CONCEITOS BÁSICOS EM GRAFOS

- Um **grafo (simples)** G é formado por um conjunto de **vértices**, denotado por $V(G)$, e um conjunto de **arestas**, denotado por $E(G)$.

- Cada aresta é um par (não ordenado) de vértices distintos.

- Se xy é uma aresta, então os vértices x e y são os **extremos** desta aresta. Dizemos também que x e y estão **conectados**, ou que são **adjacentes** ou **vizinhos**.

CONCEITOS BÁSICOS EM GRAFOS

- A **ordem** de um grafo é G é o número de vértices de G.
- Notação: $n = |V(G)|$ e $m = |E(G)|$
- O **tamanho** de um grafo G é a soma $n + m$
- Grafo **trivial**: é aquele com um único vértice ($n = 1$)
- Grafo **nulo**: é aquele com $V(G) = \emptyset$ (isto é, $n = 0$)

CONCEITOS BÁSICOS EM GRAFOS

- Um **multigrafo** é uma generalização do conceito de grafo simples. Em um multigrafo podem existir:

- ***arestas paralelas:*** são arestas que conectam os mesmos vértices.

- ***laços:*** um laço é uma aresta com extremos idênticos.

CONCEITOS BÁSICOS EM GRAFOS

- Inicialmente, estudaremos os grafos não direcionados. Um grafo é uma tripla ordenada (V(G);E(G); ψG); onde

  V(G) é um conjunto não vazio de vértices.

  E(G) é um conjunto de arestas (possivelmente vazio)

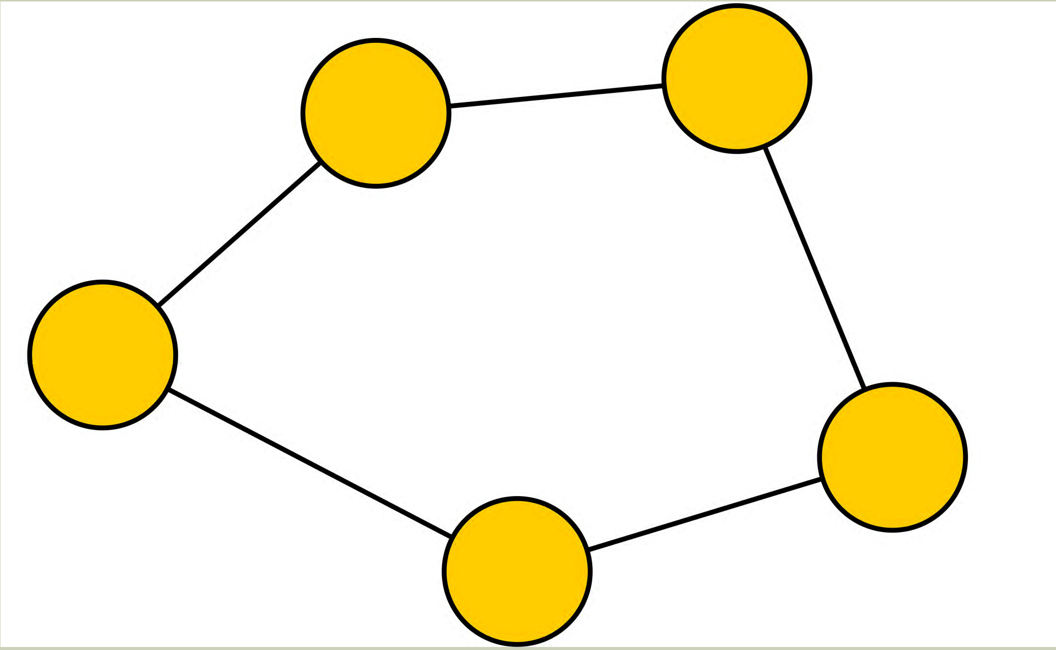
  ψG é uma função que associa cada aresta de G a um par não ordenado de vértices de G

  Representação do grafo (V(G);E(G); ψG); onde
  V(G) = {a, b, c, d}, E(G) = {e1; e2; e3; e4; e5; e6} e ψG(e1) = ab,
  ψG(e2) = ab, ψG(e3) = bb, ψG(e4) = bc, ψG(e5) = ac, ψG(e6) = cd,

- O mesmo grafo pode ter várias representações geométricas

CONCEITOS BÁSICOS EM GRAFOS

- Representação Gráfica



CONCEITOS BÁSICOS EM GRAFOS

- A **vizinhança aberta** de um vértice v é o conjunto de seus vizinhos. Notação: $N(v)$ = vizinhança aberta de v.

- A **vizinhança fechada** de um vértice é definida como:

$$N[v] = N(v) \cup \{v\}.$$

CONCEITOS BÁSICOS EM GRAFOS

- O **grau** de um vértice é o número de vezes em que ele ocorre como extremo de uma aresta. (Esta definição serve para grafos e multigrafos.)

- Em um grafo simples, o grau de vértice é igual ao número de vizinhos que ele possui.

- Notação: $d(v)$ = grau do vértice v

- Em um grafo simples, é claro que $d(v) = |N(v)|$.

CONCEITOS BÁSICOS EM GRAFOS

- Um grafo é **regular** quando todos os seus vértices têm o mesmo grau.

- Um grafo é ***k*-regular** quando todos os seus vértices têm grau igual a *k*.

CONCEITOS BÁSICOS EM GRAFOS

- O **grau máximo** de um grafo G é definido como:

$$\Delta(G) = \max \{ d(v) \mid v \in V(G) \}.$$

- O **grau mínimo** de um grafo G é definido como:

$$\delta(G) = \min \{ d(v) \mid v \in V(G) \}.$$

CONCEITOS BÁSICOS EM GRAFOS

- Dado um grafo G, a **sequência de graus** de G é a sequência

$$(d_1 , d_2 , \ldots , d_{n-1} , d_n)$$

onde:

- $d_1 \leq d_2 \leq \ldots \leq d_{n-1} \leq d_n$
- $V(G) = \{ v_1 , v_2 , \ldots , v_{n-1} , v_n \}$
- d_j é o grau do vértice v_j , para $j = 1, 2, \ldots, n$

CONCEITOS BÁSICOS EM GRAFOS

- Um vértice é **isolado** quando tem grau zero (não possui vizinhos).

- Um vértice v é **universal** quando está conectado por arestas a todos os demais vértices, isto é:

$$N(v) = V(G) \setminus \{v\}.$$

- Se v é um vértice universal então $d(v) = n - 1$.

CONCEITOS BÁSICOS EM GRAFOS

- O **complemento** de um grafo G é o grafo $\bar{G}$ tal que

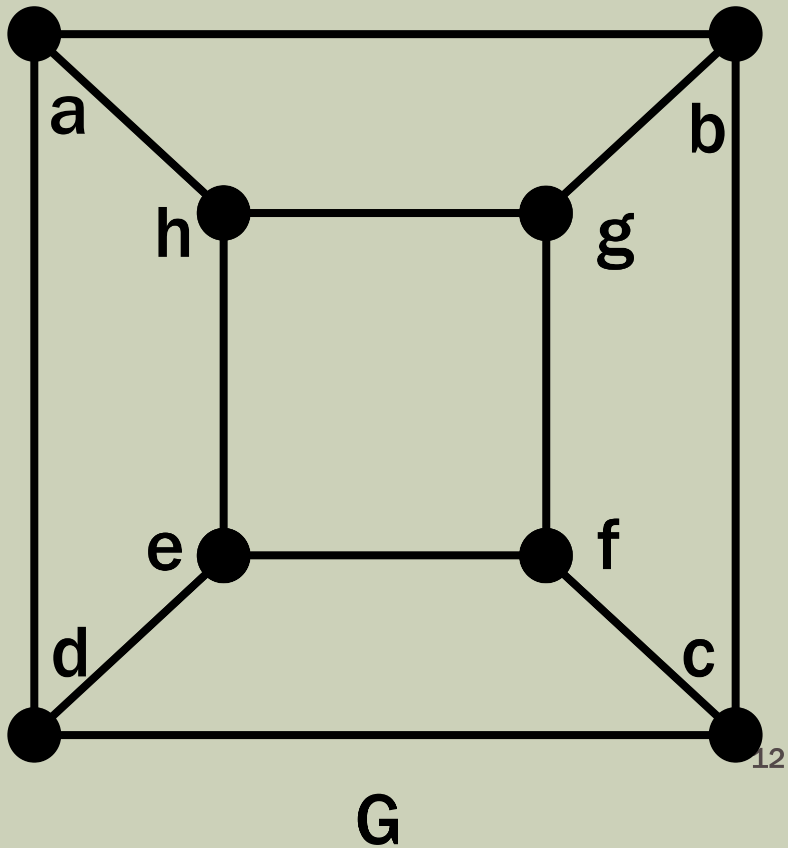
$$V(\bar{G}) = V(G)$$

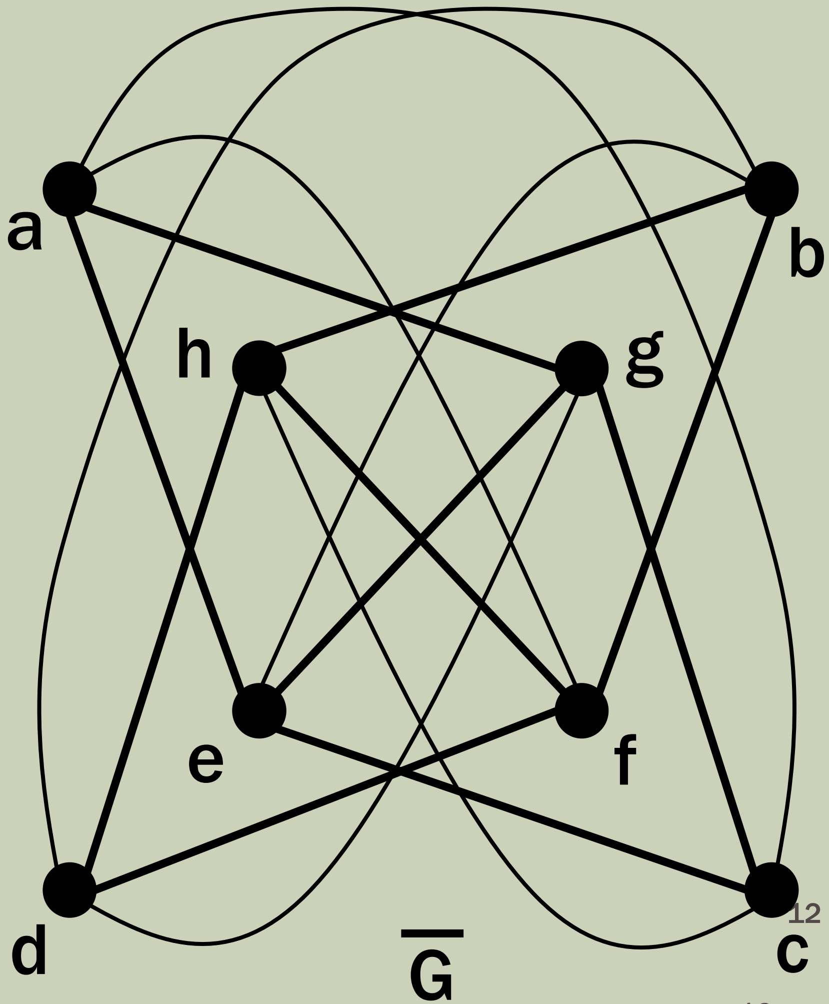
e

$$E(\bar{G}) = \{\ xy \mid xy \notin E(G)\ \}.$$

CONCEITOS BÁSICOS EM GRAFOS

- **Complemento** de um grafo *G*





CONCEITOS BÁSICOS EM GRAFOS

- Um **subgrafo** de um grafo G é um grafo H tal que $V(H) \subseteq V(G)$ e $E(H) \subseteq E(G)$.

- H é um **subgrafo próprio** de G quando H é um subgrafo de G que não é o próprio G.

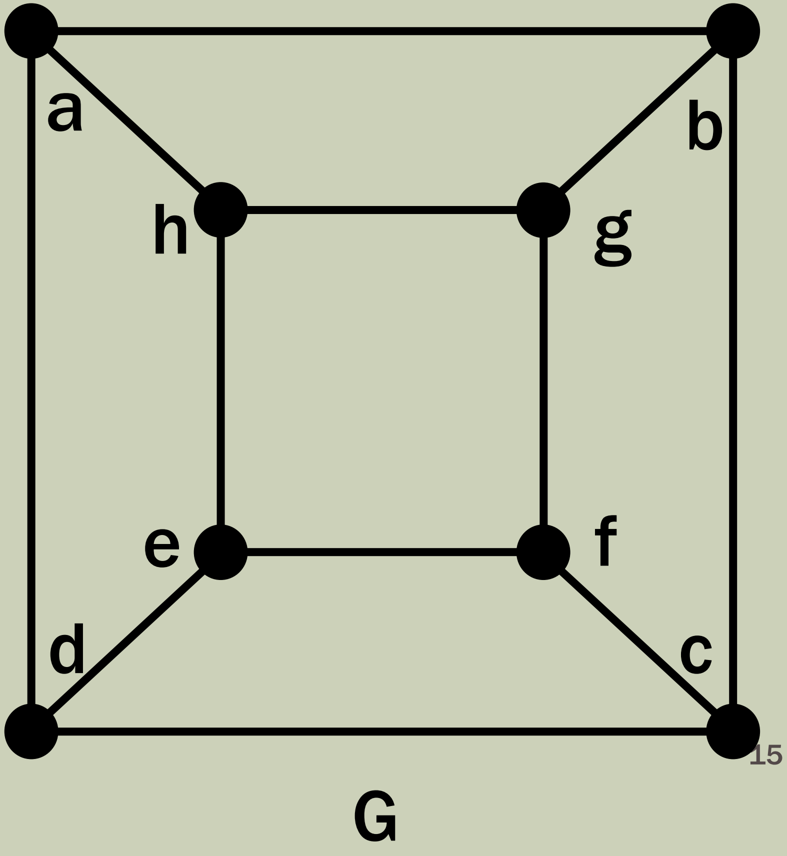
CONCEITOS BÁSICOS EM GRAFOS

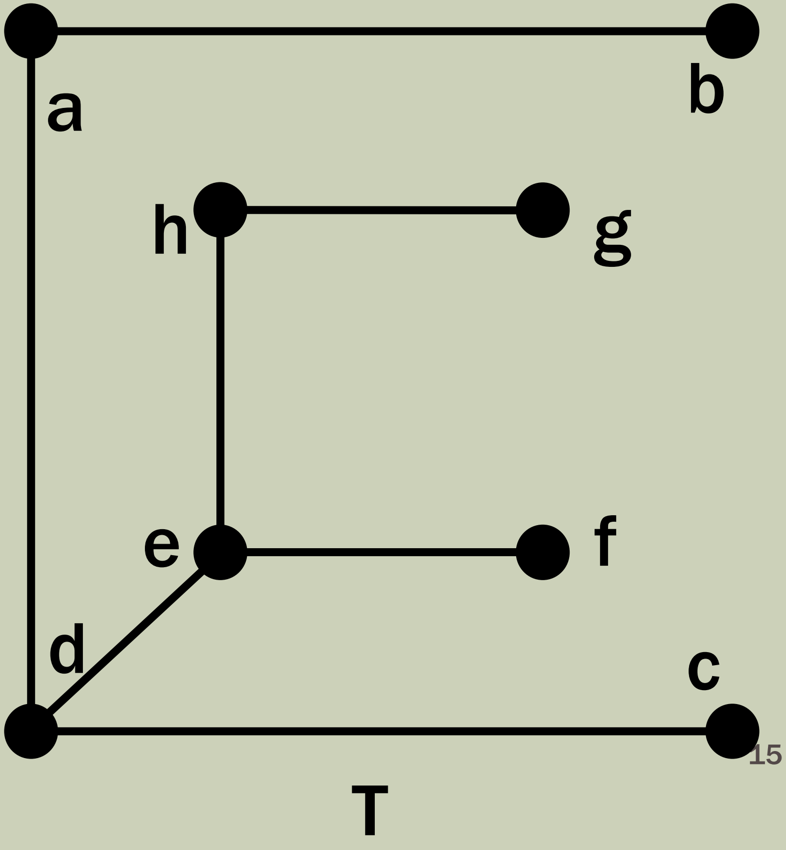
- Um **subgrafo gerador** (“spanning subgraph”) de G é um subgrafo H de G tal que $V(H) = V(G)$.

- Em outras palavras, H tem os mesmos vértices de G, mas nem todas as arestas de G.

CONCEITOS BÁSICOS EM GRAFOS

- Subgrafo gerador: um exemplo ("árvore geradora")





CONCEITOS BÁSICOS EM GRAFOS

- Seja H um subgrafo de G.
- H é um **subgrafo induzido por um conjunto de vértices X** se $V(H) = X$ e vale a seguinte propriedade:

$$\text{se } xy \in E(G) \ \text{ e } \ x,y \in X \ \text{ então } \ xy \in E(H).$$

- Notação: $H = G[X]$

CONCEITOS BÁSICOS EM GRAFOS

- Seja H um subgrafo de G.

- H é um **subgrafo induzido por um conjunto de arestas E'** se vale a seguinte propriedade:

$$E(H) = E'$$

e

$$V(H) = \{ x \mid x \text{ é extremo de alguma aresta de } E' \}.$$

- Notação: $H = G[E']$

CONCEITOS BÁSICOS EM GRAFOS

- Definição: Se S é um subconjunto de vértices de G, então

$$G - S = G[V(G) \setminus S].$$

- Notação: Se v é um vértice de G então $G - v = G - \{v\}$.

- Definição: Se E' é um subconjunto de arestas de G, então o grafo $G - E'$ é definido da seguinte forma:
  - $V(G - E') = V(G)$
  - $E(G - E') = E(G) \setminus E'$

- Notação: Se e é uma aresta de G então $G - e = G - \{e\}$.

CONCEITOS BÁSICOS EM GRAFOS

- Dado um grafo G, uma propriedade é **hereditária** por subgrafos [induzidos] se, quando ela vale para G, vale também para todos os subgrafos [induzidos] de G.

CONCEITOS BÁSICOS EM GRAFOS

- Dado um grafo G, uma propriedade é **hereditária** por subgrafos [induzidos] se, quando ela vale para G, vale também para todos os subgrafos [induzidos] de G.

- **Exemplo 1:** se o grafo G não contém triângulos, então *"ser livre de triângulos"* é uma propriedade hereditária por subgrafos e por subgrafos induzidos.

CONCEITOS BÁSICOS EM GRAFOS

- Dado um grafo *G*, uma propriedade é **hereditária** por subgrafos [induzidos] se, quando ela vale para *G*, vale também para todos os subgrafos [induzidos] de *G*.

- **Exemplo 1:** se o grafo *G* não contém triângulos, então *"ser livre de triângulos"* é uma propriedade hereditária por subgrafos e por subgrafos induzidos.

Se P é uma propriedade hereditária por subgrafos
então
P é hereditária por subgrafos induzidos

CONCEITOS BÁSICOS EM GRAFOS

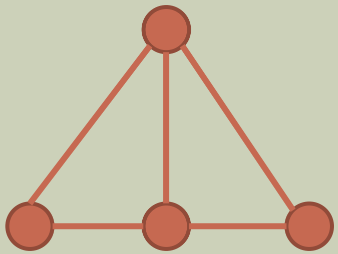
- Dado um grafo G, uma propriedade é **hereditária** por subgrafos [induzidos] se, quando ela vale para G, vale também para todos os subgrafos [induzidos] de G.

- **Exemplo 2:** se o grafo G possui um vértice universal, então *"possuir um vértice universal"* **não é** uma propriedade hereditária por subgrafos, nem por subgrafos induzidos.

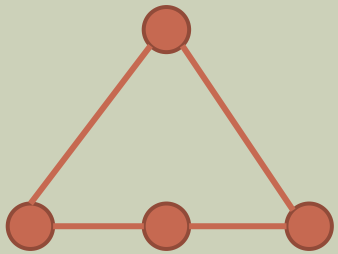
CONCEITOS BÁSICOS EM GRAFOS

- Dado um grafo *G*, uma propriedade é **hereditária** por subgrafos [induzidos] se, quando ela vale para *G*, vale também para todos os subgrafos [induzidos] de *G*.

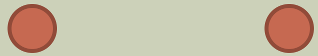
- **Exemplo 2:** se o grafo *G* possui um vértice universal, então *"possuir um vértice universal"* **não é** uma propriedade hereditária por subgrafos, nem por subgrafos induzidos.



G



subgrafo não induzido de G



subgrafo induzido de G

CONCEITOS BÁSICOS EM GRAFOS

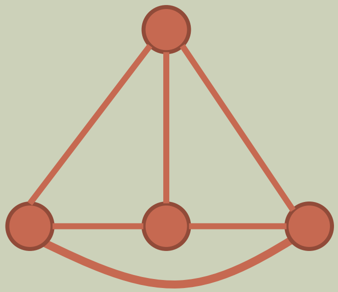
- Dado um grafo G, uma propriedade é **hereditária** por subgrafos [induzidos] se, quando ela vale para G, vale também para todos os subgrafos [induzidos] de G.

- **Exemplo 3:** se o grafo G é completo (isto é, quaisquer dois vértices de G são vizinhos), então *"ser completo"* **não é** uma propriedade hereditária por subgrafos, mas **é** uma propriedade hereditária por subgrafos induzidos.

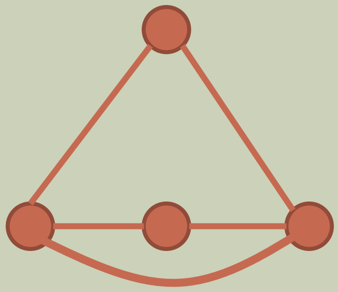
CONCEITOS BÁSICOS EM GRAFOS

- Dado um grafo *G*, uma propriedade é **hereditária** por subgrafos [induzidos] se, quando ela vale para *G*, vale também para todos os subgrafos [induzidos] de *G*.

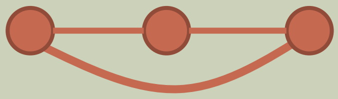
- **Exemplo 3:** se o grafo *G* é completo (isto é, quaisquer dois vértices de G são vizinhos), então *"ser completo"* **não é** uma propriedade hereditária por subgrafos, mas **é** uma propriedade hereditária por subgrafos induzidos.



G



subgrafo não induzido de G



subgrafo induzido de G

CONCEITOS BÁSICOS EM GRAFOS

- Dois grafos G e H são **disjuntos em vértices** se
$$V(G) \cap V(H) = \emptyset.$$
- Dois grafos G e H são **disjuntos em arestas** se
$$E(G) \cap E(H) = \emptyset.$$
- Se G e H são disjuntos em vértices, então é claro que são também disjuntos em arestas.
- Porém, G e H podem ser disjuntos em arestas tendo alguns vértices em comum.

CONCEITOS BÁSICOS EM GRAFOS

- A **união** de dois grafos G e H é o grafo $G \cup H$ tal que:

$$V(G \cup H) = V(G) \cup V(H)$$
$$E(G \cup H) = E(G) \cup E(H)$$

- A **interseção** de dois grafos G e H é o grafo $G \cap H$ tal que:

$$V(G \cap H) = V(G) \cap V(H)$$
$$E(G \cap H) = E(G) \cap E(H)$$

CONCEITOS BÁSICOS EM GRAFOS

- Teorema do Aperto de Mãos:

Em qualquer grafo simples G, vale que

$$2m = \sum_{v \in V(G)} d(v)$$

CONCEITOS BÁSICOS EM GRAFOS

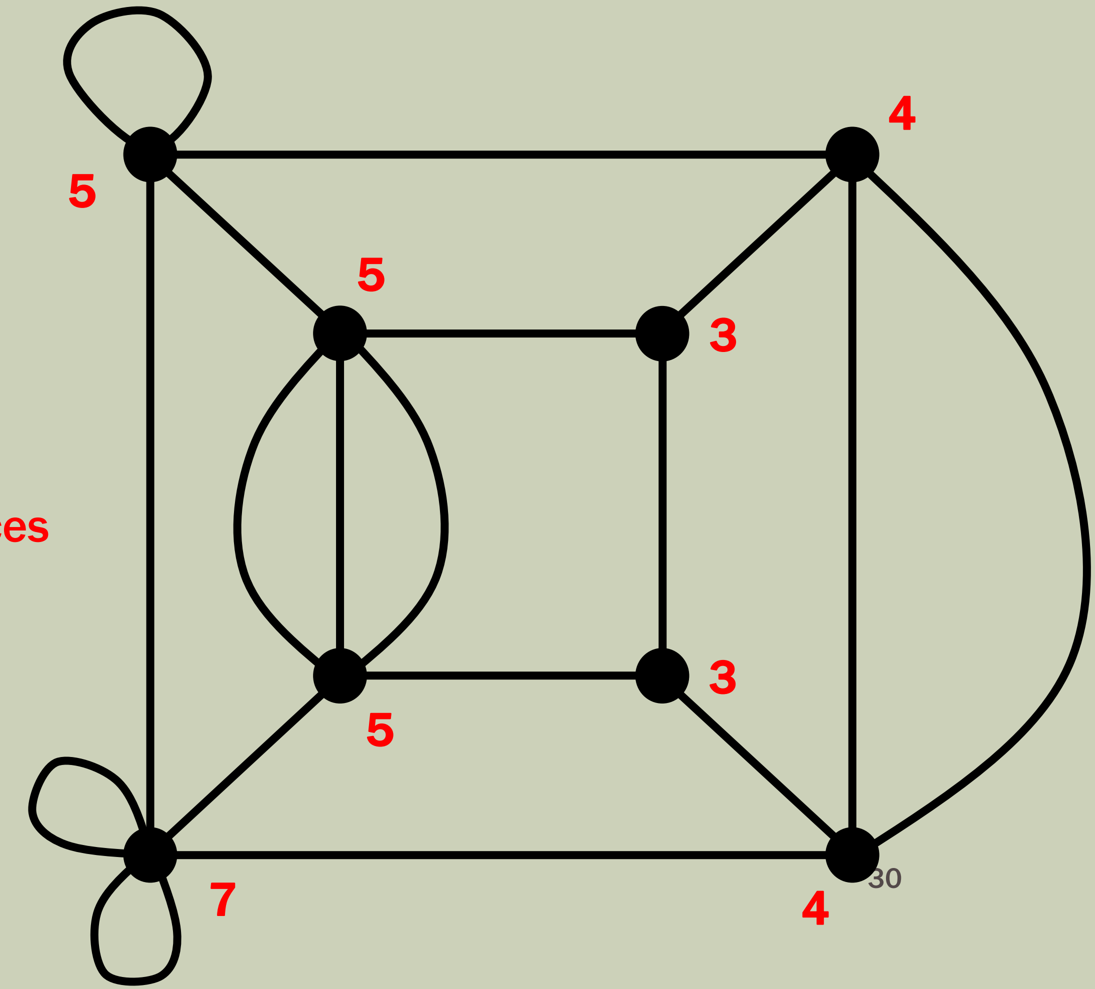
- O Teorema do Aperto de Mãos vale também para multigrafos.

  Em qualquer multigrafo *G*, vale que

$$2m = \sum_{v \in V(G)} d(v)$$

CONCEITOS BÁSICOS EM GRAFOS

graus dos vértices
em vermelho



CONCEITOS BÁSICOS EM GRAFOS

- Teorema do Aperto de Mãos

Em qualquer grafo/multigrafo G, vale que:

$$2m = \sum_{v \in V(G)} d(v)$$

- ***Corolário:***

"Em qualquer grafo/multigrafo, a quantidade de vértices de grau ímpar é par."

CONCEITOS BÁSICOS EM GRAFOS

- Dois grafos G e H são isomorfos se existe uma bijeção

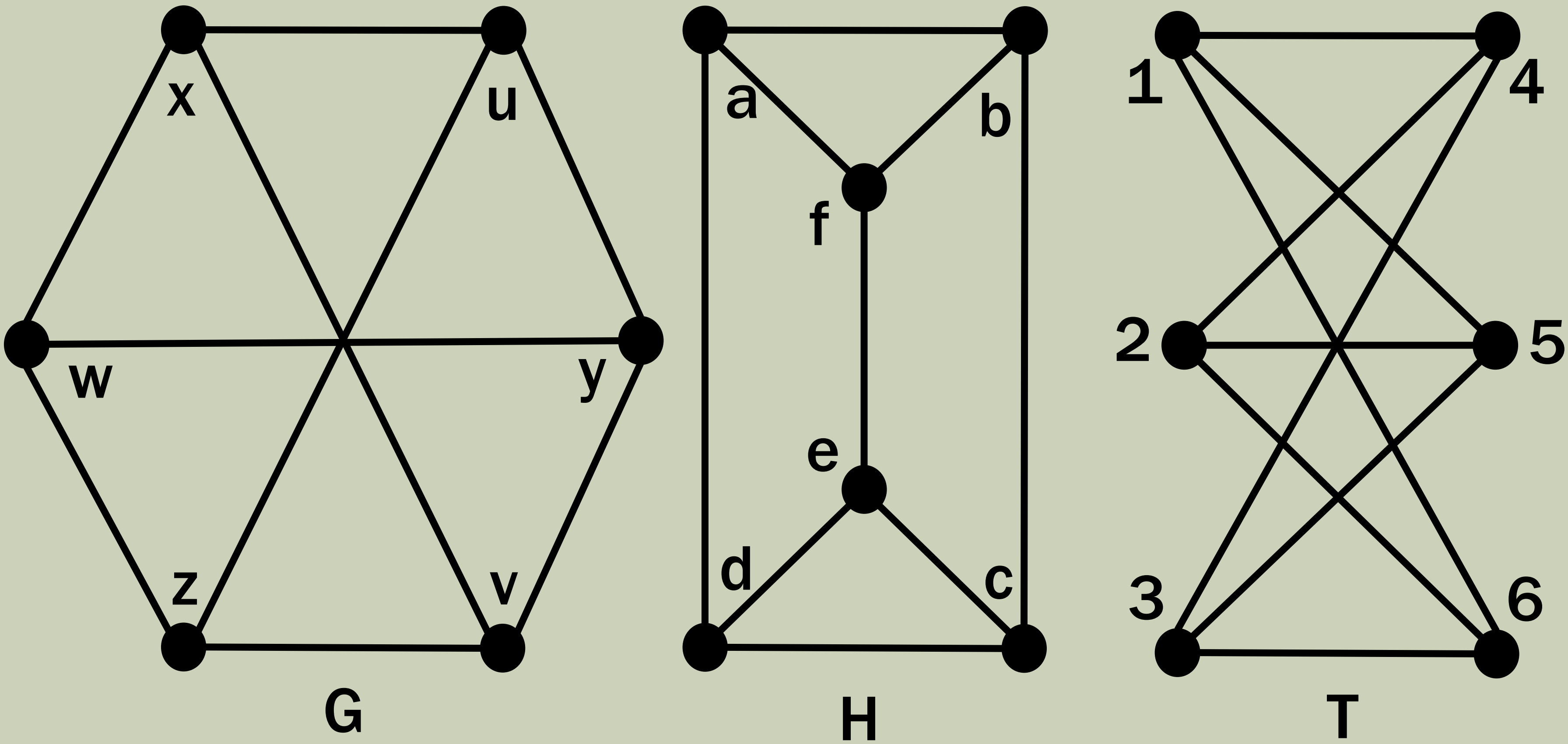
$$f\colon V(G) \to V(H)$$

  tal que

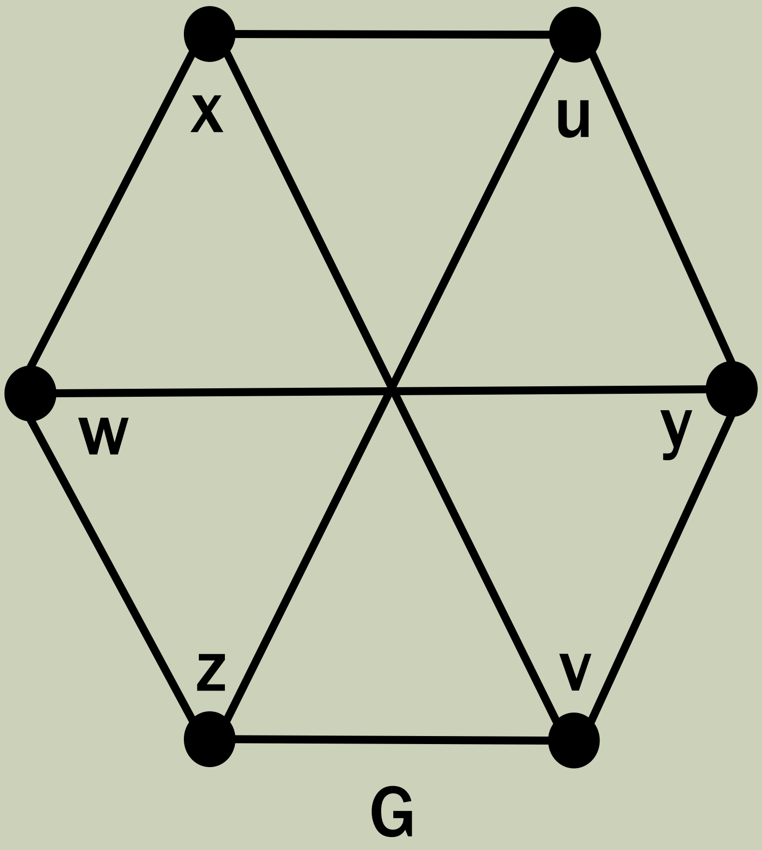
$$xy \in E(G) \quad \text{se e somente se} \quad f(x)f(y) \in E(H).$$

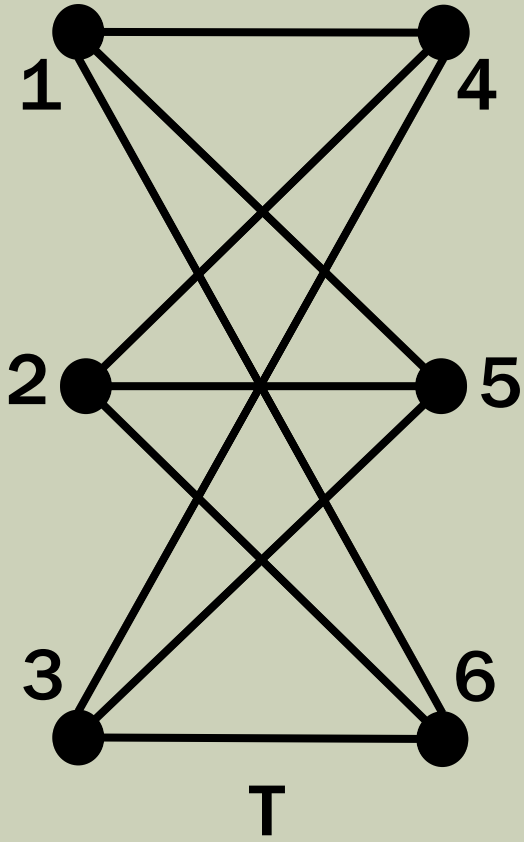
- Em outras palavras, G e H são o “mesmo” grafo, a menos de rotulações diferentes para os vértices.

CONCEITOS BÁSICOS EM GRAFOS

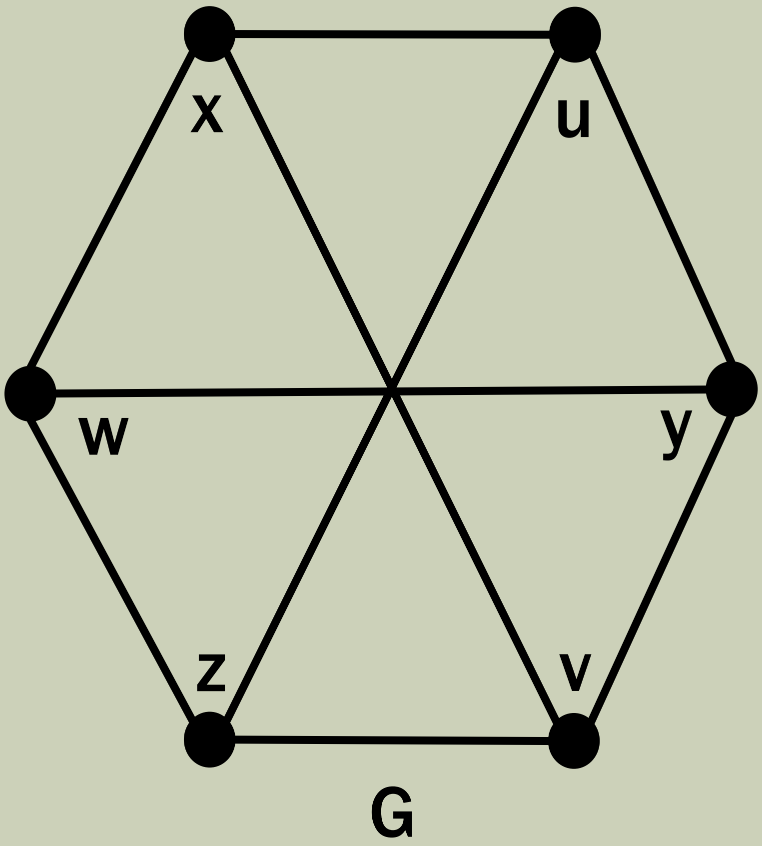


CONCEITOS BÁSICOS EM GRAFOS





CONCEITOS BÁSICOS EM GRAFOS



x <-> 1

y <-> 2

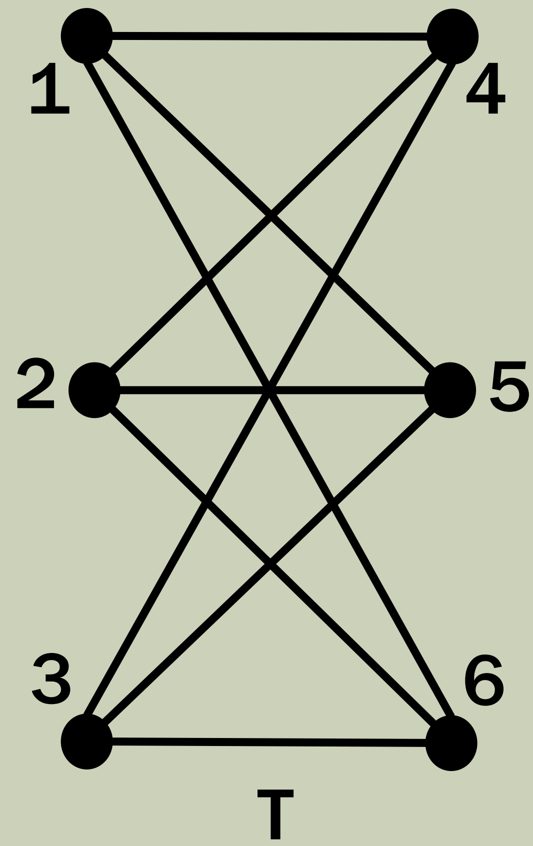
z <-> 3

u <-> 4

v <-> 5

w <-> 6

isomorfos!



CONCEITOS BÁSICOS EM GRAFOS

- Um grafo G é um grafo completo se quaisquer dois vértices de G são vizinhos.

- O número de arestas de um grafo completo é $n(n-1)/2$.

- Notação: K_n = grafo completo com n vértices

CONCEITOS BÁSICOS EM GRAFOS

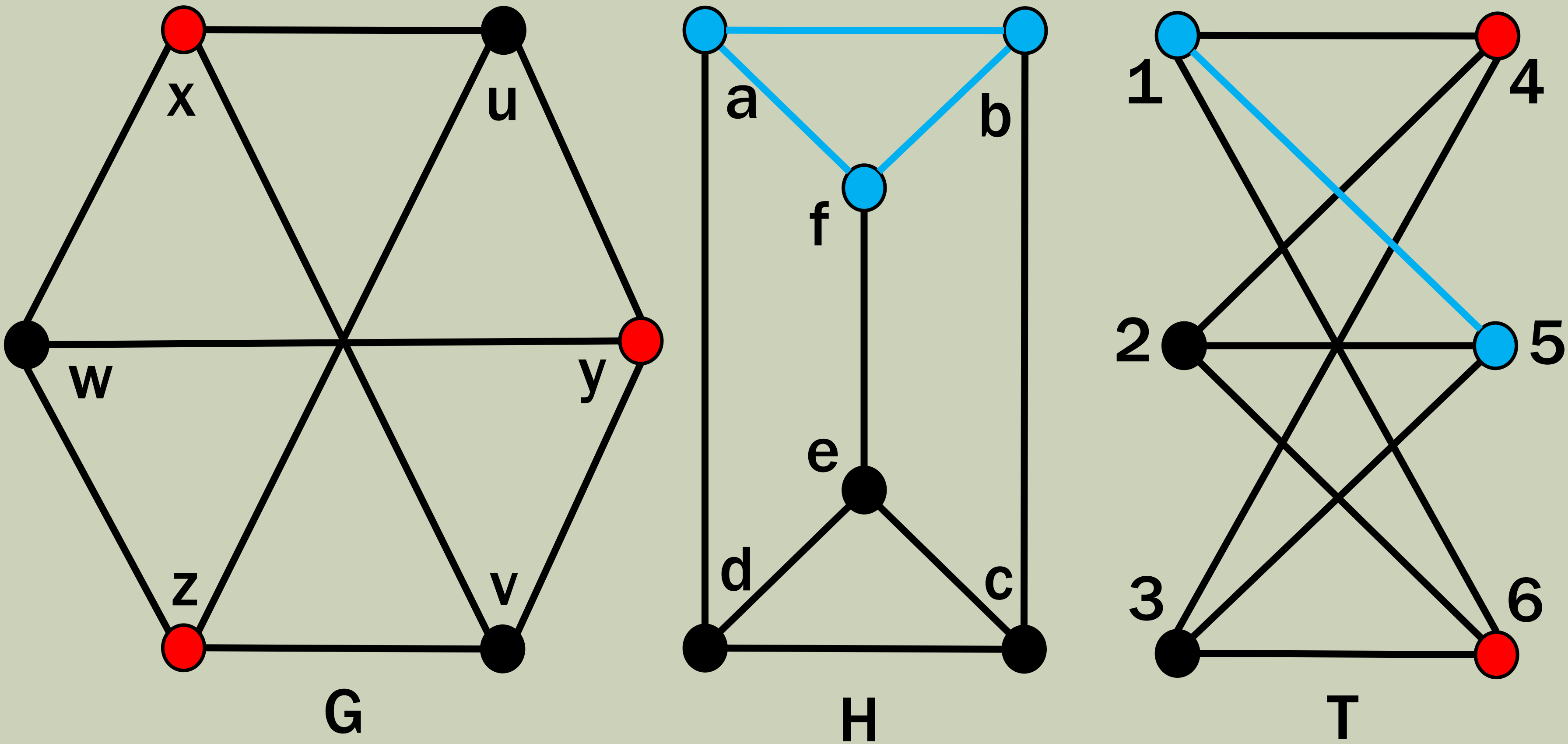
- Uma clique em um grafo G é um conjunto de vértices $K \subseteq V(G)$ tal que $G[K]$ é completo.

- Um conjunto estável ou independente em um grafo G é um subconjunto de vértices $S \subseteq V(G)$ tal que $G[S]$ é um grafo sem arestas.

- Qualquer par de vértices de um conjunto independente é formado por vértices não adjacentes.

- Notação: I_n = grafo cujos vértices formam um conjunto independente de tamanho n.

CONCEITOS BÁSICOS EM GRAFOS



conjuntos independentes e cliques

CONCEITOS BÁSICOS EM GRAFOS

- Um passeio é uma sequência de vértices

$$v_1 , v_2 , v_3 , \ldots , v_{k-1} , v_k$$

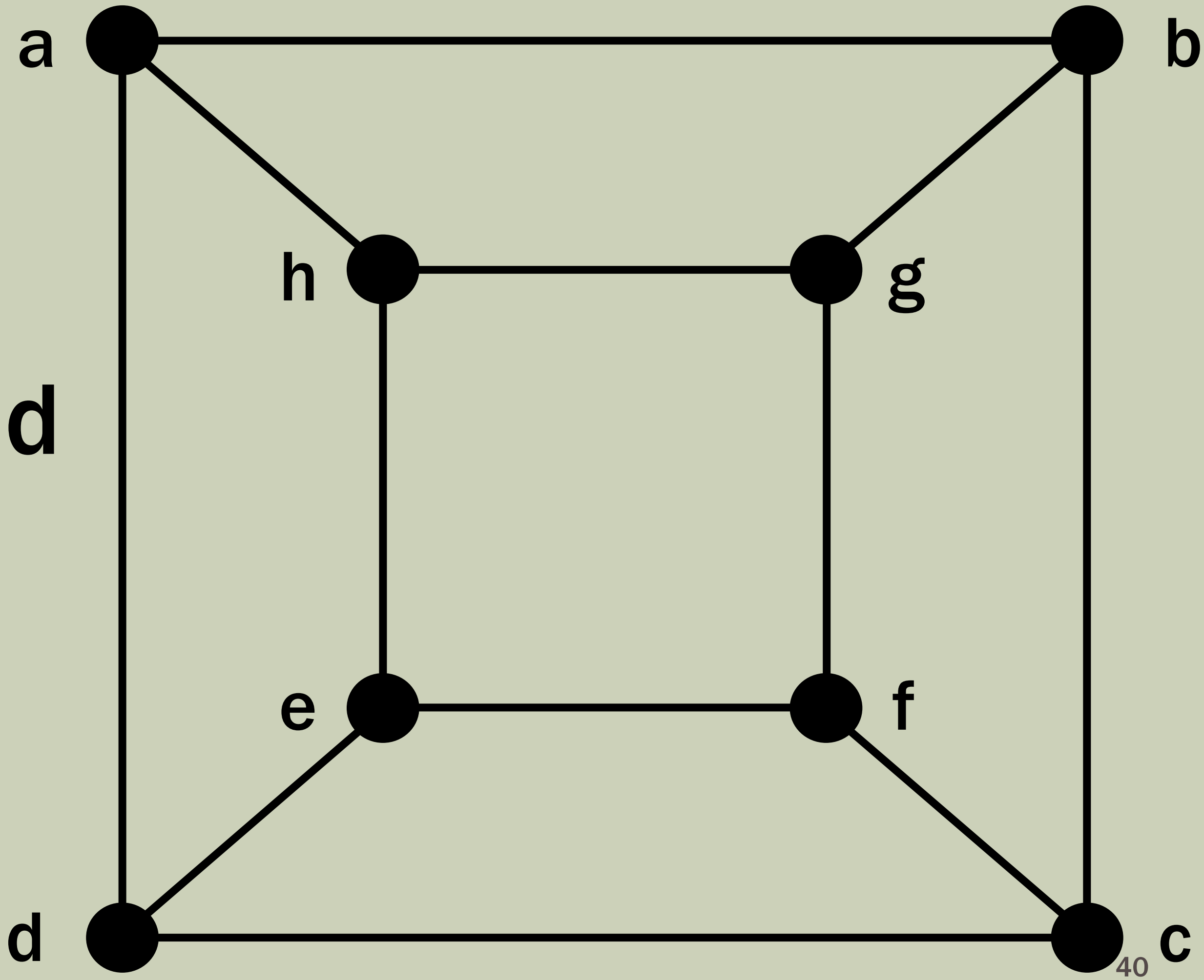
  onde $v_{j-1}v_j \in E(G)$ para $j = 2, \ldots , k$.

- Note que em um passeio pode haver repetição de vértices e arestas.

CONCEITOS BÁSICOS EM GRAFOS

Exemplo de passeio:

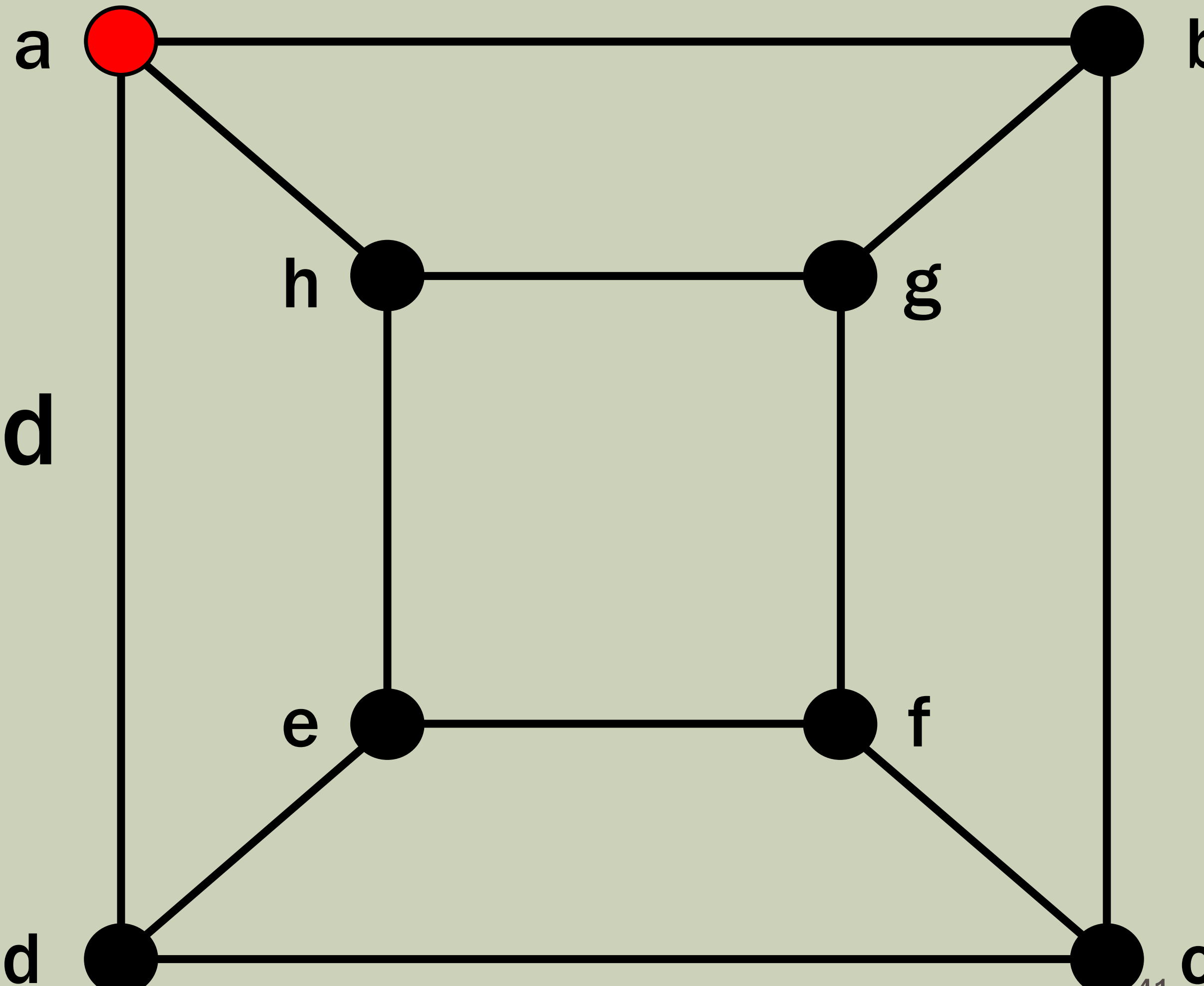
a,b,c,f,g,b,a,d



CONCEITOS BÁSICOS EM GRAFOS

Exemplo de passeio:

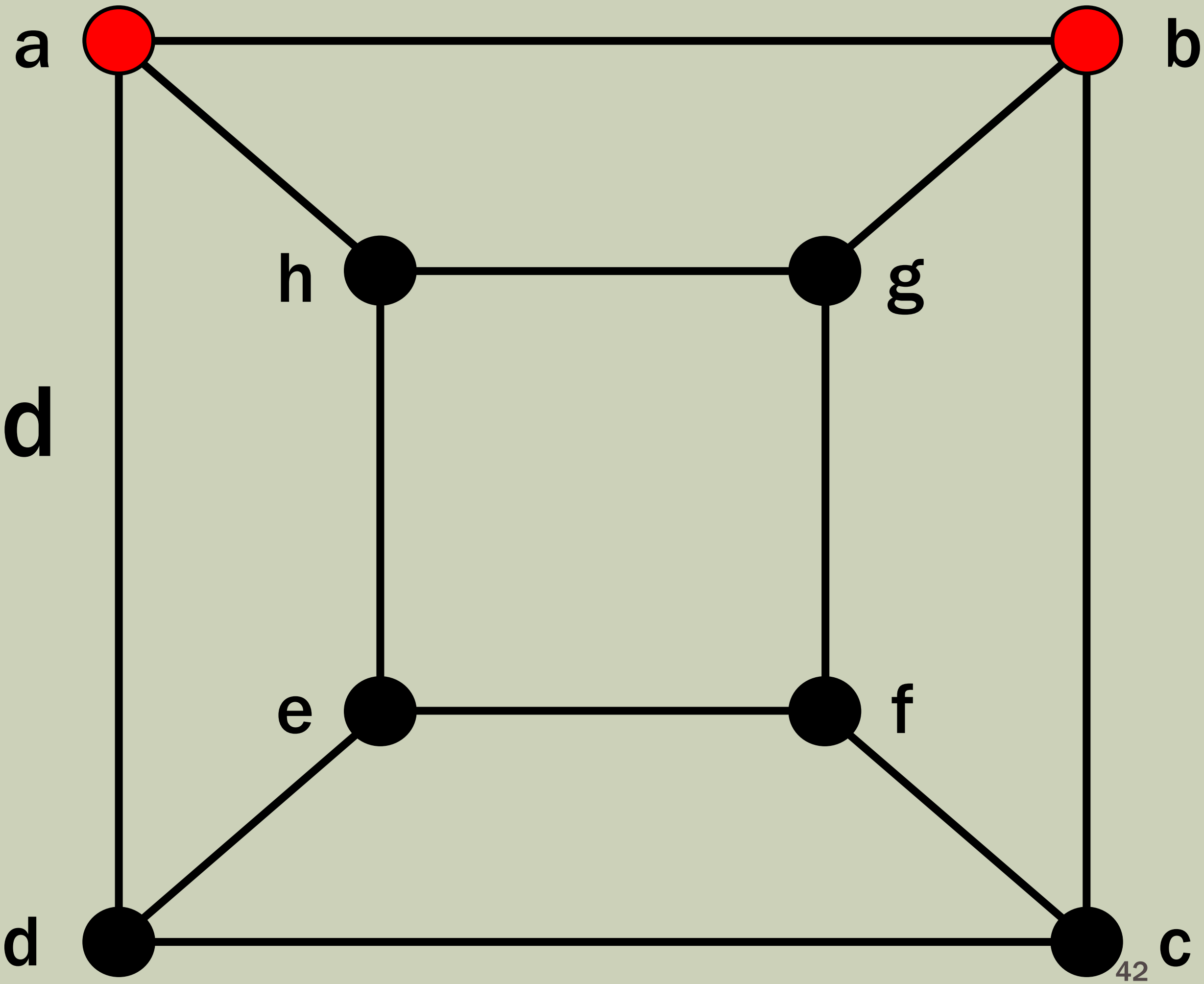
a,b,c,f,g,b,a,d



CONCEITOS BÁSICOS EM GRAFOS

Exemplo de passeio:

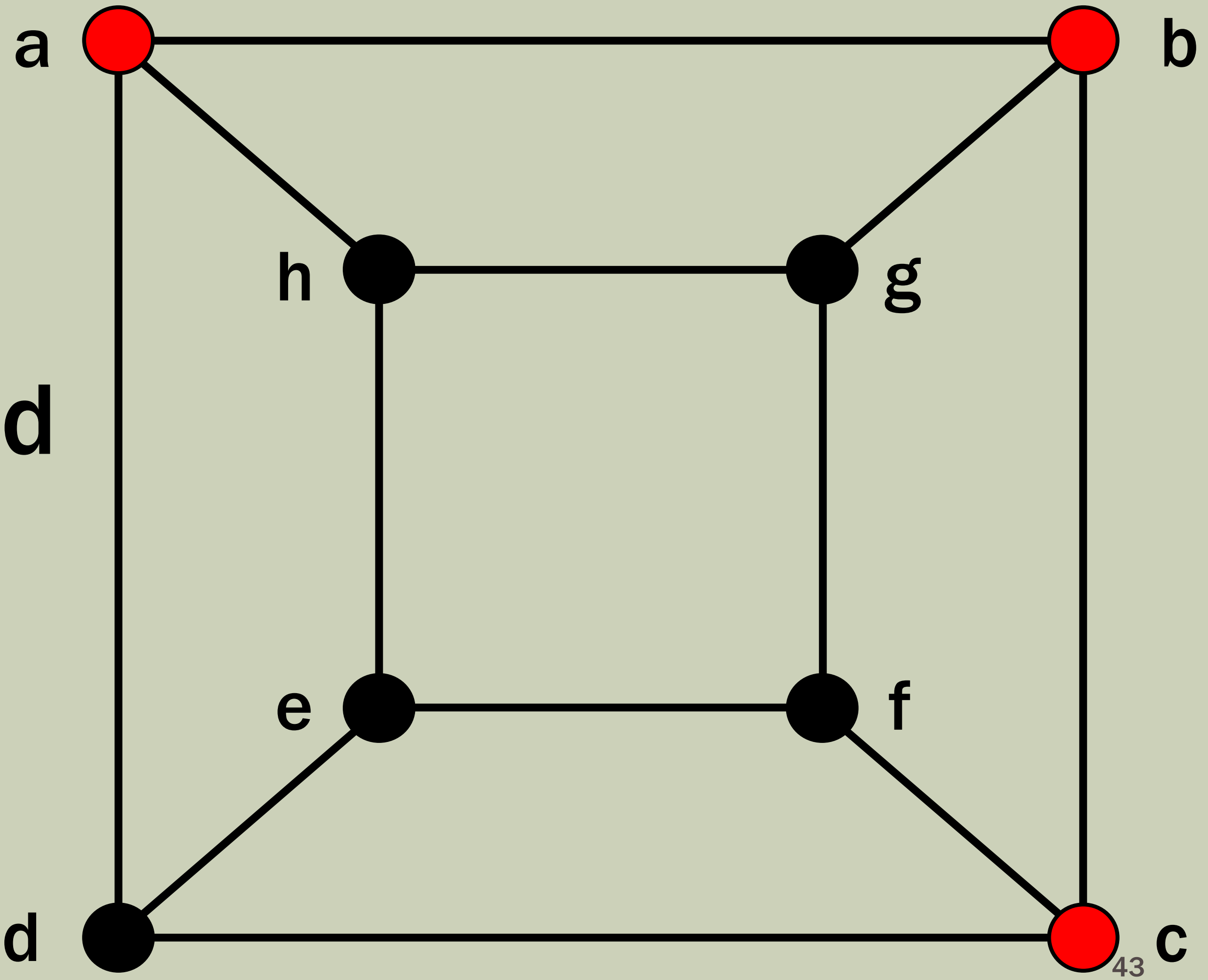
a,b,c,f,g,b,a,d



CONCEITOS BÁSICOS EM GRAFOS

Exemplo de passeio:

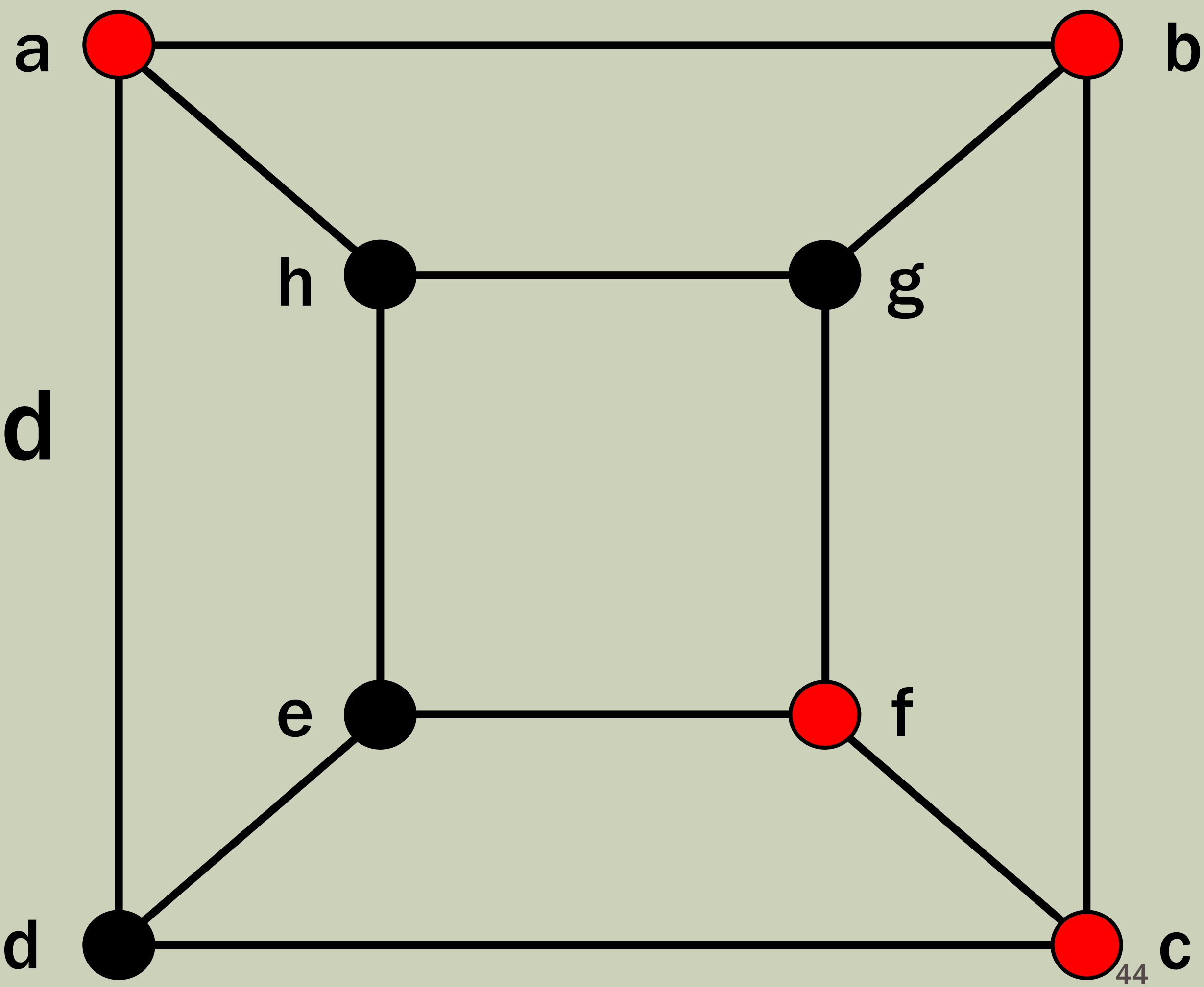
a,b,c,f,g,b,a,d



CONCEITOS BÁSICOS EM GRAFOS

Exemplo de passeio:

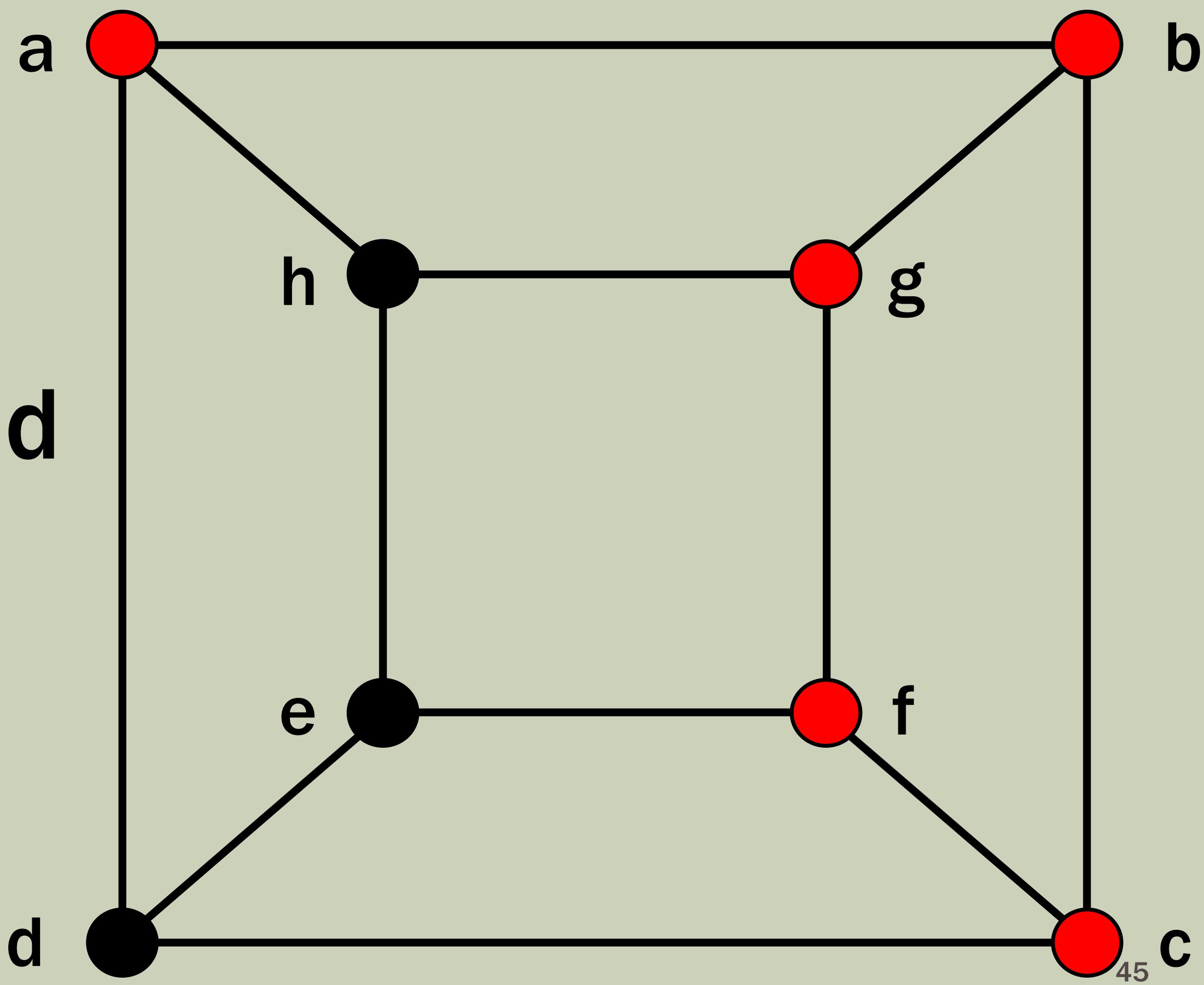
a,b,c,f,g,b,a,d



CONCEITOS BÁSICOS EM GRAFOS

Exemplo de passeio:

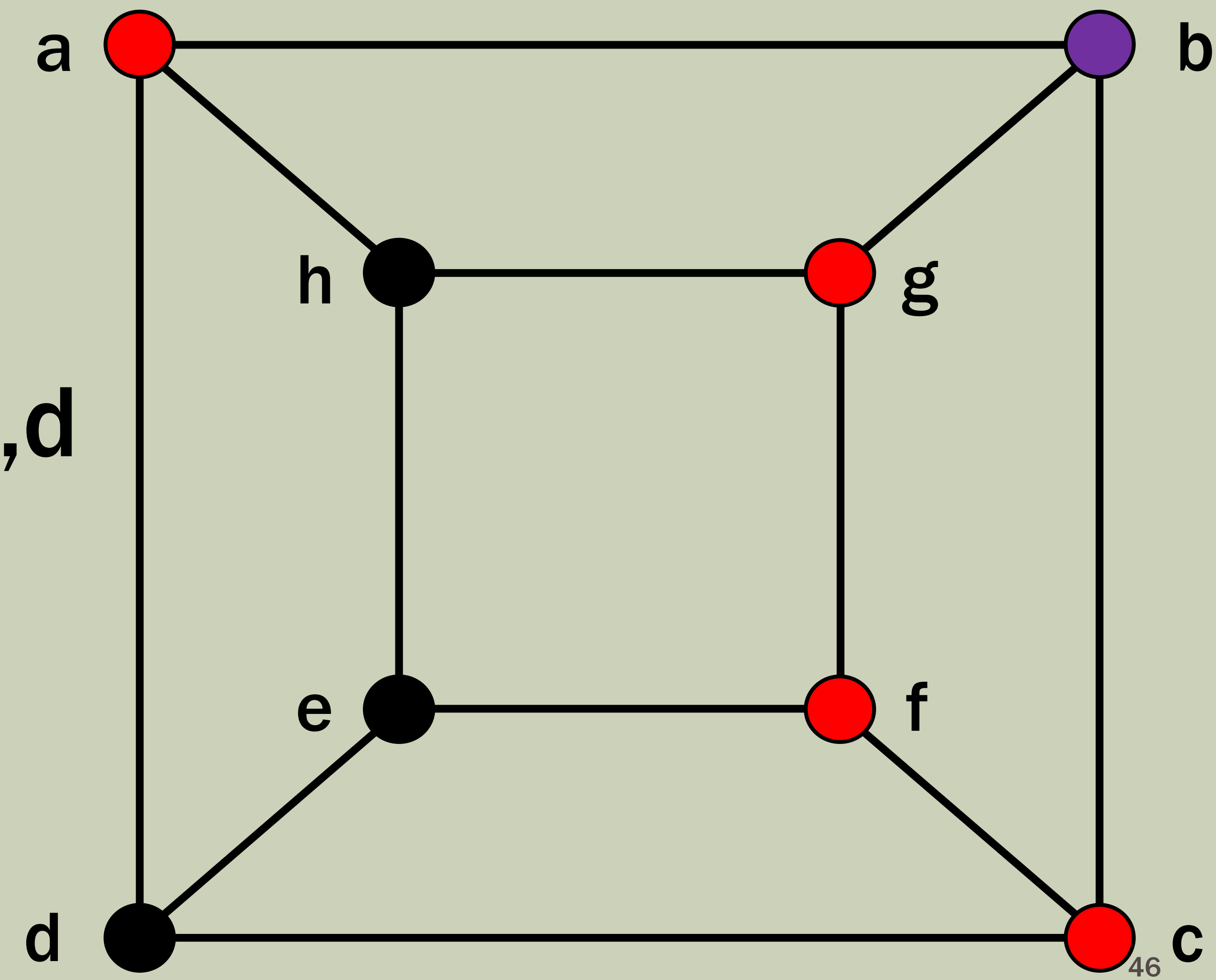
a,b,c,f,g,b,a,d



CONCEITOS BÁSICOS EM GRAFOS

Exemplo de passeio:

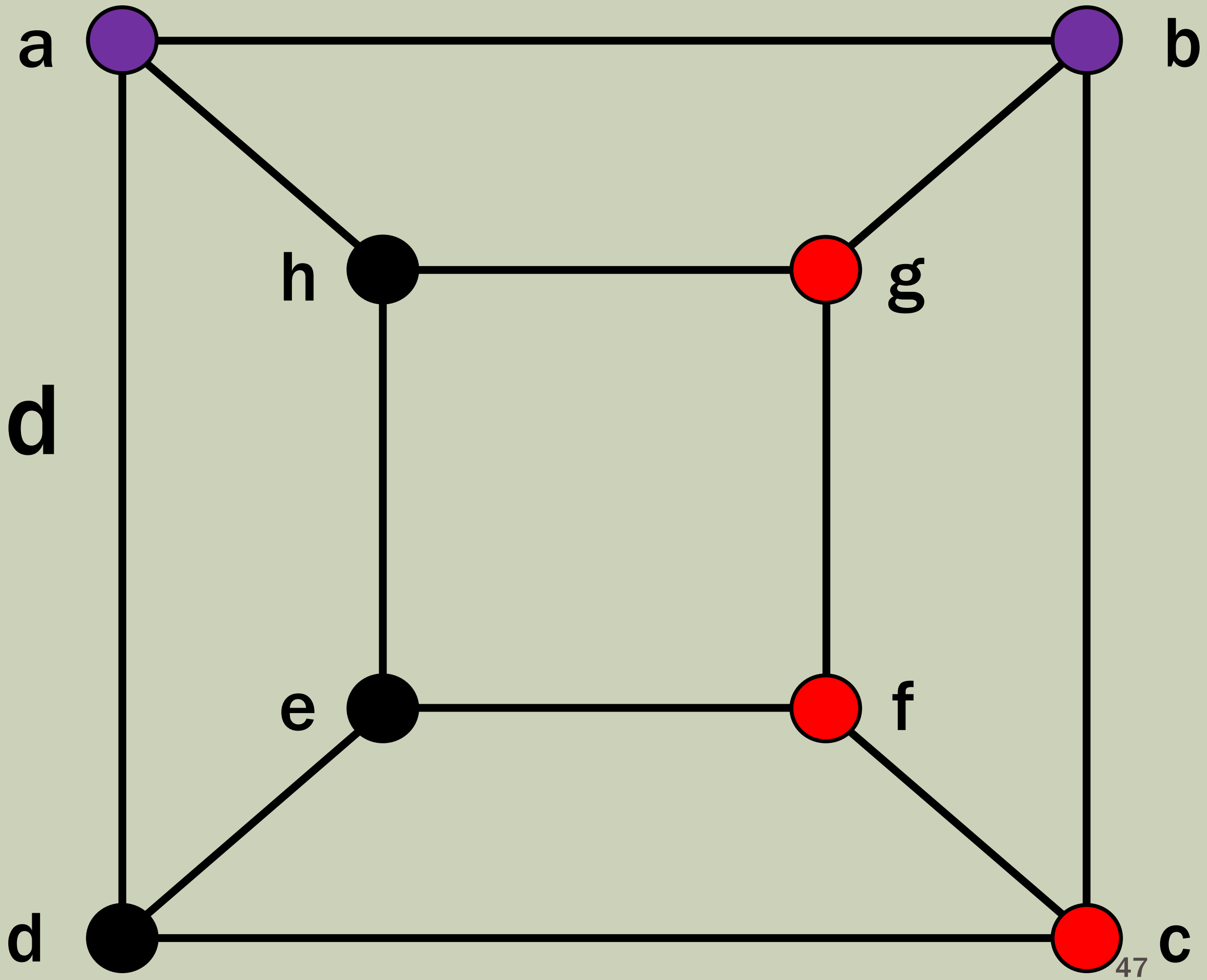
a,b,c,f,g,b,a,d



CONCEITOS BÁSICOS EM GRAFOS

Exemplo de passeio:

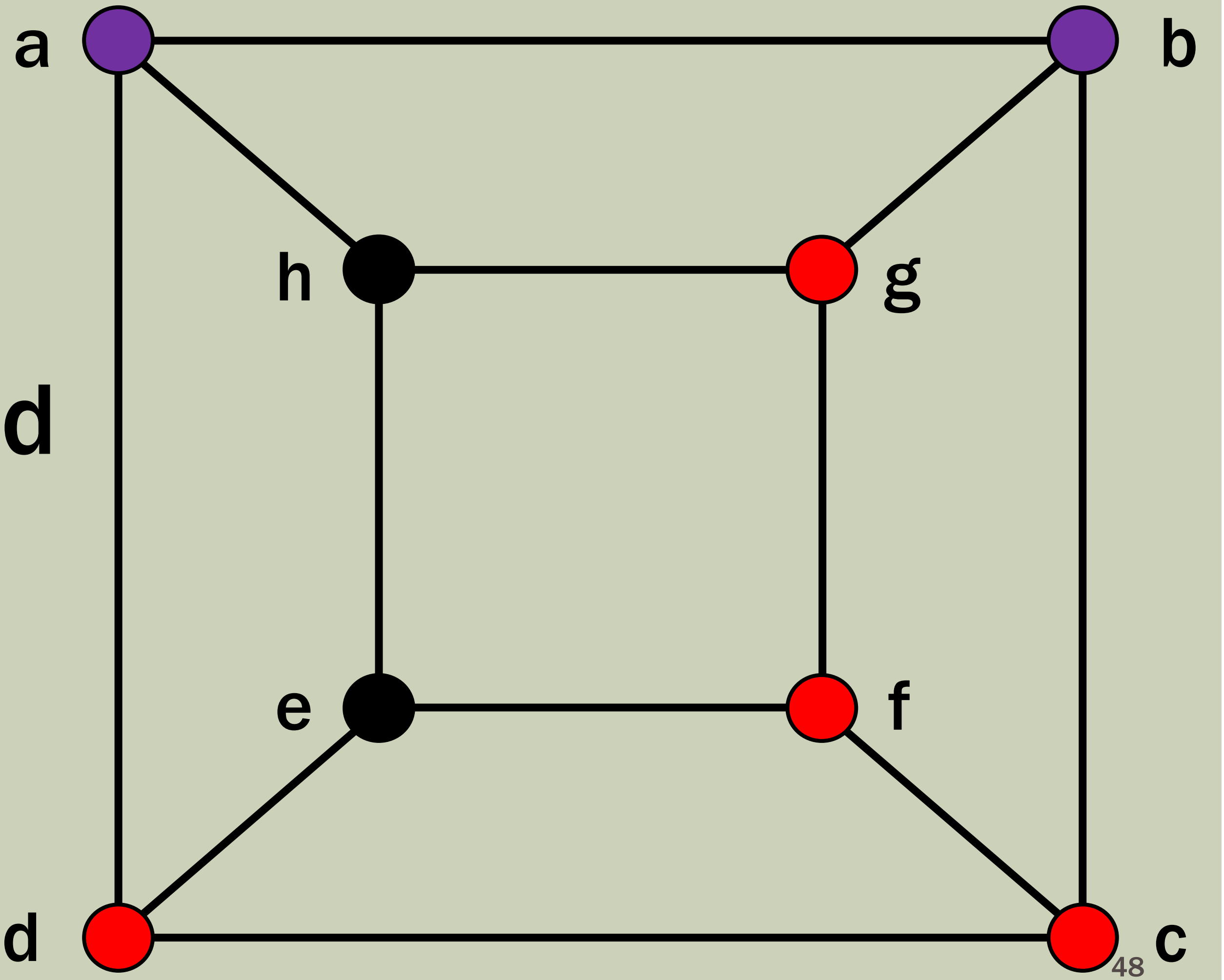
a,b,c,f,g,b,a,d



CONCEITOS BÁSICOS EM GRAFOS

Exemplo de passeio:

a,b,c,f,g,b,a,d



CONCEITOS BÁSICOS EM GRAFOS

- Uma **trilha** é um passeio

$$v_1 \, , \, v_2 \, , \, v_3 \, , \, \ldots \, , \, v_{k-1} \, , \, v_k$$

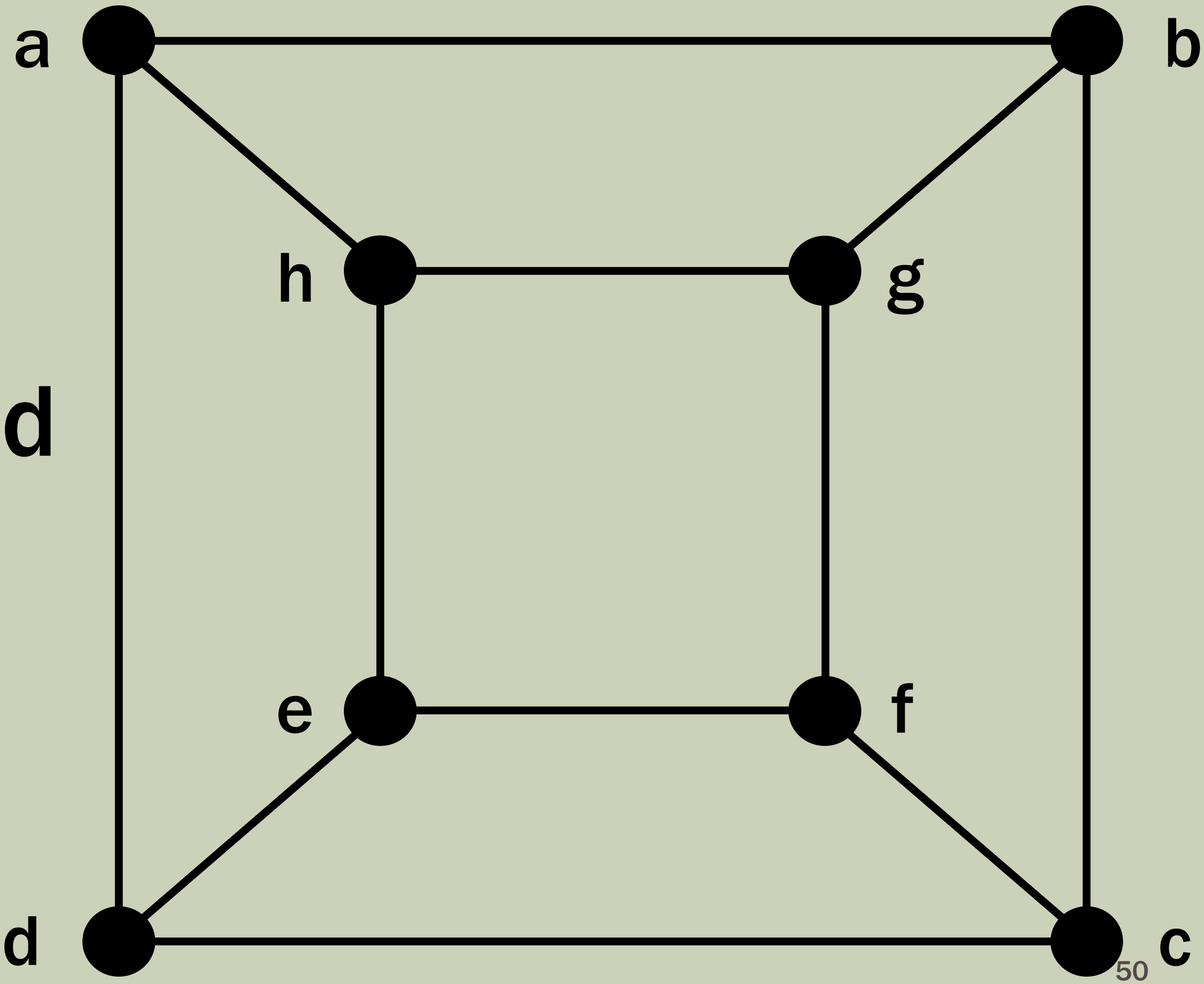
onde as arestas são todas **distintas**.

- Note que em uma trilha pode haver repetição de vértices, mas não de arestas.

CONCEITOS BÁSICOS EM GRAFOS

Exemplo de trilha:

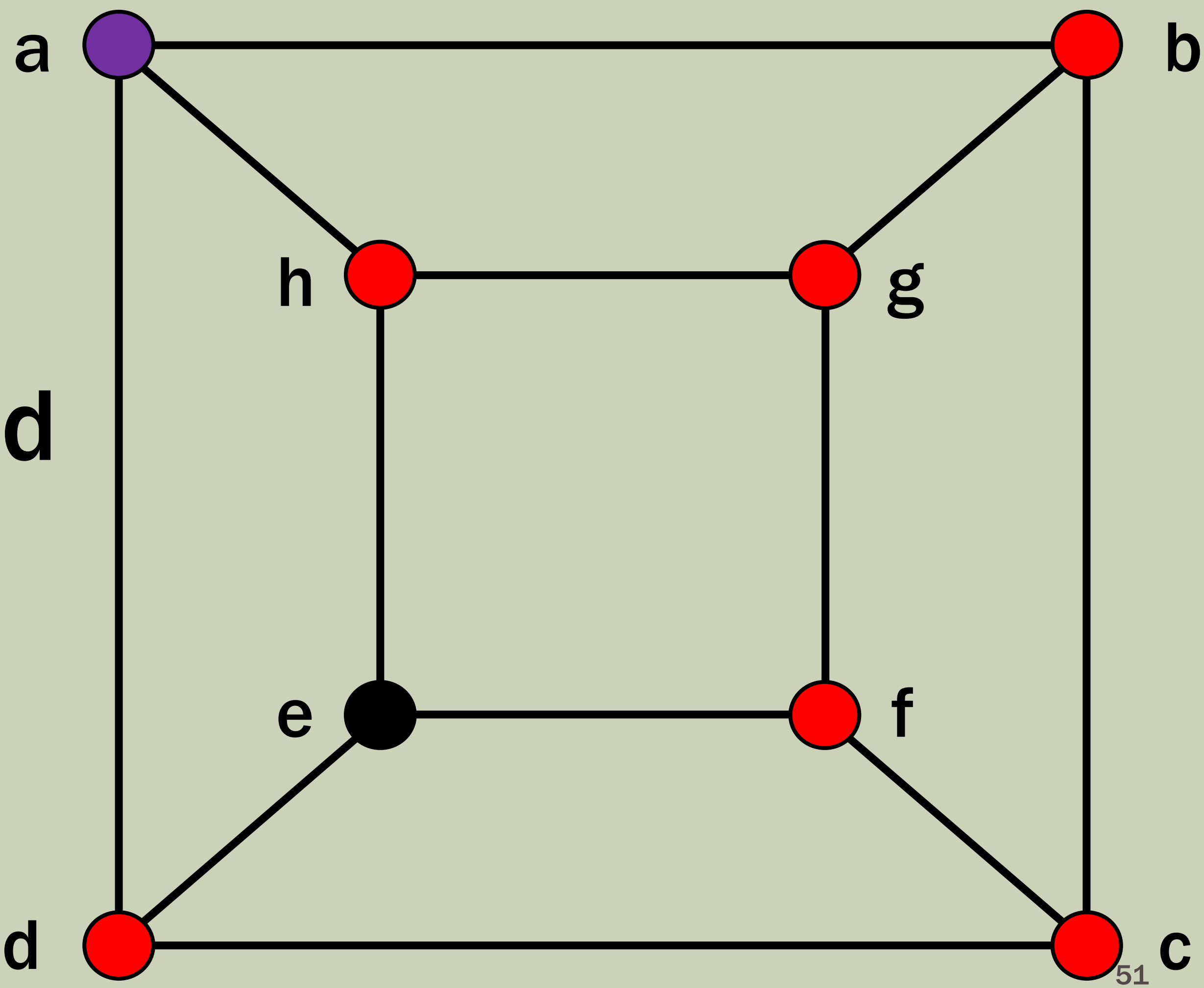
a,b,c,f,g,h,a,d



CONCEITOS BÁSICOS EM GRAFOS

Exemplo de trilha:

a,b,c,f,g,h,a,d



CONCEITOS BÁSICOS EM GRAFOS

- Um caminho é um passeio

$$v_1 , v_2 , v_3 , \ldots , v_{k-1} , v_k$$

onde os vértices são todos distintos.

- Note que em um caminho, como não pode haver repetição de vértices, não há repetição de arestas.

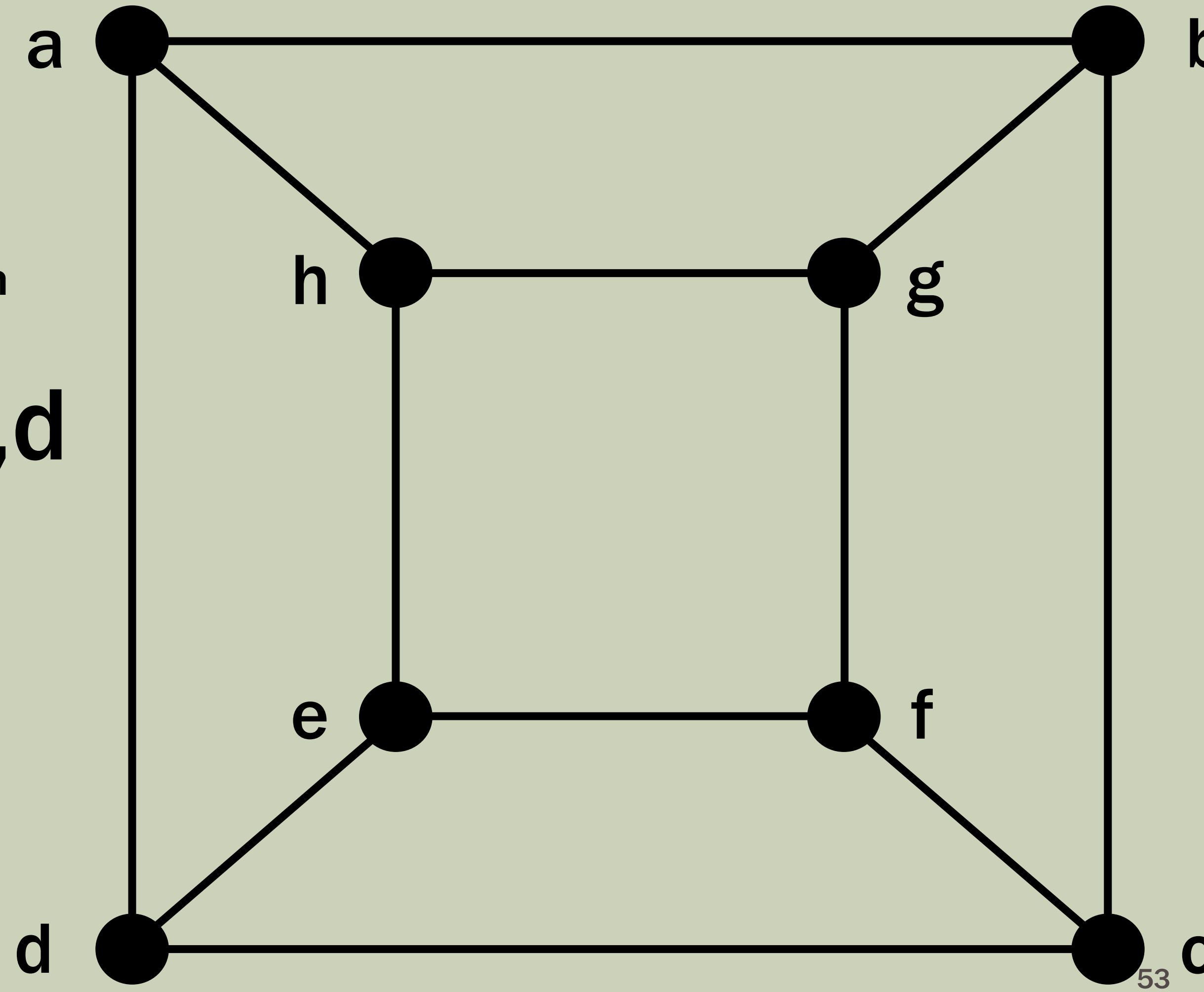
- Todo caminho é uma trilha, mas nem toda trilha é um caminho.

- O comprimento de um caminho é o número de arestas neste caminho.

CONCEITOS BÁSICOS EM GRAFOS

Exemplo de caminho com comprimento 7:

a,b,c,f,g,h,e,d



CONCEITOS BÁSICOS EM GRAFOS

- Um **passeio fechado** é um passeio

$$v_1 , v_2 , v_3 , \dots , v_{k-1} , v_k$$

onde $v_1 = v_k$.

- A mesma definição se aplica a **trilhas fechadas**.

- Note que não pode haver “caminho fechado”, pois em um caminho não há repetição de vértices.

CONCEITOS BÁSICOS EM GRAFOS

- Um **ciclo** é um passeio

$$v_1 , v_2 , v_3 , \ldots , v_{k-1} , v_k$$

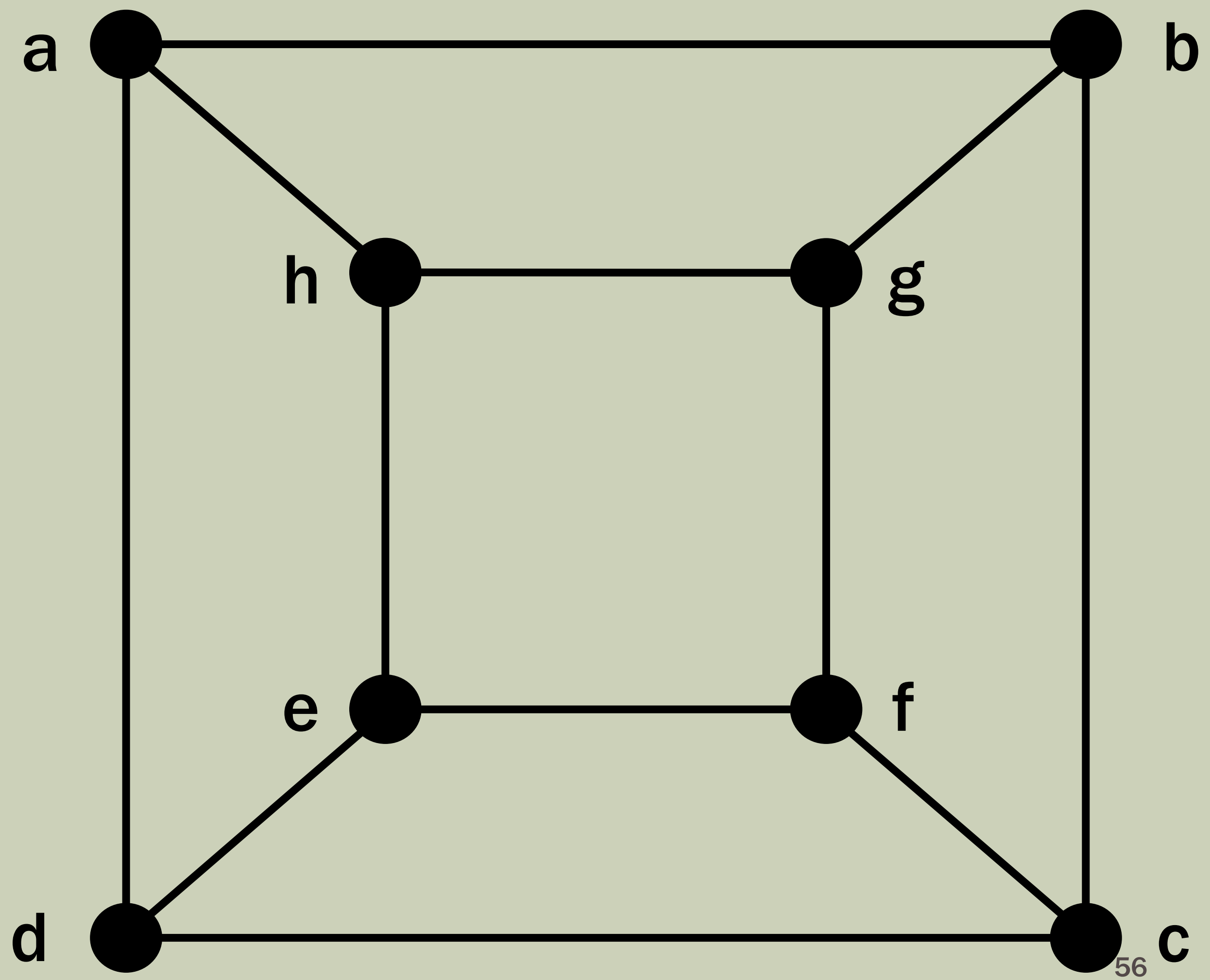
onde $v_1 , v_2 , v_3 , \ldots , v_{k-1}$ é um caminho e $v_k = v_1$.

- Por definição, em um ciclo devemos ter $k \geq 3$.
- O **comprimento** de um ciclo é o número de vértices (ou arestas) do ciclo.

CONCEITOS BÁSICOS EM GRAFOS

Exemplo de ciclo com comprimento 6:

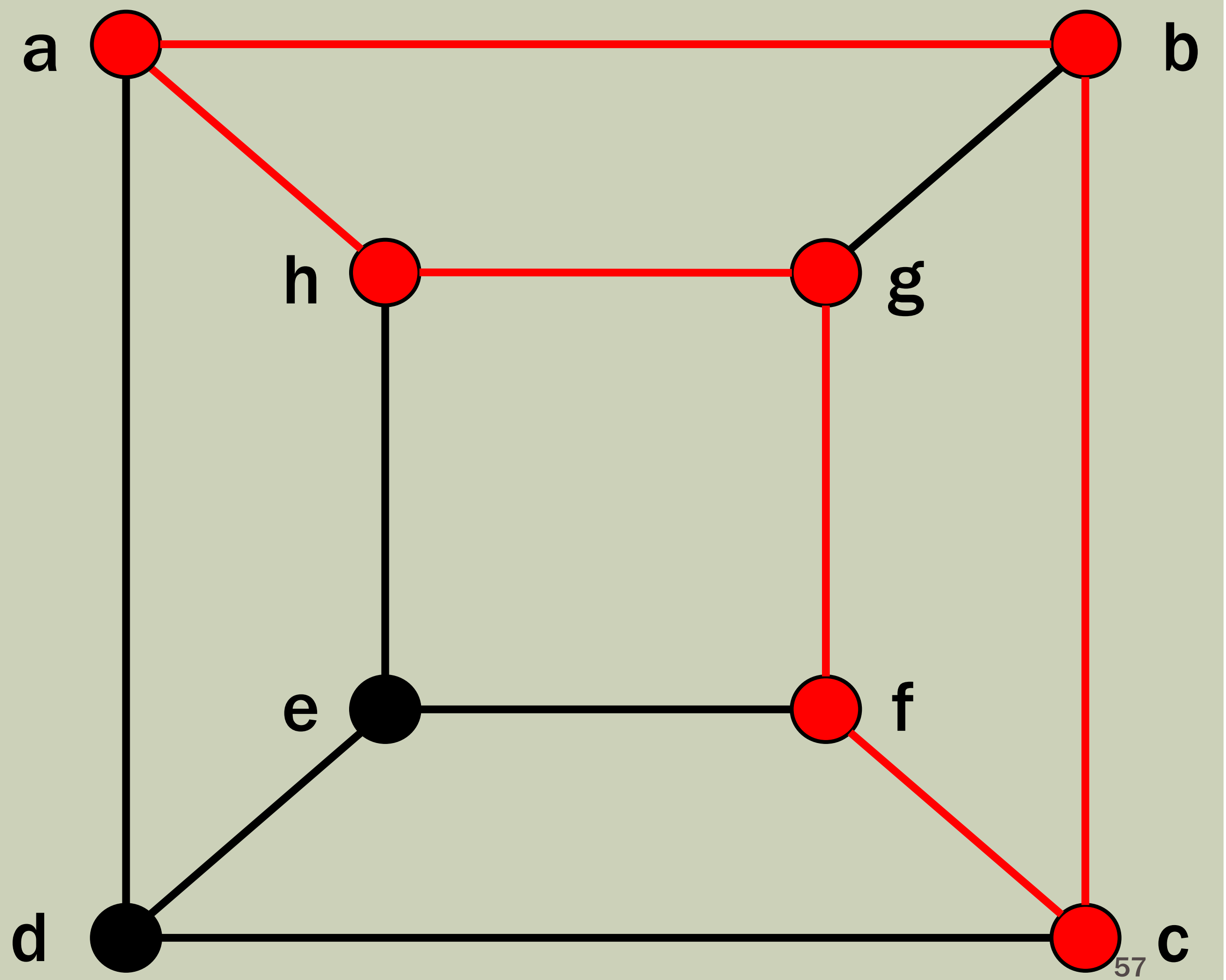
a,b,c,f,g,h,a



CONCEITOS BÁSICOS EM GRAFOS

Exemplo de ciclo com comprimento 6:

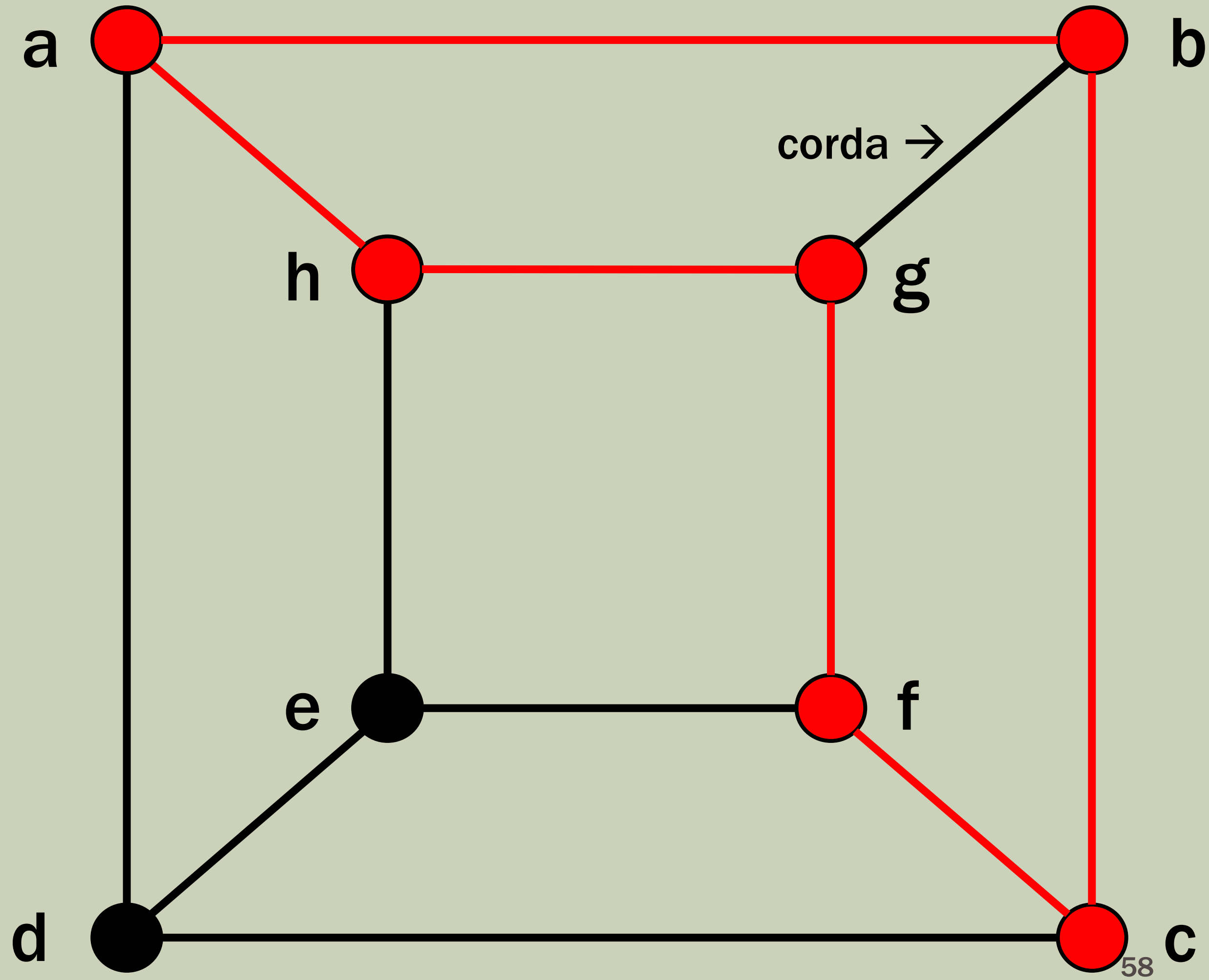
a,b,c,f,g,h,a



CONCEITOS BÁSICOS EM GRAFOS

Exemplo de ciclo com comprimento 6:

a,b,c,f,g,h,a



CONCEITOS BÁSICOS EM GRAFOS

- Uma **corda** é uma aresta que liga dois vértices não consecutivos de um ciclo (ou caminho).

- Um **ciclo induzido** C é um subgrafo induzido por um conjunto de vértices tal que C é um ciclo sem cordas.

- Um **caminho induzido** P é um subgrafo induzido por um conjunto de vértices tal que P é um caminho sem cordas.

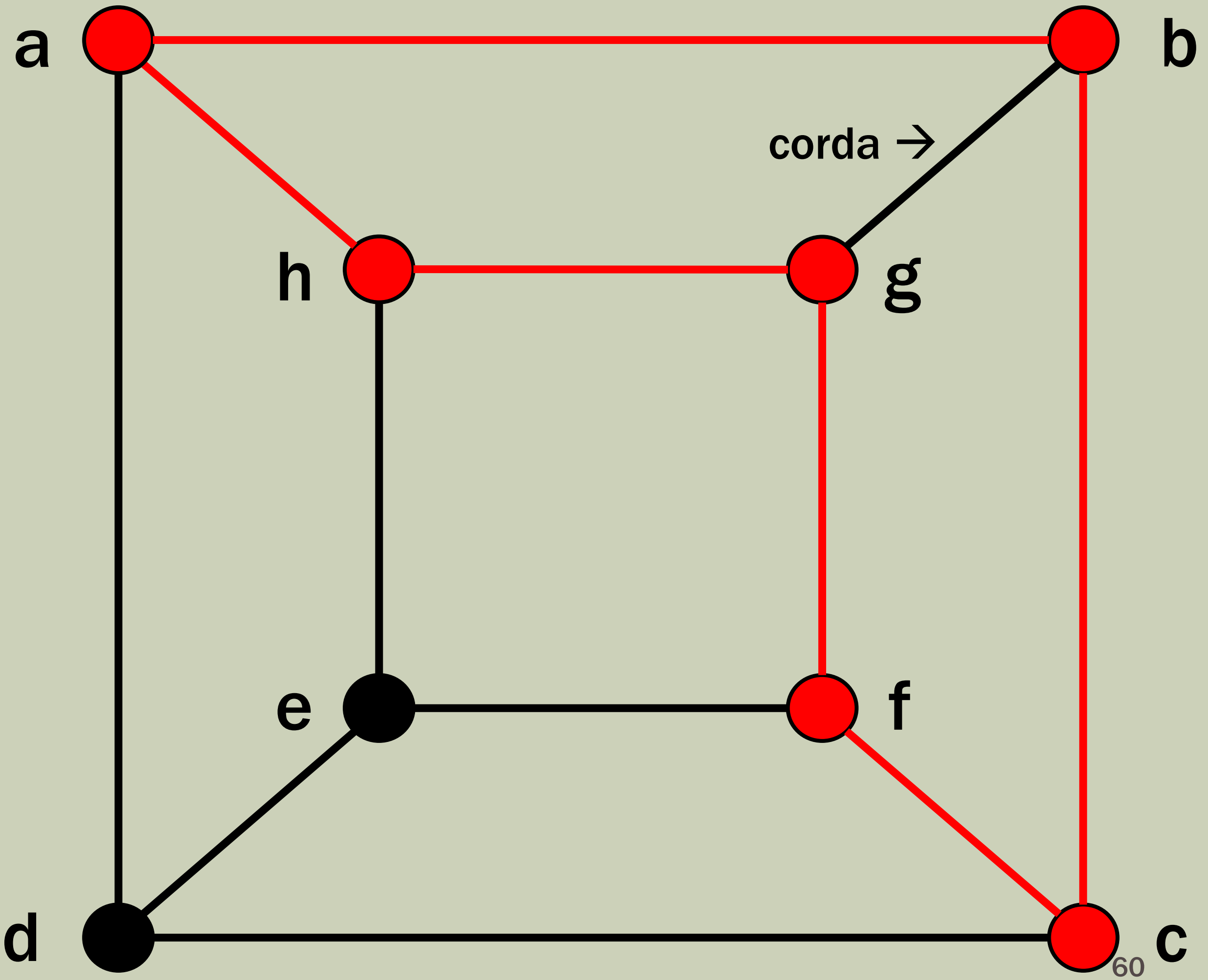
- Notação: C_k = ciclo sem cordas com k vértices.

- Notação: P_k = caminho sem cordas com k vértices.

CONCEITOS BÁSICOS EM GRAFOS

Exemplo de ciclo
não induzido:

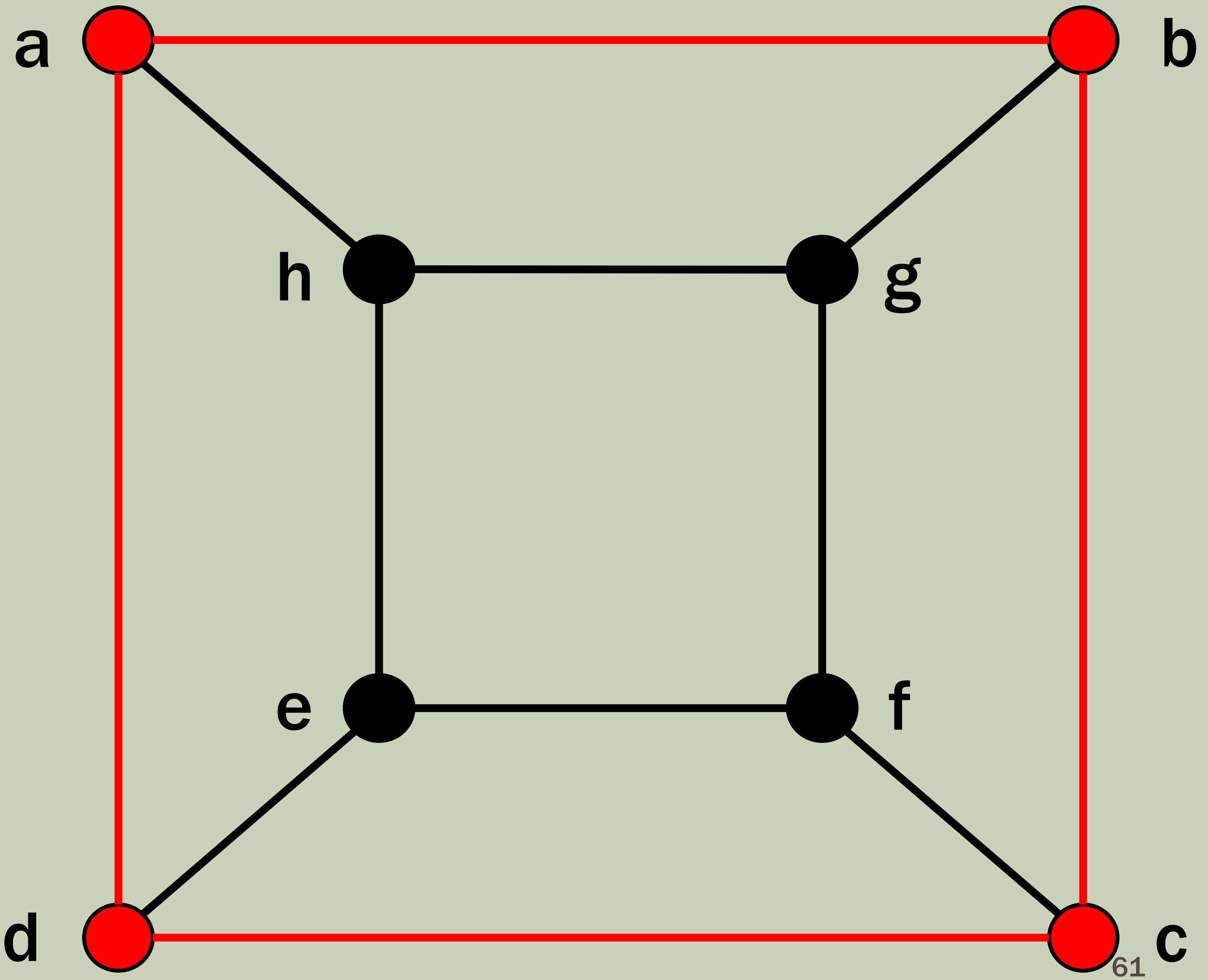
a,b,c,f,g,h,a



CONCEITOS BÁSICOS EM GRAFOS

Exemplo de ciclo induzido:

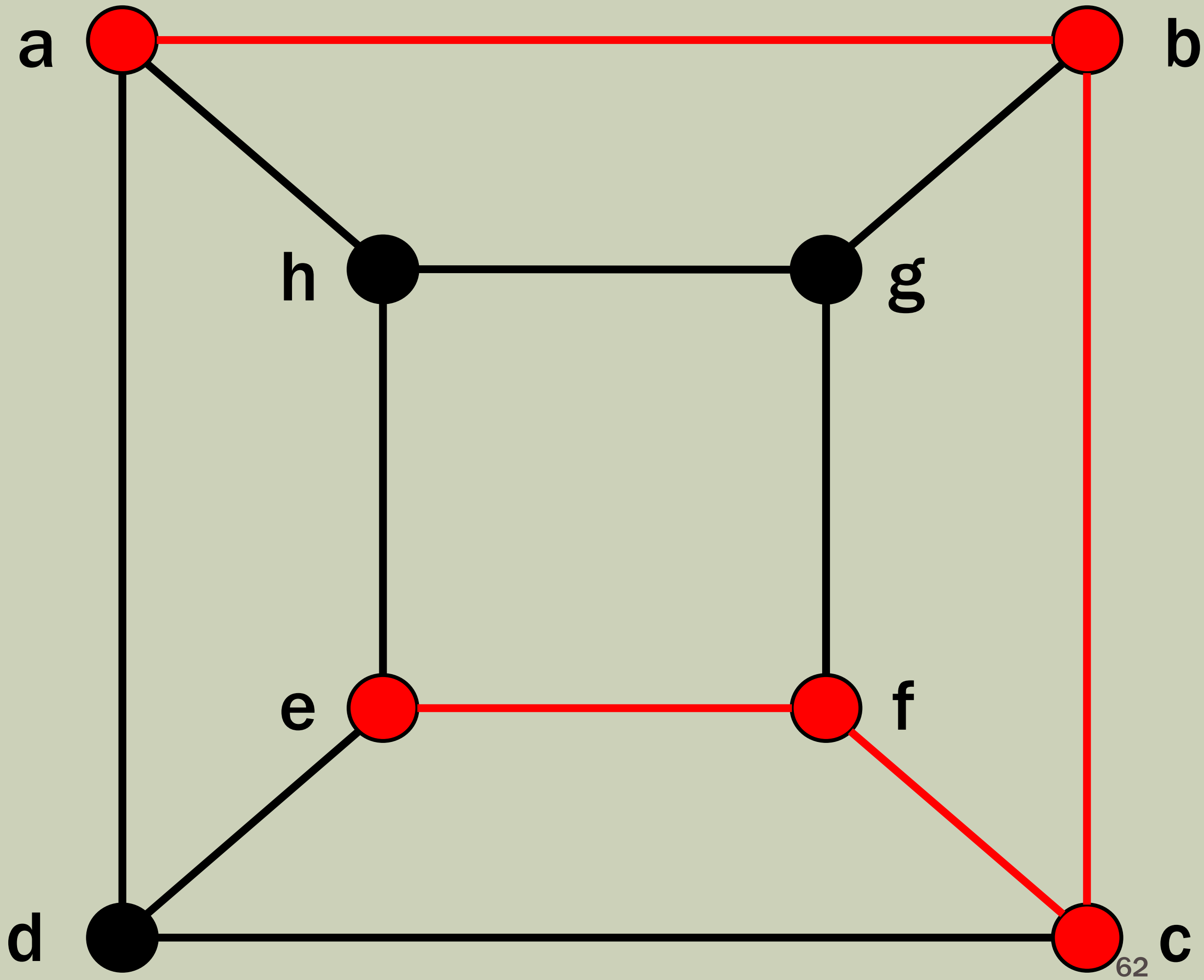
a,b,c,d,a



CONCEITOS BÁSICOS EM GRAFOS

Exemplo de caminho
induzido:

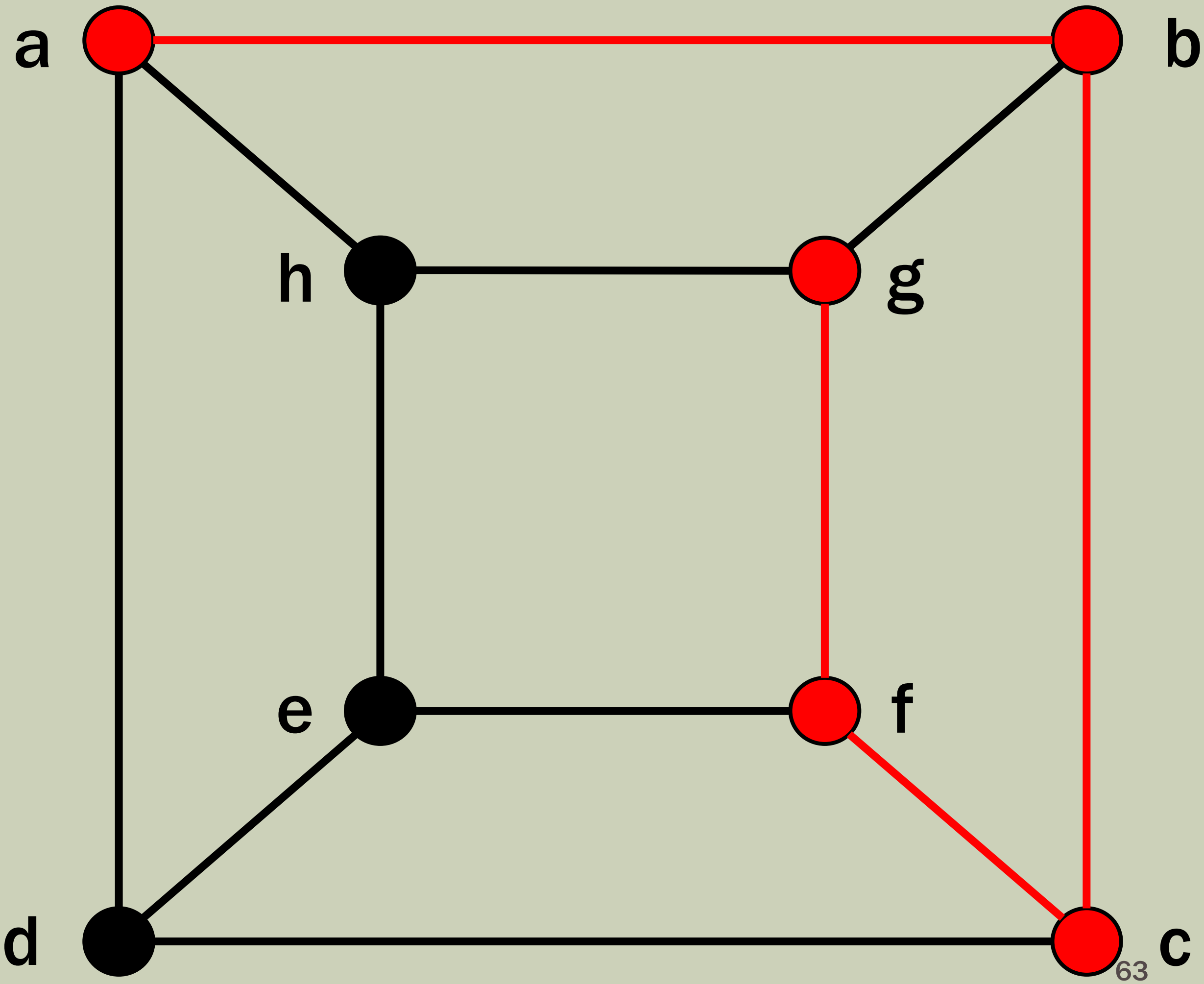
a,b,c,f,e



CONCEITOS BÁSICOS EM GRAFOS

Exemplo de caminho
não induzido:

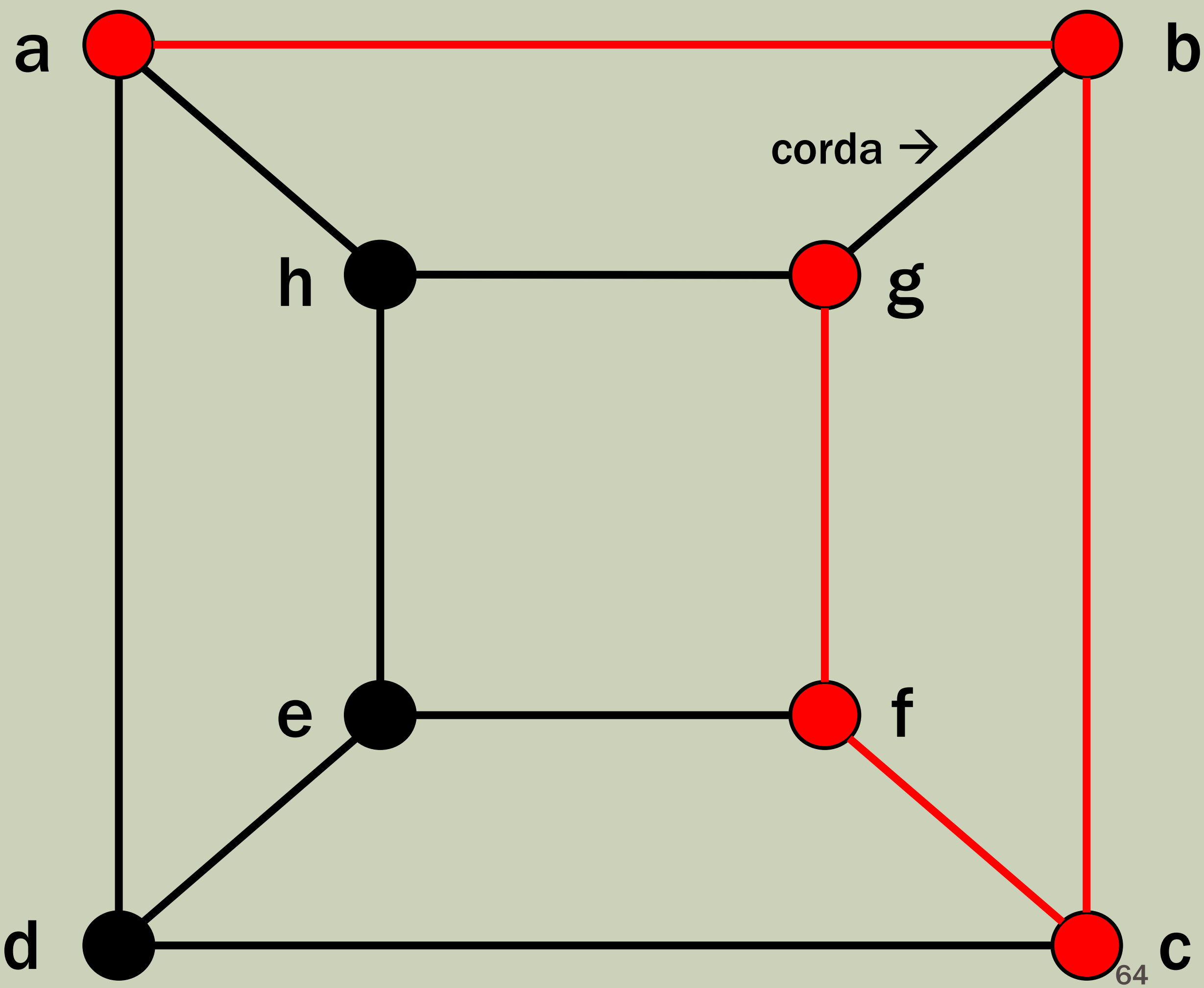
a,b,c,f,g



CONCEITOS BÁSICOS EM GRAFOS

Exemplo de caminho
não induzido:

a,b,c,f,g



CONCEITOS BÁSICOS EM GRAFOS

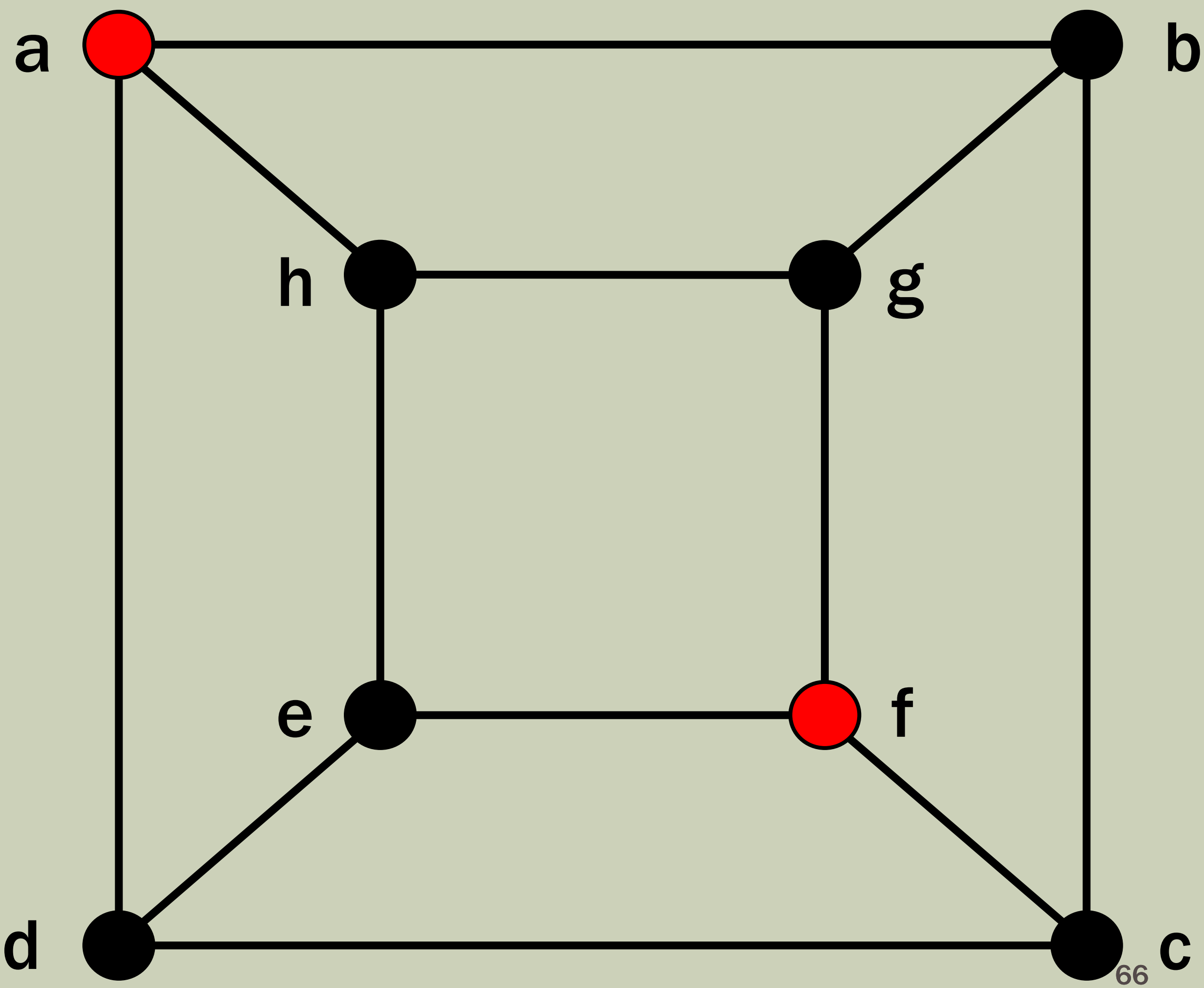
- Um conjunto *S* é **maximal** em relação a uma propriedade *P* se:
  - ✓ *S* satisfaz *P*;
  - ✓ não existe conjunto *S'* que satisfaz *P* e que contenha propriamente *S.*

- Um conjunto *S* é **máximo** em relação a uma propriedade *P* se:
  - ✓ *S* satisfaz *P*;
  - ✓ não existe conjunto *S'* que satisfaz *P* e que possua mais elementos do que *S.*

- Todo conjunto máximo é também maximal, mas nem todo conjunto maximal é máximo.

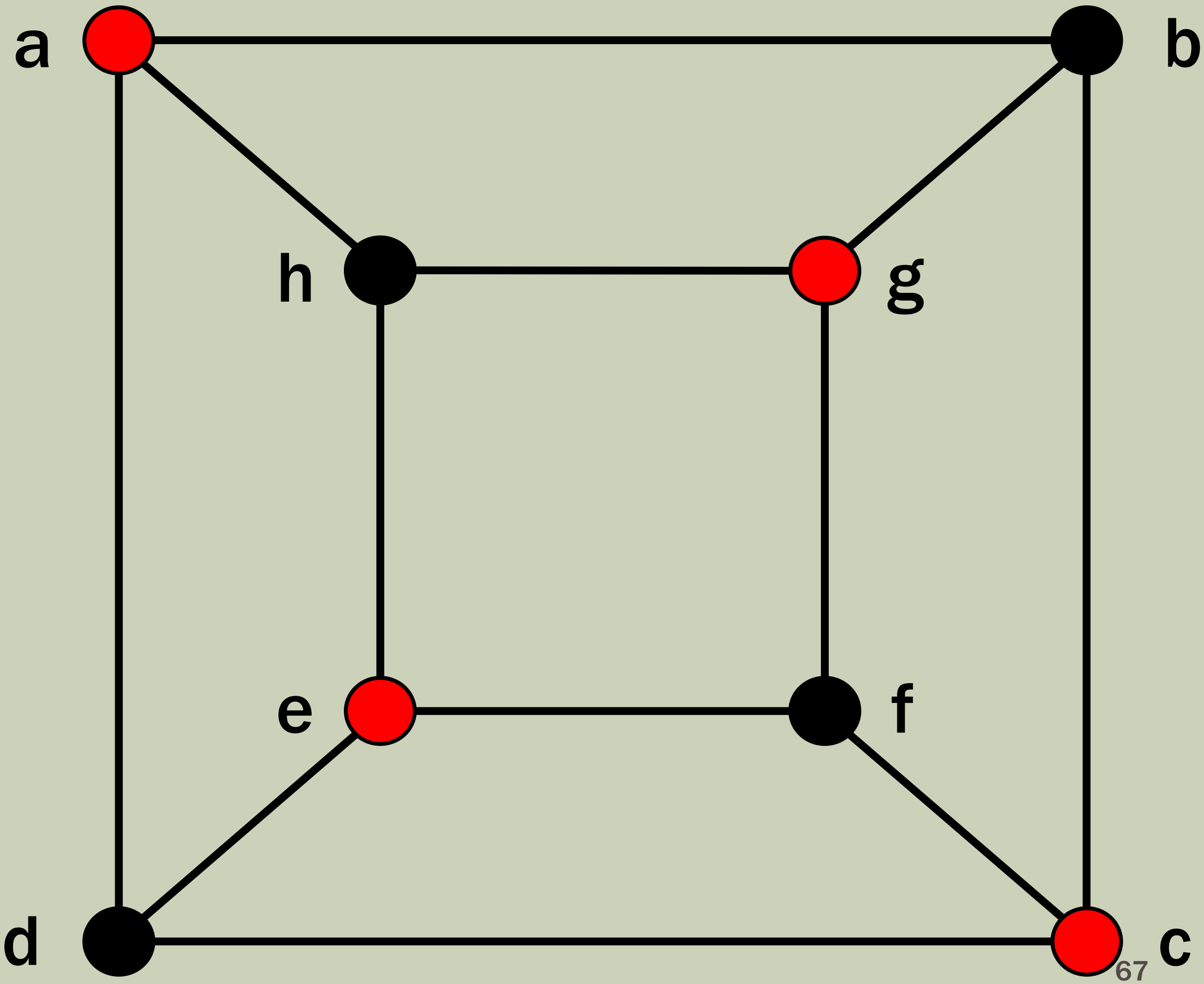
CONCEITOS BÁSICOS EM GRAFOS

conjunto
independente
maximal



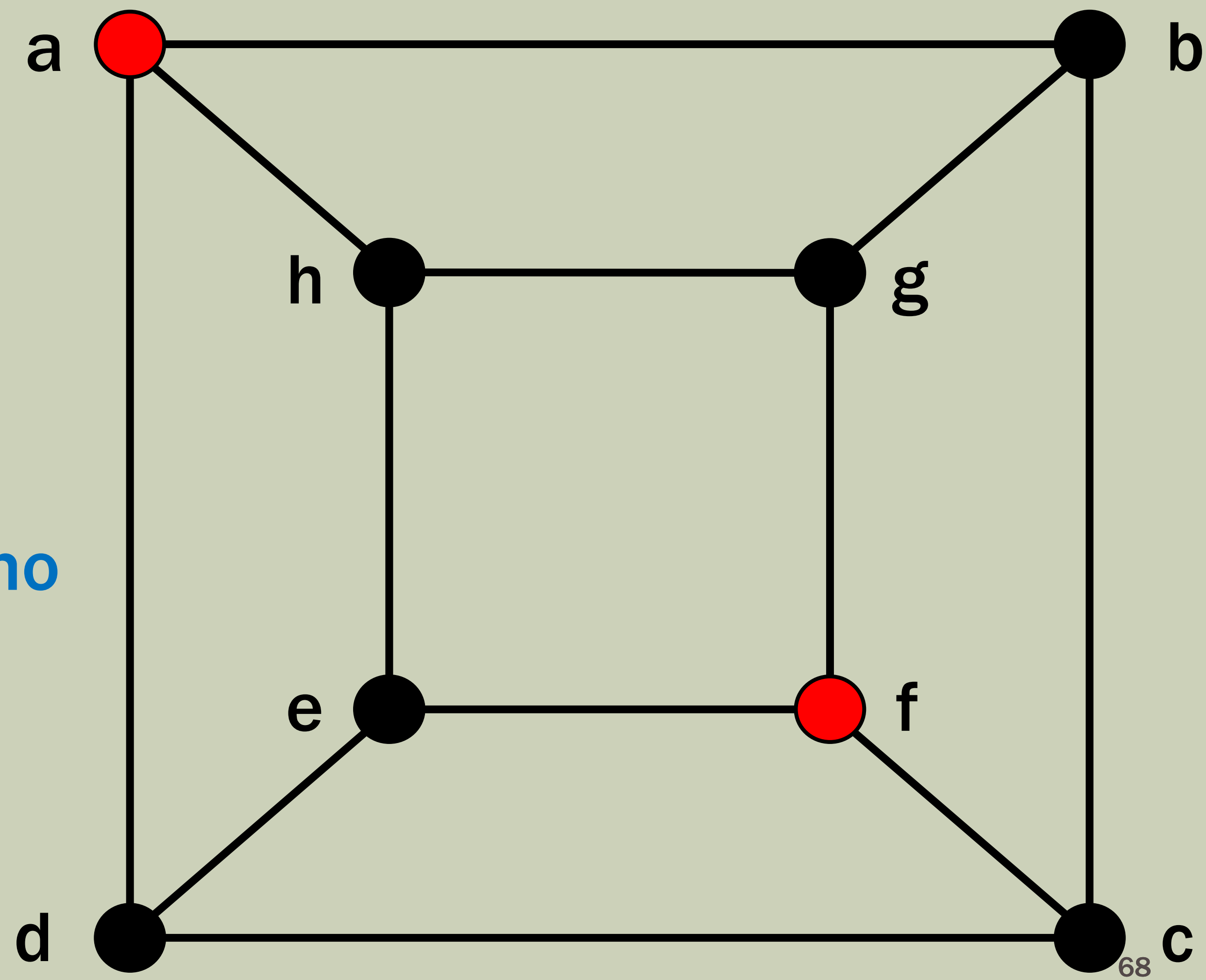
CONCEITOS BÁSICOS EM GRAFOS

conjunto
independente
máximo



CONCEITOS BÁSICOS EM GRAFOS

conjunto
independente
maximal
mas não máximo



CONCEITOS BÁSICOS EM GRAFOS

- Um conjunto *S* é **minimal** em relação a uma propriedade *P* se:

✓ *S* satisfaz *P*;

✓ não existe conjunto *S'* que satisfaz *P* e que esteja propriamente contido em *S*.

- Um conjunto *S* é **mínimo** em relação a uma propriedade *P* se:

✓ *S* satisfaz *P*;

✓ não existe conjunto *S'* que satisfaz *P* e que possua menos elementos do que *S*.

- Todo conjunto mínimo é também minimal, mas nem todo conjunto minimal é mínimo.

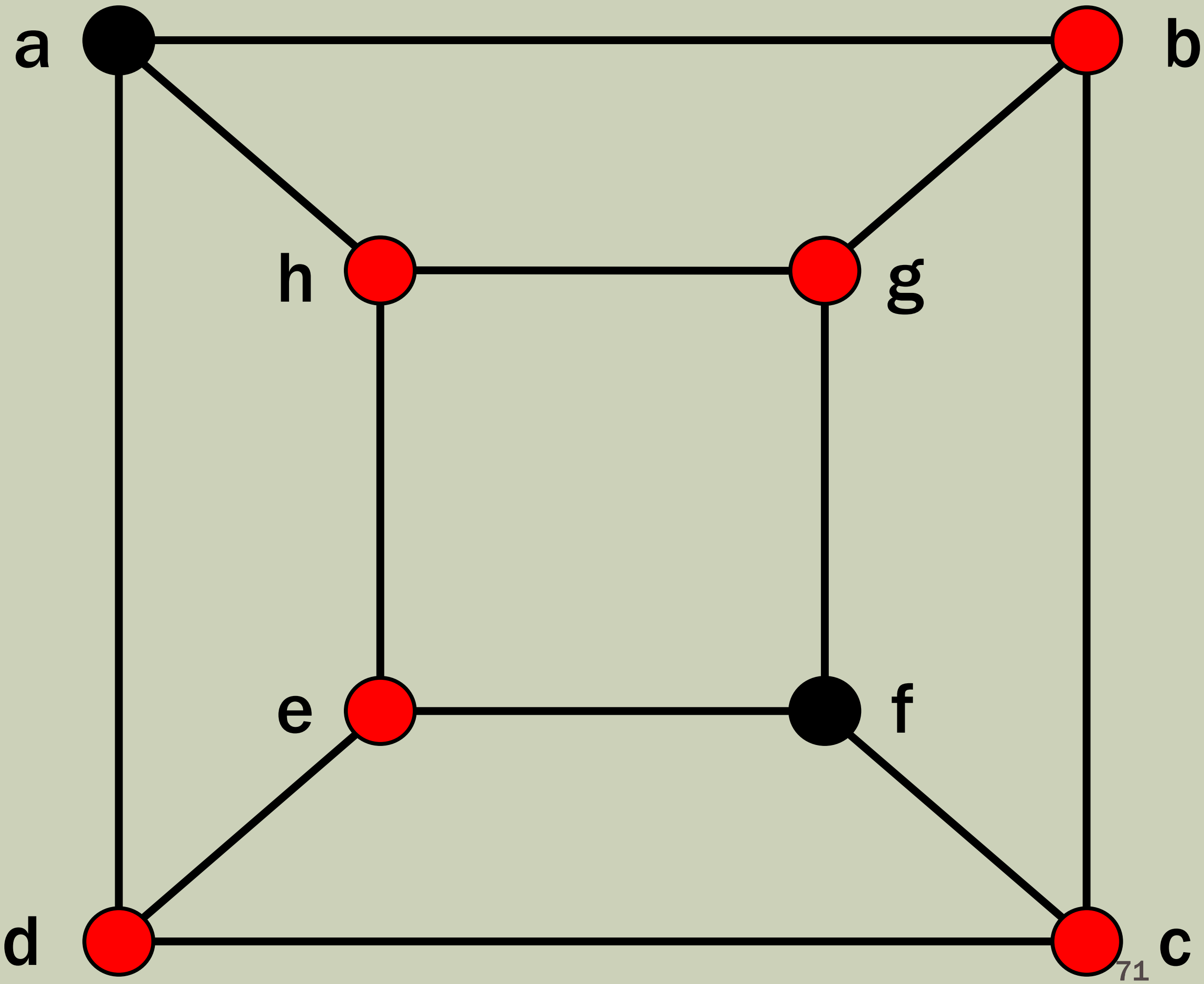
CONCEITOS BÁSICOS EM GRAFOS

- Exemplo: uma cobertura de vértices é um subconjunto de vértices com a propriedade de que todas as arestas têm pelo menos um de seus extremos no conjunto

- Vamos aplicar os conceitos de minimal e mínimo a coberturas de vértices

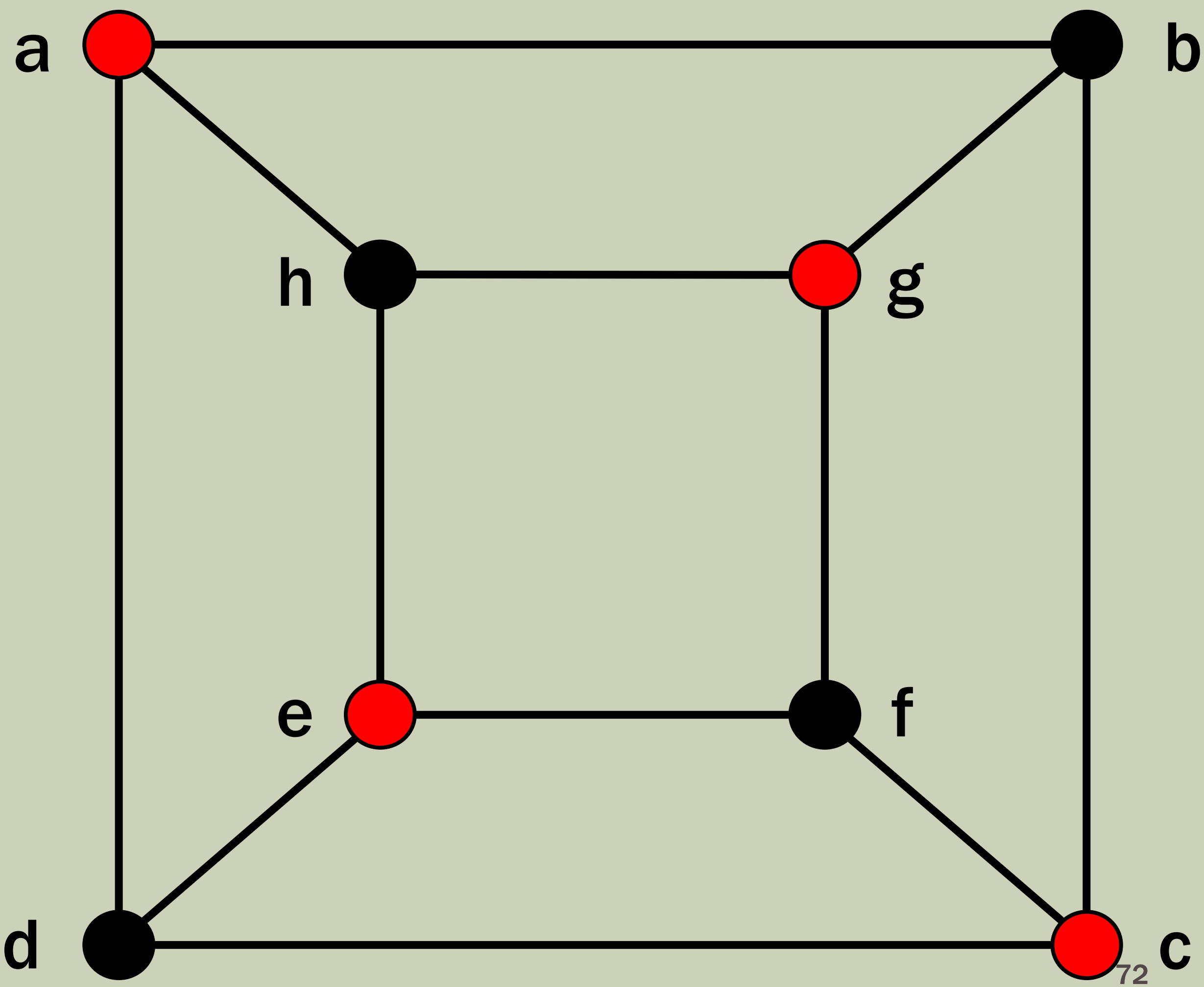
CONCEITOS BÁSICOS EM GRAFOS

cobertura
de vértices
minimal



CONCEITOS BÁSICOS EM GRAFOS

cobertura
de vértices
mínima

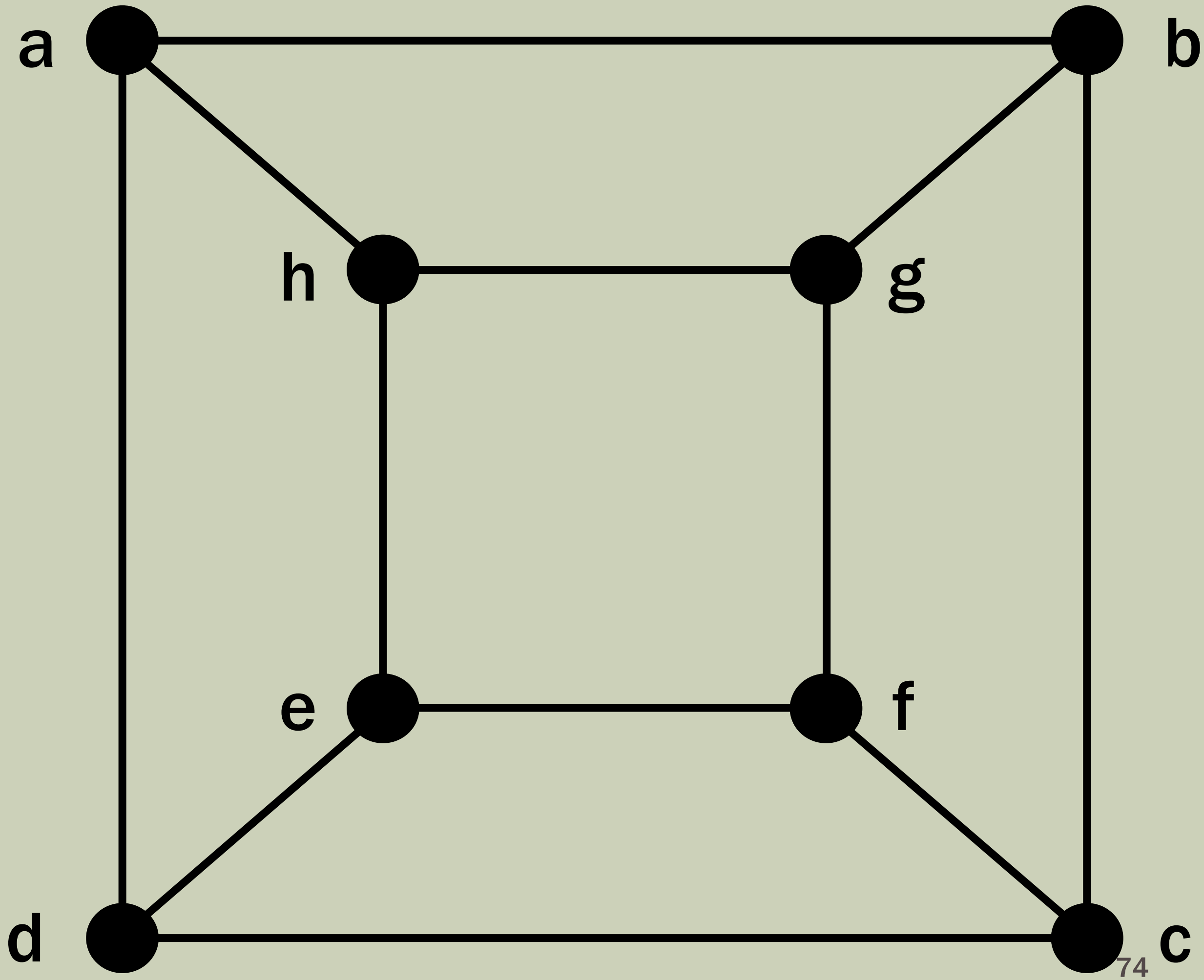


CONCEITOS BÁSICOS EM GRAFOS

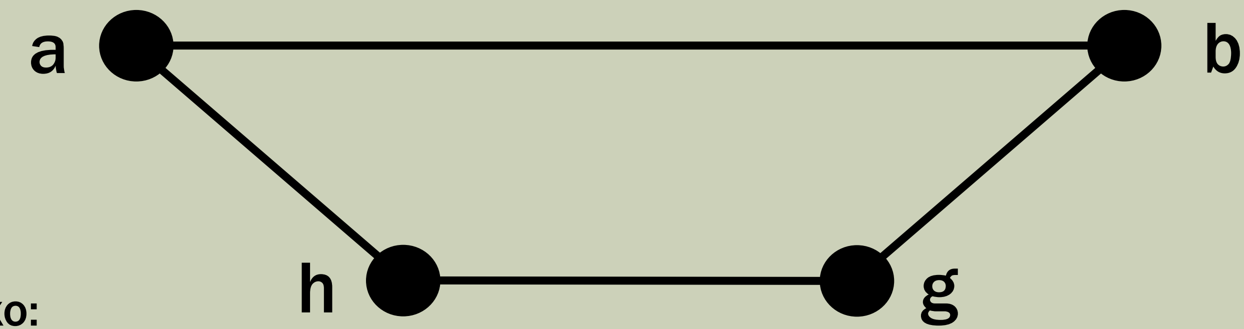
- Um grafo G é **conexo** se existe caminho entre qualquer par de vértices de G.
- Caso contrário, o grafo é **desconexo**.
- Uma **componente conexa** de um grafo G é um subgrafo conexo maximal de G.
- Notação: $w(G)$ = número de componentes conexas de G
- G é conexo se e somente se $w(G) = 1$.

CONCEITOS BÁSICOS EM GRAFOS

Exemplo de grafo conexo



CONCEITOS BÁSICOS EM GRAFOS



Exemplo de grafo desconexo:

V(G) = {a,b,c,d,e,f,g,h}

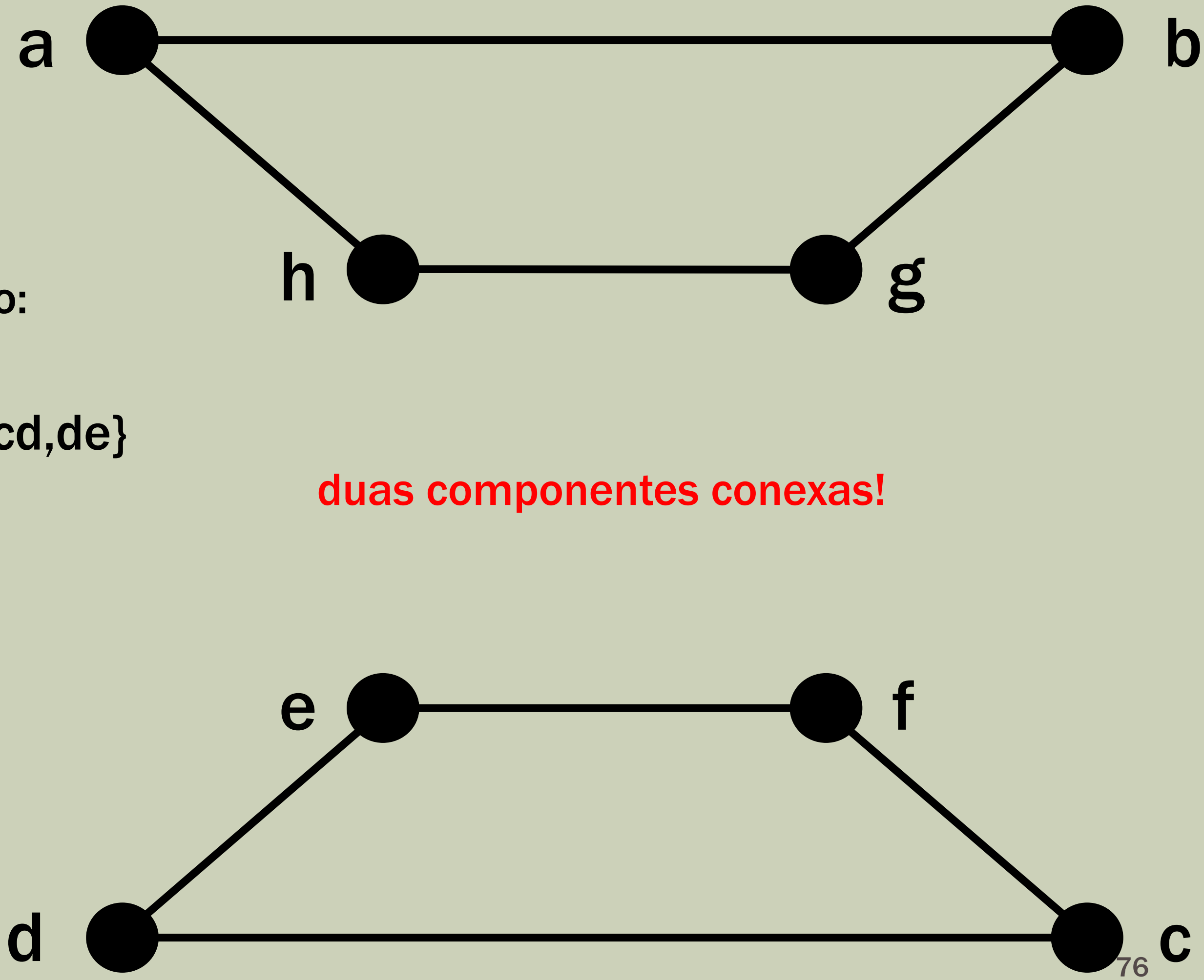
E(G) = {ab,bg,gh,ha,ef,fc,cd,de}

CONCEITOS BÁSICOS EM GRAFOS

Exemplo de grafo desconexo:

V(G) = {a,b,c,d,e,f,g,h}

E(G) = {ab,bg,gh,ha,ef,fc,cd,de}



duas componentes conexas!

CONCEITOS BÁSICOS EM GRAFOS

- A **distância** entre dois vértices x e y é o comprimento do menor caminho de x a y no grafo.

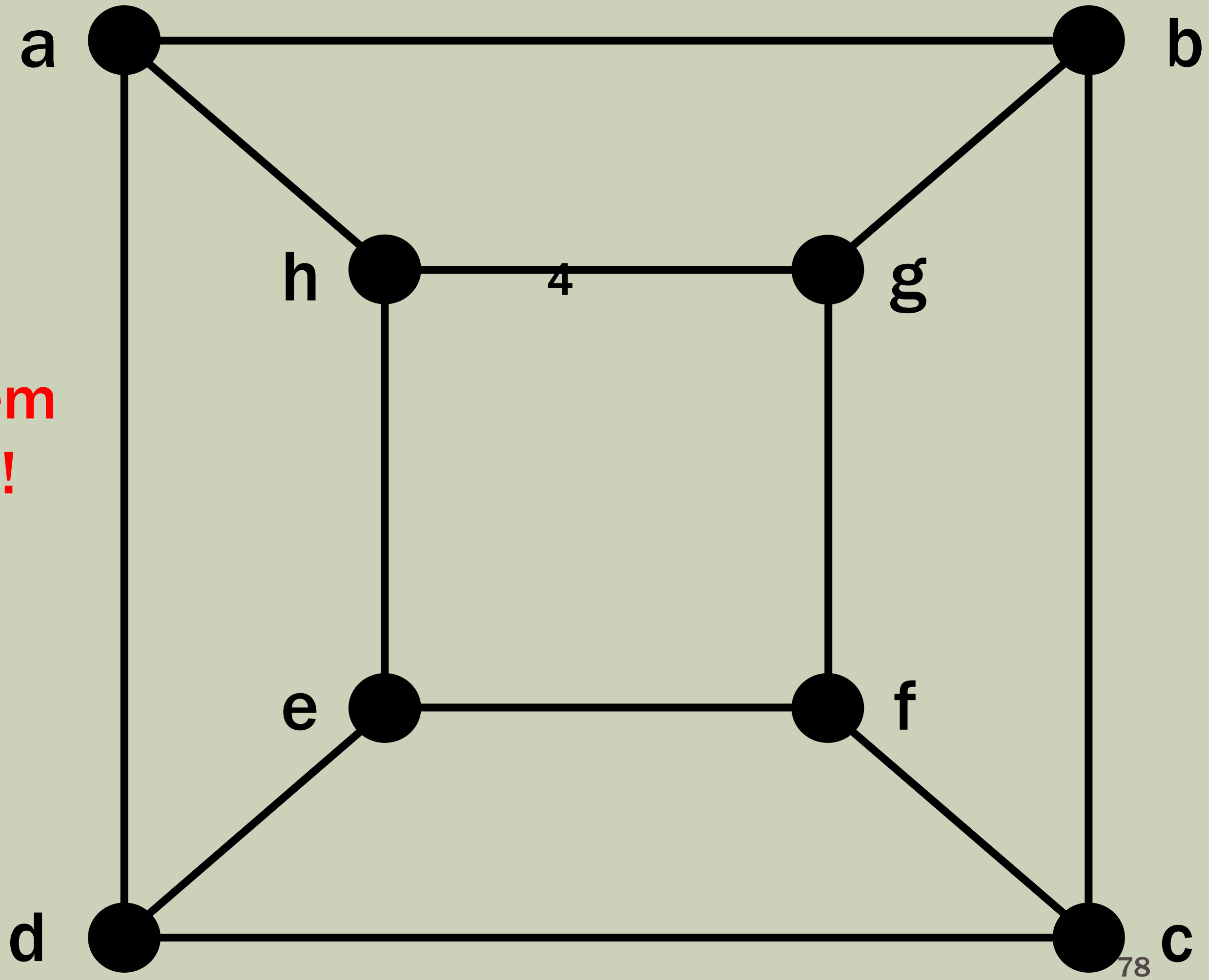
- Notação: $\text{dist}(x, y)$ = distância entre x e y

- Obs: para qualquer x, $\text{dist}(x, x) = 0$.

- A **excentricidade** de um vértice v em um grafo G é definida como:

$$\text{exc}(v) = \max \{ \text{dist}(v, x) \mid x \in V(G) \}.$$

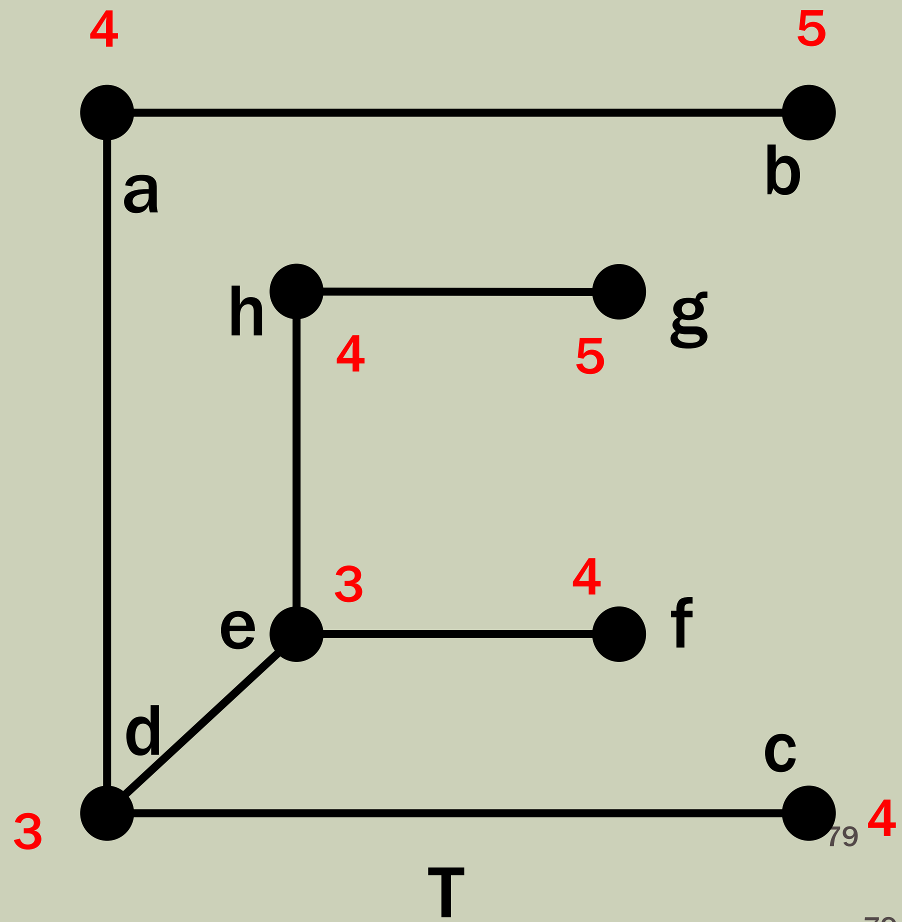
CONCEITOS BÁSICOS EM GRAFOS



todos os vértices têm excentricidade 3 !

CONCEITOS BÁSICOS EM GRAFOS

excentricidades dos vértices



CONCEITOS BÁSICOS EM GRAFOS

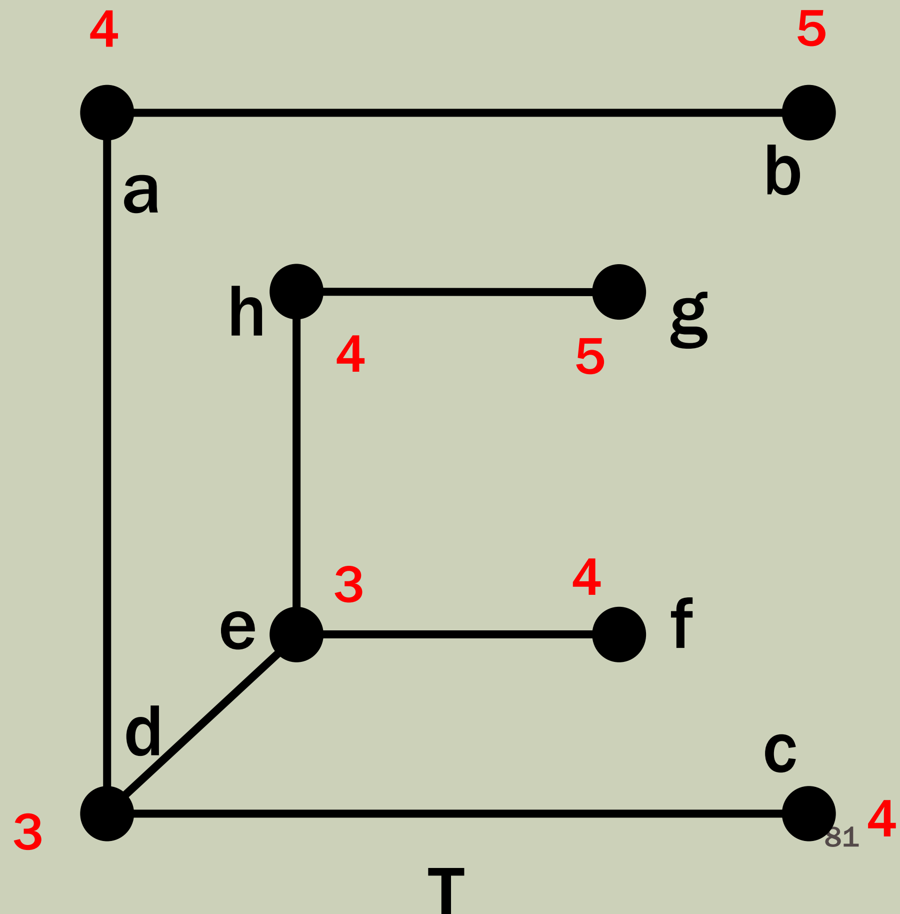
- O **diâmetro** de um grafo G é definido como

$$\text{diam}(G) = \max \{ \text{exc}(v) \mid v \in V(G) \}.$$

- O **centro** de um grafo G é o conjunto de vértices de G que possuem excentricidade mínima.

CONCEITOS BÁSICOS EM GRAFOS

o diâmetro de T é 5

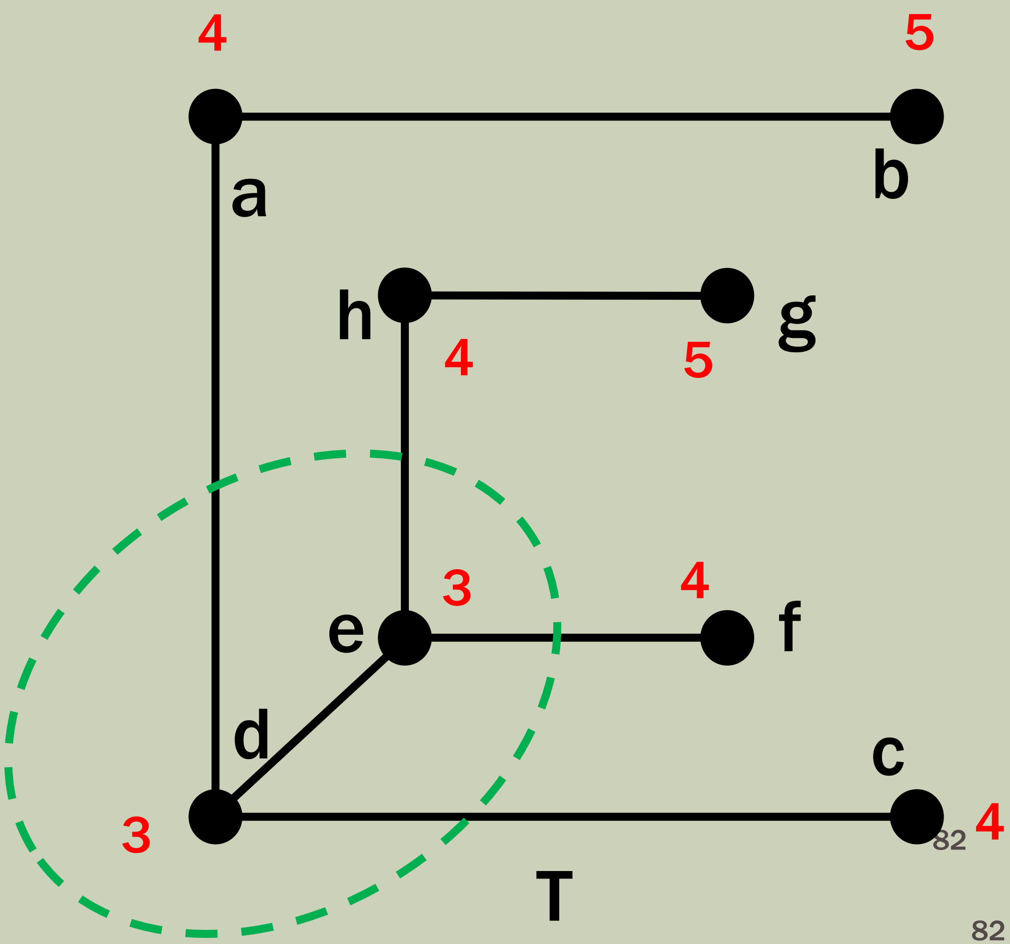


81

CONCEITOS BÁSICOS EM GRAFOS

o diâmetro de T é 5

o centro de T é o conjunto C = {d,e}



CONCEITOS BÁSICOS EM GRAFOS

- A matriz de adjacências de um grafo G é uma matriz $A_{n \times n}$ onde:

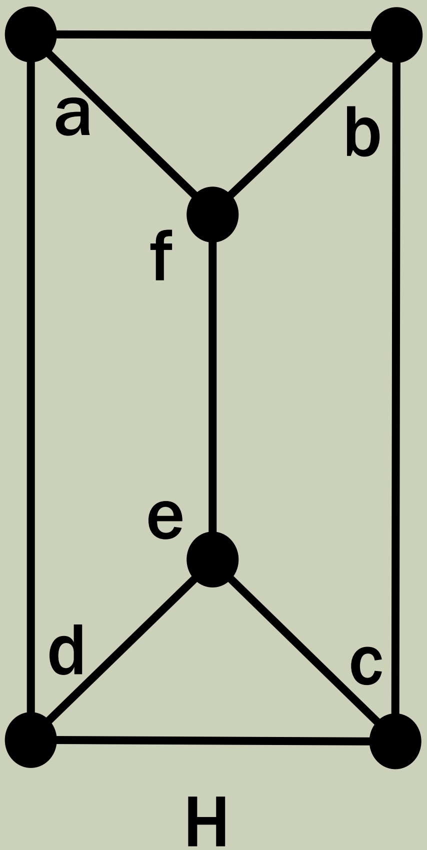
$$A[i, j] = 1 \text{ se } ij \in E(G)$$

e

$$A[i, j] = 0 \text{ se } ij \notin E(G)$$

- A matriz de adjacências é simétrica e possui zeros na sua diagonal principal
- Utilizando a matriz de adjacências como estrutura de dados, basta armazenar o triângulo superior da matriz
- A matriz de adjacências gasta memória quadrática ($O(n^2)$), mas o tempo de acesso é constante -- gasta-se tempo $O(1)$ para decidir se dois vértices são vizinhos.

CONCEITOS BÁSICOS EM GRAFOS



	a	b	c	d	e	f
a	0	1	0	1	0	1
b	1	0	1	0	0	1
c	0	1	0	1	1	0
d	1	0	1	0	1	0
e	0	0	1	1	0	1
f	1	1	0	0	1	0

matriz de adjacências

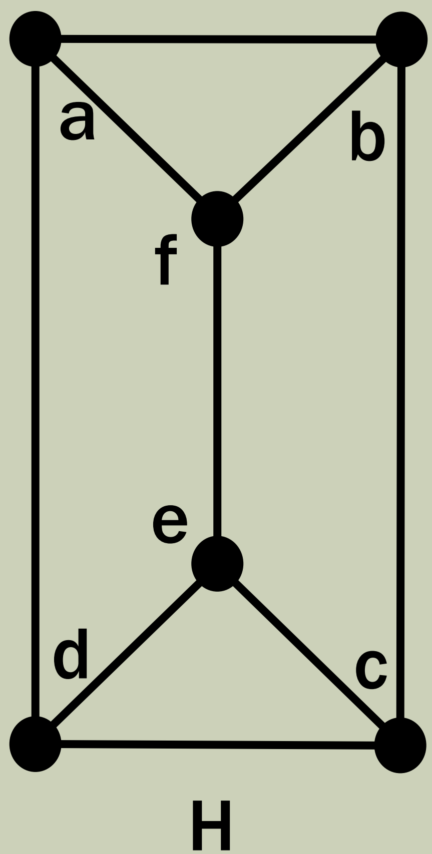
CONCEITOS BÁSICOS EM GRAFOS

- A **lista de adjacências** de um grafo G é um outro tipo de estrutura de dados para armazenar G

- O número de células de memória em uma lista de adjacências é $n+2m$

- Gasta-se tempo $O(n)$ no pior caso para decidir se dois vértices são vizinhos.

CONCEITOS BÁSICOS EM GRAFOS



a	**b**	**d**	**f**
b	a	c	f
c	b	d	e
d	a	c	e
e	c	d	f
f	a	b	e

listas de adjacência

CONCEITOS BÁSICOS EM GRAFOS

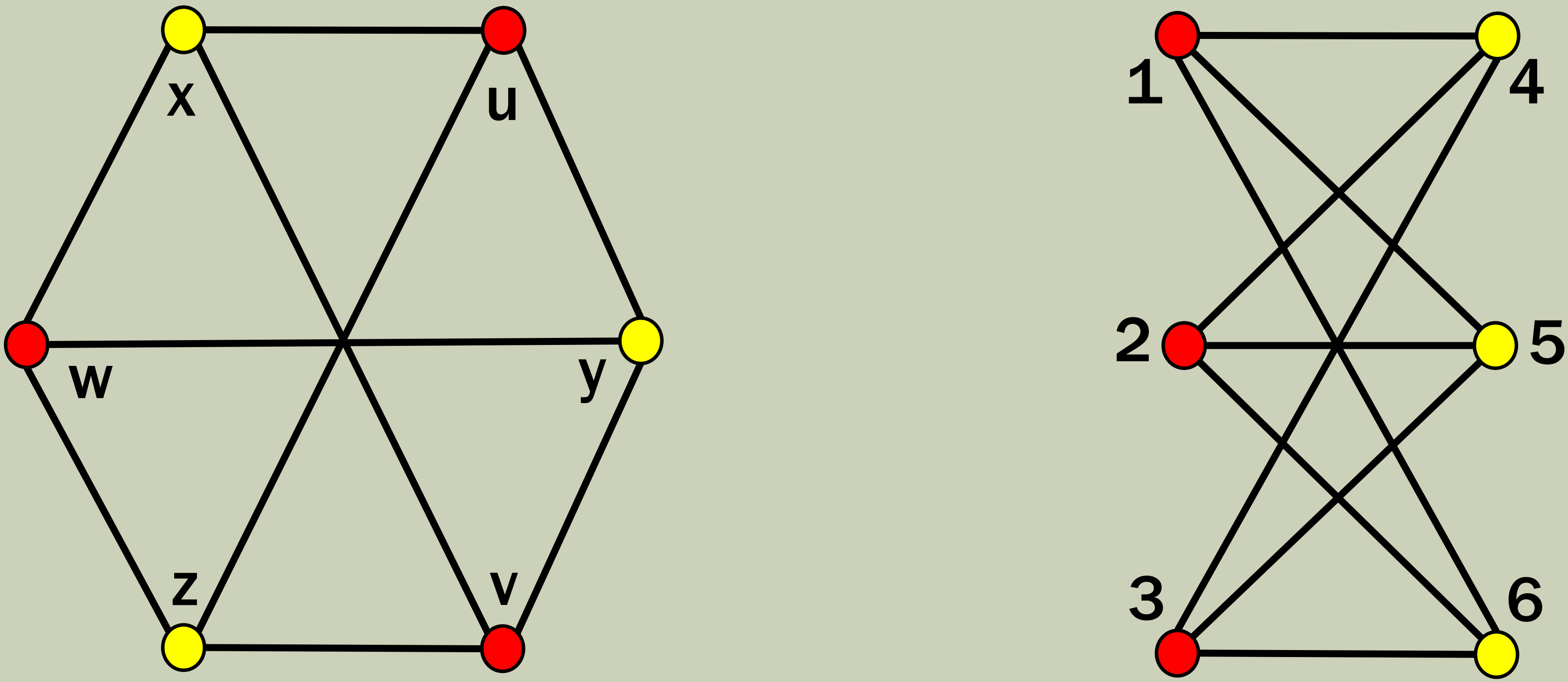
- Um grafo G é **bipartido** se $V(G)$ pode ser particionado em conjuntos X e Y de modo que toda aresta de G tem um extremo em X e outro Y.

- Como consequência desta definição, X e Y são **conjuntos independentes.**

- Um grafo bipartido G será **bipartido completo** se, para qualquer par de vértices x,y , onde $x \in X$ e $y \in Y$, temos que $xy \in E(G)$.

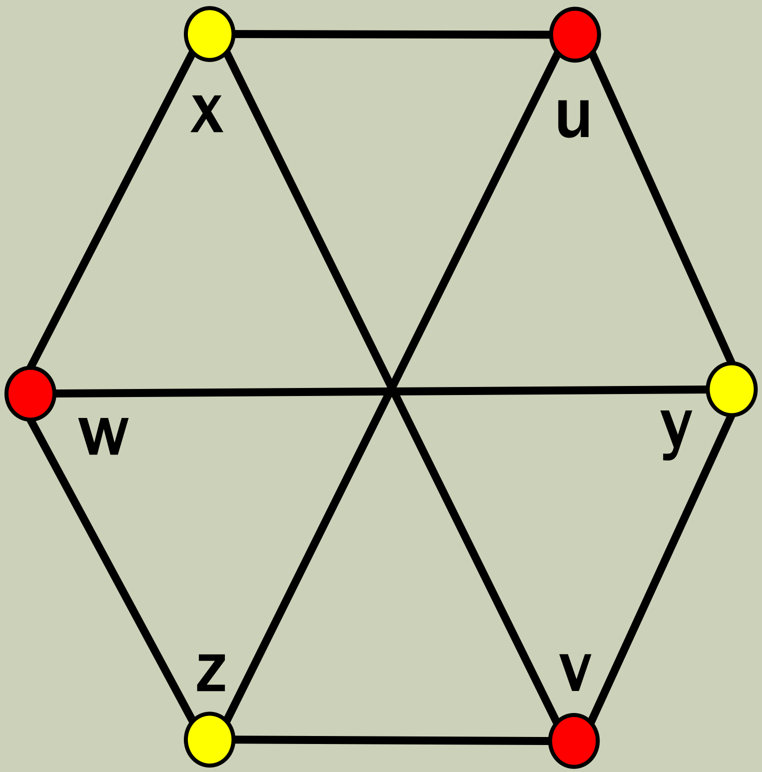
- Notação: $K_{p,q}$ = grafo bipartido completo com p vértices em X e q vértices em Y. (Neste caso, o grafo tem $p.q$ arestas.)

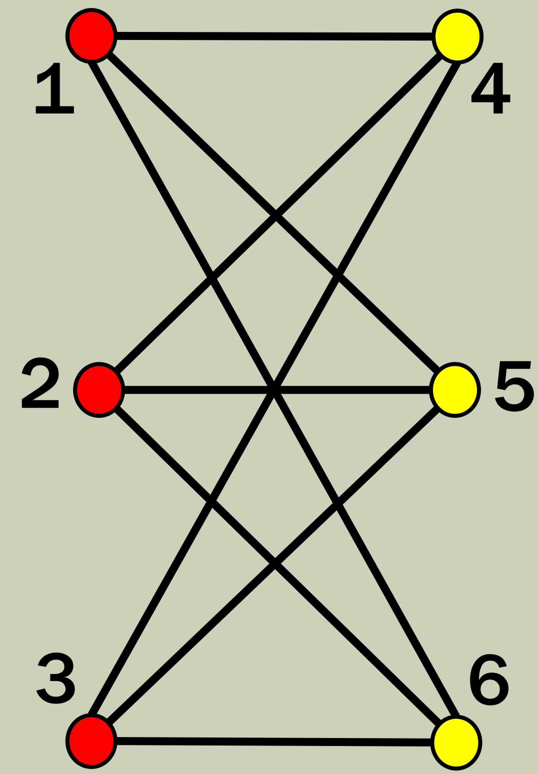
CONCEITOS BÁSICOS EM GRAFOS



Duas representações do grafo $K_{3,3}$

CONCEITOS BÁSICOS EM GRAFOS





Duas representações do grafo $K_{3,3}$

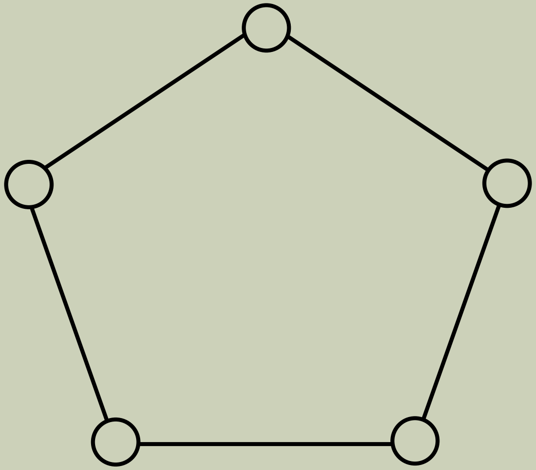
(grafos bipartidos também são chamados 2-coloríveis)

CONCEITOS BÁSICOS EM GRAFOS

- **<u>Caracterização de grafos bipartidos</u>**

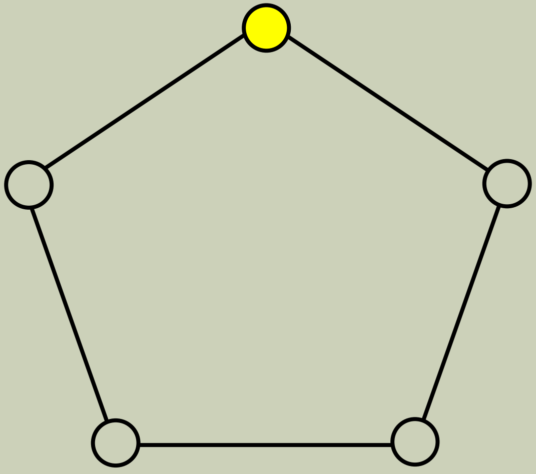
- Teorema: *G* é bipartido sss *G* não contém ciclos de comprimento ímpar.

- (=>) Por contradição. Suponha que G tenha um ciclo ímpar.



CONCEITOS BÁSICOS EM GRAFOS

- **Caracterização de grafos bipartidos**
- Teorema: G é bipartido sss G não contém ciclos de comprimento ímpar.
- (=>) Por contradição. Suponha que G tenha um ciclo ímpar.

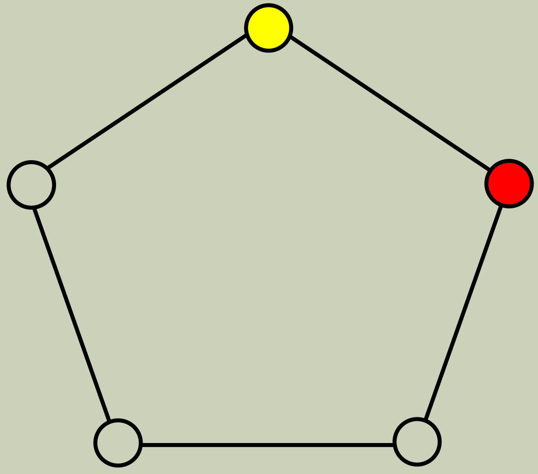


CONCEITOS BÁSICOS EM GRAFOS

- <u>**Caracterização de grafos bipartidos**</u>

- Teorema: *G* é bipartido sss *G* não contém ciclos de comprimento ímpar.

- (=>) Por contradição. Suponha que G tenha um ciclo ímpar.

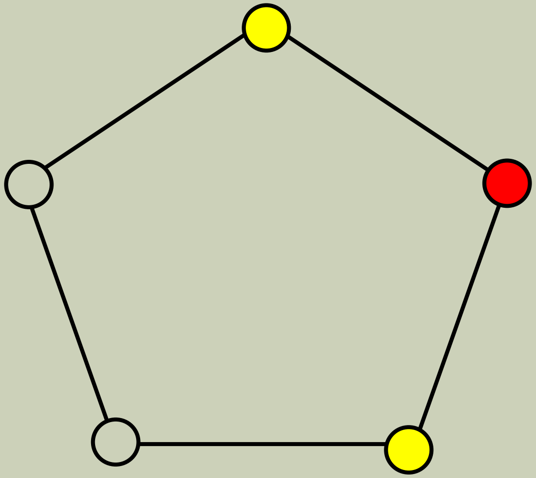


CONCEITOS BÁSICOS EM GRAFOS

- **Caracterização de grafos bipartidos**

- Teorema: *G* é bipartido sss *G* não contém ciclos de comprimento ímpar.

- (=>) Por contradição. Suponha que G tenha um ciclo ímpar.

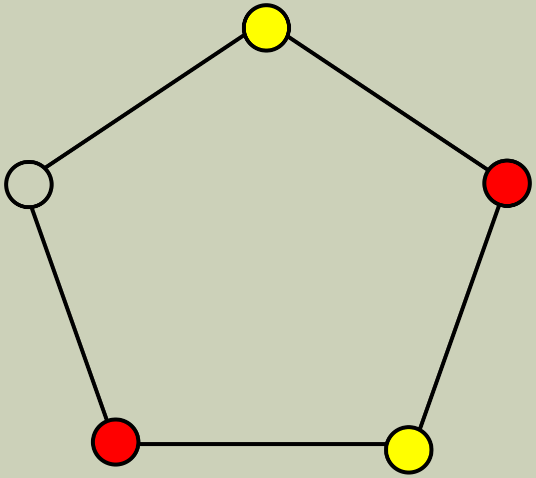


CONCEITOS BÁSICOS EM GRAFOS

- **<u>Caracterização de grafos bipartidos</u>**

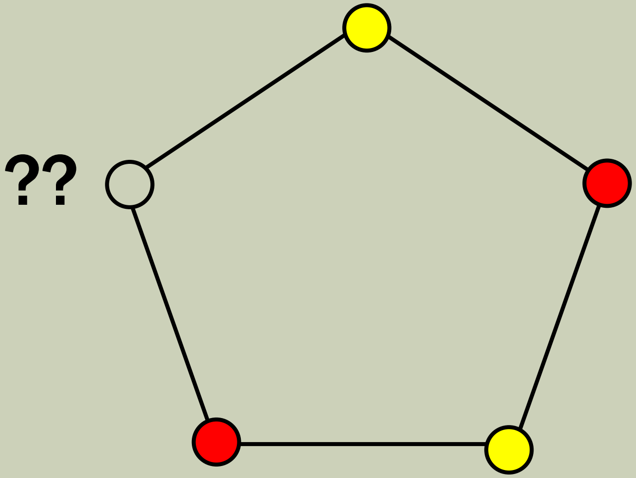
- Teorema: *G* é bipartido sss *G* não contém ciclos de comprimento ímpar.

- (=>) Por contradição. Suponha que G tenha um ciclo ímpar.



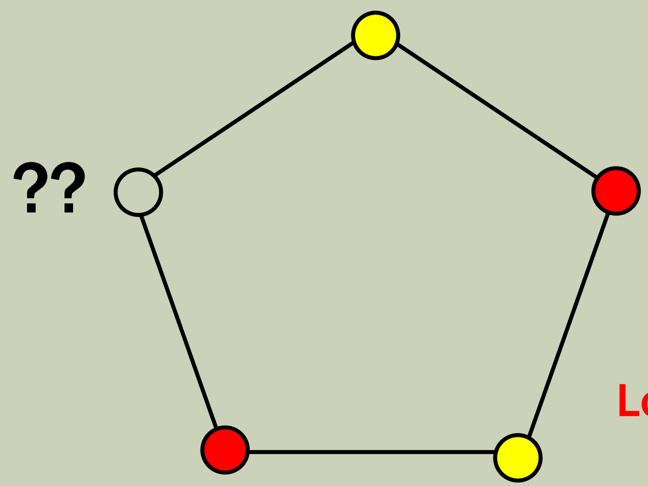
CONCEITOS BÁSICOS EM GRAFOS

- **Caracterização de grafos bipartidos**
- Teorema: *G* é bipartido sss *G* não contém ciclos de comprimento ímpar.
- (=>) Por contradição. Suponha que G tenha um ciclo ímpar.



CONCEITOS BÁSICOS EM GRAFOS

- **Caracterização de grafos bipartidos**
- Teorema: *G* é bipartido sss *G* não contém ciclos de comprimento ímpar.
- (=>) Por contradição. Suponha que G tenha um ciclo ímpar.



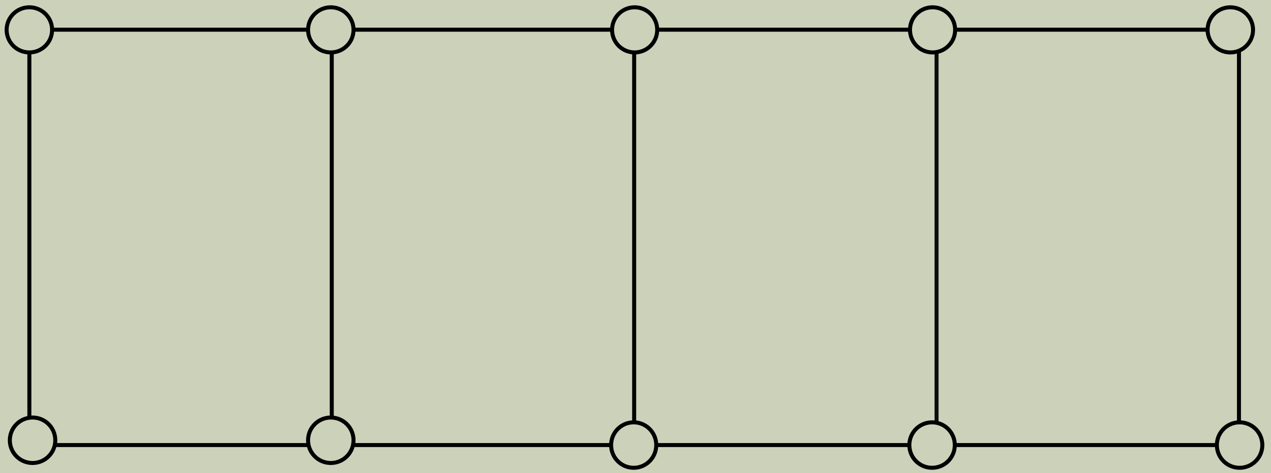
G não é 2-colorível!
Absurdo!
Logo, G não tem ciclos ímpares.

CONCEITOS BÁSICOS EM GRAFOS

- **Caracterização de grafos bipartidos**

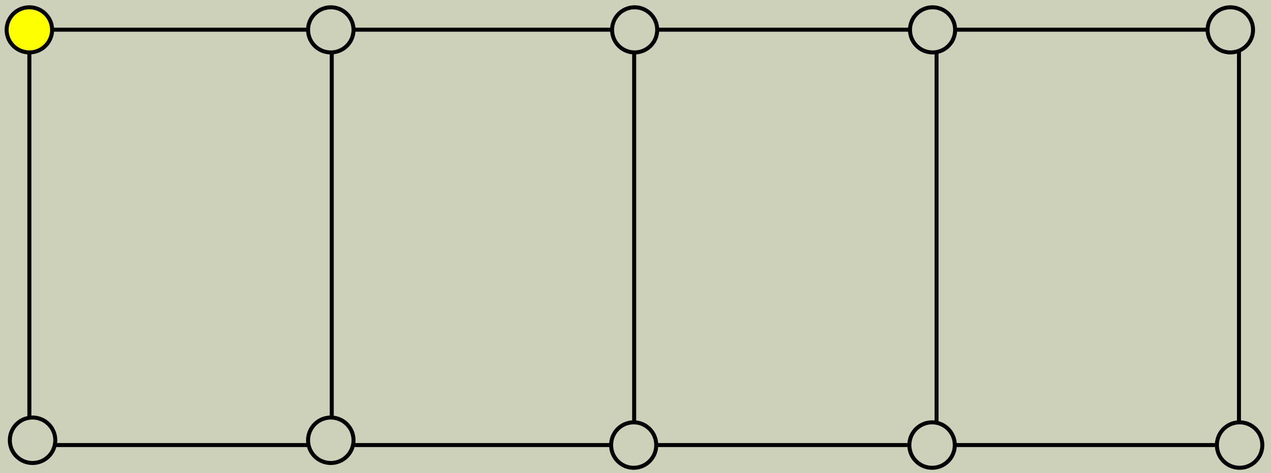
- Teorema: *G* é bipartido sss *G* não contém ciclos de comprimento ímpar.

- (<=) Por construção.



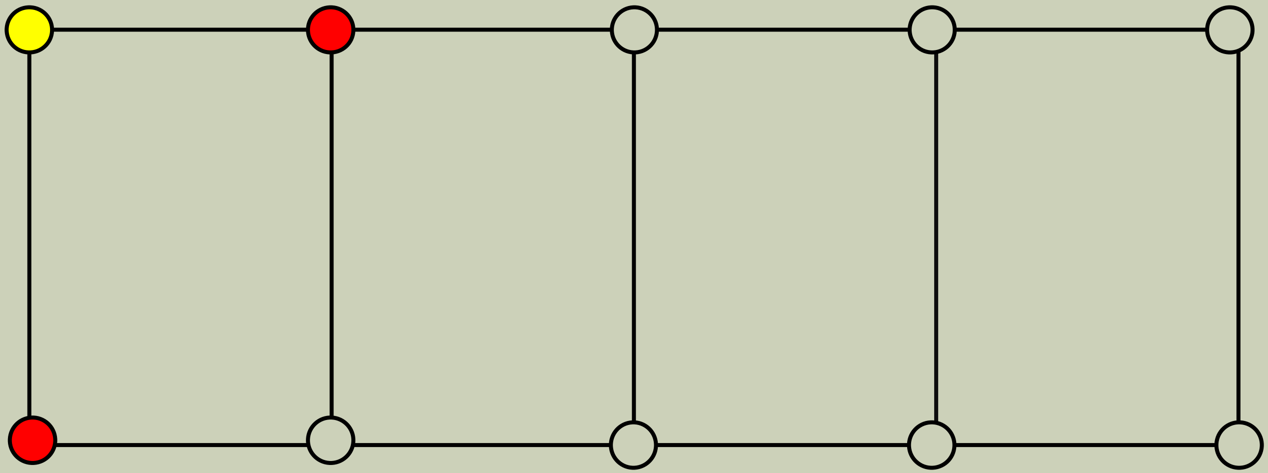
CONCEITOS BÁSICOS EM GRAFOS

- **<u>Caracterização de grafos bipartidos</u>**
- Teorema: *G* é bipartido sss *G* não contém ciclos de comprimento ímpar.
- (<=) Por construção.



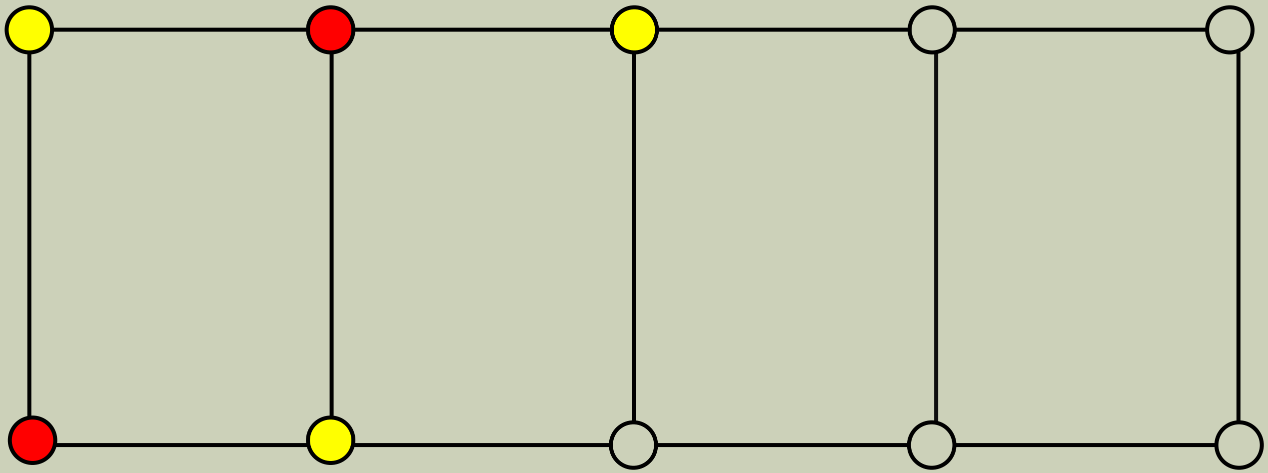
CONCEITOS BÁSICOS EM GRAFOS

- **Caracterização de grafos bipartidos**
- Teorema: *G* é bipartido sss *G* não contém ciclos de comprimento ímpar.
- (<=) Por construção.



CONCEITOS BÁSICOS EM GRAFOS

- **Caracterização de grafos bipartidos**
- Teorema: *G* é bipartido sss *G* não contém ciclos de comprimento ímpar.
- (<=) Por construção.

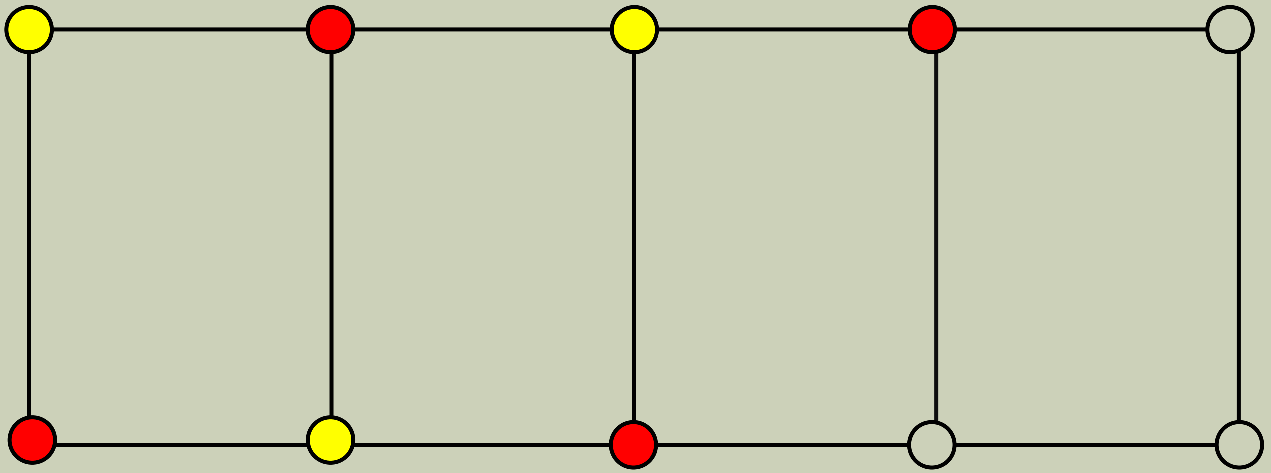


CONCEITOS BÁSICOS EM GRAFOS

- **Caracterização de grafos bipartidos**

- Teorema: *G* é bipartido sss *G* não contém ciclos de comprimento ímpar.

- (<=) Por construção.

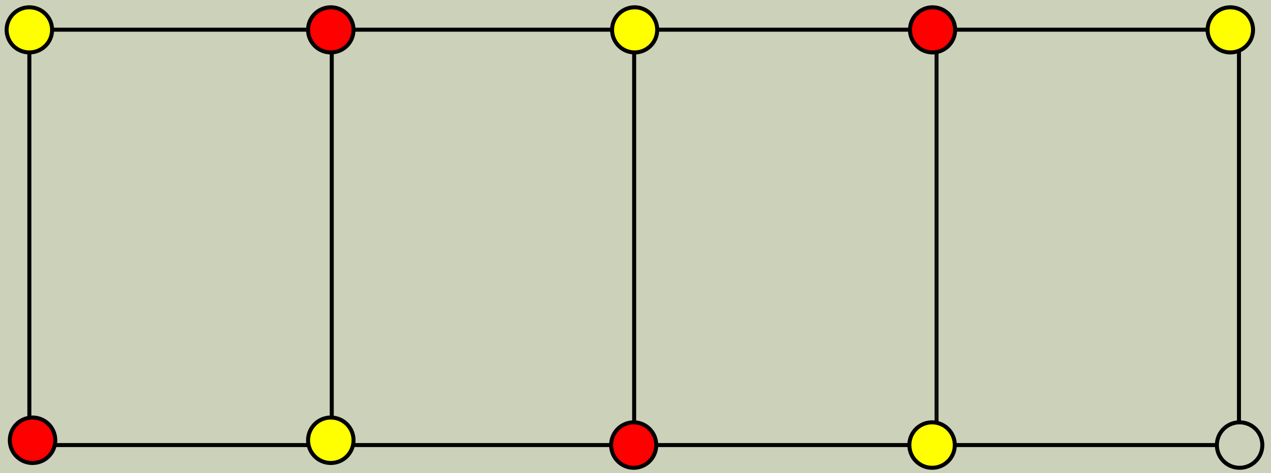


CONCEITOS BÁSICOS EM GRAFOS

- **<u>Caracterização de grafos bipartidos</u>**

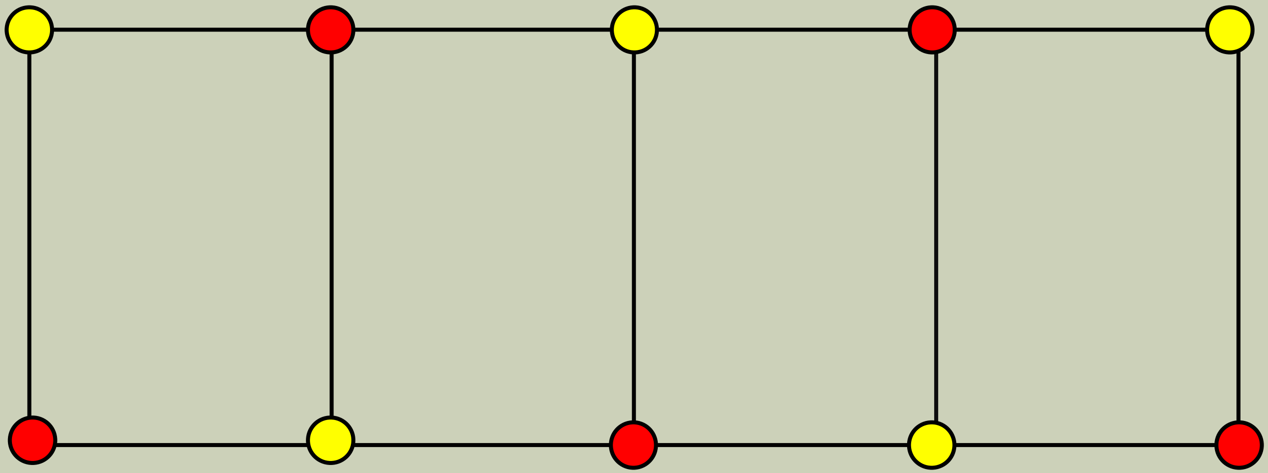
- Teorema: *G* é bipartido sss *G* não contém ciclos de comprimento ímpar.

- (<=) Por construção.



CONCEITOS BÁSICOS EM GRAFOS

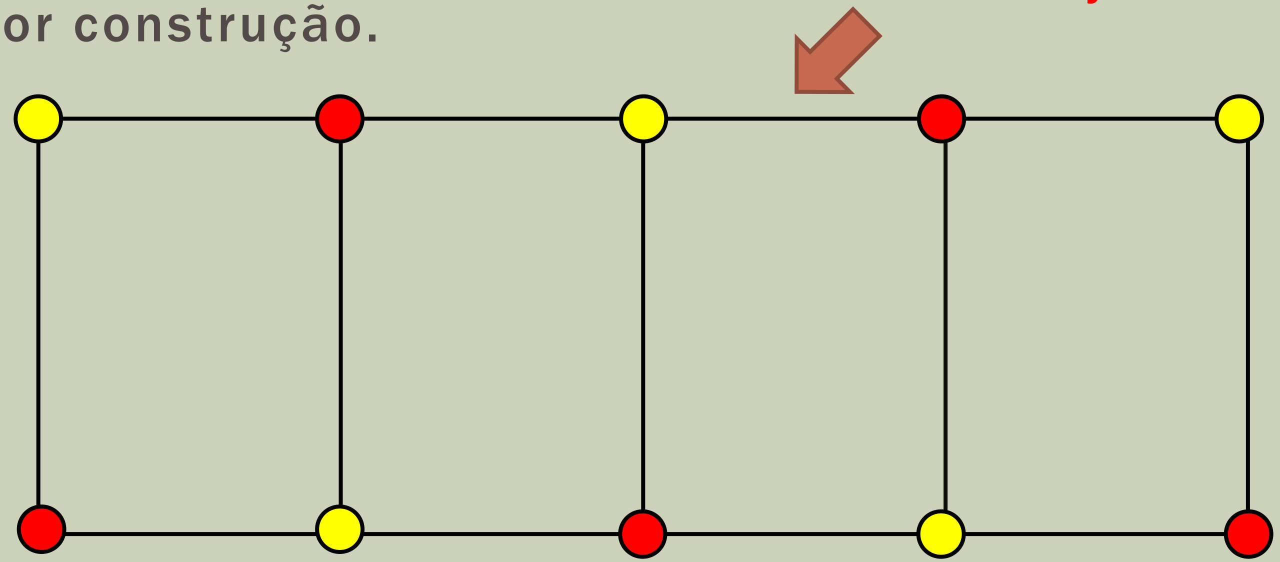
- **<u>Caracterização de grafos bipartidos</u>**
- Teorema: *G* é bipartido sss *G* não contém ciclos de comprimento ímpar.
- (<=) Por construção.



CONCEITOS BÁSICOS EM GRAFOS

- **<u>Caracterização de grafos bipartidos</u>**
- Teorema: *G* é bipartido sss *G* não contém ciclos de comprimento ímpar.
- (<=) Por construção.

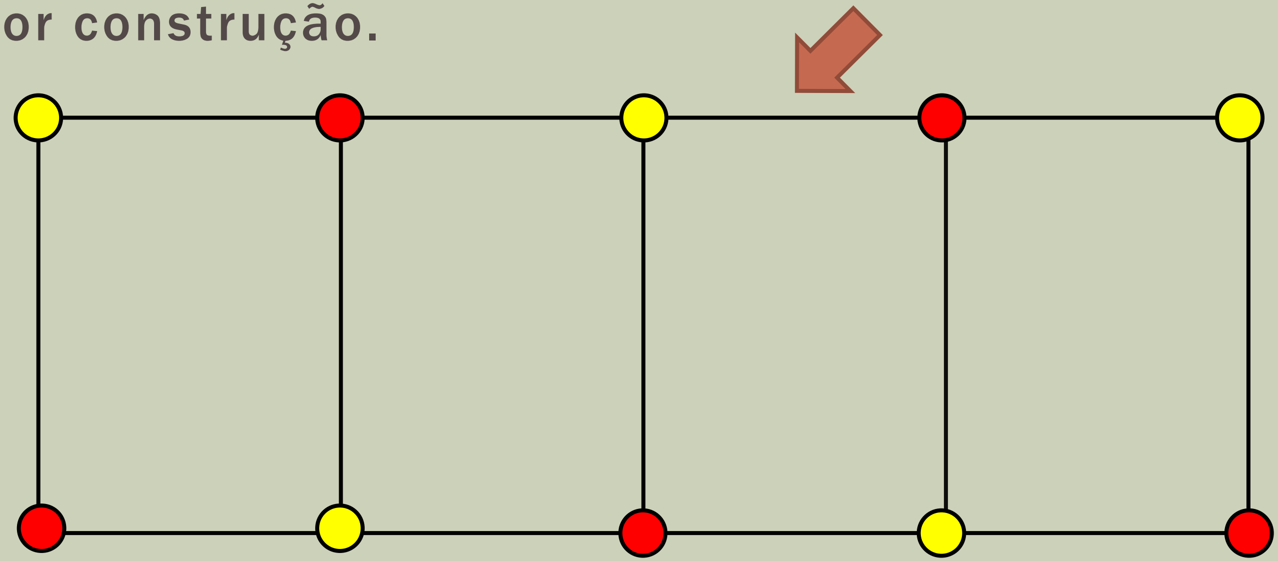
Note que os vértices amarelos formam um conjunto independente.



CONCEITOS BÁSICOS EM GRAFOS

- **<u>Caracterização de grafos bipartidos</u>**
- Teorema: *G* é bipartido sss *G* não contém ciclos de comprimento ímpar.
- (<=) Por construção.

O mesmo vale para os vértices vermelhos



CONCEITOS BÁSICOS EM GRAFOS

- **<u>Caracterização de grafos bipartidos</u>**

- Teorema: G é bipartido sss G não contém ciclos de comprimento ímpar.

Logo, G é bipartido!

- (<=) Por construção.