

EAE1223: ECONOMETRIA III

AULA 2 - PROCESSOS ESTOCÁSTICOS

Luis A. F. Alvarez

1 de março de 2024

ESPAÇO DE PROBABILIDADE

- Formalmente, o conceito utilizado para se definir a noção de incerteza associada a um problema é o de **espaço de probabilidade**.
- Um espaço de probabilidade é uma tripla $(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$, onde:
 - Ω é um conjunto, denominado **espaço amostral**, contendo todos as possíveis realizações da incerteza.
 - Σ é uma coleção de subconjuntos de Ω , denominada **σ -álgebra**. A cada subconjunto de Ω pertencente a Σ damos o nome de **evento**. Os elementos de Σ são aqueles para os quais somos capazes de definir a incerteza.
 - uma **lei de probabilidade** \mathbb{P} que atribui, a cada conjunto $E \in \Sigma$, um número $\mathbb{P}[E]$ entre 0 e 1. A lei de probabilidade satisfaz os **axiomas de Kolmogorov**.
- Por que não definimos a probabilidade para todo subconjunto de Ω ?
 - **Resposta:** se Ω é “complexo” (por exemplo, $[0, 1]$), é impossível definir uma probabilidade que satisfaça todos os axiomas de Kolmogorov para todo subconjunto do espaço.

EXEMPLO

- Considere um lançamento de um dado não viciado.
- Nesse caso, espaço amostral é $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
- Como lançamento é não viciado, sabemos que:

$$\mathbb{P}[\{1\}] = \mathbb{P}[\{2\}] = \mathbb{P}[\{3\}] = \mathbb{P}[\{4\}] = \mathbb{P}[\{5\}] = \mathbb{P}[\{6\}] = 1/6.$$

- Pelos axiomas da probabilidade, segue que podemos tomar Σ como o conjunto de todos os subconjuntos de Ω , e, para qualquer $E \subset \Sigma$:

$$\mathbb{P}[E] = \mathbb{P}[\cup_{e \in E} \{e\}] = \sum_{e \in E} \mathbb{P}[\{e\}] = \frac{\#E}{6},$$

onde $\#E$ é o número de elementos de E .

- Exemplo: probabilidade de que o lançamento dê um número par é:

$$\mathbb{P}[\{2, 4, 6\}] = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

VARIÁVEL ALEATÓRIA E PROCESSO ESTOCÁSTICO

- Uma **variável aleatória** Z é uma **função**, com domínio no espaço amostral (onde definimos a incerteza), e valores em outro espaço (para nossos fins, os reais).
 - Por exemplo, $(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidade descrevendo a incerteza associada aos retornos de ativos financeiros, e $Z : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ é a variável aleatória que representa o retorno de um fundo.
 - Incerteza em $(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$ traduz-se em incerteza em Z , i.e. Z é incerto pois o valor $\omega \in \Omega$ que ocorre é incerto.
- Um **processo estocástico** é uma coleção de variáveis aleatórias $\{X_t : t \in \mathcal{T}\}$, com domínio no **mesmo** espaço de probabilidade e indexada por um conjunto \mathcal{T}
- Uma **série de tempo** é um processo estocástico indexado no tempo, i.e. \mathcal{T} é um conjunto de períodos.
 - Sempre tomaremos $\mathcal{T} = \mathbb{Z}$ ou $\mathcal{T} = \mathbb{N}$.
 - Para cada $\omega \in \Omega$, $\{X_t(\omega) : t \in \mathcal{T}\}$ é uma trajetória **possível** da série de tempo. Para cada $t \in \mathcal{T}$, X_t é uma variável aleatória.

SÉRIE DE TEMPO ESTRITAMENTE ESTACIONÁRIA

- Uma série de tempo $\{X_t : t \in \mathcal{T}\}$ é dita estritamente estacionária se, para todo $t \in \mathcal{T}, j \in \mathbb{N}$:

$$(X_t, X_{t+1}, \dots, X_{t+j}) \stackrel{d}{=} (X_{t+h}, X_{t+1+h}, \dots, X_{t+j+h}), \quad \forall h \geq 0,$$

onde $\stackrel{d}{=}$ significa igualdade das distribuições conjuntas, isto é

$$\mathbb{P}[X_t \leq c_1, X_{t+1} \leq c_2, \dots, X_{t+j} \leq c_j] = \\ \mathbb{P}[X_{t+h} \leq c_1, X_{t+1+h} \leq c_2, \dots, X_{t+j+h} \leq c_j], \quad \forall c_1, c_2, \dots, c_j.$$

- Estacionariedade estrita requer que distribuição de qualquer número finito de períodos do processo seja a mesma ao longo do tempo.

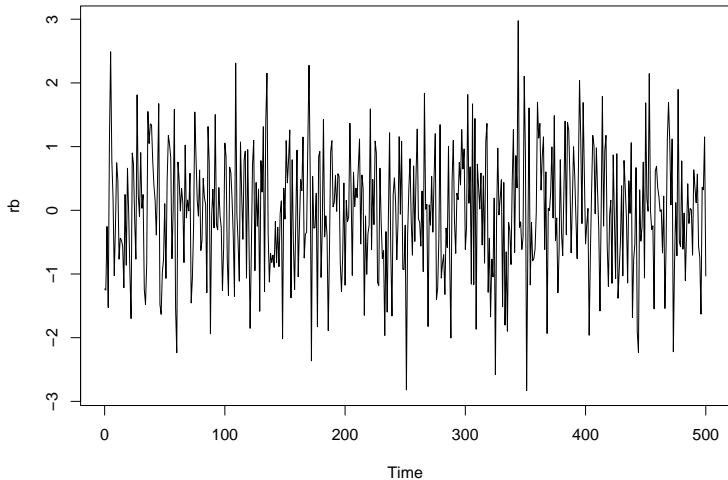
SÉRIE DE TEMPO FRACAMENTE ESTACIONÁRIA

- Para modelos lineares de séries de tempo, vamos considerar o conceito de **processo (fracamente) estacionário**.
- Uma série de tempo $\{X_t : t \in \mathcal{T}\}$ é dita **(fracamente) estacionária** se:
 1. $\mathbb{E}[X_t] = \mu$ para todo $t \in \mathcal{T}$.
 2. $\mathbb{V}[X_t] = \sigma^2 < \infty$ para todo $t \in \mathcal{T}$.
 3. $\text{cov}(X_t, X_s) = \phi_{|t-s|}$ para todo $t, s \in \mathcal{T}$.
- Processo é fracamente estacionário se sua média e variância mantêm-se constantes no tempo e covariância entre duas observações depende somente da distância entre as duas observações no tempo.
- Estacionariedade fraca impõe um **mínimo** de estabilidade no processo ao longo do tempo para que análise estatística usual possa prosseguir.
 - De modo geral, alguma noção de estacionariedade + dependência fraca entre as observações (observações muito distantes no tempo comportam-se “como” observações independentes) vai ser requerida das séries de tempo para o funcionamento “padrão” de estimadores.
- Processo é dito **não estacionário** se não for fracamente estacionário.

RUÍDO BRANCO

- Um processo Z_t , $t \in \mathcal{T}$, é dito um ruído branco se:
 1. $\mathbb{E}[Z_t] = 0$ para todo t .
 2. $\mathbb{V}[Z_t] = \sigma^2 < \infty$ para todo t .
 3. $\text{cov}(Z_t, Z_s) = 0$ se $t \neq s$.
- Um ruído branco tem média zero, variância constante finita e não apresenta correlação serial.
 - Por construção, é um processo fracamente estacionário.

RUÍDO BRANCO (GRÁFICO)



PROCESSO MA(Q)

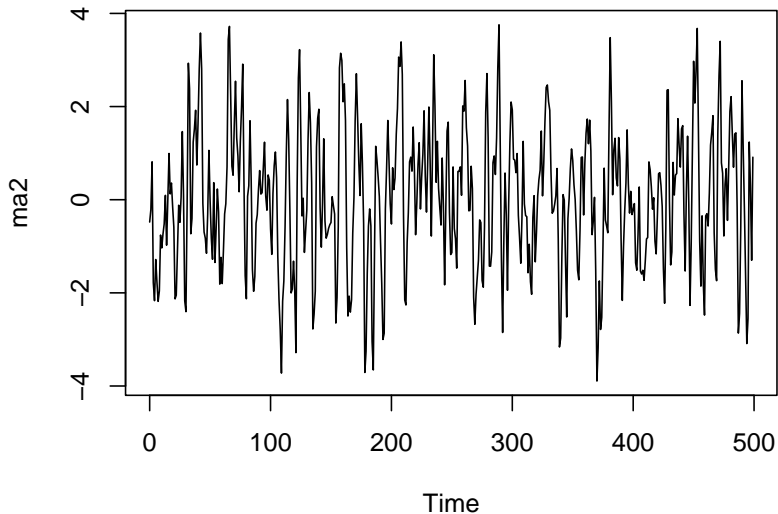
- Um processo Z_t , $t \in \mathbb{Z}$, é dito de média movel de ordem q , ou tão somente MA(q), se:

$$Z_t = \mu + \epsilon_t + \sum_{j=1}^q \psi_j \epsilon_{t-j},$$

onde $\{\epsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é um ruído branco com variância σ_ϵ^2 .

- Vamos verificar que o processo é (fracamente) estacionário. De fato
 1. $\mathbb{E}[Z_t] = \mu$.
 2. $\mathbb{V}[Z_t] = \sigma_\epsilon^2(1 + \sum_{j=1}^q \psi_j^2)$.
 3. $\text{cov}(Z_{t+j}, Z_t) = \begin{cases} \sigma_\epsilon^2(\psi_j + \psi_{j+1}\psi_1 + \dots + \psi_q\psi_{q-j}), & \text{se } 0 < j \leq q \\ 0, & \text{se } j > q \end{cases}$
- Processo tem memória curta: correlações desaparecem após q períodos.

PROCESSO MA(2) COM $\psi_1 = 1$ E $\psi_2 = 0.5$



PROCESSO AR(1) ESTACIONÁRIO

- Um processo Z_t , $t \in \mathbb{Z}$, é dito autorregressivo de ordem um estacionário, ou tão somente AR(1) estacionário, se:

$$Z_t = \alpha + \rho Z_{t-1} + u_t$$

onde $|\rho| < 1$, $\{u_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é ruído branco com $\mathbb{V}[u_t] = \sigma_u^2$ existem $S \in \mathbb{Z}$, $C \in \mathbb{R}$ tais que $\mathbb{E}[|Z_t|] \leq C$ para todo $t \leq S$.

- Vamos verificar que as condições acima garantem que o processo seja, de fato, estacionário.
- Note que:

$$\begin{aligned} Z_t &= \alpha + \rho(\alpha + \rho Z_{t-2} + u_{t-1}) + u_t \\ &= \alpha + \rho\alpha + \rho^2(\alpha + \rho Z_{t-3} + u_{t-2}) + u_t + \rho u_{t-1} \\ &\vdots \\ &= \sum_{j=0}^{\tau} \rho^j \alpha + \rho^{\tau} Z_{t-\tau} + \sum_{j=0}^{\tau} \rho^j u_t \end{aligned}$$

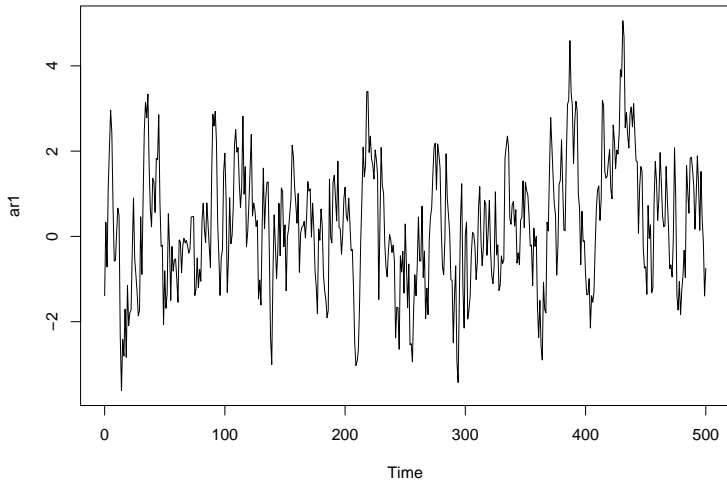
PROCESSO AR(1) ESTACIONÁRIO (CONT.)

- Pelas hipóteses, $\lim_{\tau \rightarrow \infty} \rho^\tau \mathbb{E}[|Z_{t-\tau}|] = 0$. Isso nos garante que $\rho^\tau |Z_t| \rightarrow 0$ e podemos escrever

$$Z_t = \sum_{j=0}^{\infty} \rho^j \alpha + \sum_{j=0}^{\infty} \rho^j u_t = \frac{\alpha}{1-\rho} + \sum_{j=0}^{\infty} \rho^j u_{t-j}$$

- AR(1) estacionário se escreve como MA(∞).
- Usando representação acima, podemos checar que o processo é estacionário. De fato:
 1. $\mathbb{E}[Z_t] = \frac{\alpha}{1-\rho}$
 2. $\mathbb{V}[Z_t] = \frac{\sigma_u^2}{1-\rho^2}$.
 3. $\text{cor}(Z_t, Z_s) = \rho^{|t-s|}$.

AR(1) ESTACIONÁRIO COM $\rho = 0.7$ (GRÁFICO)



PROCESSO AR(p) ESTACIONÁRIO

- Um processo Z_t , $t \in \mathbb{Z}$, é dito autorregressivo de ordem p estacionário, ou tão somente AR(p) estacionário, se:

$$Z_t = \alpha + \beta_1 Z_{t-1} + \beta_2 Z_{t-2} + \dots + \beta_p Z_{t-p} + u_t$$

onde $\{u_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é ruído branco com $\mathbb{V}[u_t] = \sigma_u^2$, existem $S \in \mathbb{Z}$, $C \in \mathbb{R}$ tais que $\mathbb{E}[|Z_t|] \leq C$ para todo $t \leq S$, e os parâmetros $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p)$ são tais que processo resultante é estacionário.

- No AR(p), processo se escreve como uma combinação linear do que aconteceu nos últimos p períodos, mais uma inovação.

OPERADOR DEFASAGEM

- Para a análise de séries de tempo, é conveniente definir uma função L , denominada operador defasagem, que, para uma dada série de tempo $(X_t)_{t \in \mathcal{T}}$, nos devolve a série de tempo que consiste em $(X_t)_{t \in \mathcal{T}}$ defasado em um período, i.e.

$$LX_t \stackrel{\text{definição}}{=} L(X_t) = X_{t-1}, \quad \forall t \in \mathcal{T}$$

- A notação L^d será usada para denotar a aplicação do operador L d vezes em sequência, i.e.

$$L^d X_t \stackrel{\text{definição}}{=} \underbrace{L \dots L}_{d \text{ vezes}} X_t = X_{t-d}, \quad \forall t \in \mathcal{T}$$

- Por fim, definiremos $L^0 = 1$, de modo que:

$$L^0 X_t = 1X_t = X_t \quad \forall t \in \mathcal{T}$$

PROPRIEDADES DO OPERADOR DEFASAGEM

LEMA

Sejam $(X_t)_{t \in \mathcal{T}}$ e $(Y_t)_{t \in \mathcal{T}}$ duas séries de tempo, e $\alpha \in \mathbb{C}$ um número complexo. Então

1. (Linearidade) $L(X_t + \alpha Y_t) = LX_t + \alpha LY_t$.
2. (Existência de soma infinita) Se $(X_t)_{t \in \mathcal{T}}$ é estacionário e $|\alpha| < 1$, o processo

$$Z_t = \sum_{j=0}^{\infty} \alpha^j L^j X_t = \sum_{j=0}^{\infty} \alpha^j X_{t-j},$$

existe e é estacionário.

3. (Inversa) Se $(X_t)_{t \in \mathcal{T}}$ é estacionário e $|\alpha| < 1$:

$$(1 - \alpha L)^{-1}(X_t) = \sum_{j=0}^{\infty} \alpha^j L^j X_t$$

AR(p) EM NOTAÇÃO POLINOMIAL

- Usando a notação aprendida anteriormente, podemos reescrever o AR(p) como:

$$\phi(L)Z_t = \alpha + u_t, \quad (1)$$

onde $\phi(L) = 1 - \beta_1 L - \beta_2 L^2 \dots - \beta_p L^p$, e $\{u\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é ruído branco.

PROPOSIÇÃO

Existe um processo $\{Z_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ fracamente estacionário que satisfaz (1), se, e somente se, as p raízes da equação $\phi(x) = 0$ se encontram **fora** do círculo unitário, isto é:

$$\phi(x) = 0 \implies |x| > 1.$$

Neste caso, o processo fracamente estacionário que satisfaz (1) é único, e pode ser escrito como:

$$Z_t = \phi^{-1}(L)(\alpha + u_t) = \tau + \sum_{j=0}^{\infty} \omega_j u_{t-j}$$

ESTACIONARIEDADE DO $AR(p)$

- A proposição anterior nos provê uma caracterização para a existência de um $\{Z_t\}_t$ estacionário que satisfaz (1), em termos das **raízes do polinômio característico** $\phi(x)$.
 - Note que a proposição fala de **existência** de **uma** solução. Por quê?
 - Isso se deve ao fato de que também podem existir processos $\{Z_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ não estacionários que satisfazem (1), mesmo quando as raízes estão todas fora do círculo.
 - Mas o teorema nos diz que, se ao menos uma das raízes está **dentro** do círculo, com certeza não há nenhuma solução estacionária.
 - A restrição que fazíamos, na definição de $AR(p)$ estacionário, de que o passado não explodia, justamente descartava as soluções não estacionárias, garantindo que selecionássemos a solução estacionária.
- No curso e na vida, vamos seguir como tradicionalmente feito na literatura econométrica e implicitamente **sempre** descartar as soluções não estacionárias (explosivas) que existem mesmo quando todas as raízes estão fora do círculo.
 - Dessa forma, diremos que um $AR(p)$ é **fracamente estacionário se, e somente se, todas as raízes de $\phi(x)$ estão fora do círculo.**

ENCONTRANDO OS COEFICIENTES DA REPRESENTAÇÃO $MA(\infty)$

- As propriedades do operador defasagem podem ser utilizadas para encontrar a representação $MA(\infty)$ de um $AR(p)$ estacionário.
- De fato, considere um $AR(2)$ estacionário:

$$(1 - \beta_1 L - \beta_2 L^2)y_t = \alpha + u_t$$

- Da fatoração de polinômios, podemos escrever:

$$(1 - \beta_1 x - \beta_2 x^2) = \left(\frac{1}{\lambda_1} x - 1\right) \left(\frac{1}{\lambda_2} x - 1\right),$$

onde λ_1 e λ_2 são as raízes de $(1 - x - \beta_2 x^2) = 0$.

- Portanto:

$$(1 - \beta_1 L - \beta_2 L^2)y_t = \left(1 - \frac{1}{\lambda_1} L\right) \left(1 - \frac{1}{\lambda_2} L\right) y_t = \alpha + u_t$$

ENCONTRANDO OS COEFICIENTES DA REPRESENTAÇÃO $MA(\infty)$

- Mas então

$$\begin{aligned} y_t &= (1 - \beta_1 L - \beta_2 L^2)^{-1} (\alpha + u_t) = \\ &\left(1 - \frac{1}{\lambda_2} L\right)^{-1} \left(1 - \frac{1}{\lambda_1} L\right)^{-1} (\alpha + u_t) = \\ &\left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_2^i} L^i\right) \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_1^j} L^j\right) (\alpha + u_t) = \\ &\frac{1}{(1 - \lambda_1^{-1})(1 - \lambda_2^{-1})} \alpha + \sum_{k=0}^{\infty} \omega_k u_{t-k} \end{aligned} \tag{2}$$

onde ω_k é a soma de termos $\frac{1}{\lambda_1^i \lambda_2^j}$ tais que $i + j = k$.