EAE1223: Econometria III

Aula 8 - Modelos vetoriais autorregressivos estruturais

Luis A. F. Alvarez

19 de maio de 2024

Um modelo para a descrição de uma economia

- Seja $\{\boldsymbol{Y}_t\}_{t\in\mathbb{Z}}$ um processo vetorial de interesse, onde $\boldsymbol{Y}_t$ consiste de d variáveis econômicas, sobre as quais a teoria econômica têm algo a nos dizer sobre o comportamento conjunto.
- Um modelo estrutural (causal) linear para estas variáveis consiste em um sistema de d equações da forma:

$$\boldsymbol{A}_0 \boldsymbol{Y}_t = \boldsymbol{a} + \sum_{j=1}^{p} \boldsymbol{A}_j \boldsymbol{Y}_{t-j} + \boldsymbol{\epsilon}_t \,, \tag{1}$$

onde $\boldsymbol{A}_0$ é uma matriz $d \times d$ que explicita as relações contemporâneas (causais) entre as variáveis, e $\boldsymbol{\epsilon}_t$ é um ruído branco contemporaneamente não correlacionado, isto é

$$\mathbb{V}[\boldsymbol{\epsilon}_t] = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma_d^2 \end{bmatrix} = \Omega_\epsilon$$

Choques econômicos fundamentais

- A hipótese de que os erros de cada uma das equações são contemporaneamente não correlacionados supõe que o modelo que descreve a economia esteja bem especificado, de modo que o choque da j-ésima equação reflete a incerteza econômica fundamental associada a Y_{jt}.
  - ϵ_{jt} reflete choques (surpresas ou inovações, não antecipadas com base no passado) nos determinantes essenciais de Y_{jt}, e não nos determinantes indiretos (via outras variáveis do sistema) de Y_{jt}.
- Esse tipo de hipótese é presumida em uma das perguntas clássicas da macroeconomia: quanto da flutuação econômica pode ser atribuída à política monetária vs fatores reais?
  - Pergunta presume que existem inovações fundamentais, contemporaneamente ortogonais (não correlacionadas), em fatores monetários e reais, que permitem pensar nesta decomposição, visto que ela não faz sentido se os fatores fundamentais não fossem fundamentais (i.e. correlacionados).
  - Veremos como nossa metodologia permite fazer explicitamente esta decomposição.

Exemplo

- Considere o comportamento conjunto de inflação (π_t), desemprego (u_t), expectativas de inflação (π_t^e) e taxa de juros nominal (i_t):

$$\pi_t = \sum_{j=1}^{p} \theta_j \pi_{t-j} + \sum_{j=0}^{p} \beta_j (u_{t-j} - \bar{u}_{\text{neutro}}) + \sum_{j=0}^{p} \gamma_j \pi_{t-j}^e + \epsilon_{\pi,t} \quad \text{(CP)}$$

$$u_t - \bar{u} = \sum_{j=1}^{p} \omega_j (u_{t-j} - \bar{u}) + \sum_{j=0}^{p} \alpha_j (i_{t-j} - \pi_{t-j}^e) + \epsilon_{u,t} \quad \text{(IS)}$$

$$i_t = \bar{i} + \sum_{j=1}^{p} \psi_j i_{t-j} + \sum_{j=0}^{p} \kappa_j (\pi_{t-j} - \pi_{\mathrm{M}}) + \sum_{j=0}^{p} \phi_j (\pi_{t-j}^e - \pi_{\mathrm{M}}) + \epsilon_{i,t} \quad \text{(RM)}$$

$$\pi_t^e = \mu \pi_M + \sum_{j=1}^{p} \iota_j \pi_{t-j}^e + \theta_3 \sum_{j=0}^{p} (\nu_{1j} \pi_{t-j} + \nu_{2j} u_{t-j} + \nu_{3j} i_{t-j}) + \epsilon_{e,t} \quad \text{(FE)}$$

onde $\epsilon_{\pi,t}$ são choques de oferta (CP), $\epsilon_{u,t}$ choques de demanda (IS), $\epsilon_{i,t}$ são surpresas de política monetária (RM), e $\epsilon_{e,t}$ são ruídos na formação de expectativas.

Representação autorregressiva do modelo linear estrutural

- Se o sistema (1) oferece uma descrição completa da evolução de $\boldsymbol{Y}_t$, então, para uma dada trajetória pretérita $\{\boldsymbol{Y}_s : s \leq t-1\}$, e valores dos choques fundamentais $\boldsymbol{\epsilon}_t$, existe um único valor de $\boldsymbol{Y}_t$ que satisfaz (1).
- Nesse caso, a matriz $\boldsymbol{A}_0$ admite inversa $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}_0^{-1}$, e o sistema admite representação autorregressiva:

$$\boldsymbol{Y}_t = \underbrace{\boldsymbol{c}}_{=\boldsymbol{B}\boldsymbol{a}} + \sum_{j=1}^{p} \underbrace{\boldsymbol{C}_j}_{=\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}_j} \boldsymbol{Y}_{t-j} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{\epsilon}_t \,. \tag{2}$$

- Modelo VAR em que o ruído branco $\boldsymbol{B}\boldsymbol{\epsilon}_t$ é uma combinação linear de choques fundamentais.
- Matriz $\boldsymbol{B}$ incorpora o efeito contemporâneo de inovações fundamentais sobre as variáveis em $\boldsymbol{Y}_t$.

Modelo SVAR(p)

- Em diversas situações, não necessariamente queremos partir de (1) para chegar a (2)
  - Não necessariamente temos uma descrição completa da economia.
  - De modo relacionado, a formulação (2) pode ser compatível com mais de uma formulação estrutural linear completa.
- Nesses casos, podemos definir diretamente um modelo vetorial autorregressivo (semi)estrutural de ordem p, SVAR(p), como o processo

$$\boldsymbol{Y}_t = \boldsymbol{c} + \sum_{j=1}^{p} \boldsymbol{C}_j \boldsymbol{Y}_{t-j} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{\epsilon}_t \,, \tag{3}$$

onde $\boldsymbol{\epsilon}_t$ são inovações fundamentais, isto é ruídos brancos não contemporaneamente correlacionados, e $\boldsymbol{B}$ é a matriz que captura os efeitos contemporâneos das inovações fundamentais sobre $\boldsymbol{Y}_t$.

Função de resposta ao impulso

- Os efeitos causais dinâmicos, na modelagem SVAR, são capturados pelos efeitos de surpresas dos choques fundamentais sobre o comportamento do sistema.
  - Note que, por construção, $\boldsymbol{\epsilon}_t$ captura fatores não antecipados com base no passado.
  - Como $\boldsymbol{\epsilon}_t$ é não contemporaneamente correlacionado, faz sentido pensar em surpresas em um de seus componentes, mantidos os outros constantes.
- Formalmente, o efeito causal de uma surpresa de uma unidade na j-ésima variável do sistema em t, ϵ_{jt}, sobre a i-ésima variável do sistema em $t+h$, $h \geq 0$, é dada pela função de resposta ao impulso

$$F_h(i|j) = \frac{\partial Y_{i,t+h}}{\partial \epsilon_{j,t}}$$

- $F_0(i|j) = \boldsymbol{B}_{ij}$, $F_1(i|j) = \sum_{l=1}^{d} \boldsymbol{C}_{1,i,l}\boldsymbol{B}_{lj} = \sum_{l=1}^{d} \boldsymbol{C}_{1,i,l}F_0(l|j)$, $F_2(i|j) = \sum_{l=1}^{d} \boldsymbol{C}_{1,i,l}F_1(i|j) + \sum_{l=1}^{d} \boldsymbol{C}_{2,i,l}F_0(i|j)$, etc.

FRI normalizada, FRI acumulada

- Em diversos casos, é costumeiro normalizar a FRI pelo desvio padrão dos choques, isto é, reporta-se:

$$F_h(i|j)/\sigma_{j,t}\,.$$

  - Neste caso, os coeficientes são interpretáveis como o efeito causal de uma surpresa de um desvio padrão na j-ésima variável.
- Também podemos reportar a FRI acumulada:

$$\sum_{\tau=0}^{h} F_\tau(i|j)\,.$$

  - Se a i-ésima variável está em primeiras diferenças, a FRI acumulada reporta o efeito da surpresa sobre o nível da série em $t+h$.
  - Alternativamente, FRI acumulada pode ser interpretada como o efeito de uma sequência de surpresas (por construção, não antecipadas) de uma unidade em j por h períodos sobre o sistema.
    - Note que, pela crítica de Lucas, sabemos que isto é **diferente** do efeito de um aumento permanente de uma unidade sobre a j-ésima variável do sistema.

Decomposição da variância do erro de predição

- Com base no SVAR(p), somos capazes, analogamente ao VAR(p), de calcular previsões para $T+h$, com dados até T, $\boldsymbol{Y}_{T+h|T}$:

$$\boldsymbol{Y}_{T+1|T} = \boldsymbol{c} + \sum_{j=0}^{p-1} \boldsymbol{C}_{j+1} \boldsymbol{Y}_{T-j}$$

$$\boldsymbol{Y}_{T+2|T} = \boldsymbol{c} + \boldsymbol{C}_j \boldsymbol{Y}_{T+1|T} + \sum_{j=0}^{p-2} \boldsymbol{C}_{j+2} \boldsymbol{Y}_{T-j}$$

$$vdots$$

- O erro de previsão no horizonte h é dado por $\boldsymbol{Y}_{T+h} - \boldsymbol{Y}_{T+h|T}$.
- Dada a natureza estrutural dos choques, é possível mostrar que somos capazes de decompor aditivamente a variância do erro de previsão de cada variável na contribuição de cada choque:

$$\mathbb{V}[\boldsymbol{Y}_{i,T+h} - \boldsymbol{Y}_{i,T+h|T}] = \sum_{j=1}^{d} \text{contribuição do choque j}$$

Decomposição da variância do erro de predição (cont.)

- Decomposição da variância erro de predição nos permite dizer, para cada horizonte, quantos % da incerteza futura depende de cada uma das inovações estruturais.
- Fácil de ver que a decomposição não depende de t, mas tão somente do horizonte e variável de interesse,
- Se tomamos $h \to \infty$, temos uma decomposição da variância de longo prazo (incondicional) do sistema.
  - Por exemplo, podemos dizer quanto da variabilidade da atividade econômica se deve a choques monetários.

SVAR(p) e VAR(p)

- Note que um SVAR(p) da forma (3) sempre define um VAR(p).
- De fato, se definimimos $\boldsymbol{u}_t = \boldsymbol{B}\boldsymbol{\epsilon}_t$, podemos escrever:

$$\boldsymbol{Y}_t = \boldsymbol{c} + \sum_{j=1}^{p} \boldsymbol{C}_j \boldsymbol{Y}_{t-j} + \boldsymbol{u}_t \, , \tag{4}$$

onde $\boldsymbol{u}_t$ é um ruído branco contemporaneamente correlacionado, cuja matriz de variância é dada por $\mathbb{V}[\boldsymbol{u}_t] = \boldsymbol{B}\mathbb{V}[\boldsymbol{\epsilon}_t]\boldsymbol{B}' = \Sigma$.
  - VAR(p) em que ruído branco segue da combinação linear de choques estruturais.
  - Essas combinações lineares produzem um ruído branco contemporaneamente correlacionado, na medida em que choques fundamentais afetam simultaneamente mais de uma variável do sistema.
- A um VAR(p) derivado de um SVAR(p), daremos o nome de modelo vetorial em forma reduzida.

O problema de identificação causal no SVAR(p)

- Recorde-se que, sob condições bastantes gerais, podemos estimar consistentemente os parâmetros de um VAR(p).
  - Resultado vale para séries estacionárias, e mesmo para processos integrados (embora, nesse caso, a inferência com base em distribuições convencionais não seja válida).
- Como os parâmetros do VAR(p) são consistentemente estimáveis, segue que, com T grande, somos capazes de recuperar aproximadamente as inovações reduzidas $\{\boldsymbol{u}_t : 1 \leq t \leq T\}$.
  - Como essas inovações são recuperáveis com T grande, também somos capazes de estimar consistentemente $\Sigma = \mathbb{V}[\boldsymbol{u}_t]$.
- O problema de identificação causal no SVAR(p) consiste em prover condições a partir das quais sejamos capazes de recuperar os choques estruturais $\boldsymbol{\epsilon}_t$ a partir da observação de $\boldsymbol{u}_t$.
  - Ideia é encontrar condições que nos permitam descorrelacionar os choques reduzidos em termos das inovações fundamentais.

Identificação dos choques estruturais

- Para descorrelacionar $\boldsymbol{u}_t$, precisamos recuperar a matriz $\boldsymbol{B}$.
- Em geral, as análises estruturais preferem ser agnósticas sobre os componentes autorregressivos do processo $\implies$ coeficientes $\boldsymbol{C}_j$ não nos trazem informação sobre $\boldsymbol{B}_j$.
  - Componentes autorregressivos aparecem pois queremos ser relativamente agnósticos sobre a "propagação" de choques intertemporalmente (teoria dificilmente nos diz algo sobre isso), o que sugere não restringir sua relação com os $\boldsymbol{B}_j$.
- Nesses casos, única informação para descorrelacionar choques deve vir da própria distribuição dos $\boldsymbol{u}_t$.
- Em particular, se queremos ser também agnósticos sobre a distribuição dos choques estruturais ϵ_t, é possível mostrar que a única fonte de informações sobre $\boldsymbol{B}$ vêm da equação:

$$\mathbb{V}[\boldsymbol{u}_t] = \boldsymbol{B}\mathbb{V}[\epsilon_t]\boldsymbol{B}'$$

  onde somos capazes de recuperar o lado esquerdo, com T grande.
  - Problema de identificação passa a ser separar, a partir da observação de $\mathbb{V}[\boldsymbol{u}_t]$, a variância dos choques estruturais $\mathbb{V}[\epsilon_t]$ da matriz $\boldsymbol{B}$.

Restrições faltantes

- Precisamos recuperar os parâmetros das matrizes $\mathbb{V}[\epsilon_t]$ (d parâmetros) e $\boldsymbol{B}$ (d^2 parâmetros) de forma única a partir de $\mathbb{V}[\boldsymbol{u}_t]$.
- A observação (em amostras grandes) de $\mathbb{V}[\boldsymbol{u}_t]$ nos provê $d(d-1)/2 + d$ restrições.
    - Diagonal principal e região abaixo dela.
- Dessa forma, temos um sistema com $d(d-1)/2 + d$ equações e $d(d+1)$ incógnitas.
    - Precisamos de restrições adicionais para recuperar esses parâmetros de forma única.
- Uma normalização natural é supor que a diagonal principal de $\boldsymbol{B}$ é igual a 1.
    - Escala dos choques estruturais corresponde às variáveis observadas, de modo que choque de uma unidade em $\epsilon_{j,t}$ corresponde a aumento não antecipado de uma unidade em $\boldsymbol{Y}_{j,t}$.
- Nesse caso, temos um sistema com $d(d+1)/2$ equações e d^2 incógnitas.
    - Precisamos de $d(d-1)/2$ restrições sobre os parâmetros estruturais para identificar o sistema.