

EAE1223: ECONOMETRIA III

AULA 8 - MODELOS VETORIAIS AUTORREGRESSIVOS ESTRUTURAIS

Luis A. F. Alvarez

3 de junho de 2024

UM MODELO PARA A DESCRIÇÃO DE UMA ECONOMIA

- Seja $\{\mathbf{Y}_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ um processo vetorial de interesse, onde \mathbf{Y}_t consiste de d variáveis econômicas, sobre as quais a teoria econômica têm algo a nos dizer sobre o comportamento conjunto.
- Um **modelo estrutural (causal) linear** para estas variáveis consiste em um sistema de d equações da forma:

$$\mathbf{A}_0 \mathbf{Y}_t = \mathbf{a} + \sum_{j=1}^p \mathbf{A}_j \mathbf{Y}_{t-j} + \epsilon_t, \quad (1)$$

onde \mathbf{A}_0 é uma matriz $d \times d$ que explicita as relações contemporâneas (causais) entre as variáveis, e ϵ_t é um ruído branco **contemporaneamente não correlacionado**, isto é

$$\mathbb{V}[\epsilon_t] = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma_d^2 \end{bmatrix} = \Omega_\epsilon$$

CHOQUES ECONÔMICOS FUNDAMENTAIS

- A hipótese de que os erros de cada uma das equações são contemporaneamente não correlacionados supõe que o modelo que descreve a economia esteja **bem especificado**, de modo que o choque da j -ésima equação reflete a incerteza econômica fundamental associada a Y_{jt} .
 - ϵ_{jt} reflete choques (surpresas ou inovações, não antecipadas com base no passado) nos determinantes essenciais de Y_{jt} , e não nos determinantes indiretos (via outras variáveis do sistema) de Y_{jt} .
- Esse tipo de hipótese é presumida em uma das perguntas clássicas da macroeconomia: quanto da flutuação econômica pode ser atribuída à política monetária vs fatores reais?
 - Pergunta presume que existem inovações fundamentais, contemporaneamente ortogonais (não correlacionadas), em fatores monetários e reais, que permitem pensar nesta decomposição, visto que ela não faz sentido se os fatores fundamentais não fossem fundamentais (i.e. correlacionados).
 - Veremos como nossa metodologia permite fazer explicitamente esta decomposição.

EXEMPLO

- Considere o comportamento conjunto de inflação (π_t), desemprego (u_t), expectativas de inflação (π_t^e) e taxa de juros nominal (i_t):

$$\pi_t = \sum_{j=1}^p \theta_j \pi_{t-j} + \sum_{j=0}^p \beta_j (u_{t-j} - \bar{u}_{\text{neutro}}) + \sum_{j=0}^p \gamma_j \pi_{t-j}^e + \epsilon_{\pi,t} \quad (\text{CP})$$

$$u_t - \bar{u} = \sum_{j=1}^p \omega_j (u_{t-j} - \bar{u}) + \sum_{j=0}^p \alpha_j (i_{t-j} - \pi_{t-j}^e) + \epsilon_{u,t} \quad (\text{IS})$$

$$i_t = \bar{i} + \sum_{j=1}^p \psi_j i_{t-j} + \sum_{j=0}^p \kappa_j (\pi_{t-j} - \pi_M) + \sum_{j=0}^p \phi_j (\pi_{t-j}^e - \pi_M) + \epsilon_{i,t} \quad (\text{RM})$$

$$\pi_t^e = \mu \pi_M + \sum_{j=1}^p \iota_j \pi_{t-j}^e + \theta_3 \sum_{j=0}^p (\nu_{1j} \pi_{t-j} + \nu_{2j} u_{t-j} + \nu_{3j} i_{t-j}) + \epsilon_{e,t} \quad (\text{FE})$$

onde $\epsilon_{\pi,t}$ são choques de oferta (CP), $\epsilon_{u,t}$ choques de demanda (IS), $\epsilon_{i,t}$ são surpresas de política monetária (RM), e $\epsilon_{e,t}$ são ruídos na formação de expectativas.

REPRESENTAÇÃO AUTORREGRESSIVA DO MODELO LINEAR ESTRUTURAL

- Se o sistema (1) oferece uma descrição **completa** da evolução de \mathbf{Y}_t , então, para uma dada trajetória pretérita $\{\mathbf{Y}_s : s \leq t - 1\}$, e valores dos choques fundamentais ϵ_t , existe um único valor de \mathbf{Y}_t que satisfaz (1).
- Nesse caso, a matriz \mathbf{A}_0 admite inversa $\mathbf{B} = \mathbf{A}_0^{-1}$, e o sistema admite **representação autorregressiva**:

$$\mathbf{Y}_t = \underbrace{\mathbf{c}}_{=\mathbf{B}\mathbf{a}} + \sum_{j=1}^p \underbrace{\mathbf{C}_j}_{=\mathbf{B}\mathbf{A}_j} \mathbf{Y}_{t-j} + \mathbf{B}\epsilon_t. \quad (2)$$

- Modelo VAR em que o ruído branco $\mathbf{B}\epsilon_t$ é uma combinação linear de choques fundamentais.
- Matriz \mathbf{B} incorpora o efeito contemporâneo de inovações fundamentais sobre as variáveis em \mathbf{Y}_t .

MODELO SVAR(p)

- Em diversas situações, não necessariamente queremos partir de (1) para chegar a (2)
 - Não necessariamente temos uma descrição completa da economia.
 - De modo relacionado, a formulação (2) pode ser compatível com mais de uma formulação estrutural linear completa.
- Nesses casos, podemos definir diretamente um modelo vetorial autorregressivo (semi)estrutural de ordem p , SVAR(p), como o processo

$$\mathbf{Y}_t = \mathbf{c} + \sum_{j=1}^p \mathbf{C}_j \mathbf{Y}_{t-j} + \mathbf{B}\epsilon_t, \quad (3)$$

onde ϵ_t são inovações fundamentais, isto é ruídos brancos não contemporaneamente correlacionados, e \mathbf{B} é a matriz que captura os efeitos contemporâneos das inovações fundamentais sobre \mathbf{Y}_t .

FUNÇÃO DE RESPOSTA AO IMPULSO

- Os efeitos causais dinâmicos, na modelagem SVAR, são capturados pelos efeitos de surpresas dos choques fundamentais sobre o comportamento do sistema.
 - Note que, por construção, ϵ_t captura fatores não antecipados com base no passado.
 - Como ϵ_t é não contemporaneamente correlacionado, faz sentido pensar em surpresas em um de seus componentes, mantidos os outros constantes.
- Formalmente, o efeito causal de uma surpresa de uma unidade na j -ésima inovação do sistema em t , ϵ_{jt} , sobre a i -ésima variável do sistema em $t + h$, $h \geq 0$, é dada pela **função de resposta ao impulso**

$$F_h(i|j) = \frac{\partial Y_{i,t+h}}{\partial \epsilon_{j,t}}$$

- $F_0(i|j) = \mathbf{B}_{ij}$, $F_1(i|j) = \sum_{l=1}^d \mathbf{C}_{1,i,l} \mathbf{B}_{lj} = \sum_{l=1}^d \mathbf{C}_{1,i,l} F_0(l|j)$,
 $F_2(i|j) = \sum_{l=1}^d \mathbf{C}_{1,i,l} F_1(l|j) + \sum_{l=1}^d \mathbf{C}_{2,i,l} F_0(l|j)$, etc.

FRI NORMALIZADA, FRI ACUMULADA

- Em diversos casos, é costumeiro normalizar a FRI pelo desvio padrão dos choques, isto é, reporta-se:

$$F_h(i|j) \times \sigma_{j,t}.$$

- Neste caso, os coeficientes são interpretáveis como o efeito causal de uma surpresa de um desvio padrão na j -ésima inovação.
- Também podemos reportar a FRI acumulada:

$$\sum_{\tau=0}^h F_{\tau}(i|j).$$

- Se a i -ésima variável está em primeiras diferenças, a FRI acumulada reporta o efeito da surpresa sobre o nível da série em $t + h$.
- Alternativamente, FRI acumulada pode ser interpretada como o efeito de uma sequência de surpresas (por construção, não antecipadas) de uma unidade na j -ésima variável do sistema por h períodos.
 - Note que, pela crítica de Lucas, sabemos que isto é **diferente** do efeito de um aumento permanente de uma unidade sobre a j -ésima variável do sistema.

DECOMPOSIÇÃO DA VARIÂNCIA DO ERRO DE PREDIÇÃO

- Com base no SVAR(p), somos capazes, analogamente ao VAR(p), de calcular previsões para $T + h$, com dados até T , $\mathbf{Y}_{T+h|T}$:

$$\mathbf{Y}_{T+1|T} = \mathbf{c} + \sum_{j=0}^{p-1} \mathbf{C}_{j+1} \mathbf{Y}_{T-j}$$

$$\mathbf{Y}_{T+2|T} = \mathbf{c} + \mathbf{C}_j \mathbf{Y}_{T+1|T} + \sum_{j=0}^{p-2} \mathbf{C}_{j+2} \mathbf{Y}_{T-j}$$

\vdots

- O erro de previsão no horizonte h é dado por $\mathbf{Y}_{T+h} - \mathbf{Y}_{T+h|T}$.
- Dada a natureza estrutural dos choques, é possível mostrar que somos capazes de decompor aditivamente a **variância do erro de previsão de cada variável** na contribuição de cada choque:

$$\mathbb{V}[\mathbf{Y}_{i,T+h} - \mathbf{Y}_{i,T+h|T}] = \sum_{j=1}^d \text{contribuição do choque } j$$

DECOMPOSIÇÃO DA VARIÂNCIA DO ERRO DE PREDIÇÃO (CONT.)

- Decomposição da variância do erro de predição nos permite dizer, para cada horizonte, quantos % da incerteza futura depende de cada uma das inovações estruturais.
- Fácil de ver que a decomposição não depende de t , mas tão somente do horizonte e variável de interesse,
- Se tomamos $h \rightarrow \infty$, temos uma decomposição da variância de longo prazo (incondicional) do sistema.
 - Por exemplo, podemos dizer quanto da variabilidade da atividade econômica se deve a choques monetários.

SVAR(p) E VAR(p)

- Note que um SVAR(p) da forma (3) sempre define um VAR(p).
- De fato, se definirmos $\mathbf{u}_t = \mathbf{B}\epsilon_t$, podemos escrever:

$$\mathbf{Y}_t = \mathbf{c} + \sum_{j=1}^p \mathbf{C}_j \mathbf{Y}_{t-j} + \mathbf{u}_t, \quad (4)$$

onde \mathbf{u}_t é um ruído branco contemporaneamente correlacionado, cuja matriz de variância é dada por $\mathbb{V}[\mathbf{u}_t] = \mathbf{B}\mathbb{V}[\epsilon_t]\mathbf{B}' = \Sigma$.

- VAR(p) em que ruído branco segue da combinação linear de choques estruturais.
- Essas combinações lineares produzem um ruído branco contemporaneamente correlacionado, na medida em que choques fundamentais afetam simultaneamente mais de uma variável do sistema.
- A um VAR(p) derivado de um SVAR(p), daremos o nome de modelo vetorial em forma reduzida.

O PROBLEMA DE IDENTIFICAÇÃO CAUSAL NO SVAR(p)

- Recorde-se que, sob condições bastantes gerais, podemos estimar consistentemente os parâmetros de um VAR(p).
 - Resultado vale para séries estacionárias, e mesmo para processos integrados (embora, nesse caso, a inferência com base em distribuições convencionais não seja válida).
- Como os parâmetros do VAR(p) são consistentemente estimáveis, segue que, com T grande, somos capazes de recuperar aproximadamente as **inovações reduzidas** $\{\mathbf{u}_t : 1 \leq t \leq T\}$.
 - Como essas inovações são recuperáveis com T grande, também somos capazes de estimar consistentemente $\Sigma = \mathbb{V}[\mathbf{u}_t]$.
- O **problema de identificação causal no SVAR(p)** consiste em prover condições a partir das quais sejamos capazes de **recuperar os choques estruturais ϵ_t a partir da observação de \mathbf{u}_t** .
 - Ideia é encontrar condições que nos permitam descorrelacionar os choques reduzidos em termos das inovações fundamentais.

IDENTIFICAÇÃO DOS CHOQUES ESTRUTURAIS

- Para descorrelacionar \mathbf{u}_t , precisamos recuperar a matriz \mathbf{B} .
- Em geral, as análises estruturais preferem ser agnósticas sobre os componentes autorregressivos do processo \implies coeficientes \mathbf{C}_j não nos trazem informação sobre \mathbf{B} .
 - Componentes autorregressivos aparecem pois queremos ser relativamente agnósticos sobre a “propagação” de choques intertemporalmente (teoria dificilmente nos diz algo sobre isso), o que sugere não restringir sua relação com os \mathbf{B} .
- Nesses casos, única informação para descorrelacionar choques deve vir da própria distribuição dos \mathbf{u}_t .
- Em particular, se queremos ser também agnósticos sobre a distribuição dos choques estruturais ϵ_t , é possível mostrar que a única fonte de informações sobre \mathbf{B} vem da equação:

$$\mathbb{V}[\mathbf{u}_t] = \mathbf{B}\mathbb{V}[\epsilon_t]\mathbf{B}'$$

onde somos capazes de recuperar o lado esquerdo, com T grande.

- Problema de identificação passa a ser separar, a partir da observação de $\mathbb{V}[\mathbf{u}_t]$, a variância dos choques estruturais $\mathbb{V}[\epsilon_t]$ da matriz \mathbf{B} .

RESTRIÇÕES FALTANTES

- Precisamos recuperar os parâmetros das matrizes $\mathbb{V}[\epsilon_t]$ (d parâmetros) e \mathbf{B} (d^2 parâmetros) de **forma única** a partir de $\mathbb{V}[\mathbf{u}_t]$.
- A observação (em amostras grandes) de $\mathbb{V}[\mathbf{u}_t]$ nos provê $d(d-1)/2 + d$ restrições.
 - Diagonal principal e região abaixo dela.
- Dessa forma, temos um sistema com $d(d-1)/2 + d$ equações e $d(d+1)$ incógnitas.
 - Precisamos de restrições adicionais para recuperar esses parâmetros de forma única.
- Uma normalização natural é supor que a diagonal principal de \mathbf{B} é igual a 1.
 - **Escala dos choques estruturais corresponde às variáveis observadas**, de modo que choque de uma unidade em $\epsilon_{j,t}$ corresponde a aumento não antecipado de uma unidade em $\mathbf{Y}_{j,t}$.
- Nesse caso, temos um sistema com $d(d+1)/2$ equações e d^2 incógnitas.
 - Precisamos de $d(d-1)/2$ restrições sobre os parâmetros estruturais para identificar o sistema.

SVAR(p) JUSTAMENTE IDENTIFICADO

- O problema de identificação do SVAR(p) pode ser visto como o problema de encontrar restrições suficientes para que seja possível definir uma função f tal que:

$$(\mathbf{B}, \mathbb{V}[\epsilon_t]) = f(\mathbb{V}[\mathbf{u}_t])$$

- Dadas restrições suficientes sobre o modelo, existe um único jeito (resumido na função f) de encontrar $(\mathbf{B}, \mathbb{V}[\epsilon_t])$ compatíveis com $\mathbb{V}[\mathbf{u}_t]$.
- Se colocamos exatamente $d(d-1)/2$ restrições sobre o sistema, estamos no caso **justamente identificado**.
 - Neste caso, as hipóteses de identificação não geram restrições testáveis sobre o sistema, e é possível mostrar que o estimador mais eficiente dos parâmetros estruturais é dado por:

$$(\widehat{\mathbf{B}}, \widehat{\mathbb{V}[\epsilon_t]}) = f(\widehat{\mathbb{V}[\mathbf{u}_t]}),$$

onde $\widehat{\mathbb{V}[\mathbf{u}_t]}$ é o estimador da matriz de covariância do ruído branco de um VAR(p) reduzido, estimado via máxima verossimilhança condicional (onde a verossimilhança é derivada sob a hipótese auxiliar de inovações Gaussianas).

SVAR(p) SOBREIDENTIFICADO

- Se colocamos mais de $d(d-1)/2$ restrições sobre o sistema, estamos no caso **sobreidentificado**.
- Neste caso, o estimador mais eficiente consiste na máxima verossimilhança condicional (derivada sob a hipótese auxiliar de inovações Gaussianas), que impõe as restrições sobre a matriz de covariância das inovações $\mathbf{B}\mathbb{V}[\epsilon_t]\mathbf{B}'$ diretamente na maximização.
 - Neste caso, também é possível testar as restrições de identificação através da estatística LR:

$$LR = 2(\hat{L}_{VAR} - \hat{L}_{SVAR})$$

onde \hat{L}_{VAR} é a log-verossimilhança do VAR(p) reduzido e \hat{L}_{SVAR} a log-verossimilhança do SVAR(p) estimado.

- Sob estacionariedade e a hipótese nula de correta especificação, estatística segue χ^2 com **n^o restrições** - $d(d-1)/2$ graus de liberdade. Rejeita-se a nula de correta especificação para valores altos da estatística de teste.
- **Observação:** para escolhermos a ordem p , a não ser que a teoria econômica nos traga alguma informação, fazemos os procedimentos discutidos em aulas passada **num VAR reduzido preliminar**.

DIFICULDADES DA ESTIMAÇÃO CONVENCIONAL DO SVAR(P)

- Em diversas situações, as restrições identificadoras sobre os parâmetros estruturais tomam forma bastante complicada.
 - Nesses casos, pode ser bastante difícil de impor as restrições na estimação dos parâmetros.
- Além disso, nesses casos em que a forma das restrições é bastante complicada, é difícil saber se as restrições são suficientes para garantir a identificação completa dos parâmetros estruturais.
 - Restrições podem **auxiliar na identificação**, no sentido de que o conjunto de parâmetros estruturais $(\mathbf{B}, \mathbb{V}[\epsilon_t])$ compatíveis com a forma reduzida $\mathbb{V}[\mathbf{u}_t]$ é diminuído sob as restrições, mas ainda pode haver mais de um par de parâmetros estruturais compatíveis com $\mathbb{V}[\mathbf{u}_t]$.
 - Nesse caso, a inferência usual (estatísticas t e F) **sobre os parâmetros** deixa de ser válidas.
 - Teste LR derivado anteriormente ainda é válido.
- Nessa situação, a literatura costuma abandonar a estimação vista anteriormente e passa a adotar **procedimentos Bayesianos**.

ESTIMAÇÃO BAYESIANA DO SVAR(P)

- Heuristicamente, abordagem Bayesiana consiste em adotar uma distribuição *a priori* \mathbf{p} sobre os parâmetros estruturais $(\mathbf{c}, (\mathbf{C}_j)_{j=1}^P, \mathbb{V}[\epsilon_t], \mathbf{B})$.
 - Essa distribuição reflete o conjunto de valores plausíveis para os parâmetros estruturais (restrições), além de nossa incerteza teórica sobre eles.
 - Se quisermos ser agnósticos sobre os parâmetros, adotamos distribuições a priori “uniformes” no conjunto de valores restritos.
- Usando a regra de Bayes, podemos calcular *a distribuição a posteriori*:

$$\mathbf{p}((\mathbf{c}, (\mathbf{C}_j)_{j=1}^P, \mathbb{V}[\epsilon_t], \mathbf{B}) | \{\mathbf{y}_t\}_{t=1}^T) \propto \mathbf{p}(\{\mathbf{y}_t\}_{t=1}^T | (\mathbf{c}, (\mathbf{C}_j)_{j=1}^P, \mathbb{V}[\epsilon_t], \mathbf{B})) \times \mathbf{p}((\mathbf{C}_j)_{j=1}^P, \mathbb{V}[\epsilon_t], \mathbf{B}))$$

onde $\mathbf{p}(\{\mathbf{y}_t\}_{t=1}^T | (\mathbf{c}, (\mathbf{C}_j)_{j=1}^P, \mathbb{V}[\epsilon_t], \mathbf{B}))$ é a verossimilhança do modelo.

- Estimativas pontuais podem ser calculadas usando a *mediana* da distribuição *a posteriori*, e incerteza a partir de seus quantis.
- Não vamos entrar em mais detalhes sobre essa abordagem, embora enfatizaremos casos em que esses métodos são usados.

ESTRATÉGIAS DE IDENTIFICAÇÃO DO SVAR(p)

- No que segue, discutiremos as principais abordagens para se identificar um SVAR(p).
 1. Restrições de curto prazo.
 2. Restrições de longo prazo.
 3. Restrições de sinal.
 4. Restrições narrativas.
 5. Identificação por instrumentos externos.
 6. Identificação por heterocedasticidade.

Restrições de curto prazo

IDENTIFICAÇÃO RECURSIVA

- Suponha que sejamos capazes de ordenar as variáveis \mathbf{Y}_t do VAR estrutural da seguinte maneira:
 - Choques na i -ésima variável do sistema só exercem efeito contemporâneo sobre as variáveis $i, i + 1, \dots, d$ do sistema
 - Posto de outra, forma choques contemporâneos na i -ésima variável não afetam contemporaneamente as variáveis anteriores a i na ordenação.
- Neste caso, a matriz \mathbf{B} acaba tomando a forma:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ b_{2,1} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ b_{3,1} & b_{3,2} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & 0 \\ b_{d,1} & b_{d,2} & b_{d,3} & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

- Impomos exatamente $d(d - 1)/2$ restrições em $\mathbf{B} \implies$ é possível separar $\mathbb{V}[\epsilon_t]$ de \mathbf{B} .
 - Estimação ocorre calculando-se $\widehat{\mathbb{V}[\mathbf{u}_t]}$ no VAR reduzido e aplicando nessa matriz a **decomposição matemática de Choleski**, que nos dá um algoritmo eficiente para recuperar a matriz \mathbf{B} de $\widehat{\mathbb{V}[\mathbf{u}_t]}$.

IDENTIFICAÇÃO RECURSIVA

- Se queremos a resposta de todos os choques sobre todas as variáveis, devemos acertar corretamente a ordenação inteira em \mathbf{Y}_t .
- Por outro lado, se nosso objetivo é tão somente calcular as FRI do choque na variável i do sistema sobre as demais, devemos somente acertar quem vem antes e quem vem depois de i no sistema.
 - Ordem **dentro** do bloco anterior (posterior) a i não afeta FRI ao choque i .
- **Exemplo:** Christiano, Eichenbaum e Evans (2005) estudam se modelos novo-Keynesianos de equilíbrio geral são capazes de reproduzir a resposta a choques de política monetária obtidas por VAR estrutural.
- Para isso, eles estimam o seguinte VAR estrutural para os Estados Unidos, com dados trimestrais de 1965T3 a 1995T3:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Y}_{1t} \\ \text{Juros}_t \\ \mathbf{Y}_{2t} \end{bmatrix} = \sum_{j=1}^4 \mathbf{C}_j \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_{1t-j} \\ \text{Juros}_{t-j} \\ \mathbf{Y}_{2t-j} \end{bmatrix} + \mathbf{B}\epsilon_t$$

EXEMPLO (CONT.)

- No artigo, autores tomam \mathbf{Y}_{1t} como PIB real, consumo real, deflator do PIB, investimento real, salário real e produtividade do trabalho. Por outro lado \mathbf{Y}_{2t} inclui lucros reais e base monetária M2.

The ordering of the variables in \mathbf{Y}_t embodies two key identifying assumptions. First, the variables in \mathbf{Y}_{1t} do not respond contemporaneously to a monetary policy shock. Second, the time t information set of the monetary authority consists of current and lagged values of the variables in \mathbf{Y}_{1t} and only past values of the variables in \mathbf{Y}_{2t} . Our decision to include all variables except for the growth rate of M2 and real profits in \mathbf{Y}_{1t} reflects a long-standing view that many macroeconomic variables do not respond instantaneously to policy shocks (see Friedman 1968).

(Christiano, Eichenbaum e Evans)

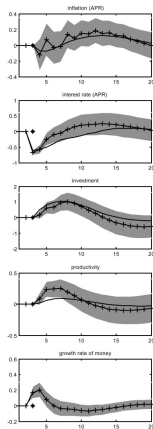


FIG. 1.—Model- and VAR-based impulse responses. Solid lines are benchmark model impulse responses; solid lines with plus signs are VAR-based impulse responses. Grey areas are 95 percent confidence intervals about VAR-based estimates. Units on the horizontal axis are quarters. An asterisk indicates the period of policy shock. The vertical axis units are deviations from the unshocked path. Inflation, money growth, and the interest rate are given in annualized percentage points (APR); other variables are given in percentages.

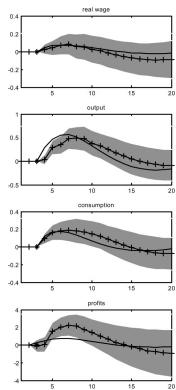


FIG. 1.—*Continued*

Restrições de longo prazo

RESTRIÇÕES NA FRI

- As restrições impostas na seção anterior restringem a resposta **contemporânea** das variáveis aos choques fundamentais.
- Denotando por \mathbf{F}_h a matriz $d \times d$ cuja entrada (i, j) corresponde à resposta da variável i em $t + h$ a um choque em j no período t , temos que as restrições de curto prazo focam no comportamento de \mathbf{F}_0 .
- Em diversos casos, no entanto, restrições em \mathbf{F}_0 são difíceis de serem justificadas com base na teoria econômica.
- Uma alternativa é **considerar restrições na resposta de longo prazo das variáveis aos choques**.

RESTRIÇÕES DE LONGO PRAZO

- Note que, num SVAR(p) estacionário, inovações em t têm por construção efeito nulo no longo prazo sobre o sistema.
 - Do contrário, processo apresentaria raiz unitária.
- Isso significa que $\lim_{h \rightarrow \infty} \mathbf{F}_h = \mathbf{0}$, qualquer que seja o valor de \mathbf{B}
 \implies não há restrições para se explorar no comportamento de longo prazo de \mathbf{F}_h que auxiliem na identificação.
- Note, no entanto, que, se o SVAR(p) contém uma ou mais variáveis em primeira diferença, faz sentido olhar para a FRI acumulada, que captura o efeito de choques sobre o nível das séries diferenciadas.
- FRI acumulada é dada por:

$$\mathbf{G}_h = \sum_{\tau=0}^h \mathbf{F}_\tau$$

- Possível mostrar que, num SVAR(p) estacionário, FRI acumulada de longo prazo é dada por:

$$\mathbf{G}_\infty = \lim_{h \rightarrow \infty} \mathbf{G}_h = (\mathbb{I} - \mathbf{C}_1 - \mathbf{C}_2 \dots - \mathbf{C}_p)^{-1} \mathbf{B}$$

IDENTIFICAÇÃO LONGO PRAZO

- Note que, da expressão de \mathbf{G}_∞ , se impusermos $d(d-1)/2$ restrições sobre \mathbf{G}_∞ , obtemos indiretamente $d(d-1)/2$ restrições sobre \mathbf{B} .
 - Ideia da identificação de longo prazo é gerar restrições sobre \mathbf{B} indiretamente via \mathbf{G}_∞ que sejam mais palatáveis economicamente.
- **Exemplo:** Blanchard e Quah (1989) consideram o seguinte SVAR(p) *trend-stationary* para a economia americana, de 1950-T2 a 1987-T4:

$$\begin{bmatrix} \Delta \log(\text{PIB})_t \\ u_t \end{bmatrix} = \mathbf{c}_0 + \mathbf{c}_1 t + \sum_{j=1}^8 \mathbf{C}_j \begin{bmatrix} \Delta \log(\text{PIB})_{t-j} \\ u_{t-j} \end{bmatrix} + \mathbf{B} \begin{bmatrix} \epsilon_t^d \\ \epsilon_t^s \end{bmatrix}$$

onde ϵ_t^s e ϵ_t^d são os choques fundamentais do lado da oferta e da demanda na economia.

- **Hipótese de identificação:** choques de demanda não exercem efeito de longo prazo sobre a atividade econômica (neutralidade da demanda agregada no longo prazo). Essa hipótese implica que:

$$\mathbf{G}_\infty = \begin{bmatrix} 0 & g_{1,2} \\ g_{2,1} & g_{2,2} \end{bmatrix}$$

BLANCHARD E QUAH (1989) : RESULTADOS

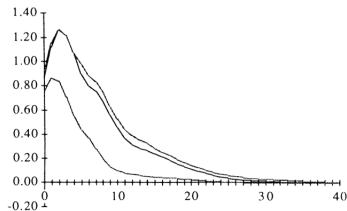


FIGURE 3. OUTPUT RESPONSE TO DEMAND

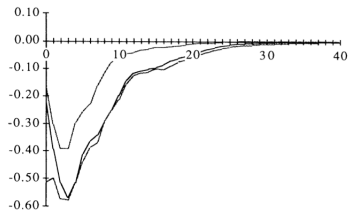


FIGURE 5. UNEMPLOYMENT RESPONSE TO DEMAND

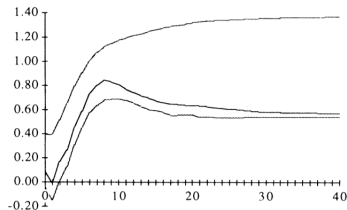


FIGURE 4. OUTPUT RESPONSE TO SUPPLY

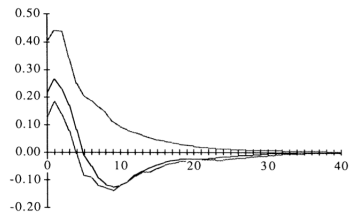


FIGURE 6. UNEMPLOYMENT RESPONSE TO SUPPLY

Restrições de sinal

RESTRIÇÕES MENOS ESTRINGENTES

- As restrições utilizadas anteriormente são bastante fortes, uma vez que pedem que alguma resposta seja exatamente **zero**.
- Restrições mais palatáveis podem ser obtidas trabalhando-se com **restrições de sinal**, em que impomos que as FRI \mathbf{F}_h em diferentes horizontes devem ter (alguns) sinais tais quais os prescritos pela teoria.
 - Por exemplo, a resposta da i -ésima variável ao j -ésimo choque no horizonte h deve ser não negativa, isto é $F_h(i|j) \geq 0$.
 - Como a matriz \mathbf{F}_h depende de \mathbf{B} , colocamentos indiretamente restrições sobre estes coeficientes.
- Dada a natureza mais fraca dessas hipóteses, elas não necessariamente garantem identificação completa do sistema (e, mesmo que garantissem, a verificação de que isso de fato seria o caso é bastante complicada) \implies métodos Bayesianos são preferíveis nesse caso.

EXEMPLO

SVARs identified using zero restrictions have consistently found that an exogenous increase in the fed funds rate induces a reduction in real activity. This intuitive result has become the “consensus.” This consensus view, however, has been challenged by Uhlig (2005), who criticizes imposing a questionable zero restriction on the IRF of output to a monetary policy shock on impact. To solve the problem he proposes to identify a shock to monetary policy by imposing sign restrictions only on the IRFs of prices and non-borrowed reserves to this shock, while imposing no restrictions on the IRF of output. The lack of restrictions on the IRF of output to a monetary policy shock makes this is an attractive approach.

(Antolín-Díaz e Rubio-Ramírez)

UHLIG (2005)

- Uhlig (2005): VAR(12), sem componentes determinísticos, com dados mensais de janeiro de 1965 a dezembro de 2003.
- Seis variáveis no sistema: PIB real (interpolado), deflator do PIB, índice de preços de commodities, reservas totais, reservas próprias e taxa de juros. Todas em log e em nível, a não ser juros que é usado diretamente em nível.
- Restrições de sinal: FRIs da taxa de juros, deflator do PIB, índice de preços de commodities e reservas próprias a um choque monetário contracionista são menores ou iguais a zero, nos horizontes 0 a 5.

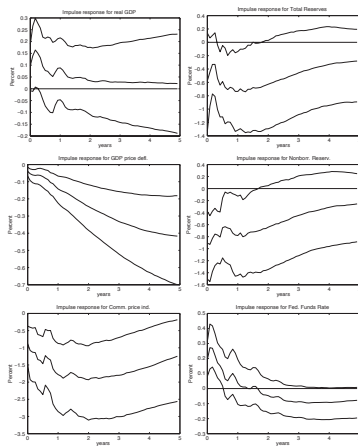


Fig. 6. Impulse responses to a contractionary monetary policy shock one standard deviation in size, using the pure-sign-restriction approach with $K = 5$. That is, the responses of the GDP price deflator, the commodity price index and nonborrowed reserves have been restricted not to be positive and the federal funds rate not to be negative for months $k, k = 0, \dots, 5$ after the shock. The error band for the real GDP impulse response is a ± 0.2 interval around zero: while consistent with the textbook view of declining output after a monetary policy shock, it is also consistent with e.g. monetary neutrality.

quickly than the GDP deflator, since commodities are traded on markets with very flexible prices. As for reserves and interest rates, note that these impulse responses contain the endogenous reaction of monetary policy to its own shocks. The federal

Restrições narrativas

USANDO EPISÓDIOS HISTÓRICOS NA IDENTIFICAÇÃO

- Antolín-Díaz e Rubio-Ramírez (2018) sugerem um complemento a restrições de sinal, como forma de fortalecer a identificação.
- Ideia é suplementar as restrições de sinais com **restrições narrativas**, derivadas do nosso conhecimento externo de episódios históricos.
- Dois tipos de restrições:
 1. Restrições nos *sinais* dos choques estruturais: em determinados período de tempo, sabemos que alguns dos choques fundamentais tomaram determinados sinais (surpresas positivas ou negativas).
 2. Restrições sobre a *decomposição histórica* do erro de predição: seja $e_{i,t+h|t}$ o erro de predição que se cometeria em projetar a variável i em $t + h$ com base no SVAR(p) e dados até t .
 - Pelo que vimos anteriormente, este erro captura a mudança não antecipada (com informação até t) da variável i , entre t e $t + h$.
 - Ideia é impor restrições sobre a contribuição dos choques nessa mudança não antecipada: por exemplo, j -ésimo choque foi a principal inovação a contribuir para mudança em i na janela.
- As restrições não necessariamente garantem identificação completa
⇒ métodos Bayesianos são ideais.

EXEMPLO

- Antolín-Díaz e Rubio-Ramírez (2018) retornam à análise de Uhlig (2005) e suplementam suas restrições de sinal com duas restrições narrativas, com base na mudança na condução da política monetária norte-americana adotada por Paul Volcker em Outubro de 1979:

For this reason, in this section we will use narrative sign restrictions for a single event: October 1979. The monetary policy decisions of October 6, 1979, enacted shortly after Paul Volcker became chairman of the Fed, are described by Romer and Romer (1989) as “a major anti-inflationary shock to monetary policy” and represent, in our view, the clearest case in the postwar period of an exogenous monetary policy shock. Lindsey, Orphanides, and Rasche (2013) provide a detailed account of the events leading to the decision to abandon targeting the federal funds rate in favor of targeting non-borrowed reserves as the operating procedure for controlling the money supply. While macroeconomic conditions, in particular, the deterioration of the inflation outlook and the increase in the real price of oil that followed the Iranian Revolution of 1978–1979, played a large role in causing the shift, the forcefulness and the surprise character of the action and the dramatic break with established practice in the conduct of policy strongly suggest the occurrence of a monetary policy shock.

CHOQUE MONETÁRIO VS MUDANÇA DE REGIME

An argument could be made that the Volcker event is so large that it may be best modeled as a change in the monetary policy rule rather than a monetary policy shock. But Sims and Zha (2006) contend that the evidence for changes in the parameters of the monetary policy rule during the Volcker period is weak and that this period is best described as a period of high variance in the monetary policy shocks to an otherwise unchanged monetary policy rule. Primiceri (2005) reaches similar conclusions. Indeed, as Lindsey, Orphanides, and Rasche (2013) describe, contemporaneous observers accused the FOMC of adopting the new operating procedures only as a smokescreen to obscure its intention to markedly increase short- term interest rates. We side with this view and regard the episode as a large shock within a stable monetary rule.

(Antolín-Díaz e Rubio-Ramírez)

RESTRIÇÕES UTILIZADAS

- Antolín-Díaz e Rubio-Ramírez (2018) valem-se de duas restrições narrativas:

Narrative Sign Restriction 4 [1]: The monetary policy shock for the observation corresponding to October 1979 must be of positive value.

Narrative Sign Restriction 5 [2]: For the observation corresponding to October 1979, a monetary policy shock is the overwhelming driver of the unexpected movement in the federal funds rate. In other words, the absolute value of the contribution of monetary policy shocks to the unexpected movement in the federal funds rate is larger than the sum of the absolute value of the contributions of all other structural shocks.

RESULTADOS

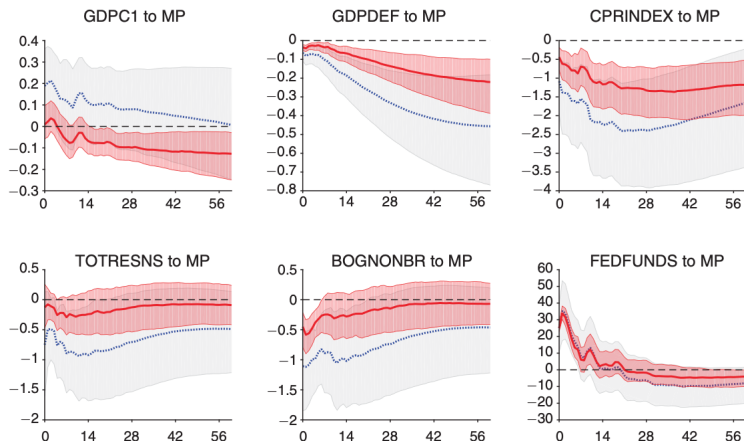


FIGURE 6. IRFs WITH AND WITHOUT NARRATIVE SIGN RESTRICTIONS

Notes: The light shaded area represents the 68 percent (point-wise) HPD credible sets for the IRFs and the dotted lines are the median IRFs using the baseline identification restrictions. The darker shaded areas and solid lines display the equivalent quantities for the models that additionally satisfy Narrative Sign Restrictions 4 and 5. The monetary policy shock has been normalized to have an impact of 25 basis points on the federal funds rate.

Identificação por instrumentos externos

UMA PROXY PARA O CHOQUE

- A abordagem de identificação de um SVAR através de instrumentos externos nos permite identificar a **FRI a um dos choques**, sob a hipótese de que observamos uma **boa proxy para ele**.
- Uma boa *proxy* para o choque ϵ_{jt} é uma série de tempo $\{Z_t\}_t$, com as seguintes propriedades:
 1. (Relevância) $\text{cor}(Z_t, \epsilon_{jt}) = \rho \neq 0$.
 2. (Exclusão) $\text{cor}(Z_t, \epsilon_{it}) = 0, \quad \forall i \neq j$.
- Instrumento externo é uma boa *proxy* para a inovação fundamental se a prediz, mas não exibe associação com as demais inovações fundamentais.
- Sob as duas hipóteses anteriores, e a normalização $b_{jj} = 1$, temos que as respostas contemporâneas de cada variável i do sistema ao choque j são identificáveis como:

$$F_0(i|j) = b_{ij} = \frac{\text{cov}(u_{i,t}, Z_t)}{\text{cov}(u_{j,t}, Z_t)}$$

ESTIMAÇÃO COM INSTRUMENTO EXTERNO

- O resultado anterior sugere o seguinte procedimento para estimar as FRI a um choque j sob a presença de um instrumento externo.
 1. Estimar um VAR(p) reduzido, e guardar seus resíduos $\hat{\mathbf{u}}_t$.
 2. Estimar a resposta contemporânea dos choques como \hat{b}_{ij} , onde o \hat{b}_{ij} é o estimador de variável instrumental do efeito de $\hat{u}_{j,t}$ sobre $\hat{u}_{i,t}$, usando Z_t como instrumento.
 3. Usando o estimador da resposta contemporânea e a propagação dos choques estimada pelo VAR(p), calcular recursivamente a FRI.
- Inferência estatística (quantificação da incerteza) para esse estimador não é imediata.
 - Stock e Watson (2018) proveem métodos para se levar em conta a incerteza estatística das duas etapas de estimação no cálculo de erros-padrão.

INSTRUMENTO INTERNO

- Se pudermos fortalecer a hipótese de identificação do instrumento para:

$$\text{cov}(Z_t, \epsilon_{is} | Z_{t-1}, \mathbf{Y}_{t-1}, Z_{t-2}, \mathbf{Y}_{t-2}, \dots) \neq 0 \iff i = j \text{ e } s = t$$

então as FRI ao choque i podem ser estimadas incluindo-se Z_t como a **primeira variável** em um VAR(p) reduzido com \mathbf{Y}_t ; calculando, por Choleski, FRI **preliminares** de cada variável a um choque no instrumento, $\tilde{F}_h(i|Z)$, e estimando a resposta de i ao choque j em h como:

$$\hat{F}_h(i|j) = \frac{\tilde{F}_h(i|Z)}{\tilde{F}_0(j|Z)}$$

- Abordagem de **instrumento interno**.
 - Quantificação de incerteza é mais simples.
 - Metodologia é robusta a problemas de **invertibilidade**, i.e. se modelo estrutural completo que temos na cabeça envolve mais variáveis do que as efetivamente incluídas no SVAR (Plagborg-Møller e Wolf, 2021).

INSTRUMENTOS EXTERNOS PARA POLÍTICA MONETÁRIA

- Literatura consolidada em macroeconometria visa a estimar os efeitos de surpresas não antecipadas na política monetária através de construção de mensurações diretas do que seria a surpresa.
 - Romer e Romer (2004): série de surpresa monetária a partir das atas internas do Federal Reserve americano e sua meta de taxa de juros, implícita ou explícita, nas discussões (*instrumento narrativo*).
 - Para separar o que é surpresa do sistemático, utiliza-se o resíduo de uma regressão da variação da meta taxa de juros (série narrativa) na variação das projeções internas do Fed, de modo a capturar o componente surpresa (não sistemático) da política.
 - Gertler e Karadi (2015): série de surpresa monetária é calculada a partir da variação, em alta frequência, das curvas de juros futuras no mercado financeiro, em torno da janela de anúncio da política monetária americana (*instrumento de alta frequência*).
 - Sob não arbitragem e uma janela de curta duração, variação é atribuível ao componente não antecipado da política monetária.

SEPARANDO SURPRESA MONETÁRIA DE CHOQUES INFORMACIONAIS

- Miranda-Agrippino e Ricco (2021) apresentam algumas críticas aos instrumentos externos usados na literatura.
 - Instrumento narrativo de Romer e Romer (2004) é serialmente autocorrelacionado e sistematicamente associado com mudanças antecipadas de política monetária (*forward guidance*), o que indica que ele não é uma boa proxy para a surpresa monetária.
 - Instrumento de alta frequência de Gertler e Karadi (2015) é predizível com base nas projeções internas do Fed, o que sugere que anúncios de política monetária contém um **componente informacional**, para além do choque monetária
- Para capturar o choque monetário, separando-o da informação acerca da economia divulgada pelo Fed, Miranda-Agrippino e Ricco (2021) trabalham com o resíduo da série de Gertler e Karadi (2015) numa regressão das projeções internas do Fed.

RESULTADOS

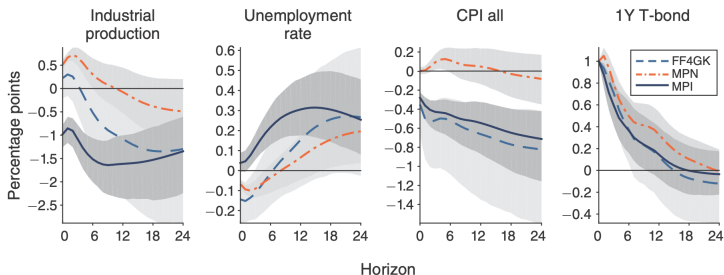


FIGURE 3. RESPONSES TO MONETARY POLICY SHOCK UNDER DIFFERENT IDENTIFICATIONS

Notes: Six-variable VAR. Shock identified with Gertler and Karadi's (2015) average monthly market surprise (teal, dashed), extended narrative measure of Romer and Romer (2004) (orange, dash-dotted), and informationally robust *MPI* series (dark blue lines). The shock is normalized to induce a 100 basis point increase in the 1-year rate. Sample 1979:1–2014:12. Shaded areas are 90 percent posterior coverage bands.

Identificação por heterocedasticidade

IDEIA DE IDENTIFICAÇÃO POR HETEROCEDASTICIDADE

- A ideia desta estratégia de identificação consiste em argumentar que existem regimes na economia em que a volatilidade relativa dos choques muda, mas que os parâmetros estruturais correspondentes à resposta aos choques permanecem os mesmos.
 - Sob essa hipótese, é possível usar a variação na volatilidade como “instrumento” para recuperar as respostas aos choques.
- Como exemplo, suponha que temos um SVAR(p) bivariado.
- Nesse caso, sob a normalização de que $b_{i,i} = 1$, o problema de identificação consiste em recuperar $b_{1,2}$ e $b_{2,1}$, separando-os da variância dos choques estruturais.
 - A princípio, temos quatro parâmetros e somente três equações dadas por $\mathbb{V}[\mathbf{u}_t]$, i.e. falta uma restrição.

MUDANÇA DE REGIME E IDENTIFICAÇÃO

- Suponha que existe um período de tempo T^* , que **define uma mudança de regime**.
 - No regime $t < T^*$, os choques fundamentais tem variância $\sigma_1^2(1)$ e $\sigma_2^2(1)$.
 - No regime $t \geq T^*$, os choques fundamentais têm variância $\sigma_1^2(2)$ e $\sigma_2^2(2)$.
- Sob a hipótese de que $b_{1,2}$ e $b_{2,1}$ mantém-se **invariantes** entre os regimes, temos que a matriz de variância-covariância dos erros em forma-reduzida, nos regimes 1 e 2, nos recupera:

$$\mathbb{V}[\mathbf{u}_t | t < T^*] = \begin{bmatrix} 1 & b_{1,2} \\ b_{2,1} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1^2(1) & 0 \\ 0 & \sigma_2^2(1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & b_{2,1} \\ b_{1,2} & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbb{V}[\mathbf{u}_t | t \geq T^*] = \begin{bmatrix} 1 & b_{1,2} \\ b_{2,1} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1^2(2) & 0 \\ 0 & \sigma_2^2(2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & b_{2,1} \\ b_{1,2} & 1 \end{bmatrix}$$

- Sistema com seis parâmetros e seis restrições!

IDENTIFICAÇÃO POR HETEROCEDASTICIDADE

- É possível mostrar que o sistema anterior tem solução única se, e somente se, $\frac{\sigma_1^2(2)}{\sigma_1^2(1)} < \frac{\sigma_2^2(2)}{\sigma_2^2(1)}$ ou $\frac{\sigma_1^2(2)}{\sigma_1^2(1)} > \frac{\sigma_2^2(2)}{\sigma_2^2(1)}$.
 - Isto é, se a importância relativa dos choques fundamentais muda entre os regimes.
- Num SVAR(p) com mais de duas variáveis, de modo geral, precisamos de mais de duas mudanças de regime para identificar os parâmetros.
 - Estimação pode ser feita por máxima verossimilhança condicional, impondo a estrutura de quebra no sistema.
- No entanto, no caso particular em que, num SVAR(p) genérico, temos somente uma mudança de regime, **mas sabemos que a variância de somente um dos choques muda entre regimes** (por exemplo, o primeiro), é possível identificar a FRI desse choque, pois, nesse caso:

$$b_{i,1} = \frac{\text{cov}(u_{i,t}, u_{1,t} | t \geq T^*) - \text{cov}(u_{i,t}, u_{1,t} | t < T^*)}{\mathbb{V}[u_{1,t} | t \geq T^*] - \mathbb{V}[u_{1,t} | t < T^*]}$$

REFERÊNCIAS I



Antolín-Díaz, Juan e Juan F. Rubio-Ramírez (out. de 2018). “Narrative Sign Restrictions for SVARs”. Em: *American Economic Review* 108.10, pp. 2802–29. DOI: 10.1257/aer.20161852. URL: <https://www.aeaweb.org/articles?id=10.1257/aer.20161852>.



Blanchard, Olivier Jean e Danny Quah (1989). “The Dynamic Effects of Aggregate Demand and Supply Disturbances”. Em: *The American Economic Review* 79.4, pp. 655–673.



Christiano, Lawrence J., Martin Eichenbaum e Charles L. Evans (2005). “Nominal Rigidities and the Dynamic Effects of a Shock to Monetary Policy”. Em: *Journal of Political Economy* 113.1, pp. 1–45. ISSN: 00223808, 1537534X. URL: <http://www.jstor.org/stable/10.1086/426038> (acesso em 23/05/2024).

REFERÊNCIAS II



Gertler, Mark e Peter Karadi (jan. de 2015). “Monetary Policy Surprises, Credit Costs, and Economic Activity”. Em: *American Economic Journal: Macroeconomics* 7.1, pp. 44–76. DOI: 10.1257/mac.20130329. URL: <https://www.aeaweb.org/articles?id=10.1257/mac.20130329>.



Miranda-Agrippino, Silvia e Giovanni Ricco (jul. de 2021). “The Transmission of Monetary Policy Shocks”. Em: *American Economic Journal: Macroeconomics* 13.3, pp. 74–107. DOI: 10.1257/mac.20180124. URL: <https://www.aeaweb.org/articles?id=10.1257/mac.20180124>.

REFERÊNCIAS III



Plagborg-Møller, Mikkel e Christian K. Wolf (2021). “Local Projections and VARs Estimate the Same Impulse Responses”. *Em: Econometrica* 89.2, pp. 955–980. DOI: <https://doi.org/10.3982/ECTA17813>. eprint: <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.3982/ECTA17813>. URL: <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.3982/ECTA17813>.



Romer, Christina D. e David H. Romer (set. de 2004). “A New Measure of Monetary Shocks: Derivation and Implications”. *Em: American Economic Review* 94.4, pp. 1055–1084. DOI: [10.1257/0002828042002651](https://doi.org/10.1257/0002828042002651). URL: <https://www.aeaweb.org/articles?id=10.1257/0002828042002651>.

REFERÊNCIAS IV



Stock, James H. e Mark W. Watson (mai. de 2018). “Identification and Estimation of Dynamic Causal Effects in Macroeconomics Using External Instruments”. Em: *The Economic Journal* 128.610, pp. 917–948. ISSN: 0013-0133. DOI: 10.1111/ecoj.12593. eprint: <https://academic.oup.com/ej/article-pdf/128/610/917/26398109/ej0917.pdf>. URL: <https://doi.org/10.1111/ecoj.12593>.



Uhlig, Harald (2005). “What are the effects of monetary policy on output? Results from an agnostic identification procedure”. Em: *Journal of Monetary Economics* 52.2, pp. 381–419. ISSN: 0304-3932. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jmoneco.2004.05.007>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0304393205000073>.