

# EAE1223: ECONOMETRIA III

## AULA 8 - MODELOS VETORIAIS AUTORREGRESSIVOS ESTRUTURAIS

Luis A. F. Alvarez

16 de maio de 2024

# UM MODELO PARA A DESCRIÇÃO DE UMA ECONOMIA

- Seja  $\{\mathbf{Y}_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$  um processo vetorial de interesse, onde  $\mathbf{Y}_t$  consiste de  $d$  variáveis econômicas, sobre as quais a teoria econômica têm algo a nos dizer sobre o comportamento conjunto.
- Um **modelo estrutural (causal) linear** para estas variáveis consiste em um sistema de  $d$  equações da forma:

$$\mathbf{A}_0 \mathbf{Y}_t = \mathbf{a} + \sum_{j=1}^p \mathbf{A}_j \mathbf{Y}_{t-j} + \epsilon_t, \quad (1)$$

onde  $\mathbf{A}_0$  é uma matriz  $d \times d$  que explicita as relações contemporâneas (causais) entre as variáveis, e  $\epsilon_t$  é um ruído branco **contemporaneamente não correlacionado**, isto é

$$\mathbb{V}[\epsilon_t] = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma_d^2 \end{bmatrix} = \Omega_\epsilon$$

# CHOQUES ECONÔMICOS FUNDAMENTAIS

- A hipótese de que os erros de cada uma das equações são contemporaneamente não correlacionados supõe que o modelo que descreve a economia esteja **bem especificado**, de modo que o choque da  $j$ -ésima equação reflete a incerteza econômica fundamental associada a  $Y_{jt}$ .
  - $\epsilon_{jt}$  reflete choques (surpresas ou inovações, não antecipadas com base no passado) nos determinantes essenciais de  $Y_{jt}$ , e não nos determinantes indiretos (via outras variáveis do sistema) de  $Y_{jt}$ .
- Esse tipo de hipótese é presumida em uma das perguntas clássicas da macroeconomia: quanto da flutuação econômica pode ser atribuída à política monetária vs fatores reais?
  - Pergunta presume que existem inovações fundamentais, contemporaneamente ortogonais (não correlacionadas), em fatores monetários e reais, que permitem pensar nesta decomposição, visto que ela não faz sentido se os fatores fundamentais não fossem fundamentais (i.e. correlacionados).
  - Veremos como nossa metodologia permite fazer explicitamente esta decomposição.

## EXEMPLO

- Considere o comportamento conjunto de inflação ( $\pi_t$ ), desemprego ( $u_t$ ), expectativas de inflação ( $\pi_t^e$ ) e taxa de juros nominal ( $i_t$ ):

$$\pi_t = \sum_{j=1}^p \theta_j \pi_{t-j} + \sum_{j=0}^p \beta_j (u_{t-j} - \bar{u}_{\text{neutro}}) + \sum_{j=0}^p \gamma_j \pi_{t-j}^e + \epsilon_{\pi,t} \quad (\text{CP})$$

$$u_t - \bar{u} = \sum_{j=1}^p \omega_j (u_{t-j} - \bar{u}) + \sum_{j=0}^p \alpha_j (i_{t-j} - \pi_{t-j}^e) + \epsilon_{u,t} \quad (\text{IS})$$

$$i_t = \bar{i} + \sum_{j=1}^p \psi_j i_{t-j} + \sum_{j=0}^p \kappa_j (\pi_{t-j} - \pi_M) + \sum_{j=0}^p \phi_j (\pi_{t-j}^e - \pi_M) + \epsilon_{i,t} \quad (\text{RM})$$

$$\pi_t^e = \mu \pi_M + \sum_{j=1}^p \iota_j \pi_{t-j}^e + \theta_3 \sum_{j=0}^p (\nu_{1j} \pi_{t-j} + \nu_{2j} u_{t-j} + \nu_{3j} i_{t-j}) + \epsilon_{e,t} \quad (\text{FE})$$

onde  $\epsilon_{\pi,t}$  são choques de oferta (CP),  $\epsilon_{u,t}$  choques de demanda (IS),  $\epsilon_{i,t}$  são surpresas de política monetária (RM), e  $\epsilon_{e,t}$  são ruídos na formação de expectativas.

# REPRESENTAÇÃO AUTORREGRESSIVA DO MODELO LINEAR ESTRUTURAL

- Se o sistema (1) oferece uma descrição **completa** da evolução de  $\mathbf{Y}_t$ , então, para uma dada trajetória pretérita  $\{\mathbf{Y}_s : s \leq t - 1\}$ , e valores dos choques fundamentais  $\epsilon_t$ , existe um único valor de  $\mathbf{Y}_t$  que satisfaz (1).
- Nesse caso, a matriz  $\mathbf{A}_0$  admite inversa  $\mathbf{B} = \mathbf{A}_0^{-1}$ , e o sistema admite **representação autorregressiva**:

$$\mathbf{Y}_t = \underbrace{\mathbf{c}}_{=\mathbf{B}\mathbf{a}} + \sum_{j=1}^p \underbrace{\mathbf{C}_j}_{=\mathbf{B}\mathbf{A}_j} \mathbf{Y}_{t-j} + \mathbf{B}\epsilon_t. \quad (2)$$

- Modelo VAR em que o ruído branco  $\mathbf{B}\epsilon_t$  é uma combinação linear de choques fundamentais.
- Matriz  $\mathbf{B}$  incorpora o efeito contemporâneo de inovações fundamentais sobre as variáveis em  $\mathbf{Y}_t$ .

# MODELO SVAR(p)

- Em diversas situações, não necessariamente queremos partir de (1) para chegar a (2)
  - Não necessariamente temos uma descrição completa da economia.
  - De modo relacionado, a formulação (2) pode ser compatível com mais de uma formulação estrutural linear completa.
- Nesses casos, podemos definir diretamente um modelo vetorial autorregressivo (semi)estrutural de ordem  $p$ , SVAR(p), como o processo

$$\mathbf{Y}_t = \mathbf{c} + \sum_{j=1}^p \mathbf{C}_j \mathbf{Y}_{t-j} + \mathbf{B} \epsilon_t, \quad (3)$$

onde  $\epsilon_t$  são inovações fundamentais, isto é ruídos brancos não contemporaneamente correlacionadas, e  $\mathbf{B}$  é a matriz que captura os efeitos contemporâneos das inovações fundamentais sobre  $\mathbf{Y}_t$ .

## FUNÇÃO DE RESPOSTA AO IMPULSO

- Os efeitos causais dinâmicos, na modelagem SVAR, são capturados pelos efeitos de surpresas nos choques fundamentais sobre o comportamento do sistema.
  - Note que, por construção,  $\epsilon_t$  captura fatores não antecipados com base no passado.
  - Como  $\epsilon_t$  é não contemporaneamente correlacionado, faz sentido pensar em surpresas em um de seus componentes, mantidos os outros constantes.
- Formalmente, o efeito *ceteris-paribus* de uma surpresa de uma unidade na  $j$ -ésima inovação do sistema em  $t$ ,  $\epsilon_{jt}$ , sobre a  $i$ -ésima variável do sistema em  $t + h$ ,  $h \geq 0$ , é dada pela **função de resposta ao impulso**

$$F_h(i|j) = \frac{\partial Y_{i,t+h}}{\partial \epsilon_{j,t}}$$

- Por exemplo,  $F_0(i|j) = \mathbf{B}_{ij}$ ,  
 $F_1(i|j) = \sum_{l=1}^d \mathbf{C}_{1,i,l} \mathbf{B}_{lj} = \sum_{l=1}^d \mathbf{C}_{1,i,l} F_0(l|j)$ ,  
 $F_2(i|j) = \sum_{l=1}^d \mathbf{C}_{1,i,l} F_1(l|j) + \sum_{l=1}^d \mathbf{C}_{2,i,l} F_0(l|j)$ , etc.

# REFERÊNCIAS I



Sims, Christopher A., James H. Stock e Mark W. Watson (1990).  
“Inference in Linear Time Series Models with some Unit Roots”. Em:  
*Econometrica* 58.1, pp. 113–144. ISSN: 00129682, 14680262. URL:  
<http://www.jstor.org/stable/2938337> (acesso em 15/05/2024).