EAE1223: Econometria III

Exercícios sobre Processos Estocásticos

Questão 1: Verifique se os seguintes processos ARMA(p,q) são estacionários e invertíveis, onde, no que segue, $\{u_t : t \in \mathbb{Z}\}$ é sempre um ruído branco. `Dica:` o comando `polyroot`, no R, calcula as raízes de um polinômio. O comando `abs` calcula o valor absoluto de um número complexo.

1. $y_t = 0.7y_{t-2} + u_t$,
2. $y_t = 0.5y_{t-1} + 2y_{t-2} + u_t - 0.5u_{t-1}$,
3. $y_t = 1.5y_{t-1} - 0.5y_{t-2} + u_t - u_{t-1}$,
4. $y_t = (1 - 2L + 5L^3)u_t$.

Questão 2: Seja $\{\epsilon_t\}_{t\in\mathbb{Z}}$ um ruído branco com variância igual a um. O processo a seguir é estacionário?

$$(1 - 1.1L + 0.18L^2)y_t = \epsilon_t \, .$$

Se sim, calcule sua variância e primeira autocovariância $\gamma_1 = \text{cov}(y_t, y_{t-1})$, e proponha um algoritmo iterativo para calcular $\gamma_j = \text{cov}(y_t, y_{t-j})$, $j > 2$, como função das autocovariâncias anteriormente calculadas.

Questão 3: Considere o processo:

$$y_t = +\beta t + u_t \, ,$$

onde $\{u_t\}$ é ruído branco, e $\beta > 0$.

1. Mostre que a média amostral de $\{y_t\}_t$, $\hat{\mu}_y = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} y_t$, diverge em probabilidade para ∞ quando o número de observações $T \to \infty$. *Dica:* pela lei dos grandes números, $\text{plim}_{T\to\infty} \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} u_t = 0$.
2. Considere, agora, o estimador de MQO de β:

   $$\hat{\beta} = \frac{\sum_{t=1}^{T} t y_t}{\sum_{t=1}^{T} t^2} \, .$$

   Mostre que esse estimador satisfaz:

   $$\hat{\beta} = \beta + \frac{\sum_{t=1}^{T} t u_t}{\sum_{t=1}^{T} t^2} \, ,$$

   e mostre que o segundo termo do lado direito da igualdade tem valor esperado zero.

3. Mostre que
$$\lim_{T\to\infty} \mathbb{V}\left[\frac{\sum_{t=1}^T tu_t}{\sum_{t=1}^T t^2}\right] = 0\,.$$
Dica: $\sum_{t=1}^T t^2 = \frac{1}{6}T(T+1)(2T+1)$. Como $\frac{\sum_{t=1}^T tu_t}{\sum_{t=1}^T t^2}$ tem média zero pelo item anterior e $\lim_{T\to\infty} \mathbb{V}\left[\frac{\sum_{t=1}^T tu_t}{\sum_{t=1}^T t^2}\right] = 0$, nós concluiremos (não precisa demonstrar) que $\text{plim}_{T\to\infty} \frac{\sum_{t=1}^T tu_t}{\sum_{t=1}^T t^2} = 0$.

4. Usando a conclusão anterior, mostre que $\text{plim}_{T\to\infty}\hat{\beta} = \beta$.

Questão 4: Vamos considerar dois passeios aleatórios **independentes**.

$$y_t = y_{t-1} + u_t\,, \quad t = 1, 2, \ldots,$$
$$x_t = x_{t-1} + v_t\,, \quad t = 1, 2 \ldots, ,$$

com $y_0 = 0$ e $x_0 = 0$, e de tal forma que os processos $\{u_t\}_t$ e $\{v_t\}_t$ são **independentes** um do outro.

1. Simule os processos acima por cem períodos (por exemplo, usando as funções `ar.sim` ou `arima.sim` duas vezes, uma para cada processo). Esboce uma figura com a evolução dos dois processos no tempo.

2. Usando as observações geradas, ajuste via MQO um modelo linear para prever y_t como função de x_t e um intercepto. Teste, a 5% de significância, a hipótese nula de que o coeficiente associado a x_t é zero. Qual é a conclusão do teste?

3. Simule os dois processos novamente, mas agora por 500 períodos. Repita o procedimento do item anterior. Qual é a conclusão do teste?

4. Simule os dois processos novamente, mas agora por 1000 períodos. Repita o procedimento do item (3). Qual é a conclusão do teste? Os resultados estão de acordo com o que você esperaria para a relação entre y_t e x_t? Por quê?