# EAE1223: Econometria III

## Aula 8 - Modelos causais reduzidos

Luis A. F. Alvarez

20 de maio de 2024

# Modelo

- Seja $\{Y_t, \boldsymbol{X}_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ um processo vetorial de interesse, onde $Y_t$ é escalar e $\boldsymbol{X}_t$ é um vetor $d \times 1$.
- Pesquisador postula o seguinte modelo para $Y_t$:

$$Y_t = \alpha + \beta' \boldsymbol{X}_t + u_t \,, \tag{1}$$

  onde $\beta$ é **definido** como o efeito causal (*ceteris paribus*) de manipulações hipotéticas de cada uma das entradas de $\boldsymbol{X}$ sobre $Y$, e $u$ são os demais determinantes não observados do sistema.
- Perguntas desta aula:
  - Sob quais condições estimador de MQO $\hat{\beta}$ estima consistentemente $\beta$?
    - Consistência: para qualquer tolerância $\epsilon > 0$, $\|\hat{\beta} - \beta\| \leq \epsilon$ com alta probabilidade, para $T$ suficientemente grande.
  - Sob quais condições podemos usar a distribuição normal para fazer inferência sobre $\beta$, com base no estimador $\hat{\beta}$ e estatística $t$?

# Caso 1: $\{Y_t, \boldsymbol{X}_t\}$ é I(0)

- Se o processo $\{Y_t, \boldsymbol{X}_t\}$ é I(0), estamos no mundo da Aula 1.
- Neste caso, estimador de MQO é consistente se:

  $$\text{cov}(\boldsymbol{X}_t, u_t) = \mathbf{0}$$

  ou seja, não há relação sistemática entre determinantes observados e não observados.
- Nesse caso, podemos usar estatísticas $t$ e valores críticos normais para realizar inferência.
  - No entanto, é apropriado usar erros padrão HAC para levar em conta heterocedasticidade e correlação serial em $u_t$.
  - Esses erros padrão são válidos com $T$ grande (mesmo requerimento de consistência).

# Caso 2: $\{Y_t, \boldsymbol{X}_t\}$ é I(1)

- Se o processo consiste de variáveis I(1), há risco de inferência espúria.
- No entanto, vimos na aula anterior as condições para que isso não ocorra, e $\hat{\beta}$ estime consistentemente $\beta$.
- Essas condições são:
  1. $\{u_t\}_{t\in\mathbb{Z}}$ é estacionário, isto é, há relação de cointegração em $\{Y_t, \boldsymbol{X}_t\}$. que envolve $Y_t$.
  2. $\text{cov}(\boldsymbol{X}_t, u_t) = \boldsymbol{0}, \quad \forall t$.
- Se as duas condições acima são satisfeitas, vimos que $\beta$ tem a interpretação adicional de uma tendência de longo prazo.
- Vimos que a Condição 1 é diretamente testável via procedimento de Engle-Granger.
  - Condição 2 é intestável, de modo geral, sem hipóteses adicionais (assim como em cursos anteriores de Econometria).
- Para podermos realizar inferência sobre $\beta$ usando erros padrão HAC e valores críticos normais, vimos na aula anterior que precisamos da hipótese adicional:
  3. $\text{cov}(\Delta\boldsymbol{X}_t, u_s) = 0, \quad \forall t, s$. Essa condição é testável com base no correlograma cruzado de $\Delta\boldsymbol{X}_t$ e resíduos da regressão.

# Caso 2: $\{Y_t, \boldsymbol{X}_t\}$ é I(1) (cont.)

- Caso não haja cointegração envolvendo $Y_t$, sabemos que o estimador de MQO do modelo (1) leva a conclusões espúrias.
- Nesse caso, podemos considerar o estimador de MQO $\tilde{\beta}$ do modelo (1) em primeira diferença:

$$\Delta Y_t = \beta' \Delta \boldsymbol{X}_t + \Delta u_t$$

- O estimador de MQO deste modelo será consistente sob a hipótese de identificação alternativa:

$$\text{cov}(\Delta \boldsymbol{X}_t, \Delta u_t) = \mathbf{0}\,,$$

  isto é, variações nos determinantes não observáveis são não sistematicamente relacionadas a variações nos observáveis.
- Uma condição suficiente (intestável) para essa hipótese valer é que:

$$\text{cov}(\boldsymbol{X}_t, u_s) = \mathbf{0}, \quad \forall t, s \in \{t-1, t, t+1\}\,.$$

- Inferência nesse caso é convencional.

# Caso 3: $\{Y_t, \boldsymbol{X}_t\}$ envolve variáveis I(0) e I(1)

- Se $\{Y_t, \boldsymbol{X}_t\}$ envolvem uma mistura de processos I(0) e I(1), há algumas condições sob as quais é possível realizar inferência sobre um subconjunto dos parâmetros da forma convencional (Sims, Stock e Watson, 1990).
- No entanto, a maneira mais simples de lidar com a não estacionariedade é trabalhar com o modelo em diferenças:

$$\Delta Y_t = \beta' \Delta \boldsymbol{X}_t + \Delta u_t \,,$$

e proceder como no slide anterior.

# Caso 4: $\{Y_t, \boldsymbol{X}_t\}$ envolve variáveis I(0) e *trend-stationary*

- Se a única fonte de não estacionariedade no modelo é deterministíca, podemos realizar inferência com base em valores críticos normais.
- No entanto, é importante compreender que os efeitos estimados, nesse caso, serão **dominados** pela relação determinística entre as tendências de $Y_t$ e de $\boldsymbol{X}_t$.
  - **Exemplo:** se $Y_t$ é *trend-stationary* e $\boldsymbol{X}_t$ é I(0), $\hat{\beta}$ convergirá a zero, visto que comportamento do processo $Y_t$ é dominado pela tendência.
- Nesses casos, pode ser mais interessante considerar um modelo que postula relações causais para as variáveis *detrended*, isto é, uma relação causal para os desvios da série em torno de suas tendências.
- Isso pode ser implementado fazendo o *detrending* prévio das séries, ou incluindo explicitamente tendência no modelo linear causal:

$$y_t = \alpha + \delta t + \gamma' \boldsymbol{X}_t + \xi_t \,,$$

- Estimador é consistente e inferência é válida se fatores não observados *detrended* $\xi_t$ são não correlacionados com desvios de $\boldsymbol{X}_t$ de suas tendências.

# Incluindo defasagens

- Em alguns casos, a hipótese de identificação pode ser mais crível se levarmos em conta a persistência de $Y_t$.
- Nesse caso, consideramos o modelo:

$$Y_t = \alpha + \omega Y_{t-1} + \tau \boldsymbol{X}_t + u_t \ ,$$

- Estimador de MQO será consistente se, crucialmente

$$\text{cov}(\boldsymbol{X}_t, u_t) = \mathbf{0}$$

$$\text{cov}(Y_{t-1}, u_t) = 0$$

- Segunda condição requer, no geral, que $\boldsymbol{X}_t$ não exerça efeito futuro sobre $u_t$, e que os $u_t$ sejam impredizíveis com base em seu passado, isto é:

$$\text{cov}(\boldsymbol{X}_s, u_t) = \mathbf{0}, \quad \forall s \leq t$$

$$\text{cov}(u_t, u_s) = 0, \forall t \neq s$$

# Referências I

Sims, Christopher A., James H. Stock e Mark W. Watson (1990). "Inference in Linear Time Series Models with some Unit Roots". Em: *Econometrica* 58.1, pp. 113–144. ISSN: 00129682, 14680262. URL: http://www.jstor.org/stable/2938337 (acesso em 15/05/2024).