

SIMULAÇÃO MONTE CARLO

LUIS ENRIQUE CARDOZO RAMIREZ

DAVID FABIAN TAVERA GUTIERREZ

SIMULAÇÃO MONTE CARLO PARA SISTEMAS MIMO

05/05/2025

-

T547 - Princípios de Simulação

-

Prof. Samuel Baraldi

ÍNDICE

1. INTRODUÇÃO	1
2. OBJETIVO	1
3. ASPECTOS TEÓRICOS	2
4. ANÁLISE DA FIGURA 1:	3
4.3 O que isso significa tecnicamente	3
5. METODOLOGIA DE SIMULAÇÃO MONTE CARLO	5
6. RESULTADOS E INTERPRETAÇÃO	6
7. CONCLUSÃO	7
8. Referências bibliográficas	7

1. INTRODUÇÃO

Os sistemas de comunicação sem fio passaram por um desenvolvimento significativo nas últimas décadas, impulsionado pela crescente demanda por serviços de alta velocidade e eficientes em termos de espectro. Nesse contexto, os sistemas **MIMO (Multiple-Input Multiple-Output)** ganharam atenção especial devido à sua capacidade de melhorar o desempenho das comunicações sem fio usando várias antenas no transmissor e no receptor [1]. Esses sistemas permitem o aumento da capacidade de transmissão sem a necessidade de aumentar a largura de banda ou a potência transmitida.

No entanto, a otimização do desempenho dos sistemas MIMO continua sendo um desafio, especialmente quando se trabalha com **esquemas fixos de modulação e codificação (MCS)**. Em sistemas práticos, o conjunto de MCSs disponíveis é limitado, o que torna impossível ajustar continuamente a taxa de transmissão às condições do canal. Como resultado, a otimização da capacidade de informação não garante necessariamente o desempenho máximo de throughput [1]. Esse problema motiva a busca por novas estratégias de alocação de potência que maximizem a taxa de transferência em sistemas MIMO com MCS fixo.

Uma abordagem comum para estudar o desempenho dos sistemas MIMO é por meio de modelos matemáticos baseados em decomposição de valor singular (SVD) e preenchimento de água. Entretanto, esses métodos pressupõem condições ideais que nem sempre refletem o comportamento real dos sistemas em ambientes de desvanecimento plano ou espacialmente correlacionados [1]. Para resolver essa limitação, este documento propõe o uso da simulação de Monte Carlo como uma ferramenta para gerar variáveis aleatórias que representam as condições do canal MIMO. Essa técnica nos permite modelar com mais precisão a variabilidade estatística inerente aos canais sem fio e recriar resultados experimentais, como os mostrados na Figura 1 do artigo original.

2. OBJETIVO

O principal objetivo deste trabalho é estudar a Figura 1 do artigo original de Chen (2014) e, ao **gerar variáveis aleatórias usando a Simulação de Monte Carlo**, analisar o desempenho relativo de um modelo de receptor de limiar com dois sistemas: SVD (para otimizar a potência em um canal e outro para dividir a potência igualmente) e ZF. Para representar as condições do canal MIMO em um ambiente de desvanecimento plano.

3. ASPECTOS TEÓRICOS

3.1 Modelo de receptor de limiar

Para modelar sistemas de codificação avançados, com o mínimo de complexidade possível, é usado o **modelo de receptor de limiar**. Esse modelo pressupõe que, se a relação sinal-ruído (SNR) recebida exceder um determinado limite ($\gamma > \gamma_{th}$), o sinal será detectado sem erros; caso contrário ($\gamma < \gamma_{th}$), ele não será detectado [1]. Matematicamente, a probabilidade de erro de bloco (P_e) em um canal AWGN pode ser expressa como:

$$P_e(\gamma) = \begin{cases} 1, & \text{si } \gamma < \gamma_{th} \\ 0, & \text{si } \gamma \geq \gamma_{th} \end{cases}$$

Esse modelo simplifica a análise ao eliminar situações intermediárias e permite um cálculo direto da produtividade.

3.2 Sistemas MIMO e decomposição SVD

Um sistema MIMO pode ser modelado matematicamente da seguinte forma:

$$\mathbf{y} = \mathbf{H}\mathbf{x} + \mathbf{n}$$

em que \mathbf{H} é a matriz do canal MIMO, \mathbf{x} e \mathbf{y} são os vetores dos sinais transmitidos e recebidos, respectivamente, e \mathbf{n} é o vetor de ruído com variáveis gaussianas independentes e identicamente distribuídas.

Quando há informações perfeitas sobre o estado do canal no transmissor e no receptor (CSI), é ideal usar uma configuração MIMO baseada na **decomposição do valor singular (SVD)** no sentido da capacidade de informação. A SVD transforma o canal MIMO em canais paralelos livres de interferência, o que facilita a alocação de potência. O processo é realizado pela multiplicação do vetor de sinal \mathbf{s} por uma matriz de pré-codificação \mathbf{V} e uma matriz diagonal de alocação de potência \mathbf{P} :

$$\mathbf{x} = \mathbf{V}\mathbf{P}\mathbf{s}$$

O receptor decodifica o sinal multiplicando \mathbf{y} por \mathbf{U}^H , em que \mathbf{U} e \mathbf{V} são matrizes unitárias obtidas da SVD de \mathbf{H} .

3.3 Método Zero Forcing (ZF)

O Zero Forcing (ZF) é uma técnica amplamente usada em sistemas MIMO para eliminar a interferência entre os sinais transmitidos e recuperar os fluxos de dados no receptor. Embora essa abordagem seja simples e eficaz em termos de detecção de sinal, seu desempenho depende muito da precisão das informações sobre o estado do canal (CSI). Em sistemas de taxa fixa, como os que usam um MCS (Modulation and Coding Scheme, esquema de modulação e codificação) limitado, a ZF pode apresentar limitações significativas quando os modos próprios do canal têm níveis de qualidade diferentes].

4. ANÁLISE DA FIGURA 1:

A Figura 1 do artigo de Chen et al. (2014) apresenta uma comparação da taxa de transferência relativa de sistemas MIMO usando técnicas de pré-codificação de recepção de decomposição de valor singular (SVD) e zero-forcing (ZF). A figura mostra a taxa de transferência relativa em função da relação sinal-ruído média por fluxo com relação a um limite (γ_{av}/γ_{th}) em dB, para três esquemas: SVD com alocação de potência ideal, SVD com alocação de potência igual e ZF. O objetivo de replicar essa figura é validar os resultados do artigo por meio da simulação Monte Carlo, gerando canais MIMO aleatórios e avaliando o desempenho em condições práticas, incluindo perdas de implementação.

4.1 O que isso significa tecnicamente?

A Figura 1 ilustra como a alocação de potência e as estratégias de recepção afetam a taxa de transferência relativa em um sistema MIMO com MCS fixo, em que a taxa de transferência depende de todos os fluxos atingirem uma SNR acima do limite γ_{th} . Os esquemas avaliados são:

- SVD com alocação de potência ideal: aloca mais potência aos modos próprios mais fracos (valores singulares menores, σ_i) (**subcanais independentes** resultantes da decomposição do canal MIMO) usando a ponderação inversa. ($p_i \propto 1/\sigma_i^{2.5}$). Isso maximiza a SNR do fluxo mais fraco, aumentando a probabilidade de que ambos os fluxos excedam γ_{th} . A curva mostra um desempenho superior, especialmente em SNRs de 0 a 15 dB, em que a taxa de transferência relativa cresce rapidamente para perto de 1.
- SVD com alocação de potência igual: divide a potência total igualmente ($P_{tot}/2$) entre os fluxos, mas incorpora uma perda de eficiência ($\approx 0,244$) para modelar imperfeições práticas (perdas em amplificadores ou pré-codificação). Isso resulta em desempenho inferior, pois não compensa as diferenças entre os modos próprios, exigindo SNR mais alto para atingir a mesma taxa de transferência que o esquema ideal.
- ZF: usa um receptor de força zero que elimina a interferência pelo pseudo-inverso da matriz do canal. No entanto, ele introduz uma penalidade de aprimoramento de ruído ($\approx 3,9$) devido à amplificação de ruído em canais mal condicionados. Isso degrada significativamente a SNR por fluxo, resultando no pior desempenho, com uma curva deslocada para a direita e baixa taxa de transferência relativa, mesmo em SNRs altas.

Tecnicamente, a figura destaca que a alocação de potência ideal em SVD é crucial para sistemas com MCS fixo, pois maximiza a taxa de transferência relativa ao priorizar os modos próprios fracos, ao contrário de técnicas como water-filling (que favorece os

modos próprios fortes e não é ideal para MCS fixo). O documento aponta que, sem alocação de potência, a SVD com potência igual pode ter um desempenho ainda pior do que a ZF, pois o modo próprio mais fraco limita a taxa de transferência. A inclusão de perdas práticas em ZF e SVD igual reflete as condições do mundo real, tornando os resultados relevantes para sistemas MIMO implementados.

4.2 Por que é importante reproduzir essa figura

A obtenção da Figura 1 de replicação do artigo de Chen. (2014) usando técnicas de geração de variáveis aleatórias, em particular por meio do método de Monte Carlo, tem como objetivo demonstrar a viabilidade de reproduzir resultados empíricos publicados anteriormente por meio de simulação estatística, sob modelos bem definidos e premissas controladas. As principais motivações por trás dessa replicação são detalhadas a seguir:

1. Validação independente dos resultados: a reprodução da figura nos permite corroborar de forma independente os resultados relatados pelos autores, verificando que, sob um modelo de canal Rayleigh i.i.d. e considerando penalidades práticas (como eficiência degradada em SVD com alocação uniforme de potência e aumento de ruído em ZF), é possível obter resultados consistentes por meio de simulação numérica.
2. Análise comparativa de estratégias MIMO: a figura fornece uma estrutura visual clara para comparar o desempenho de diferentes estratégias de processamento em sistemas MIMO, destacando especialmente as vantagens da alocação de potência otimizada em SVD em comparação com a implementação mais simples de ZF, especialmente em contextos com esquemas fixos de modulação e codificação (MCS fixo), que são comuns em padrões como o LTE.
3. Relevância para aplicações práticas: ao incorporar perdas práticas na simulação, a replicação permite aproximar o comportamento do sistema das condições reais de operação. Isso é fundamental para orientar o projeto de soluções MIMO que alcancem um equilíbrio entre desempenho e complexidade computacional em cenários do mundo real.
4. Base para pesquisas futuras: essa replicação estabelece um precedente técnico que pode ser ampliado para incluir condições mais complexas, como canais espacialmente correlacionados, desequilíbrio de potência entre antenas ou imperfeições na estimativa de canais, que o artigo identifica como linhas de trabalho futuras.

5. METODOLOGIA DE SIMULAÇÃO MONTE CARLO

5.1 Configuração da simulação

- Número de tentativas de Monte Carlo $N = 200\,000$
- Faixa de SNR: -10 dB a 35 dB
- Limite de SNR: $\gamma_{th} = 1$ (0dB)
- Variação de ruído: $\sigma^2 = 1$
- Modelo de canal: Rayleigh

5.2 Simulação Monte Carlo

Esquemas de alocação de energia

- 1º caso: Iguatário
- 2º caso: Com o fator $1/\sigma$, favorecendo os modos fracos

Algoritmo

1. Calcular a potência total $P_{tot} = 10^{snr/10} \gamma_{th}$
2. Gerar matrizes $N \times H$
3. Para SVD: decompor $H = U \Sigma V^H$ alocar energia de acordo com o esquema
4. Marca ZF
5. Contar quantas vezes $\gamma_i > \gamma_{th}$
6. Calcule o desempenho relativo como $\#Exitos/N$

As funções `simulate_svd_scheme` e `simulate_zf_scheme` implementam a simulação:

- Eles geram matrizes $N \times H$.
- Calcular SNRs por fluxo de acordo com o esquema.
- Eles avaliam se $\min(\gamma_i) > \gamma_{th}$ por meio de um teste.
- Eles relatam o desempenho relativo para cada SNR.

O código usa o NumPy para cálculos eficientes e o Matplotlib para traçar as curvas, com estilos diferenciados (linhas, marcadores) para maior clareza.

6. RESULTADOS E INTERPRETAÇÃO

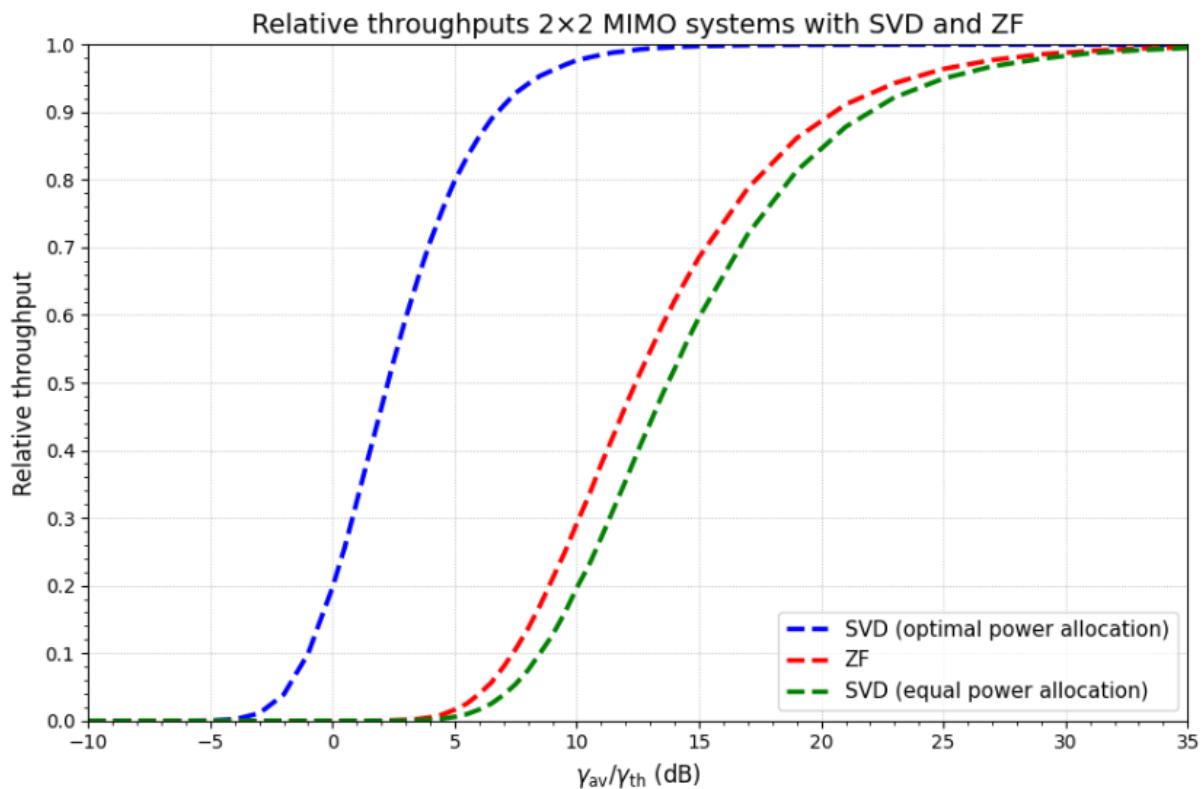


Figura 1: Resultado da simulação

A simulação reproduz a Figura 1 do artigo de Chen et al. (2014), apresentando três curvas de desempenho relativo representativas em diferentes esquemas de transmissão MIMO 2×2: SVD com alocação de potência ideal, SVD com alocação igual e Zero-Forcing (ZF).

- **O SVD com alocação ideal** apresenta o melhor desempenho geral. Esse esquema atinge uma eficiência relativa próxima de 1 a partir de cerca de 20 dB, indicando uma probabilidade quase total de transmissão bem-sucedida. Sua superioridade se deve à estratégia de alocação de potência baseada na compensação de modos próprios fracos, o que é essencial em sistemas com esquemas fixos de modulação e codificação (MCS fixo).
- **A SVD com alocação igual** tem desempenho significativamente inferior. A curva é deslocada para valores de SNR mais altos, refletindo a ineficiência de distribuir a potência uniformemente, especialmente quando são introduzidas penalidades práticas para a perda de eficiência.
- **O ZF** é o esquema de pior desempenho, mostrando uma taxa de transferência consistentemente baixa, mesmo em altos níveis de SNR. Isso é atribuído principalmente à amplificação de ruído inerente ao processo de inversão de canal, modelado por uma penalidade adicional.

A região entre 0 e 15 dB é particularmente reveladora, pois destaca a vantagem significativa do esquema SVD alocado de forma otimizada em relação aos outros dois. Essa observação valida o argumento central do artigo: em sistemas com MCS fixo, a priorização dos modos próprios mais fracos por meio da alocação adaptável de potência é fundamental para maximizar o desempenho. De modo geral, os resultados da simulação não só confirmam as descobertas teóricas do artigo, mas também reforçam sua aplicabilidade em contextos do mundo real, como os sistemas LTE. A inclusão de penalidades práticas torna a análise mais representativa de cenários implementáveis.

7. CONCLUSÃO

Neste trabalho, foi implementada uma simulação de Monte Carlo para analisar o desempenho relativo de diferentes esquemas em um sistema MIMO 2×2 , usando um modelo mais realista baseado em receptores com limite de SNR. Foram avaliadas duas estratégias principais de alocação de potência: uma com compartilhamento igual de potência e outra que favorece dinamicamente os modos mais fracos. O modelo permitiu observar como as decisões de alocação afetam diretamente a probabilidade geral de sucesso da transmissão.

A simulação mostrou que a estratégia de alocar mais energia para modos mais fracos superou consistentemente os outros esquemas avaliados. Em particular, esse método teve um desempenho significativamente melhor do que a alocação de potência igual e o receptor Zero Forcing, em intervalos moderados de SNR. Esse comportamento indica que, para sistemas que operam com modulação e codificação fixas (Fixed MCS), essa técnica pode representar uma alternativa ideal.

8. Referências bibliográficas

- [1] Chen, X., Kildal, P.-S., & Gustafsson, M. (2014). Comparação das taxas de transferência de sistemas MIMO de multiplexação espacial 2×2 com e sem CSI no lado da transmissão em ambientes ricos em caminhos múltiplos isotrópicos. Em 2014, 8ª Conferência Europeia de Antenas e Propagação (EuCAP) (pp. 3493-3494). IEEE. <https://doi.org/10.1109/EuCAP.2014.6870411>.
- [2] A. Toyserkani, E. Ström e A. Svensson, "An analytical approximation to the block error rate in Nakagami-m non-selective block fading channels", IEEE Trans. Wireless Commun. vol. 9, pp. 1543-1546, 2010.
- [3] P.-S. Kildal, A. Hussain, X. Chen, C. Orlenius, A. Skårbratt, J. Åsberg, T. Svensson e T. Eriksson, "Threshold receiver model for throughput of wireless devices with MIMO and frequency diversity measured in reverberation chamber," IEEE Antennas Wireless Propag. Lett, vol. 10, pp. 1201-1204, 2011.

[4] X. Chen, P.-S. Kildal e M. Gustafsson, "Characterization of Implemented Algorithm for MIMO Spatial Multiplexing in Reverberation Chamber" (Caracterização do algoritmo implementado para multiplexação espacial MIMO na câmara de reverberação), IEEE Trans. Antennas Propag. vol. 61, no. 8, pp. 4400-4404, agosto de 2013.