EAE1223: ECONOMETRIA III

Aula 8 - Modelos vetoriais autorregressivos estruturais

Luis A. F. Alvarez

24 de maio de 2024

Um modelo para a descrição de uma economia

- Seja $\{Y_t\}_{t\in\mathbb{Z}}$ um processo vetorial de interesse, onde Y_t consiste de d variáveis econômicas, sobre as quais a teoria econômica têm algo a nos dizer sobre o comportamento conjunto.
- Um modelo estrutural (causal) linear para estas variáveis consiste em um sistema de *d* equações da forma:

$$\mathbf{A}_0 \mathbf{Y}_t = \mathbf{a} + \sum_{j=1}^{p} \mathbf{A}_j \mathbf{Y}_{t-j} + \epsilon_t, \qquad (1)$$

onde ${\bf A}_0$ é uma matriz $d \times d$ que explicita as relações contemporâneas (causais) entre as variáveis, e ϵ_t é um ruído branco contemporaneamente não correlacionado, isto é

$$\mathbb{V}[\epsilon_t] = egin{bmatrix} \sigma_1^2 & 0 & \dots & 0 \ 0 & \sigma_2^2 & \dots & 0 \ dots & \dots & \ddots & dots \ 0 & 0 & \dots & \sigma_d^2 \ \end{bmatrix} = \Omega_\epsilon$$

CHOQUES ECONÔMICOS FUNDAMENTAIS

- A hipótese de que os erros de cada uma das equações são contemporaneamente não correlacionados supõe que o modelo que descreve a economia esteja bem especificado, de modo que o choque da j-ésima equação reflete a incerteza econômica fundamental associada a Y_{jt}.
 - ϵ_{jt} reflete choques (surpresas ou inovações, não antecipadas com base no passado) nos determinantes essenciais de Y_{jt} , e não nos determinantes indiretos (via outras variáveis do sistema) de Y_{jt} .
- Esse tipo de hipótese é presumida em uma das perguntas clássicas da macroeconomia: quanto da flutuação econômica pode ser atribuída à política monetária vs fatores reais?
 - Pergunta presume que existem inovações fundamentais, contemporaneamente ortogonais (não correlacionadas), em fatores monetários e reais, que permitem pensar nesta decomposição, visto que ela não faz sentido se os fatores fundamentais não fossem fundamentais (i.e. correlacionados).
 - Veremos como nossa metodologia permite fazer explicitamente esta decomposição.

EXEMPLO

- Considere o comportamento conjunto de inflação (π_t) , desemprego (u_t) , expectativas de inflação (π_t^e) e taxa de juros nominal (i_t) :

$$\pi_{t} = \sum_{j=1}^{p} \theta_{j} \pi_{t-j} + \sum_{j=0}^{p} \beta_{j} (u_{t-j} - \bar{u}_{neutro}) + \sum_{j=0}^{p} \gamma_{j} \pi_{t-j}^{e} + \epsilon_{\pi,t} \quad (CP)$$

$$u_{t} - \bar{u} = \sum_{j=1}^{p} \omega_{j} (u_{t-j} - \bar{u}) + \sum_{j=0}^{p} \alpha_{j} (i_{t-j} - \pi_{t-j}^{e}) + \epsilon_{u,t} \quad (IS)$$

$$i_{t} = \bar{i} + \sum_{j=1}^{p} \psi_{j} i_{t-j} + \sum_{j=0}^{p} \kappa_{j} (\pi_{t-j} - \pi_{M}) + \sum_{j=0}^{p} \phi_{j} (\pi_{t-j}^{e} - \pi_{M}) + \epsilon_{i,t} \quad (RM)$$

$$\pi_{t}^{e} = \mu \pi_{M} + \sum_{j=1}^{p} \iota_{j} \pi_{t-j}^{e} + \theta_{3} \sum_{j=0}^{p} (\nu_{1j} \pi_{t-j} + \nu_{2j} u_{t-j} + \nu_{3j} i_{t-j}) + \epsilon_{e,t} \quad (FE)$$

onde $\epsilon_{\pi,t}$ são choques de oferta (CP), $\epsilon_{u,t}$ choques de demanda (IS), $\epsilon_{i,t}$ são surpresas de política monetária (RM), e $\epsilon_{e,t}$ são ruídos na formação de expectativas.

REPRESENTAÇÃO AUTORREGRESSIVA DO MODELO LINEAR ESTRUTURAL

- Se o sistema (1) oferece uma descrição completa da evolução de \boldsymbol{Y}_t , então, para uma dada trajetória pretérita $\{\boldsymbol{Y}_s: s \leq t-1\}$, e valores dos choques fundamentais ϵ_t , existe um único valor de \boldsymbol{Y}_t que satisfaz (1).
- Nesse caso, a matriz \mathbf{A}_0 admite inversa $\mathbf{B} = \mathbf{A}_0^{-1}$, e o sistema admite representação autorregressiva:

$$\mathbf{Y}_{t} = \underbrace{\mathbf{c}}_{=\mathbf{B}\mathbf{a}} + \sum_{j=1}^{p} \underbrace{\mathbf{C}_{j}}_{=\mathbf{B}\mathbf{A}_{j}} \mathbf{Y}_{t-j} + \mathbf{B}\epsilon_{t}.$$
 (2)

- Modelo VAR em que o ruído branco ${\pmb B} {\pmb \epsilon}_t$ é uma combinação linear de choques fundamentais.
- Matriz \boldsymbol{B} incorpora o efeito contemporâneo de inovações fundamentais sobre as variáveis em \boldsymbol{Y}_t .

MODELO SVAR(P)

- Em diversas situações, não necessariamente queremos partir de (1) para chegar a (2)
 - Não necessariamente temos uma descrição completa da economia.
 - De modo relacionado, a formulação (2) pode ser compatível com mais de uma formulação estrutural linear completa.
- Nesses casos, podemos definir diretamente um modelo vetorial autorregressivo (semi)estrutural de ordem p, SVAR(p), como o processo

$$\mathbf{Y}_{t} = \mathbf{c} + \sum_{j=1}^{p} \mathbf{C}_{j} \mathbf{Y}_{t-j} + \mathbf{B} \epsilon_{t},$$
 (3)

onde ϵ_t são inovações fundamentais, isto é ruídos brancos não contemporaneamente correlacionados, e \boldsymbol{B} é a matriz que captura os efeitos contemporâneos das inovações fundamentais sobre \boldsymbol{Y}_t .

Função de resposta ao impulso

- Os efeitos causais dinâmicos, na modelagem SVAR, são capturados pelos efeitos de surpresas dos choques fundamentais sobre o comportamento do sistema.
 - Note que, por construção, ϵ_t captura fatores não antecipados com base no passado.
 - Como ϵ_t é não contemporaneamente correlacionado, faz sentido pensar em surpresas em um de seus componentes, mantidos os outros constantes.
- Formalmente, o efeito causal de uma surpresa de uma unidade na j-ésima inovação do sistema em t, ϵ_{jt} , sobre a i-ésima variável do sistema em t+h, $h\geq 0$, é dada pela função de resposta ao impulso

$$F_h(i|j) = \frac{\partial Y_{i,t+h}}{\partial \epsilon_{j,t}}$$

-
$$F_0(i|j) = \mathbf{B}_{ij}$$
, $F_1(i|j) = \sum_{l=1}^d \mathbf{C}_{1,i,l} \mathbf{B}_{lj} = \sum_{l=1}^d \mathbf{C}_{1,i,l} F_0(l|j)$, $F_2(i|j) = \sum_{l=1}^d \mathbf{C}_{1,i,l} F_1(i|j) + \sum_{l=1}^d \mathbf{C}_{2,i,l} F_0(i|j)$, etc.

FRI NORMALIZADA, FRI ACUMULADA

- Em diversos casos, é costumeiro normalizar a FRI pelo desvio padrão dos choques, isto é, reporta-se:

$$F_h(i|j)/\sigma_{j,t}$$
.

- Neste caso, os coeficientes são interpretáveis como o efeito causal de uma surpresa de um desvio padrão na j-ésima inovação.
- Também podemos reportar a FRI acumulada:

$$\sum_{\tau=0}^h F_{\tau}(i|j).$$

- Se a *i*-ésima variável está em primeiras diferenças, a FRI acumulada reporta o efeito da surpresa sobre o nível da série em t+h.
- Alternativamente, FRI acumulada pode ser interpretada como o efeito de uma sequência de surpresas (por construção, não antecipadas) de uma unidade na j-ésima variável do sistema por h períodos.
 - Note que, pela crítica de Lucas, sabemos que isto é diferente do efeito de um aumento permanente de uma unidade sobre a j-ésima variável do sistema.

DECOMPOSIÇÃO DA VARIÂNCIA DO ERRO DE PREDIÇÃO

- Com base no SVAR(p), somos capazes, analogamente ao VAR(p), de calcular previsões para T+h, com dados até T, $\boldsymbol{Y}_{T+h|T}$:

$$oldsymbol{Y}_{T+1|T} = oldsymbol{c} + \sum_{j=0}^{p-1} oldsymbol{C}_{j+1} oldsymbol{Y}_{T-j}$$
 $oldsymbol{Y}_{T+2|T} = oldsymbol{c} + oldsymbol{C}_j oldsymbol{Y}_{T+1|T} + \sum_{j=0}^{p-2} oldsymbol{C}_{j+2} oldsymbol{Y}_{T-j}$

- O erro de previsão no horizonte h é dado por $\mathbf{Y}_{T+h} \mathbf{Y}_{T+h|T}$.
- Dada a natureza estrutural dos choques, é possível mostrar que somos capazes de decompor aditivamente a variância do erro de previsão de cada variável na contribuição de cada choque:

$$\mathbb{V}[\mathbf{Y}_{i,T+h} - \mathbf{Y}_{i,T+h|T}] = \sum_{i=1}^{d} \text{contribuição do choque j}$$

Decomposição da variância do erro de predição (cont.)

- Decomposição da variância do erro de predição nos permite dizer, para cada horizonte, quantos % da incerteza futura depende de cada uma das inovações estruturais.
- Fácil de ver que a decomposição não depende de *t*, mas tão somente do horizonte e variável de interesse,
- Se tomamos $h \to \infty$, temos uma decomposição da variância de longo prazo (incondicional) do sistema.
 - Por exemplo, podemos dizer quanto da variabilidade da atividade econômica se deve a choques monetários.

$SVAR(P) \to VAR(P)$

- Note que um SVAR(p) da forma (3) sempre define um VAR(p).
- De fato, se definimimos $\boldsymbol{u}_t = \boldsymbol{B}\boldsymbol{\epsilon}_t$, podemos escrever:

$$\mathbf{Y}_{t} = \mathbf{c} + \sum_{j=1}^{p} \mathbf{C}_{j} \mathbf{Y}_{t-j} + \mathbf{u}_{t}, \qquad (4)$$

onde u_t é um ruído branco contemporaneamente correlacionado, cuja matriz de variância é dada por $\mathbb{V}[u_t] = \mathbf{B}\mathbb{V}[\epsilon_t]\mathbf{B}' = \Sigma$.

- VAR(p) em que ruído branco segue da combinação linear de choques estruturais.
- Essas combinações lineares produzem um ruído branco contemporaneamente correlacionado, na medida em que choques fundamentais afetam simultaneamente mais de uma variável do sistema.
- A um VAR(p) derivado de um SVAR(p), daremos o nome de modelo vetorial em forma reduzida.

O problema de identificação causal no ${ m SVAR}(P)$

- Recorde-se que, sob condições bastantes gerais, podemos estimar consistentemente os parâmetros de um VAR(p).
 - Resultado vale para séries estacionárias, e mesmo para processos integrados (embora, nesse caso, a inferência com base em distribuições convencionais não seja válida).
- Como os parâmetros do VAR(p) são consistentemente estimáveis, segue que, com T grande, somos capazes de recuperar aproximadamente as inovações reduzidas $\{ \boldsymbol{u}_t : 1 \leq t \leq T \}$.
 - Como essas inovações são recuperáveis com \mathcal{T} grande, também somos capazes de estimar consistentemente $\Sigma = \mathbb{V}[\boldsymbol{u}_t]$.
- O problema de identificação causal no SVAR(p) consiste em prover condições a partir das quais sejamos capazes de recuperar os choques estruturais ϵ_t a partir da observação de u_t .
 - Ideia é encontrar condições que nos permitam descorrelacionar os choques reduzidos em termos das inovações fundamentais.

Identificação dos choques estruturais

- Para descorrelacionar u_t , precisamos recuperar a matriz B.
- Em geral, as análises estruturais preferem ser agnósticas sobre os componentes autorregressivos do processo \implies coeficientes C_j não nos trazem informação sobre B.
 - Componentes autorregressivos aparecem pois queremos ser relativamente agnósticos sobre a "propagação" de choques intertemporalmente (teoria dificilmente nos diz algo sobre isso), o que sugere não restringir sua relação com os **B**.
- Nesses casos, única informação para descorrelacionar choques deve vir da própria distribuição dos $m{u}_t$.
- Em particular, se queremos ser também agnósticos sobre a distribuição dos choques estruturais ϵ_t , é possível mostrar que a única fonte de informações sobre \boldsymbol{B} vem da equação:

$$\mathbb{V}[oldsymbol{u}_t] = oldsymbol{B}\mathbb{V}[oldsymbol{\epsilon}_t]oldsymbol{B}'$$

onde somos capazes de recuperar o lado esquerdo, com T grande.

- Problema de identificação passa a ser separar, a partir da observação de $\mathbb{V}[u_t]$, a variância dos choques estruturais $\mathbb{V}[\epsilon_t]$ da matriz \boldsymbol{B} .

RESTRIÇÕES FALTANTES

- Precisamos recuperar os parâmetros das matrizes $\mathbb{V}[\epsilon_t]$ (d parâmetros) e \boldsymbol{B} (d^2 parâmetros) de forma única a partir de $\mathbb{V}[\boldsymbol{u}_t]$.
- A observação (em amostras grandes) de $\mathbb{V}[\boldsymbol{u}_t]$ nos provê d(d-1)/2+d restrições.
 - Diagonal principal e região abaixo dela.
- Dessa forma, temos um sistema com d(d-1)/2+d equações e d(d+1) incógnitas.
 - Precisamos de restrições adicionais para recuperar esses parâmetros de forma única.
- Uma normalização natural é supor que a diagonal principal de B é igual a 1.
 - Escala dos choques estruturais corresponde às variáveis observadas, de modo que choque de uma unidade em $\epsilon_{j,t}$ corresponde a aumento não antecipado de uma unidade em $\boldsymbol{Y}_{j,t}$.
- Nesse caso, temos um sistema com d(d+1)/2 equações e d^2 incógnitas.
 - Precisamos de d(d-1)/2 restrições sobre os parâmetros estruturais para identificar o sistema.

SVAR(P) JUSTAMENTE IDENTIFICADO

 O problema de identificação do SVAR(p) pode ser visto como o problema de encontrar restrições suficientes para que seja possível definir uma função f tal que:

$$(\boldsymbol{B}, \mathbb{V}[\boldsymbol{\epsilon}_t]) = f(\mathbb{V}[\boldsymbol{u}_t])$$

- Dadas restrições suficientes sobre o modelo, existe um único jeito (resumido na função f) de encontrar $(B, \mathbb{V}[\epsilon_t])$ compatíveis com $\mathbb{V}[u_t]$.
- Se colocamos exatamente d(d-1)/2 restrições sobre o sistema, estamos no caso justamente identificado.
 - Neste caso, as hipóteses de identificação não geram restrições testáveis sobre o sistema, e é possível mostrar que o estimador mais eficiente dos parâmetros estruturais é dado por:

$$(\widehat{\boldsymbol{B}},\widehat{\mathbb{V}[\epsilon_t]}) = f(\widehat{\mathbb{V}[\boldsymbol{u}_t]}),$$

onde $\mathbb{V}[\boldsymbol{u}_t]$ é o estimador da matriz de covariância do ruído branco de um VAR(p) reduzido, estimado via máxima verossimilhança condicional (onde a verossimilhança é derivada sob a hipótese auxiliar de inovações Gaussianas).

SVAR(P) SOBREIDENTIFICADO

- Se colocamos mais de d(d-1)/2 restrições sobre o sistema, estamos no caso sobreidentificado.
- Neste caso, o estimador mais eficiente consiste na máxima verossimilhança condicional (derivada sob a hipótese auxiliar de inovações Gaussianas), que impõe as restrições sobre a matriz de covariância das inovações $\boldsymbol{B}\mathbb{V}[\epsilon_t]\boldsymbol{B}'$ diretamente na maximização.
 - Neste caso, também é possível testar as restrições de identificação através da estatística LR:

$$LR = 2(\hat{L}_{VAR} - \hat{L}_{SVAR})$$

onde \hat{L}_{VAR} é a log-verossimilhança do VAR(p) reduzido e \hat{L}_{SVAR} a log-verossimilhança do SVAR(p) estimado.

- Sob estacionariedade e a hipótese nula de correta especificação, estatística segue χ^2 com ${\it n^o}$ restrições d(d-1)/2 graus de liberdade. Rejeita-se a nula de correta especificação para valores altos da estatística de teste.
- Observação: para escolhermos a ordem p, a não ser que a teoria econômica nos traga alguma informação, fazemos os procedimentos discutidos em aulas passada num VAR reduzido preliminar.

Dificuldades da estimação convencional do SVAR(P)

- Em diversas situações, as restrições identificadoras sobre os parâmetros estruturais tomam forma bastante complicada.
 - Nesses casos, pode ser bastante difícil de impor as restrições na estimação dos parâmetros.
- Além disso, nesses casos em que a forma das restrições é bastante complicada, é difícil saber se as restrições são suficientes para garantir a identificação.
 - Restrições podem auxiliar na identificação, no sentido de que o conjunto de parâmetros estruturais $(\boldsymbol{B}, \mathbb{V}[\epsilon_t])$ compatíveis com a forma reduzida $\mathbb{V}[\boldsymbol{u}_t]$ é diminuído sob as restrições, mas ainda pode haver mais de um par de parâmetros estruturais compatíveis com $\mathbb{V}[\boldsymbol{u}_t]$.
 - Nesse caso, a inferência usual (estatísticas t e F) sobre os parâmetros deixa de ser válidas.
 - Teste LR derivado anteriormente ainda é válido.
- Nessa situação, a literatura costuma abandonar a estimação vista anteriormente e passa a adotar procedimentos Bayesianos.

ESTIMAÇÃO BAYESIANA DO SVAR(P)

- Heuristicamente, abordagem Bayesiana consiste em adotar uma distribuição *a priori* \boldsymbol{p} sobre os parâmetros estruturais $(\boldsymbol{c}, (\boldsymbol{C}_j)_{j=1}^p, \mathbb{V}[\epsilon_t], \boldsymbol{B}).$
 - Essa distribuição reflete o conjunto de valores plausíveis para os parâmetros estruturais (restrições), além de nossa incerteza teórica sobre eles.
 - Se quisermos ser agnósticos sobre os parâmetros, adotamos distribuições a priori "uniformes" no conjunto de valores restritos.
- Usando a regra de Bayes, podemos calcular a distribuição a posteriori:

$$\begin{aligned} & \boldsymbol{p}((\boldsymbol{c},(\boldsymbol{C}_j)_{j=1}^p,\mathbb{V}[\boldsymbol{\epsilon}_t],\boldsymbol{B}),\{\boldsymbol{y}_t\}_{t=1}^T) \propto \\ & \boldsymbol{p}(\{\boldsymbol{y}_t\}_{t=1}^T | (\boldsymbol{c},(\boldsymbol{C}_j)_{j=1}^p,\mathbb{V}[\boldsymbol{\epsilon}_t],\boldsymbol{B})) \boldsymbol{p}((\boldsymbol{C}_j)_{j=1}^p,\mathbb{V}[\boldsymbol{\epsilon}_t],\boldsymbol{B})) \end{aligned}$$

onde $p(\{y_t\}_{t=1}^T | (c, (C_j)_{j=1}^p, \mathbb{V}[\epsilon_t]B))$ é a verossimilhança do modelo.

- Estimativas pontuais podem ser calculadas usando a *mediana* da distribuição *a posteriori*, e incerteza a partir de seus quantis.
- Não vamos entrar em mais detalhes sobre essa abordagem, embora enfatizaremos casos em que esses métodos são usados.

ESTRATÉGIAS DE IDENTIFICAÇÃO DO SVAR(P)

- No que segue, discutiremos as principais abordagens para se identificar um SVAR(p).
 - 1. Restrições de curto prazo.
 - 2. Restrições de longo prazo.
 - 3. Restrições de sinal.
 - 4. Restrições narrativas.
 - 5. Identificação por instrumentos externos.
 - 6. Identificação por heterocedasticidade.

Restrições de curto prazo

Identificação recursiva

- Suponha que sejamos capazes de ordenar as variáveis \boldsymbol{Y}_t do VAR estrutural da seguinte maneira:
 - Choques na i-ésima variável do sistema só exercem efeito contemporâneo sobre as variáveis i, i + 1, ..., d do sistema
 - Posto de outra, forma choques contemporâneos na i-ésima variável não afetam contemporaneamnete as variáveis anteriores a i na ordenação.
- Neste caso, a matriz **B** acaba tomando a forma:

$$m{B} = egin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \ b_{2,1} & 1 & 0 & \dots & 0 \ b_{3,1} & b_{3,2} & 1 & \dots & 0 \ dots & dots & dots & \ddots & 0 \ b_{d,1} & b_{d,2} & b_{d,3} & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

- Impomos exatamente d(d-1)/2 restrições em ${\pmb B} \implies$ é possível separar ${\Bbb V}[\epsilon_t]$ de ${\pmb B}$.
 - Estimação ocorre calculando-se $\widehat{\mathbb{V}[u_t]}$ no VAR reduzido e aplicando nessa matriz a decomposição matemática de Choleski, que nos dá um algoritmo eficiente para recuperar a matriz \boldsymbol{B} de $\widehat{\mathbb{V}[u_t]}$.

Identificação recursiva

- Se queremos a resposta de todos os choques sobre todas as variáveis, devemos acertar corretamente a ordenação inteira em \boldsymbol{Y}_t .
- Por outro lado, se nosso objetivo é tão somente calcular as FRI do choque na variável *i* do sistema sobre as demais, devemos somente acertar quem vem antes e quem vem depois de *i* no sistema.
 - Ordem **dentro** do bloco anterior (posterior) a *i* não afeta FRI ao choque *i*.
- Exemplo: Christiano, Eichenbaum e Evans (2005) estudam se modelos novo-Keynesianos de equilíbrio geral são capazes de reproduzir a resposta a choques de política monetária obtidas por VAR estrutural.
- Para isso, eles estimam o seguinte VAR estrutural para os Estados Unidos, com dados trimestrais de 1965T3 a 1995T3:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Y}_{1t} \\ \mathsf{Juros}_t \\ \mathbf{Y}_{2t} \end{bmatrix} = \sum_{j=1}^4 \mathbf{A}_j \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_{1t-j} \\ \mathsf{Juros}_{t-j} \\ \mathbf{Y}_{2t-j} \end{bmatrix} + \mathbf{B} \epsilon_t$$

EXEMPLO (CONT.)

- No artigo, autores tomam \mathbf{Y}_{1t} como PIB real, consumo real, deflator do PIB, investimento real, salário real e produtividade do trabalho. Por outro lado \mathbf{Y}_{2t} inclui lucros reais e base monetária M2.

The ordering of the variables in \mathbf{Y}_t embodies two key identifying assumptions. First, the variables in \mathbf{Y}_{1t} do not respond contemporaneously to a monetary policy shock. Second, the time t information set of the monetary authority consists of current and lagged values of the variables in \mathbf{Y}_{1t} and only past values of the variables in \mathbf{Y}_{2t} Our decision to include all variables except for the growth rate of M2 and real profits in \mathbf{Y}_{1t} reflects a long-standing view that many macroeconomic variables do not respond instantaneously to policy shocks (see Friedman 1968).

Referências I



Christiano, Lawrence J., Martin Eichenbaum e Charles L. Evans (2005). "Nominal Rigidities and the Dynamic Effects of a Shock to Monetary Policy". Em: *Journal of Political Economy* 113.1, pp. 1–45.

ISSN: 00223808, 1537534X. URL:

http://www.jstor.org/stable/10.1086/426038 (acesso em 23/05/2024).