

EAE1223: ECONOMETRIA III

AULA 1 - INTRODUÇÃO

Luis A. F. Alvarez

5 de março de 2025

AMOSTRAGEM E INFERÊNCIA

- Nos cursos anteriores de Econometria, boa parte das aulas foi dedicada a tópicos de **inferência estatística**, i.e. a métodos de quantificação da **incerteza** referente a uma quantidade populacional.
 - Cômputo de erros padrão, construção de testes de hipótese e intervalos de confiança.
- A incerteza, nesses cursos de Econometria, decorria fundamentalmente da **amostragem**.
 - Observávamos somente uma amostra da população de interesse, de modo que gostaríamos de quantificar o quanto poderíamos falar da população, e o quanto seria contingente à amostra.
- As propriedades dos estimadores, testes e intervalos de confiança faziam referência ao experimento mental de amostras repetidas.
 - Se repetíssemos a amostragem muitas vezes e calculássemos o estimador para cada amostra, na média das repetições o estimador acertaria parâmetro de interesse (ausência viés); ou as repetições não ficariam muito distantes de si (baixa variância amostral).

AMOSTRAGEM ALEATÓRIA SIMPLES

- Nos cursos anteriores, as propriedades dos estimadores, testes e intervalos de confiança foram derivadas sob a hipótese de **amostragem aleatória simples**.
 - As observações na amostra eram independentes entre si, e cada uma seguia a mesma distribuição das variáveis na população.
 - Conceito serve como aproximação ao procedimento de se sortear n elementos (indivíduos, firmas, países) de uma população grande e coletar as informações deles.
 - Em dados no formato de painel, sorteamos aleatoriamente n indivíduos e acompanhamos suas variáveis por T períodos, de modo que observações de indivíduos diferentes são independentes, e a sequência de variáveis de cada indivíduo tem a mesma distribuição da população.

SÉRIES DE TEMPO

- Neste curso, estudaremos métodos estatísticos e econométricos para dados de **séries de tempo**.
- Estes dados possuem uma estrutura especial, pois as variáveis possuem uma ordenação natural (tempo).
 - Exemplo: observamos dados de inflação e atividade econômica mensais, de janeiro de 2003 a dezembro de 2022.
- Esta estrutura nos leva a uma nova sorte de problemas.

INCERTEZA EM SÉRIES DE TEMPO

- Primeiramente, o conceito de incerteza utilizado anteriormente necessita ser requalificado, pois é difícil ver uma série de tempo como uma amostra de uma população tal qual **naturalmente a pensamos**.
 - Em séries de tempo, a incerteza de procedimentos estatísticos decorre fundamentalmente de não sermos capazes de observar o que acontecerá em todo o futuro, nem o que aconteceu num passado distante, **nem o que poderia ter acontecido no período da amostra e não ocorreu**.
 - Essa incerteza **econômica** deve ser levada em conta, pois gostaríamos de separar o que é **contigente** ao período de análise do que é **essencial** na trajetória de uma série.
 - Propriedades dos estimadores devem ser pensadas como avaliadas em “amostras repetidas” desses cenários contrafactuais (“superpopulação”).

O QUE MUDA

- A estrutura das séries de tempo faz com que a hipótese de dados independentes e identicamente distribuídos deixe de ser atrativa.
 - Esperamos que haja dependência do que ocorre com a inflação em t e aquilo que ocorre com ela em $t - 1$.
 - Além disso, em muitos cenários, é irrazoável supor que a distribuição de uma variável, que reflete o que contrafactualmente poderia ter ocorrido com ela, é a mesma em diferentes períodos.
 - A distribuição do produto Brasileiro em 1950 e 2000 não parece ser a mesma.
 - Precisamos de novos métodos para lidar com esses problemas.
- Por fim, a estrutura de séries de tempo requer cuidados adicionais na identificação e estimação de **efeitos causais**, pois devemos levar em conta as retroalimentações dos processos.

CAUSALIDADE E ECONOMETRIA

- O conceito de causalidade, em Econometria, reflete o experimento mental associado ao qualificador *ceteris paribus*.
- Em um sistema econômico com variáveis (Y, X, U) , o efeito causal de X sobre Y é **definido** como o efeito de se perturbar X sobre Y , **mantidas as demais causas de Y constantes**.
- Primeira etapa de uma análise causal é definir o sistema econômico ou modelo causal, explicitando quais variáveis causam o quê e os efeitos causais de interesse.
 - Trata-se de **atividade puramente mental**, não dependente de amostra e envolvendo conhecimento prévio ou teoria econômica (Heckman e Pinto, 2022).

MODELO ECONOMETRICO CAUSAL LINEAR

- Vamos definir o seguinte modelo causal para uma variável Y_t no período t .

$$Y_t = X_t' \beta + U_t,$$

onde X_t é um vetor $k \times 1$ de **causas observadas** de Y_t , β é um vetor $k \times 1$ **definido** como o efeito causal de se perturbar cada um dos elementos de X_t sobre Y_t , e U_t são as demais causas **não observadas** de Y_t .

- **Exemplo:** definimos a função resposta de um banco central como:

$$i_t = (r^{\text{neutro}} + \pi^{\text{meta}}) + \gamma(\pi_{t-1} - \pi^{\text{meta}}) + u_t,$$

onde u_t são os determinantes não observados da regra de juros (choques monetários), e γ é definido como o coeficiente (causal) de resposta da política monetária à inflação passada.

ESTIMAÇÃO DO MODELO CAUSAL LINEAR

- Suponha que tenhamos acesso a séries de tempo $\{(Y_s, X_s)\}_{s=1}^T$.
- Podemos tentar estimar o parâmetro causal β por MQO:

$$\hat{\beta} = \left(\sum_{t=1}^T X_t X_t' \right)^{-1} \left(\sum_{t=1}^T X_t Y_t \right)$$

- Mas: $\hat{\beta} = \left(\sum_{t=1}^T X_t X_t' \right)^{-1} \left(\sum_{t=1}^T X_t (X_t' \beta + U_t) \right) = \beta + \left(\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T X_t X_t' \right)^{-1} \left(\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T X_t U_t \right)$
- De Econometria I, sabemos que $\hat{\beta}$ será não viciado se $\mathbb{E}[U_s | X_1, X_2, \dots, X_T] = 0$ para $s = 1, \dots, T$.
 - Em Econometria 1, como as observações eram independentes, $\mathbb{E}[U_s | X_1, X_2, \dots, X_T] = \mathbb{E}[U_s | X_s]$, e a condição colapsava para $\mathbb{E}[U_s | X_s] = 0$.
 - Em séries de tempo, dependência implica que precisamos de $\mathbb{E}[U_s | X_1, X_2, \dots, X_T] = 0 \implies \mathbb{E}[X_s U_t] = 0 \forall s, t$.

ESTIMAÇÃO DO MODELO CAUSAL LINEAR (CONT.)

- A condição que impomos para estimar β **sem viés** requer que $\mathbb{E}[X_s U_t] = 0, \quad \forall s, t.$
 - Condição requer que os demais determinantes de Y não estejam sistematicamente associados com X , contemporânea ou extemporaneamente.
 - Não pode haver retroalimentação entre X e U .
 - A essa condição damos nome de **exogeneidade estrita**.
- Condição faz sentido no exemplo da regra monetária?

ESTIMAÇÃO DO MODELO CAUSAL LINEAR (CONT.)

- Para estimar $\hat{\beta}$ **consistentemente** quando $T \rightarrow \infty$, precisamos das seguintes condições:
 1. $\left(\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T X_t X_t'\right)$ e $\left(\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T X_t U_t\right)$ possuem limites em probabilidade.
 2. O limite em probabilidade de $\left(\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T X_t X_t'\right)$ tem posto cheio.
 3. $\mathbb{E}[X_t U_t] = 0$ para todo t .
- Condição (1) é de natureza **estatística**: processos não podem explodir nem pode ser extremamente dependentes, de modo que as médias converjam (deve valer uma lei dos grandes números).
- Condição (2) versa sobre a **especificação** do modelo: não pode haver colinearidade perfeita em amostras grandes.
- Condição (3) é de natureza **econômica**: **exogeneidade contemporânea**.
 - Condição faz sentido no exemplo da regra monetária?

MELHOR PREDITOR LINEAR

- E se não temos um modelo causal na cabeça? Ou se a hipótese de exogeneidade para consistência não vale? Será que o estimador de MQO estima consistentemente alguma coisa?

DEFINIÇÃO: MELHOR PREDITOR LINEAR

Seja Y uma variável aleatória escalar e X um vetor $k \times 1$ de preditores. O **coeficiente do melhor preditor linear** de Y como função de X é **definido** por:

$$\gamma \in \operatorname{argmin}_{c \in \mathbb{R}^k} \mathbb{E}[(Y - c'X)^2]$$

- γ é o coeficiente que minimiza erro quadrático esperado de se projetar Y como função linear de X .

MELHOR PREDITOR LINEAR E MODELO PREDITIVO

PROPOSIÇÃO

1. Se $\mathbb{E}[XX']$ tem posto completo, temos que γ é único e pode ser escrito como:

$$\gamma = \mathbb{E}[XX']^{-1}\mathbb{E}[XY]$$

2. Além disso, definindo o erro de projeção $\epsilon = Y - X'\gamma$, podemos escrever:

$$Y = X'\gamma + \epsilon,$$

onde, $\mathbb{E}[X\epsilon] = 0$ **por construção**.

ESTIMAÇÃO DE MODELO PREDITIVO

- A fórmula de γ é bastante parecida com a do estimador de MQO $\hat{\beta}$.
 - Consequentemente, $\hat{\beta}$ estimará consistentemente o coeficiente γ do melhor preditor linear de Y em X se, quando $T \rightarrow \infty$,
 $\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T X_t X_t' \xrightarrow{P} \mathbb{E}[XX']$ e $\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T X_t Y_t \xrightarrow{P} \mathbb{E}[XY]$.
- Posto de outra forma, o problema de melhor prever Y como função linear de X define um **modelo preditivo linear**:

$$Y = X'\gamma + \epsilon$$

cujo erro satisfaz a condição de exogeneidade $\mathbb{E}[X\epsilon] = 0$ **por construção**. Para consistência, bastará então uma LGN.

- Condições suficientes para que a lei dos grandes números que garante a consistência do estimador de MQO $\hat{\beta}$ para γ valha são:
 - (A) $\mathbb{E}[X_t X_t'] = \mathbb{E}[XX']$ e $\mathbb{E}[X_t Y_t] = \mathbb{E}[XY]$.
 - (B) **As observações apresentam dependência fraca no tempo**, de modo que observações mais distantes no tempo se comportam cada vez mais como próximas de independentes.

ESTACIONARIEDADE E DEPENDÊNCIA FRACA

- As condições (a) e (b) garantem que uma lei dos grandes números valha, de modo que $\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T X_t X_t' \xrightarrow{P} \mathbb{E}[XX']$ e $\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T X_t Y_t \xrightarrow{P} \mathbb{E}[XY]$.
 - Condição (a) é uma versão de condição de **estacionariedade fraca**. Esta condição impõe estabilidade dos momentos de X e Y , garantindo que os potenciais limites das médias amostrais existam.
 - Condição (b) garante que haja informação suficiente no problema para que haja convergência em probabilidade para os limites.
- Uma boa parte do curso consistirá em prover ferramentas para testar se séries de tempo são estacionárias ou não, e a entender o que se deve fazer em caso negativo.
- Quanto ao item (b), não testaremos essa condição, embora seja importante saber que ela vale para processos bastante flexíveis (Carrasco e Chen, 2002).

PROCEDIMENTO PARA AVALIAR CONSISTÊNCIA DE ESTIMADOR DE MQO DE MODELO LINEAR EM SÉRIES DE TEMPO

1. Especificar a natureza da pergunta (preditiva ou causal).
2. Postular e escrever o modelo correspondente.
3. Se o modelo é causal, avaliar a plausibilidade de exogeneidade contemporânea (teoria econômica). Se modelo é preditivo, exogeneidade contemporânea do erro do modelo vale por construção.
4. Se exogeneidade valer, e séries forem estacionárias (e fracamente dependentes), sabemos que estimador de MQO de $\hat{\beta}$ será consistente para o parâmetro do modelo postulado.

Obs 1: Se a série não for estacionária, veremos no curso o que podemos dizer/devemos fazer.

Obs 2: Além disso, veremos como fazer inferência sobre os parâmetros, levando em conta a dependência temporal na quantificação de incerteza.

BIBLIOGRAFIA I



Carrasco, Marine e Xiaohong Chen (2002). “Mixing and Moment Properties of Various GARCH and Stochastic Volatility Models”. Em: *Econometric Theory* 18.1, pp. 17–39. ISSN: 02664666, 14694360. URL: <http://www.jstor.org/stable/3533024> (acesso em 23/02/2024).



Heckman, James J e Rodrigo Pinto (fev. de 2022). *Causality and Econometrics*. Working Paper 29787. National Bureau of Economic Research. DOI: 10.3386/w29787. URL: <http://www.nber.org/papers/w29787>.