EAE1223: Econometria III

Aula 7 - Cointegração

Luis A. F. Alvarez

2 de maio de 2024

Natureza da inferência espúria

- Em algumas aulas atrás, vimos que a inferência baseada nos estimadores de MQO de um modelo linear de um processo I(1) em outro processo I(1), completamente independentes, gerava conclusões espúrias.
  - Relação verdadeira é 0, mas testes de hipótese proviam forte evidência contra hipótese de associação nula (p-valores baixíssimos).

- Uma pergunta que cabe é: se há dependência entre os processos I(1), há condições sob as quais estimadores de MQO produzem inferência **não espúria**?

Um exemplo

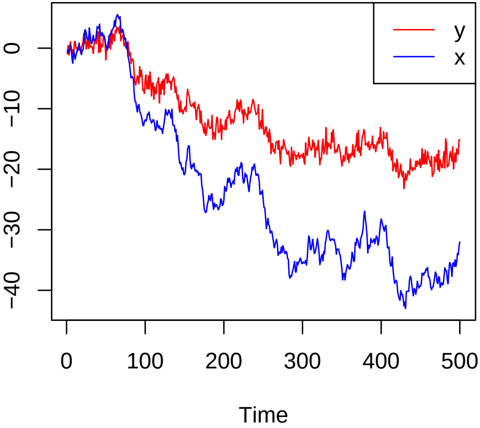
- Considere o seguinte processo bivariado :

$$x_t = x_{t-1} + u_t \ ,$$

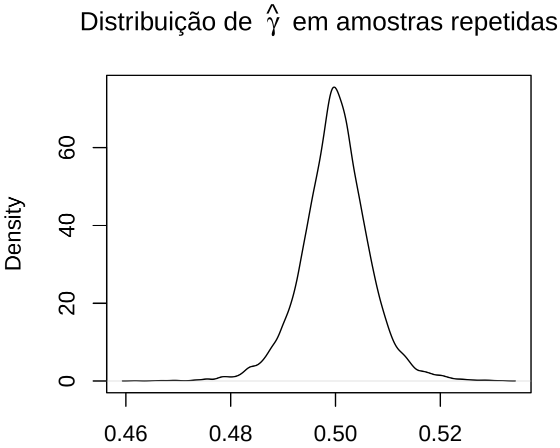
$$y_t = \gamma x_t + v_t \ ,$$

  onde $\{u_t\}_t$ e $\{v_t\}_t$ são ruídos brancos independentes uns dos outros.
- Observe que ambos os processos são I(1)
- Vamos considerar as propriedades do estimador de MQO $\hat{\gamma}$ de γ, sobre realizações repetidas da incerteza econômica:

Uma realização do processo por $T = 500$ períodos ($\gamma = 0.5$)



Distribuição de $\hat{\gamma}$ em realizações repetidas da incerteza $(T = 500$ e $\gamma = 0.5)$



Tendência estocástica comum

- Note que o estimador de MQO tem distribuição convencional (normal) sobre realizações repetidas da incerteza.
- Isso ocorre mesmo com ambas as séries sendo I(1).
- Por que isso ocorre?
  - Processos possuem tendência estocástica **comum**.
  - A tendência comum "amarra" o comportamento explosivo dos processos, recuperando a validade da aproximação normal.
  - A processos I(1) com tendência estocástica comum, damos o nome de processos cointegrados.

Cointegração

- Considere um processo vetorial $\{\boldsymbol{Z}_t\}_{t\in\mathbb{Z}}$ com n variáveis.
- Dizemos que o vetor é cointegrado (de ordem (1,1)), ou CI(1,1), se:
  1. Cada uma das séries $\{Z_{jt}\}_{t\in\mathbb{Z}}$, $j = 1, \ldots, n$, é I(1).
  2. Existe um vetor $\gamma \in \mathbb{R}^n$, $\gamma \neq \boldsymbol{0}_{n\times 1}$, tal que $\gamma' \boldsymbol{Z}_t$, é I(0).
- Se processo é CI(1,1), existe combinação linear não trivial tal que processo resultante é estacionário.
  - Existe uma relação de longo prazo, fruto de uma tendência comum, amarrando os processos, de modo que desvios dessa relação são I(0).
  - Note que a relação não é única, visto que sempre podemos multiplicá-la por uma constante não nula.
- De modo mais geral, um processo vetorial é dito cointegrado de ordem (d,b), ou CI(d,b), $0 < b \leq d$, se:
  - Cada uma das séries $\{Z_{jt}\}_{t\in\mathbb{Z}}$, $j = 1, \ldots, n$, é I(d).
  - Existe um vetor $\gamma \in \mathbb{R}^n$, $\gamma \neq 0$, tal que $\gamma' \boldsymbol{Z}_t$, é I(d-b).
- Focaremos no caso CI(1,1), que é o mais economicamente interessante.

Cointegração e teoria econômica

- O conceito de cointegração é de natureza estatística.
  - Não obstante, a evidência ou não de uma relação de longo prazo pode ter uma interpretação econômica.
- Considere uma medida dos preços praticados para uma cesta de bens no Brasil, em reais; uma outra medida, para cesta similar, dos preços praticados em dólares nos Estados Unidos, e a taxa de câmbio real/Estados Unidos.
  - Pela teoria da paridade do poder de compra, embora processos individualmente apresentem comportamento não estacionário (estocástico), deveria haver uma relação de cointegração entre estas variáveis.
- Se há neutralidade da moeda no longo prazo, não deveria haver relação de longo prazo entre produto real e base monetária real.

Testando pela presença de cointegração

- Engle e Granger (1987) popularizaram um procedimento bastante intuitivo para se testar a nula de **não cointegração**.
- Considere um processo vetorial $\boldsymbol{Z}_t = (y_t, \boldsymbol{x}_t)$ em que cada entrada é I(1), e para o qual acreditamos que possa haver alguma relação de cointegração envolvendo y_t.
  - Para sistemas com duas variáveis ($\boldsymbol{x}_t$ escalar), crença é sem perda de generalidade, visto que cointegração necessariamente envolve y_t.
  - Para sistemas com mais de duas variáveis, efetivamente nos restringimos a alternativas em que y_t participa da relação.
- Ideia de Engle e Granger (1987): estimar por MQO uma regressão de y_t em $\boldsymbol{x}_t$ (e um intercepto):

$$y_t = \hat{\alpha} + \hat{\gamma}' \boldsymbol{x}_t + \hat{u}_t\,, \quad t = 1, \ldots, T$$

  e fazer um teste da nula de raiz unitária nos resíduos $\{\hat{u}_t\}_{t=1}^{T}$.
  - Se não há cointegração, resíduos devem apresentar tendência estocástica.
  - Se há cointegração envolvendo y_t, resíduos deveriam ser estacionários.

Procedimento de Phillips e Ouliaris (1990)

- Teste não pode ser feito usando valores críticos convencionais, pois estimação preliminar afeta valores críticos.
  - Phillips e Ouliaris (1990) tabularam os valores críticos para as estatísticas do teste ADF e de Phillips e Perron (1988).
- Tabulação depende de existência de tendência linear no nível da série.
  - Se há somente tendência estocástica em nível, usar Caso 2.
  - Se séries apresentam tendência estocástica, e ao menos uma das séries em $\boldsymbol{x}_t$ apresentar tendência determinística linear em nível, usar Caso 3.
  - Se séries apresentam tendência estocástica, nenhuma das séries em $\boldsymbol{x}_t$ apresentar tendência determinística em nível, mas y_t apresentar tendência linear, há que se modificar o conceito de cointegração. Nesse caso, é impossível gerar combinação linear estacionária, mas ainda é possível gerar combinação linear *trend-stationary* (cointegração em torno de tendência determinística). Se quisermos testar isso, rodamos

$$y_t = \hat{\alpha} + \hat{\delta} t + \hat{\gamma}' \boldsymbol{x}_t + \hat{u}_t \, , \quad t = 1, \ldots, T \ ,$$

    e usamos os valores críticos do Caso 3, supondo que há $n+1$ variáveis.
  - Se sabemos que relação de cointegração tem média zero, podemos omitir o intercepto da regressão e considerando o Caso 1.

Valores críticos

TABLE B.9
Critical Values for the Phillips Z_t Statistic or the Dickey-Fuller t Statistic When Applied to Residuals from Spurious Cointegrating Regression

Number of right-hand variables in regression, excluding trend or constant $(n-1)$	*Sample size* (T)	*Probability that* $(\hat{\rho}-1)/\hat{\sigma}_{\hat{\rho}}$ *is less than entry* 0.010	0.025	0.050	0.075	0.100	0.125	0.150
		Case 1						
1	500	−3.39	−3.05	−2.76	−2.58	−2.45	−2.35	−2.26
2	500	−3.84	−3.55	−3.27	−3.11	−2.99	−2.88	−2.79
3	500	−4.30	−3.99	−3.74	−3.57	−3.44	−3.35	−3.26
4	500	−4.67	−4.38	−4.13	−3.95	−3.81	−3.71	−3.61
5	500	−4.99	−4.67	−4.40	−4.25	−4.14	−4.04	−3.94
		Case 2						
1	500	−3.96	−3.64	−3.37	−3.20	−3.07	−2.96	−2.86
2	500	−4.31	−4.02	−3.77	−3.58	−3.45	−3.35	−3.26
3	500	−4.73	−4.37	−4.11	−3.96	−3.83	−3.73	−3.65
4	500	−5.07	−4.71	−4.45	−4.29	−4.16	−4.05	−3.96
5	500	−5.28	−4.98	−4.71	−4.56	−4.43	−4.33	−4.24
		Case 3						
1	500	−3.98	−3.68	−3.42	—	−3.13	—	—
2	500	−4.36	−4.07	−3.80	−3.65	−3.52	−3.42	−3.33
3	500	−4.65	−4.39	−4.16	−3.98	−3.84	−3.74	−3.66
4	500	−5.04	−4.77	−4.49	−4.32	−4.20	−4.08	−4.00
5	500	−5.36	−5.02	−4.74	−4.58	−4.46	−4.36	−4.28

The probability shown at the head of the column is the area in the left-hand tail.

Source: P. C. B. Phillips and S. Ouliaris, "Asymptotic Properties of Residual Based Tests for Cointegration," *Econometrica* 58 (1990), p. 190. Also Wayne A. Fuller, *Introduction to Statistical Time Series*, Wiley, New York, 1976, p. 373.

O que o MQO estima sob cointegração?

- Para um processo vetorial $\boldsymbol{Z}_t = (y_t, \boldsymbol{x}_t)$ n-variado cointegrado, há no mínimo uma, e no máximo $n-1$ relações de cointegração linearmente independentes disponíveis.
  - Se houvesse n relações de cointegração, é possível mostrar que o processo na verdade seria estacionário.
- Sejam $\left\{(1, \boldsymbol{b}_1')', (1, \boldsymbol{b}_2')', \ldots, (1, \boldsymbol{b}_q')'\right\}$ as q relações linearmente independentes que envolvem y_t.
- Se $q > 0$, possível mostrar que estimador de MQO de y_t em $\boldsymbol{x}_t$ e em um intercepto é consistente para o parâmetro $\gamma^* \in \text{span}\{\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_q\}$ do melhor preditor linear de y_t em $\boldsymbol{x}_t$ definido de tal forma que:

$$y_t = \alpha^* + \boldsymbol{x}_t'\gamma^* + u_t$$

  com u_t estacionário, $\mathbb{E}[u_t] = 0$ e $\text{cov}(\boldsymbol{x}_t, u_t) = \boldsymbol{0}$.
  - Se $\text{cov}(\Delta \boldsymbol{x}_t, u_s) = \boldsymbol{0}$ para todo t e s, podemos realizar inferência sobre γ^* com base no estimador de MQO, erros padrão HAC e valores críticos normais.
- Se $q = 0$, inferência com base no MQO é espúria.

Referências

- Engle, Robert F. e C. W. J. Granger (1987). “Co-Integration and Error Correction: Representation, Estimation, and Testing”. Em: *Econometrica* 55.2, pp. 251–276. ISSN: 00129682, 14680262. URL: http://www.jstor.org/stable/1913236 (acesso em 02/05/2024).
- Phillips, P. C. B. e S. Ouliaris (1990). “Asymptotic Properties of Residual Based Tests for Cointegration”. Em: *Econometrica* 58.1, pp. 165–193. ISSN: 00129682, 14680262. URL: http://www.jstor.org/stable/2938339 (acesso em 02/05/2024).
- Phillips, Peter C. B. e Pierre Perron (1988). “Testing for a Unit Root in Time Series Regression”. Em: *Biometrika* 75.2, pp. 335–346. ISSN: 00063444. URL: http://www.jstor.org/stable/2336182 (acesso em 13/03/2024).