TRABALHO 2

EXERCICIO 1

1. Suponha que haja 40 bolas em um chapéu, das quais 10 são vermelhas, 10 são azuis,10 são amarelas e 10 são roxas. Qual é a probabilidade de obter no mínimo uma bola azul e uma roxa ao rar 8 bolas aleatoriamente do chapéu? O que muda no resultado caso a bola seja re rada e não reposta.

Cálculo com reposição:

Probabilidade de ter nenhuma azul:

$$P(A) = \left(\frac{30}{40}\right)^8$$

Probabilidade de ter nenhuma roxa:

$$P(R) = \left(\frac{30}{40}\right)^8$$

Probabilidade de ter nenhuma roxa e nenhuma azul

$$P(AR) = \left(\frac{20}{40}\right)^8$$

Probabilidade de ter pelo menos uma azul e uma roxa

$$P = 1 - P(A) - P(R) + P(AR)$$
$$P = 1 - 2\left(\frac{30}{40}\right)^8 + \left(\frac{20}{40}\right)^8 \rightarrow P \approx 0.8037$$

Cálculo sem reposição:

Combinações para ter nenhuma azul:

$$C(A) = \binom{30}{8}$$

Combinações para ter nenhuma roxa:

$$C(R) = \binom{30}{8}$$

Combinações para ter nenhuma roxa e nenhuma azul

$$C(AR) = \binom{20}{8}$$

Todas as combinações

$$C(T) = \binom{40}{8}$$

Probabilidade de ter pelo menos uma azul e uma roxa

$$P = 1 - \left(\frac{C(A) + C(R) - C(AR)}{C(T)}\right)$$

$$P = 1 - \left(\frac{2\binom{30}{8} - \binom{20}{8}}{\binom{40}{8}}\right) \rightarrow P \approx 0.8494$$

EXERCICIO 2

2. Se você lançar dois dados equilibrados simultaneamente, usando simulação de Monte Carlo faça a esma va da probabilidade de que a soma seja igual ou maior que 10.

Para obter a soma maior a 10:

Tem (4,6), (6,4),(5,5),(5,6),(6,5),(6,6) que são 6

Em total tem 6x6 possíveis combinações

$$P = \frac{6}{36} \rightarrow P \approx 0.1667$$

3. Você paga 1 real e pode lançar quatro dados. Se a soma dos olhos nos dados for inferior a 12, recebe de volta r reais, caso contrário perde o invesmento de 1 real.Suponha que r = 20. Você vai, então, a longo prazo, ganhar ou perder dinheiro ao jogar este jogo? Suponha que o jogador faça novas apostas enquanto tem dinheiro.

Soma	N° de combinações
4	1
5	4
6	10
7	20
8	35
9	56
10	80
11	104

Total são 310 possíveis combinações

O total de possibilidades $6^4 \rightarrow 1296$

Probabilidade de ganhar: $P(G) = \frac{310}{1296}$

$$G = 19 * P(G) + \left(1 - P(G)\right) * (-1)$$
$$G = 19 * \frac{310}{1296} - \left(1 - \frac{310}{1296}\right) \rightarrow G \approx 3.784$$

EXCERCICIO 4

INTEGRAL A)

$$\left[\mathrm{I} = \int_0^1 (1 - \mathrm{x}^5)^{7/2}\,, \mathrm{dx}\right]$$

1. Método Direto de Monte Carlo

$$\left[f(x) = (1 - x^5)^{7/2}\right]$$

A integral é:

$$\left[\mathrm{I} = \int_0^1 \mathrm{f(x)}\,, \mathrm{dx}\right]$$

A aproximação numérica é calculada como:

$$\left[\mathrm{I} \approx \frac{1}{\mathrm{N}} \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{N}} \mathrm{f}(\mathrm{x_i})\right]$$

onde x_i são pontos gerados aleatoriamente de uma distribuição uniforme em [0,1], e N é o número de amostras. Com N = 10^6 (1.000.000), obtém-se:

$$\left[\mathrm{I} \approx \frac{1}{10^6} \sum_{\mathrm{i}=1}^{10^6} \left(1 - \mathrm{x_i^5}\right)^{7/2}\right]$$

Resultado aproximado:

$$[\mathrm{I} = 0.6919]$$

2. Método de Integração por Importância

$$\left[g(x) = 5x^4, \quad x \in [0,1]\right]$$

La integral se reescribe como:

$$\left[\mathrm{I} = \int_0^1 \frac{\mathrm{f(x)}}{\mathrm{g(x)}} \mathrm{g(x)}, \mathrm{dx}\right]$$

y se aproxima mediante:

$$\left[I \approx \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\frac{f(x_i)}{g(x_i)}\right]$$

donde$\left(x_i = y_i^{1/5}\right)$ y $\left(y_i \sim \text{Uniforme}(0,1)\right)$. Sustituyendo:

- $\left(f(x_i) = \left(1 - x_i^5\right)^{7/2} = (1 - y_i)^{7/2}\right)$
- $\left(g(x_i) = 5x_i^4 = 5\left(y_i^{1/5}\right)^4 = 5y_i^{4/5}\right)$

Então:

$$\left[\frac{f(x_i)}{g(x_i)} = \frac{(1 - y_i)^{7/2}}{5y_i^{4/5}}\right]$$

Para (N = 10^6), ele cálculo da:

$$\left[I \approx \frac{1}{10^6}\sum_{i=1}^{10^6}\frac{(1 - y_i)^{7/2}}{5y_i^{4/5}}\right]$$

Resultado aproximado:

$$[I = 0.6348]$$

Solução Analítica

A solução exata é obtida transformando a integral em uma forma que coincide com a função beta. Com a substituição $(t = x^5), (dt = 5x^4, dx), \left(dx \frac{dt}{5t^{4/5}}\right)$, y ajustando los límites$\left((x = 0 \to t = 0), (x = 1 \to t = 1)\right)$,

integral se torna:

$$\left[I = \int_0^1 (1 - t)^{7/2} \cdot \frac{dt}{5t^{4/5}} = \frac{1}{5}\int_0^1 t^{-4/5}(1 - t)^{7/2}\,, dt\right]$$

Esto corresponde a:

$$\left[I = \frac{1}{5}B\left(\frac{1}{5}, \frac{9}{2}\right)\right]$$

$$donde\left(B(a,b) = \int_0^1 t^{a-1}(1 - t)^{b-1}\,, dt\right),$$

$$con(a = 1/5)\ y\ (b = 9/2). Elvalorexactocalculadoes:$$

[I = 0.6921]

Resultados Finales

- **Solución analítica**: (I = 0.6921)
- **Monte Carlo directo**: (I = 0.6919)
- **Integración por importancia**: (I = 0.6348)

INTEGRAL B

Para resolver a integral ($\mathrm{I} = \int_{-5}^{10} \exp(x + x^3)\ \mathrm{dx}$) utilizando o método de Monte Carlo direto e o método de integração por importância, apresenta-se a seguir uma explicação detalhada e formal de cada abordagem em português do Brasil.

Método Direto de Monte Carlo

$-Intervalo$: $([-5,10]), comcomprimento (L = 15)$.

$-Função$: $(f(x) = \exp(x + x^3))$.

$-\ Fórmula$:

$$[\mathrm{I} \approx \frac{\mathrm{L}}{\mathrm{N}} \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{N}} \mathrm{f}(\mathrm{x_i})]$$

$onde(x_i)$ é $amostrado\ de\ uma\ distribuição\ uniforme\ em$ $([-5,10]) e (N = 10^6)$.

Procedimento:

1. Gere $(N = 10^6) pontos(x_i)$
2. aleatórios no intervalo $([-5,10])$.
3. Calcule $(f(x_i) = \exp(x_i + x_i^3))$ para cada ponto.
4. Compute a soma $(\sum_{i=1}^{N} f(x_i))$ e multiplique por $(\frac{15}{10^6})$.

Resultado: A estimativa é dada por $(I \approx 1.5 \times 10^{-5} \sum_{i=1}^{10^6} \exp(x_i + x_i^3))$, com valores tipicamente dominados por amostras próximas de $(\ x\ =\ 10\ )$.

Método de Integração por Importância

Distribuição auxiliar: Escolhe-se $(g(x) = k \exp\big(\lambda(x + 5)\big))$ para $(x \in [-5,10])$,

$com(\lambda = 0.5)$ e $(k = \frac{\lambda}{\exp(15\lambda) - 1})$.

Fórmula:

$$[I \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \frac{f(x_i)}{g(x_i)}]$$

$$onde(x_i)éamostradode(g(x))e(N = 10^6).$$

Procedimento:

1. Gere ($N = 10^6$) pontos (x_i) a partir de ($g(x)$).
2. Calcule ($\frac{f(x_i)}{g(x_i)} = \frac{\exp(x_i + x_i^3)}{k \exp(\lambda(x_i + 5))}$) para cada ponto.

Resultado: A estimativa é dada por ($I \approx \frac{1}{10^6} \sum_{i=1}^{10^6} \frac{\exp(x_i + x_i^3)}{k \exp(\lambda(x_i + 5))}$)

INTEGRAL C

Método Direto de Monte Carlo

Função transformada:** Substitui-se na integral:

$$[\mathrm{x} = \frac{\mathrm{t}}{1-\mathrm{t}}, \quad \mathrm{x}^2 = \left(\frac{\mathrm{t}}{1-\mathrm{t}}\right)^2, \quad 1 + \mathrm{x}^2 = 1 + \left(\frac{\mathrm{t}}{1-\mathrm{t}}\right)^2 = \frac{1}{(1-\mathrm{t})^2}, \quad (1 + \mathrm{x}^2)^{-3} = (1 - \mathrm{t})^6]$$

Então:

$$[x^2(1 + x^2)^{-3} = \left(\frac{t}{1 - t}\right)^2 (1 - t)^6 = t^2(1 - t)^4]$$

A integral torna-se:

$$[\mathrm{I} = \int_0^1 \mathrm{t}^2(1 - \mathrm{t})^4 \cdot \frac{\mathrm{dt}}{(1 - \mathrm{t})^2} = \int_0^1 \mathrm{t}^2(1 - \mathrm{t})^2 \ \mathrm{dt}]$$

Fórmula de Monte Carlo: Para ($t \in [0,1]$)$, define - se(h(t) = t^2(1 - t)^2)$, e:

$$[I \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} h(t_i)]$$

onde ($t_i \sim \mathrm{Uniforme}[0,1]$)$, e(N = 10^6)$.

Procedimento:

1. Gere ($N = 10^6$) pontos (t_i) aleatórios em ($[0,1]$).
2. Calcule ($h(t_i) = t_i^2(1 - t_i)^2$) para cada ponto.
3. Compute a média dos valores ($h(t_i)$).

Resultado: A estimativa é dada por ($I \approx \frac{1}{10^6} \sum_{i=1}^{10^6} t_i^2(1 - t_i)^2$), com valores tipicamente próximos da solução analítica.

Método de Integração por Importância

Distribuição auxiliar: Após a transformação, a integral é ($I = \int_0^1 t^2(1 - t)^2 \ dt$)$. Escolhe - se(g(t))$ proporcional $a(t^2(1 - t)^2)$, normalizada em ($[0,1]$):

$[g(t) = kt^2(1-t)^2, \quad \int_0^1 k\, t^2(1-t)^2\, dt = 1]$

Calcula-se:

$$[\int_0^1 t^2(1-t)^2\ dt = \int_0^1 (t^2 - 2t^3 + t^4)\ dt = \left[\frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{2} + \frac{t^5}{5}\right]_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} = \frac{1}{30}$$

$$Então, (k = \frac{1}{\frac{1}{30}} = 30), e(g(t) = 30t^2(1-t)^2).$$

Fórmula: A integral é reescrita como:

$$[I = \int_0^1 \frac{h(t)}{g(t)} g(t)\, dt, \quad I \approx \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \frac{h(t_i)}{g(t_i)}]$$

$onde(h(t) = t^2(1-t)^2), (g(t) = 30t^2(1-t)^2), e(t_i \sim g(t)). Assim:$

$$[\frac{h(t_i)}{g(t_i)} = \frac{t_i^2(1-t_i)^2}{30t_i^2(1-t_i)^2} = \frac{1}{30}]$$

Logo:

$$[I \approx \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{30} = \frac{1}{30}]$$

Procedimento:

1. Gere($N = 10^6$) pontos (t_i) a partir de ($g(t)$) (na prática, usa-se amostragem por rejeição ou métodos numéricos).
2. Calcule ($\frac{h(t_i)}{g(t_i)} = \frac{1}{30}$) para cada ponto.

3. Compute a média.

Resultado: A estimativa é ($I \approx \frac{1}{30} = 0.0333$).

Solução Analítica

A integral transformada ($I = \int_0^1 t^2(1-t)^2\ dt$) foi calculada anteriormente:

$$[I = \frac{1}{30} \approx 0.0333]$$

Resultados Finais

Solução analítica: $(I = \frac{1}{30} \approx 0.0333)$

Monte Carlo direto: $(I \approx \frac{1}{10^6} \sum_{i=1}^{10^6} t_i^2 (1 - t_i)^2)\, , próximo\ de (0.0333)$

Integração por importância: $(I = 0.0333)(exato, devido$ à $escolhaideal\ de(g(t)))$