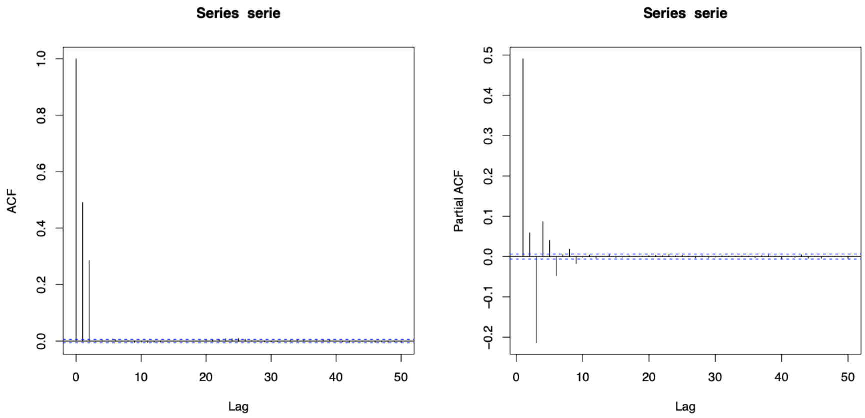
EAE1223: Econometria III

Exercícios sobre a metodologia de Box-Jenkins

Parte 1

1 Observando a FAC e FACP, assinale qual processo é mais provável de ter gerado os dados:



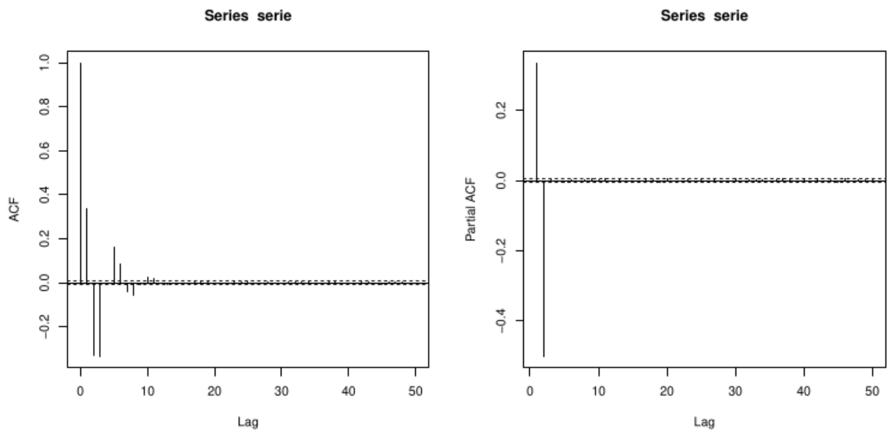
(A) ARMA(5,1)

(B) AR(3)

(C) MA(3)

(D) MA(2)

2 Observando a FAC e FACP, assinale qual processo é mais provável de ter gerado os dados. Justifique sua resposta.



(a) AR(1)
(b) AR(2)
(c) MA(1)
(d) MA(2)
(e) ARMA$(1,1)$

3 Considere o seguinte processo estocástico estacionário:

$$Y_t = \rho_0 Y_{t-1} + \epsilon_t \, ,$$

onde $\epsilon_t \overset{\text{iid}}{\sim} N(0, \sigma_0^2)$, e $|\rho_0| < 1$.

(a) Mostre que:

$$Y_t = \epsilon_t + \sum_{j=1}^{\infty} \rho_0^j \epsilon_{t-j} \, .$$

(b) Com base no resultado do item anterior, argumente que, para todo $t > 1$, a distribuição de Y_t, condicional a $Y_1, \ldots Y_{t-1}$, é Gaussiana com média $\rho_0 Y_{t-1}$ e variância σ_0^2, isto é:

$$Y_t | Y_1, \ldots, Y_{t-1} \sim N(\rho_0 Y_{t-1}, \sigma_0^2) \, .$$

(c) Com base no resultado do item anterior, e no fato de que a densidade de $Y_2, Y_3, \ldots Y_T$, condicional a Y_1, se fatora como:

$$f_{Y_2, \ldots Y_T | Y_1}(Y_2, Y_3, \ldots Y_T | Y_1) = \prod_{t=2}^{T} f_{Y_t | Y_1, \ldots Y_{t-1}}(Y_t | Y_1, \ldots Y_{t-1}) \, ;$$

mostre que a densidade de $Y_2, \ldots Y_T$, condicional a Y_1 se escreve como:

$$f_{Y_2, \ldots, Y_T | Y_1}(Y_2, \ldots, Y_T | Y_1) = \frac{1}{\sigma_0^{T-1}} \prod_{t=2}^{T} \phi\left(\frac{Y_t - \rho_0 Y_{t-1}}{\sigma_0} \right) \, ,$$

onde $\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-x^2/2)$ é a densidade de uma normal padrão.

(d) Mostre que o estimador $\hat{\rho}$ de ρ_0 que maximiza a log-verossimilhança de $Y_2, \ldots Y_T | Y_1$ é idêntico ao estimador condicional de um AR(1) visto em aula, que minimiza:

$$\min_{b \in \mathbb{R}} \sum_{t=2}^{T} (Y_t - b Y_{t-1})^2$$

Parte 2

4 Para cada uma das séries de tempo analisadas por vocês nos exercícios sobre raiz unitária.

(a) Divida o conjunto de dados em duas janelas, primeira em segunda, em que a primeira contém $4/5$ dos períodos de tempo, e a segunda contém a quinta parte final. *Dica:* use o comando `window` visto em aula.

(b) Com base na primeira janela, realize a etapa de identificação da metodologia de Box-Jenkins. Quais são os modelos candidatos? Por quê?

(c) Com base na primeira janela, estime os modelos candidatos. Com base nos critérios de diangóstico, selecione um ou mais modelos com boas métricas. Justifique suas escolhas.

(d) Compute as previsões para até um ano fora da primeira janela. Reporte os intervalos de predição associados. Como as predições se compararam ao que ocorreu na segunda janela? Qual é a interpretação do erro de previsão, nesse caso?

(e) Agora, para cada período na segunda janela, compute a previsão um passo à frente, com base nos dados até o período imediatamente anterior, para cada modelo Arima por você selecionado na primeira janela. Calcule o erro quadrático médio, um passo à frente, com base nos erros dessas previsões. Dentre os modelos por você estimados, qual se saiu melhor? Suas conclusões batem com o desempenho calculado no item anterior? Qual a diferença entre as métricas?

5 Dizemos que uma variável aleatória segue distribuição Laplace(c, d) se admite densidade:

$$f(x) = \frac{1}{2d_0} \exp(-|x - c|/d) \, .$$

Nesse caso, a média da variável aleatória é c, e sua variância é $2d^2$.

Mostre que o estimador de máxima verossimilhança do parâmetro ρ_0 de um AR(1) (sem intercepto) com ruído branco $\epsilon_t \overset{\text{iid}}{\sim}$ Laplace$(0, d_0)$, que maximiza a log-verossimilhança da distribuição de $Y_2, \ldots, Y_T$ condicional a Y_1, é idêntico ao estimador $\hat{\rho}$ que minimiza:

$$\min_{b \in \mathbb{R}} \sum_{t=2}^{T} |Y_t - bY_{t-1}|$$