

# EAE1223: ECONOMETRIA III

## AULA 3 - DECOMPOSIÇÕES DESCRITIVAS DE SÉRIES DE TEMPO

Luis A. F. Alvarez

11 de março de 2024

# DECOMPOSIÇÃO ADITIVA DE UMA SÉRIE DE TEMPO

- Podemos considerar o seguinte modelo para uma série de tempo  $X_t$ ,  $t \in \mathcal{T}$ :

$$X_t = T_t + C_t + S_t + U_t \quad (1)$$

onde

1.  $T_t$  é a **tendência** de  $X$ . Movimento de longo prazo da série.
2.  $C_t$  é o **ciclo** de  $X$ . Movimento oscilatório em torno da tendência de frequência, em geral, desconhecida.
3.  $S_t$  é a **sazonalidade** de  $X$ . Movimento oscilatório de periodicidade bem-definida.
  - Vendas no comércio costumam apresentar alta nos meses de maio e dezembro.
4.  $U_t$  é o **componente idiossincrático** da série  $X$  em  $t$ . Captura fenômenos específicos a  $t$  e não explicados pelos demais componentes.

## DECOMPOSIÇÃO MULTIPLICATIVA DE UMA SÉRIE

- Podemos considerar o seguinte modelo para uma série de tempo  $X_t$ ,  $t \in \mathcal{T}$ :

$$X_t = T_t \cdot C_t \cdot S_t \cdot U_t \quad (2)$$

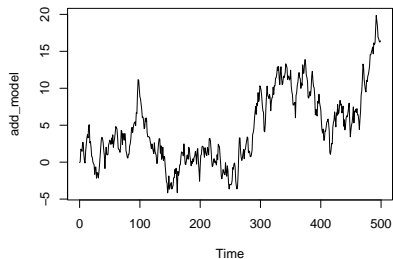
onde os componentes são definidos como no modelo aditivo.

- Um modelo multiplicativo implica um modelo aditivo em log.

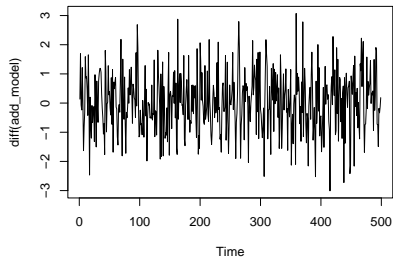
$$\log(X_t) = \tau_t + c_t + s_t + u_t \quad (3)$$

- Estimação é feita trabalhando com modelo aditivo em log.
- Observe que, no modelo multiplicativo, a tendência afeta a **escala** das variáveis.
  - Em particular, esperamos que, no modelo multiplicativo, a variância de  $\Delta X_t = X_t - X_{t-1}$  mude bastante com o tempo.
  - Escolha entre modelo aditivo ou multiplicativo pode ser feita observando um gráfico de  $\Delta X_t = X_t - X_{t-1}$ .

# MODELO ADITIVO (NÍVEL E PRIMEIRA DIFERENÇA)

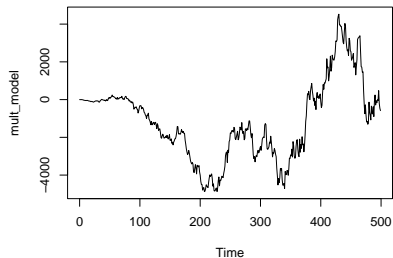


(A) Nível

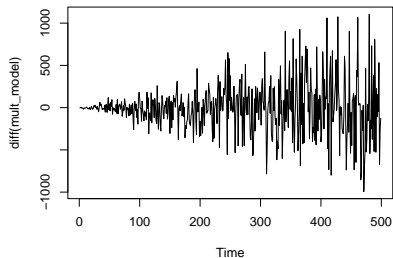


(B) Primeira diferença

# MODELO MULTIPLICATIVO (NÍVEL E PRIMEIRA DIFERENÇA)



(A) Nível



(B) Primeira diferença

## AJUSTE SAZONAL

- Remoção do componente sazonal clássica faz uso de **médias móveis**.
- Suponha que a série tem movimentos sazonais bem definidos a cada  $h$  períodos, onde  $h$  é número **ímpar** (e.g. sazonalidade semanal numa série diária). Podemos construir a **média móvel centrada em  $t$**  como:

$$\tilde{X}_t = \frac{1}{h} \sum_{s=t-(h-1)/2}^{t+(h-1)/2} X_s \quad (4)$$

- O **fator de correção sazonal** para  $s = 1, \dots, h$  é dado por:

$$\hat{\delta}_s = \frac{1}{\lfloor (T-s)/h \rfloor + 1} \sum_{t=s, s+h, s+2h, \dots} (X_t - \tilde{X}_t) \quad (5)$$

- E o fator recentrado é:

$$\tilde{\delta}_s = \hat{\delta}_s - \frac{1}{h} \sum_{j=1}^h \hat{\delta}_j \quad (6)$$

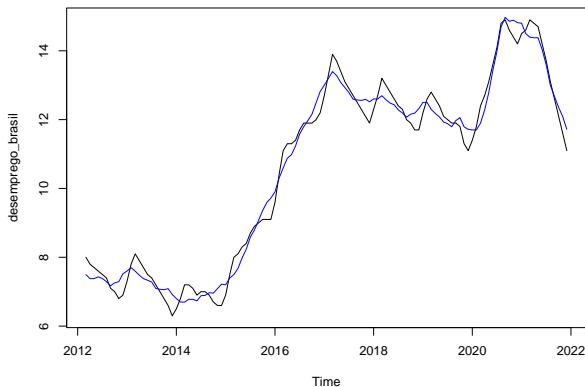
## AJUSTE SAZONAL (CONT.)

- Fatores podem ser usado para obter séries corrigidas da sazonalidade, subtraindo-se de cada observação o  $\tilde{\delta}_s$  correspondente.
- Se  $h$  é par, calculamos  $\tilde{X}_t$  combinando duas médias não centradas:

$$\tilde{X}_t = 0.5 \times \frac{1}{h} \sum_{s=t-(h-2)/2-1}^{t+(h-2)/2} X_t + 0.5 \times \frac{1}{h} \sum_{s=t-(h-2)/2-1}^{t+(h-2)/2+1} X_t$$

# EXEMPLO: TAXA DE DESEMPREGO MENSAL NO BRASIL

**FIGURA:** Taxa de desemprego original (preto) e com ajuste via médias móveis centradas (azul)



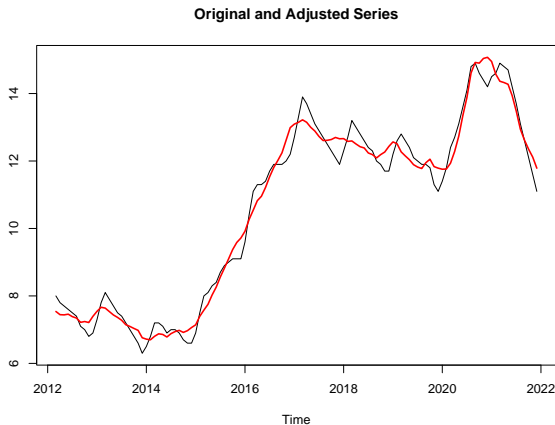


## X13 ARIMA-SEATS

- Metodologia de ajuste sazonal desenvolvida pelo *US Census Bureau*.
- Padrão ouro para ajustes sazonais.
  - Combina metodologia de médias móveis com a possibilidade de inclusão de efeitos-calendário (por padrão, modelo controla por dias úteis do mês e alguns feriados móveis; passível de alteração), detecção automática de *outliers*, *backfitting* para completamento da série de tempo e seleção automática de modelo aditivo ou multiplicativo.
- No R, acessível via pacote `seasonal`.
- Disponível para séries mensais e trimestrais.
  - Para séries diárias, há potencialmente mais de uma fonte de sazonalidade em diferentes frequências, o que requer abordagem diferentes (por exemplo, Livera, Hyndman e Snyder, 2011).

# EXEMPLO: TAXA DE DESEMPREGO MENSAL NO BRASIL (CONT.)

FIGURA: Taxa de desemprego original (preto) e com ajuste via X13 (vermelho)



## SEPARANDO O CICLO DA TENDÊNCIA

- Dada uma série de tempo cujo componente sazonal já foi extraído, como separar o componente cíclico da tendência?
- Uma abordagem bastante comum consiste em utilizar um **filtro HP**. Formalmente, dada uma série  $\{y_t\}_{t=1}^T$ , estimamos a tendência  $\{\mu_t\}_{t=1}^T$  resolvendo:

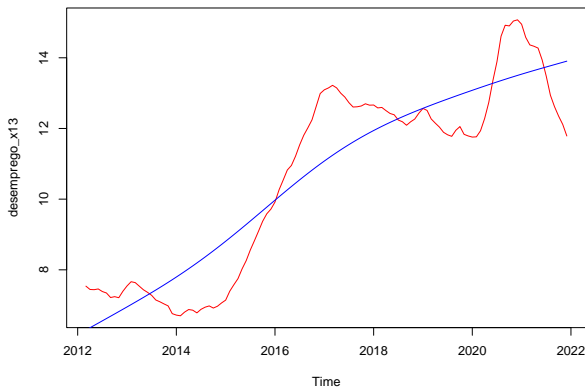
$$\min_{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_T} \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (y_t - \mu_t)^2 + \frac{\lambda}{T} \sum_{t=2}^{T-1} [(\mu_{t+1} - \mu_t) - (\mu_t - \mu_{t-1})]^2 \quad (7)$$

para uma **penalização**  $\lambda > 0$ .

- $\lambda$  controla o grau de suavidade da tendência estimada (quanto maior  $\lambda$ , mais suavizado):
  1. Se  $\lambda = 0$ ,  $\hat{\mu}_t = y_t$ , i.e. a tendência estimada é a própria série.
  2. Se  $\lambda \rightarrow \infty$ ,  $\hat{\mu}_t \rightarrow \hat{a} + \hat{b}t$ , i.e. a tendência torna-se linear (igual à regressão de  $y_t$  num intercepto e numa tendência linear).
- Regra de bolso é usar  $\lambda = 1600$  para dados trimestrais,  $\lambda = 6,25$  para dados anuais e  $\lambda = 129600$  para dados mensais (Ravn e Uhlig, 2002).

# EXEMPLO: TAXA DE DESEMPREGO MENSAL NO BRASIL (CONT.)

**FIGURA:** Taxa de desemprego com ajuste via X13 (vermelho) e tendência extraída via filtro HP (azul)

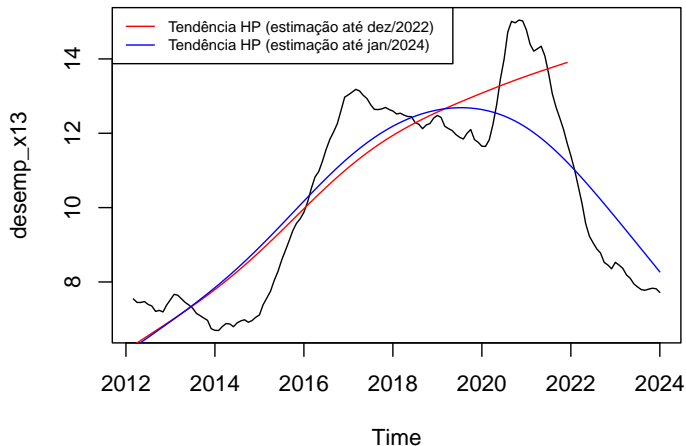


# FILTRO HP E INSTABILIDADE NA PONTA

- Note que, à medida que mais dados são divulgados, os valores da tendência podem mudar.
- Esse fenômeno é especialmente acentuado nas observações mais recentes, em que a contribuição de novas observações é especialmente acentuada.
  - A esse fenômeno damos o nome de **instabilidade na ponta**: observações futuras podem fazer nossa estimativa do ciclo mudar radicalmente.

# INSTABILIDADE DE PONTA: ILUSTRAÇÃO

FIGURA: Desemprego mensal (ajustado via X13) até janeiro/2024



## ALTERNATIVAS AO FILTRO HP: HAMILTON (2018)

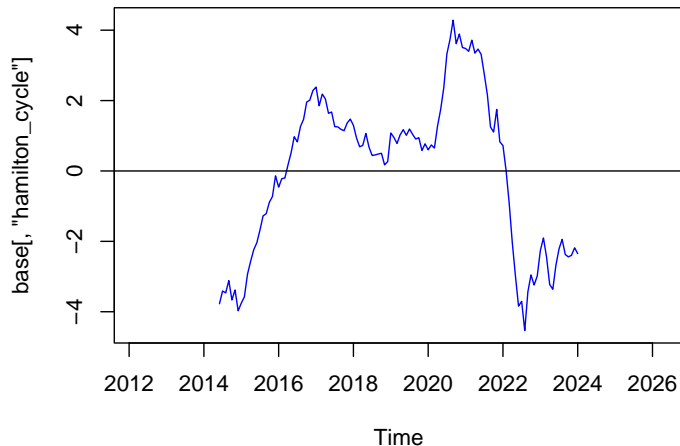
- A instabilidade de ponta, combinada a outras debilidades do filtro HP, leva Hamilton (2018) a sugerir uma outra medida de ciclo.
- Sua sugestão é calcular o ciclo como o resíduo  $\hat{\nu}_t$  da regressão:

$$y_{t+h} = \alpha + \beta_1 y_t + \beta_2 y_{t-1} + \beta_3 y_{t-2} + \beta_4 y_{t-3} + \nu_{t+h},$$

onde  $h$  é tomado de forma de que a distância entre  $t$  e  $t + h$  seja de **dois** anos.

- $h = 8$  em dados trimestrais,  $h = 24$  em dados mensais.
- Medida captura o erro que se comete em projetar o que ocorre em  $t$ , com base no que ocorreu há dois anos.
- Ideia é que esse erro capturaria fatores cíclicos.

# APLICAÇÃO DE HAMILTON (2018) AOS DADOS DE DESEMPREGO





## DECOMPOSIÇÃO DE BEVERIDGE-NELSON

- A decomposição de Hamilton é bastante similar a um procedimento, sugerido por Beveridge e Nelson (1981), para se separar a tendência estocástica da parte estacionária de um processo  $I(1)$ .
- Decomposição de Beveridge-Nelson toma a parte estacionária de um processo  $I(1)$  como:

$$\nu_t^{\text{BN}} = y_t - \lim_{s \rightarrow \infty} \mathbb{E}[y_{t+s} | y_t, y_{t-1}, \dots]$$

i.e. a diferença entre  $y_t$  e uma projeção de longo prazo, feita com base em toda o histórico de  $y$  até  $t$ .

- Se processo também apresenta tendência determinística  $a_0 t$  em nível, fazemos:

$$\nu_t^{\text{BN}} = y_t - \lim_{s \rightarrow \infty} (\mathbb{E}[y_{t+s} | y_t, y_{t-1}, \dots] - a_0 s)$$

- Decomposição pode ser estimada ajustando um modelo preditivo para  $\Delta y_t$ , e computando projeções fora da amostra para um horizonte longo, observando que  $y_{t+s} = y_t + \Delta y_{t+1} + \dots \Delta y_{t+s}$ .

# BIBLIOGRAFIA I



Beveridge, Stephen e Charles R. Nelson (1981). “A new approach to decomposition of economic time series into permanent and transitory components with particular attention to measurement of the ‘business cycle’”. Em: *Journal of Monetary Economics* 7.2, pp. 151–174. ISSN: 0304-3932. DOI:

[https://doi.org/10.1016/0304-3932\(81\)90040-4](https://doi.org/10.1016/0304-3932(81)90040-4). URL:  
<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0304393281900404>.



Hamilton, James D. (dez. de 2018). “Why You Should Never Use the Hodrick-Prescott Filter”. Em: *The Review of Economics and Statistics* 100.5, pp. 831–843. ISSN: 0034-6535. DOI: 10.1162/rest\_a\_00706. eprint: [https://direct.mit.edu/rest/article-pdf/100/5/831/1918879/rest\\\_a\\\_00706.pdf](https://direct.mit.edu/rest/article-pdf/100/5/831/1918879/rest\_a\_00706.pdf). URL: [https://doi.org/10.1162/rest%5C\\_a%5C\\_00706](https://doi.org/10.1162/rest%5C_a%5C_00706).

## BIBLIOGRAFIA II



Livera, Alysha M. De, Rob J. Hyndman e Ralph D. Snyder (2011). “Forecasting Time Series With Complex Seasonal Patterns Using Exponential Smoothing”. *Em: Journal of the American Statistical Association* 106.496, pp. 1513–1527. DOI: 10.1198/jasa.2011.tm09771. eprint: <https://doi.org/10.1198/jasa.2011.tm09771>. URL: <https://doi.org/10.1198/jasa.2011.tm09771>.



Ravn, Morten O. e Harald Uhlig (mai. de 2002). “On Adjusting the Hodrick-Prescott Filter for the Frequency of Observations”. *Em: The Review of Economics and Statistics* 84.2, pp. 371–376. ISSN: 0034-6535. DOI: 10.1162/003465302317411604. eprint: <https://direct.mit.edu/rest/article-pdf/84/2/371/1613390/003465302317411604.pdf>. URL: <https://doi.org/10.1162/003465302317411604>.