EAE1223: Econometria III

Exercícios de revisão

Questão 1: Sejam $X_1, \ldots, X_m$ e $Y_1, \ldots, Y_n$ variáveis aleatórias, e $a, b, c \in \mathbb{R}$ números reais. Usando as propriedades de esperança:

$$\mathbb{E}[X_1 + X_2] = \mathbb{E}[X_1] + \mathbb{E}[X_2]\,,$$
$$\mathbb{E}[aX_1 + b] = a\mathbb{E}[X_1] + b\,,$$
$$\mathbb{E}[a] = a\,,$$

e as definições de variância e covariância:

$$\mathbb{V}[X_1] = \mathbb{E}[X_1^2] - \mathbb{E}[X_1]^2\,,$$

$$\text{cov}(X_1, X_2) = \mathbb{E}[X_1X_2] - \mathbb{E}[X_1]\mathbb{E}[X_2]\,,$$

verifique as seguintes propriedades.

1. $\text{cov}(X_1, X_2) = \text{cov}(X_2, X_1)$.
2. $\text{cov}(X_1, X_1) = \mathbb{V}[X_1]$.
3. $\text{cov}(aX_1, bX_2) = ab\,\text{cov}(X_1, X_2)$.
4. $\text{cov}(X_1 + X_2, X_3) = \text{cov}(X_1, X_3) + \text{cov}(X_2, X_3)$.
5. $\text{cov}(X_1 + X_2, X_3 + X_4) = \text{cov}(X_1, X_3) + \text{cov}(X_1, X_4) + \text{cov}(X_2, X_3) + \text{cov}(X_2, X_4)$.
6. Generalize para: $\text{cov}(\sum_{i=1}^m X_i, \sum_{j=1}^n Y_j) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \text{cov}(X_i, Y_j)$.
7. $\text{cov}(a, X_1) = 0$.
8. $\mathbb{V}[a] = 0$.
9. $\mathbb{V}[aX_1] = a^2\mathbb{V}[X_1].'$
10. $\mathbb{V}[a + X_1] = \mathbb{V}[X_1]$.
11. $\mathbb{V}[X_1 + X_2] = \mathbb{V}[X_1] + \mathbb{V}[X_2] + 2\,\text{cov}(X_1, X_2)$.
12. $\mathbb{V}[X_1 + X_2 + X_3] = \mathbb{V}[X_1] + \mathbb{V}[X_2] + \mathbb{V}[X_3] + 2\,\text{cov}(X_1, X_2) + 2\,\text{cov}(X_1, X_3) + 2\,\text{cov}(X_2, X_3)$.
13. Generalize para: $\mathbb{V}[\sum_{j=1}^m X_j] = \sum_{j=1}^m \mathbb{V}[X_j] + 2\sum_{i=1}^m \sum_{j=i+1}^m \text{cov}(X_i, X_j)$.

Questão 2 Sejam Y e Z variáveis aleatórias. Recorde-se que os coeficientes do melhor preditor linear de Y como função de Z (e um intercepto) são dados por:

$$(\alpha, \beta) \in \text{argmin}_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \mathbb{E}[(Y - a - bZ)^2]\,,$$

Mostre, nesse caso, que, se $\mathbb{V}[Z] > 0$, $\beta = \text{cov}(Z, Y)/\mathbb{V}[Z]$, e que, definindo o erro de previsão $u = Y - \alpha - \beta Z$, temos:

$$Y = \alpha + \beta Z + u\,,$$

onde $\mathbb{E}[u] = 0$ e $\mathbb{E}[Zu] = \text{cov}(Z, u) = 0$.