

# EAE1223: ECONOMETRIA III

## AULA 5 - METODOLOGIA DE BOX-JENKINS

Luis A. F. Alvarez

19 de setembro de 2024

# A METODOLOGIA

- A metodologia de Box-Jenkins consiste numa série de etapas para estimar um modelo **univariado** de **previsão**.
  - Ideia é estimar um modelo simples, embora flexível, aos dados.
- Trata-se da metodologia básica de previsão em séries de tempo.
  - Diversas metodologias modernas incorporam o “espírito” de Box-Jenkins.
  - *Benchmark* para avaliar outros modelos de previsão.

# ETAPAS DA METODOLOGIA

- A metodologia consiste de quatro etapas:
  1. **Identificação**: nessa etapa, avaliamos os dados e identificamos quais modelos são candidatos plausíveis para reproduzir os dados.
  2. **Estimação**: nessa etapa, estimamos os modelos candidatos.
  3. **Diagnóstico**: nessa etapa, avaliamos quais dos modelos se saíram melhor, de acordo com alguns critérios.
  4. **Previsão**: por fim, realizamos a previsão de acordo com nosso modelo.
- Nesta aula, discutiremos cada uma dessas etapas.
- Começaremos revisando a classe de modelos estudadas na metodologia de Box-Jenkins.

# Modelos considerados

## MA(q)

- Dizemos que uma série de tempo  $\{Y_t\}$  segue um MA(q) se:

$$Y_t = \alpha + \epsilon_t + \sum_{j=1}^q \theta_j \epsilon_{t-j}$$

onde  $\{\epsilon_t\}$  é um ruído branco.

- Série hoje depende diretamente da realização atual e das últimas  $q$  realizações de um ruído branco.
- **Todo** processo de média móvel é fracamente estacionário.
  - De fato,  $\mathbb{E}[Y_t] = \alpha$ ,  $\mathbb{V}[Y_t] = \left(1 + \sum_{j=1}^q \theta_j^2\right) \sigma_\epsilon^2$ ,  
 $\text{cov}(Y_t, Y_{t-s}) = (\theta_s + \sum_{j=s+1}^q \theta_j \theta_{j-s}) \sigma_\epsilon^2$  se  $s \leq q$  e 0 do contrário.  
Correlação morre após  $q$  períodos.
- Um processo MA(q) é dito **invertível** se pode ser escrito como:

$$Y_t = \omega + \sum_{j=1}^{\infty} \psi_j Y_{t-j} + \epsilon_t$$

(MA(q) pode ser representado como AR( $\infty$ )).

## AR(p) ESTACIONÁRIO

- Dizemos que uma série de tempo  $\{Y_t\}$  segue um AR(p) estacionário se ela se escreve como:

$$Y_t = \alpha + \sum_{j=1}^p \beta_j Y_{t-j} + \epsilon_t$$

onde  $\{\epsilon_t\}$  é um ruído branco e os coeficientes  $\beta_j$  são tais que o processo resultante é fracamente estacionário.

- Série hoje depende diretamente das realizações passadas nos últimos  $p$  períodos, mais um ruído branco.
  - Mas persistência não é tão grande, de modo que a série é estacionária (não há raiz unitária).
- Recorde-se que um AR(p) é estacionário se, e somente se, ele se escreve como um MA( $\infty$ ):

$$Y_t = \kappa + \epsilon_t + \sum_{j=1}^{\infty} \tau_j \epsilon_{t-j}$$

## ARMA(p,q) ESTACIONÁRIO

- Dizemos que uma série de tempo  $\{Y_t\}$  segue um ARMA(p,q) estacionário se:

$$Y_t = \alpha + \sum_{i=1}^p \beta_i Y_{t-i} + \epsilon_t + \sum_{j=1}^q \theta_j \epsilon_{t-j}$$

onde  $\{\epsilon_t\}$  é um ruído branco, e os  $\beta_i$  são tais que o processo resultante é estacionário.

- Combinação dos dois modelos anteriores.
- Metodologia de Box-Jenkins visará a estimar modelos na classe ARMA(p,q).

## E SE OS DADOS FOREM NÃO ESTACIONÁRIOS?

- Até agora, discutimos a modelagem supondo as séries estacionárias.
  - Como fazer a previsão em casos não estacionários?
- Se as séries apresentarem uma tendência estocástica, trabalhamos com os dados em primeira diferença  $\{\Delta Y_t\}$ .
- Conduzidas as etapas da metodologia Box-Jenkins com os dados diferenciados, e encontradas projeções para  $\Delta Y_t$  fora da amostra, recompomos as projeções em nível usando o fato de que  $Y_{t+1} = Y_t + \Delta Y_{t+1}$ .
  - Isto é, se temos  $T$  observações, projetamos  $\widehat{Y}_{T+1} = Y_T + \widehat{\Delta Y}_{T+1}$ ,  $\widehat{Y}_{T+2} = Y_T + \widehat{\Delta Y}_{T+1} + \widehat{\Delta Y}_{T+2}$ , e assim por diante.



## MODELOS ARIMA(P,D,Q)

- Em outras palavras, no caso de raiz unitária, a metodologia irá estimar um modelo  $\text{ARIMA}(p,1,q)$ , da forma:

$$\Delta Y_t = \alpha + \sum_{i=1}^p \beta_i \Delta Y_{t-i} + \epsilon_t + \sum_{j=1}^q \theta_j \epsilon_{t-j}$$

- De modo geral, se a série é  $I(d)$ , a modelagem considerará modelos  $\text{ARIMA}(p,d,q)$ :

$$\Phi(L)(1-L)^d Y_t = \alpha + \Psi(L)\epsilon_t,$$

para polinômios  $\Phi(L)$  e  $\Psi(L)$  de grau  $p$  e  $q$ , respectivamente.

## PREVISÃO COM TENDÊNCIA DETERMINÍSTICA

- Se séries apresentam tendência determinística, conduzimos a metodologia com dados *detrended*. Calculadas as projeções *detrended*, recompomos projeções em nível usando a tendência estimada.
- Por exemplo, se estimamos uma tendência linear:

$$Y_t = \tilde{a} + \tilde{b}t + \tilde{\xi}_t$$

e ajustamos um modelo ARMA para  $\tilde{\xi}_t$ , a projeção para fora da amostra é:

$$\widehat{Y_{T+h}} = \tilde{a} + \tilde{b}(T+h) + \widehat{\tilde{\xi}_{T+h}},$$

onde  $\widehat{\tilde{\xi}_{T+h}}$  é a projeção do ARMA para  $T+h$  (veremos como calculá-la na etapa de previsão).

- Estimação de ARMA para dado *detrended* é equivalente a estimar um modelo ARMA(p,q) com tendência determinística.

$$\Phi(L)Y_t = \alpha + \gamma t + \Psi(L)\epsilon_t.$$

# “FILOSOFIA” DA METODOLOGIA DE BOX-JENKINS

- A restrição a modelos ARMA(p,q) pode ser entendida a partir do **teorema de decomposição de Wold**.
- Segundo esse teorema, **qualquer processo fracamente estacionário** pode ser representado pela soma de um MA( $\infty$ ), acrescido de uma função determinística dos  $Y$  no passados:

$$Y_t = \epsilon_t + \sum_{l=0}^{\infty} \psi_l \epsilon_{t-l} + \kappa_t,$$

onde  $\kappa_t$  é função “aproximadamente” linear de  $Y_{t-1}, Y_{t-2}, \dots$

- Ideia de Box-Jenkins é aproximar essa representação por um ARMA(p,q), com  $p$  e  $q$  **pequenos**.
  - Ideia é que aproximação **parcimoniosa**, por ser menos ruidosa, tende a funcionar melhor que modelos muito complexos.

# Identificação

## IDENTIFICAÇÃO DE UM ARMA(p,q)

- A etapa de identificação da metodologia Box-Jenkins consiste em encontrar quais modelos da classe ARMA(p,q) melhor caracterizam a série de interesse.
- A identificação consiste em analisar a função de autocorrelação (FAC) e a função de autocorrelação parcial (FACP) da série estacionária.

# FUNÇÃO DE AUTOCORRELAÇÃO SERIAL (FAC)

- A **função de autocorrelação (FAC)** de uma série  $\{Y_t\}_t$  estacionária é o mapa que associa, a cada número  $k > 0$ , a autocorrelação de ordem  $k$ , i.e.  $\gamma_k = \text{cor}(Y_t, Y_{t-k})$ .
- Note que essa função está bem definida para processos estacionários, visto que  $\text{cor}(Y_t, Y_{t-k})$  não depende de  $t$ .

$$\text{cor}(Y_t, Y_{t-k}) = \frac{\text{cov}(Y_t, Y_{t-k})}{\text{sd}(Y_t) \text{sd}(Y_{t-k})} = \frac{\text{cov}(Y_t, Y_{t-k})}{\mathbb{V}(Y_t)}$$

# FUNÇÃO DE AUTOCORRELAÇÃO SERIAL PARCIAL (FACP)

- A função de autocorrelação parcial (FACP) de uma série  $\{Y_t\}_t$  estacionária é o mapa que associa, a cada número  $k > 0$ , a correlação  $\theta_k$  entre  $Y_t$  e  $Y_{t-k}$ , controlando por  $Y_{t-1}, Y_{t-2}, \dots, Y_{t-k+1}$ .
- A autocorrelação parcial de ordem  $k$  ( $\theta_k$ ) é dada pelo coeficiente  $\tau_k$  associado a  $Y_{t-k}$  no modelo preditivo linear:

$$\begin{aligned} Y_t &= \tau_0 + \tau_1 Y_{t-1} + \tau_2 Y_{t-2} \dots + \tau_k Y_{t-k} + \nu_t \\ \mathbb{E}[\nu_t] &= 0, \mathbb{E}[\nu_t Y_{t-j}] = 0, \quad j = 1, \dots, k \end{aligned} \tag{1}$$

- Note que função está bem definida para processos estacionários, visto que coeficientes do melhor preditor linear em (1) não dependem de  $t$ .

# FAC E FACP ESTIMADAS

- Na prática, não observamos a FAC nem a FACP de um processo, mas podemos estimá-las usando as realizações da série de interesse.
  - Estimamos a FAC calculando as autocorrelações nos dados.

$$\hat{\gamma}_k = \frac{\sum_{t=1}^{T-k} (Y_t - \bar{y})(Y_{t+k} - \bar{y})}{\sum_{t=1}^T (Y_t - \bar{y})^2},$$

onde  $\bar{y} = T^{-1} \sum_{t=1}^T Y_t$ .

- Estimamos a FACP ajustando o modelo (1) aos dados.

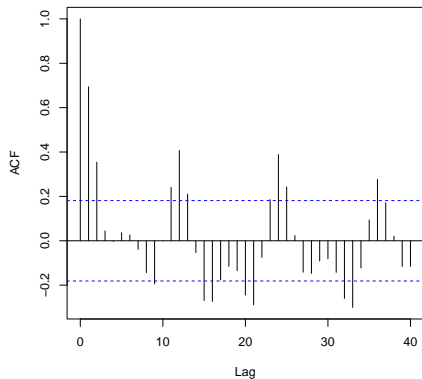


# INFERÊNCIA SOBRE FAC E FACP POPULACIONAIS

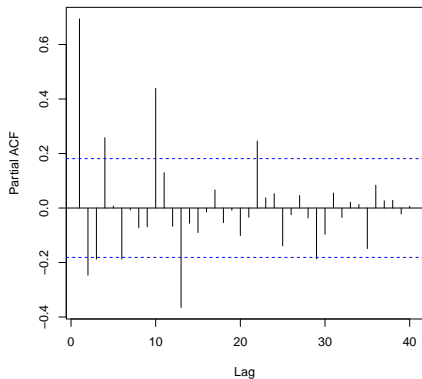
- Como observamos apenas algumas realizações do processo, gostaríamos de testar hipóteses sobre a FAC e FACP populacionais.
- Sob algumas condições mais estridentes, o intervalo  $[-2/\sqrt{T}, 2/\sqrt{T}]$  é uma região de aceitação aproximadamente válida para o teste da nula  $\gamma_k = 0$  ( $\theta_k = 0$  na FACP) contra a alternativa bilateral ao nível de significância de 5%, com base na estatística  $\hat{\gamma}_k$  ( $\hat{\theta}_k$ ).
  - São esses intervalos que são apresentados, no R, quando computamos a FAC e FACP.
  - Para autocorrelações (parciais) estimadas que excedem esses limites, rejeitamos a hipótese nula de não autocorrelação (parcial) a essa ordem.

# FAC E FACP AMOSTRAIS DE $\Delta$ DESEMPREGO

Series as.numeric(diff(desemprego\_brasil))



Series as.numeric(diff(desemprego\_brasil))



# INFERÊNCIA CONJUNTA SOBRE A FAC

- Para testar a nula conjunta de que  $\gamma_1 = \gamma_2 = \dots = \gamma_s = 0$ , onde  $s$  é pequeno relativamente a  $T$ , podemos usar a **estatística de Ljung-Box**:

$$\hat{Q} = T(T+2) \sum_{r=1}^s \frac{\hat{\gamma}_r^2}{T-r}.$$

- Com  $T$  grande, sob a nula,  $\hat{Q}$  segue uma qui-quadrado com  $s$  graus de liberdade. Valores altos da estatística são evidência contra a nula, i.e. evidência de que ao menos uma autocorrelação entre as testadas é diferente de zero.

## FAC E FACP DE UM AR(p) ESTACIONÁRIO

- Como vimos em aula anterior, a FAC de um AR(1) estacionário é dada por:

$$\gamma_k = \text{cor}(Y_t, Y_{t-k}) = \beta_1^k, \quad |\beta_1| < 1$$

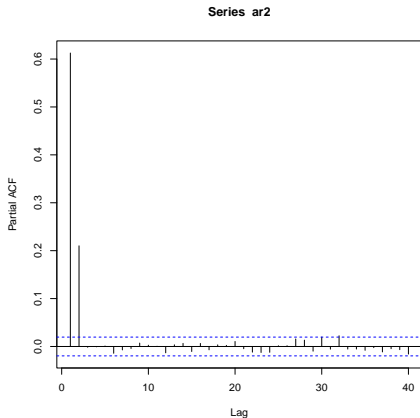
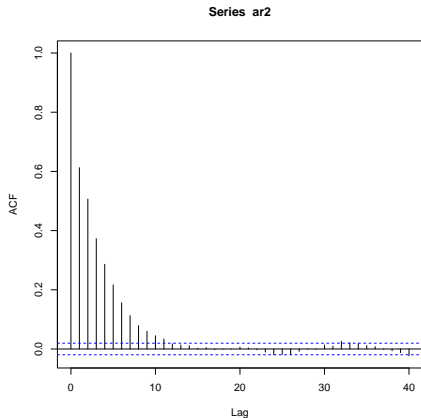
isto é, a FAC apresenta decaimento geométrico em direção a zero.

- De modo geral, a FAC de um AR(p) estacionário apresenta **decaimento em direção a zero**, visto que um AR(p) estacionário pode ser escrito como um MA( $\infty$ ), i.e.

$$Y_t = \mu + \epsilon_t + \sum_{j=1}^{\infty} \omega_j \epsilon_{t-j}$$

- E a FACP de um AR(p) estacionário? Pela definição da FACP de ordem  $k$  como o coeficiente de  $Y_{t-k}$  na regressão populacional de  $Y_t$  em  $Y_{t-1}, Y_{t-2}, \dots, Y_{t-k}$ , esperamos que a FACP seja **truncada em  $p$** , visto que o processo só depende diretamente das  $p$  primeiras defasagens.

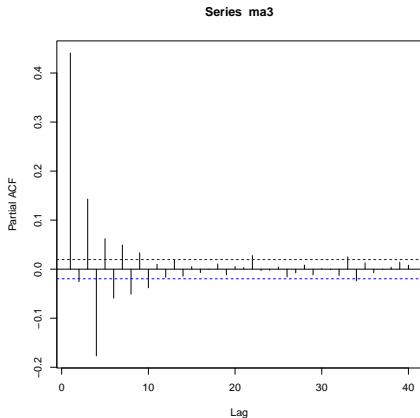
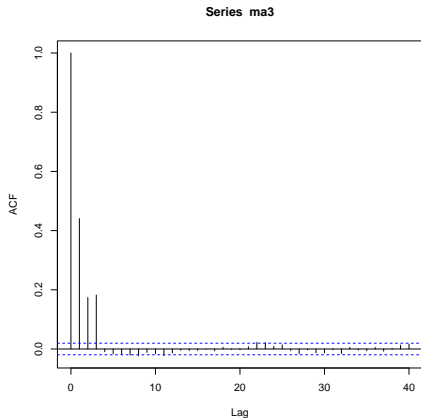
# EXEMPLO: FAC E FACP ESTIMADAS DE UM AR(2) ( $T=10.000$ )



## FAC E FACP DE UM $MA(q)$ INVERTÍVEL

- Como vimos em aula anterior, a FAC de um  $MA(q)$  é **truncada** em  $q$ , visto que a correlação morre após  $q$  períodos.
- E a FACP? Se o processo  $MA$  for invertível, vimos que ele pode ser escrito como um  $AR(\infty)$ . Dessa representação, fica claro que a FACP de um  $MA(q)$  apresenta **decaimento em direção a zero**.

# EXEMPLO: FAC E FACP ESTIMADAS DE UM MA(3) ( $T=10.000$ )



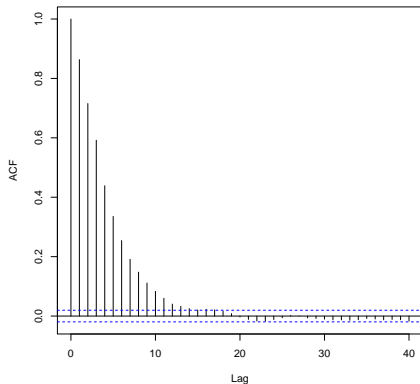
## FAC E FACP DE UM ARMA(p,q) ESTACIONÁRIO E INVERTÍVEL

- Generalizando a discussão anterior, um ARMA(p,q) estacionário cuja parte MA é invertível pode ser representado tanto como um  $AR(\infty)$  como um  $MA(\infty)$ . Nesse caso, tanto a FAC como a FACP apresentam decaimento.
- Nesses casos, costuma-se considerar a ordem máxima  $q_{\max}$  em que a FAC torna-se pouco significativa e a ordem  $p_{\max}$  em que a FACP torna-se pouco significativa e considerar todos os ARMA(p,q),  $0 \leq p \leq p_{\max}$  e  $0 \leq q \leq q_{\max}$  como candidatos.

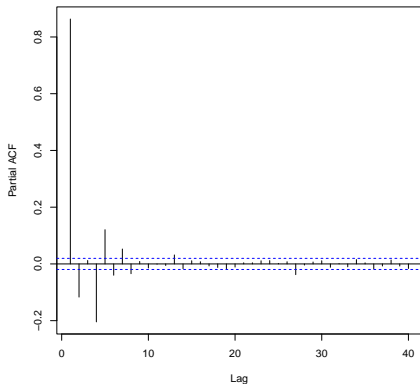


# EXEMPLO: FAC E FACP ESTIMADAS DE UM ARMA(2,3) (T=10.000)

Series arma23



Series arma23



# RESUMO

Modelo	FAC	FACP
AR( $p$ ) estacionário	decai	truncada em $p$
MA( $q$ ) invertível	truncada em $q$	decai
ARMA( $p,q$ ) estacionário e invertível	decai (esp. após $q$ )	decai (esp. após $p$ )

# Estimação

# ESTIMAÇÃO CONDICIONAL VS. INCONDICIONAL

- Para a estimação de modelos  $\text{ARMA}(p,q)$ , há duas abordagens de estimação.
  - Na abordagem **condicional**, não utilizamos a informação acerca da distribuição das primeiras observações na estimação.
  - Na abordagem **incondicional**, fazemos hipóteses adicionais sobre a distribuição do ruído branco, que nos permitem incorporar a distribuição das primeiras observações na análise.
- Computacionalmente, a abordagem condicional é mais simples, embora menos eficiente que a segunda.
- Embora a abordagem incondicional aparente requerer mais hipóteses, visto que especificamos a distribuição do ruído branco, a estimação é robusta a violações dessa hipótese quando o número de observações é grande (“pseudo” máxima verossimilhança).

## ESTIMAÇÃO CONDICIONAL DO AR(p)

- Podemos estimar os parâmetros de um AR(p) através de mínimos quadrados ordinários:

$$(\hat{\alpha}, \hat{\beta}_1, \dots, \hat{\beta}_p) \in \operatorname{argmin}_{a, b_1, \dots, b_p} \frac{1}{T-p} \sum_{t=p+1}^T (Y_t - a - b_1 Y_{t-1} - \dots - b_p Y_{t-p})^2$$

- Note que não tentamos prever as  $p$  primeiras observações, para as quais não temos todas as defasagens.
- Estimadores  $(\hat{\alpha}, \hat{\beta}_1, \dots, \hat{\beta}_p)$  coincidem com o estimador de máxima verossimilhança que usa a distribuição de  $(Y_{p+1}, Y_{p+2} \dots Y_T)$  **condicional** a  $(Y_1, Y_2, \dots, Y_p)$ , tomando o ruído branco como  $\epsilon_{it} \stackrel{\text{iid}}{\sim} N(0, \sigma^2)$ .

## ESTIMAÇÃO CONDICIONAL DO MA(1)

- Para a estimação de um modelo MA(1) com base numa série  $\{Y_t\}_{t=1}^T$ , precisamos de um chute inicial para o ruído branco no período  $t = 0$ .
- Chamemos esse chute de  $\tilde{\epsilon}_0$  (padrão é tomar  $\tilde{\epsilon}_0 = 0$ ).
- Dado o chute inicial, e dado um valor candidato  $c$  para o parâmetro  $\theta_1$ , e um valor candidato  $a$  para o intercepto  $\alpha$ , podemos imputar o ruído branco em  $t = 1$ :

$$\tilde{\epsilon}_1(a, c) = Y_1 - a - c\tilde{\epsilon}_0.$$

- Procedendo recursivamente, obtemos, para todo  $t \geq 2$ .

$$\tilde{\epsilon}_t(a, c) = Y_t - a - c\tilde{\epsilon}_{t-1}(a, c)$$

- MA(1) pode ser estimado como:

$$(\hat{\alpha}, \hat{\theta}_1) \in \operatorname{argmin}_{a, c} \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (Y_t - a - c\tilde{\epsilon}_{t-1}(a, c))^2$$

# ESTIMAÇÃO CONDICIONAL DO MA(1)

- Note que  $(a, c) \mapsto a + c\tilde{\epsilon}_{t-1}(a, c)$  varia não linearmente com  $(a, c)$ .
  - Estimação se dá através de algoritmos para mínimos quadrados não lineares (não há expressão fechada para o mínimo).
- Observe também que a primeira observação não contribui à estimação de  $c$ , visto que  $(Y_t - a - c\tilde{\epsilon}_0)^2 = (Y_t - a)^2$ .
- Se o MA(1) é **invertível**, então, com  $T$  grande, efeito do chute inicial sobre a função objetivo desaparece.
  - Contribuição do chute inicial ao erro de previsão em  $t$  é da ordem de  $c^t$ , que desaparece quando  $|c| < 1$ .

## ESTIMAÇÃO CONDICIONAL DO ARMA(p,q)

- Estendendo a discussão anterior, a estimação condicional de um ARMA(p,q) é dada pela minimização de:

$$\sum_{t=p+1}^T (Y_t - a - b_1 Y_{t-1} \dots - b_p Y_{t-p} - c_1 \tilde{\epsilon}_{t-1}(a, \mathbf{b}, \mathbf{c}) \dots - c_q \tilde{\epsilon}_{t-q}(a, \mathbf{b}, \mathbf{c}))^2$$

onde  $\tilde{\epsilon}_t(a, \mathbf{b}, \mathbf{c})$  são definidos recursivamente, para cada valor candidato dos parâmetros  $(a, \mathbf{b}, \mathbf{c})$  e chutes iniciais dos erros

$$\tilde{\epsilon}_{p-q+1} = \tilde{\epsilon}_{p-q+2} = \dots = \tilde{\epsilon}_p = 0 .$$

- Perdemos  $p$  observações pois não observamos os valores de  $Y$  anteriores a  $t = 1$ . Além disso, para as observações de  $p + 1$  a  $p + q$ , não temos informação completa para inferir todos os  $\theta_j$ .



## ESTIMAÇÃO INCONDICIONAL DO ARMA(p,q)

- Na estimação condicional, perdemos informação nas  $p + q$  primeiras observações.
- Se fizermos uma hipótese distributiva sobre os ruídos brancos, somos capazes de caracterizar a distribuição das  $p+q$  primeiras observações.
  - Por exemplo, se  $\epsilon_t \stackrel{\text{iid}}{\sim} N(0, \sigma^2)$  e  $Y_t$  seguir um AR(1) estacionário, então  $Y_1 \sim N(\alpha/(1 - \alpha), \sigma^2/(1 - \rho^2))$ .
- A estimação **incondicional** de um ARMA(p,q) se dá pela máxima verossimilhança que usa a distribuição conjunta de  $\{Y_1, \dots, Y_T\}$ , sob a hipótese auxiliar de que  $\epsilon_t \stackrel{\text{iid}}{\sim} N(0, \sigma^2)$ .
  - Método padrão na função arima do R.
- Se ruído branco de fato é Gaussiano, estimador é **eficiente**: dentre todos os estimadores de um ARMA(p,q) Gaussiano, estimador é o de menor variância.
- Mesmo que o ruído branco não seja Gaussiano, estimador ainda é **consistente** para os parâmetros de um ARMA(p,q).

# Diagnóstico

# DIAGNÓSTICO

- Estimados os modelos candidatos, procedemos à etapa de diagnóstico. A ideia é avaliar os modelos conforme algumas métricas:
  1. Critérios de informação.
  2. Parcimônia.
  3. Não autocorrelação dos erros.
  4. Estabilidade e invertibilidade das partes AR e MA.
  5. Convergência numérica dos estimadores.
  6. Normalidade dos erros.

## CRITÉRIOS DE INFORMAÇÃO

- A princípio, gostaríamos de uma métrica que indicasse quanto da variabilidade do processo é explicada pelo modelo.
  - Quantidade não observada; precisa ser estimada.
- Intuitivamente, um estimador dessa quantidade poderia ser dado pela soma dos quadrados dos resíduos (SSR) do modelo estimado.
- O problema dessa métrica é que modelos mais complexos **necessariamente** apresentam SSR menor.
  - Maior flexibilidade leva a melhor ajuste dentro da amostra.
  - Isso não significa que o modelo necessariamente explique bem a variação verdadeira do processo (em particular, **fora da amostra**).
- Se fôssemos escolher o modelo pelo menor SSR, sempre escolheríamos o modelo mais complexo, incorrendo num problema conhecido como sobreajuste (*overfitting*).
  - Modelo funcionará, em geral, muito mal fora da amostra, pois estimadores dos parâmetros apresentam alta variância.

## CRITÉRIOS DE INFORMAÇÃO (CONT.)

- A ideia de **um critério de informação** é **penalizar** a SSR pelo número de parâmetros estimados.
  - A penalização pode ser vista como uma forma de corrigir o viés do SSR em estimar a capacidade preditiva de um modelo.
- Os critérios de informação mais utilizados são o AIC e o BIC. Para um ARMA( $p, q$ ) com intercepto, eles são dados por:

$$AIC = T \ln(SSR) + 2(p + q + 1)$$

$$BIC = T \ln(SSR) + \ln(T)(p + q + 1)$$

- Quanto menor o critério de informação, melhor.
- Para  $T > 7$ , BIC escolhe modelos com menos parâmetros.
- Se a estimação do modelo é condicional, importante ajustar amostra para que mesmo número de observações sejam usadas no cálculo dos critérios em todos os modelos comparados (isso já vale, por construção, na estimação incondicional).

- Os critérios de informação induzem **parcimônia** no modelo escolhido, ajudando a evitar o problema de sobreajuste.
- Ainda sob essa lógica, é costumeiro verificar quais coeficientes são estatisticamente significantes na especificação: se houver muitos coeficientes insignificantes, talvez valha trabalhar com um modelo mais simples.

# NÃO AUTOCORRELAÇÃO DOS ERROS

- Os modelos ARMA discutidos supõem que os erros são ruído branco.
  - Dessa forma, esperaríamos que os *resíduos* de nosso modelo fossem aproximadamente não autocorrelacionados.
  - Se houver correlação nos resíduos, ainda há informação nos dados que a parte sistemática do modelo não está capturando.
- Teste da hipótese nula de que as autocorrelações dos erros de ordens 1 até  $s$  são zero, contra a alternativa de que ao menos uma é diferente de zero, podem ser conduzidos usando a estatística de [Ljung-Box](#):

$$Q = T(T+2) \sum_{j=1}^s \hat{\gamma}_j^2 / (T-j),$$

onde  $\hat{\gamma}_j$  é autocorrelação de ordem  $j$  estimada com base nos resíduos.

- Sob a nula, distribuição de  $Q$  é aproximadamente uma  $\chi^2$  com  $s - (p + q)$  graus de liberdade.
- Quanto maior  $Q$ , maior a evidência contra a nula. Assim, região crítica do teste é da forma  $Q > c$  onde  $c$  é o quantil apropriado da distribuição  $\chi^2$ .

# ESTABILIDADE E INVERTIBILIDADE

- Recorde-se que a análise de identificação dos modelos ARMA( $p,q$ ) pressupõe que os processos sejam estacionários e invertíveis. Assim, é costumeiro verificar se os coeficientes estimados de fato nos levam a processos estacionários e invertíveis.
  - Se isso não ocorrer, devemos suspeitar de nossas estimativas.
- Podemos checar a estacionariedade e invertibilidade do ARMA( $p,q$ ) resolvendo, respectivamente, as equações de grau  $p$  e  $q$  dos polinômios estimados, e avaliando se as raízes se encontram todas fora do círculo



# CONVERGÊNCIA NUMÉRICA

- Os estimadores mais usados de modelos ARMA são não lineares e não possuem solução fechada.
  - Por esse motivo, pacotes estatísticos usam algoritmos de otimização para estimar o modelo.
- É importante checar se os algoritmos de otimização de fato convergiram para um mínimo.
  - Se esse não é o caso, devemos descartar as estimativas.

# NORMALIDADE DOS ERROS

- Recorde-se que, se os ruídos brancos forem Gaussianos, o estimador de máxima verossimilhança do ARMA(p,q) é eficiente.
  - Ainda assim, mesmo que os ruídos brancos não sejam Gaussianos, o estimador é consistente.
- Nesse sentido, é costumeiro testar a hipótese de normalidade dos erros de um modelo ARMA.
- Isso é feito verificando a assimetria e curtose dos *resíduos* do modelo, e quanto elas distam do esperado em uma distribuição normal.
- Sob a nula de normalidade, a estatística de teste de Jarque-Bera possui distribuição  $\chi^2$  com **dois** graus de liberdade.
  - Valores grandes da estatística são evidência contra a nula.

# Previsão

## PREVISÃO UM PASSO À FRENTE

- Estimado um ARMA(p,q) com base num conjunto de dados  $\{Y_t\}_{t=1}^T$ , como podemos calcular uma previsão para  $Y_{T+1}$ ?
- Recorde-se que, se o processo é descrito por um ARMA(p,q), então:

$$Y_{T+1} = \alpha + \sum_{j=1}^p \beta_j Y_{T+1-j} + \epsilon_{T+1} + \sum_{j=1}^q \theta_j \epsilon_{T+1-j},$$

- Estimação de um ARMA nos dá estimativas para os parâmetros, além de estimativas dos ruídos brancos na janela de estimação, isto é,  $\hat{\epsilon}_j$ ,  $j \leq T$ .
- Único componente “desconhecido” é  $\epsilon_{T+1}$ .
  - Mas, como se trata de um ruído branco, um processo sem memória, o melhor a se fazer é  $\hat{\epsilon}_{T+1} = \mathbb{E}[\epsilon_{T+1}] = 0$ .
- Assim, a **previsão um passo à frente**, com base num ARMA(p,q), é dada por:

$$\hat{Y}_{T+1} = \hat{\alpha} + \sum_{j=1}^p \hat{\beta}_j Y_{T+1-j} + \sum_{j=1}^q \hat{\theta}_j \hat{\epsilon}_{T+1-j}$$

## PREVISÃO DOIS PASSOS À FRENTE

- Também podemos estar interessados em prever o que ocorrerá dois passos adiante, i.e.  $Y_{T+2}$ .
- Neste caso, temos que:

$$Y_{T+2} = \alpha + \sum_{j=1}^p \beta_j Y_{T+2-j} + \epsilon_{T+2} + \sum_{j=1}^q \theta_j \epsilon_{T+2-j}.$$

- Com base na informação até  $T$ , “desconhecemos”  $\epsilon_{T+1}$ ,  $\epsilon_{T+2}$  e  $Y_{T+1}$ .
  - Vamos fazer  $\hat{\epsilon}_{T+2} = \hat{\epsilon}_{T+1} = 0$ .
  - Vamos usar nossa previsão de  $\hat{Y}_{T+1}$  para imputar  $Y_{T+1}$ .
- Assim, a **previsão dois passo à frente**, com base num ARMA(p,q), é dada por:

$$\hat{Y}_{T+2} = \hat{\alpha} + \hat{\beta}_1 \hat{Y}_{T+1} + \sum_{j=2}^p \hat{\beta}_j Y_{T+1-j} + \sum_{j=2}^q \hat{\theta}_j \hat{\epsilon}_{T+1-j}$$

## PREVISÃO $h$ PASSOS À FRENTE

- Procedendo recursivamente, podemos definir, para qualquer  $h \in \mathbb{N}$ , a projeção  $h$  passos à frente,  $\hat{Y}_{T+h}$ , em que usamos  $\hat{\varepsilon}_{T+j} = 0$  para  $j > 0$  e as previsões  $\hat{Y}_{T+j}$ ,  $h-1 \geq j \geq 1$ , na imputação dos termos desconhecidos.
- Observe que para  $h > \max(p, q)$ , a projeção não usa os dados observados diretamente, somente através de projeções de horizontes anteriores.
- De fato, quando  $h \rightarrow \infty$ , as projeções de um ARMA( $p, q$ ) estacionário convergem para a média incondicional estimada do processo, i.e.:

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \hat{Y}_{T+h} = \frac{\hat{\alpha}}{1 - \hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2 - \dots - \hat{\beta}_p}$$

- Equivalentemente, as projeções de um ARIMA( $p, 1, q$ ) convergem para projeções em que a variação é constante:

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \Delta \hat{Y}_{T+h} = \frac{\hat{\alpha}}{1 - \hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2 - \dots - \hat{\beta}_p}$$

# INTERVALO DE PREDIÇÃO

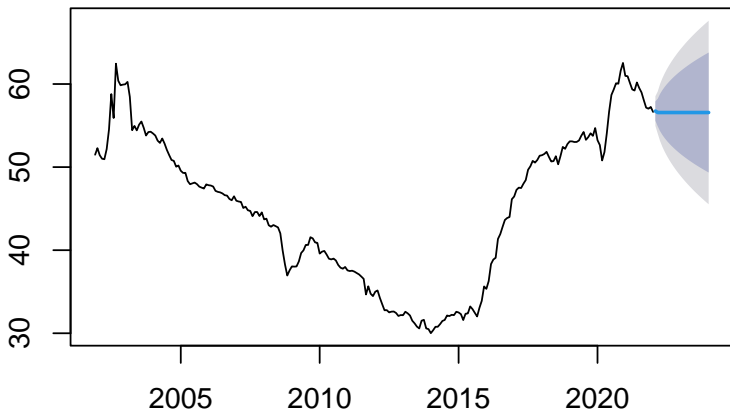
- Um intervalo de predição para  $Y_{T+h}$  com confiança  $\gamma$  é um par de funções dos dados,  $(L, U)$ , com a propriedade:

$$\mathbb{P}[L \leq Y_{T+h} \leq U] \geq \gamma.$$

- Intervalo de predição contém a realização de  $Y_{T+h}$  em ao menos  $100\gamma\%$  dos casos, sobre todas as realizações possíveis da incerteza econômica.
- É possível construir um intervalo de predição, com base nas predições de um ARMA(p,q) Gaussiano.
  - Intervalo de predição leva em conta incerteza Gaussiana acerca dos ruídos brancos,  $\epsilon_{T+j}$ ,  $j > 0$ .
- À medida que  $h$  cresce, comprimento do intervalo de confiança cresce, visto que incerteza torna-se cada vez maior.

# PROJEÇÕES: ENDIVIDAMENTO PÚBLICO

## Forecasts from ARIMA(0,1,2)





# Comparação de modelos

## USANDO PROJEÇÕES PARA COMPARAR MODELOS

- Se temos uma série longa, podemos realizar um procedimento para validar e comparar modelos, sem incorrer em sobreajuste.
- Ideia é repartir a amostra em dois subconjuntos de períodos,  $\mathcal{E} = \{1, 2, \dots, T_0\}$  e  $\mathcal{V} = \{T_0 + 1, T_0 + 2, \dots, T\}$ .
- No conjunto  $\mathcal{E}$ , realizamos todas as etapas para identificar, estimar e diagnosticar modelos.
- Definidos um conjunto  $\mathcal{M}$  de modelos estimados com os dados em  $\mathcal{E}$ , podemos calcular, para cada horizonte  $h \in \mathbb{N}$ , previsões  $h$  passos à frente, para os períodos em  $\mathcal{V}$ .
  - Isto é, para cada modelo  $m \in \mathcal{M}$  estimado com os dados de  $\mathcal{E}$ , e  $t + h \in \mathcal{V}$ , definimos como  $\hat{Y}_{t+h|t}(m)$  a previsão que se faz com o modelo estimado  $m$ , para o período  $t + h$ , **com as informações até  $t$** .
- Nesse caso, podemos definir o erro quadrático médio da previsão fora da amostra, no horizonte  $h$ , como:

$$\text{MSE}(m; h) = \frac{1}{T - T_0 - (h - 1)} \sum_{t=T_0}^{T-h} (Y_{t+h} - \hat{Y}_{t+h|t}(m))^2$$

# CORRIDA DE CAVALOS

- A medida  $MSE(m; h)$  é livre da influência de sobreajuste, visto que o modelo foi estimado sem recorrer aos dados em  $\mathcal{V}$ .
- Podemos comparar os modelos em termos de qual tem o menor  $MSE(m; h)$ , para cada horizonte  $h \in \mathbb{N}$ .
  - A esse procedimento damos o nome de corrida de cavalos (*horseracing*).
  - O resultado dessa comparação é a escolha de um modelo “ótimo”, para cada horizonte.
- Se temos capacidade computacional, podemos fazer as previsões fora da amostra com *janela expansível*, o que aproxima melhor um cenário “em tempo real” (*online*).
  - Ideia é, após identificar e diagnosticar os modelos em  $\mathcal{E}$ , fazer as previsões para  $t + h$  com o modelo reestimado até  $t$ , para todo  $t \in \{T_0, T_0 + 1, \dots\}$ .

## TESTE DE DIEBOLD-MARIANO

- A comparação  $\text{MSE}(m; h)$  para diferentes modelos está sujeita a contingências do período de validação  $\mathcal{V}$ .
  - Modelo pode ser bom para a janela  $\mathcal{V}$ , mas ideia é que modelo seja bom em prever o futuro.
- Sob estacionariedade do erro de previsão, Diebold e Mariano introduziram um teste da hipótese nula:

$$H_0 : \mathbb{E}[(Y_{t+h} - \hat{Y}_{t+h|t}(m))^2] = \mathbb{E}[(Y_{t+h} - \hat{Y}_{t+h|t}(m'))^2],$$

para modelos  $m, m' \in \mathcal{M}$ , e horizonte  $h \in \mathbb{N}$ .

- Teste é implementado através da estatística  $t$ :

$$\hat{t} = \frac{\frac{1}{T - T_0 - (h-1)} \sum_{t=T_0}^{T-h} [(Y_{t+h} - \hat{Y}_{t+h|t}(m))^2 - (Y_{t+h} - \hat{Y}_{t+h|t}(m'))^2]}{\hat{\sigma}},$$

onde  $\hat{\sigma}$  é um erro padrão HAC.

- Implementação computacional: construir série  $\hat{e}_t = (Y_{t+h} - \hat{Y}_{t+h|t}(m))^2 - (Y_{t+h} - \hat{Y}_{t+h|t}(m'))^2$ ,  $t = T_0 \dots T - h$ . Rodar regressão de  $\hat{e}_t$  num intercepto, e conduzir o teste  $t$  no intercepto usando `vcovHAC`.

## TESTE DE DIEBOLD-MARIANO (CONT.)

- Validade dos erros padrão HAC requer janela de validação grande.
  - Por outro lado, hipótese estacionariedade do erro de previsão requer  $T_0$  também grande, e bem maior que janela de validação (Diebold, 2015).
- Metodologia de Diebold-Mariano pode ser estendida para analisar os determinantes da qualidade preditiva em uma classe de modelos.
- Ideia é considerar modelos lineares:

$$(Y_{t+h} - \hat{Y}_{t+h|t}(m))^2 = \gamma' h(m) + u_{m,t}, \quad m \in \mathcal{M}, t = T_0, \dots, T - h$$

onde  $h(m) = (h_1(m), h_2(m), \dots, h_J(m))$  são  $J$  características do modelo  $m$  (e.g. indicador da presença de um componente MA).

- Usando erros padrão HAC em painel, é possível testar quais características de um modelo ensejam melhor qualidade preditiva.
  - Teste  $t$  da nula  $\gamma_j = 0$  contra alternativa  $\gamma_j < 0$ , onde  $\gamma_j$  é o coeficiente associado  $h_j(m)$ .

# Modelagem Sazonal

# SAZONALIDADE E PREVISÃO

- Até aqui, não discorremos sobre o efeito da sazonalidade de uma série nas previsões.
- Nesse caso, há duas estratégias a se seguir.
  1. Se o objetivo é prever a série livre de seu componente sazonal, podemos realizar a metodologia de Box-Jenkins na série dessazonalizada.
  2. Por outro lado, se o objetivo é prever a série original, devemos incorporar a sazonalidade na análise.
- A maneira mais simples de incorporar a sazonalidade em nossa análise seria incluindo *dummies de período* entre os componentes determinísticos do processo.
  - Argumento Xreg na função arima do R.
- No entanto, essa abordagem supõe sazonalidade **não estocástica**: efeito das variações sazonais é sempre o mesmo.
- Box e Jenkins desenvolveram uma metodologia para previsão com **sazonalidade estocástica**.

## ARIMA( $P, D, Q$ ) $_h$

- Uma série de tempo com sazonalidade de frequência  $h$  segue um ARIMA( $P, D, Q$ ) $_h$  se pode ser descrita como:

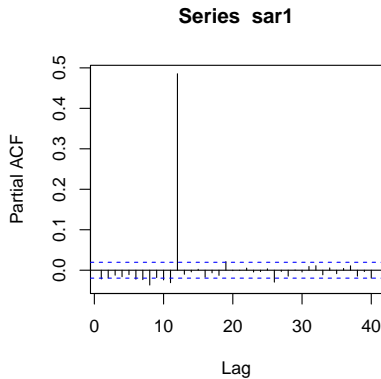
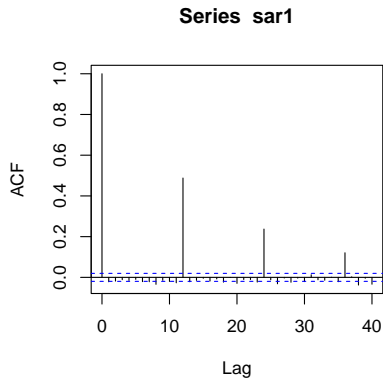
$$(1 - \gamma_1 L^h - \gamma_2 L^{2h} \dots - \gamma_P L^{Ph})(1 - L^h)^D Y_t = (1 + \pi_1 L^h + \pi_2 L^{2h} \dots + \pi_Q L^{Qh}) \epsilon_t,$$

onde  $\epsilon_t$  é ruído branco.

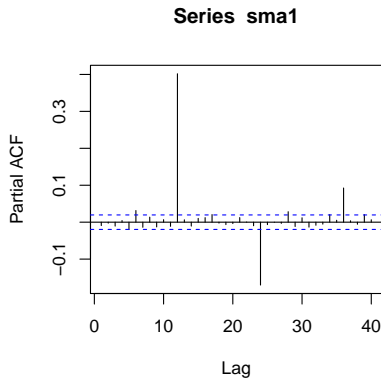
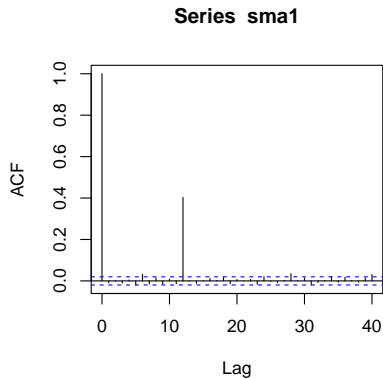
- ARIMA sazonal é modelo em que defasagens ocorrem a cada  $h$  períodos.
- Identificação da ordem  $P$  e  $Q$  é feita observando-se a FAC e FACP nas ordens  $h, 2h, 3h \dots$
- Modelo permite também a presença de **raízes unitárias sazonais**.
  - Diremos que uma série de tempo tem uma raiz unitária sazonal se sua FAC nas ordens  $h, 2h, 3h \dots$  **decai muito lentamente/não decai**.
  - Nesse caso, identificação de  $P$  e  $Q$  deve ser feita observando-se a FAC e FACP do processo em primeira diferença sazonal,  $\Delta_h Y_t = Y_t - Y_{t-h}$ .



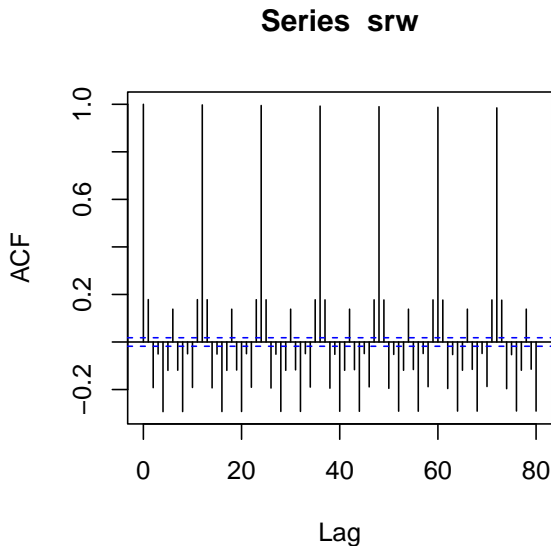
# FAC E FACP DE UM $AR(1)_{12}$



# FAC E FACP DE UM $MA(1)_{12}$



# FAC DE PROCESSO COM RAIZ UNITÁRIA SAZONAL ( $h = 12$ )



## IDENTIFICAÇÃO DA ORDEM $(P, D, Q)$ NO $ARIMA(P, D, Q)_h$

- Série apresenta raiz unitária sazonal ( $D = 1$ ), se FAC decai muito lentamente/não decai nas ordens  $h, 2h, \dots$
- Na série livre de raiz unitária sazonal, ( $Y_t$  se  $D = 0$  ou  $\Delta_h Y_t$  se  $D = 1$ ):

Modelo	FAC em $h, 2h, 3h \dots$	FACP em $h, 2h, 3h \dots$
$AR(P)_h$ estacionário	decai	truncada em $P$
$MA(Q)_h$ invertível	truncada em $Q$	decai
$ARMA(P, Q)_h$ estacionário e invertível	decai (esp. após $Q$ )	decai (esp. após $P$ )

# MODELOS SARIMA

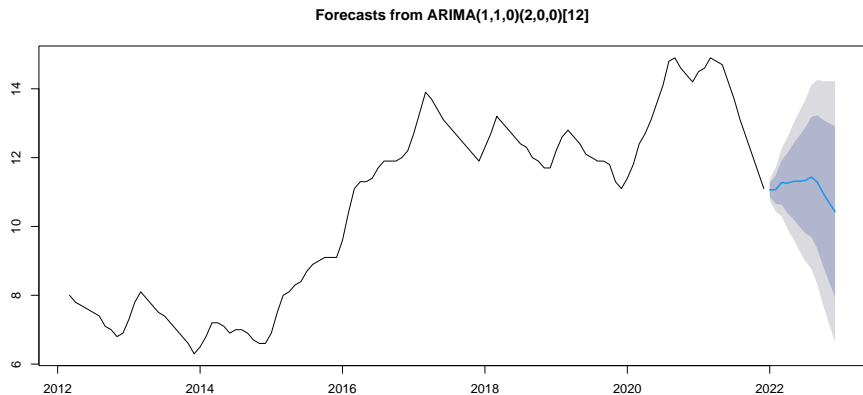
- Dizemos que uma série de tempo segue um processo  $ARIMA(p, d, q) \times (P, D, Q)_h$ , se:

$$\Phi_P(L^h)\Phi_p(L)(1 - L^h)^D(1 - L)^d Y_t = \Theta_Q(L^h)\Theta_q(L)\epsilon_t,$$

para polinômios de graus  $p$  ( $\Phi_p$ ),  $q$  ( $\Theta_q$ ),  $P$  ( $\Phi_P$ ),  $Q$  ( $\Theta_Q$ ), e ruído branco  $\epsilon_t$ .

- Classe de modelos combina os ARIMA tradicionais com a modelagem sazonal (donde vem o nome SARIMA).
- Identificação das partes não sazonal e sazonal é feita separadamente, conforme vimos em cada modelo correspondente.

# DESEMPREGO: MODELAGEM SAZONAL



# Análise de intervenção

# ANÁLISE DE INTERVENÇÃO

- Há, na Estatística, uma série de extensões à modelagem ARIMA para realizar o que se convencionou chamar “análise de intervenção”.
  - Ideia é utilizar os modelos que vimos para se avaliar os *efeitos* dinâmicos de uma política.
- No entanto, essas abordagens não incorporam a linguagem da inferência causal, seja através da definição de efeitos contrafactuais (modelos estruturais econométricos); seja através do modelo de resultados potenciais de Rubin (cuja origem se dá na Estatística).
  - Isso dificulta a interpretação das hipóteses de identificação necessárias ao uso dos métodos.
- Vamos estudar uma metodologia recente de inferência causal, usando os modelos ARIMA, em que as hipóteses são explicitadas em termos de resultados potenciais (Menchetti, Cipollini e Mealli, 2022).
  - Complemento útil para a análise dos efeitos agregados de políticas, quando não há unidades de controle não expostas disponíveis, ou a teoria econômica não nos fornece informação adicional acerca dos determinantes fundamentais do processo (veremos isso mais à frente).



# AMBIENTE

- Considere um processo estocástico  $\{Y_t\}_{t \in \mathcal{T}}$  de interesse.
- Suponha que há uma política de interesse, que é implementada a partir de um período  $T^*$ .
  - Tratamos  $T^*$  como variável aleatória, na medida em que  $T^*$  é incerto sobre realizações repetidas da incerteza econômica ( $T^* = \infty$  se a política não é adotada em uma realização possível).
- Definimos **resultados potenciais**,  $Y_t(1)$  e  $Y_t(0)$ , que expressam o que ocorre com o processo, sob a presença ou não da política.
- Efeito causal da política em  $t$  é dado por  $\alpha_t = Y_t(1) - Y_t(0)$ .
- **Problema fundamental da inferência causal**: nunca observamos  $Y_t(0)$  e  $Y_t(1)$  simultaneamente, visto que:

$$Y_t = \begin{cases} Y_t(0) & \text{se } t < T^* \\ Y_t(1) & \text{se } t \geq T^* \end{cases}$$

# IDENTIFICAÇÃO DE EFEITOS CAUSAIS NA ABORDAGEM C-ARIMA

- Para utilizar a abordagem ARIMA em inferência causal, requereremos duas hipóteses.

## Hipótese 1: MODELO ARIMA PARA $Y_t(0)$

O resultado potencial não tratado segue um modelo (S)ARIMA, onde  $\{\epsilon_t\}$  são as inovações (ruídos brancos).

## Hipótese 2: sobre a regra de decisão do tratamento

$\epsilon_t$  é independente de  $T^*$ , para todo  $t \geq T^*$ .

- Hipótese 2 essencialmente requer que decisão do tratamento dependa somente dos  $Y_t(0)$  anteriores à decisão de tratamento, i.e. de  $\{Y_t(0) : t < T^*\}$ ; ou de outros fatores independentes de  $\{Y_t(0)\}_{t \in \mathcal{T}}$ 
  - Hipótese exclui a possibilidade de que decisão dependa de características  $X_t$  capazes de prever a inovação  $\epsilon_t$  no futuro.
  - Se planejador usa modelagem Box-Jenkins para decidir tratamento, hipótese é satisfeita.

# ESTIMAÇÃO E INFERÊNCIA

- Sob as duas hipóteses anteriores, é possível estimar os efeitos causais da política da seguinte maneira.
  - Aplicar a metodologia de Box-Jenkins para estimar um modelo (S)ARIMA, com dados até  $T^* - 1$ .
  - Usando o modelo estimado e os dados até  $T^* - 1$ , calcular, para  $h > 0$ , as previsões fora da amostra,  $h$  passos à frente:  $\hat{Y}_{T^*-1+h|T^*-1}$ .
  - Estimar o efeito do tratamento, no  $h$ -ésimo período após o início do tratamento como:

$$\hat{\alpha}_{T^*-1+h} = Y_{T^*-1+h} - \hat{Y}_{T^*-1+h|T^*-1}.$$

- Sob as hipóteses 1 e 2, e se a janela pré-tratamento é grande, estimador  $\hat{\alpha}_{T^*-1+h}$  é aproximadamente não viciado para  $\mathbb{E}[\alpha_{T^*-1+h}]$ .
- Se computarmos intervalos de predição para  $Y$  com dados até  $T^* - 1$ ,  $[L_{T^*-1+h|T^*-1}, U_{T^*-1+h|T^*-1}]$ , então  $[Y_{T^*-1+h} - U_{T^*-1+h|T^*-1}, Y_{T^*-1+h} - L_{T^*-1+h|T^*-1}]$  é intervalo de predição válido para  $\alpha_{T^*-1+h}$ .

# REFERÊNCIAS



Diebold, Francis X. (2015). “Comparing Predictive Accuracy, Twenty Years Later: A Personal Perspective on the Use and Abuse of Diebold–Mariano Tests”. Em: *Journal of Business & Economic Statistics* 33.1, pp. 1–1. DOI: 10.1080/07350015.2014.983236. eprint: <https://doi.org/10.1080/07350015.2014.983236>. URL: <https://doi.org/10.1080/07350015.2014.983236>.



Menchetti, Fiammetta, Fabrizio Cipollini e Fabrizia Mealli (set. de 2022). “Combining counterfactual outcomes and ARIMA models for policy evaluation”. Em: *The Econometrics Journal* 26.1, pp. 1–24. ISSN: 1368-4221. DOI: 10.1093/ectj/utac024. eprint: <https://academic.oup.com/ectj/article-pdf/26/1/1/48597685/utac024.pdf>. URL: <https://doi.org/10.1093/ectj/utac024>.