

Exercícios sobre Estimação por MQO

No que segue, sempre suponha que as variáveis aleatórias relevantes estão definidas no mesmo espaço de probabilidade.

Exercício 1 Seja S um vetor aleatório, e X um conjunto de variáveis aleatórias. Mostre a lei da variância total, i.e:

$$\mathbb{V}[S] = \mathbb{E}[\mathbb{V}[S|X]] + \mathbb{V}[\mathbb{E}[S|X]].$$

Exercício 2 Sejam A e B duas matrizes simétricas positivas definidas de dimensão n . Mostre que, se $A - B$ é positiva semidefinida, então $B^{-1} - A^{-1}$ é positiva semidefinida.

Exercício 3 Considere o seguinte modelo linear para uma amostra de n observações:

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}_1\beta_1 + \mathbf{X}_2\beta_2 + \boldsymbol{\epsilon},$$

onde $\mathbb{E}[\boldsymbol{\epsilon}|\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2] = 0$, $\mathbb{V}[\boldsymbol{\epsilon}|\mathbf{X}] = \sigma^2 \mathbb{I}_{n \times n}$, $[\mathbf{X}_1 \ \mathbf{X}_2]$ tem posto cheio, e $\mathbf{X}_1 = [\mathbf{1}_{n \times 1} \ \mathbf{Z}]$, onde $\mathbf{1}_{n \times 1}$ é um vetor de uns e \mathbf{Z} é independente de \mathbf{X}_2 .

- a Mostre que o estimador de MQO de \mathbf{y} em \mathbf{X}_1 , denotado por \tilde{b}_1 , é não viciado (condicionalmente a \mathbf{X}_1) para β_1 .
- b Mostre que a variância condicional de \tilde{b}_1 se escreve como:

$$\mathbb{V}[\tilde{b}_1|\mathbf{X}_1] = (\mathbf{X}_1' \mathbf{X}_1)^{-1} \mathbf{X}_1' \mathbb{V}[\mathbf{X}_2 \beta_2] \mathbf{X}_1' (\mathbf{X}_1 \mathbf{X}_1')^{-1} + \sigma^2 (\mathbf{X}_1' \mathbf{X}_1)^{-1}$$

- c Mostre que a variância do estimador de MQO de β_1 da regressão que inclui \mathbf{X}_1 e \mathbf{X}_2 , denotado por \hat{b}_1 , é não viciado para β_1 (condicionalmente a \mathbf{X}_1 e \mathbf{X}_2) e que sua variância condicional é dada por:

$$\mathbb{V}[\hat{b}_1|\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2] = \sigma^2 (\mathbf{X}_1' M_2 \mathbf{X}_2)^{-1},$$

onde M_2 é a residualizadora de \mathbf{X}_2 .

- d Mostre que $(\mathbf{X}_1' M_2 \mathbf{X}_2)^{-1} - (\mathbf{X}_1' \mathbf{X}_1)^{-1}$ é positiva semidefinida.
- e Mostre que $(\mathbf{X}_1' \mathbf{X}_1)^{-1} \mathbf{X}_1' \mathbb{V}[\mathbf{X}_2 \beta_2] \mathbf{X}_1' (\mathbf{X}_1 \mathbf{X}_1')^{-1}$ é positiva semidefinida.
- f Usando a lei da variância total e os dois resultados anteriores, mostre que a diferença entre as variâncias *incondicionais* de \tilde{b}_1 e \hat{b}_1 se fatoram em dois termos, A e B , em que A é a esperança de uma matriz aleatória positiva semidefinida e B a esperança de uma matriz negativa semidefinida. Proveja uma intuição para esse resultado. Se o interesse reside em β_1 , quando fará sentido incluir \mathbf{X}_2 na regressão?
- g Mostre que se $\beta_2 = 0$, então $\mathbb{V}[\hat{\beta}_1] - \mathbb{V}[\tilde{\beta}_1]$ é positiva semidefinida. Esse resultado contradiz o teorema de Gauss-Markov? Por quê?

Exercício 4 Suponha que você esteja interessado em estudar o efeito de infraestrutura escolar no desempenho escolar médio dos alunos. Você possui acesso a uma amostra aleatória de municípios, para os quais você observa o desempenho escolar médio dos alunos de C escolas, $c = 1, \dots, C$, em cada um dos M municípios, $m = 1, \dots, M$, amostrados ($Y_{c,m}$), e uma medida de conectividade da escola à Internet, em *megabytes por segundo* (mbps) ($X_{c,m}$). Você então postula o seguinte modelo causal linear para $Y_{c,m}$

$$Y_{c,m} = \gamma X_{c,m} + \epsilon_{c,m}, \quad c = 1, \dots, C, \quad m = 1, \dots, M,$$

onde γ é o efeito causal de se aumentar a conectividade da escola em 1mbps sobre o desempenho médio dos alunos, e $\epsilon_{c,m}$ são as demais causas não observadas do desempenho escolar.

- a Sob qual condição a inclinação do melhor preditor linear de $Y_{c,m}$ num intercepto e $X_{c,m}$ identifica γ ? Você acredita que essa condição seria satisfeita na prática? Por quê?

Em virtude da dificuldade de se acreditar na hipótese anteriormente postulada, um colega seu sugere que você explicitamente acomode a presença de causas não observadas no nível municipal que afetam desempenho municipal, considerando a decomposição:

$$\epsilon_{c,m} = \psi_m + \nu_{c,m},$$

onde ψ_m é um conjunto de causas comuns ao município, e $\nu_{c,m}$ são causas idiossincráticas às escolas. Seu colega lhe diz que é possível levar em conta (“controlar”) as causas ψ_m na estimação, mesmo que estas não sejam observadas, considerando uma regressão de $Y_{c,m}$ em $X_{c,m}$ e um conjunto de M *dummies* municipais, i.e. $D_{c,m}(l) = \mathbf{1}_{\{l\}}(m)$, $l = 1 \dots, m$.

- b Usando o teorema de Frisch-Waugh-Lovell, mostre que o estimador do coeficiente de $X_{c,m}$ sugerido pelo seu colega é algebricamente idêntico a se estimar γ a partir de uma regressão (sem intercepto) de $Y_{c,m} - \bar{Y}_m$ em $X_{c,m} - \bar{X}_m$, onde $\bar{Z}_m = \frac{\sum_{i=1}^C Z_{i,m}}{C}$. Em outras palavras, o estimador sugerido pelo seu colega é equivalente ao estimador de MQO do modelo transformado.

$$Y_{c,m} - \bar{Y}_m = \gamma(X_{c,m} - \bar{X}_m) + \epsilon_{c,m} - \bar{\epsilon}_m.$$

- c Proveja condições suficientes para que o estimador de MQO sugerido seja consistente para o parâmetro de interesse, num regime assintótico em que $M \rightarrow \infty$. Qual a interpretação dessas condições?
- d Derive a variância assintótica do estimador, sob as hipóteses do item anterior, permitindo que haja correlação arbitrária entre os $\epsilon_{c,m}$ intramunicipais. Sugira um estimador consistente para a variância assintótica.

Exercício 5 O arquivo `cps_union_data.csv` contém uma amostra **12.834 indivíduos na força de trabalho norte-americana**, extraída do suplemento anual de 2019 da *Pesquisa de População Atual dos EUA* (*Current Population Survey*). Seu objetivo é **estimar o efeito causal da filiação/cobertura sindical** (variável `union`) sobre os **rendimentos semanais** (variável `earnings`). O conjunto de dados contém diversas outras variáveis que podem ser utilizadas como controles (verifique o dicionário do conjunto de dados, disponível em `dictionary.xlsx`).

1. Como ponto de partida, compare a **média dos rendimentos** entre os indivíduos com cobertura sindical (`union == 1`) e os indivíduos sem essa cobertura (`union == 0`). Qual é a diferença estimada? Usando um teste t para comparação de médias entre duas populações, teste a hipótese nula de que a remuneração média na população filiada é igual à remuneração média na população não filiada, contra a alternativa bilateral. Você rejeita a hipótese nula a 5% de significância? E a 1%? diferença é estatisticamente significativa? Você acredita que essa diferença é uma estimativa crível do impacto causal da cobertura sindical? Por quê? *Dica:* utilize o comando `t.test` do pacote básico do R.
2. Mostre analiticamente que a diferença de médias estimada anteriormente pode ser obtida através de uma regressão de `earnings` em um intercepto e `union`, e que a estatística t do coeficiente associado a `union` baseada em erros padrão robustos à heterocedasticidade é idêntica, a não ser por correção de graus de liberdade, à estatística t utilizada no teste anterior.
3. Para melhorar e/ou avaliar a credibilidade dos seus resultados anteriores, você decide considerar um modelo linear causal da forma:

$$\text{earnings}_i = \beta_0 + \beta_1 \text{union}_i + \gamma' Z_i + \epsilon_{it} \quad (1)$$

onde Z_i representa um conjunto de variáveis de controle.

- a) Especifique o modelo linear da Equação (1) apresentando um conjunto de covariáveis Z a serem incluídas como controles. Justifique a escolha dessas variáveis. Qual é a interpretação de β_1 no seu modelo?
- b) Estime o modelo especificado. Qual é a sua estimativa de β_1 ? Usando erros padrão robustos à heterocedasticidade, ela é estatisticamente significativa? Comente brevemente os seus resultados.
- c) Usando o teorema de Frisch-Waugh-Lovell, mostre que o estimador de MQO para β_1 tem a seguinte forma:

$$\hat{\beta}_1 = \sum_{i=1}^N \text{union}_i \cdot \omega_i \cdot \text{earnings}_i - \sum_{i=1}^N (1 - \text{union}_i) \cdot \omega_i \cdot \text{earnings}_i \quad (2)$$

onde os pesos ω_i são definidos como:

$$\omega_i = \frac{\hat{\xi}_i (2 \cdot \text{union}_i - 1)}{\text{SSR}_{\text{union}, Z}} \quad (3)$$

com $\hat{\xi}_i$ sendo o resíduo da observação i de uma regressão linear de union_i sobre Z (incluindo intercepto); e $\text{SSR}_{\text{union}, Z}$ é a soma dos quadrados dos resíduos dessa regressão auxiliar.

- d) Calcule os pesos para sua especificação usando a fórmula acima. Apresente estatísticas descritivas da distribuição dos pesos nos grupos de controle e tratamento.
 - Os pesos somam 1 no grupo de controle?
 - E no grupo de tratamento?
 - Há valores negativos?
 - E outliers?

Como esses pesos diferem com relação ao estimador de diferença de médias para o tratamento? Proveja uma intuição para essa diferença.

Exercício 6 O objetivo deste exercício consiste em entender as propriedades do estimador da variância robusta a *cluster*. Para isso, usaremos os dados do resultado da aplicação de um teste lógico em alunos de um conjunto de escolas primárias, disponível em `dados.csv`.

a Construa uma função em R que:

1. Sorteie 500 escolas, $c = 1, \dots, 500$, **com reposição**, do conjunto de dados. Note que haverá escolas repetidas, mas elas serão tratadas como distintas para os fins da simulação (de modo a refletir amostragem aleatória de uma população de escolas).
2. Para cada uma das $c = 1, \dots, 500$ escolas sorteadas, gere um tratamento fictício no nível escolar, $X_c \sim \text{Uniforme}[0, 1]$, de forma independente entre as escolas e dos dados.
3. Com base na base de dados construída, estime por MQO o modelo linear:

$$\text{logico}_{i,c} = \alpha + \beta X_c + \gamma \text{sexo}_{i,c} + \phi \text{idade}_{i,c} + \epsilon_{i,c},$$

4. Guarde as estatísticas t do teste da hipótese nula de que $\beta = 0$ baseados em erros padrão robustos à heterocedasticidade e a *cluster* no nível da escola.
- b Aplique a função 1000 vezes, e calcule a proporção de casos em que cada um dos dois tipos de testes t , a 5% de significância, rejeita a hipótese nula. Se o estimador da variância estiver “correto”, qual a proporção esperada de casos em que se rejeita a nula? Por quê? O que você obteve na prática? Por quê?
- c Agora adapte a função anterior, permitindo que o tratamento, agora denotado por $\tilde{X}_{i,c} \sim \text{Uniforme}[0, 1]$, varie no nível individual de forma independente. Aplique a nova função mil vezes. Reporte a proporção de casos em que se rejeitou a hipótese nula. O que ocorreu? Por quê?
- d Adapte mais uma vez a função, agora permitindo que o tratamento exerça um efeito heterogêneo entre escolas. Especificamente, você gerará $\widetilde{\text{logico}}_{i,c} = \text{logico}_{i,c} + \tau_c \tilde{X}_{i,c}$, onde $\tau_c = 1$ com probabilidade 1/2 e -1 com probabilidade 1/2, e independente das demais variáveis. Nós continuaremos rodando a regressão linear de $\widetilde{\text{logico}}_{i,c}$ em $\tilde{X}_{i,c}$ e controles. Aplique a função nova 1000 vezes. Qual a proporção de casos rejeitados agora? Por quê?