Conteúdo

1 Trajeto Euleriano

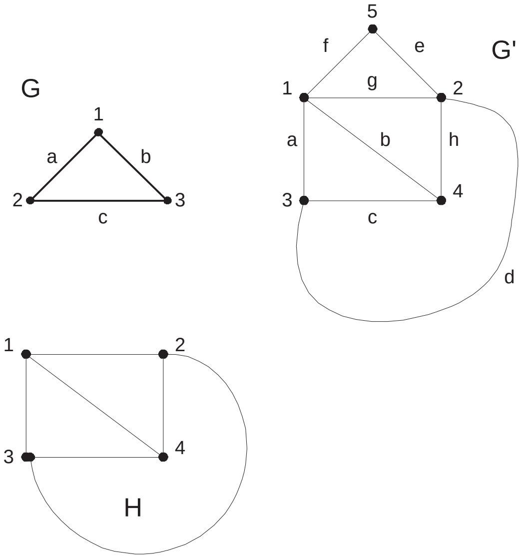
Trajeto Euleriano

Um trajeto Euleriano em um grafo G é um trajeto que utiliza todas as arestas do grafo.

Definição

Um grafo G é Euleriano se e somente se possui um trajeto Euleriano.

Qual grafos são Eulerianos?



Trajeto Euleriano

O grafo H não contém um trajeto Euleriano. Informalmente, isto quer dizer que não é possível desenhar H sem tirar o lápis do papel e sem passar duas vezes pela mesma aresta.

Como determinar se um grafo é Euleriano?

Este tipo de problema ocorre na seguinte situação:

Exemplo

(Problema do Carteiro Chinês) Um carteiro tem que percorrer uma série de ruas para entregar correspondências. Qual a rota mais curta que o carteiro pode utilizar?

Podemos modelar este problema utilizando um grafo, onde cada rua corresponde a uma aresta e cada encontro de duas arestas a um vértice. Note que se existir um trajeto Euleriano, este corresponderá a rota mais curta, já que todas as ruas serão percorridas exatamente uma vez.

Trajeto Euleriano

Vamos tentar entender que propriedades G **precisa ter** para ser Euleriano.

Lema

Seja G um grafo Euleriano.
Se G possui um vértice v com grau ímpar, então ou o trajeto Euleriano termina em v ou começa em v.

Prova: Existem dois casos:

– O trajeto começa em v. OK !!!

– O trajeto não começa em v. Logo, toda vez que chegamos em v por uma aresta, devemos sair por outra diferente, o que consome 2 unidades do grau. Como, o grau de v é ímpar e um trajeto Euleriano passa por todas as arestas com extremidade em v, devemos terminar em v.

Trajeto Euleriano

A seguinte propriedade pode então ser obtida:

Lema

Se um grafo G possui um trajeto Euleriano, então o número de vértices com grau ímpar em G é 0 ou 2.

Trajeto Euleriano

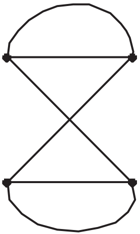
Prova: Pelo lema anterior, G pode possuir no máximo 2 vértices com grau ímpar, caso contrário existiria um vértice de grau ímpar que não começa nem termina o trajeto Euleriano. Como todo grafo possui um número par de vértices com grau ímpar, logo G possui 0 ou 2 vértices com grau ímpar.

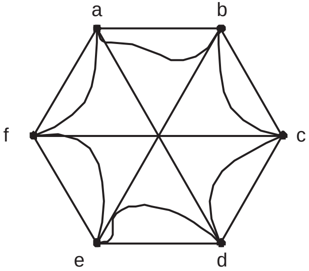
Trajeto Euleriano

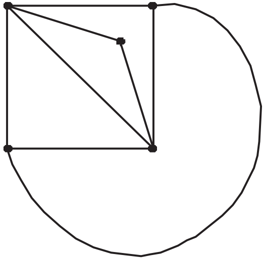
Exemplo

Podemos utilizar o lema anterior para mostrar que o grafo H precedente não é de fato Euleriano. Com efeito, H tem 4 vértices com grau ímpar. Como todo grafo Euleriano tem 0 ou 2 vértices com grau ímpar, segue que H não é Euleriano.

Qual grafos são Eulerianos?







Trajeto Euleriano

Nos temos uma condição necessária para um grafo ser Euleriano. A partir desta condição, podemos provar que certos grafos não são Eulerianos, mas como podemos garantir que um grafo é Euleriano?

Trajeto Euleriano

Vamos provar que se um grafo G tem 0 ou 2 vértices de grau ímpar, então ele é Euleriano. Para começar precisamos de um resultado auxiliar:

Lema

Todo grafo conexo não trivial com 0 vértices de grau ímpar possui um ciclo.

(um grafo $G = (V, E)$ é trivial se e somente se $|V| = 1$ e $E = \emptyset$)

Prova:

– Se G só possui um vértice então G consiste em um conjunto de laços, caso contrário G seria trivial.

– Vamos assumir então que G possui pelo menos dois vértices. Seja $P = v_0 e_0 v_1 e_1, \ldots, e_{k-1} v_k$ o caminho mais longo entre dois vértices de G. Como todo vértice de G tem grau par, então v_k é extremidade de alguma aresta e diferente de e_{k-1}. Além disso, a outra extremidade de e tem que ser um vértice v_i, com $i \in \{0, 1, \ldots, k\}$, caso contrário teríamos um caminho maior que P. Portanto, $v_i e_i v_{i+1} e_{i+1} \ldots e_{k-1} v_k e v_i$ é um ciclo.

Trajeto Euleriano

Lema

Seja G um grafo conexo com 0 vértices de grau ímpar. Então, G contém um trajeto Euleriano fechado.

Trajeto Euleriano

Prova: Utilizamos indução no número de arestas de G.

Base: G tem somente uma aresta. Como G é conexo e não tem vértices de grau ímpar, então G consiste em um vértice v com um laço e. Portanto vev é um trajeto Euleriano fechado em G.

Hipótese Indutiva: Todo grafo conexo, sem vértices de grau ímpar, e com no máximo k arestas tem um trajeto Euleriano fechado.

Passo Indutivo: Como G tem 0 vértices de grau ímpar, segue do Lema 3 que G possui um ciclo C. Seja $G' = (V', E')$ o grafo obtido a partir de G removendo todas as arestas de C. Observe que $V' = V$ e $E' = E - \{$ arestas em $C\}$. Seja v um vértice de V e sejam $d_G(v)$ e $d_{G'}(v)$, os graus de v em G e G', respectivamente. Se v está no ciclo C, então $d'_G(v) = d_G - 2$. Caso contrário, $d'_G(v) = d_G(v)$.
Então, todo vértice de G' tem grau par.

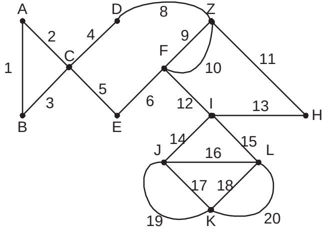
Trajeto Euleriano

Sejam $G'_1, \ldots, G'_l$ as componentes conexas de G' que tem pelo menos uma aresta.

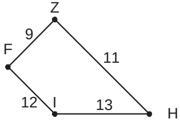
Temos que

a) O numero de arestas de G'_i é menor ou igual a k, para $i = 1, \ldots, l$
b) Todo vértice de G'_i tem grau par, para $i = 1, \ldots, l$.

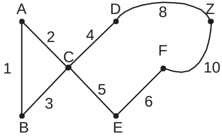
Segue da hipótese indutiva que G'_i, $i = 1, \ldots, l$, tem um trajeto Euleriano fechado. Seja T_i o trajeto de G'_i. Para obter um trajeto Euleriano para G percorremos o ciclo C. Cada vez que visitarmos um vértice v de C que pertence a uma componente G'_i cujo trajeto T_i ainda não foi percorrido, interrompemos momentaneamente a nossa caminhada por C para percorremos o trajeto T_i (obtido pela hipótese). Após, continuamos a percorrer o ciclo C a partir de v. Este processo é encerrado quando todas as arestas de C tiverem sido visitadas.



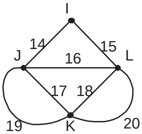
Grafo G



Ciclo C



Componente G'_1



Componente G'_2

Trajeto Euleriano

O Lema garante que se um grafo conexo tem 0 vértices de grau ímpar então ele é Euleriano. E se um grafo tem dois vértice de grau ímpar, o que acontece? O próximo Lema resolve esta questão:

Lema

Seja G um grafo conexo com 2 vértices de grau ímpar, u e v. Então, G contém um trajeto Euleriano que começa em u e termina em v.

Prova: Seja $G = (V, E)$ e seja G' o grafo obtido a partir de T adicionando uma aresta e' que une u a v, os dois vértices de grau ímpar em G. (Isto pode ser feito independentemente se já existe uma aresta ligando u a v em G ou não.)

G' é conexo e todos os vértices de G' tem grau par, já que os únicos dois que tinham grau ímpar em G ganharam uma unidade a mais em G'. Portanto, os resultados anteriores garante que G' tem um trajeto Euleriano fechado T.

Retirando a aresta e' de T, obtemos um trajeto Euleriano para G que começa em u e termina em v.

Trajeto Euleriano

Os Lemas anteriores implicam no seguinte teorema, que constitui o resultado principal desta seção:

Theorem

Um grafo conexo G é Euleriano se e somente se possui 0 ou 2 vértices de grau ímpar.
Se G tem 0 vértices com grau ímpar, então G possui um trajeto Euleriano fechado. Por outro lado, se G tem 2 vértices com grau ímpar, u e v, então ele contém um trajeto Euleriano que começa em u e termina em v.