

EAE1223: ECONOMETRIA III

AULA 4 - RAÍZES UNITÁRIAS

Luis A. F. Alvarez

13 de março de 2024

OPERADOR DIFERENÇA

- Vamos definir o operador diferença Δ como a função que, para uma série de tempo $\{X_t : t \in \mathcal{T}\}$, nos devolve uma série de tempo ΔX_t da seguinte forma:

$$\Delta X_t \stackrel{\text{def}}{=} (1 - L)X_t = X_t - X_{t-1}, \quad t \in \mathcal{T}.$$

- Usaremos a notação Δ^d para a aplicação d vezes do operador diferença, i.e.

$$\Delta^d X_t = (1 - L)^d X_t, \quad t \in \mathcal{T}$$

- **Exemplo:** $\Delta^2 X_t = (1 - L)(1 - L)X_t = (X_t - X_{t-1}) - (X_{t-1} - X_{t-2})$
- Definimos $\Delta^0 = (1 - L)^0 = 1$.

PROCESSO $I(D)$

- Em nosso contexto, vamos definir um processo $\{Y_t : t \in \mathcal{T}\}$ como integrado de ordem d , ou $I(d)$, se ele se escreve como:

$$\Phi(L)(1 - L)^d Y_t = \alpha + \Theta(L)\epsilon_t,$$

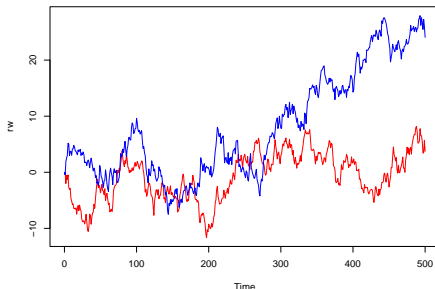
para polinômios $\Phi(x)$ e $\Theta(x)$, onde todas as raízes de $\Phi(x)$ estão fora do círculo unitário.

- Processo requer d diferenciações consecutivas para tornar-se estacionário.
- Dizemos que o processo tem d raízes unitárias, visto que o polinômio $\Phi(x)(1 - x)^d$ possui d raízes x^* com $|x^*| = 1$.
- Note que um processo $I(0)$ é estacionário, pois $(1 - L)^0 = 1$.

REGRESSÃO ESPÚRIA

- Processos $I(d)$, $d > 0$, geram problemas de inferência **sérios**.
 - Variabilidade crescente do processo gera distorções.
- Como exemplo, gere dois passeios aleatórios **independentes** no \mathbb{R} , e considere ajustar um modelo linear de um no outro.
- Como os dados foram gerados de maneira **independente**, esperamos que o coeficiente associado à série seja 0 (um processo não explica o outro).
- O que acontece na prática?

REGRESSÃO ESPÚRIA (CONT.)



```
Call:
lm(formula = rw2 ~ rw)

Residuals:
    Min       1Q   Median       3Q      Max
-17.925  -6.407  -1.983   4.125  21.098

Coefficients:
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)   8.8361    0.3877    22.79  <2e-16 ***
rw            1.0075    0.0902    11.17  <2e-16 ***
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 8.545 on 499 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.2,    Adjusted R-squared:  0.1984
F-statistic: 124.8 on 1 and 499 DF,  p-value: < 2.2e-16
```

Testes indicam que ambas as séries têm relação quando sabemos que isso não é verdade!

TESTANDO A PRESENÇA DE RAIZ UNITÁRIA

- Dadas as relações espúrias que são estimadas quando há tendência estocástica, é importante ser capaz de detectá-la nos dados.
 - Também é importante diferenciar tendência estocástica de determinística, visto que a melhor transformação a se fazer em cada caso é diferente.
- Considere o seguinte modelo para uma série de tempo Y_t :

$$Y_t = \rho Y_{t-1} + \epsilon_t \quad (1)$$

onde $\{\epsilon_t\}_t$ é ruído branco *independente*.

- $\epsilon_t, \epsilon_j, j \neq t$, não possuem nenhuma associação, linear ou não.
- Observe que:
 1. Se $|\rho| < 1$, processo é $I(0)$
 2. Se $\rho = 1$, processo é $I(1)$.

TESTE DE RAIZ UNITÁRIA

- Subtraindo Y_{t-1} de ambos os lados de (14), obtemos:

$$\Delta Y_t = \gamma Y_{t-1} + \epsilon_t \quad (2)$$

onde $\gamma = (\rho - 1)$.

- Observe que:
 1. Se $\gamma = 0$, processo é $I(1)$.
 2. Se $\gamma \in (-2, 0)$, processo é $I(0)$.
- Podemos usar um teste t da nula de que $\gamma = 0$ contra a alternativa unicaudal $\gamma < 0$ como uma teste da nula de uma raiz unitária (contra a alternativa de que o processo é estacionário).
 - Estatística de teste é $\hat{t} = \hat{\gamma}/\text{se}(\hat{\gamma})$, onde $\text{se}(\hat{\gamma})$ é o erro padrão homocedástico de Econometria I.
- Como, sob a nula, o processo apresenta tendência estocástica, a distribuição de referência de \hat{t} não é normal. [▶ Detalhes](#)
 - Valores críticos tabulados (Dickey e Fuller, 1979).

TESTE DE RAIZ UNITÁRIA: MODELO COM INTERCEPTO

- Às vezes, não temos certeza sobre os termos determinísticos de um processo.
- Nesse caso, é interessante considerar modelos como:

$$\Delta Y_t = \alpha + \gamma Y_{t-1} + \epsilon_t \quad (3)$$

- Nesse modelo, se $\gamma = 0$, processo é um passeio aleatório com *drift*; se $\gamma < 0$, é um AR(1) estacionário com intercepto.
- Estatística t associada a γ tem distribuição não normal sob $(\alpha, \gamma) = (0, 0)$. Valores críticos tabulados (Dickey e Fuller, 1981).
- Também é possível testar a nula de que $(\alpha, \gamma) = (0, 0)$ usando um teste F. Nesse caso, a estatística também tem valores críticos não convencionais tabulados (Dickey e Fuller, 1981).

TESTE DE RAIZ UNITÁRIA: MODELO COM INTERCEPTO E TENDÊNCIA LINEAR

- Podemos considerar, também:

$$\Delta Y_t = \alpha + \beta \cdot t + \gamma Y_{t-1} + \epsilon_t \quad (4)$$

- Nesse modelo, se $\gamma = 0$, processo é um passeio aleatório com tendência quadrática; se $\gamma < 0$, é um AR(1) com tendência linear.
- Estatística t associada a γ tem distribuição não normal sob $(\beta, \gamma) = (0, 0)$. Valores críticos tabulados (Dickey e Fuller, 1981).
- Também é possível testar a nula de que $(\beta, \gamma) = (0, 0)$ usando um teste F. Nesse caso, a estatística também tem valores críticos não convencionais tabulados (Dickey e Fuller, 1981).

TESTE DE RAIZ UNITÁRIA: VALORES CRÍTICOS DA ESTATÍSTICA \hat{t}

TABLE B.6
Critical Values for the Phillips-Perron Z_t Test and for the Dickey-Fuller Test
Based on Estimated OLS t Statistic

| Sample size T | Probability that $(\beta - 1)/\hat{\sigma}_\beta$ is less than entry | | | | | | | |
|-----------------------|--|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| | 0.01 | 0.025 | 0.05 | 0.10 | 0.90 | 0.95 | 0.975 | 0.99 |
| <i>Case 1</i> | | | | | | | | |
| 25 | -2.66 | -2.26 | -1.95 | -1.60 | 0.92 | 1.33 | 1.70 | 2.16 |
| 50 | -2.62 | -2.25 | -1.95 | -1.61 | 0.91 | 1.31 | 1.66 | 2.08 |
| 100 | -2.60 | -2.24 | -1.95 | -1.61 | 0.90 | 1.29 | 1.64 | 2.03 |
| 250 | -2.58 | -2.23 | -1.95 | -1.62 | 0.89 | 1.29 | 1.63 | 2.01 |
| 500 | -2.58 | -2.23 | -1.95 | -1.62 | 0.89 | 1.28 | 1.62 | 2.00 |
| ∞ | -2.58 | -2.23 | -1.95 | -1.62 | 0.89 | 1.28 | 1.62 | 2.00 |
| <i>Case 2</i> | | | | | | | | |
| 25 | -3.75 | -3.33 | -3.00 | -2.63 | -0.37 | 0.00 | 0.34 | 0.72 |
| 50 | -3.58 | -3.22 | -2.93 | -2.60 | -0.40 | -0.03 | 0.29 | 0.66 |
| 100 | -3.51 | -3.17 | -2.89 | -2.58 | -0.42 | -0.05 | 0.26 | 0.63 |
| 250 | -3.46 | -3.14 | -2.88 | -2.57 | -0.42 | -0.06 | 0.24 | 0.62 |
| 500 | -3.44 | -3.13 | -2.87 | -2.57 | -0.43 | -0.07 | 0.24 | 0.61 |
| ∞ | -3.43 | -3.12 | -2.86 | -2.57 | -0.44 | -0.07 | 0.23 | 0.60 |
| <i>Case 4</i> | | | | | | | | |
| 25 | -4.38 | -3.95 | -3.60 | -3.24 | -1.14 | -0.80 | -0.50 | -0.15 |
| 50 | -4.15 | -3.80 | -3.50 | -3.18 | -1.19 | -0.87 | -0.58 | -0.24 |
| 100 | -4.04 | -3.73 | -3.45 | -3.15 | -1.22 | -0.90 | -0.62 | -0.28 |
| 250 | -3.99 | -3.69 | -3.43 | -3.13 | -1.23 | -0.92 | -0.64 | -0.31 |
| 500 | -3.98 | -3.68 | -3.42 | -3.13 | -1.24 | -0.93 | -0.65 | -0.32 |
| ∞ | -3.96 | -3.66 | -3.41 | -3.12 | -1.25 | -0.94 | -0.66 | -0.33 |

The probability shown at the head of the column is the area in the left-hand tail.

Source: Wayne A. Fuller, *Introduction to Statistical Time Series*, Wiley, New York, 1976, p. 373.

TESTE DE RAIZ UNITÁRIA: VALORES CRÍTICOS DA ESTATÍSTICA F

TABLE B.7

Critical Values for the Dickey-Fuller Test Based on the OLS F Statistic

| Sample size <i>T</i> | Probability that <i>F</i> test is greater than entry | | | | | | | |
|---|--|-------|------|------|------|------|-------|-------|
| | 0.99 | 0.975 | 0.95 | 0.90 | 0.10 | 0.05 | 0.025 | 0.01 |
| Case 2 | | | | | | | | |
| (F test of $\alpha = 0$, $\rho = 1$ in regression $y_t = \alpha + \rho y_{t-1} + u_t$) | | | | | | | | |
| 25 | 0.29 | 0.38 | 0.49 | 0.65 | 4.12 | 5.18 | 6.30 | 7.88 |
| 50 | 0.29 | 0.39 | 0.50 | 0.66 | 3.94 | 4.86 | 5.80 | 7.06 |
| 100 | 0.29 | 0.39 | 0.50 | 0.67 | 3.86 | 4.71 | 5.57 | 6.70 |
| 250 | 0.30 | 0.39 | 0.51 | 0.67 | 3.81 | 4.63 | 5.45 | 6.52 |
| 500 | 0.30 | 0.39 | 0.51 | 0.67 | 3.79 | 4.61 | 5.41 | 6.47 |
| ∞ | 0.30 | 0.40 | 0.51 | 0.67 | 3.78 | 4.59 | 5.38 | 6.43 |
| Case 4 | | | | | | | | |
| (F test of $\delta = 0$, $\rho = 1$ in regression $y_t = \alpha + \delta t + \rho y_{t-1} + u_t$) | | | | | | | | |
| 25 | 0.74 | 0.90 | 1.08 | 1.33 | 5.91 | 7.24 | 8.65 | 10.61 |
| 50 | 0.76 | 0.93 | 1.11 | 1.37 | 5.61 | 6.73 | 7.81 | 9.31 |
| 100 | 0.76 | 0.94 | 1.12 | 1.38 | 5.47 | 6.49 | 7.44 | 8.73 |
| 250 | 0.76 | 0.94 | 1.13 | 1.39 | 5.39 | 6.34 | 7.25 | 8.43 |
| 500 | 0.76 | 0.94 | 1.13 | 1.39 | 5.36 | 6.30 | 7.20 | 8.34 |
| ∞ | 0.77 | 0.94 | 1.13 | 1.39 | 5.34 | 6.25 | 7.16 | 8.27 |

The probability shown at the head of the column is the area in the right-hand tail.

Source: David A. Dickey and Wayne A. Fuller, "Likelihood Ratio Statistics for Autoregressive Time Series with a Unit Root," *Econometrica* 49 (1981), p. 1063.

TESTE DICKEY-FULLER AUMENTADO

- A construção das estatísticas de teste nos modelos anteriores supõe que os erros $\{\epsilon_t\}$ comportem-se como ruídos brancos independentes.
 - Em particular, os erros não podem ser autocorrelacionados.
- Said e Dickey (1984) sugerem aumentar os modelos (2)-(4) incluindo *lags*:

$$\begin{aligned}\Delta Y_t &= \gamma Y_{t-1} + \sum_{j=1}^k \kappa_j \Delta Y_{t-j} + u_t \\ \Delta Y_t &= \alpha + \gamma Y_{t-1} + \sum_{j=1}^k \kappa_j \Delta Y_{t-j} + u_t \\ \Delta Y_t &= \alpha + \beta \cdot t + \gamma Y_{t-1} + \sum_{j=1}^k \kappa_j \Delta Y_{t-j} + u_t\end{aligned}\tag{5}$$

de modo que $\{u_t\}$ comporte-se *aproximadamente* como ruído branco.

- Ideia é que, se número de defasagens k varia como função lenta do tamanho amostral T , é possível capturar a correlação serial e ainda assim construir testes válidos com T grande.

SELECIONANDO DEFASAGENS

- Nos modelos:

$$\Delta Y_t = \gamma Y_{t-1} + \sum_{j=1}^k \kappa_j \Delta Y_{t-j} + u_t$$

$$\Delta Y_t = \alpha + \gamma Y_{t-1} + \sum_{j=1}^k \kappa_j \Delta Y_{t-j} + u_t$$

$$\Delta Y_t = \alpha + \beta \cdot t + \gamma Y_{t-1} + \sum_{j=1}^k \kappa_j \Delta Y_{t-j} + u_t$$

- Teste de raiz unitária continua sendo de $H_0 : \gamma = 0$ contra $H_1 : \gamma < 0$.
 - Distribuição assintótica das estatísticas de teste, sob as nulas correspondentes, continua sendo a mesma.
- Ng e Perron (2001) propõem método MAIC para selecionar k .
 - Ideia é encontrar k tal que uma aproximação

ALTERNATIVA DE PHILLIPS E PERRON (1988)

conteúdo...

PROCEDIMENTO SEQUENCIAL PARA TESTAR A PRESENÇA DE UMA TENDÊNCIA ESTOCÁSTICA

- Da equação (5) vimos três modelos diferentes em que podemos testar a presença de uma raiz unitária.
- A literatura sugere uma variedade de procedimentos **sequenciais** para testarmos se a série é $I(1)$, começando do modelo mais geral ao mais simples.
- Nos próximos *slides*, apresentamos uma versão desses procedimentos, baseada numa simplificação do procedimento descrito no Apêndice à Seção 4.4 de Enders (2014).

PROCEDIMENTO SEQUENCIAL I

1. Comece estimando o modelo mais geral:

$$\Delta Y_t = \alpha + \beta \cdot t + \gamma Y_{t-1} + \sum_{j=1}^k \kappa_j \Delta Y_{t-j} + u_t \quad (6)$$

Teste a nula de $H_0 : \gamma = 0$ contra a alternativa de que $H_1 : \gamma < 0$ usando a estatística \hat{t} e os valores críticos não normais para esse caso (*slide 29*, caso 4).

- 1.1 Se rejeitamos a hipótese nula, concluímos que a série **não** apresenta raiz unitária.
- 1.2 Se **não** rejeitamos a hipótese nula, fazemos o teste F da nula $(\beta, \gamma) = 0$, usando os valores críticos do slide 30 (Caso 4).
 - 1.2.1 Se **não** rejeitamos a hipótese nula do teste F, concluímos que o modelo não apresenta tendência linear. Nesse caso, vamos à etapa 2 (próximo *slide*).
 - 1.2.2 Se **rejeitamos** a hipótese nula do teste F, há evidências de tendência linear. Nesse caso, o teste \hat{t} da nula $H_0 : \gamma = 0$ contra a alternativa $H_1 : \gamma < 0$ pode ser feito usando a tabela da normal. Repita o teste com essa tabela. Se rejeitamos a nula, concluímos que a série **não** apresenta raiz unitária. Se não rejeitamos a nula, concluímos que a série **apresenta** raiz unitária.

PROCEDIMENTO SEQUENCIAL II

- 2 Se chegamos a essa etapa, não temos evidências de que haja uma tendência linear no modelo. Nesse caso, estimamos:

$$\Delta Y_t = \alpha + \gamma Y_{t-1} + \sum_{j=1}^k \kappa_j \Delta Y_{t-j} + u_t \quad (7)$$

Teste a nula de $H_0 : \gamma = 0$ contra a alternativa de que $H_1 : \gamma < 0$ usando a estatística \hat{t} e os valores críticos não normais para esse caso (*slide 29*, caso 2).

- 2.1 Se rejeitamos a hipótese nula, concluímos que a série **não** apresenta raiz unitária.
- 2.2 Se **não** rejeitamos a hipótese nula, fazemos o teste F da nula $(\alpha, \gamma) = 0$, usando os valores críticos do slide 30 (Caso 2).
- 2.2.1 Se **não** rejeitamos a hipótese nula do teste F, concluímos que o modelo não apresenta intercepto. Nesse caso, vamos à etapa 3 (*próximo slide*).
- 2.2.2 Se **rejeitamos** a hipótese nula do teste F, há evidências de intercepto no modelo. Nesse caso, o teste \hat{t} da nula $H_0 : \gamma = 0$ contra a alternativa $H_1 : \gamma < 0$ pode ser feito usando a tabela da normal. Repita o teste com essa tabela. Se rejeitamos a nula, concluímos que a série **não** apresenta raiz unitária. Se não rejeitamos a nula, concluímos que a série **apresenta** raiz unitária.

PROCEDIMENTO SEQUENCIAL III

- 3 Se chegamos a essa etapa, não temos evidências de que haja uma tendência linear no modelo nem um intercepto. Nesse caso, estimamos:

$$\Delta Y_t = \gamma Y_{t-1} + \sum_{j=1}^k \kappa_j \Delta Y_{t-j} + u_t \quad (8)$$

Teste a nula de $H_0 : \gamma = 0$ contra a alternativa de que $H_1 : \gamma < 0$ usando a estatística \hat{t} e os valores críticos não normais para esse caso (*slide 29*, caso 1). Se rejeitamos a hipótese nula, concluímos que a série **não** apresenta raiz unitária. Se não rejeitamos a nula, concluímos que a série **apresenta** raiz unitária.

ELLIOTT, ROTHENBERG E STOCK (1996)

conteúdo...

TESTANDO A PRESENÇA DE COMPONENTES DETERMINÍSTICOS

- A conclusão do teste anterior é uma afirmação: a série apresenta raiz unitária ou não.
- Se a série apresenta raiz unitária, vamos trabalhar como a série $Z_t = \Delta Y_t$.
- Se a série não apresenta unitária, trabalhamos com $Z_t = Y_t$.
- Podemos testar a presença de tendências determinísticas rodando:

$$Z_t = a + b \cdot t + \xi_t \quad (9)$$

e testando a nula de que $b = 0$ contra a alternativa de que $b \neq 0$ fazendo um teste t com valores críticos normais.

- Se não rejeitamos a nula, trabalhamos com Z_t .
- Se rejeitamos a nula, o ideal é trabalhar com os resíduos do modelo, $\hat{\xi}_t$.

ERROS PADRÃO HAC

- Se rodamos o modelo (22) no R e usamos a função `summary` para fazer inferência, os erros padrão apresentados supõem homocedasticidade e não autocorrelação de ξ_t .
- Nesse caso, seria interessante computar erros padrão robustos a violações de ambas as hipóteses.
 - A esse tipo de erro padrão damos o nome de HAC (*heteroskedasticity and autocorrelation consistent*).
- Podemos usar esses erros padrão robustos via função `vcovHAC` do pacote `sandwich`.

REFERÊNCIAS I



Dickey, David A. e Wayne A. Fuller (1979). “Distribution of the Estimators for Autoregressive Time Series With a Unit Root”. Em: *Journal of the American Statistical Association* 74.366, pp. 427–431. ISSN: 01621459. URL: <http://www.jstor.org/stable/2286348>.



— (1981). “Likelihood Ratio Statistics for Autoregressive Time Series with a Unit Root”. Em: *Econometrica* 49.4, pp. 1057–1072. ISSN: 00129682, 14680262. URL: <http://www.jstor.org/stable/1912517>.



Elliott, Graham, Thomas J. Rothenberg e James H. Stock (1996). “Efficient Tests for an Autoregressive Unit Root”. Em: *Econometrica* 64.4, pp. 813–836. ISSN: 00129682, 14680262. URL: <http://www.jstor.org/stable/2171846> (acesso em 13/03/2024).



Enders, Walter (out. de 2014). *Applied Econometric Time Series*. 4ª ed. Wiley Series in Probability and Statistics. Nashville, TN: John Wiley & Sons.

REFERÊNCIAS II



Ng, Serena e Pierre Perron (2001). “LAG Length Selection and the Construction of Unit Root Tests with Good Size and Power”. Em: *Econometrica* 69.6, pp. 1519–1554. DOI: <https://doi.org/10.1111/1468-0262.00256>. eprint: <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1111/1468-0262.00256>. URL: <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1111/1468-0262.00256>.



Phillips, Peter C. B. e Pierre Perron (1988). “Testing for a Unit Root in Time Series Regression”. Em: *Biometrika* 75.2, pp. 335–346. ISSN: 00063444. URL: <http://www.jstor.org/stable/2336182> (acesso em 13/03/2024).



Said, Said E. e David A. Dickey (1984). “Testing for Unit Roots in Autoregressive-Moving Average Models of Unknown Order”. Em: *Biometrika* 71.3, pp. 599–607. ISSN: 00063444. URL: <http://www.jstor.org/stable/2336570>.

REFERÊNCIAS III

,

DERIVAÇÃO DA DISTRIBUIÇÃO ASSINTÓTICA DE $\hat{\gamma}$ SOB A NULA $\gamma = 0$

- Considere o estimador de MQO $\hat{\gamma}$ de (2).
- Note que

$$\hat{\gamma} = \hat{\rho} - 1$$

onde $\hat{\rho}$ é estimador de MQO de ρ em (1).

- Das propriedades de MQO, sabemos que:

$$\hat{\gamma} - \gamma = \frac{\sum_{t=2}^T y_{t-1} \epsilon_t}{\sum_{t=2}^T y_{t-1}^2}$$

- Defina a função com domínio $[0, 1]$:

$$S_T(u) = \frac{\sum_{j=1}^k \epsilon_j}{T}, \quad \text{se } j-1 < uT \leq j.$$

- Função em escada.

TEOREMA DE DONSKER

CONTEÚDO...

conteúdo...

DERIVAÇÃO DA DISTRIBUIÇÃO ASSINTÓTICA

◀ Retornar à aula