

# ECONOMETRIA I

## O ESTIMADOR DE MÍNIMOS QUADRADOS ORDINÁRIOS

Luis A. F. Alvarez

6 de abril de 2025

## AMBIENTE

- Pesquisador observa  $n$  pares  $(Y_i, X_i)$ ,  $i = 1 \dots, n$ , para os quais supõe um modelo linear da forma:

$$Y_i = X_i' \beta + \epsilon_i \dots i = 1, \dots, n, \quad (1)$$

onde  $\beta \in \mathbb{R}^k$  é um parâmetro desconhecido, e  $\epsilon_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  são variáveis aleatórias não observadas.

- Recorde-se, da última aula, que cabe ao pesquisador postular o modelo e a interpretação dos coeficientes.
- No caso mais comum,  $(Y_i, X_i) \stackrel{d}{=} (Y, X)$  para  $i = 1, \dots, n$ , onde a distribuição de  $(Y, X)$  representa a distribuição das variáveis numa população de interesse.
  - Por exemplo, podemos ter que  $\{(Y_i, X_i)\}_{i=1}^n$  é uma amostra aleatória de uma população com distribuição  $\mathbb{P}_{Y,X}$ , para a qual postulamos um modelo linear.
  - Mas também podemos ter que as observações entre pares apresentem dependência entre si, embora com leis  $\mathbb{P}_{(Y_i, X_i)}$  comuns a todo  $i$ .
- De modo mais geral, no entanto, pode ser que os  $(Y_i, X_i)$  não possuam a mesma distribuição conjunta, mas haja uma relação comum e estável ao longo de  $i$ .

# NOTAÇÃO MATRICIAL

- No que segue, definimos as seguintes matrizes aleatórias:

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} X'_1 \\ X'_2 \\ \vdots \\ X'_n \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\epsilon} = \begin{bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \vdots \\ \epsilon_n \end{bmatrix}$$

- Com base na notação acima introduzida, podemos reescrever (1) em notação matricial como:

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\epsilon} \tag{2}$$

# ESTIMADOR DE MÍNIMOS QUADRADOS ORDINÁRIOS

- O estimador de mínimos quadrados ordinários de  $\beta$ , denotado por  $\hat{b}$ , consiste em estimar  $\beta$  minimizando a distância, na norma Euclidiana, entre  $\mathbf{y}$  e uma combinação linear das colunas de  $\mathbf{X}$ , i.e.

$$\hat{b} \in \operatorname{argmin}_{b \in \mathbb{R}^k} \|\mathbf{y} - \mathbf{X}b\|_2^2 = \operatorname{argmin}_{b \in \mathbb{R}^k} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (Y_i - X_i' b)^2,$$

- Em outras palavras, encontramos o coeficiente  $b$  que maximiza a contribuição dos  $X_i$  à explicação de  $Y_i$ , tal qual medida pela média da distância ao quadrado entre os  $Y_i$  e  $X_i' b$ .
- Estimador é obtido como solução a uma otimização de uma função convexa, sem restrições  $\implies$  condição de primeira ordem caracteriza o conjunto de soluções.
- Condições de primeira ordem podem ser escritas como:

$$\mathbf{0}_{k \times 1} = \sum_{i=1}^n X_i (Y_i - X_i' b) = \mathbf{X}'(\mathbf{y} - \mathbf{X}b)$$

# CONDIÇÃO DE POSTO E UNICIDADE DO MÍNIMO

Sob a condição

## HIPÓTESE (H1-POSTO)

A matriz  $\mathbf{X}$  apresenta posto  $k$ .

Temos que  $\mathbf{X}'\mathbf{X}$  é invertível (por quê), de modo que existe uma única solução ao problema de otimização, dada por:

$$\hat{b} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}(\mathbf{X}'\mathbf{y}).$$

- Condição de posto requer que nenhuma das colunas seja escrita como combinação linear das demais.
  - Se a primeira entrada dos  $X_i$  corresponde a um intercepto (i.e.  $X_{i,1} = 1$  para todo  $i = 1, \dots, n$ ), nenhuma das colunas pode ser escrita como função afim das demais
- Observe que, como  $\text{rank}(\mathbf{X}) \leq \min\{n, k\}$ , condição implica que  $n \geq k$ .

## UM CASO SIMPLES

- Considere, para fixar as ideias, o caso em que  $X_i = \begin{bmatrix} 1 & T_i \end{bmatrix}'$ .
- Nesse caso, a matriz  $\mathbf{X}'\mathbf{X}$  é dada por:

$$\begin{bmatrix} n & \sum_{i=1}^n T_i \\ \sum_{i=1}^n T_i & \sum_{i=1}^n T_i^2 \end{bmatrix} \quad (3)$$

de modo que a condição de posto é equivalente a

$$\widehat{V(T)} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n T_i^2 - \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n T_i \right)^2 > 0.$$

- Se condição de posto é satisfeita, estimador de MQO é dado por:

$$\hat{b}_2 = \frac{\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})(T_i - \bar{T})}{\sum_{i=1}^n (T_i - \bar{T})^2} = \frac{\widehat{\text{cov}(T, Y)}}{\widehat{V(T)}}$$

# MQO: Propriedades Algébricas

# MATRIZ DE PROJEÇÃO

- Definimos a matriz de projeção de  $\mathbf{X}$  como:

$$P = \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'$$

- Observe que a matriz de projeção é tal que  $X\hat{b} = P\mathbf{y}$ .
- $P\mathbf{z}$  é a projeção (em termos de minimização da distância Euclidiana) de  $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$  no espaço gerado pelas colunas de  $\mathbf{X}$ .
- Matriz de projeção tem as seguintes propriedades:
  - Simétrica.
  - Idempotente ( $P^2 = P$ ).
  - Os autovalores de  $P$  são ou 0 ou 1.
  - $\text{trace}(P) = k = \text{rank}(P)$ .



# MATRIZ RESIDUALIZADORA

- A matriz residualizadora (*residual-maker*) de  $X$  é dada por:

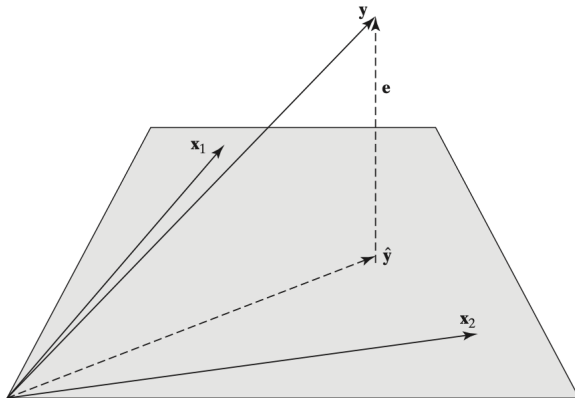
$$M = (I - P)$$

- Matriz residualizadora tem as seguintes propriedades:
  - Simétrica.
  - Idempotente ( $M^2 = M$ ).
  - Os autovalores de  $M$  são ou 0 ou 1.
  - $\text{trace}(M) = n - k = \text{rank}(M)$ .
  - $\mathbf{X}'M = 0$ ,  $M\mathbf{X} = 0$ ,  $PM = MP = 0$ .
- Matriz residualizadora devolve o erro de projeção  $\mathbf{z} - P\mathbf{z}$ .
  - Como  $P\mathbf{z}$  é o minimizador da distância Euclidiana no espaço gerado pelas colunas de  $\mathbf{X}$ , temos que:

$$(\mathbf{M}\mathbf{z}) \cdot (\mathbf{X}\boldsymbol{\ell}) = \mathbf{z}'M\mathbf{X}\boldsymbol{\ell} = 0 \quad \forall \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n, \boldsymbol{\ell} \in \mathbb{R}^k.$$

# VISUALIZAÇÃO GRÁFICA

**FIGURE 3.2** Projection of  $\mathbf{y}$  into the Column Space of  $\mathbf{X}$ .



## FÓRMULA DA INVERSA PARTICIONADA

- Suponha que particionemos a matriz  $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_1 & \mathbf{X}_2 \end{bmatrix}$  onde  $\mathbf{X}_1$  e  $\mathbf{X}_2$  são matrizes de dimensão  $n \times k_1$  e  $n \times k_2$ .
- Nesse caso, a fórmula da inversa particionada nos indica que:

$$(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_1'\mathbf{X}_1 & \mathbf{X}_1'\mathbf{X}_2 \\ \mathbf{X}_2'\mathbf{X}_1 & \mathbf{X}_2'\mathbf{X}_2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} (\mathbf{X}_1'\mathbf{X}_1)^{-1} + (\mathbf{X}_1'\mathbf{X}_1)^{-1}\mathbf{X}_1'\mathbf{X}_2\mathbf{F}\mathbf{X}_2'\mathbf{X}_1(\mathbf{X}_1'\mathbf{X}_1)^{-1} & -(\mathbf{X}_1'\mathbf{X}_1)^{-1}\mathbf{X}_1'\mathbf{X}_2\mathbf{F} \\ -\mathbf{F}\mathbf{X}_2'\mathbf{X}_1(\mathbf{X}_1'\mathbf{X}_1)^{-1} & \mathbf{F} \end{bmatrix}$$

onde  $\mathbf{F} = (\mathbf{X}_2'\mathbf{X}_2 - \mathbf{X}_2'\mathbf{X}_1(\mathbf{X}_1'\mathbf{X}_1)^{-1}\mathbf{X}_1'\mathbf{X}_2)^{-1} = (\mathbf{X}_2'\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2)^{-1}$  onde  $\mathbf{M}_1$  é a residualizadora de  $\mathbf{X}_1$ .

- Inversa de  $\mathbf{X}_2'\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2$  existe pois matriz  $\mathbf{X}$  tem posto cheio.

# TEOREMA DE FRISCH-WAUGH-LOVELL

- Da propriedade anterior, segue o importante resultado abaixo:

## TEOREMA (FRISCH-WAUGH-LOVELL)

Seja  $\hat{b} = \begin{bmatrix} \hat{b}_1 \\ \hat{b}_2 \end{bmatrix}$ . Então:

$$\hat{b}_2 = (\mathbf{X}_2' M_1 \mathbf{X}_2)^{-1} (\mathbf{X}_2' M_1 \mathbf{y}) = ((M_1 \mathbf{X}_2)' (M_1 \mathbf{X}_2))^{-1} ((M_1 \mathbf{X}_2)' (M_1 \mathbf{y}))$$

- Resultado acima nos mostra que estimadores de MQO associados a  $\mathbf{X}_2$  em uma regressão que inclui  $\mathbf{X}_1$  e  $\mathbf{X}_2$  são idênticos a:
  - Regredir  $\mathbf{y}$  em  $\mathbf{X}_1$ , e guardar os resíduos  $\mathbf{e}_y$ .
  - Para cada  $j = 1, \dots, k_2$ , regredir a  $j$ -ésima coluna de  $\mathbf{X}_2$  em  $\mathbf{X}_1$ , e guardar os resíduos  $\mathbf{e}_j$ .
  - Regredir  $\mathbf{e}_y$  em  $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{k_2}$  e recuperar os coeficientes.

# MQO: Propriedades Estatísticas em Amostras Finitas

# REGRESSORES FIXOS

- Nesta seção, analisaremos as propriedades de risco do estimador de MQO.
- Essas propriedades serão analisadas com respeito à distribuição de  $\mathbf{y}$  condicionalmente a  $\mathbf{X}$ .
  - Em outras palavras, estamos pensando nas propriedades do estimador sob amostras repetidas (realizações alternativas da incerteza) em que o valor dos regressores é o mesmo da amostra observada.
  - Ou seja, estamos efetivamente tratando os regressores como fixos sob amostras repetidas.
  - **Exemplo:** se  $Y_i$  é a taxa de inflação no período  $i$ , e  $X_i$  a taxa de desemprego no período  $i - 1$ , analisaremos as propriedades dos estimadores sob realizações alternativas do cenário econômico em que a taxa de desemprego é igual à observada nos períodos  $i = 1, \dots, n$ .

# NÃO VIÉS

- Sob a restrição de que:

## HIPÓTESE (H2-EXOGENEIDADE)

$$\mathbb{E}[\epsilon|\mathbf{X}] = 0$$

- O estimador de MQO é não viciado para  $\beta$ , isto é, qualquer que seja o valor de  $\beta \in \mathbb{R}^k$ , temos que:

$$\mathbb{E}[\hat{b}|\mathbf{X}] = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbb{E}[\mathbf{y}|\mathbf{X}] = \beta + (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbb{E}[\epsilon|\mathbf{X}] = \beta$$

- Observe que a condição de exogeneidade implica que:

$$\mathbb{E}[\mathbf{y}|\mathbf{X}] = \mathbf{X}\beta$$

# INTERPRETAÇÃO DA CONDIÇÃO DE EXOGENEIDADE

- Sob amostragem aleatória de uma população, i.e.  $(X_i, Y_i) \overset{iid}{\sim} (X, Y)$ , condição implica  $\mathbb{E}[Y_i|\mathbf{X}] = \mathbb{E}[Y_i|X_i] = X_i'\beta \implies \mathbb{E}[Y|X] = X'\beta$ .
  - A esperança condicional das variáveis  $(Y, X)$  que representam a distribuição das características na população de interesse é linear em  $X$ , **e coincide com o modelo linear de interesse**.
  - Se o modelo postulado é **preditivo**, isso significa que o parâmetro-alvo do melhor preditor linear consiste também no melhor preditor dentro das funções não lineares de  $X$  (ou, de modo equivalente, a melhor aproximação linear a  $\mathbb{E}[Y|X]$  é exata).
  - Se modelo postulado é **causal**, isso significa que as causas não observadas  $\epsilon$  apresentam o mesmo valor médio nas diferentes subpopulações definidas pelos valores de  $X$ . Trata-se de condição mais forte que (i.e. que implica) a condição de identificação  $\text{cov}(X, \epsilon) = 0$ .
- Quando as observações  $(X_i, Y_i)$  apresentam dependência entre si, esta condição impõe restrições adicionais.
  - Por exemplo, se as observações estão ordenadas no tempo e o modelo postulado é causal,  $\mathbb{E}[\epsilon_i|\mathbf{X}] = 0$  implica que causas não observadas do fenômeno no período  $i$  não exibem associação sistemática com as causas em  $i$  **e em nenhum outro período**.
    - Nesse caso, condição limita retroalimentação entre causas observadas e não observadas no tempo.



## VIÉS DE VARIÁVEL OMITIDA

- Considere um modelo da forma:

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}_1\beta_1 + \mathbf{X}_2\beta_2 + \epsilon,$$

em que  $\mathbb{E}[\epsilon|\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2] = 0$ .

- Por exemplo, num modelo causal, é suficiente observar as causas  $\mathbf{X}_1$  e  $\mathbf{X}_2$  para que as causas não observadas restantes estejam balanceadas nas subpopulações definidas pelos valores de  $(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2)$ .
- Suponha que você **não observe ou desconsidere**  $\mathbf{X}_2$ , e considere o estimador de MQO  $\tilde{b}_1$  de  $\mathbf{y}$  em  $\mathbf{X}_1$ .
  - Sob quais condições esse estimador é não viciado para  $\beta_1$ ?
- Um cálculo simples nos mostra que:

$$\begin{aligned}\tilde{b}_1 &= (\mathbf{X}_1'\mathbf{X}_1)^{-1}\mathbf{X}_1'\mathbf{y} = \beta_1 + (\mathbf{X}_1'\mathbf{X}_1)^{-1}\mathbf{X}_1'\mathbf{X}_2\beta_2 + (\mathbf{X}_1'\mathbf{X}_1)^{-1}\mathbf{X}_1'\epsilon \\ \tilde{b}_1 &= \beta_1 + \hat{\gamma}\beta_2 + (\mathbf{X}_1'\mathbf{X}_1)^{-1}\mathbf{X}_1'\epsilon,\end{aligned}$$

onde  $\hat{\gamma}$  é uma matrix  $k_1 \times k_2$  em que cada coluna representa os coeficientes do estimador de MQO da  $j$ -ésima coluna de  $\mathbf{X}_2$  em  $\mathbf{X}_1$ .

## VIÉS DE VARIÁVEL OMITIDA (CONT.)

- Da propriedade da torre, temos que

$\mathbb{E}[\epsilon|\mathbf{X}_1] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[\epsilon|\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2]|\mathbf{X}_1] = 0$ . Portanto, temos que:

$$\mathbb{E}[\tilde{b}_1|\mathbf{X}_1] = \beta_1 + \mathbb{E}[\hat{\gamma}|\mathbf{X}_1]\beta_2$$

- Se uma das duas condições abaixo for satisfeita, estimador será não viciado para  $\beta_1$ :

### 1. $\beta_2 = 0$ .

- Se o modelo postulado é causal, essa hipótese significa que as variáveis  $\mathbf{X}_2$  não possuem efeito causal sobre  $\mathbf{y}$ .
- Se o modelo postulado é preditivo, essa hipótese significa que as variáveis  $\mathbf{X}_2$  não possuem informação preditiva sobre  $\mathbf{y}$ , uma vez que usamos  $\mathbf{X}_1$  na predição.
  - Nesse caso, estimador de MQO do melhor preditor linear que inclui  $\mathbf{X}_2$  produzirá, em média, o mesmo resultado que o estimador que inclui  $\mathbf{X}_1$  e  $\mathbf{X}_2$ .

### 2. $\mathbb{E}[\hat{\gamma}|\mathbf{X}_1] = 0$ .

- Essa hipótese é satisfeita se as variáveis em  $\mathbf{X}_1$  não possuem capacidade preditiva sobre nenhuma das variáveis em  $\mathbf{X}_2$ .

# ESTIMADOR LINEAR

- Para obter propriedades de otimalidade para o estimador de MQO, necessitamos introduzir definições adicionais.
- Um estimador do parâmetro  $\beta$  é dito **linear** (em  $\mathbf{y}$ ) se:

$$\phi(\mathbf{X}, \mathbf{y}) = A(\mathbf{X})\mathbf{y},$$

onde  $A : \mathbb{R}^{n \times k} \mapsto \mathbb{R}^{k \times n}$ .

- Note que o estimador de MQO é um estimador linear.

# HOMOCEDASTICIDADE

- O estimador de MQO terá propriedades de otimalidade se, além de  $H1$ - $H2$  restringirmos que:

## HIPÓTESE (H3-HOMOCEDASTICIDADE)

Existe  $\sigma^2 > 0$  tal que  $\mathbb{V}[\epsilon|\mathbf{X}] = \sigma^2 \mathbb{I}_{n \times n}$ .

- A hipótese de homocedasticidade requer que condicionalmente a  $\mathbf{X}$  os termos de erro  $\epsilon_i, \epsilon_j, j \neq i$ , sejam não correlacionados e exibam variância idêntica e não dependente do valor de  $\mathbf{X}$ .
  - Sob amostragem aleatória de uma população  $(X, Y)$  em que vale para o modelo postulado que  $\mathbb{E}[\epsilon|\mathbf{X}] = 0$  ( $H2$ ), temos que, para  $i \neq j$ ,  $\text{cov}(\epsilon_i, \epsilon_j|\mathbf{X}) = \mathbb{E}[\epsilon_i \epsilon_j|\mathbf{X}] = \mathbb{E}[\epsilon_i \epsilon_j|X_i, X_j] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[\epsilon_i|\epsilon_j, X_i, X_j]\epsilon_j|X_i, X_j] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[\epsilon_i|X_i]\epsilon_j|X_i, X_j] = 0$ . Portanto, o requerimento de não covariância condicional não impõe restrições adicionais a  $H2$ .
  - Por outro lado, nesse caso, a hipótese impõe que  $\mathbb{V}[Y|\mathbf{X}] = \mathbb{V}[\epsilon|\mathbf{X}] = \sigma^2$ , i.e. que a dispersão de  $Y$  nas subpopulações definidas pelos diferentes valores de  $X$  sejam as mesmas.

## TEOREMA DE GAUSS-MARKOV

- Defina o seguinte conjunto de distribuições condicionais de  $\mathbf{y}$  dado  $\mathbf{X}$ :

$$\mathcal{F}(\mathbf{X}) = \{P_{\mathbf{y}|\mathbf{X}} : \exists \delta \in \mathbb{R}^k, \mathbb{E}_{P_{\mathbf{y}|\mathbf{X}}}[\mathbf{y}|\mathbf{X}] = \mathbf{X}\delta, \exists \sigma^2 > 0, \mathbb{V}_{P_{\mathbf{y}|\mathbf{X}}}[\mathbf{y}|\mathbf{X}] = \sigma^2 \mathbb{I}_{n \times n}\}$$

- Essa é a classe de distribuições condicionais de  $\mathbf{y}$  dado  $\mathbf{X}$  em que a esperança condicional é linear em  $\mathbf{X}$  e a hipótese de homocedasticidade é satisfeita.
  - Denote, para uma distribuição condicional  $F \in \mathcal{F}(\mathbf{X})$ ,  $\delta(F)$  o parâmetro que entra na esperança condicional.
- Com base nas definições acima, temos o seguinte resultado.

### TEOREMA (GAUSS-MARKOV)

*Sob H1, o estimador de MQO é o estimador **linear** não viciado para  $\delta(F)$  de variância uniformemente mínima na classe  $\mathcal{F}(\mathbf{X})$ , i.e. para qualquer outro estimador **linear**  $\psi$  tal que  $\mathbb{E}_F[\psi|\mathbf{X}] = \delta(F)$  para todo  $F \in \mathcal{F}(\mathbf{X})$ , temos que, para todo  $F \in \mathcal{F}(\mathbf{X})$ :*

$$\mathbb{V}_F(\psi|\mathbf{X}) - \mathbb{V}_F(\hat{b}|\mathbf{X}) \quad \text{é positiva semidefinida}$$

# ETAPAS DA DEMONSTRAÇÃO

1. Mostrar que  $\{\delta(F) : F \in \mathcal{F}(\mathbf{X})\} = \mathbb{R}^k$ .
  - Basta considerar, para  $\delta \in \mathbb{R}^k$ ,  $\mathbf{y} = \mathbf{X}\delta + \epsilon$ , com  $\epsilon \sim \mathcal{N}(0, \mathbb{I}_{n \times n})$  e  $\epsilon$  independente de  $\mathbf{X}$ .
2. Com base no resultado acima, mostrar que qualquer estimador linear  $A(\mathbf{X})\mathbf{y}$  não viciado em  $\mathcal{F}(\mathbf{X})$  deve satisfazer

$$A(\mathbf{X})\mathbf{X} = \mathbb{I}_{k \times k}$$

3. Mostrar que, para todo  $F \in \mathcal{F}(\mathbf{X})$ ,  $\text{cov}_F(A(\mathbf{X})\mathbf{y} - \hat{b}, \hat{b}|\mathbf{X}) = 0_{k \times k}$
4. Concluir que, para todo  $F \in \mathcal{F}(\mathbf{X})$ :

$$\mathbb{V}_F(A(\mathbf{X})\mathbf{y} - \hat{b}|\mathbf{X}) = \mathbb{V}_F(A(\mathbf{X})\mathbf{y}|\mathbf{X}) - \mathbb{V}_F(\hat{b}|\mathbf{X})$$

# MQO: Inferência em Amostra Finita

## O PROBLEMA DE TESTE DE HIPÓTESES

- Seja  $(\Omega, \Sigma, P)$  um experimento estatístico, e  $\mathcal{P}$  um *modelo*.
- Sejam  $\mathcal{P}_0$  e  $\mathcal{P}_1$  uma partição de  $\mathcal{P}$ .
- O problema de decisão estatística conhecido como teste de hipóteses consiste em afirmar se:

$$P \in \mathcal{P}_0$$

ou

$$P \in \mathcal{P}_1$$

- Classe  $\mathcal{P}_0$  é conhecida como hipótese nula ( $H_0$ ), e  $\mathcal{P}_1$  é a classe de alternativas ou hipótese alternativa ( $H_1$ ).
- Um teste não aleatorizado é uma regra de decisão  $\phi : \Omega \mapsto \{0, 1\}$  mensurável (i.e.  $\phi^{-1}(\{1\}) \in \Sigma$ ).
  - Se  $\omega \in \Omega$  observado é tal que  $\phi(\omega) = 1$ , afirmamos  $H_1$  (rejeitamos  $H_0$ ), concluindo por  $P \in \mathcal{P}_1$ .
  - Por outro lado, se  $\phi(\omega) = 0$ , afirmamos  $H_0$  (não rejeitamos  $H_0$ ), concluindo por  $P \in \mathcal{P}_0$ .
    - Em contraste, em testes aleatorizados, permitimos que a hipótese nula seja rejeitada com uma probabilidade dada por  $\phi(\omega) \in [0, 1]$ .



# NÍVEL DE SIGNIFICÂNCIA, TAMANHO E PODER

- A princípio, a definição de teste não restringe o comportamento do procedimento estatístico adotado.
- Entretanto, gostaríamos de procedimentos estatísticos que limitassem o **erro tipo 1** de se rejeitar a hipótese nula, caso ela seja verdadeira.
- Especificamente, para um dado **nível de significância**  $\alpha \in [0, 1]$ , gostaríamos de que o teste satisfizesse:

$$\mathbb{E}_F[\phi] \leq \alpha, \quad \forall F \in \mathcal{P}_0$$

- Probabilidade *ex-ante* de rejeição está limitada a uma probabilidade  $\alpha$ .
- À quantidade  $\sup_{F \in \mathcal{P}_0} \mathbb{E}_F[\phi]$  damos o nome de **tamanho** de um teste.
- Por outro lado, dado um procedimento que controla o nível de significância, gostaríamos de maximizar o **poder do teste**, i.e., para todo  $G \in \mathcal{P}_1$ , gostaríamos de tornar:

$$\nu(G) := \mathbb{E}_G[\phi]$$

o mais alto possível.

- Maximizar o poder é equivalente a minimizar **erro tipo 2** de se afirmar a hipótese alternativa quando ela é falsa.
- Usualmente, isso requer que  $\sup_{F \in \mathcal{P}_0} \mathbb{E}_F[\phi] = \alpha$ .

# INFERÊNCIA NO MODELO LINEAR

- Retomemos o modelo linear visto anteriormente:

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\beta + \epsilon,$$

onde  $\beta$  é desconhecido.

- Para testes de hipótese em amostras finitas, requeremos:

## HIPÓTESE (H5-NORMALIDADE)

$$\epsilon|\mathbf{X} \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2 \mathbb{I}_{n \times n})$$

- Hipótese não só requer que erro tenha média condicional zero e matriz de variância homocedástica, mas impõe normalidade da distribuição condicional.
  - Como parâmetros da normal não dependem de  $\mathbf{X}$ , hipótese implica que  $\epsilon$  é independente de  $\mathbf{X}$ .
- Classe de distribuições condicionais compatíveis com a hipótese são:

$$\mathcal{F}^N(\mathbf{X}) = \{\mathbf{P}_{\mathbf{y}|\mathbf{X}} : \mathbf{y}|\mathbf{X} \sim N(\mathbf{X}\delta, \sigma^2 \mathbb{I}_{n \times n}), \quad \delta \in \mathbb{R}^k, \sigma^2 > 0\}$$

# ESTATÍSTICA $F$

- Suponha que desejássemos testar:

$$H_0 : R\beta = c$$

contra a alternativa

$$H_1 : R\beta \neq c$$

onde  $R$  é uma matriz  $r \times k$  de posto  $q$ , e  $c$  é uma vetor  $r \times 1$ .

- $H_0$  e  $H_1$  formam partição de  $\mathcal{F}^N(\mathbf{X})$
- Considere a seguinte estatística de teste:

$$W_{R,c} = \frac{(R\hat{b} - c)' (R\hat{\sigma}^2(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}R')^{-1} (R\hat{b} - c)}{r} = \frac{(R\hat{b} - c)' (R(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}R')^{-1} (R\hat{b} - c)}{r\hat{\sigma}^2},$$

- $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-k} \sum_{i=1}^n (Y_i - X_i'\hat{b})^2$ , com  $\hat{\sigma}^2(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}$  é estimador de  $\mathbb{V}[\hat{b}|\mathbf{X}]$ .
- Estatística mede o desvio de  $R\hat{b}$  a  $c$ , onde a distância é “ponderada” pelo inverso da variância de  $R\hat{b}$ .
- Valores grandes da estatística formam evidência contra hipótese nula.

# DISTRIBUIÇÃO DA ESTATÍSTICA DE TESTE, SOB A HIPÓTESE NULA

## PROPOSIÇÃO

*Suponha válidas as Hipóteses 1 e 4. Se a distribuição  $\mathbb{P}$  satisfaz a hipótese nula, então:*

$$W_{R,c}|\mathbf{X} \sim F(r, n - k)$$

- Etapas para demonstração do resultado:

1. Mostrar que, sob a nula,

$$N := (R\hat{b} - c)' (R\sigma^2(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}R')^{-1} (R\hat{b} - c)|\mathbf{X} \sim \chi^2(r).$$

2. Mostrar que  $(n - k)\hat{\sigma}^2/\sigma^2|\mathbf{X} \sim \chi^2_{n-k}$ .

3. Mostrar que  $N$  e  $\hat{\sigma}^2$  são independentes (condicionalmente a  $\mathbf{X}$ ).

## TESTE DE HIPÓTESE

- O resultado anterior sugere considerar a seguinte regra de decisão, para um nível de significância  $\alpha \in [0, 1]$ :

$$\phi := \mathbf{1}\{W_{R,c} > q_F(1 - \alpha|r, n - k)\}$$

onde  $q_F(1 - \alpha|r, n - k)$  é o quantil  $1 - \alpha$  da distribuição  $F(r, n - k)$ .

- Rejeitamos a nula se  $W_{R,q}$  for suficientemente alta.
- Com base no *slide* anterior, se nula for verdadeira, tem-se  $\mathbb{E}[\phi|\mathbf{X}] = \alpha$ .
- Estatística  $W_{r,c}$  pode ser reescrita a partir da diferença relativa entre o  $R^2$  do estimador de MQO irrestrito, relativamente ao estimador de MQO que impõe a hipótese nula.
  - Veja o livro do Greene para detalhes.
- No caso em que  $q = 1$ , teste é equivalente a rejeitar a nula se:

$$|\hat{t}_{R,q}| > q_t(1 - \alpha/2|n - k)$$

onde  $q_t(1 - \alpha/2|n - k)$  é o quantil  $1 - \alpha/2$  de uma  $t$  de Student com  $n - k$  graus de liberdade, e:

$$\hat{t}_{R,c} = \frac{(R\hat{\beta} - c)}{R\hat{\sigma}^2(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}R'}$$

# MQO: Propriedades Assintóticas

## REGIME ASSINTÓTICO

- Nesta seção, analisaremos o comportamento do estimador de MQO em um regime em que o número de observações diverge.
  - Ideia de se trabalhar com um regime assintótico é de que isso nos seja informativo das propriedades do estimador quando o tamanho amostral é “grande”.
- Para isso, focaremos no caso em que observamos uma amostra aleatória de uma população cuja distribuição é representada pelo par de variáveis aleatórias  $(X, Y)$ .
  - Resultados para o caso não independente e/ou não identicamente distribuído podem ser encontrados, por exemplo, no livro de Halbert White, “Asymptotic Theory for Econometricians”.
- Especificamente, trabalharemos com a seguinte hipótese.

### HIPÓTESE (ASSINTÓTICO-1)

$(X_i, Y_i) \stackrel{iid}{\sim} (X, Y)$ , com  $\mathbb{E}[|Y|^2] < \infty$ ,  $\text{trace}(\mathbb{E}[XX']) < \infty$  e  $\mathbb{E}[XX']$  tem posto  $k$ .

## CONSISTÊNCIA

- Dizemos que um estimador é **consistente para um parâmetro** quando há convergência em probabilidade dele para o parâmetro.
  - Para qualquer tolerância e qualquer nível de probabilidade, existe um limiar  $n^*$  tal que, para tamanhos amostrais  $n \geq n^*$ , o estimador dista do parâmetro de interesse a menos da tolerância com probabilidade não menor que o nível de probabilidade pre-especificado.
- Propriedades do estimador de MQO em amostras grandes podem ser obtidas usando a expressão conveniente abaixo.

$$\hat{b} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{y} = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i X_i'\right)^{-1} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i Y_i\right)$$

- No que segue, indexamos  $\hat{b}$  explicitamente por  $n$ , denotando-o por  $\hat{b}_n$ , para explicitar a natureza do limite em consideração

## PROPOSIÇÃO

*Suponha que Assintótico-1 seja satisfeita. Então:*

- $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}[\{\hat{b}_n \text{ existe}\}] = 1.$
- $\hat{b}_n \xrightarrow{P} (\mathbb{E}[XX'])^{-1} \mathbb{E}[XY] \text{ quando } n \rightarrow \infty.$



## CONSISTÊNCIA PARA PARÂMETRO DE MODELO

- Considere um modelo linear na população da forma:

$$Y = X'\beta + \epsilon.$$

- Resultado anterior implica que, se  $\mathbb{E}[X\epsilon] = 0$ , então  $\hat{b}_n \xrightarrow{P} \beta$ .
- Se  $X = (1 \quad \tilde{X}')'$ , condição é equivalente a  $\mathbb{E}[\epsilon] = 0$  e  $\text{cov}(\tilde{X}, \epsilon) = 0$ .
  - Ambas as hipóteses são satisfeitas **por construção** num modelo preditivo linear (com intercepto).
- Do resultado acima segue, portanto, que, quando  $X$  contém um intercepto, o estimador de MQO é consistente para os parâmetros do melhor preditor linear de  $Y$  em  $\tilde{X}$  (e um intercepto).

### COROLÁRIO

*Suponha que  $X = (1 \quad \tilde{X}')'$ , e que Assintótico-1 seja satisfeita. Então o estimador de MQO é consistente para os parâmetros do melhor preditor linear de  $Y$  em  $\tilde{X}$  (e um intercepto). Consequentemente, num modelo causal, estimador de MQO será consistente para efeitos causais se as causas observadas e não observadas não covariarem, pois, nesse caso, parâmetros causais são identificáveis com base no melhor preditor linear.*

# DISTRIBUIÇÃO ASSINTÓTICA

- Se  $Y$  segue um modelo linear da forma:

$$Y = X'\beta + \epsilon$$

temos que

$$\hat{b}_n - \beta = \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i X_i' \right)^{-1} \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \epsilon_i \right)$$

- Sob a hipótese de consistência  $\mathbb{E}[X\epsilon] = 0$ ,  $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \epsilon_i \xrightarrow{P} 0$
- Ademais, sob a hipótese de consistência, esperaríamos que  $\sqrt{n} \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \epsilon_i \right)$  convergisse **em distribuição** para uma normal multivariada, com base na aplicação do teorema central do limite.
  - Para isso  $X\epsilon$  deve possuir segundo momento finito.

# NORMALIDADE ASSINTÓTICA DE $\hat{b}_n$

- Elencamos hipóteses suficientes para aplicação de um TCL abaixo.

## HIPÓTESE (ASSINTÓTICO-2)

$$\mathbb{E}[X\epsilon] = 0$$

## HIPÓTESE (ASSINTÓTICO-3)

*X e  $\epsilon$  possuem quartos momentos finitos.*

- Com base nas hipóteses 1-3, temos o seguinte resultado.

## PROPOSIÇÃO

*Sob as hipóteses Assintótico 1-3, temos que:*

$$\sqrt{n}(\hat{b}_n - \beta) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, \mathbb{E}[XX']^{-1} \mathbb{E}[XX'\epsilon^2] \mathbb{E}[XX']^{-1})$$

## VARIÂNCIA ASSINTÓTICA

- Resultado anterior sugere que, em amostras grandes, dispersão da distribuição  $\sqrt{n}(\hat{b}_n - \beta)$  é “aproximável” por:

$$\text{Avar}(\sqrt{n}(\hat{b}_n - \beta)) := \mathbb{E}[XX']^{-1} \mathbb{E}[XX' \epsilon^2] \mathbb{E}[XX']^{-1}$$

- Note que, formalmente, **não** estamos dizendo que  $\mathbb{V} \left[ \sqrt{n}(\hat{b}_n - \beta) \right]$  converge para isso, visto que convergência em distribuição **não** implica convergência de momentos.
- Não obstante, a variância da distribuição assintótica de  $\sqrt{n}(\hat{b}_n - \beta)$ , conhecida usualmente como **variância assintótica de  $\hat{b}_n$** , nos será útil para inferência.

# ESTIMADOR DA VARIÂNCIA ASSINTÓTICA DE WHITE

- Estimador consistente de  $\text{Avar}(\sqrt{n}(\hat{b}_n - \beta))$  é dado por:

$$\hat{V}_{\text{HC}} = \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i X_i' \right)^{-1} \left( \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} X_i X_i' \hat{e}_i^2 \right) \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i X_i' \right)^{-1},$$

onde  $\hat{e}_i = Y_i - X_i' \hat{b}$  é o resíduo da regressão.

- Estimador da variância “robusto à heterocedasticidade” de White (*heteroskedasticity-consistent variance estimator*), onde “robustez” advém do fato de que variância assintótica foi derivada sem recorrer à homocedasticidade (i.e. não precisamos supor em nenhum momento que  $\mathbb{V}[Y|X] = \sigma^2$ ).
- No comando `feols` do pacote `fixest` do R, opção `se = "hetero"` recupera este estimador (com uma correção de graus de liberdade que não faz diferença assintoticamente).
  - Se usarmos o comando `lm`, disponível no pacote básico do R, para implementar o estimador de MQO, precisamos usar o comando `vcovHC` do pacote `sandwich` para recuperar esse estimador da variância.

# ESTATÍSTICA DE WALD E INFERÊNCIA ASSINTÓTICA

- Suponha que queiramos testar a hipótese nula:

$$H_0 : R\beta = c$$

contra a alternativa

$$H_1 : R\beta \neq c$$

onde  $R$  é uma matriz  $r \times k$  com posto  $r$ .

- Nosso resultado de inferência assintótica sugere considerar a estatística de teste de Wald, dada por:

$$\tilde{W}_{R,c} = n(R\hat{b}_n - c)' \left( R\hat{V}_{HC}R' \right)^{-1} (R\hat{b}_n - c),$$

## TAMANHO E PODER ASSINTÓTICOS DO TESTE

- Sob hipótese nula, não é difícil ver que:

$$\tilde{W}_{R,c} \xrightarrow{d} \chi_r^2$$

- Desse modo, tomando  $q_\chi(1 - \alpha|r)$  o quantil  $1 - \alpha$  de uma chi-quadrado com  $r$  graus de liberdade, temos que, sob a nula:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} [\tilde{W}_{R,c} > q_\chi(1 - \alpha|r)] = 1 - \alpha.$$

- Por outro lado, não é difícil ver que, se nula **não é verdadeira**, a estatística  $\tilde{W}_{R,c} \xrightarrow{P} \infty$ .

- Nesse caso, podemos mostrar que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} [\tilde{W}_{R,c} > q_\chi(1 - \alpha|r)] = 1.$$

- No caso em que  $q = 1$  teste de Wald é equivalente a rejeitar a nula quando:

$$|\hat{t}_W| > q_Z(1 - \alpha/2),$$

onde  $q_Z$  é quantil da normal padrão e  $\hat{t}_W = (R\hat{b}_n - c)/\sqrt{R\hat{V}_W R'/n}$ .

## PADRÃO DE DEPENDÊNCIA *CLUSTERED*

- A derivação da variância assintótica do estimador presumiu que as observações eram independentes.
- No entanto, em diversos contextos, **o padrão de amostragem ou de atribuição das causas** induz dependência entre observações.
  - Por exemplo, se amostramos um conjunto de bairros, e para estes observamos  $(Y_i, X_i)$  de todos os moradores. Nesse caso, esperamos, sob realizações repetidas da amostragem, que haja correlação entre os  $X_i$  e  $Y_i$  de um mesmo bairro (por exemplo, se  $X_i$  denota a renda de  $i$ ).
  - Por outro lado, se a incerteza amostral é de natureza econômica, podemos esperar que  $\epsilon_i$  contenha fatores econômicos não observados comuns a um grupo, ou que  $X_i$  seja atribuído pela natureza de forma não independente, de modo que haja correlação sob realizações repetidas da incerteza.
- Nesses casos, pode ser razoável particionar a amostra em  $G$  **clusters**,  $\mathcal{N}_1 \cup \mathcal{N}_2 \dots \cup \mathcal{N}_g = \{1, \dots, n\}$ , com a propriedade de que observações no mesmo *cluster* apresentam dependência (arbitrária) entre si, mas observações entre clusters são aproximadamente independentes.
  - No exemplo de amostragem de bairros, hipótese pode ser razoável se amostramos de forma uniforme de uma população grande de bairros.



## ESTIMADOR DA VARIÂNCIA ROBUSTO A CLUSTERS

- Sob o padrão de dependência de *clusters*, a variância do termo crucial para a distribuição assintótica do estimador de MQO fica na forma:

$$\mathbb{V} \left[ \sqrt{n} \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_{i\epsilon_i} \right) \right] = \sum_{g=1}^G \frac{|\mathcal{N}_g|^2}{n} \mathbb{V} \left[ \frac{1}{|\mathcal{N}_g|} \sum_{i \in \mathcal{N}_g} X_{i\epsilon_i} \right]$$

- O estimador da variância robusta a *clusters* (*cluster-robust variance estimator*) propõe estimar a variância assintótica do estimador de MQO como:

$$\hat{V}_{CR} = \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i X_i' \right)^{-1} \left( \sum_{g=1}^G \frac{1}{n} \left( \sum_{i,j \in \mathcal{N}_g} X_i X_j' \hat{\epsilon}_i \hat{\epsilon}_j \right) \right) \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i X_i' \right)^{-1}$$

- Sob restrições dos momentos de  $(X_i, Y_i)$ , estimador produzirá inferência assintótica válida, num regime em que  $G \rightarrow \infty$  e nenhum *cluster* “domina” os demais ( $\max_g |\mathcal{N}_g|^2/n \rightarrow 0$ ).
  - Portanto, para utilizar esse método, necessitamos de bastantes *clusters* de tamanho comparável.
  - No pacote `feols`, opção `cluster` permite utilizar esse estimador. Para regressão obitda via `lm`, usar `vcovCL` do pacote `sandwich`.