EAE1223: Econometria III

Aula 2 - Processos estocásticos

Luis A. F. Alvarez

29 de fevereiro de 2024

Espaço de probabilidade

- Formalmente, o conceito utilizado para se definir a noção de incerteza associada a um problema é o de espaço de probabilidade.
- Um espaço de probabilidade é uma tripla $(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$, onde:
  - Ω é um conjunto, denominado espaço amostral, contendo todos as possíveis realizações da incerteza.
  - Σ é uma coleção de subconjuntos de Ω, denominada σ-álgebra. A cada subconjunto de Ω pertencente a Σ damos o nome de evento. Os elementos de Σ são aqueles para os quais somos capazes de definir a incerteza.
  - uma lei de probabilidade $\mathbb{P}$ que atribui, a cada conjunto $E \in \Sigma$, um número $\mathbb{P}[E]$ entre 0 e 1. A lei de probabilidade satisfaz os axiomas de Kolmogorov.
- Por que não definimos a probabilidade para todo subconjunto de Ω?
  - **Resposta:** se Ω é "complexo" (por exemplo, $[0, 1]$), é impossível definir uma probabilidade que satisfaça todos os axiomas de Kolmogorov para todo subconjunto do espaço.

Exemplo

- Considere um lançamento de um dado não viciado.
- Nesse caso, espaço amostral é $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
- Como lançamento é não viciado, sabemos que:

$$\mathbb{P}[\{1\}] = \mathbb{P}[\{2\}] = \mathbb{P}[\{3\}] = \mathbb{P}[\{4\}] = \mathbb{P}[\{5\}] = \mathbb{P}[\{6\}] = 1/6\,.$$

- Pelos axiomas da probabilidade, segue que podemos tomar Σ como o conjunto de todos os subconjuntos de Ω, e, para qualquer $E \subset \Sigma$:

$$\mathbb{P}[E] = \mathbb{P}[\cup_{e \in E}\{e\}] = \sum_{e \in E} \mathbb{P}[\{e\}] = \frac{\#E}{6}\,,$$

onde $\#E$ é o número de elementos de E.

- Exemplo: probabilidade de que o lançamento de um número par é:

$$\mathbb{P}[\{2, 4, 6\}] = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Variável aleatória e processo estocástico

- Uma variável aleatória Z é uma função, com domínio no espaço amostral (onde definimos a incerteza), e valores em outro espaço (para nossos fins, os reais).
  - Por exemplo, $(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidade descrevendo a incerteza associada aos retornos de ativos financeiros, e $Z : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ é a variável aleatória que representa o retorno de um fundo.
  - Incerteza em $(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$ traduz-se em incerteza em Z, i.e. Z é incerto pois o valor $\omega \in \Omega$ que ocorre é incerto.

- Um processo estocástico é uma coleção de variáveis aleatórias $\{X_t : t \in \mathcal{T}\}$, com domínio no **mesmo** espaço de probabilidade e indexada por um conjunto $\mathcal{T}$

- Uma série de tempo é um processo estocástico indexado no tempo, i.e. $\mathcal{T}$ é um conjunto de períodos.
  - Sempre tomaremos $\mathcal{T} = \mathbb{Z}$ ou $\mathcal{T} = \mathbb{N}$.
  - Para cada $\omega \in \Omega$, $\{X_t(\omega) : t \in \mathcal{T}\}$ é uma trajetória possível da série de tempo. Para cada $t \in \mathcal{T}$, X_t é uma variável aleatória.

Série de tempo estritamente estacionária

- Uma série de tempo $\{X_t : t \in \mathcal{T}\}$ é dita estritamente estacionária se, para todo $t \in \mathcal{T}$, $j \in \mathbb{N}$:

$$(X_t, X_{t+1}, \ldots, X_{t+j}) \stackrel{d}{=} (X_{t+h}, X_{t+1+h}, \ldots, X_{t+j+h}), \quad \forall h \geq 0,$$

onde $\stackrel{d}{=}$ significa igualdade das distribuições conjuntas, isto é

$$\mathbb{P}[X_t \leq c_1, X_{t+1} \leq c_2, \ldots, X_{t+j} \leq c_j] =$$
$$\mathbb{P}[X_{t+h} \leq c_1, X_{t+1+h} \leq c_2, \ldots, X_{t+j+h} \leq c_j], \quad \forall c_1, c_2 \ldots, c_j.$$

- Estacionariedade estrita requer que distribuição de qualquer número finito de períodos do processo seja a mesma ao longo do tempo.

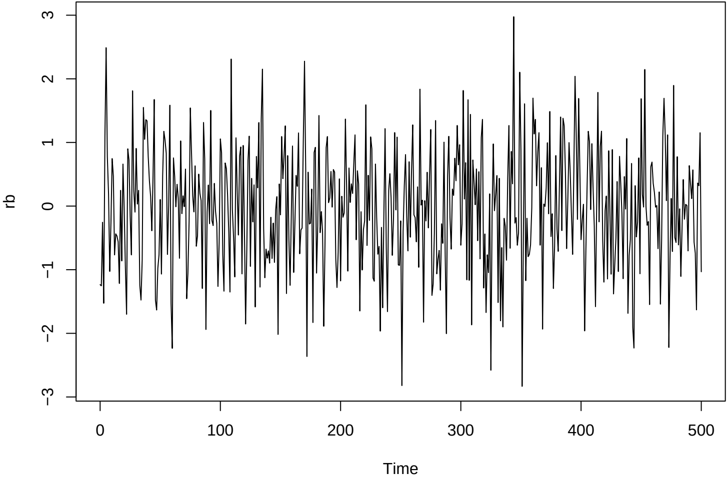
Série de tempo fracamente estacionária

- Para modelos lineares de séries de tempo, vamos considerar o conceito de processo (fracamente) estacionário.
- Uma série de tempo $\{X_t : t \in \mathcal{T}\}$ é dita (fracamente) estacionária se:
  1. $\mathbb{E}[X_t] = \mu$ para todo $t \in \mathcal{T}$.
  2. $\mathbb{V}[X_t] = \sigma^2 < \infty$ para todo $t \in \mathcal{T}$.
  3. $\mathrm{cov}(X_t, X_s) = \phi_{|t-s|}$ para todo $t, s \in \mathcal{T}$.
- Processo é fracamente estacionário se sua média e variância mantêm-se constantes no tempo e covariância entre duas observações depende somente da distância entre as duas observações no tempo.
- Estacionariedade fraca impõe um mínimo de estabilidade no processo ao longo do tempo para que análise estatística usual possa prosseguir.
  - De modo geral, alguma noção de estacionariedade + dependência fraca entre as observações (observações muito distantes no tempo comportam-se "como" observações independentes) vai ser requerida das séries de tempo para o funcionamento "padrão" de estimadores.
- Processo é dito não estacionário se não for fracamente estacionário.

Ruído branco

- Um processo Z_t, $t \in \mathcal{T}$, é dito um ruído branco se:
    1. $\mathbb{E}[Z_t] = 0$ para todo t.
    2. $\mathbb{V}[Z_t] = \sigma^2 < \infty$ para todo t.
    3. $\mathrm{cov}(Z_t, Z_s) = 0$ se $t \neq s$.
- Um ruído branco tem média zero, variância constante finita e não apresenta correlação serial.
    - Por construção, é um processo fracamente estacionário.

Ruído branco (gráfico)



Processo MA(q)

- Um processo Z_t, $t \in \mathbb{Z}$, é dito de média movel de ordem q, ou tão somente MA(q), se:

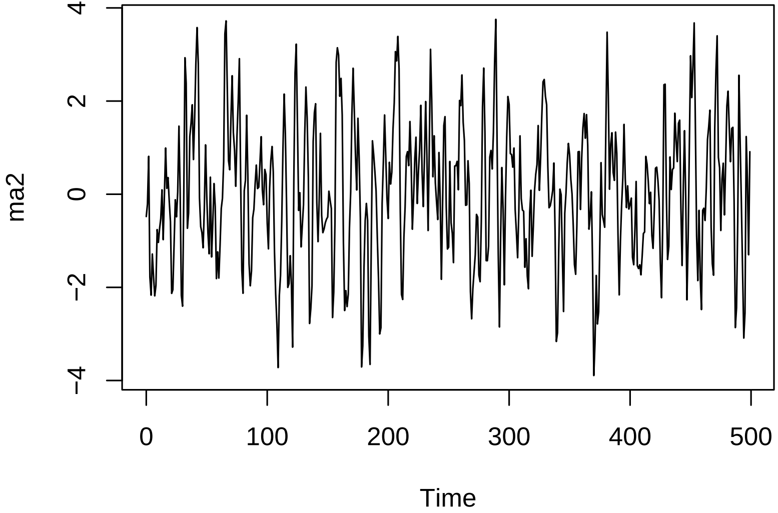
$$Z_t = \mu + \epsilon_t + \sum_{j=1}^{q} \psi_q \epsilon_{t-j} \,,$$

onde $\{\epsilon_t\}_t$ é um ruído branco com variância σ^2_ϵ.

- Vamos verificar que o processo é (fracamente) estacionário. De fato
  1. $\mathbb{E}[Z_t] = \mu$.
  2. $\mathbb{V}[Z_t] = \sigma^2_\epsilon(1 + \sum_{j=0}^{q} \psi_j^2)$.
  3. $\mathrm{cov}(Z_{t+j}, Z_t) = \begin{cases} \sigma^2_\epsilon(\psi_j + \psi_{j+1}\psi_1 + \psi_q\psi_{q-j}), & \text{se } 0 < j \leq q \\ 0, & \text{se } j > q \end{cases}$

- Processo tem memória curta: correlações desaparecem após q períodos.

Processo MA(2) com $\psi_1 = 1$ e $\psi_2 = 0.5$



Processo AR(1) estacionário

- Um processo Z_t, $t \in \mathbb{Z}$, é dito autorregressivo de ordem um estacionário, ou tão somente AR(1) estacionário, se:

$$Z_t = \alpha + \rho Z_{t-1} + u_t$$

  onde $|\rho| < 1$, $\{u_t\}_{t\in\mathbb{Z}}$ é ruído branco com $\mathbb{V}[u_t] = \sigma_u^2$ existem $S \in \mathbb{Z}$, $C \in \mathbb{R}$ tais que $\mathbb{E}[|Z_t|] \leq C$ para todo $t \leq S$.

- Vamos verificar que as condições acima garantem que o processo seja, de fato, estacionário.

- Note que:

$$\begin{aligned}
Z_t &= \alpha + \rho(\alpha + \rho Z_{t-2} + u_{t-1}) + u_t \\
&= \alpha + \rho\alpha + \rho^2(\alpha + \rho Z_{t-3} + u_{t-2}) + u_t + \rho u_{t-1} \\
` &= \ldots \\
&= \sum_{j=0}^{\tau} \rho^j \alpha + \rho^\tau Z_{t-\tau} + \sum_{j=0}^{\tau} \rho^j u_t
\end{aligned}$$

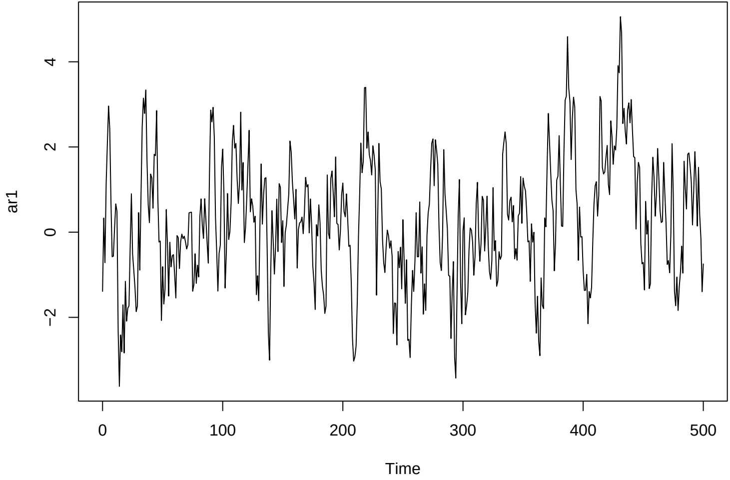
Processo AR(1) estacionário (cont.)

- Pelas hipóteses, $\lim_{\tau \to \infty} \rho^\tau \mathbb{E}[|Z_{t-\tau}|] = 0$. Isso nos garante que $\rho^\tau |Z_t| \to 0$ e podemos escrever

$$Z_t = \sum_{j=0}^{\infty} \rho^j \alpha + \sum_{j=0}^{\infty} \rho^j u_t = \frac{\alpha}{1-\rho} + \sum_{j=0}^{\infty} \rho^j u_{t-j}$$

- AR(1) estacionário se escreve como MA(∞).
- Usando representação acima, podemos checar que o processo é estacionário. De fato:
    1. $\mathbb{E}[Z_t] = \frac{\alpha}{1-\rho}$
    2. $\mathbb{V}[Z_t] = \frac{\sigma_u^2}{1-\rho^2}$.
    3. $\text{cor}(Z_t, Z_s) = \rho^{|t-s|}$.

AR(1) ESTACIONÁRIO COM $\rho = 0.7$ (GRÁFICO)



Processo AR(p) estacionário

- Um processo Z_t, $t \in \mathbb{Z}$, é dito autorregressivo de ordem p estacionário, ou tão somente AR(p) estacionário, se:

$$Z_t = \alpha + \beta_1 Z_{t-1} + \beta_2 Z_{t-2} + \ldots + \beta_p Z_{t-p} + u_t$$

  onde $\{u_t\}_{t\in\mathbb{Z}}$ é ruído branco com $\mathbb{V}[u_t] = \sigma_u^2$, existem $S \in \mathbb{Z}$, $C \in \mathbb{R}$ tais que $\mathbb{E}[|Z_t|] \leq C$ para todo $t \leq S$, e os parâmetros $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_p)$ são tais que processo resultante é estacionário.

- No AR(p), processo se escreve como uma combinação linear do que aconteceu nos últimos p períodos, mais uma inovação.

Operador defasagem

- Para a análise de séries de tempo, é conveniente definir uma função L, denominada operador defasagem, que, para uma dada série de tempo $(X_t)_{t\in\mathcal{T}}$, nos devolve a série de tempo que consiste em $(X_t)_{t\in\mathcal{T}}$ defasado em um período, i.e.

$$LX_t \overset{\text{definição}}{=} L(X_t) = X_{t-1}, \quad \forall t \in \mathcal{T}$$

- A notação L^d será usada para denotar a aplicação do operador L d vezes em sequência, i.e.

$$L^d X_t \overset{\text{definição}}{=} \underbrace{L\dots L}_{\text{d vezes}} X_t = X_{t-d}\,, \quad \forall t \in \mathcal{T}$$

- Por fim, definiremos $L^0 = 1$, de modo que:

$$L^0 X_t = 1X_t = X_t \quad \forall t \in \mathcal{T}$$

Propriedades do operador defasagem

Lema

Sejam $(X_t)_{t\in\mathcal{T}}$ e $(Y_t)_{t\in\mathcal{T}}$ duas séries de tempo, e $\alpha \in \mathbb{C}$ um número complexo. Então

1. (Linearidade) $L(X_t + \alpha Y_t) = LX_t + \alpha LY_t$.
2. (Existência de soma infinita) Se $(X_t)_{t\in\mathcal{T}}$ é estacionário e $|\alpha| < 1$, o processo

$$Z_t = \sum_{j=0}^{\infty} \alpha^j L^j X_t = \sum_{j=0}^{\infty} \alpha^j X_{t-j}\,,$$

   existe e é estacionário.
3. (Inversa) Se $(X_t)_{t\in\mathcal{T}}$ é estacionário e $|\alpha| < 1$:

$$(1-\alpha L)^{-1}(X_t) = \sum_{j=0}^{\infty} \alpha^j L^j X_t$$

AR(p) em notação polinomial

- Usando a notação aprendida anteriormente, podemos reescrever o AR(p) como:

$$\phi(L)Z_t = \alpha + u_t\,, \tag{1}$$

onde $\phi(L) = 1 - \beta_1 L - \beta_2 L^2 \ldots - \beta_p L^p$, e $\{u\}_{t\in\mathbb{Z}}$ é ruído branco.

Proposição

Existe um processo $\{Z_t\}_{t\in\mathbb{Z}}$ fracamente estacionário que satisfaz (1), se, e somente se, as p raízes da equação $\phi(x) = 0$ se encontram **fora** do círculo unitário, isto é:

$$\phi(x) = 0 \implies |x| > 1\,.$$

Neste caso, o processo fracamente estacionário que satisfaz (1) é único, e pode ser escrito como:

$$Z_t = \phi^{-1}(L)(\alpha + u_t) = \tau + \sum_{j=0}^{\infty} \omega_j u_{t-j}$$

Estacionariedade do AR(p)

- A proposição anterior nos provê uma caracterização para a existência de um $\{Z_t\}_t$ estacionário que satisfaz (1), em termos das raízes do polinômio característico $\phi(x)$.
  - Note que a proposição fala de **existência** de uma solução. Por quê?
  - Isso se deve ao fato de que também podem existir processos $\{Z_t\}_{t\in\mathbb{Z}}$ não estacionários que satisfazem (1), mesmo quando as raízes estão todas fora do círculo.
    - Mas o teorema nos diz que, se ao menos uma das raízes está **dentro** do círculo, com certeza não há nenhuma solução estacionária.
  - A restrição que fazíamos, na definição de AR(p), de que o passado não explodia, justamente descartava as soluções não estacionárias, garantindo que estávamos selecionando a solução estacionária.
- No curso e na vida, vamos seguir como tradicionalmente feito na literatura econométrica e implicitamente **sempre** descartar as soluções não estacionárias (explosivas) que existem mesmo quando todas as raízes estão fora do círculo.
  - Dessa forma, diremos que um AR(p) é fracamente estacionário se, e somente se, todas as raízes de $\phi(x)$ estão fora do círculo.

Encontrando os coeficientes da representação MA(∞)

- As propriedades do operador defasagem podem ser utilizadas para encontrar a representação MA(∞) de um AR(p) estacionáriom.
- De fato, considere um AR(2) estacionário:

$$(1 - \beta_1 L - \beta_2 L^2) y_t = \alpha + u_t$$

- Da fatoração de polinômios, podemos escrever:

$$(1 - \beta_1 x - \beta_2 x^2) = \left(\frac{1}{\lambda_1} x - 1 \right) \left(\frac{1}{\lambda_2} x - 1 \right) ,$$

  onde λ_1 e λ_2 são as raízes de $(1 - x - \beta_2 x^2) = 0$.
- Portanto:

$$(1 - \beta_1 L - \beta_2 L^2) y_t = \left(1 - \frac{1}{\lambda_1} L \right) \left(1 - \frac{1}{\lambda_2} L \right) y_t = \alpha + u_t$$

Encontrando os coeficientes da representação MA(∞)

- Mas então

$$
\begin{aligned}
y_t = (1 - \beta_1 L - \beta_2 L^2)^{-1}(\alpha + u_t) = \\
\left(1 - \frac{1}{\lambda_2} L\right)^{-1} \left(1 - \frac{1}{\lambda_1} L\right)^{-1} (\alpha + u_t) = \\
\left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_2^i} L^i\right) \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_1^j} L^j\right) (\alpha + u_t) = \\
\frac{1}{(1-\lambda_1)(1-\lambda_2)}\alpha + \sum_{k=0}^{\infty} \omega_k u_{t-k}
\end{aligned}
\tag{2}
$$

onde ω_k é a soma de termos $\frac{1}{\lambda_1^i \lambda_2^j}$ tais que $i + j = k$.