

ECONOMETRIA I

O ESTIMADOR DE MÍNIMOS QUADRADOS ORDINÁRIOS

Luis A. F. Alvarez

24 de março de 2025

AMBIENTE

- Pesquisador observa n pares (Y_i, X_i) , $i = 1 \dots, n$, para os quais supõe um modelo linear da forma:

$$Y_i = X_i' \beta + \epsilon_i \dots i = 1, \dots, n, \quad (1)$$

onde $\beta \in \mathbb{R}^k$ é um parâmetro desconhecido, e ϵ_i , $i = 1, \dots, n$ são variáveis aleatórias não observadas.

- Recorde-se, da última aula, que cabe ao pesquisador postular o modelo e a interpretação dos coeficientes.
- No caso mais comum, $(Y_i, X_i) \stackrel{d}{=} (Y, X)$ para $i = 1, \dots, n$, onde a distribuição de (Y, X) representa a distribuição das variáveis numa população de interesse.
 - Por exemplo, podemos ter que $\{(Y_i, X_i)\}_{i=1}^n$ é uma amostra aleatória de uma população com distribuição $\mathbb{P}_{Y,X}$, para a qual postulamos um modelo linear.
 - Mas também podemos ter que as observações entre pares apresentem dependência entre si, embora com leis $\mathbb{P}_{(Y_i, X_i)}$ comuns a todo i .
- De modo mais geral, no entanto, pode ser que os (Y_i, X_i) não possuam a mesma distribuição conjunta, mas haja uma relação comum e estável ao longo de i .

NOTAÇÃO MATRICIAL

- No que segue, definimos as seguintes matrizes aleatórias:

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} X'_1 \\ X'_2 \\ \vdots \\ X'_n \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\epsilon} = \begin{bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \vdots \\ \epsilon_n \end{bmatrix}$$

- Com base na notação acima introduzida, podemos reescrever (1) em notação matricial como:

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\epsilon} \tag{2}$$

ESTIMADOR DE MÍNIMOS QUADRADOS ORDINÁRIOS

- O estimador de mínimos quadrados ordinários de β , denotado por \hat{b} , consiste em estimar β minimizando a distância, na norma Euclidiana, entre \mathbf{y} e uma combinação linear das colunas de \mathbf{X} , i.e.

$$\hat{b} \in \operatorname{argmin}_{b \in \mathbb{R}^k} \|\mathbf{y} - \mathbf{X}b\|_2^2 = \operatorname{argmin}_{b \in \mathbb{R}^k} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (Y_i - X_i' b)^2,$$

- Em outras palavras, encontramos o coeficiente b que maximiza a contribuição dos X_i à explicação de Y_i , tal qual medida pela média da distância ao quadrado entre os Y_i e $X_i' b$.
- Estimador é obtido como solução a uma otimização de uma função convexa, sem restrições \implies condição de primeira ordem caracteriza o conjunto de soluções.
- Condições de primeira ordem podem ser escritas como:

$$\mathbf{0}_{k \times 1} = \sum_{i=1}^n X_i (Y_i - X_i' b) = \mathbf{X}'(\mathbf{y} - \mathbf{X}b)$$

CONDIÇÃO DE POSTO E UNICIDADE DO MÍNIMO

Sob a condição

HIPÓTESE

A matriz \mathbf{X} apresenta posto k .

Temos que $\mathbf{X}'\mathbf{X}$ é invertível (por quê), de modo que existe uma única solução ao problema de otimização, dada por:

$$\hat{b} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})(\mathbf{X}'\mathbf{y}).$$

- Condição de posto requer que nenhuma das colunas seja escrita como combinação linear das demais.
 - Se a primeira entrada dos X_i corresponde a um intercepto (i.e. $X_{i,1} = 1$ para todo $i = 1, \dots, n$), nenhuma das colunas pode ser escrita como função afim das demais
- Observe que, como $\text{rank}(\mathbf{X}) \leq \min\{n, k\}$, condição implica que $n \geq k$.

UM CASO SIMPLES

- Considere, para fixar as ideias, o caso em que $X_i = \begin{bmatrix} 1 & T_i \end{bmatrix}'$.
- Nesse caso, a matriz $\mathbf{X}'\mathbf{X}$ é dada por:

$$\begin{bmatrix} n & \sum_{i=1}^n T_i \\ \sum_{i=1}^n T_i & \sum_{i=1}^n T_i^2 \end{bmatrix} \quad (3)$$

de modo que a condição de posto é equivalente a

$$\widehat{V(T)} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n T_i^2 - \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n T_i \right)^2 > 0.$$

- Se condição de posto é satisfeita, estimador de MQO é dado por:

$$\hat{b}_2 = \frac{\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})(T_i - \bar{T})}{\sum_{i=1}^n (T_i - \bar{T})^2} = \frac{\widehat{\text{cov}(T, Y)}}{\widehat{V(T)}}$$

MQO: Propriedades Algébricas

MATRIZ DE PROJEÇÃO

- Definimos a matriz de projeção de \mathbf{X} como:

$$P = \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'$$

- Observe que a matriz de projeção é tal que $X\hat{b} = P\mathbf{y}$.
- $P\mathbf{z}$ é a projeção (em termos de minimização da distância Euclidiana) de $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$ no espaço gerado pelas colunas de \mathbf{X} .
- Matriz de projeção tem as seguintes propriedades:
 - Simétrica.
 - Idempotente ($P^2 = P$).
 - Os autovalores de P são ou 0 ou 1.
 - $\text{trace}(P) = k = \text{rank}(P)$.

MATRIZ RESIDUALIZADORA

- A matriz residualizadora (*residual-maker*) de X é dada por:

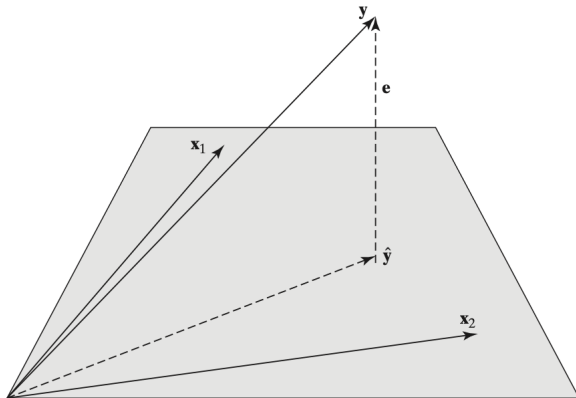
$$M = (I - P)$$

- Matriz residualizadora tem as seguintes propriedades:
 - Simétrica.
 - Idempotente ($M^2 = M$).
 - Os autovalores de M são ou 0 ou 1.
 - $\text{trace}(M) = n - k = \text{rank}(M)$.
 - $\mathbf{X}'M = 0$, $M\mathbf{X} = 0$, $PM = MP = 0$.
- Matriz residualizadora devolve o erro de projeção $\mathbf{z} - P\mathbf{z}$.
 - Como $P\mathbf{z}$ é o minimizador da distância Euclidiana no espaço gerado pelas colunas de \mathbf{X} , temos que:

$$(\mathbf{Mz}) \cdot (\mathbf{XI}) = \mathbf{z}'\mathbf{MXI} = 0 \quad \forall \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{I} \in \mathbb{R}^k.$$

VISUALIZAÇÃO GRÁFICA

FIGURE 3.2 Projection of \mathbf{y} into the Column Space of \mathbf{X} .



FÓRMULA DA INVERSA PARTICIONADA

- Suponha que particionemos a matriz $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_1 & \mathbf{X}_2 \end{bmatrix}$ onde \mathbf{X}_1 e \mathbf{X}_2 são matrizes de dimensão $n \times k_1$ e $n \times k_2$.
- Nesse caso, a fórmula da inversa particionada nos indica que:

$$(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_1'\mathbf{X}_1 & \mathbf{X}_1'\mathbf{X}_2 \\ \mathbf{X}_2'\mathbf{X}_1 & \mathbf{X}_2'\mathbf{X}_2 \end{bmatrix}^{-1} =$$
$$\begin{bmatrix} (\mathbf{X}_1'\mathbf{X}_1)^{-1} + (\mathbf{X}_1'\mathbf{X}_1)^{-1}\mathbf{X}_1'\mathbf{X}_2\mathbf{F}\mathbf{X}_2'\mathbf{X}_1(\mathbf{X}_1'\mathbf{X}_1)^{-1} & -(\mathbf{X}_1'\mathbf{X}_1)^{-1}\mathbf{X}_1'\mathbf{X}_2\mathbf{F} \\ -\mathbf{F}\mathbf{X}_2'\mathbf{X}_1(\mathbf{X}_1'\mathbf{X}_1)^{-1} & \mathbf{F} \end{bmatrix}$$

onde $\mathbf{F} = (\mathbf{X}_2'\mathbf{X}_2 - \mathbf{X}_2'\mathbf{X}_1(\mathbf{X}_1'\mathbf{X}_1)^{-1}\mathbf{X}_1'\mathbf{X}_2)^{-1} = (\mathbf{X}_2'\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2)^{-1}$ onde \mathbf{M}_1 é a residualizadora de \mathbf{X}_1 .

- Inversa de $\mathbf{X}_2'\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2$ existe pois matriz \mathbf{X} tem posto cheio.

TEOREMA DE FRISCH-WAUGH-LOVELL

-

- Da propriedade acima, segue o importante resultado abaixo:

TEOREMA (FRISCH-WAUGH-LOVELL)

$$\hat{b}_2 = (\mathbf{X}_2' M_1 \mathbf{X}_2)^{-1} (\mathbf{X}_2' M_1 \mathbf{y}) = ((M_1 \mathbf{X}_2)' (M_1 \mathbf{X}_2))^{-1} ((M_1 \mathbf{X}_2)' (M_1 \mathbf{y}))$$

- Resultado acima nos mostra que estimadores de MQO associados a \mathbf{X}_2 em uma regressão que inclui \mathbf{X}_1 e \mathbf{X}_2 são idênticos a:
 - Regredir \mathbf{y} em \mathbf{X}_1 , e guardar os resíduos \mathbf{e}_y .
 - Para cada $j = 1, \dots, k_2$, regredir a j -ésima coluna de \mathbf{X}_2 em \mathbf{X}_1 , e guardar os resíduos \mathbf{e}_j .
 - Regredir \mathbf{e}_y em $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{k_2}$ e recuperar os coeficientes.

MQO: Propriedades Estatísticas em Amostras Finitas

MQO: Propriedades Assintóticas