Cálculo e Geometria Analítica II

Lista 8 - Convergência Absoluta e Condicional ; Séries de Potências

Instituto de MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA UFRGS

Convergência absoluta e convergência condicional

1. Em cada item marque com um ✕ a alternativa correta, em que V indica verdadeiro e F indica falso.

(a) Seja a série $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ e seja $S_n = \sum_{k=1}^{n} |a_k|$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Se $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = 4$, então a série $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge.

( ) V ( ) F

(b) Se a série $\sum_k a_k$ é condicionalmente convergente, então $\sum_k |a_k|$ converge.

( ) V ( ) F

2. Classifique cada série como absolutamente convergente, condicionalmente convergente ou divergente.

(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k k!}{e^k}$ **(b)** $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{1+5\sqrt{k}}$ **(c)** $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \sqrt{k}}{1+2\sqrt{k}}$

(d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \operatorname{sen}(5k)}{k^3}$ **(e)** $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k\, 3k}{4k^2+1}$ **(f)** $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k 5k}{(2k+3)!}$

(g) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k k^4}{2^k}$ **(h)** $-\frac{1}{3}+\frac{2}{4}-\frac{3}{5}+\frac{4}{6}-\frac{5}{7}+\ldots$ **(i)** $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\cos(\pi k)}{\ln k}$

(j) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} k \operatorname{sen}\left(\frac{1}{k^2}\right)$ **(k)** $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} k \operatorname{sen}\left(\frac{1}{k^3}\right)$

3. Cada série a seguir satisfaz o teste da série alternada, para cada uma delas determine um valor n tal que a enésima soma parcial aproxima a série com a precisão explicitada.

(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k\sqrt{k}}$, $|\textbf{erro}| \leq 0,001$ **(b)** $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k k}{e^k}$, **três casas decimais**

4. Cada série a seguir satisfaz o teste da série altenada. Com o valor dado de n determine uma cota superior no erro absoluto que resulta se a soma da série for aproximada pela enésima soma parcial.

(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k\sqrt{k}}, n = 8$ **(b)** $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k k}{e^k}, n = 5$

Séries de potências

5. Em cada item abaixo marque com um $\times$ a alternativa correta, em que C, D e I indicam "converge", "diverge" e "inconclusivo", respectivamente.

Suponha que a série de potências $\sum_k a_k(x+2)^k$ convirja quando $x = -4$ e divirja quando $x = -7$. Podemos afirmar que:

(a) A série $\sum_k 6^k a_k$ ( ) C ( ) D ( ) I

(b) A série $\sum_k (-1)^k 4^k a_k$ ( ) C ( ) D ( ) I

(c) A série $\sum_k \left[(-1)^k a_k + \left(\frac{1}{2}\right)^k\right]$ ( ) C ( ) D ( ) I

(d) A série $\sum_k 3^k a_k$ ( ) C ( ) D ( ) I

(e) A série $\sum_k a_k$ ( ) C ( ) D ( ) I

6. Em cada item marque com um **X** a alternativa correta, em que C, D e I indicam "converge", "diverge" e "inconclusivo", respectivamente.

Sabendo que a série de potências $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{4^k}(x+2)^k$ tem raio de convergência 4, podemos afirmar que:

(a) a série $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ ( ) C ( ) D ( ) I

(b) A série $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{2^k}$ ( ) C ( ) D ( ) I

(c) A série $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} 2^k b_k$ ( ) C ( ) D ( ) I

(d) A série $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k b_k$ ( ) C ( ) D ( ) I

7. Suponha que as séries de potências $\sum b_k(x-3)^k$ e $\sum c_k(x-3)^k$ têm raios de convergência $R = 4$ e $R = 6$, respectivamente.

(a) Determine os maiores intervalos abertos nos quais essas séries convergem.

(b) Marque com um $\times$ as alternativas corretas, em que C, D e I indicam "converge", "diverge" e "inconclusivo", respectivamente.

1) Se $x = 7$, a série $\sum b_k(x-3)^k$ ( ) C ( ) D ( ) I

2) Se $x = 7$, a série $\sum c_k(x-3)^k$ ( ) C ( ) D ( ) I

3) Se $x = 4$, a série $\sum (b_k + c_k)(x-3)^k$ ( ) C ( ) D ( ) I

4) Se $7 < x < 9$, a série $\sum (b_k + c_k)(x-3)^k$ ( ) C ( ) D ( ) I

(c) O raio de convergência da série $\sum (b_k + c_k)(x-3)^k$ é

( ) $R = 0$ ( ) $R = \infty$ ( ) $R = 6$ ( ) $R = 4$ ( ) $4 < R < 6$

8. Sabendo que o raio convergência da série de potências $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{3k2^{k+2}}(x-3)^k$ é $R = 2$, determine o intervalo de convergência dessa série

9. Determine o raio de convergência da série de potências $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{4^k k^2}(x-1)^{2k+1}$ e o maior intervalo aberto em que essa série converge.

10. Determine o raio e o intervalo de convergência da série de potências $\sum \frac{(-1)^k}{k\,3^k}\,(x-2)^k$.

11. Obtenha o polinômio de Taylor de ordem 2 da função $f(x) = \frac{1}{x}$ centrado em $x = 2$.

12. Obtenha o polinômio de Taylor de ordem 3 da função $f(x) = \ln x$ centrado em $x = e$.

13. Obtenha o polinômio de Maclaurin de ordem 3 da função $f(x) = \arctan x^2$.

14. Lembre que $\forall x \in \mathbb{R}, \quad e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$.

(a) Obtenha uma série numérica que converge para o número de Euler.

(b) Obtenha a série de Maclaurin da função $f(x) = x^2 e^{-x^2}$, bem como o raio de convergência da série obtida.

(c) Escreva $I = \int_0^1 f(x)dx$ como soma de uma série numérica alternada e verifique que essa série satisfaz as hipóteses do Teste da Série Alternada.

(d) Obtenha a soma parcial da série numérica do item 2, com o menor número de parcelas, que aproxima a integral I com erro menor do que 5×10^{-3}, ou seja, com precisão de 2 casas decimais.

15. Lembre que $\operatorname{sen} x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\; x^{2k+1}$, qualquer que seja x.

(a) Encontre o valor da soma de cada uma das séries numéricas dadas.

1) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k\,\pi^{2k+1}}{2^{2k+1}\,(2k+1)!}$ **2)** $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k\,\pi^{2k}}{4^k\,(2k+1)!}$

3) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k\,\pi^{2k+1}\,2^{2k+1}}{(2k+1)!}$ **4)** $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k\,\pi^{2k+5}}{3^4\,(2k+1)!}$

(b) Obtenha a série de Maclaurin da função $f(x) = x^4 \operatorname{sen}(5x^3)$ e o seu intervalo de convergência.

(c) Obtenha a série de Maclaurin da função $f'(x)$, derivada da função do item **(b)**, e o seu intervalo de convergência.

(d) Encontre a expressão da função cuja série de Maclaurin é $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k\,4^k}{(2k+1)!}\,x^{2k+1}$.

16. Observe que $\frac{1}{(1+x)^2} = \frac{d}{dx}\left(-\frac{1}{1+x}\right)$ e lembre que $\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$, para $-1 < x < 1$.

(a) Obtenha a série de Maclaurin da função $f(x) = \frac{1}{(1+x)^2}$ e o seu intervalo de convergência.

(b) Obtenha a série de Maclaurin da função $g(x) = \dfrac{x^5}{(1+4x^2)^2}$ e o seu intervalo de convergência.

17. Lembre que $\ln(1+x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k$, para $-1 < x \leqslant 1$.

(a) Calcule a soma das seguintes séries numéricas convergentes:

1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ **2)** $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k\ 3^k}$ **3)** $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k\ 3^k}$

(b) Seja $f(x) = x^4 \ln(1+9x^2)$. Obtenha:

1) a série de Maclaurin de $f(x)$, bem como o maior intervalo aberto em que $f(x)$ é representada por essa série.

2) a derivada $f^{(36)}(0)$.

3) a série de Maclaurin de $f'(x)$. Apresente o raio de convergência dessa série.

18. Considere a função $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \int_0^x t \ln\left(\frac{1}{1+2t}\right) dt.$$

(a) Obtenha uma série de potências para a função $g(x) = x \ln\left(\frac{1}{1+2x}\right)$ e determine o seu intervalo de convergência.

(b) Determine uma série de potências para a função $f(x)$ indicando o seu raio de convergência.

(c) Obtenha uma série numérica para a integral definida $\int_0^{1/4} x \ln\left(\frac{1}{1+2x}\right) dx$. Explique como aproximar o valor dessa integral com erro inferior a $0,01$.

19. Considere a função $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{10^k k!} (x-6)^{2k+3}, \ \ \forall x \in \mathbb{R}$.

(a) Obtenha a série de Taylor de $f'(x)$ em torno de $x = 6$, bem como o raio de convergência dessa série.

(b) Calcule o valor das derivadas $f^{(32)}(6)$ e $f^{(41)}(6)$.

20. Considere a função $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{4^{2k}\,(2k+1)} (x-2)^{4k+3}$, com x em $(0, 4)$.

(a) Obtenha o 15º polinômio de Taylor de $f(x)$ em $x = 2$.

(b) Obtenha a derivada $f^{(63)}(2)$ de $f(x)$ em $x = 2$.

(c) Obtenha a série de Taylor da integral indefinida $\displaystyle\int f(x)dx$ de $f(x)$ em $x = 2$.

(d) Obtenha a integral $I = \displaystyle\int_2^3 f(x)dx$ como a soma de uma série numérica alternada convergente.

(e) Escreva todas as parcelas que precisam ser somadas, no mínimo, para aproximar o valor de I do item (d) com erro absoluto menor do que 5×10^{-4}.

Soluções

1. .

(a) V

(b) F

2. .

(a) divergente

(b) condicionalmente convergente

(c) divergente

(d) absolutamente convergente

(e) condicionalmente convergente

(f) absolutamente convergente

(g) absolutamente convergente

(h) divergente

(i) condicionalmente convergente

(j) divergente. Dica: use o teste da comparação no limite com a série harmônica e lembre do limite fundamental da trigonometria $\lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}(x)}{x} = 1$

(k) absolutamente convergente

3. .

(a) n=99

(b) n=9

4. .

(a) 0,037

(b) 0,015

5. .

(a) D

(b) I

(c) C

(d) I

(e) C

6. .

(a) I

(b) C

(c) D

(d) I

7. .

(a) $(-1, 7)$ e $(-3, 9)$, respectivamente

(b) **1)** I **2)** C **3)** C **4)** D

(c) $R = 4$

8. $IC = (1, 5]$

9. $R = 2$, $(-1, 3)$

10. $R = 3$, $IC = (-1, 5]$

11. $p_2(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{2} \frac{(-1)^k}{2^{k+1}}(x-2)^k = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}(x-2) + \frac{1}{8}(x-2)^2$

12. $p_3(x) = 1 + \frac{1}{e}(x-e) - \frac{1}{2!e^2}(x-e)^2 + \frac{2}{3!e^3}(x-e)^3$

13. $p_3(x) = x^2$

14. .

(a) $e = e^1 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots$

(b) $x^2 e^{-x^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} x^{2k+2} \quad \text{para} \quad -\infty < x < +\infty$

(c) $I = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(2k+3)}, \quad \lim_{k\to+\infty} \frac{1}{k!(2k+3)} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{1}{k!(2k+3)}$ é decrescente

(d) $\sum_{k=0}^{3} \frac{(-1)^k}{k!(2k+3)} = \frac{1}{0!3} - \frac{1}{1!5} + \frac{1}{2!7} - \frac{1}{3!9} = \frac{176}{945} \approx 0,186$

15. .

(a) **1)** 1 **2)** $\frac{2}{\pi}$ **3)** 0 **4)** 0

(b) $x^4 \operatorname{sen}(5x^3) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k 5^{2k+1}}{(2k+1)!} x^{6k+7} \quad \text{para} \quad -\infty < x < +\infty$

(c) $f'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k 5^{2k+1}(6k+7)}{(2k+1)!} x^{6k+6} \quad \text{para} \quad -\infty < x < +\infty$

(d) $\frac{\operatorname{sen}(2x)}{2}$

16. .

(a) $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} k x^{k-1}$, e também, $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (k+1) x^k \quad \text{para} \quad -1 < x < 1$

(b) $g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} k\, 4^{k-1} x^{2k+3}$, ou $g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (k+1) 4^k x^{2k+5} \quad \text{para} \quad -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$

17. .

(a) **1)** $\ln 2$ **2)** $\ln(4/3)$ **3)** $\ln(4/3) - 1/3$

(b) **1)** $x^4 \ln(1 + 9x^2) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} 9^k}{k} x^{2k+4} \quad \text{para} \quad -\frac{1}{3} < x < \frac{1}{3}$ **2)** $-\frac{36!\, 9^{16}}{16}$

3) $f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} 9^k (2k+4)}{k} x^{2k+3} \quad \text{para} \quad -\frac{1}{3} < x < \frac{1}{3}$

18. .

(a) $g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k 2^k}{k} x^{k+1}$, e também $g(x) = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} 2^{k-1}}{k-1} x^k \quad \text{para} \quad -\frac{1}{2} < x \le \frac{1}{2}$

(b) $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k 2^k}{k(k+2)} x^{k+2}$, e também $f(x) = \sum_{k=3}^{\infty} \frac{(-1)^k 2^{k-2}}{k(k-2)} x^k \quad \text{para} \quad -\frac{1}{2} \le x \le \frac{1}{2}$,
raio de convergência $= 1/2$

(c) Integral $= f(1/4) = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{16k(k+2)2^k}$. Como a série é alternada, o erro de uma soma parcial s_k pode ser estimada por $\left|f\left(\frac{1}{4}\right) - s_k\right| \leq a_{k+1} = \dfrac{1}{16(k+1)(k+3)2^{k+1}} < 0,01$.

Isto pode ser obtido com $k = 1$, pois $a_2 = 1/512$. Logo $s_1 = \displaystyle\sum_{k=1}^{1} \frac{(-1)^k}{16k(k+2)2^k} = -\frac{1}{96}$ tem um erro de no máximo $1/512 < 0,01$.

19. .

(a) $f'(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k(2k+3)}{10^k\, k!}(x-6)^{2k+2}$ para $-\infty < x < +\infty$, raio de conv. $= +\infty$

(b) $f^{(32)}(6) = 0$ e $f^{(41)}(6) = -\dfrac{41!}{10^{19}\, 19!}$

20. .

(a) $p_3(x) = (x-2)^3 - \dfrac{1}{48}(x-2)^7 + \dfrac{1}{1280}(x-2)^{11} - \dfrac{1}{28672}(x-2)^{15}$

(b) $f^{(63)}(2) = -\dfrac{63!}{4^{30}\, 31}$

(c) $\displaystyle\int f(x)\, dx = C + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{4^{2k+1}\,(2k+1)(k+1)}\,(x-2)^{4k+4}$, onde $C \in \mathbb{R}$ é uma constante.

(d) $I = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{4^{2k+1}\,(2k+1)(k+1)}$

(e) Usando a estimativa do erro para séries alternadas, garantimos que a soma parcial que vai de 0 até 1 é uma aproximação de I com um erro absoluto menor que 5×10^{-4}:

$$\sum_{k=0}^{1} \frac{(-1)^k}{4^{2k+1}\,(2k+1)(k+1)} = \frac{1}{4 \cdot 1 \cdot 1} - \frac{1}{4^3 \cdot 3 \cdot 2} = \frac{95}{384}$$