

EAE1223: ECONOMETRIA III

AULA 3 - DECOMPOSIÇÕES DESCRITIVAS DE SÉRIES DE TEMPO

Luis A. F. Alvarez

26 de março de 2025

DECOMPOSIÇÃO ADITIVA DE UMA SÉRIE DE TEMPO

- Podemos considerar o seguinte modelo para uma série de tempo X_t , $t \in \mathcal{T}$:

$$X_t = T_t + C_t + S_t + U_t \quad (1)$$

onde

1. T_t é a **tendência** de X . Movimento de longo prazo da série.
2. C_t é o **ciclo** de X . Movimento oscilatório em torno da tendência de frequência, em geral, desconhecida.
3. S_t é a **sazonalidade** de X . Movimento oscilatório de periodicidade bem-definida.
 - Vendas no comércio costumam apresentar alta nos meses de maio e dezembro.
4. U_t é o **componente idiossincrático** da série X em t . Captura fenômenos específicos a t e não explicados pelos demais componentes.

DECOMPOSIÇÃO MULTIPLICATIVA DE UMA SÉRIE

- Podemos considerar o seguinte modelo para uma série de tempo X_t , $t \in \mathcal{T}$:

$$X_t = T_t \cdot C_t \cdot S_t \cdot U_t \quad (2)$$

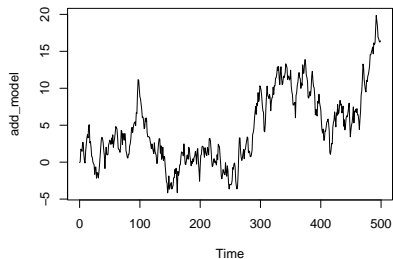
onde os componentes são definidos como no modelo aditivo.

- Um modelo multiplicativo implica um modelo aditivo em log.

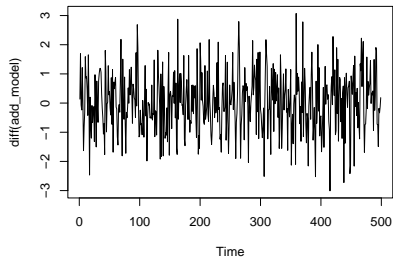
$$\log(X_t) = \tau_t + c_t + s_t + u_t \quad (3)$$

- Estimação é feita trabalhando com modelo aditivo em log.
- Observe que, no modelo multiplicativo, a tendência afeta a **escala** das variáveis.
 - Em particular, esperamos que, no modelo multiplicativo, a variância de $\Delta X_t = X_t - X_{t-1}$ mude bastante com o tempo.
 - Escolha entre modelo aditivo ou multiplicativo pode ser feita observando um gráfico de $\Delta X_t = X_t - X_{t-1}$.

MODELO ADITIVO (NÍVEL E PRIMEIRA DIFERENÇA)

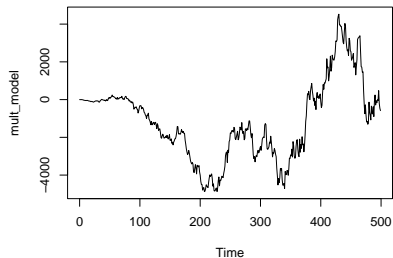


(A) Nível

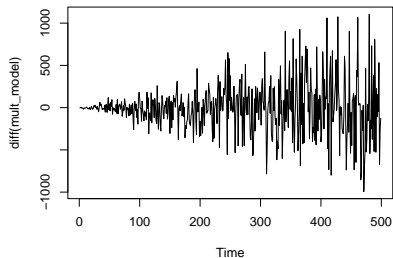


(B) Primeira diferença

MODELO MULTIPLICATIVO (NÍVEL E PRIMEIRA DIFERENÇA)



(A) Nível



(B) Primeira diferença

AJUSTE SAZONAL

- Remoção do componente sazonal clássica faz uso de **médias móveis**.
- Suponha que a série tem movimentos sazonais bem definidos a cada h períodos, onde h é número **ímpar** (e.g. sazonalidade semanal numa série diária). Podemos construir a **média móvel centrada em t** como:

$$\tilde{X}_t = \frac{1}{h} \sum_{s=t-(h-1)/2}^{t+(h-1)/2} X_s \quad (4)$$

- O **fator de correção sazonal** para $s = 1, \dots, h$ é dado por:

$$\hat{\delta}_s = \frac{1}{\lfloor (T-s)/h \rfloor + 1} \sum_{t=s, s+h, s+2h, \dots} (X_t - \tilde{X}_t) \quad (5)$$

- E o fator recentrado é:

$$\tilde{\delta}_s = \hat{\delta}_s - \frac{1}{h} \sum_{j=1}^h \hat{\delta}_j \quad (6)$$

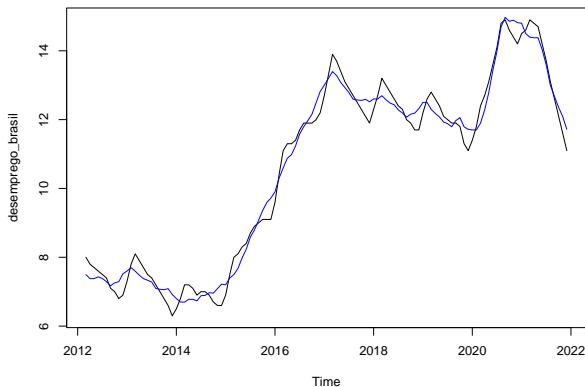
AJUSTE SAZONAL (CONT.)

- Fatores podem ser usado para obter séries corrigidas da sazonalidade, subtraindo-se de cada observação o $\tilde{\delta}_s$ correspondente.
- Se h é par, calculamos \tilde{X}_t combinando duas médias não centradas:

$$\tilde{X}_t = 0.5 \times \frac{1}{h} \sum_{s=t-(h-2)/2-1}^{t+(h-2)/2} X_s + 0.5 \times \frac{1}{h} \sum_{s=t-(h-2)/2}^{t+(h-2)/2+1} X_s$$

EXEMPLO: TAXA DE DESEMPREGO MENSAL NO BRASIL

FIGURA: Taxa de desemprego original (preto) e com ajuste via médias móveis centradas (azul)

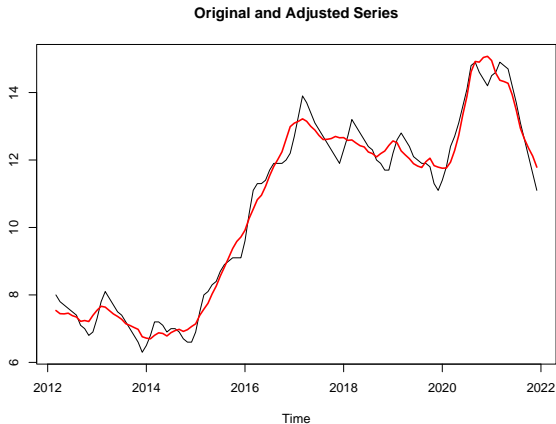


X13 ARIMA-SEATS

- Metodologia de ajuste sazonal desenvolvida pelo *US Census Bureau*.
- Padrão ouro para ajustes sazonais.
 - Combina metodologia de médias móveis com a possibilidade de inclusão de efeitos-calendário (por padrão, modelo controla por dias úteis do mês e alguns feriados móveis; passível de alteração), detecção automática de *outliers*, *backfitting* para completamento da série de tempo e seleção automática de modelo aditivo ou multiplicativo.
- No R, acessível via pacote `seasonal`.
- Disponível para séries mensais e trimestrais.
 - Para séries diárias, há potencialmente mais de uma fonte de sazonalidade em diferentes frequências, o que requer abordagem diferentes (por exemplo, Livera, Hyndman e Snyder, 2011).

EXEMPLO: TAXA DE DESEMPREGO MENSAL NO BRASIL (CONT.)

FIGURA: Taxa de desemprego original (preto) e com ajuste via X13 (vermelho)



SEPARANDO O CICLO DA TENDÊNCIA

- Dada uma série de tempo cujo componente sazonal já foi extraído, como separar o componente cíclico da tendência?
- Uma abordagem bastante comum consiste em utilizar um **filtro HP**. Formalmente, dada uma série $\{y_t\}_{t=1}^T$, estimamos a tendência $\{\mu_t\}_{t=1}^T$ resolvendo:

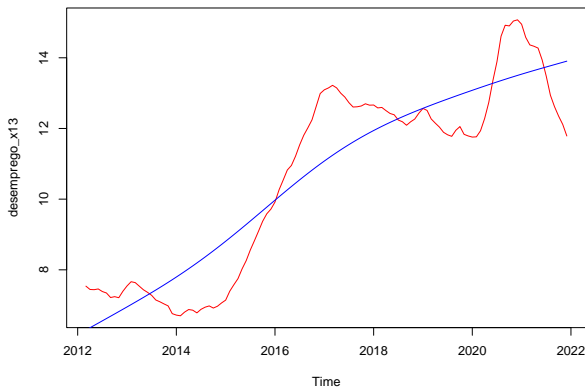
$$\min_{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_T} \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (y_t - \mu_t)^2 + \frac{\lambda}{T} \sum_{t=2}^{T-1} [(\mu_{t+1} - \mu_t) - (\mu_t - \mu_{t-1})]^2 \quad (7)$$

para uma **penalização** $\lambda > 0$.

- λ controla o grau de suavidade da tendência estimada (quanto maior λ , mais suavizado):
 1. Se $\lambda = 0$, $\hat{\mu}_t = y_t$, i.e. a tendência estimada é a própria série.
 2. Se $\lambda \rightarrow \infty$, $\hat{\mu}_t \rightarrow \hat{a} + \hat{b}t$, i.e. a tendência torna-se linear (igual à regressão de y_t num intercepto e numa tendência linear).
- Regra de bolso é usar $\lambda = 1600$ para dados trimestrais, $\lambda = 6,25$ para dados anuais e $\lambda = 129600$ para dados mensais (Ravn e Uhlig, 2002).

EXEMPLO: TAXA DE DESEMPREGO MENSAL NO BRASIL (CONT.)

FIGURA: Taxa de desemprego com ajuste via X13 (vermelho) e tendência extraída via filtro HP (azul)

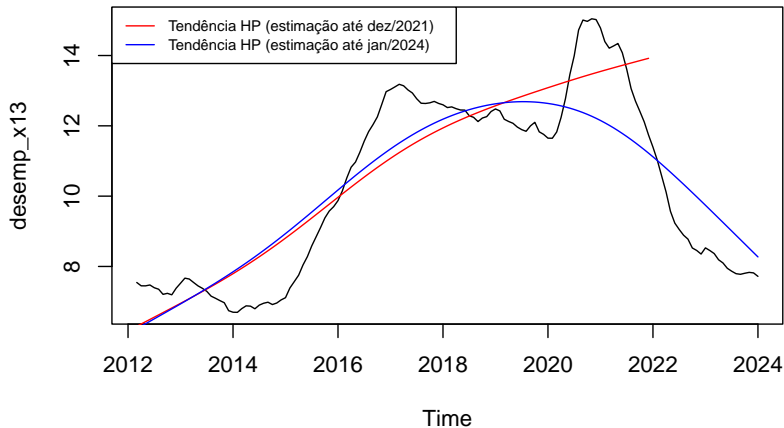


FILTRO HP E INSTABILIDADE NA PONTA

- Note que, à medida que mais dados são divulgados, os valores da tendência podem mudar.
- Esse fenômeno é especialmente acentuado nas observações mais recentes, em que a contribuição de novas observações é especialmente acentuada.
 - A esse fenômeno damos o nome de **instabilidade na ponta**: observações futuras podem fazer nossa estimativa do ciclo mudar radicalmente.

INSTABILIDADE DE PONTA: ILUSTRAÇÃO

FIGURA: Desemprego mensal (ajustado via X13) até janeiro/2024



ALTERNATIVAS AO FILTRO HP: HAMILTON (2018)

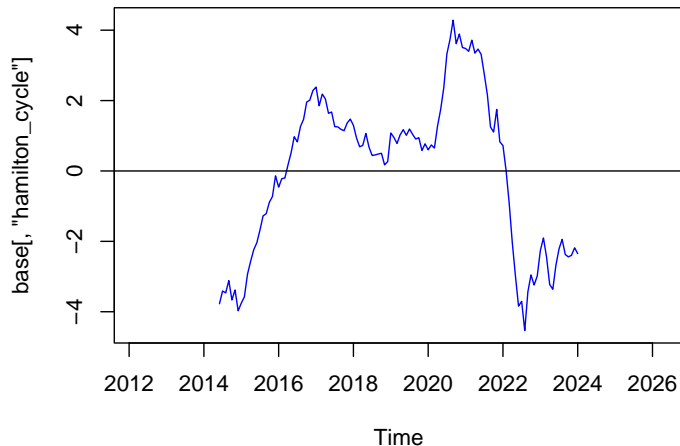
- A instabilidade de ponta, combinada a outras debilidades do filtro HP, leva Hamilton (2018) a sugerir uma outra medida de ciclo.
- Sua sugestão é calcular o ciclo como o resíduo $\hat{\nu}_t$ da regressão:

$$y_{t+h} = \alpha + \beta_1 y_t + \beta_2 y_{t-1} + \beta_3 y_{t-2} + \beta_4 y_{t-3} + \nu_{t+h},$$

onde h é tomado de forma de que a distância entre t e $t + h$ seja de **dois** anos.

- $h = 8$ em dados trimestrais, $h = 24$ em dados mensais.
- Medida captura o erro que se comete em projetar o que ocorre em t , com base no que ocorreu há dois anos.
- Ideia é que esse erro capturaria fatores cíclicos.

APLICAÇÃO DE HAMILTON (2018) AOS DADOS DE DESEMPREGO



DECOMPOSIÇÃO DE BEVERIDGE-NELSON

- A decomposição de Hamilton é bastante similar a um procedimento, sugerido por Beveridge e Nelson (1981), para se separar a tendência estocástica da parte estacionária de um processo $I(1)$.
- Decomposição de Beveridge-Nelson toma a parte estacionária de um processo $I(1)$ como:

$$\nu_t^{\text{BN}} = y_t - \lim_{s \rightarrow \infty} \mathbb{E}[y_{t+s} | y_t, y_{t-1}, \dots]$$

i.e. a diferença entre y_t e uma projeção de longo prazo, feita com base em toda o histórico de y até t .

- Se processo também apresenta tendência determinística $a_0 t$ em nível, fazemos:

$$\nu_t^{\text{BN}} = y_t - \lim_{s \rightarrow \infty} (\mathbb{E}[y_{t+s} | y_t, y_{t-1}, \dots] - a_0 s)$$

- Decomposição pode ser estimada ajustando um modelo preditivo para Δy_t , e computando projeções fora da amostra para um horizonte longo, observando que $y_{t+s} = y_t + \Delta y_{t+1} + \dots \Delta y_{t+s}$.

BIBLIOGRAFIA I



Beveridge, Stephen e Charles R. Nelson (1981). “A new approach to decomposition of economic time series into permanent and transitory components with particular attention to measurement of the ‘business cycle’”. Em: *Journal of Monetary Economics* 7.2, pp. 151–174. ISSN: 0304-3932. DOI:

[https://doi.org/10.1016/0304-3932\(81\)90040-4](https://doi.org/10.1016/0304-3932(81)90040-4). URL:
<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0304393281900404>.



Hamilton, James D. (dez. de 2018). “Why You Should Never Use the Hodrick-Prescott Filter”. Em: *The Review of Economics and Statistics* 100.5, pp. 831–843. ISSN: 0034-6535. DOI: 10.1162/rest_a_00706. eprint: https://direct.mit.edu/rest/article-pdf/100/5/831/1918879/rest_a_00706.pdf. URL: https://doi.org/10.1162/rest%5C_a%5C_00706.

BIBLIOGRAFIA II



Livera, Alysha M. De, Rob J. Hyndman e Ralph D. Snyder (2011). “Forecasting Time Series With Complex Seasonal Patterns Using Exponential Smoothing”. *Em: Journal of the American Statistical Association* 106.496, pp. 1513–1527. DOI: 10.1198/jasa.2011.tm09771. eprint: <https://doi.org/10.1198/jasa.2011.tm09771>. URL: <https://doi.org/10.1198/jasa.2011.tm09771>.



Ravn, Morten O. e Harald Uhlig (mai. de 2002). “On Adjusting the Hodrick-Prescott Filter for the Frequency of Observations”. *Em: The Review of Economics and Statistics* 84.2, pp. 371–376. ISSN: 0034-6535. DOI: 10.1162/003465302317411604. eprint: <https://direct.mit.edu/rest/article-pdf/84/2/371/1613390/003465302317411604.pdf>. URL: <https://doi.org/10.1162/003465302317411604>.