

## EAE1223: Econometria III

### Exercícios de revisão

**Questão 1:** Sejam  $X_1, \dots, X_m$  e  $Y_1, \dots, Y_n$  variáveis aleatórias, e  $a, b, c \in \mathbb{R}$  números reais. Usando as propriedades de esperança:

$$\mathbb{E}[X_1 + X_2] = X_1 + X_2,$$

$$\mathbb{E}[aX_1] = a + X_1,$$

$$\mathbb{E}[a] = a,$$

e as definições de variância e covariância:

$$\mathbb{V}[X_1] = \mathbb{E}[X_1^2] - \mathbb{E}[X_1]^2,$$

$$\text{cov}(X_1, X_2) = \mathbb{E}[X_1 X_2] - \mathbb{E}[X_1]\mathbb{E}[X_2],$$

verifique as seguintes propriedades.

1.  $\text{cov}(X_1, X_2) = \text{cov}(X_2, X_1)$ .
2.  $\text{cov}(X_1, X_1) = \mathbb{V}[X_1]$ .
3.  $\text{cov}(aX_1, bX_2) = ab \text{cov}(X_1, X_2)$ .
4.  $\text{cov}(X_1 + X_2, X_3) = \text{cov}(X_1, X_3) + \text{cov}(X_2, X_3)$ .
5.  $\text{cov}(X_1 + X_2, X_3 + X_4) = \text{cov}(X_1, X_3) + \text{cov}(X_1, X_4) + \text{cov}(X_2, X_3) + \text{cov}(X_2, X_4)$ .
6. Generalize para:  $\text{cov}(\sum_{i=1}^m X_i, \sum_{j=1}^n Y_j) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \text{cov}(X_i, Y_j)$ .
7.  $\text{cov}(a, X_1) = 0$ .
8.  $\mathbb{V}[a] = 0$
9.  $\mathbb{V}[a + X_1] = \mathbb{V}[X_1]$ .
10.  $\mathbb{V}[X_1 + X_2] = \mathbb{V}[X_1] + \mathbb{V}[X_2] + 2 \text{cov}(X_1, X_2)$ .
11.  $\mathbb{V}[X_1 + X_2 + X_3] = \mathbb{V}[X_1] + \mathbb{V}[X_2] + \mathbb{V}[X_3] + 2 \text{cov}(X_1, X_2) + 2 \text{cov}(X_1, X_3) + 2 \text{cov}(X_2, X_3)$ .
12. Generalize para:  $\mathbb{V}[\sum_{j=1}^m X_j] = \sum_{j=1}^m \mathbb{V}[X_j] + 2 \sum_{i=1}^m \sum_{j=i+1}^m \text{cov}(X_i, X_j)$ .

**Questão** Sejam  $Y$  e  $Z$  variáveis aleatórias. Recorde-se que os coeficientes do melhor preditor linear de  $Y$  como função de  $Z$  (e um intercepto) são dados por:

$$(a, b) \in \operatorname{argmin}_{(a,b) \in \mathbb{R}} \mathbb{E}[(Y - a - bZ)^2],$$

Mostre, nesse caso, que, se  $\mathbb{V}[Z] > 0$ ,  $b = \operatorname{cov}(Z, Y)/\mathbb{V}[Z]$ , e que, definindo o erro de previsão  $u = Y - a - bZ$ , temos:

$$Y = a + bZ + u,$$

onde  $\mathbb{E}[u] = 0$  e  $\mathbb{E}[Zu] = \operatorname{cov}(Z, u) = 0$ .