Cálculo e Geometria Analítica II

Lista 7 - Sequências e Séries Numéricas

Sequências

1. Quais das sequências $\{a_n\}$ convergem e quais divergem? Encontre o limite de cada sequência convergente.

(a) $a_n = 2^n$

(b) $a_n = (-2)^n$

(c) $a_n = (1/2)^n$

(d) $a_n = (-1/2)^n$

(e) $a_n = 2 + (0{,}1)^n$

(f) $a_n = \frac{1-2n}{1+2n}$

(g) $a_n = \frac{2n+1}{1-3\sqrt{n}}$

(h) $a_n = 1 + (-1)^n$

(i) $a_n = \cos(1/n)$

(j) $a_n = \frac{n^8}{2^n}$

(k) $a_n = \frac{\ln n}{n}$

(l) $a_n = \sqrt[n]{1000}$

(m) $a_n = \sqrt[n]{n}$

(n) $a_n = \sqrt[n]{2n}$

(o) $a_n = \sqrt[n]{n^2}$

(p) $a_n = \frac{10^n}{n!}$

(q) $a_n = \cos(2n\pi)$

(r) $a_n = \cos(n\pi)$

(s) $a_n = \cos n$

(t) $a_n = \frac{1}{n}$

2. Determine se a sequência dada é crescente, decrescente ou não monótona. A sequência é limitada?

(a) $a_n = \cos n$

(b) $a_n = \frac{1}{2n+3}$

(c) $a_n = n + \frac{1}{n}$

(d) $\left\{\frac{n!}{2^n}\right\}_{n=1}^{\infty}$

(e) $\left\{\frac{3^n}{1+3^n}\right\}_{n=1}^{\infty}$

(f) $\left\{\frac{\ln(2n+4)}{n+2}\right\}_{n=1}^{\infty}$

(g) $\left\{\frac{n}{4n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$

(h) $\left\{\frac{3^n}{n!}\right\}_{n=2}^{\infty}$

(i) $\{ne^{-n}\}_{n=1}^{\infty}$

3. Se existir, dê exemplo de uma sequência $\{a_n\}$ tal que

(a) $\{a_n\}$ tende a infinito mas $\{a_n\}$ não é monótona.

(b) $\{a_n\}$ é estritamente crescente mas $\lim_{n\to\infty} a_n \neq +\infty$

(c) $\{a_n\}$ é limitada mas não é convergente

(d) $\{a_n\}$ é monótona mas não é convergente

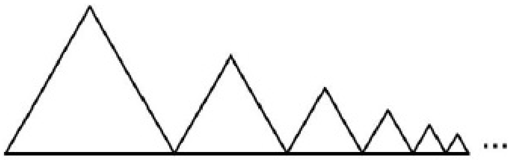
(e) $\{a_n\}$ é convergente mas não é monótona

Séries Numéricas

4. Considere a figura abaixo.

Escreva com notação de somatório a série das frações tosadas do porquinho, descrita na figura ao lado. Explique porque a série converge e apresente a sua soma.

5. A sequência representada na figura abaixo é formada por infinitos triângulos equiláteros. O lado do primeiro triângulo mede 1 e a medida do lado de cada um dos outros triângulos é 2/3 da medida do lado do triângulo imediatamente anterior.



(a) Seja P_k o perímetro do k-ésimo triângulo da sequência, com $k \geq 1$. Obtenha, caso exista, a soma $\sum_{k=1}^{\infty} P_k$ dos perímetros dos triângulos.

(b) Seja h_k é a altura do k-ésimo triângulo, com $k \geq 1$. Lembre que a altura de um triângulo equilátero de lado ℓ é dada por $\frac{\ell\sqrt{3}}{2}$. Obtenha, caso exista, a soma $\sum_{k=1}^{\infty} h_k$ das alturas dos triângulos.

6. Em cada item marque com um **X** a alternativa correta.

(a) A série geométrica $1 - \dfrac{0,4}{3} + \dfrac{0,16}{9} - \dfrac{0,064}{27} + \cdots$

( ) diverge
( ) converge para $\frac{15}{13}$
( ) converge para $\frac{5}{3}$
( ) converge para $\frac{15}{17}$
( ) converge para $\frac{5}{7}$

(b) Seja $b \in \mathbb{R}$. A série geométrica $\sum_{k=0}^{\infty} 7\left(\dfrac{b}{3}\right)^{2k}$ converge se e somente se

( ) $b \in (0,3)$
( ) $b \in [0,3)$
( ) $b \in (-3,3)$
( ) $b \in [-3,3]$
( ) $b \in (-9,9)$
( ) $b \in (0,9)$

(c) A série $\sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^k 2^k + 2}{3^{k+2}}$

( ) diverge
( ) converge para $\frac{1}{9}$
( ) converge para $\frac{-1}{45}$
( ) converge para $\frac{1}{15}$
( ) converge para $\frac{7}{45}$

(d) A série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\, 3^{2n}}{2^{-3n}}$

( ) diverge
( ) converge para -2
( ) converge para $\frac{-1}{71}$
( ) converge para $\frac{2}{5}$
( ) converge para $\frac{1}{73}$

7. Determine todos os valores de $x \in \mathbb{R}$ de modo que a série geométrica

$$\frac{3}{x} - \frac{12}{x^3} + \frac{48}{x^5} - \cdots$$

convirja para $\dfrac{3}{5}$.

8. Para quais valores de $c \in \mathbb{R}$ a série geométrica $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} 2(1+c)^{-k}$ converge para 4?

9. Determine se cada série converge ou diverge. Justifique a sua resposta e apresente a soma de cada série convergente, se houver.

(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k + 2^{3k}}{3^{2k-2}}$ ( ) diverge ( ) converge para .....

(b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{2n}}{6^n}$ ( ) diverge ( ) converge para .....

(c) $-2 + \dfrac{5}{2} - \dfrac{25}{8} + \dfrac{125}{32} - \ldots$ ( ) diverge ( ) converge para .....

10. Determine se a série $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^2}$ converge ou diverge.

11. Você já sabe que $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4}$ converge. Encontre um valor de n que garanta que o erro na aproximação de $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4}$ pela soma parcial $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^4}$ seja menor que $0,001$.

12. Determine se cada série converge ou diverge.

(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^k}{2^k + 50}$

(b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\cos(k)| + 2}{k^2}$

(c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{5^k}{k^4}$

(d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k+1)^2}{(k-1)!}$

(e) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4^k}{k^3 3^k}$

(f) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k^3+k^2+6k}{k^5+5k^2-2k+4}$

(g) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k2^k}$

(h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{n!n!}$

13. Em cada item marque com um **X** a alternativa correta.

(a) A série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{ln(k)}{k}$

( ) diverge pelo Teste da Divergência
( ) diverge pelo Teste da Comparação Direta
( ) converge pelo Teste da Comparação Direta
( ) converge pelo Teste da Razão

(b) A série $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}^2 k}{2k^3}$

( ) diverge pelo Teste da Divergência
( ) converge pelo Teste da Comparação Direta
( ) é uma série p divergente
( ) converge pelo Teste da Integral
( ) diverge pelo Teste da Razão

(c) A série $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k+1}{3k^2-1}$

( ) diverge pelo Teste da Divergência
( ) converge pelo teste da razão
( ) diverge pelo teste da razão
( ) diverge pelo teste da comparação no limite

(d) Sabendo que $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{x^3}\,dx = \frac{1}{2}$, podemos concluir que a série $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3}$

( ) diverge
( ) converge para $\frac{1}{2}$

(   ) converge mas não podemos afirmar qual é o valor da soma

14. Em cada item marque com um $\times$ a alternativa correta, em que V indica verdadeiro e F indica falso.

(a) Se a série $\sum_k a_k$ converge, então $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = 0$.

(   ) V   (   ) F

(b) Seja a série $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ e seja $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$, para $n \geqslant 1$. Se $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = 0$, então a série $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge.

(   ) V   (   ) F

(c) Se $\lim_{k\to+\infty}(k\, u_k) = 2$, então $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ diverge.

(   ) V   (   ) F

(d) Como $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}dx = 1$, a série $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ converge para 1.

(   ) V   (   ) F

15. Sabemos que a série harmônica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots \qquad \text{diverge.}$$

Considere agora uma modificação da série harmônica obtida omitindo-se todos os termos cujo denominador é um número ímpar. Essa série converge ou diverge?

16. (Desafio) Sabemos que a série harmônica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots \qquad \text{diverge.}$$

Considere agora uma modificação da série harmônica obtida omitindo-se todos os termos cujo denominador contenha o dígito 9. Essa série converge ou diverge?

Soluções

1. .

(a) Diverge. $2^n \to +\infty$;

(b) Diverge. $\lim_{n\to\infty}(-2)^n$ não existe

(c) Converge. $(1/2)^n \to 0$

(d) Converge. $(-1/2)^n \to 0$

(e) Converge $2 + (0{,}1)^n \to 2$

(f) Converge $\frac{1-2n}{1+2n} \to -1$

(g) Diverge, $\frac{2n+1}{1-3\sqrt{n}} \to -\infty$

(h) Diverge $\lim_{n\to\infty}(1 + (-1)^n)$ não existe

(i) Converge. $\cos(1/n) \to 1$

(j) Converge. $\frac{n^8}{2^n} \to 0$. Explicação neste link.

(k) Converge. $\frac{\ln n}{n} \to 0$. Explicação aqui.

(l) Converge. $\sqrt[n]{1000} \to 1$

(m) Converge. $\sqrt[n]{n} \to 1$. Explicação aqui.

(n) Converge. $\sqrt[n]{2n} \to 1$

(o) Converge. $\sqrt[n]{n^2} \to 1$

(p) Converge. $\frac{10^n}{n!} \to 0$. Explicação neste link.

(q) Converge. $\cos(2n\pi) \to 1$

(r) Diverge. $\cos(n\pi) = (-1)^n$, fica alternando entre -1 e 1.

(s) Diverge. Explicação neste link.

(t) Converge. $\frac{1}{n} \to 0$

2. .

(a) Não é monótona. É limitada.

(b) É decrescente. É limitada.

(c) É crescente. Não é limitada.

(d) É crescente. Não é limitada.

(e) É crescente. É limitada

(f) É decrescente. É limitada.

(g) É crescente. É limitada.

(h) É decrescente. É limitada.

(i) É decrescente. É limitada.

3. .

(a) $a_n = (-1)^n + n$, por exemplo.

(b) $a_n = \frac{n}{n+1}$, por exemplo.

(c) $a_n = (-1)^n$, por exemplo.

(d) $a_n = n$, por exemplo.

(e) $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$, por exemplo.

4. A série das frações tosadas é $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n}$. Esta série é geométrica com razão $r = 1/2$. Logo $|r| < 1$ e, portanto, a série converge. A soma é 1, pois pela fórmula da soma de uma série geométrica, a soma é $\frac{1/2}{1-1/2} = 1$.

5. .

(a) Série geométrica de razão $2/3 < 1$ e primeiro termo 3: converge para 9.

(b) Série geométrica de razão $2/3 < 1$ e primeiro termo $\sqrt{3}/2$: converge para $3\sqrt{3}/2$.

6. .

(a) Converge para $\frac{15}{17}$.

(b) $b \in (-3, 3)$

(c) Converge para $\frac{1}{15}$.

(d) Diverge.

7. $x = 4$

8. $c = 1/2$

9. (a) converge para $\frac{711}{10}$

(b) diverge

(c) diverge

10. A série converge pelo teste da integral. Veja neste link um exemplo bem parecido.

11. Considerar apenas 7 termos já é suficiente, conforme o argumento geométrico apresentado no vídeo deste link. Euler descobriu que o valor exato dessa série é

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

12. (a) diverge

(b) converge

(c) diverge

(d) converge

(e) diverge

(f) converge

(g) converge

(h) diverge

13. (a) diverge pelo Teste da Comparação Direta

(b) converge pelo Teste da Comparação Direta

(c) diverge pelo teste da comparação no limite

(d) converge mas não podemos afirmar qual é o valor da soma

14. (a) V

(b) V

(c) V

(d) F

15. A série proposta é

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}.$$

Essa série é divergente. De fato, se $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$ fosse convergente a igualdade $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ implicaria que a séria harmônica também é convergente, o que seria um absurdo.

16. A série proposta é

$$S = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{8} + \frac{1}{10} + \cdots + \frac{1}{18} + \frac{1}{20} + \cdots$$

Vamos mostrar que essa série converge e o seu valor é menor que 80.

Considere a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ onde a_n é a soma dos termos em S cujo denominador tem n algarismos.

$$\begin{aligned} a_1 &= 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{8} \\ a_2 &= \frac{1}{10} + \cdots + \frac{1}{18} + \frac{1}{20} + \cdots + \frac{1}{88} \\ &\vdots \end{aligned}$$

Temos então que $S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

(Essa última igualdade é válida porque todos os temos de S são positivos.)

Cada parcela que forma a_1 é ≤ 1; Cada parcela que forma a_2 é $\leq \frac{1}{10}$;

Em geral, cada parcela que forma a_n é $\leq \frac{1}{10^{n-1}}$.

Agora vamos contar o número de parcelas em cada a_n. A quantidade de números naturais com n algarismos todos diferentes de 9 é $8 \cdot 9^{n-1}$, pois o primeiro dígito pode ser qualquer de 1 a 8 e os demais dígitos podem ser quaisquer de 0 a 8. Portanto, o número de parcelas que forma a_n é $8 \cdot 9^{n-1}$.

Portanto temos que

$$S \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8 \cdot 9^{n-1}}{10^{n-1}} = 8 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{9}{10}\right)^{n-1} = 80.$$