1}{1+x}dx$ pelo método dos Trapézios.

Solução:

Temos $f(x) = (1 + x)^{-1} \Rightarrow f'(x) = -(1 + x)^{-2} \Rightarrow f''(x) = 2(1 + x)^{-3}$

$$M = \max_{x\in[1,6]}|f''(x)| = f''(1) = 2/8 = 0{,}25$$

$$10^{-6}\cong\frac{h^2.5.0{,}25}{12}\Rightarrow h\cong 0{,}0030984$$

$$\rightarrow n = 5/h = 1613{,}7 \Rightarrow n = 1614\ \ (\mathit{recomendado}\ \ \mathrm{n} = 2048)$$

Ao utilizarmos 'n' como potência de 2, obtemos valores de 'h' exatos, na base decimal e binária, e portanto valores de x_i exatos também.

A aproximação Tn da integral I obtida pelo método dos trapézios com n=1614 subdivisões do intervalo $x\in[1;6]$ em precisão simples de 8 dígitos significativos é Tn = 1.25276315, Integral Exata = 1.25276297, erro = $1.8.10^{-7}$, ou seja, com de **Erro de truncamento** inferior à $\varepsilon = 10^{-6}$.

Para calcular o Erro TOTAL, sobre o valor da integral aproximada Tn, e determinar também a influencia dos **Erros de Arredondamento** podemos determinar também Tn* em precisão dupla, de 16 dígitos significativos, com o mesmo número n=1614 de subdivisões, portanto com o mesmo Erro de Truncamento. Podemos calcular também o

Erro total Exato, subtraindo Tn do valor da Integral Exata Ie, ($|T_n - Ie|$) e o Erro Estimado ($|T_n-T_{2n}|$) também.

Em precisão simples de 8 dígitos significativos Tn = 1,252763
Em precisão dupla de 16 dígitos significativos Tn*= 1,25276315211032
Erro estimado sobre Tn = $1,3.10^{-7}$ (n=1614, comparando com n=2*n).
Erro exato total sobre Tn = $1,8.10^{-7}$ (arredondamentos não influenciando)
Erro exato total sobre Tn*, calculado em precisão dupla = $1,7.10^{-7}$ (menor $\varepsilon = 10^{-6}$)

Para n=2048:
Em precisão simples de 8 dígitos significativos Tn =1,252763
Em precisão dupla de 16 dígitos significativos Tn*=1,25276308253485
Erro estimado sobre Tn = $8,5.10^{-8}$ (n=2048).
Erro exato total sobre Tn = $2,8.10^{-8}$ (arredondamentos não influenciando)

Cálculos efetuados em C, com variaveis float e double, de 32 e 64 bits:

Para n=4096:
Em precisão simples de 8 dígitos significativos Tn =1,25276327
Em precisão dupla de 16 dígitos significativos Tn*=1,2527629970052434
Erro estimado sobre Tn = $2,7.10^{-7}$ (n=4096).
Erro exato total sobre Tn = $3,0.10^{-7}$(arredondamentos continuam não influenciando

Para n=32768:
Em precisão simples de 8 dígitos significativos Tn =1,252762675
Em precisão dupla de 16 dígitos significativos Tn*=1,2527629689408351
Erro estimado sobre Tn = $2,9.10^{-7}$ (n=32768).
Erro exato total sobre Tn = $2,9.10^{-7}$(arredondamentos continuam não influenciando

Para n=65536:
Em precisão simples de 8 dígitos significativos Tn =1,25275445
Em precisão dupla de 16 dígitos significativos Tn*=1,25276296860674250000
Erro estimado sobre Tn = $8,5.10^{-6}$ (n=65536).
Erro exato total sobre Tn = $8,5.10^{-6}$(arredondament,os influenciam, alterando os resultados)

Para n=131072:
Em precisão simples de 8 dígitos significativos Tn =1,25279605
Em precisão dupla de 16 dígitos significativos Tn*=1,252762968523208
Erro estimado sobre Tn = 3,3.10-5 (n=131072).
Erro exato total sobre Tn = $3,3.10^{-5}$ (arredondamentos influenciam, alterando mais ainda os resultados)

Para n=262144:
Em precisão simples de 8 dígitos significativos Tn =1,25270736
Em precisão dupla de 16 dígitos significativos Tn*=1,2527629685023201
Erro estimado sobre Tn = $5,6.10^{-5}$ (n=131072).
Erro exato total sobre Tn = $5,6.10^{-5}$ (arredondamentos influenciam, alterando mais ainda os resultados)
Erro exato total sobre Tn, calculado em precisão dupla = $6,9.10^{-12}$

Para n=4194304:

Em precisão simples de 8 dígitos significativos Tn =1,274151683

Em precisão dupla de 16 dígitos significativos Tn*=1,2527629684954742

Erro estimado sobre Tn = $2,1.10^{-2}$ (n=4194304).

Erro exato total sobre Tn = $2,1.10^{-2}$ (arredondamentos influenciam muito, alterando os resultados drasticamente)

Erro exato total sobre Tn*, calculado em precisão dupla = $1,1.10^{-13}$

Percebe-se que existe um 'n' ótimo, que nesse caso é em torno de n=4096, que gerou os menores erros totais, no caso de cálculos com precisão simples.

Note-se que a aplicabilidade do Teorema do erro pode ser muito difícil, pela limitação de n.

Se aumentamos o valor de n, além de 1614, reduzimos os erros de truncamento para valores menores que 10^{-6}, mas aumentamos o erro de arredondamento acumulado.

Para se contornar este problema pode-se efetuar algumas tentativas para $Tn \cong I = \int_a^b f(x)dx$ e analisar a tendência de evolução dos resultados, extrapolando limites.

Uma forma de análise pode ser efetuada via extrapolação para o limite de Romberg, que consiste em:

1º) Efetuar k tentativas por Trapézios com $h_{novo} = \frac{h_{velho}}{2}$, obtendo os $T_1, T_2, ..., T_k$.

2º) Considere que $T_i = T_i^0$, i = 1, ..., k

3º) Obter $T_i^j = \frac{4^j T_{i+1}^{j-1} - T_i^{j-1}}{4^j - 1}$, j = 1, 2, ..., k – 1

Teorema (Romberg):

$$\text{“}\lim_{k\to\infty} T_1^k = \int_a^b f(x)dx\text{”}$$

Exemplo: Efetuar $\int_0^1 e^x dx$ por Romberg, com k = 4 iniciando com h = 0,25.

Solução:

h	1,7272219			
$h/2$	1,7205186	1,7182841		
$h/4$	1,7188411	1,7182819	1,7182818	
$h/8$	1,7184216	1,7182818	1,7182818	1,7182818

b) Método de Simpson

No método dos Trapézios usamos dois pontos sucessivos para interpolar a integranda com dois pontos sucessivos. No método de Simpson usam-se três pontos sucessivos para interpolar y = f(x) por uma parábola $P_2(x)$.

Para efetuar I = $\int_a^b f(x)dx$ por Simpson procede-se da seguinte maneira:

1º) Dividir [a,b] em n (par) partes iguais de comprimento $h = \dfrac{b-a}{n}$;

2º) Para cada três pontos sucessivos, (x_{i-1}, y_{i-1}), (x_i, y_i) e (x_{i+1}, y_{i+1}), igualmente espaçados com intervalo h = (x_i-x_{i-1}) = (x_{i+1} - x_i), obter seu único polinômio interpolador, por exemplo, pelo Método de Lagrange:

$$P_2(x) = y_{i-1}.\frac{(x-x_i).(x-x_{i+1})}{(x_{i-1}-x_i).(x_{i-1}-x_{i+1})} + y_i.\frac{(x-x_{i-1}).(x-x_{i+1})}{(x_i-x_{i-1}).(x_i-x_{i+1})} + y_{i+1}.\frac{(x-x_{i-1}).(x-x_i)}{(x_{i+1}-x_{i-1}).(x_{i+1}-x_1)}$$

$$P_2(x) = y_{i-1}.\frac{(x-x_i).(x-x_{i+1})}{(-h).(-h)} + y_i.\frac{(x-x_{i-1}).(x-x_{i+1})}{(h).(-h)} + y_{i+1}.\frac{(x-x_{i-1}).(x-x_i)}{(h).(h)}$$

3º) Pelo Teorema Fundamental do Cálculo, integrando o interpolador polinomial $P_2(x)$:

$$\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f(x)dx \cong \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} P_2(x)dx = \frac{h}{3}[y_{i-1} + 4y_i + y_{i+1}]$$

4º) Daí, $\int_a^b f(x)dx \cong \frac{h}{3}[y_1 + 4y_2 + y_3] + \frac{h}{3}[y_3 + 4y_4 + y_5] + \cdots + \frac{h}{3}[y_{n-1} + 4y_n + y_{n+1}]$

$$\int_a^b f(x)dx \cong \frac{h}{3}[(y_1 + y_{n+1}) + 4(y_2 + y_4 + \cdots + y_n) + 2(y_3 + y_5 + \cdots + y_{n-1})]$$

$$= \frac{h}{3}[E + 4.P + 2.IP]$$

$$= \frac{h}{3}\left[y_1 + 4 * \sum_{i=2}^{n(passo\,2)} y_i + 2 * \sum_{i=3}^{n-1(passo\,2)} y_i + y_{n+1} \right] = S_n$$

ALTERNATIVAMENTE a dedução de $P_2(x)$ pode ser:

Tomemos os dois primeiros intervalos (x_0 , x_1) e (x_1 , x_2).
Tem-se a tabela a seguir:

X	x_0	x_1	x_2
Y	y_0	y_1	y_2

onde: $x_1 - x_0 = h$ e $x_2 - x_1 = h$.

Vamos construir a parábola (do segundo grau) que passa pelos três pontos dados e, em seguir, vamos integrar essa parábola, achando a área entre a curva e o eixo de X.
Claro que essa área não se altera se deslocamos o eixo de Y para a posição x = x_1 . Figura abaixo:
...
Ficamos com a tabela:

X	-h	0	+h
Y	y_0	y_1	y_2

Seja $Y = A X^2 + B X + C$ a parábola que passa pelos três pontos dados.

$y_0 = A (-h)^2 + B (-h) + C = A.h^2 – B.h + C$ (eq. 1a)

$y_1 = A (0^2) + B(0) + C = C$ (eq. 1b)

$y_2 = A (h)^2 + B (h) + C = A.h^2 + B.h + C$ (eq. 1c)

$$I_1 = \int_{-h}^{h} (AX^2 + BX + C)\ dx = [AX^3/3 + BX^2/2 + CX]_{-h}^{+h}$$

Calculemos a integral da parábola de –h a +h.

$I_1 = 2Ah^3/3 + 2Ch = (2Ah^2 + 6C) h/3 = (2Ah^2 + 2C + 4C) h/3$
$I_1 = h/3. ((2Ah^2 + 2C) + 4C)$

Porém, das equações 1a, 1b e 1c acima, somado-se a primeira com a terceira, tem-se:

$y_0 + y_2 = 2Ah^2 + 2C$

da segunda equação, tem-se: $y_1 = C$, logo

Logo:
$I_1 = h/3. ((2Ah^2 + 2C) + 4C)$

$I_1 = h/3. ((y_0 + y_2)+4.y1) = h/3 (y_0 + 4 y_1 + y_2)$

Esta é uma fórmula simples que permite calcular a integral da parábola que passa pelos 3 pontos

X	-h	0	+h
Y	y_0	y_1	y_2

$$I_1 = \int_{-h}^{h} (AX^2 + BX + C)\ dx = \frac{h}{3}.(y_0 + 4y_1 + y_2)$$

Se tomarmos esses 3 pontos e deslocarmos o eixo de y, paralelamente, a área sob a parábola não se altera, isto é, a integral da parábola não muda.

Assim, dados três pontos

X	x_0	x_1	x_2
Y	y_0	y_1	y_2

onde: $x_1 - x_0 = h$ e $x_2 - x_1 = h$, tem-se:

$$I_1 = \int_{-x_0}^{x_2} (AX^2 + BX + C)\ dx = \frac{h}{3}.(y_0 + 4y_1 + y_2)$$

Voltando-se à tabela total original, tem-se:

X	$x_0 = a$	x_1	x_2	...	x_{n-1}	$x_n = b$
Y	y_0	y_1	y_2	...	y_{n-1}	y_n

$$I = \int_a^b f(x)dx = \int_{x_0}^{x_2} f(x)dx + \int_{x_2}^{x_4} f(x)dx + \ldots + \int_{x_{n-2}}^{x_n} f(x)dx$$

$$I = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2) + \frac{h}{3}(y_2 + 4y_3 + y_4) + \ldots + \frac{h}{3}(y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n)$$

$$I = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + \ldots + 2y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n)$$

ou $S_n = \frac{h}{3}\left[y_1 + 4 * \sum_{i=2}^{n(passo\,2)} y_i + 2 * \sum_{i=3}^{n-1(passo\,2)} y_i + y_{n+1} \right]$

Esta é a fórmula de Simpson para cálculo de integral definida.

Exemplo: Efetue por Simpson $\int_0^3 f(x)dx$, onde:

x	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
f(x)	4	6	7,5	8	5	3	2

Solução:

Temos: $h = x_{i+1} - x_i = 0,5$; $n = 6$ (par)

$$\int_0^3 f(x)dx \cong \frac{0,5}{3}[(4+2)+4(6+8+3)+2(7,5+5)] \cong 16,5$$

Considerações:

1ª) Simpson, via de regra, fornece resultados mais precisos que Trapézios para um mesmo esforço. Novamente exige um n ótimo, pelos mesmos motivos do Trapézios.

2ª) Para se determinar um n ótimo pode-se:

i) Algebricamente, através do erro de truncamento total do Simpson, dado por:

$$E_S = \frac{-h^4(b-a)f^{iv}(\xi)}{180}, \xi \in [a,b]$$

Não é operacional por causa do ξ. Operacionalizando:

$$(**) \quad |E_S| \le \frac{h^4(b-a)M}{180}, \text{ onde } M = \max_{x\in[a,b]}|f^{iv}(x)|$$

Dedução do erro de truncamento Simpson:

Tomando novamente o Corolário 1 –

"Sob as hipóteses do teorema anterior, se $M = \max_{x\in[x_0,x_n]}|f^{n+1}(x)|$ então

$$|E_{Pn}(\bar{x})| \le \left|\frac{M}{(n+1)!}\prod_{i=0}^{n}(\bar{x}-x_i)\right|".$$

No caso da aproximação com n=2, usada no método dos Simpson, f(x) = P_2(x) + $E_{P2}(\bar{x})$, entre x_{i-1}; x_i e x_{i+1}, temos

$$|E_{P_2}(\bar{x})| \le \left|\frac{M}{(2+1)!}\prod_{i=0}^{2}(\bar{x}-x_i)\right| = \frac{M}{(3)!}(\bar{x}-x_{i-1}).(\bar{x}-x_i).(\bar{x}-x_{i+1}) \text{ com } M = \max_{x\in[x_{i-1},x_{i+1}]}|f'''(x)|$$

$$f(x) = P_2(x) + \frac{M}{(3)!}(\bar{x}-x_{i-1}).(\bar{x}-x_i).(\bar{x}-x_{i+1})$$

Para distribuição de pontos igualmente espaçados, temos: $x_{i-1} = x_i - h$ e $x_{i+1} = x_i + h$

$$\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f(x)dx = \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \left(P_2(x) + \frac{M}{(3)!}(\bar{x}-x_{i-1}).(\bar{x}-x_i).(\bar{x}-x_{i+1}) \right) dx = \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} (P_2(x))dx + \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \left(\frac{M}{(3)!}(\bar{x}-x_{i-1}).(\bar{x}-x_i).(\bar{x}-x_{i+1}) \right) d$$

$$\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f(x)dx = \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} (P_2(x))dx + \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \left(\frac{M}{(3)!}(\bar{x}-x_{i-1}).(\bar{x}-x_i).(\bar{x}-x_{i+1}) \right) dx = A_i + E_{Sn}$$

onde A_i é a aproximação da área abaixo de uma parábola, entre x_{i-1} e x_{i+1}, dada por A_i =h/3*(y_{i-1} +4 y_i +y_{i+1}).

$$E_{Sn} = \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \left(\frac{M}{(3)!}(\bar{x}-x_i+h).(\bar{x}-x_i).(\bar{x}-x_i-h) \right) dx = \frac{M}{(3)!} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} (\bar{x}-x_i).((\bar{x}-x_i)+h).((\bar{x}-x_i)-h)dx$$

$$E_{Sn} = \frac{M}{(3)!} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} (\bar{x}-x_i).((\bar{x}-x_i)^2-h^2).dx = \frac{M}{(3)!} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} ((\bar{x}-x_i)^3 - h^2(\bar{x}-x_i)).dx$$

$$E_{Sn} = \frac{M}{(3)!} \left(\frac{(\bar{x}-x_i)^4}{4} - h^2 \frac{(\bar{x}-x_i)^2}{2} \right) \Bigg|_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} = \frac{M}{(3)!} \left[\left(\frac{(x_{i+1}-x_i)^4}{4} - h^2 \frac{(x_{i+1}-x_i)^2}{2} \right) - \left(\frac{(x_{i-1}-x_i)^4}{4} - h^2 \frac{(x_{i-1}-x_i)^2}{2} \right) \right]$$

$$E_{Sn} = \frac{M}{(3)!} \left[\left(\frac{(h)^4}{4} - h^2 \frac{(h)^2}{2} \right) - \left(\frac{(-h)^4}{4} - h^2 \frac{(-h)^2}{2} \right) \right] == \frac{M}{(3)!} \left[\frac{(h)^4}{4} - \frac{(h)^4}{2} - \frac{(h)^4}{4} + \frac{(h)^4}{2} \right] = 0$$

Logo, o erro de truncamento no intervalo [x_{i-1} ; x_{i+1}], de 3ª. ordem, é nulo,

$$E_{Sn} = \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \left(\frac{M}{(3)!}(\bar{x}-x_{i-1}).(\bar{x}-x_i).(\bar{x}-x_{i+1}) \right) dx = 0$$

Demonstrando que o método de Simpson tem erro de de truncamento de ordem inferior, assim incluimos o próximo termo da série de Taylor, para n=3, que é um termo de 4ª. ordem,:

$$f(x) = P_2(x) + \frac{\max\limits_{x\in[x_{i-1},x_{i+1}]} |f'''(x)|}{(3)!}(\bar{x}-x_{i-1}).(\bar{x}-x_i).(\bar{x}-x_{i+1}) + \underbrace{\frac{\max\limits_{x\in[x_{i-1},x_{i+1}]} |f''''(x)|}{(4)!}(\bar{x}-x_{i-1}).(\bar{x}-x_i)^2.(\bar{x}-x_{i+1})}_{E_{Sn}}$$

Logo

$$E_{Sn} = \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \left(\frac{\max\limits_{x\in[x_{i-1},x_{i+1}]} |f''''(x)|}{(4)!}(\bar{x}-x_{i-1}).(\bar{x}-x_i)^2.(\bar{x}-x_{i+1}) \right) dx = 0$$, com $M = \max\limits_{x\in[x_{i-1},x_{i+1}]} |f''''(x)|$

$$E_{Sn} = \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \left(\frac{M}{(4)!}(\bar{x}-x_i+h).(\bar{x}-x_i)^2.(\bar{x}-x_i-h) \right) dx = \frac{M}{(4)!} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} (\bar{x}-x_i)^2.((\bar{x}-x_i)+h).((\bar{x}-x_i)-h).dx$$

$$E_{Sn} = \frac{M}{(4)!} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} (\bar{x}-x_i)^2.((\bar{x}-x_i)^2-h^2).dx = \frac{M}{(4)!} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} ((\bar{x}-x_i)^4 - h^2.(\bar{x}-x_i)^2).dx$$

$$E_{Sn} = \frac{M}{(4)!} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} ((\bar{x}-x_i)^4 - h^2.(\bar{x}-x_i)^2).dx = \frac{M}{(4)!} \left(\frac{(\bar{x}-x_i)^5}{5} - h^2.\frac{(\bar{x}-x_i)^3}{3} \right) \Bigg|_{x_{i-1}}^{x_{i+1}}$$

$$E_{Sn} = \frac{M}{(4)!} \left[\frac{(x_{i+1}-x_i)^5}{5} - h^2.\frac{(x_{i+1}-x_i)^3}{3} - \frac{(x_{i-1}-x_i)^5}{5} + h^2.\frac{(x_{i-1}-x_i)^3}{3} \right]$$

$$E_{Sn} = \frac{M}{(4)!} \left[\frac{(h)^5}{5} - h^2.\frac{(h)^3}{3} - \frac{(-h)^5}{5} + h^2.\frac{(-h)^3}{3} \right] = \frac{M}{(4)!} \left[-\frac{4(h)^5}{15} \right] = -\frac{1}{90} M.h^5$$

E o erro de truncamento total no intervalo [a,b], com h=(b-a)/n -> n.h=(b-a)

$$\int_a^b f(x)dx \cong \sum_{i=1}^{n(passo2)} \left(A_i - \frac{1}{90} M.h^5 \right) = \sum_{i=1}^{n(passo2)} (A_i) - \sum_{i=1}^{n(passo2)} \left(\frac{M}{90}.h.h^4 \right) = Sn - \frac{n}{2}.\frac{M}{90}.h.h^4$$

$$\int_a^b f(x)dx \cong Sn - \frac{M}{180}.nh.h^4 = Sn - \frac{M}{180}.(b-a).h^4$$

E $\boxed{E_{Sn} = -\frac{M}{180}.(b-a).h^4}$, com $M = \max_{x\in[a;b]} |f''''(x)|$

Exemplo: Determine um n ótimo (mínimo) para não cometer erro superior à $\varepsilon = 10^{-6}$ ao se efetuar por Simpson $\int_1^6 (1+x)^{-1} dx$.

Solução:

$f(x) = (1+x)^{-1} \Rightarrow f'(x) = -(1+x)^{-2} \Rightarrow f''(x) = 2(1+x)^{-3} \Rightarrow f'''(x) = -6(1+x)^{-4}$

$f^{iv}(x) = 24(1+x)^{-5} \Rightarrow f^{iv}(1) = \dfrac{24}{(1+1)^5} = \dfrac{24}{32}$

$10^{-6} \leq \dfrac{h^4.(5).0,75}{180} \Rightarrow h = 0,08323 \Rightarrow n = 60$

Aplicando em (* *) $\Rightarrow$

$$10^{-6} \cong \frac{h^4.5.24}{180.32} \Rightarrow h^4 \cong \frac{180.32.10^{-6}}{120} \Rightarrow h^4 \cong 48.10^{-6} \Rightarrow h \cong 0,0832358$$

$$n = \frac{5}{h} = 60,07028... \Rightarrow n = 60 \quad \text{(recomendado n = 64)}$$

ii) Efetuar algumas tentativas sucessivas ($h_{novo} = h_{velho}/2$) e analisar o comportamento dos resultados. Não existe extrapolação para o método de Simpson. Porém, existe e pode ser aplicada a extrapolação de Aitken, que consiste em:

- Se S_i, S_{i+1} e S_{i+2} são três aproximações para I = $\int_a^b f(x)dx$, obtidos por Simpson, então: $S = S_{i+2} - \frac{(S_{i+2} - S_{i+1})^2}{S_{i+2} - 2S_{i+1} + S_i}$, que é mais precisa que as três que a geram.

Exemplo: Para $\int_0^6 x\sqrt{1+x}dx$ temos:

S_1 = 39,874507
S_2 = 39,77751
S_3 = 39,77658
Aplicando em S temos:

S = 39,77658 - $\frac{0,000000864}{0,096067} \Rightarrow \mathbf{S = 39,77657}$

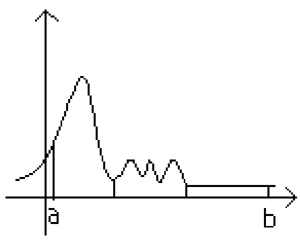
Onde S exata é 39,77656.

3ª) Não fornece resultados de integrais impróprias.

$$\int_a^{\infty} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \quad \int_{-\infty}^{b}$$

4ª) Quadratura Adaptativa

Até o momento efetuamos I = $\int_a^b f(x)dx$ com h, depois $h/2 \Rightarrow \bar{I} \cong \int_a^b f(x)dx$. Funciona bem se f(x) é uma função "bem comportada" em [a,b], já se f(x) não for bem comportada esta técnica pode ser altamente ineficiente.



- Dividir [a,b] em n subintervalos h_1 = $\frac{b-a}{n}$;
- Em cada subintervalo fazer:
  - obter $P_i = \frac{h_i}{6}\left[f(x_i) + 4f(x_i + \frac{h_i}{2}) + f(x_i + h_i)\right]$

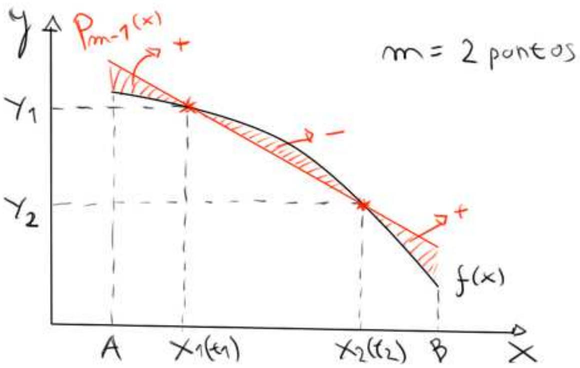
$$Q_i = \frac{h_i}{12}\left[f(x_i) + 4f(x_i + h_i/4) + 2f(x_i + h_i/2) + 4f(x_i + 3h_i/4) + f(x_i + h)\right]$$

  - se $|P_i - Q_i| < \frac{h_i.\varepsilon.16}{h-a} \Rightarrow \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx = Q_i$

- senão $h_2 = \frac{h_1}{2}$ e retorna para obter P_i e Q_i com h_2.

7.1.2 – Integração Numérica Gaussiana

Considere que deseja-se efetuar I = $\int_b^a f(x)dx$, onde:



com apenas dois (m=2) pontos de avaliações de y = f(x), passando uma reta pelos extremos dos intervalo, temos um Erro de Truncamento muito elevado, pois no método de Newton usamos um espaçamento 'h' constante. Por este motivo, Gauss propôs um método de aproximação, baseada em uma aproximação de f(x) por polinômios ortogonais de Legendre de grau "n=m-1", que minimizam o erro de truncamento e que integre "de forma exata" polinômios de grau até "2m-1", calculados sobre "m" pontos escolhidos "adequadamente" de modo a compensar os erros no cálculo da área abaixo da reta:

1º) Transformar $x \in [a,b]$ em $t \in [-1,+1]$ através de:

$$x(t) = \frac{b-a}{2}.t + \frac{b+a}{2} \Rightarrow dx = \frac{b-a}{2}dt$$

$$I = \int_a^b f(x)dx = \left(\frac{b-a}{2}\right)\int_{-1}^{1} \underbrace{f(x(t))}_{g(t)}dt = \left(\frac{b-a}{2}\right)\int_{-1}^{1} \underbrace{f\left(\frac{b-a}{2}.t + \frac{b+a}{2}\right)}_{g(t)}dt$$

2º) Calcular $\int_{-1}^{1} f(x(t))dt = \sum_{k=1}^{m} C_{(m,k)} . f\left(\frac{1}{2}(b-a)t_{(m,k)} + \frac{1}{2}(b+a)\right)$ resultando em

$$I = \int_a^b f(x)dx \cong \frac{(b-a)}{2}\int_{-1}^{1} f(x(t))dt = \frac{(b-a)}{2}\sum_{k=1}^{m} C_{(m,k)} . f\left(\frac{1}{2}(b-a)t_{(m,k)} + \frac{1}{2}(b+a)\right)$$

Onde C e t são parâmetros fixos, independem da integranda y = f(x), e podem ser encontrados na literatura para diversos números ‘m’ de pontos de avaliação de f(x).

m	$t_{(m,k)}$	$C_{(m,k)}$
1	0	2
2	-0.57735027	1.00000000
	0.57735027	1.00000000
3	-0.77459667	0.55555555
	0.00000000	0.88888888
	0.77459667	0.55555555
4	-0.86113631	0.34785485
	-0.33998104	0.65214515
	0.33998104	0.65214515
	0.86113631	0.34785485
5	-0.90617985	0.23692689
	-0.53846931	0.47862867
	0.00000000	0.56888888
	0.53846931	0.47862867
	0.90617985	0.23692689

Valores de t e C para integração de Gauss-Legendre, EM PRECISÃO DUPLA:
http://minerva.ufpel.edu.br/~rudi/grad/ModComp/MetNum/html/Apostilach3.html

$\pm t_{mk}$		C_{mk}
	m = 2	
$1/\sqrt{3}$		1
	m = 3	
0		8/9
$\sqrt{3/5}$		5/9
	m = 4	
0.33998104358485626480		0.65214515486254614263
0.86113631159405257522		0.34785484513745385737
	m = 5	
0.00000000000000000000		128/225
0.53846931010568309104		0.47862867049936646804
0.90617984593866399280		0.23692688505618908751
	m = 6	
0.23861918608319690863		0.46791393457269104739
0.66120938646626451366		0.36076157304813860757
0.93246951420315202781		0.17132449237917034504
	m = 7	
0.00000000000000000000		512/1225
0.40584515137739716691		0.38183005050511894495
0.74153118559939443986		0.27970539148927666790
0.94910791234275852453		0.12948496616886969327

Estes valores de t_{mk} e C_{mk} podem calculados considerando que polinômios de grau até "2m-1", para "m" pontos de avaliação, podem ser integrados por polinômios de grau "n=m-1", "de forma exata":

$$\int_{-1}^{1} g(t)dt = \sum_{k=1}^{m} C_{(m,k)}.g\left(t_{(m,k)}\right)$$

Para m=2 pontos, por exemplo, temos um polinômio de 1º grau "n=2-1=1", que integra polinômios g(t) de até 3º grau "2m-1=2.2-1=3", de forma exata, então integra $g(t)=t^0=1$, $g(t)=t^1$, $g(t)=t^2$, $g(t)=t^3$, utilizando $\int_{-1}^{1} g(t)dt = \sum_{k=1}^{m} C_{(m,k)}.g\left(t_{(m,k)}\right)$:

g(t) = 1 => $\int_{-1}^{1} 1.dt = \sum_{k=1}^{2} C_{(2,k)}.g\left(t_{(2,k)}\right) \Rightarrow 2 = C_{(2,1)}.1 + C_{(2,2)}.1$

g(t) = t => $\int_{-1}^{1} t.dt = \sum_{k=1}^{2} C_{(2,k)}.g\left(t_{(2,k)}\right) \Rightarrow 0 = C_{(2,1)}.t_{(2,1)} + C_{(2,2)}.t_{(2,2)}$

g(t) = t^2 => $\int_{-1}^{1} t^2.dt = \sum_{k=1}^{2} C_{(2,k)}.g\left(t_{(2,k)}\right) \Rightarrow 2/3 = C_{(2,1)}.(t_{(2,1)})^2 + C_{(2,2)}.(t_{(2,2)})^2$

g(t) = t^3 => $\int_{-1}^{1} t^3.dt = \sum_{k=1}^{2} C_{(2,k)}.g\left(t_{(2,k)}\right) \Rightarrow 0 = C_{(2,1)}.(t_{(2,1)})^3 + C_{(2,2)}.(t_{(2,2)})^3$

Resolvendo este sistema não linear, pelo método de Newton, conforme segue:

$$\begin{cases} C_{(2,1)} + C_{(2,2)} = 2 \\ C_{(2,1)}.t_{(2,1)} + C_{(2,2)}.t_{(2,2)} = 0 \\ C_{(2,1)}.(t_{(2,1)})^2 + C_{(2,2)}.(t_{(2,2)})^2 = 2/3 \\ C_{(2,1)}.(t_{(2,1)})^3 + C_{(2,2)}.(t_{(2,2)})^3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f_1 = x_1 + x_2 - 2 \\ f_2 = x_1.x_3 + x_2.x_4 - 0 \\ f_3 = x_1.(x_3)^2 + x_2.(x_4)^2 - 2/3 \\ f_4 = x_1.x_3^{\ 3} + x_2.x_4^{\ 3} - 0 \end{cases}$$

Temos
C_{21} = 1.00000000 e t_{21} = 0.57735027
C_{22} = 1.00000000 e t_{22} = -0.57735027

Pela resolução do sistema de 4 equações não lineares, com $f_1=0$, $f_2=0$, $f_3=0$ e $f_4=0$ no Octave temos em 5 iterações:

a =>Matriz Jacobiana

```
  1.00000   1.00000   0.00000   0.00000  -0.00000
  0.57735  -0.57735   1.00000   1.00000  -0.00000
  0.33333   0.33333   1.15470  -1.15470  -0.00000
```

0.19245 -0.19245 1.00000 1.00000 -0.00000

dx = -0.0000e+000 -0.0000e+000 -8.1528e-010 8.1528e-010

x = 1.00000 1.00000 0.57735 -0.57735
C_{21} C_{22} t_{21} t_{22}

erro = 8.1528e-010

3º) O erro de truncamento máximo E_{Gm} desta integração numérica para 'm' pontos de avaliação de f(x) é dada por

$$E_{Gm} \le (b-a)^{2m+1} \frac{(m!)^4}{(2m+1)[(2m)!]^3} \mathrm{Max}\left|f^{2m}(x)\right|, \qquad x \in [a;b]$$

$$\lim_{m\to\infty} E_{Gm} = 0$$

Exemplo:
Determine o número de pontos 'm' mínimo para que o erro de truncamento máximo entre a integral exata I= $\int_1^6 (1+x)^{-1}dx$ e a aproximação por Gauss-Legendre seja inferior 10^{-6}.

Solução: Vamos calcular o erro E_{Gm} por tentativas, iniciando com:

m=6:

$f(x) = (1+x)^{-1} \Rightarrow f'(x) = -(1+x)^{-2} \Rightarrow f''(x) = 2(1+x)^{-3} \Rightarrow f'''(x) = -6(1+x)^{-4}$
$f^{iv}(x) = 24(1+x)^{-5} \Rightarrow$ generalizando p derivado de ordem 'n' temos
$f^n(x) = (-1)^n \cdot n! \cdot (1+x)^{-(n+1)}$

$$\mathrm{Max}|f^{2m}| = f^{12}(1) = (-1)^{12}.\frac{12!}{(1+1)^{(12+1)}} = 58472$$

$$E_{Gm} \le (6-1)^{2.6+1} \frac{(6!)^4}{(2.6+1)[(2.6)!]^3} \mathrm{Max}\left|f^{2m}(x)\right| = 0{,}01342557$$

m=10:

$$\mathrm{Max}|f^{2m}| = f^{20}(1) = (-1)^{20}.\frac{20!}{(1+1)^{(20+1)}} = 1{,}1601.10^{12}$$

$$E_{Gm} \le (6-1)^{2.10+1} \frac{(10!)^4}{(2.10+1)[(2.10)!]^3} \mathrm{Max}\left|f^{2m}(x)\right| = 0{,}00031719$$

m=16:

$$\mathrm{Max}|f^{2m}| = f^{32}(1) = (-1)^{32}.\frac{32!}{(1+1)^{(32+1)}} = 3{,}06325.10^{25}$$

$$E_{G\,m} \leq (6-1)^{2.16+1}\frac{(16!)^4}{(2.16+1)[(2.16)!]^3}\mathrm{Max}\left|\mathrm{f}^{\,2m}(\mathrm{x})\right| = 1{,}13669.10^{-06}$$

Note que é necessário apenas 'm'=16 pontos (nossa tabela vai até m=5 pontos) no método de Gauss-Legendre, que equivale a substituir f(x) por um polinômio de grau 'n'=15, ou usar 15 subintervalos entre o intervalo [a,b], enquanto nos métodos de Simpson e Trapézios necessitávamos de n= 60 e n=1614 subdivisões do intervalo [a,b], respectivamente.

Exemplo: Determine I = $\int_1^6 \frac{1}{1+\mathrm{x}}\mathrm{dx}$ pelo método de Gauss-Legendre com m=3 pontos:

a = 1
b = 6
m = 3

m	$t_{(m,k)}$	$C_{(m,k)}$
3	-0.77459667	0.55555555
	0.00000000	0.88888888
	0.77459667	0.55555555

$$I = \int_a^b f(x)dx = \frac{(b-a)}{2}\int_{-1}^{1} f(x(t))dt \cong \frac{(b-a)}{2}\sum_{k=1}^{m} C_{(m,k)}.f\left(\frac{1}{2}(b-a)t_{(m,k)} + \frac{1}{2}(b+a)\right) = Gm$$

$$Gm = \frac{(b-a)}{2}.\sum_{k=1}^{m} C_{(m,k)}.f(x_k) = \frac{(b-a)}{2}.\sum_{k=1}^{m} C_{(m,k)}.y_k$$

k	$t_{(m,k)}$	$x_k = \frac{b-a}{2}.t_{(m,k)} + \frac{b+a}{2}$	$y_k = f(x_k)$
1	-0.77459667	1.563508325	0.390090404719087
2	0.	3.5	0.222222222222222
3	0.77459667	5.436491675	0.155364140978245

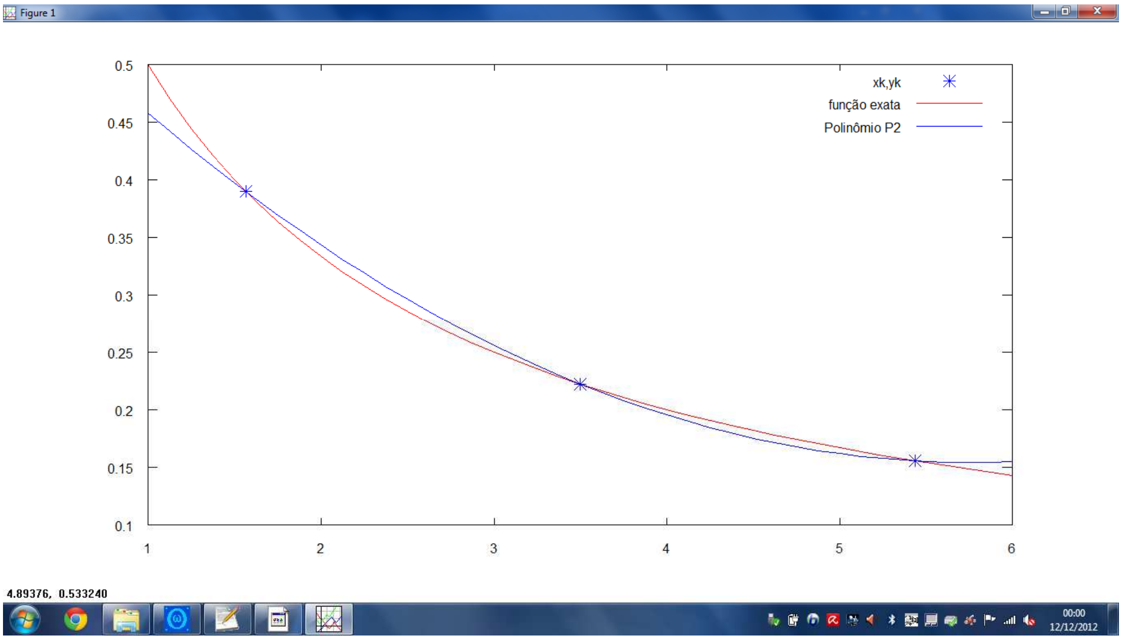
$$Gm = \frac{(b-a)}{2}.\left[C_{(3,1)}.f(x_1) + C_{(3,2)}.f(x_2) + C_{(3,3)}.f(x_3)\right]$$

$$Gm = \frac{(6-1)}{2}.\left[0{,}55555555\ X\ 0{,}390090404719087 + 0{,}88888888\ X\ 0{,}222222222222222 + 0{,}55555555\ \mathrm{X}\ 0{,}155364140978245\right]$$

$$Gm = \frac{(6-1)}{2}.\left[0{,}216716891510604 + 0{,}197530864197531 + 0{,}086313411654580545\right]$$

$$Gm = \frac{(6-1)}{2}.\left[0.50056116736271645\right]$$

Gm = 1.25140291840679



Se determinarmos o Polinômio de grau n=2, que passa sobre os 3 pontos (x_k,y_k), teremos os seguintes coeficientes: $P_2(x)=a_0+a_1.x+a_2.x^2$

a_0 = 0.599327, a_1 = -0.154882 e a_2 = 0.013468

$P_2(x)$= 0.599327 -0.154882.x + 0.013468.x^2

e se integrarmos o polinômio $P_2(x)$ entre a=1 e b=6, teremos Ip, que é equivalente a Gm:

$$Ip = \int_a^b P_2(x).dx = \int_1^6 (0{,}599327 - 0{,}154882.x + 0{,}013468.x^2).dx$$

Ip = 1.25140291813203 (Integrar $P_2(x)$ é equivalente à aplicar o somatório de Gauss)
Gm= 1.25140291840679 (aplicar o somatório de Gauss é equivalente à integrar $P_2(x)$)
Ie = 1.25276296849537 (Integral Exata demonstra que Ip e Gm são exatos até 3º dígito)

erroe = |Ie-Gm| = 0.00136005008857931 (erro exato acusa alterações após o 3º dígito)
errop = |Ie - Ip | = 0.00136005036333797 (erro exato acusa alterações após o 3º dígito)

Exemplo: Efetue por Gauss I = $\int_1^4 \ln(x)dx$, com m = 3.

Solução:
Temos: f(x) = ln(x) x(t)= ½.(4-1).t+½.(4+1)=1,5.t + 2,5 dx = 1,5dt
g(t) =f(x(t)) = ln(1,5.t + 2,5)
Assim,

$$\bar{I} = \int_{-1}^{1} g(t)dt = \sum_{i=1}^{3} c_i g(t_i)$$

$$\bar{I} = c_1 g(t_1) + c_2 g(t_2) + c_3 g(t_3)$$

$$\bar{I} = \ {}^{5}\!/_{9}.g(-0.77459667) + {}^{8}\!/_{9}.g(0) + {}^{5}\!/_{9}.g(0.77459667)$$

$$\bar{I} = \ {}^{5}\!/_{9}.\ln(1{,}5.(-0.77459667) + 2{,}5) + {}^{8}\!/_{9}.\ln(1{,}5.(0) + 2{,}5) + {}^{5}\!/_{9}.\ln(1{,}5.(0.77459667) + 2{,}5)$$

$$\bar{I} = 1{,}69739$$

I ≅ ½.(b-a). $\bar{I}$ = 1,5. 1,69739 = 2,54608

I_{exata} = 2,545177

Considerações:

1ª) Observando a expressão do E_{Gm} se comparado com o E_{Sn} nota-se que Gauss é mais preciso;
2ª) Pelas suas características, Gauss é mais <u>estável</u> que Newton;
3ª) Gauss não é aplicável se a integranda y = f(x) for uma tabela;
4ª) Gauss fornece resultados pobres se y = f(x) possuir descontinuidades em [a,b];

ex: $I = \int_{1}^{3} \frac{dx}{2-x} = \int_{1}^{2} \frac{dx}{2-x} + \int_{2}^{3} \frac{dx}{2-x}$

5ª) Gauss é de natureza aberta, isto é, a integranda não é avaliada nos extremos a e b. Em decorrência disso:

- Pode-se efetuar I = $\int_{a}^{b} f(x)dx$ com descontinuidades em a e b;

Ex: Efetue I = $\int_{0}^{1} \ln(x)dx$:

f(x) = ln(x)   x = 0,5t + 0,5
g(t) = ln(0,5t + 0,5)   m = 3

$$\int_{0}^{1} \ln x dx \cong -0{,}94767237 \quad (=\sum c_i g(t_i))$$

- Pode-se efetuar integrais impróprias do tipo: I = $\int_{a}^{\infty} f(x)dx$, fazendo:

$y = 1/x \Rightarrow x = {}^{1}\!/_{y} \Rightarrow dx = -\,{}^{1}\!/_{y^2}\, dy$ $[a,\infty) \sim [{}^{1}\!/_{a}, 0]$

$$\int_{a}^{\infty} f(x)dx = -\int_{1/a}^{0} \frac{f(y)}{y^2} dy = \int_{0}^{1/a} \frac{f(y)}{y^2} dy$$

Obs: Se a for zero a integral pode ser resolvida da seguinte forma:

$$\int_{0}^{\infty} = \int_{0}^{1} + \int_{1}^{\infty}$$