EAE1223: Econometria III

Aula 7 - Cointegração

Luis A. F. Alvarez

8 de maio de 2024

Natureza da inferência espúria

- Em algumas aulas atrás, vimos que a inferência baseada nos estimadores de MQO de um modelo linear de um processo I(1) em outro processo I(1), completamente independentes, gerava conclusões espúrias.
  - Relação verdadeira é 0, mas testes de hipótese proviam forte evidência contra hipótese de associação nula (p-valores baixíssimos).

- Uma pergunta que cabe é: se há dependência entre os processos I(1), há condições sob as quais estimadores de MQO produzem inferência **não espúria**?

Um exemplo

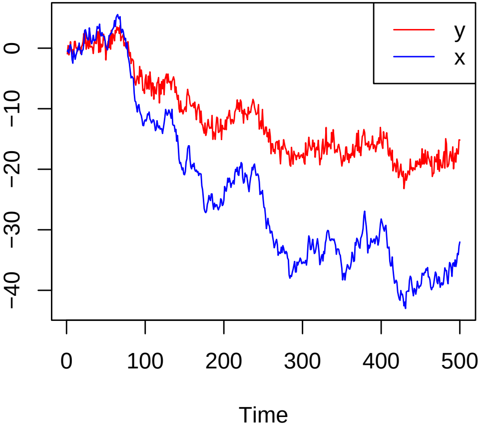
- Considere o seguinte processo bivariado :

$$x_t = x_{t-1} + u_t \, ,$$

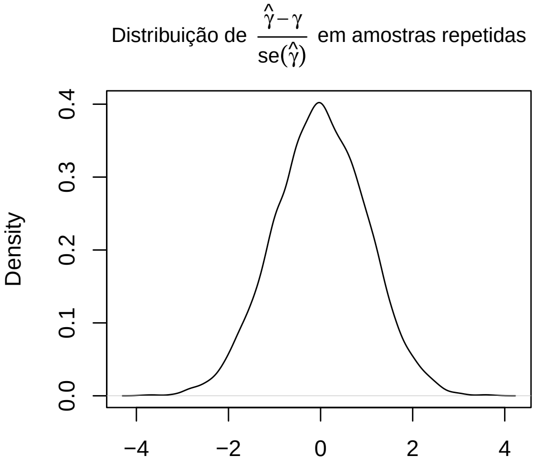
$$y_t = \gamma x_t + v_t \, ,$$

  onde $\{u_t\}_t$ e $\{v_t\}_t$ são ruídos brancos independentes uns dos outros.
- Observe que ambos os processos são I(1)
- Vamos considerar as propriedades do estimador de MQO $\hat{\gamma}$ de γ, sobre realizações repetidas da incerteza econômica:

Uma realização do processo por $T = 500$ períodos ($\gamma = 0.5$)



Distribuição de $\hat{t} = \frac{\hat{\gamma}-\gamma}{\text{se}(\hat{\gamma})}$ em realizações repetidas da incerteza ($T = 500$ e $\gamma = 0.5$)



Tendência estocástica comum

- Note que a estatística t, sob a nula, tem distribuição convencional (normal) sobre realizações repetidas da incerteza.
- Isso ocorre mesmo com ambas as séries sendo I(1).
- Por que isso ocorre?
  - Processos possuem tendência estocástica **comum**.
  - A tendência comum "amarra" o comportamento explosivo dos processos, recuperando a validade da aproximação normal.
  - A processos I(1) com tendência estocástica comum, damos o nome de processos cointegrados.

Cointegração

- Considere um processo vetorial $\{\boldsymbol{Z}_t\}_{t\in\mathbb{Z}}$ com n variáveis.
- Dizemos que o vetor é cointegrado (de ordem (1,1)), ou CI(1,1), se:
  1. Cada uma das séries $\{Z_{jt}\}_{t\in\mathbb{Z}}$, $j = 1, \ldots, n$, é I(1).
  2. Existe um vetor $\gamma \in \mathbb{R}^n$, $\gamma \neq \mathbf{0}_{n\times 1}$, tal que $\gamma'\boldsymbol{Z}_t$, é I(0).
- Se processo é CI(1,1), existe combinação linear não trivial tal que processo resultante é estacionário.
  - Existe uma relação de longo prazo, fruto de uma tendência comum, amarrando os processos, de modo que desvios dessa relação são I(0).
  - Note que a relação não é única, visto que sempre podemos multiplicá-la por uma constante não nula.
- De modo mais geral, um processo vetorial é dito cointegrado de ordem (d,b), ou CI(d,b), $0 < b \leq d$, se:
  - Cada uma das séries $\{Z_{jt}\}_{t\in\mathbb{Z}}$, $j = 1, \ldots, n$, é I(d).
  - Existe um vetor $\gamma \in \mathbb{R}^n$, $\gamma \neq 0$, tal que $\gamma'\boldsymbol{Z}_t$, é I(d-b).
- Focaremos no caso CI(1,1), que é o mais economicamente interessante.

Cointegração e teoria econômica

- O conceito de cointegração é de natureza estatística.
  - Não obstante, a evidência ou não de uma relação de longo prazo pode ter uma interpretação econômica.
- Considere uma medida dos preços praticados para uma cesta de bens no Brasil, em reais; uma outra medida, para cesta similar, dos preços praticados em dólares nos Estados Unidos, e a taxa de câmbio real/Estados Unidos.
  - Pela teoria da paridade do poder de compra, embora processos individualmente apresentem comportamento não estacionário (estocástico), deveria haver uma relação de cointegração entre estas variáveis.
- Se há neutralidade da moeda no longo prazo, **não** deveria haver relação de longo prazo entre produto real e base monetária **nominal**; embora devesse haver relação de longo prazo entre produto real e base monetária **real**.

Testando pela presença de cointegração

- Engle e Granger (1987) popularizaram um procedimento bastante intuitivo para se testar a nula de **não cointegração**.
- Considere um processo vetorial $\boldsymbol{Z}_t = (y_t, \boldsymbol{x}_t)$ em que cada entrada é I(1), e para o qual acreditamos que possa haver alguma relação de cointegração envolvendo y_t.
  - Para sistemas com duas variáveis ($\boldsymbol{x}_t$ escalar), crença é sem perda de generalidade, visto que cointegração necessariamente envolve y_t.
  - Para sistemas com mais de duas variáveis, efetivamente nos restringimos a alternativas em que y_t participa da relação.
- Ideia de Engle e Granger (1987): estimar por MQO uma regressão de y_t em $\boldsymbol{x}_t$ (e um intercepto):

$$y_t = \hat{\alpha} + \hat{\gamma}' \boldsymbol{x}_t + \hat{u}_t \,, \quad t = 1, \dots, T$$

  e fazer um teste da nula de raiz unitária nos resíduos $\{\hat{u}_t\}_{t=1}^{T}$.
  - Se não há cointegração, resíduos devem apresentar tendência estocástica.
  - Se há cointegração envolvendo y_t, resíduos deveriam ser estacionários.

Procedimento de Phillips e Ouliaris (1990)

- Teste não pode ser feito usando valores críticos convencionais, pois estimação preliminar afeta valores críticos.
  - Phillips e Ouliaris (1990) tabularam os valores críticos para as estatísticas do teste ADF e de Phillips e Perron (1988).
- Tabulação depende de existência de tendência linear no nível da série.
  - Se há somente tendência estocástica em nível, usar Caso 2.
  - Se séries apresentam tendência estocástica, e ao menos uma das séries em $\boldsymbol{x}_t$ apresentar tendência determinística linear em nível, usar Caso 3.
  - Se séries apresentam tendência estocástica, nenhuma das séries em $\boldsymbol{x}_t$ apresentar tendência determinística em nível, mas y_t apresentar tendência linear, há que se modificar o conceito de cointegração. Nesse caso, é impossível gerar combinação linear estacionária, mas ainda é possível gerar combinação linear *trend-stationary* (cointegração em torno de tendência determinística). Se quisermos testar isso, rodamos

$$y_t = \hat{\alpha} + \hat{\delta} t + \hat{\gamma}' \boldsymbol{x}_t + \hat{u}_t \,, \quad t = 1, \dots, T \ ,$$

    e usamos os valores críticos do Caso 3, supondo que há $n+1$ variáveis.
  - Se sabemos que relação de cointegração tem média zero, podemos omitir o intercepto da regressão e considerando o Caso 1.

Valores críticos

TABLE B.9
Critical Values for the Phillips Z_t Statistic or the Dickey-Fuller t Statistic When Applied to Residuals from Spurious Cointegrating Regression

Number of right-hand variables in regression, excluding trend or constant $(n-1)$	*Sample size* (T)	*Probability that* $(\hat{\rho}-1)/\hat{\sigma}_{\hat{\rho}}$ *is less than entry*						
		0.010	*0.025*	*0.050*	*0.075*	*0.100*	*0.125*	*0.150*
		Case 1						
1	500	−3.39	−3.05	−2.76	−2.58	−2.45	−2.35	−2.26
2	500	−3.84	−3.55	−3.27	−3.11	−2.99	−2.88	−2.79
3	500	−4.30	−3.99	−3.74	−3.57	−3.44	−3.35	−3.26
4	500	−4.67	−4.38	−4.13	−3.95	−3.81	−3.71	−3.61
5	500	−4.99	−4.67	−4.40	−4.25	−4.14	−4.04	−3.94
		Case 2						
1	500	−3.96	−3.64	−3.37	−3.20	−3.07	−2.96	−2.86
2	500	−4.31	−4.02	−3.77	−3.58	−3.45	−3.35	−3.26
3	500	−4.73	−4.37	−4.11	−3.96	−3.83	−3.73	−3.65
4	500	−5.07	−4.71	−4.45	−4.29	−4.16	−4.05	−3.96
5	500	−5.28	−4.98	−4.71	−4.56	−4.43	−4.33	−4.24
		Case 3						
1	500	−3.98	−3.68	−3.42	—	−3.13	—	—
2	500	−4.36	−4.07	−3.80	−3.65	−3.52	−3.42	−3.33
3	500	−4.65	−4.39	−4.16	−3.98	−3.84	−3.74	−3.66
4	500	−5.04	−4.77	−4.49	−4.32	−4.20	−4.08	−4.00
5	500	−5.36	−5.02	−4.74	−4.58	−4.46	−4.36	−4.28

The probability shown at the head of the column is the area in the left-hand tail.

Source: P. C. B. Phillips and S. Ouliaris, "Asymptotic Properties of Residual Based Tests for Cointegration," *Econometrica* 58 (1990), p. 190. Also Wayne A. Fuller, *Introduction to Statistical Time Series*, Wiley, New York, 1976, p. 373.

O que o MQO estima sob cointegração?

- Para um processo vetorial $\boldsymbol{Z}_t = (y_t, \boldsymbol{x}_t)$ n-variado cointegrado, há no mínimo uma, e no máximo $n-1$ relações de cointegração linearmente independentes disponíveis.
  - Se houvesse n relações de cointegração, é possível mostrar que o processo na verdade seria estacionário.
- Sejam $\left\{(1, \boldsymbol{b}_1')', (1, \boldsymbol{b}_2')', \ldots, (1, \boldsymbol{b}_q')'\right\}$ as q relações linearmente independentes que envolvem y_t.
- Se $q > 0$, possível mostrar que estimador de MQO de y_t em $\boldsymbol{x}_t$ e em um intercepto é consistente para o parâmetro $\gamma^* \in \text{span}\{\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_q\}$ do melhor preditor linear de y_t em $\boldsymbol{x}_t$ definido de tal forma que:

$$y_t = \alpha^* + \boldsymbol{x}_t'\gamma^* + u_t$$

  com u_t estacionário, $\mathbb{E}[u_t] = 0$ e $\text{cov}(\boldsymbol{x}_t, u_t) = \boldsymbol{0}$.
  - Se $\text{cov}(\Delta\boldsymbol{x}_t, u_s) = \boldsymbol{0}$ para todo t e s, podemos realizar inferência sobre γ^* com base no estimador de MQO, estatísticas t com erros padrão HAC e valores críticos normais. Este é o caso da simulação anterior.
- Se $q = 0$, inferência com base no MQO é espúria.

Limitações da metodologia de Engle-Granger

- Não obstante sua praticidade, a metodologia de Engle-Granger possui algumas limitações:
  - Ao efetivamente escolher uma variável do lado esquerdo, nos restrigimos a relações de cointegação que envolvem y_t.
  - Se $n > 2$, não conseguimos separar as relações de cointegração distintas (linearmente independentes) potencialmentes existentes, cada uma correspondente a uma relação de longo prazo diferente.
  - Além disso, para conduzir inferência sobre o vetor de cointegração estimado, necessitamos de hipóteses mais fortes sobre os erros.

- Como veremos a seguir, o teorema da representação de Granger nos diz que, para um sistema de variáveis cointegrado, há restrições no processo gerador que são úteis para separar as relações de cointegração existentes.
  - Essas relações podem ser usadas para construir modelos preditivos superiores (a um VAR em primeiras diferenças).
  - Além disso, a metodologia nos permite testar hipóteses sobre as diferentes relações diretamente.

Teorema de representação de Granger

- Seja $\{\boldsymbol{Z}_t\}_{t\in\mathbb{Z}}$ um processo vetorial em $\mathbb{R}^n$ em que cada uma das variáveis é $I(1)$, e o processo é descrito por um VAR(p):

$$\boldsymbol{Z}_t = \boldsymbol{c} + \sum_{j=1}^{p} A_j \boldsymbol{Z}_{t-j} + \boldsymbol{v}_t\,. \tag{1}$$

- Teorema de representação de Granger: $\boldsymbol{Z}_t$ é CI(1,1) se, e somente se, admite a representação de correção de erros:

$$\Delta\boldsymbol{Z}_t = \boldsymbol{c} + \boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{Z}_{t-1} + \sum_{j=1}^{p-1} \boldsymbol{B}_j \Delta\boldsymbol{Z}_{t-j} + \boldsymbol{v}_t\,, \tag{2}$$

onde $\boldsymbol{\alpha}$ e $\boldsymbol{\beta}$ são matrizes $r\times n$ com posto r, e cada uma das linhas de $\boldsymbol{\beta}$ corresponde a uma das $r\in\{1,\ldots,n-1\}$ relações de cointegração linearmente independentes do sistema.

Cointegração e correção de erros

- Teorema de representação de Granger nos diz que, se sistema é cointegrado, variações de curto prazo $\Delta \boldsymbol{Z}_t$ respondem a desvios nas r relações de longo prazos, de modo a garantir a tendência comum de longo prazo do sistema.

- Do ponto de vista preditivo, o teorema nos diz que, se as variáveis são cointegradas, a relação de cointegração deve ser usada na predição (relativamente a trabalhar com um VAR em primeiras diferenças).
  - Por outro lado, embora, em um sistema cointegrado, um estimador de VAR irrestrito em nível é consistente para os parâmetros populacionais (a relação não é espúria), o teorema de representação de Granger nos mostra que há restrições que podem ser incorporadas na estimação, o que pode aumentar a eficiência dos estimadores dos parâmetros.

- Veremos a seguir como o modelo vetorial de correção de erros (VECM) pode ser estimado, e suas estimativas podem ser usadas para se testar o número de relações de cointegração existentes no sistema.

Detectando o número de relações de cointegração

- Considere o estimador de máxima verossimilhança condicional de (2), onde a verossimilhança é derivada sob a hipótese auxiliar de que $\boldsymbol{v}_t \overset{iid}{\sim} N(\mathbf{0}_{n\times 1}, \Sigma)$, e a estimação impõe que $r = q$.
  - Podemos escolher p preliminarmente ajustando um VAR **em nível** e fazendo os procedimentos vistos na aula anterior.
- Defina por $\hat{L}_q$ a log-verossimilhança, no máximo atingido, calculada sob a hipótese de que $r = q$.
- Johansen (1991) propõe testar:

$$H_0 : r = q, \quad H_1 : r = q + 1\,,$$

usando a estatística de razão de verossimilhança $\mathrm{LR}(q, q+1) = 2 \cdot (\max_{j\in\{q,q+1\}} \hat{L}_j - \hat{L}_q) = 2 \cdot (\hat{L}_{q+1} - \hat{L}_q)$.
  - Distribuição não padrão sob a nula, e tabulada pelo autor.
  - Estatística de teste conhecida como do máximo autovalor, visto que pode ser obtida através de um autovalor de uma matriz auxiliar calculada a partir dos dados.

Procedimento sequencial e estatística do traço

- Com base no teste do máximo autovalor, podemos detectar r procedendo sequencialmente, começando os testes com $q = 0$ e parando no momento em que não rejeitamos mais a nula.
  - Valor de r é dado pelo menor q tal que não rejeitamos a nula do teste.
- Um outro teste possível é:

$$H_0 : r = q, \quad H_1 : r > q + 1\,,$$

  que pode ser conduzido a partir da estatística de traço $\mathrm{LR}(q, n) = \max_{n \geq j \geq q} 2 \cdot (\hat{L}_j - \hat{L}_q) = 2 \cdot (\hat{L}_n - \hat{L}_q)$, e os valores críticos tabulados por Johansen (1991) para esse caso.
  - Também procedemos sequencialmente, parando no r em que não rejeitamos a nula.

Componentes determinísticos

- Em nossa discussão, consideramos o modelo (2), em que, a princípio, $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$ toma qualquer valor:
  - Como há no máximo $r = n + 1$ relações de cointegração, possível mostrar que a constante irrestrita permite $n - r > 0$ tendências lineares linearmente independentes afetando o nível das séries; além de r médias distintas em cada uma das relações de cointegração.
  - Essa flexibilidade vem ao custo de poder reduzido.
- Se sabemos que não há tendências lineares no nível das séries, mas ainda assim queremos permitir que as relações de cointegração tenham média diferente de zero, podemos considerar o modelo:

$$\Delta \boldsymbol{Z}_t = \boldsymbol{\alpha}'[\boldsymbol{a} + \boldsymbol{\beta} \boldsymbol{Z}_{t-1}] + \sum_{j=1}^{p-1} \boldsymbol{B}_j \Delta \boldsymbol{Z}_{t-j} + \boldsymbol{v}_t \,,$$

com $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^r$. Ao reduzir o número de parâmetros ganhamos poder (valores críticos para os testes mudam nesse caso).

Componentes determinísticos (cont.)

- Por outro lado, se queremos considerar que a cointegração somente remove a tendência estocástica, devemos considerar o modelo:

$$\Delta \boldsymbol{Z}_t = \boldsymbol{a} + \alpha'[\boldsymbol{b}t + \beta \boldsymbol{Z}_{t-1}] + \sum_{j=1}^{p-1} \boldsymbol{B}_j \Delta \boldsymbol{Z}_{t-j} + \boldsymbol{v}_t \,,$$

- Por fim, também é possível considerar testes nos diferentes modelos sob a presença adicional de *dummies* sazonais.
    - Valores críticos tabulados em Johansen (1995).

Inferência sobre parâmetros do VECM

- Estimado um VECM, podemos fazer inferência individual (conjunta) sobre os β usando estatísticas t (F) e valores críticos normais (F).
  - Um ponto importante é que existem diferentes pares $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$ compatíveis com r relações de cointegração (linearmente independentes) $\implies$ precisamos normalizar $\boldsymbol{\beta}$ para separar $\boldsymbol{\alpha}$ de $\boldsymbol{\beta}$.
- Como alternativa, é possível testar algumas nulas conjuntas sobre os $\boldsymbol{\beta}$ usando a estatística LR, sem necessidade de normalização.
  - Por exemplo, podemos testar que somente um subconjunto de $q \geq r$ das variáveis participa das relações.
- Podemos fazer inferência individual ou conjunta sobre os $\boldsymbol{B}_j$ e $\boldsymbol{\alpha}$ usando estatística t ou testes F convencionais, respectivamente.
  - Para testar $\boldsymbol{\alpha}$, precisamos de normalizações em $\boldsymbol{\beta}$, embora não seja o caso para testes que só envolvem os $\boldsymbol{B}_j$.
- No entanto, **não** é possível, no geral, fazer testes de causalidade de Granger usando as distribuições convencionais de referência.
  - Isso se deve à nula envolver restrições sobre coeficientes associados a variáveis I(0) e I(1) $\implies$ falha de aproximações convencionais.

Metodologia VAR com séries I(1)

- A discussão anterior sugere o seguinte procedimento para se ajustar um VAR com séries I(1).
    1. Checar pela presença de cointegração.
    2. Se não há cointegração ($r = 0$), estimar um VAR(p-1) em primeiras diferenças.
        - Nesse caso, inferência tradicional é válida para todos os parâmetros estimados.
    3. Se há cointegração ($r > 0$), estimar o modelo de correção de erros, impondo o número de relações de cointegração detectadas.
        - Nesse caso, é possível fazer inferência como discutido no slide anterior.

VAR(p) em nível com séries I(1)

- Embora seja possível mostrar que, com séries I(1), o estimador do VAR(p) em nível seja consistente para os parâmetros tanto com $r = 0$ como com $r > 0$, há dois motivos para não fazê-lo.
- Estimar um VAR(p-1) em primeira diferença quando $r = 0$ é preferível do ponto de vista de eficiência estatística, visto que efetivamente restringimos os coeficientes da representação VECM equivalentepea.
- Além disso, estimar o VAR(p-1) em primeira diferença quando $r = 0$ ou a representação VECM quando $r > 0$ é peferível à estimação direta VAR(p) em nível, visto que temos garantias de inferência válida para diferentes subconjuntos dos parâmetros.
  - De modo geral, inferência no VAR(p) em nível não é padrão em nenhum dos casos.

Metodologia VAR com séries I(0) e I(1)

- E se há as variáveis de interesse envolvem processos I(1) e I(0)?
  - Nesse caso, comumente se estima um VAR com as séries I(1) em primeiras diferenças, e as séries I(0) em nível.
    - No entanto, isso ignora a possível cointegração entre as séries I(1).
  - Uma alternativa é detectar as r relações de cointegração entre as séries I(1), e, se $r > 0$, estimar um VECM com $r + n_0$ relações de cointegração, onde n_0 é o número de variáveis I(0).
    - Recorde-se que, numa representação VECM com s variáveis, se há s relações de cointegração, os processos são efetivamente estacionários.
    - Se $r = 0$, estimamos o VAR misto, com as séries I(1) em diferença e as I(0) em nível.

Referências I

Engle, Robert F. e C. W. J. Granger (1987). "Co-Integration and Error Correction: Representation, Estimation, and Testing". Em: *Econometrica* 55.2, pp. 251–276. ISSN: 00129682, 14680262. URL: http://www.jstor.org/stable/1913236 (acesso em 02/05/2024).

Johansen, Søren (1991). "Estimation and Hypothesis Testing of Cointegration Vectors in Gaussian Vector Autoregressive Models". Em: *Econometrica* 59.6, pp. 1551–1580. ISSN: 00129682, 14680262. URL: http://www.jstor.org/stable/2938278 (acesso em 06/05/2024).

— (dez. de 1995). *Likelihood-Based Inference in Cointegrated Vector Autoregressive Models*. Oxford University Press. ISBN: 9780198774501. DOI: 10.1093/0198774508.001.0001. URL: https://doi.org/10.1093/0198774508.001.0001.

Phillips, P. C. B. e S. Ouliaris (1990). "Asymptotic Properties of Residual Based Tests for Cointegration". Em: *Econometrica* 58.1, pp. 165–193. ISSN: 00129682, 14680262. URL: http://www.jstor.org/stable/2938339 (acesso em 02/05/2024).

Referências II

Phillips, Peter C. B. e Pierre Perron (1988). "Testing for a Unit Root in Time Series Regression". Em: *Biometrika* 75.2, pp. 335–346. ISSN: 00063444. URL: http://www.jstor.org/stable/2336182 (acesso em 13/03/2024).