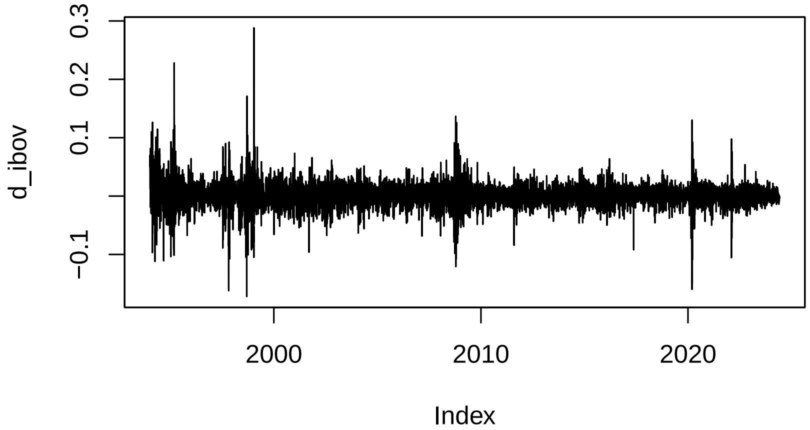
EAE1223: Econometria III

Aula 10 - Heteroscedasticidade condicional

Luis A. F. Alvarez

14 de junho de 2024

Log-retorno diário do Ibovespa



Clusters de volatilidade

- Observe que os retornos diários exibem *clusters* de volatilidade.
  - Períodos de baixa variabilidade contrastam com períodos em que retorno varia mais.

- O conceito probabilístico que captura este fenômeno é o de heteroscedasticidade condicional.

- Uma série de tempo $\{Y_t\}_{t\in\mathbb{Z}}$ exibe volatilidade condicional se a variância de Y_t, condicional à informação $\mathcal{F}_{t-1}$ disponível até $t-1$, varia no tempo.

- Isto é, definindo $\sigma_t^2 = \mathbb{V}[Y_t|\mathcal{F}_{t-1}]$, a série exibe heterocedasticidade condicional se σ_t^2 varia no tempo.
  - Se σ_t^2 é constante no tempo, temos homoscedasticidade condicional

Por que heteroscedasticidade condicional?

- Nas análises preditivas de nosso curso, focamos eminentemente em construir bom modelos para o valor esperado de Y_{t+h} dada a informação disponível até t.
  - Modelos univariados e multivariados para a média condicional de Y_t.

- Por que focar na variância condicional?
  1. Ganhos de eficiência: métodos de estimação derivados sob a hipótese de erros iid (o que exclui homoscedasticidade condicional) são ineficientes sob a presença de heteroscedasticidade condicional.
  2. Inferência: similarmente, métodos de inferência derivados sob a hipótese de erros iid são no geral inválidos sob a presença de intervalos de heteroscedasticidade condicional.
  3. Por fim, nosso interesse pode residir em estimar a volatilidade fora da amostra, condicional à informação disponível até hoje.
     - Importante na construção de carteiras de ativos e análises de risco.

Heteroscedasticidade condicional no ARMA(p,q)

- Considere um modelo ARMA(p,q) estacionário:

$$\Phi(L)Y_t = \Theta(L)\epsilon_t \,.$$

- Se os ruídos brancos $\{\epsilon_t\}_t$ são **iid**, então, $\mathbb{V}[Y_{t+1}|\mathcal{F}_t] = \mathbb{V}[\epsilon_{t+1}|\mathcal{F}_t] = \mathbb{V}[\epsilon_{t+1}] = \sigma_\epsilon^2$.
  - Modelo exibe homoscedasticidade condicional.
- Como incorporar heteroscedasticidade condicional?
- Para isso, vamos supor que:

$$\epsilon_t = \sigma_t \nu_t \,,$$

onde $\{\nu_t\}$ é iid com média zero e variância unitária e $\sigma_t = g(\mathcal{F}_{t-1})$ com $\mathbb{E}[\sigma_t^2] = \phi^2 < \infty$ para todo $t \in \mathbb{N}$.

Propriedades

- Usando as propriedades de esperança condicional, é possível mostrar que o erro com a estrutura anterior exibe as seguintes propriedades:
    1. $\mathbb{E}[\epsilon_t|\mathcal{F}_{t-1}] = 0$
    2. $\mathbb{V}[Y_t|\mathcal{F}_{t-1}] = \mathbb{V}[\epsilon_t|\mathcal{F}_{t-1}] = \mathbb{E}[\epsilon_t^2|\mathcal{F}_{t-1}] = \sigma_t^2$.
    3. $\{\epsilon_t\}_t$ é de fato um ruído branco, com variância dada por $\mathbb{V}[\epsilon_t] = \phi^2 < \infty$.
    4. $\text{cov}(\epsilon_t^2, \epsilon_{t-s}^2) = \mathbb{E}[\sigma_t^2 \sigma_{t-s}^2 v_{t-s}^2] - \phi^4$.

Detectando heteroscedasticidade condicional

- Com base num modelo ARMA(p,q) estimado, como detectar a presença de heterocedasticidade condicional?
- Note que, do último item anterior, caso haja homoscedasticidade condicional, i.e. $\sigma_t^2 = \sigma_{t-s}^2 = \phi^2$, $\forall s \neq 0$, então $\text{cov}(\epsilon_t^2, \epsilon_{t-s}^2) = 0$.
  - Se há heteroscedasticidade condicional, então, no geral $\text{cov}(\epsilon_t^2, \epsilon_{t-s}^2) \neq 0$.
- Isso sugere testar a hipótese nula de homoscedasticidade condicional aplicando-se um teste de Ljung-Box no quadrado dos resíduos do modelo ARMA(p,q).
- Um teste alternativo segue da observação de que, sob homocedasticidade, $\mathbb{E}[\epsilon_t^2 | \mathcal{F}_{t-1}]$ é constante e não depende de $\mathcal{F}_{t-1}$.
- Isso sugere usar os resíduos quadrados para ajustar um modelo linear:

$$\epsilon_t^2 = \psi_0 + \sum_{l=1}^{k} \psi_l \epsilon_{t-l}^2 + \xi_t$$

e testar a nula conjunta de que $\psi_1 = \psi_2 = \ldots = \psi_k = 0$ usando um teste F.

Modelo ARCH

- O modelo mais simples para heteroscedasticidade condicional é conhecido como ARCH(m). Este modelo impõe que:

$$\sigma_t^2 = \omega_0 + \sum_{l=1}^{m} \omega_l \epsilon_{t-l}^2 \,,$$

com $\omega_j \geq 0$, $j = 0, 1 \ldots, m$, e os parâmetros ω_j restritos de tal forma que a variância incondicional seja finita.

- Neste modelo, volatilidade de ϵ_t depende do que ocorreu com o quadrado de ϵ_t nos t últimos períodos.

Identificação da ordem do modelo ARCH

- Note que, como $\sigma_t^2 = \mathbb{E}[\epsilon_t^2 | \mathcal{F}_{t-1}]$, um modelo ARCH(m) consiste efetivamente num modelo AR(m) para o erro quadrado.
- Isso sugere usar os resíduos quadrados do modelo ARMA estimado para detectar a ordem *m* do ARCH.
  - Encontramos *m* olhando para a ordem de truncagem da FACP dos resíduos quadrados.

Estimação

- Dado que o modelo ARCH(m) é um modelo AR(m) para os erros quadrados do modelo ARMA(p,q), uma maneira simples de estimar os parâmetros da heteroscedasticidade condicional consiste em estimar um AR(m) usando os resíduos quadrados do ARMA(p,q) estimado como observações.
- No entanto, este método de estimação é no geral ineficiente, visto que não havíamos levado em conta a heteroscedasticidade na estimação do ARMA(p,q) preliminar.
- Um estimador mais eficiente consiste em estimar os parâmetros do ARMA(p,q) e do ARCH(m) conjuntamente, sob uma hipótese sobre os erros ν_t.
- Se considerarmos o estimador de máxima verossimilhança, sob a hipótese auxiliar de $\nu_t \overset{iid}{\sim} N(0,1)$, temos o estimador de um modelo ARMA-ARCH com inovações Gaussianas.
  - Esse estimador é eficiente se ν_t de fato for Gaussiano, e é consistente mesmo que o erro não seja Gaussiano (pseudo-máxima verossimilhança).

Caudas pesadas

- Embora estimador de máxima verossimilhança derivado sob hipótese de normalidade das inovações seja consistente mesmo que Gaussianidade seja violada, perda de eficiência pode ser grande.
- Além disso, para análises de risco, é importante modelar corretamente a distribuição do erro, pois o cálculo da probabilidade de eventos extremos, $\mathbb{P}[Y_{t+h} > c|\mathcal{F}_{t-1}]$, depende da distribuição de ϵ.
- Nesses casos, a literatura considerou estimadores de MLE sob distribuições alternativas, que acomodam a existência de caudas pesadas nos retornos.
  - Um dos mais populares consiste em tomar $\nu_t \overset{iid}{\sim} t_k$, e estimar os graus de liberdade k conjuntamente aos demais parâmetros.
    - Quando $k \to \infty$, temos a normal. Para valores finitos, t-de Student apresenta caudas mais pesadas que a normal.
- Esses estimadores são eficientes se distribuição do erro estiver correta.
  - No entanto, e em contraste com o MLE Gaussiano, o estimador dos parâmetros é no geral inconsistente se errarmos a distribuição do erro (não há robustez a má-especificação).

Modelo GARCH

- A modelagem ARCH pode levar a escolhas de valores altos para m.
    - Muitos parâmetros a se estimar, o que introduz o risco de sobreajuste.
- Nesses casos, modelos mais parcimoniosos podem ser encontrados se considerarmos um modelo GARCH(m,s):

$$\sigma_t^2 = \omega_0 + \sum_{l=1}^{m} \psi_l \epsilon_{t-l}^2 + \sum_{l=1}^{s} \tau_l \sigma_{t-l}^2 \,.$$

onde os parâmetros são não negativos e de tal forma que a variância incondicional não exploda.

- Ideia é incorporar dependência direta da heteroscedasticidade em seu valor pretérito, como forma de reduzir a necessidade de um m alto.
- Na literatura, geralmente se consideram ordens pequenas para m,s (geralmente 1 ou 2)
    - Isso se deve à dificuldade computacional de se obter os estimadores de MLE para esse modelo.
    - Não há método claro na literatura sobre como determinar m ou s, para além do uso de critérios de informação no ranqueamento dos modelos.

Validação

- Estimado um modelo (G)ARCH, obtemos estimativas da variância condicional, $\hat{\sigma}_t^2$, e do ruído branco, $\hat{\epsilon}_t$, na nossa amostra.
- Com base nessas estimativas, podemos calcular o resíduo estandardizado:

$$\hat{v}_t = \frac{\hat{\epsilon}_t}{\hat{\sigma}_t}$$

- Com base nesse resíduo, podemos diagnosticar o modelo.
- Em particular, para um bom modelo, esperamos que $\hat{\nu}_t$ e $\hat{\nu}_t^2$ não exibam persistência, e que a distribuição de $\hat{\nu}_t$ esteja próxima daquela utilizada no MLE.
    - Podemos verificar este último ponto usando gráficos quantil-quantil, comparando os quantis empíricos de $\hat{\nu}_t$ com os da distribuição de referência.

Outras alternativas

Existe uma literatura enorme em Econometria Financeira, estendendo a modelagem GARCH.

- Modelos que acomodam assimetria no efeito dos choques ϵ_t sobre a volatilidade (EGARCH, TGARCH, etc.); que incorporam estocasticidade na evolução de σ_t^2 (modelos de volatilidade estocástica); ou que incorporam o modelo da variância condicional diretamente no modelo para a média, capturando a relação risco-retorno nos ativos (M-GARCH).

- Também existe uma literatura que visa a construir procedimentos robustos na determinação de distribuições alternativas à normal, de modo a restaurar a propriedade de consistência do MLE Gaussiano sob má-especificação.

- Por fim, notamos que os modelos GARCH são extensíveis, também, à modelagem vetorial.