

## Exercícios sobre Modelos Lineares

No que segue, sempre suponha que as variáveis aleatórias relevantes estão definidas no mesmo espaço de probabilidade.

**Exercício 1** Seja  $Z$  uma variável aleatória discreta, que toma valores no conjunto  $\{z_1, \dots, z_n\}$ ; e  $Y$  uma variável aleatória com segundo momento finito. Defina o vetor aleatório  $X = (\mathbf{1}_{\{z_1\}}(Z), \dots, \mathbf{1}_{\{z_n\}}(Z))$ . Mostre que o melhor preditor linear de  $Y$  como função de um intercepto e  $X$  é da forma:

$$\alpha_* + \delta'_* X$$

com

$$\alpha_* = \mathbb{E}[Y|Z = z_1]$$

$$\delta_j = \mathbb{E}[Y|Z = z_{j+1}] - \mathbb{E}[Y|Z = z_1]$$

onde definimos o objeto  $\mathbb{E}[Y|Z = z_j]$  como:

$$\mathbb{E}[Y|Z = z_j] := \frac{\mathbb{E}[Y \mathbf{1}_{\{z_j\}}(Z)]}{\mathbb{P}[\{Z = z_j\}]}.$$

. Conclua que o melhor preditor linear coincide com  $\mathbb{E}[Y|Z]$ .

**Exercício 2** Seja  $h^*$  a função de esperança condicional de uma variável aleatória  $Y$  com segundo momento finito dado uma variável aleatória real  $X$ , i.e.  $h^*(X) = \mathbb{E}[Y|X]$ . Compute o melhor preditor linear de  $Y$  como função de um intercepto e  $X$ , para os casos abaixo. Ilustre graficamente a derivada de  $h^*$  comparando-a com a inclinação do melhor preditor linear, nos pontos do suporte<sup>1</sup> de  $X$ . Identifique as regiões onde o melhor preditor linear mais “erra” a inclinação de  $h^*$ .

- a  $h^*(x) = x^2$  e  $X \sim U[0, 1]$ .
- b  $h^*(x) = \min\{x^3, 100\}$  e  $X \sim \text{Exponencial}(1)$ .
- c  $h^*(x) = x^2$  e  $X \sim \chi^2(1)$ .

**Exercício 3** Seja  $A$  uma matriz simétrica positiva semidefinida:

- a Mostre que os autovalores de  $A$  sempre são não negativos. Dica: Se  $v \neq 0$  é um autovetor de um autovalor  $\lambda$ ,  $Av = \lambda v$ .
- b Mostre que o menor autovalor de  $A$  é zero se, e somente se, existe  $v \neq 0$ ,  $v'Av = 0$ . Dica: para suficiência, utilize a decomposição espectral de uma matriz simétrica.

---

<sup>1</sup>O suporte de uma variável aleatória  $X$  é definido como o menor conjunto fechado  $C$  tal que  $\mathbb{P}[X \in C] = 1$ .

**Exercício 4** Seja  $(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$  um espaço de probabilidade, em que cada elemento  $\omega \in \Omega$  corresponde a uma firma num setor de interesse, e  $\mathbb{P}[A]$  denota a proporção de firmas do “tipo”  $A$ . Considere o exemplo, visto em aula, em que a função de produção no setor é  $h(z, l) = zl^\alpha$ ,  $\alpha < 1$ . Suponha que, no momento da decisão de produção, uma firma  $\omega \in \Omega$  na população somente observe um sinal  $\xi(\omega)$  de sua produtividade. A distribuição do sinal  $\xi$  na população é denotada por  $\mathbb{P}_\xi$ . As firmas então escolhem  $l$  otimizando:

$$l(\omega) \in \operatorname{argmax}_{l \geq 0} \xi(\omega)l^\alpha - wl,$$

onde  $w$  denota o salário (em unidades do bem produzido pelo setor), aqui tratado como constante fixa.<sup>2</sup> Após a escolha de demanda por trabalho, a produtividade de cada firma é revelada como  $z(\omega) = \xi(\omega)\epsilon(\omega)$ , onde o “choque” ou “surpresa” na produtividade não é antecipável com base no sinal, i.e.  $\xi$  é independente de  $\epsilon$  ( $\mathbb{P}_{(\xi, \epsilon)} = \mathbb{P}_\xi \otimes \mathbb{P}_\epsilon$ ). A produção final das firmas é dada por  $Y(\omega) = z(\omega)l(\omega)$ .

- a Encontre o melhor preditor linear da variável aleatória  $\log(Y)$  como função de um intercepto e  $\log(l)$ . O coeficiente associado a  $\log(l)$  coincide com  $\alpha$ ? Por quê?
- b Suponha que, caso  $Y(\omega) - wl(\omega) < 0$ , a firma  $\omega$  não opera, e, nesse caso, a demanda por trabalho e quantidade produzida observadas são zero. Calcule o melhor preditor linear nesse caso. Ele corresponde ao obtido anteriormente? Por quê?

---

<sup>2</sup>Em outras palavras, a incerteza capturada pelas variáveis aleatórias só se deve à amostragem no sentido clássico, e não à incerteza econômica.