

ECONOMETRIA I

O ESTIMADOR DE MÍNIMOS QUADRADOS ORDINÁRIOS

Luis A. F. Alvarez

7 de abril de 2025

AMBIENTE

- Pesquisador observa n pares (Y_i, X_i) , $i = 1 \dots, n$, para os quais supõe um modelo linear da forma:

$$Y_i = X_i' \beta + \epsilon_i \dots i = 1, \dots, n, \quad (1)$$

onde $\beta \in \mathbb{R}^k$ é um parâmetro desconhecido, e ϵ_i , $i = 1, \dots, n$ são variáveis aleatórias não observadas.

- Recorde-se, da última aula, que cabe ao pesquisador postular o modelo e a interpretação dos coeficientes.
- No caso mais comum, $(Y_i, X_i) \stackrel{d}{=} (Y, X)$ para $i = 1, \dots, n$, onde a distribuição de (Y, X) representa a distribuição das variáveis numa população de interesse.
 - Por exemplo, podemos ter que $\{(Y_i, X_i)\}_{i=1}^n$ é uma amostra aleatória de uma população com distribuição $\mathbb{P}_{Y,X}$, para a qual postulamos um modelo linear.
 - Mas também podemos ter que as observações entre pares apresentem dependência entre si, embora com leis $\mathbb{P}_{(Y_i, X_i)}$ comuns a todo i .
- De modo mais geral, no entanto, pode ser que os (Y_i, X_i) não possuam a mesma distribuição conjunta, mas haja uma relação comum e estável ao longo de i .

NOTAÇÃO MATRICIAL

- No que segue, definimos as seguintes matrizes aleatórias:

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} X'_1 \\ X'_2 \\ \vdots \\ X'_n \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\epsilon} = \begin{bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \vdots \\ \epsilon_n \end{bmatrix}$$

- Com base na notação acima introduzida, podemos reescrever (1) em notação matricial como:

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\epsilon} \tag{2}$$

ESTIMADOR DE MÍNIMOS QUADRADOS ORDINÁRIOS

- O estimador de mínimos quadrados ordinários de β , denotado por \hat{b} , consiste em estimar β minimizando a distância, na norma Euclidiana, entre \mathbf{y} e uma combinação linear das colunas de \mathbf{X} , i.e.

$$\hat{b} \in \operatorname{argmin}_{b \in \mathbb{R}^k} \|\mathbf{y} - \mathbf{X}b\|_2^2 = \operatorname{argmin}_{b \in \mathbb{R}^k} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (Y_i - X_i' b)^2,$$

- Em outras palavras, encontramos o coeficiente b que maximiza a contribuição dos X_i à explicação de Y_i , tal qual medida pela média da distância ao quadrado entre os Y_i e $X_i' b$.
- Estimador é obtido como solução a uma otimização de uma função convexa, sem restrições \implies condição de primeira ordem caracteriza o conjunto de soluções.
- Condições de primeira ordem podem ser escritas como:

$$\mathbf{0}_{k \times 1} = \sum_{i=1}^n X_i (Y_i - X_i' b) = \mathbf{X}'(\mathbf{y} - \mathbf{X}b)$$

CONDIÇÃO DE POSTO E UNICIDADE DO MÍNIMO

Sob a condição

HIPÓTESE (H1-POSTO)

A matriz \mathbf{X} apresenta posto k .

Temos que $\mathbf{X}'\mathbf{X}$ é invertível (por quê), de modo que existe uma única solução ao problema de otimização, dada por:

$$\hat{b} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}(\mathbf{X}'\mathbf{y}).$$

- Condição de posto requer que nenhuma das colunas seja escrita como combinação linear das demais.
 - Se a primeira entrada dos X_i corresponde a um intercepto (i.e. $X_{i,1} = 1$ para todo $i = 1, \dots, n$), nenhuma das colunas pode ser escrita como função afim das demais
- Observe que, como $\text{rank}(\mathbf{X}) \leq \min\{n, k\}$, condição implica que $n \geq k$.

UM CASO SIMPLES

- Considere, para fixar as ideias, o caso em que $X_i = \begin{bmatrix} 1 & T_i \end{bmatrix}'$.
- Nesse caso, a matriz $\mathbf{X}'\mathbf{X}$ é dada por:

$$\begin{bmatrix} n & \sum_{i=1}^n T_i \\ \sum_{i=1}^n T_i & \sum_{i=1}^n T_i^2 \end{bmatrix} \quad (3)$$

de modo que a condição de posto é equivalente a

$$\widehat{V(T)} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n T_i^2 - \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n T_i \right)^2 > 0.$$

- Se condição de posto é satisfeita, estimador de MQO é dado por:

$$\hat{b}_2 = \frac{\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})(T_i - \bar{T})}{\sum_{i=1}^n (T_i - \bar{T})^2} = \frac{\widehat{\text{cov}(T, Y)}}{\widehat{V(T)}}$$

MQO: Propriedades Algébricas

MATRIZ DE PROJEÇÃO

- Definimos a matriz de projeção de \mathbf{X} como:

$$P = \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'$$

- Observe que a matriz de projeção é tal que $X\hat{b} = P\mathbf{y}$.
- $P\mathbf{z}$ é a projeção (em termos de minimização da distância Euclidiana) de $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$ no espaço gerado pelas colunas de \mathbf{X} .
- Matriz de projeção tem as seguintes propriedades:
 - Simétrica.
 - Idempotente ($P^2 = P$).
 - Os autovalores de P são ou 0 ou 1.
 - $\text{trace}(P) = k = \text{rank}(P)$.

MATRIZ RESIDUALIZADORA

- A matriz residualizadora (*residual-maker*) de X é dada por:

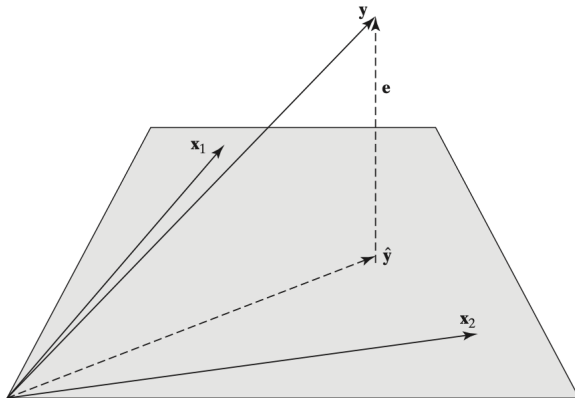
$$M = (I - P)$$

- Matriz residualizadora tem as seguintes propriedades:
 - Simétrica.
 - Idempotente ($M^2 = M$).
 - Os autovalores de M são ou 0 ou 1.
 - $\text{trace}(M) = n - k = \text{rank}(M)$.
 - $\mathbf{X}'M = 0$, $M\mathbf{X} = 0$, $PM = MP = 0$.
- Matriz residualizadora devolve o erro de projeção $\mathbf{z} - P\mathbf{z}$.
 - Como $P\mathbf{z}$ é o minimizador da distância Euclidiana no espaço gerado pelas colunas de \mathbf{X} , temos que:

$$(\mathbf{M}\mathbf{z}) \cdot (\mathbf{X}\boldsymbol{\ell}) = \mathbf{z}'M\mathbf{X}\boldsymbol{\ell} = 0 \quad \forall \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n, \boldsymbol{\ell} \in \mathbb{R}^k.$$

VISUALIZAÇÃO GRÁFICA

FIGURE 3.2 Projection of \mathbf{y} into the Column Space of \mathbf{X} .



FÓRMULA DA INVERSA PARTICIONADA

- Suponha que particionemos a matriz $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_1 & \mathbf{X}_2 \end{bmatrix}$ onde \mathbf{X}_1 e \mathbf{X}_2 são matrizes de dimensão $n \times k_1$ e $n \times k_2$.
- Nesse caso, a fórmula da inversa particionada nos indica que:

$$(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_1'\mathbf{X}_1 & \mathbf{X}_1'\mathbf{X}_2 \\ \mathbf{X}_2'\mathbf{X}_1 & \mathbf{X}_2'\mathbf{X}_2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} (\mathbf{X}_1'\mathbf{X}_1)^{-1} + (\mathbf{X}_1'\mathbf{X}_1)^{-1}\mathbf{X}_1'\mathbf{X}_2\mathbf{F}\mathbf{X}_2'\mathbf{X}_1(\mathbf{X}_1'\mathbf{X}_1)^{-1} & -(\mathbf{X}_1'\mathbf{X}_1)^{-1}\mathbf{X}_1'\mathbf{X}_2\mathbf{F} \\ -\mathbf{F}\mathbf{X}_2'\mathbf{X}_1(\mathbf{X}_1'\mathbf{X}_1)^{-1} & \mathbf{F} \end{bmatrix}$$

onde $\mathbf{F} = (\mathbf{X}_2'\mathbf{X}_2 - \mathbf{X}_2'\mathbf{X}_1(\mathbf{X}_1'\mathbf{X}_1)^{-1}\mathbf{X}_1'\mathbf{X}_2)^{-1} = (\mathbf{X}_2'\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2)^{-1}$ onde \mathbf{M}_1 é a residualizadora de \mathbf{X}_1 .

- Inversa de $\mathbf{X}_2'\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2$ existe pois matriz \mathbf{X} tem posto cheio.

TEOREMA DE FRISCH-WAUGH-LOVELL

- Da propriedade anterior, segue o importante resultado abaixo:

TEOREMA (FRISCH-WAUGH-LOVELL)

Seja $\hat{b} = \begin{bmatrix} \hat{b}_1 \\ \hat{b}_2 \end{bmatrix}$. Então:

$$\hat{b}_2 = (\mathbf{X}_2' M_1 \mathbf{X}_2)^{-1} (\mathbf{X}_2' M_1 \mathbf{y}) = ((M_1 \mathbf{X}_2)' (M_1 \mathbf{X}_2))^{-1} ((M_1 \mathbf{X}_2)' (M_1 \mathbf{y}))$$

- Resultado acima nos mostra que estimadores de MQO associados a \mathbf{X}_2 em uma regressão que inclui \mathbf{X}_1 e \mathbf{X}_2 são idênticos a:
 - Regredir \mathbf{y} em \mathbf{X}_1 , e guardar os resíduos \mathbf{e}_y .
 - Para cada $j = 1, \dots, k_2$, regredir a j -ésima coluna de \mathbf{X}_2 em \mathbf{X}_1 , e guardar os resíduos \mathbf{e}_j .
 - Regredir \mathbf{e}_y em $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{k_2}$ e recuperar os coeficientes.

MQO: Propriedades Estatísticas em Amostras Finitas

REGRESSORES FIXOS

- Nesta seção, analisaremos as propriedades de risco do estimador de MQO.
- Essas propriedades serão analisadas com respeito à distribuição de \mathbf{y} condicionalmente a \mathbf{X} .
 - Em outras palavras, estamos pensando nas propriedades do estimador sob amostras repetidas (realizações alternativas da incerteza) em que o valor dos regressores é o mesmo da amostra observada.
 - Ou seja, estamos efetivamente tratando os regressores como fixos sob amostras repetidas.
 - **Exemplo:** se Y_i é a taxa de inflação no período i , e X_i a taxa de desemprego no período $i - 1$, analisaremos as propriedades dos estimadores sob realizações alternativas do cenário econômico em que a taxa de desemprego é igual à observada nos períodos $i = 1, \dots, n$.

NÃO VIÉS

- Sob a restrição de que:

HIPÓTESE (H2-EXOGENEIDADE)

$$\mathbb{E}[\epsilon|\mathbf{X}] = 0$$

- O estimador de MQO é não viciado para β , isto é, qualquer que seja o valor de $\beta \in \mathbb{R}^k$, temos que:

$$\mathbb{E}[\hat{b}|\mathbf{X}] = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbb{E}[\mathbf{y}|\mathbf{X}] = \beta + (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbb{E}[\epsilon|\mathbf{X}] = \beta$$

- Observe que a condição de exogeneidade implica que:

$$\mathbb{E}[\mathbf{y}|\mathbf{X}] = \mathbf{X}\beta$$

INTERPRETAÇÃO DA CONDIÇÃO DE EXOGENEIDADE

- Sob amostragem aleatória de uma população, i.e. $(X_i, Y_i) \overset{iid}{\sim} (X, Y)$, condição implica $\mathbb{E}[Y_i|\mathbf{X}] = \mathbb{E}[Y_i|X_i] = X_i'\beta \implies \mathbb{E}[Y|X] = X'\beta$.
 - A esperança condicional das variáveis (Y, X) que representam a distribuição das características na população de interesse é linear em X , **e coincide com o modelo linear de interesse**.
 - Se o modelo postulado é **preditivo**, isso significa que o parâmetro-alvo do melhor preditor linear consiste também no melhor preditor dentro das funções não lineares de X (ou, de modo equivalente, a melhor aproximação linear a $\mathbb{E}[Y|X]$ é exata).
 - Se modelo postulado é **causal**, isso significa que as causas não observadas ϵ apresentam o mesmo valor médio nas diferentes subpopulações definidas pelos valores de X . Trata-se de condição mais forte que (i.e. que implica) a condição de identificação $\text{cov}(X, \epsilon) = 0$.
- Quando as observações (X_i, Y_i) apresentam dependência entre si, esta condição impõe restrições adicionais.
 - Por exemplo, se as observações estão ordenadas no tempo e o modelo postulado é causal, $\mathbb{E}[\epsilon_i|\mathbf{X}] = 0$ implica que causas não observadas do fenômeno no período i não exibem associação sistemática com as causas em i **e em nenhum outro período**.
 - Nesse caso, condição limita retroalimentação entre causas observadas e não observadas no tempo.

VIÉS DE VARIÁVEL OMITIDA

- Considere um modelo da forma:

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}_1\beta_1 + \mathbf{X}_2\beta_2 + \epsilon,$$

em que $\mathbb{E}[\epsilon|\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2] = 0$.

- Por exemplo, num modelo causal, é suficiente observar as causas \mathbf{X}_1 e \mathbf{X}_2 para que as causas não observadas restantes estejam balanceadas nas subpopulações definidas pelos valores de $(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2)$.
- Suponha que você **não observe ou desconsidere** \mathbf{X}_2 , e considere o estimador de MQO \tilde{b}_1 de \mathbf{y} em \mathbf{X}_1 .
 - Sob quais condições esse estimador é não viciado para β_1 ?
- Um cálculo simples nos mostra que:

$$\begin{aligned}\tilde{b}_1 &= (\mathbf{X}_1'\mathbf{X}_1)^{-1}\mathbf{X}_1'\mathbf{y} = \beta_1 + (\mathbf{X}_1'\mathbf{X}_1)^{-1}\mathbf{X}_1'\mathbf{X}_2\beta_2 + (\mathbf{X}_1'\mathbf{X}_1)^{-1}\mathbf{X}_1'\epsilon \\ \tilde{b}_1 &= \beta_1 + \hat{\gamma}\beta_2 + (\mathbf{X}_1'\mathbf{X}_1)^{-1}\mathbf{X}_1'\epsilon,\end{aligned}$$

onde $\hat{\gamma}$ é uma matrix $k_1 \times k_2$ em que cada coluna representa os coeficientes do estimador de MQO da j -ésima coluna de \mathbf{X}_2 em \mathbf{X}_1 .

VIÉS DE VARIÁVEL OMITIDA (CONT.)

- Da propriedade da torre, temos que

$\mathbb{E}[\epsilon|\mathbf{X}_1] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[\epsilon|\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2]|\mathbf{X}_1] = 0$. Portanto, temos que:

$$\mathbb{E}[\tilde{b}_1|\mathbf{X}_1] = \beta_1 + \mathbb{E}[\hat{\gamma}|\mathbf{X}_1]\beta_2$$

- Se uma das duas condições abaixo for satisfeita, estimador será não viciado para β_1 :

1. $\beta_2 = 0$.

- Se o modelo postulado é causal, essa hipótese significa que as variáveis \mathbf{X}_2 não possuem efeito causal sobre \mathbf{y} .
- Se o modelo postulado é preditivo, essa hipótese significa que as variáveis \mathbf{X}_2 não possuem informação preditiva sobre \mathbf{y} , uma vez que usamos \mathbf{X}_1 na predição.
 - Nesse caso, estimador de MQO do melhor preditor linear que inclui \mathbf{X}_2 produzirá, em média, o mesmo resultado que o estimador que inclui \mathbf{X}_1 e \mathbf{X}_2 .

2. $\mathbb{E}[\hat{\gamma}|\mathbf{X}_1] = 0$.

- Essa hipótese é satisfeita se as variáveis em \mathbf{X}_1 não possuem capacidade preditiva sobre nenhuma das variáveis em \mathbf{X}_2 .

ESTIMADOR LINEAR

- Para obter propriedades de otimalidade para o estimador de MQO, necessitamos introduzir definições adicionais.
- Um estimador do parâmetro β é dito **linear** (em \mathbf{y}) se:

$$\phi(\mathbf{X}, \mathbf{y}) = A(\mathbf{X})\mathbf{y},$$

onde $A : \mathbb{R}^{n \times k} \mapsto \mathbb{R}^{k \times n}$.

- Note que o estimador de MQO é um estimador linear.

HOMOCEDASTICIDADE

- O estimador de MQO terá propriedades de otimalidade se, além de $H1-H2$ restringirmos que:

HIPÓTESE (H3-HOMOCEDASTICIDADE)

Existe $\sigma^2 > 0$ tal que $\mathbb{V}[\epsilon|\mathbf{X}] = \sigma^2 \mathbb{I}_{n \times n}$.

- A hipótese de homocedasticidade requer que condicionalmente a \mathbf{X} os termos de erro $\epsilon_i, \epsilon_j, j \neq i$, sejam não correlacionados e exibam variância idêntica e não dependente do valor de \mathbf{X} .
 - Sob amostragem aleatória de uma população (X, Y) em que vale para o modelo postulado que $\mathbb{E}[\epsilon|\mathbf{X}] = 0$ (H2), temos que, para $i \neq j$, $\text{cov}(\epsilon_i, \epsilon_j|\mathbf{X}) = \mathbb{E}[\epsilon_i \epsilon_j|\mathbf{X}] = \mathbb{E}[\epsilon_i \epsilon_j|X_i, X_j] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[\epsilon_i|\epsilon_j, X_i, X_j]\epsilon_j|X_i, X_j] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[\epsilon_i|X_i]\epsilon_j|X_i, X_j] = 0$. Portanto, o requerimento de não covariância condicional não impõe restrições adicionais a H2.
 - Por outro lado, nesse caso, a hipótese impõe que $\mathbb{V}[Y|\mathbf{X}] = \mathbb{V}[\epsilon|\mathbf{X}] = \sigma^2$, i.e. que a dispersão de Y nas subpopulações definidas pelos diferentes valores de X sejam as mesmas.

TEOREMA DE GAUSS-MARKOV

- Defina o seguinte conjunto de distribuições condicionais de \mathbf{y} dado \mathbf{X} :

$$\mathcal{F}(\mathbf{X}) = \{P_{\mathbf{y}|\mathbf{X}} : \exists \delta \in \mathbb{R}^k, \mathbb{E}_{P_{\mathbf{y}|\mathbf{X}}}[\mathbf{y}|\mathbf{X}] = \mathbf{X}\delta, \exists \sigma^2 > 0, \mathbb{V}_{P_{\mathbf{y}|\mathbf{X}}}[\mathbf{y}|\mathbf{X}] = \sigma^2 \mathbb{I}_{n \times n}\}$$

- Essa é a classe de distribuições condicionais de \mathbf{y} dado \mathbf{X} em que a esperança condicional é linear em \mathbf{X} e a hipótese de homocedasticidade é satisfeita.
 - Denote, para uma distribuição condicional $F \in \mathcal{F}(\mathbf{X})$, $\delta(F)$ o parâmetro que entra na esperança condicional.
- Com base nas definições acima, temos o seguinte resultado.

TEOREMA (GAUSS-MARKOV)

*Sob H1, o estimador de MQO é o estimador **linear** não viciado para $\delta(F)$ de variância uniformemente mínima na classe $\mathcal{F}(\mathbf{X})$, i.e. para qualquer outro estimador **linear** ψ tal que $\mathbb{E}_F[\psi|\mathbf{X}] = \delta(F)$ para todo $F \in \mathcal{F}(\mathbf{X})$, temos que, para todo $F \in \mathcal{F}(\mathbf{X})$:*

$$\mathbb{V}_F(\psi|\mathbf{X}) - \mathbb{V}_F(\hat{b}|\mathbf{X}) \quad \text{é positiva semidefinida}$$

ETAPAS DA DEMONSTRAÇÃO

1. Mostrar que $\{\delta(F) : F \in \mathcal{F}(\mathbf{X})\} = \mathbb{R}^k$.
 - Basta considerar, para $\delta \in \mathbb{R}^k$, $\mathbf{y} = \mathbf{X}\delta + \epsilon$, com $\epsilon \sim \mathcal{N}(0, \mathbb{I}_{n \times n})$ e ϵ independente de \mathbf{X} .
2. Com base no resultado acima, mostrar que qualquer estimador linear $A(\mathbf{X})\mathbf{y}$ não viciado em $\mathcal{F}(\mathbf{X})$ deve satisfazer

$$A(\mathbf{X})\mathbf{X} = \mathbb{I}_{k \times k}$$

3. Mostrar que, para todo $F \in \mathcal{F}(\mathbf{X})$, $\text{cov}_F(A(\mathbf{X})\mathbf{y} - \hat{b}, \hat{b}|\mathbf{X}) = 0_{k \times k}$
4. Concluir que, para todo $F \in \mathcal{F}(\mathbf{X})$:

$$\mathbb{V}_F(A(\mathbf{X})\mathbf{y} - \hat{b}|\mathbf{X}) = \mathbb{V}_F(A(\mathbf{X})\mathbf{y}|\mathbf{X}) - \mathbb{V}_F(\hat{b}|\mathbf{X})$$

MQO: Inferência em Amostra Finita

O PROBLEMA DE TESTE DE HIPÓTESES

- Seja (Ω, Σ, P) um experimento estatístico, e \mathcal{P} um *modelo*.
- Sejam \mathcal{P}_0 e \mathcal{P}_1 uma partição de \mathcal{P} .
- O problema de decisão estatística conhecido como teste de hipóteses consiste em afirmar se:

$$P \in \mathcal{P}_0$$

ou

$$P \in \mathcal{P}_1$$

- Classe \mathcal{P}_0 é conhecida como hipótese nula (H_0), e \mathcal{P}_1 é a classe de alternativas ou hipótese alternativa (H_1).
- Um teste não aleatorizado é uma regra de decisão $\phi : \Omega \mapsto \{0, 1\}$ mensurável (i.e. $\phi^{-1}(\{1\}) \in \Sigma$).
 - Se $\omega \in \Omega$ observado é tal que $\phi(\omega) = 1$, afirmamos H_1 (rejeitamos H_0), concluindo por $P \in \mathcal{P}_1$.
 - Por outro lado, se $\phi(\omega) = 0$, afirmamos H_0 (não rejeitamos H_0), concluindo por $P \in \mathcal{P}_0$.
 - Em contraste, em testes aleatorizados, permitimos que a hipótese nula seja rejeitada com uma probabilidade dada por $\phi(\omega) \in [0, 1]$.

NÍVEL DE SIGNIFICÂNCIA, TAMANHO E PODER

- A princípio, a definição de teste não restringe o comportamento do procedimento estatístico adotado.
- Entretanto, gostaríamos de procedimentos estatísticos que limitassem o **erro tipo 1** de se rejeitar a hipótese nula, caso ela seja verdadeira.
- Especificamente, para um dado **nível de significância** $\alpha \in [0, 1]$, gostaríamos de que o teste satisfizesse:

$$\mathbb{E}_F[\phi] \leq \alpha, \quad \forall F \in \mathcal{P}_0$$

- Probabilidade *ex-ante* de rejeição está limitada a uma probabilidade α .
- À quantidade $\sup_{F \in \mathcal{P}_0} \mathbb{E}_F[\phi]$ damos o nome de **tamanho** de um teste.
- Por outro lado, dado um procedimento que controla o nível de significância, gostaríamos de maximizar o **poder do teste**, i.e., para todo $G \in \mathcal{P}_1$, gostaríamos de tornar:

$$\nu(G) := \mathbb{E}_G[\phi]$$

o mais alto possível.

- Maximizar o poder é equivalente a minimizar **erro tipo 2** de se afirmar a hipótese nula quando ela é falsa.
- Usualmente, isso requer que $\sup_{F \in \mathcal{P}_0} \mathbb{E}_F[\phi] = \alpha$.

INFERÊNCIA NO MODELO LINEAR

- Retomemos o modelo linear visto anteriormente:

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\beta + \epsilon,$$

onde β é desconhecido.

- Para testes de hipótese em amostras finitas, requeremos:

HIPÓTESE (H4-NORMALIDADE)

$$\epsilon|\mathbf{X} \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2 \mathbb{I}_{n \times n})$$

- Hipótese não só requer que erro tenha média condicional zero e matriz de variância homocedástica, mas impõe normalidade da distribuição condicional.
 - Como parâmetros da normal não dependem de \mathbf{X} , hipótese implica que ϵ é independente de \mathbf{X} .
- Classe de distribuições condicionais compatíveis com a hipótese são:

$$\mathcal{F}^N(\mathbf{X}) = \{\mathbf{P}_{\mathbf{y}|\mathbf{X}} : \mathbf{y}|\mathbf{X} \sim N(\mathbf{X}\delta, \sigma^2 \mathbb{I}_{n \times n}), \quad \delta \in \mathbb{R}^k, \sigma^2 > 0\}$$

ESTATÍSTICA F

- Suponha que desejássemos testar:

$$H_0 : R\beta = c$$

contra a alternativa

$$H_1 : R\beta \neq c$$

onde R é uma matriz $r \times k$ de posto r , e c é uma vetor $r \times 1$.

- H_0 e H_1 formam partição de $\mathcal{F}^N(\mathbf{X})$
- Considere a seguinte estatística de teste:

$$W_{R,c} = \frac{(R\hat{b} - c)' (R\hat{\sigma}^2(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}R')^{-1} (R\hat{b} - c)}{r} = \frac{(R\hat{b} - c)' (R(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}R')^{-1} (R\hat{b} - c)}{r\hat{\sigma}^2},$$

- $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-k} \sum_{i=1}^n (Y_i - X_i'\hat{b})^2$, com $\hat{\sigma}^2(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}$ é estimador de $\mathbb{V}[\hat{b}|\mathbf{X}]$.
- Estatística mede o desvio de $R\hat{b}$ a c , onde a distância é “ponderada” pelo inverso da variância de $R\hat{b}$.
- Valores grandes da estatística formam evidência contra hipótese nula.

DISTRIBUIÇÃO DA ESTATÍSTICA DE TESTE, SOB A HIPÓTESE NULA

PROPOSIÇÃO

Suponha válidas as Hipóteses 1 e 4. Se a distribuição \mathbb{P} satisfaz a hipótese nula, então:

$$W_{R,c}|\mathbf{X} \sim F(r, n - k)$$

- Etapas para demonstração do resultado:

1. Mostrar que, sob a nula,

$$N := (R\hat{b} - c)' (R\sigma^2(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}R')^{-1} (R\hat{b} - c)|\mathbf{X} \sim \chi^2(r).$$

2. Mostrar que $(n - k)\hat{\sigma}^2/\sigma^2|\mathbf{X} \sim \chi^2_{n-k}$.

3. Mostrar que N e $\hat{\sigma}^2$ são independentes (condicionalmente a \mathbf{X}).

TESTE DE HIPÓTESE

- O resultado anterior sugere considerar a seguinte regra de decisão, para um nível de significância $\alpha \in [0, 1]$:

$$\phi := \mathbf{1}\{W_{R,c} > q_F(1 - \alpha|r, n - k)\}$$

onde $q_F(1 - \alpha|r, n - k)$ é o quantil $1 - \alpha$ da distribuição $F(r, n - k)$.

- Rejeitamos a nula se $W_{R,q}$ for suficientemente alta.
- Com base no *slide* anterior, se nula for verdadeira, tem-se $\mathbb{E}[\phi|\mathbf{X}] = \alpha$.
- Estatística $W_{r,c}$ pode ser reescrita a partir da diferença relativa entre o R^2 do estimador de MQO irrestrito, relativamente ao estimador de MQO que impõe a hipótese nula.
 - Veja o livro do Greene para detalhes.
- No caso em que $q = 1$, teste é equivalente a rejeitar a nula se:

$$|\hat{t}_{R,q}| > q_t(1 - \alpha/2|n - k)$$

onde $q_t(1 - \alpha/2|n - k)$ é o quantil $1 - \alpha/2$ de uma t de Student com $n - k$ graus de liberdade, e:

$$\hat{t}_{R,c} = \frac{(R\hat{\beta} - c)}{R\hat{\sigma}^2(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}R'}$$

MQO: Propriedades Assintóticas

REGIME ASSINTÓTICO

- Nesta seção, analisaremos o comportamento do estimador de MQO em um regime em que o número de observações diverge.
 - Ideia de se trabalhar com um regime assintótico é de que isso nos seja informativo das propriedades do estimador quando o tamanho amostral é “grande”.
- Para isso, focaremos no caso em que observamos uma amostra aleatória de uma população cuja distribuição é representada pelo par de variáveis aleatórias (X, Y) .
 - Resultados para o caso não independente e/ou não identicamente distribuído podem ser encontrados, por exemplo, no livro de Halbert White, “Asymptotic Theory for Econometricians”.
- Especificamente, trabalharemos com a seguinte hipótese.

HIPÓTESE (ASSINTÓTICO-1)

$(X_i, Y_i) \stackrel{iid}{\sim} (X, Y)$, com $\mathbb{E}[|Y|^2] < \infty$, $\text{trace}(\mathbb{E}[XX']) < \infty$ e $\mathbb{E}[XX']$ tem posto k .

CONSISTÊNCIA

- Dizemos que um estimador é **consistente para um parâmetro** quando há convergência em probabilidade dele para o parâmetro.
 - Para qualquer tolerância e qualquer nível de probabilidade, existe um limiar n^* tal que, para tamanhos amostrais $n \geq n^*$, o estimador dista do parâmetro de interesse a menos da tolerância com probabilidade não menor que o nível de probabilidade pre-especificado.
- Propriedades do estimador de MQO em amostras grandes podem ser obtidas usando a expressão conveniente abaixo.

$$\hat{b} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{y} = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i X_i'\right)^{-1} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i Y_i\right)$$

- No que segue, indexamos \hat{b} explicitamente por n , denotando-o por \hat{b}_n , para explicitar a natureza do limite em consideração

PROPOSIÇÃO

Suponha que Assintótico-1 seja satisfeita. Então:

- $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}[\{\hat{b}_n \text{ existe}\}] = 1.$
- $\hat{b}_n \xrightarrow{P} (\mathbb{E}[XX'])^{-1} \mathbb{E}[XY] \text{ quando } n \rightarrow \infty.$

CONSISTÊNCIA PARA PARÂMETRO DE MODELO

- Considere um modelo linear na população da forma:

$$Y = X'\beta + \epsilon.$$

- Resultado anterior implica que, se $\mathbb{E}[X\epsilon] = 0$, então $\hat{b}_n \xrightarrow{P} \beta$.
- Se $X = (1 \quad \tilde{X}')'$, condição é equivalente a $\mathbb{E}[\epsilon] = 0$ e $\text{cov}(\tilde{X}, \epsilon) = 0$.
 - Ambas as hipóteses são satisfeitas **por construção** num modelo preditivo linear (com intercepto).
- Do resultado acima segue, portanto, que, quando X contém um intercepto, o estimador de MQO é consistente para os parâmetros do melhor preditor linear de Y em \tilde{X} (e um intercepto).

COROLÁRIO

Suponha que $X = (1 \quad \tilde{X}')'$, e que Assintótico-1 seja satisfeita. Então o estimador de MQO é consistente para os parâmetros do melhor preditor linear de Y em \tilde{X} (e um intercepto). Consequentemente, num modelo causal, estimador de MQO será consistente para efeitos causais se as causas observadas e não observadas não covariarem, pois, nesse caso, parâmetros causais são identificáveis com base no melhor preditor linear.

DISTRIBUIÇÃO ASSINTÓTICA

- Se Y segue um modelo linear da forma:

$$Y = X'\beta + \epsilon$$

temos que

$$\hat{b}_n - \beta = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i X_i' \right)^{-1} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \epsilon_i \right)$$

- Sob a hipótese de consistência $\mathbb{E}[X\epsilon] = 0$, $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \epsilon_i \xrightarrow{P} 0$
- Ademais, sob a hipótese de consistência, esperaríamos que $\sqrt{n} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \epsilon_i \right)$ convergisse **em distribuição** para uma normal multivariada, com base na aplicação do teorema central do limite.
 - Para isso $X\epsilon$ deve possuir segundo momento finito.

NORMALIDADE ASSINTÓTICA DE \hat{b}_n

- Elencamos hipóteses suficientes para aplicação de um TCL abaixo.

HIPÓTESE (ASSINTÓTICO-2)

$$\mathbb{E}[X\epsilon] = 0$$

HIPÓTESE (ASSINTÓTICO-3)

X e ϵ possuem quartos momentos finitos.

- Com base nas hipóteses 1-3, temos o seguinte resultado.

PROPOSIÇÃO

Sob as hipóteses Assintótico 1-3, temos que:

$$\sqrt{n}(\hat{b}_n - \beta) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, \mathbb{E}[XX']^{-1} \mathbb{E}[XX'\epsilon^2] \mathbb{E}[XX']^{-1})$$

VARIÂNCIA ASSINTÓTICA

- Resultado anterior sugere que, em amostras grandes, dispersão da distribuição $\sqrt{n}(\hat{b}_n - \beta)$ é “aproximável” por:

$$\text{Avar}(\sqrt{n}(\hat{b}_n - \beta)) := \mathbb{E}[XX']^{-1} \mathbb{E}[XX' \epsilon^2] \mathbb{E}[XX']^{-1}$$

- Note que, formalmente, **não** estamos dizendo que $\mathbb{V} \left[\sqrt{n}(\hat{b}_n - \beta) \right]$ converge para isso, visto que convergência em distribuição **não** implica convergência de momentos.
- Não obstante, a variância da distribuição assintótica de $\sqrt{n}(\hat{b}_n - \beta)$, conhecida usualmente como **variância assintótica de \hat{b}_n** , nos será útil para inferência.

ESTIMADOR DA VARIÂNCIA ASSINTÓTICA DE WHITE

- Estimador consistente de $\text{Avar}(\sqrt{n}(\hat{b}_n - \beta))$ é dado por:

$$\hat{V}_{\text{HC}} = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i X_i' \right)^{-1} \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{n} X_i X_i' \hat{e}_i^2 \right) \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i X_i' \right)^{-1},$$

onde $\hat{e}_i = Y_i - X_i' \hat{b}$ é o resíduo da regressão.

- Estimador da variância “robusto à heterocedasticidade” de White (*heteroskedasticity-consistent variance estimator*), onde “robustez” advém do fato de que variância assintótica foi derivada sem recorrer à homocedasticidade (i.e. não precisamos supor em nenhum momento que $\mathbb{V}[Y|X] = \sigma^2$).
- No comando `feols` do pacote `fixest` do R, opção `se = "hetero"` recupera este estimador (com uma correção de graus de liberdade que não faz diferença assintoticamente).
 - Se usarmos o comando `lm`, disponível no pacote básico do R, para implementar o estimador de MQO, precisamos usar o comando `vcovHC` do pacote `sandwich` para recuperar esse estimador da variância.

ESTATÍSTICA DE WALD E INFERÊNCIA ASSINTÓTICA

- Suponha que queiramos testar a hipótese nula:

$$H_0 : R\beta = c$$

contra a alternativa

$$H_1 : R\beta \neq c$$

onde R é uma matriz $r \times k$ com posto r .

- Nosso resultado de inferência assintótica sugere considerar a estatística de teste de Wald, dada por:

$$\tilde{W}_{R,c} = n(R\hat{b}_n - c)' \left(R\hat{V}_{\text{HC}}R' \right)^{-1} (R\hat{b}_n - c),$$

TAMANHO E PODER ASSINTÓTICOS DO TESTE

- Sob hipótese nula, não é difícil ver que:

$$\tilde{W}_{R,c} \xrightarrow{d} \chi_r^2$$

- Desse modo, tomando $q_\chi(1 - \alpha|r)$ o quantil $1 - \alpha$ de uma chi-quadrado com r graus de liberdade, temos que, sob a nula:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} [\tilde{W}_{R,c} > q_\chi(1 - \alpha|r)] = 1 - \alpha.$$

- Por outro lado, não é difícil ver que, se nula **não é verdadeira**, a estatística $\tilde{W}_{R,c} \xrightarrow{P} \infty$.

- Nesse caso, podemos mostrar que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} [\tilde{W}_{R,c} > q_\chi(1 - \alpha|r)] = 1.$$

- No caso em que $q = 1$ teste de Wald é equivalente a rejeitar a nula quando:

$$|\hat{t}_W| > q_Z(1 - \alpha/2),$$

onde q_Z é quantil da normal padrão e $\hat{t}_W = (R\hat{b}_n - c)/\sqrt{R\hat{V}_W R'/n}$.

PADRÃO DE DEPENDÊNCIA *CLUSTERED*

- A derivação da variância assintótica do estimador presumiu que as observações eram independentes.
- No entanto, em diversos contextos, **o padrão de amostragem ou de atribuição das causas** induz dependência entre observações.
 - Por exemplo, se amostramos um conjunto de bairros, e para estes observamos (Y_i, X_i) de todos os moradores. Nesse caso, esperamos, sob realizações repetidas da amostragem, que haja correlação entre os X_i e Y_i de um mesmo bairro (por exemplo, se X_i denota a renda de i).
 - Por outro lado, se a incerteza amostral é de natureza econômica, podemos esperar que ϵ_i contenha fatores econômicos não observados comuns a um grupo, ou que X_i seja atribuído pela natureza de forma não independente, de modo que haja correlação sob realizações repetidas da incerteza.
- Nesses casos, pode ser razoável particionar a amostra em G **clusters**, $\mathcal{N}_1 \cup \mathcal{N}_2 \dots \cup \mathcal{N}_g = \{1, \dots, n\}$, com a propriedade de que observações no mesmo *cluster* apresentam dependência (arbitrária) entre si, mas observações entre clusters são aproximadamente independentes.
 - No exemplo de amostragem de bairros, hipótese pode ser razoável se amostramos de forma uniforme de uma população grande de bairros.

ESTIMADOR DA VARIÂNCIA ROBUSTO A CLUSTERS

- Sob o padrão de dependência de *clusters*, a variância do termo crucial para a distribuição assintótica do estimador de MQO fica na forma:

$$\mathbb{V} \left[\sqrt{n} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_{i\epsilon_i} \right) \right] = \sum_{g=1}^G \frac{|\mathcal{N}_g|^2}{n} \mathbb{V} \left[\frac{1}{|\mathcal{N}_g|} \sum_{i \in \mathcal{N}_g} X_{i\epsilon_i} \right]$$

- O estimador da variância robusta a *clusters* (*cluster-robust variance estimator*) propõe estimar a variância assintótica do estimador de MQO como:

$$\hat{V}_{CR} = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i X_i' \right)^{-1} \left(\sum_{g=1}^G \frac{1}{n} \left(\sum_{i,j \in \mathcal{N}_g} X_i X_j' \hat{\epsilon}_i \hat{\epsilon}_j \right) \right) \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i X_i' \right)^{-1}$$

- Sob restrições dos momentos de (X_i, Y_i) , estimador produzirá inferência assintótica válida, num regime em que $G \rightarrow \infty$ e nenhum *cluster* “domina” os demais ($\max_g |\mathcal{N}_g|^2/n \rightarrow 0$).
 - Portanto, para utilizar esse método, necessitamos de bastantes *clusters* de tamanho comparável.
 - No pacote `feols`, opção `cluster` permite utilizar esse estimador. Para regressão obitda via `lm`, usar `vcovCL` do pacote `sandwich`.