

# EAE1223: ECONOMETRIA III

## AULA 8 - MODELOS VETORIAIS AUTORREGRESSIVOS ESTRUTURAIS

Luis A. F. Alvarez

21 de maio de 2024

# UM MODELO PARA A DESCRIÇÃO DE UMA ECONOMIA

- Seja  $\{\mathbf{Y}_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$  um processo vetorial de interesse, onde  $\mathbf{Y}_t$  consiste de  $d$  variáveis econômicas, sobre as quais a teoria econômica têm algo a nos dizer sobre o comportamento conjunto.
- Um **modelo estrutural (causal) linear** para estas variáveis consiste em um sistema de  $d$  equações da forma:

$$\mathbf{A}_0 \mathbf{Y}_t = \mathbf{a} + \sum_{j=1}^p \mathbf{A}_j \mathbf{Y}_{t-j} + \epsilon_t, \quad (1)$$

onde  $\mathbf{A}_0$  é uma matriz  $d \times d$  que explicita as relações contemporâneas (causais) entre as variáveis, e  $\epsilon_t$  é um ruído branco **contemporaneamente não correlacionado**, isto é

$$\mathbb{V}[\epsilon_t] = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma_d^2 \end{bmatrix} = \Omega_\epsilon$$

# CHOQUES ECONÔMICOS FUNDAMENTAIS

- A hipótese de que os erros de cada uma das equações são contemporaneamente não correlacionados supõe que o modelo que descreve a economia esteja **bem especificado**, de modo que o choque da  $j$ -ésima equação reflete a incerteza econômica fundamental associada a  $Y_{jt}$ .
  - $\epsilon_{jt}$  reflete choques (surpresas ou inovações, não antecipadas com base no passado) nos determinantes essenciais de  $Y_{jt}$ , e não nos determinantes indiretos (via outras variáveis do sistema) de  $Y_{jt}$ .
- Esse tipo de hipótese é presumida em uma das perguntas clássicas da macroeconomia: quanto da flutuação econômica pode ser atribuída à política monetária vs fatores reais?
  - Pergunta presume que existem inovações fundamentais, contemporaneamente ortogonais (não correlacionadas), em fatores monetários e reais, que permitem pensar nesta decomposição, visto que ela não faz sentido se os fatores fundamentais não fossem fundamentais (i.e. correlacionados).
  - Veremos como nossa metodologia permite fazer explicitamente esta decomposição.

## EXEMPLO

- Considere o comportamento conjunto de inflação ( $\pi_t$ ), desemprego ( $u_t$ ), expectativas de inflação ( $\pi_t^e$ ) e taxa de juros nominal ( $i_t$ ):

$$\pi_t = \sum_{j=1}^p \theta_j \pi_{t-j} + \sum_{j=0}^p \beta_j (u_{t-j} - \bar{u}_{\text{neutro}}) + \sum_{j=0}^p \gamma_j \pi_{t-j}^e + \epsilon_{\pi,t} \quad (\text{CP})$$

$$u_t - \bar{u} = \sum_{j=1}^p \omega_j (u_{t-j} - \bar{u}) + \sum_{j=0}^p \alpha_j (i_{t-j} - \pi_{t-j}^e) + \epsilon_{u,t} \quad (\text{IS})$$

$$i_t = \bar{i} + \sum_{j=1}^p \psi_j i_{t-j} + \sum_{j=0}^p \kappa_j (\pi_{t-j} - \pi_M) + \sum_{j=0}^p \phi_j (\pi_{t-j}^e - \pi_M) + \epsilon_{i,t} \quad (\text{RM})$$

$$\pi_t^e = \mu \pi_M + \sum_{j=1}^p \iota_j \pi_{t-j}^e + \theta_3 \sum_{j=0}^p (\nu_{1j} \pi_{t-j} + \nu_{2j} u_{t-j} + \nu_{3j} i_{t-j}) + \epsilon_{e,t} \quad (\text{FE})$$

onde  $\epsilon_{\pi,t}$  são choques de oferta (CP),  $\epsilon_{u,t}$  choques de demanda (IS),  $\epsilon_{i,t}$  são surpresas de política monetária (RM), e  $\epsilon_{e,t}$  são ruídos na formação de expectativas.

# REPRESENTAÇÃO AUTORREGRESSIVA DO MODELO LINEAR ESTRUTURAL

- Se o sistema (1) oferece uma descrição **completa** da evolução de  $\mathbf{Y}_t$ , então, para uma dada trajetória pretérita  $\{\mathbf{Y}_s : s \leq t - 1\}$ , e valores dos choques fundamentais  $\epsilon_t$ , existe um único valor de  $\mathbf{Y}_t$  que satisfaz (1).
- Nesse caso, a matriz  $\mathbf{A}_0$  admite inversa  $\mathbf{B} = \mathbf{A}_0^{-1}$ , e o sistema admite **representação autorregressiva**:

$$\mathbf{Y}_t = \underbrace{\mathbf{c}}_{=\mathbf{B}\mathbf{a}} + \sum_{j=1}^p \underbrace{\mathbf{C}_j}_{=\mathbf{B}\mathbf{A}_j} \mathbf{Y}_{t-j} + \mathbf{B}\epsilon_t. \quad (2)$$

- Modelo VAR em que o ruído branco  $\mathbf{B}\epsilon_t$  é uma combinação linear de choques fundamentais.
- Matriz  $\mathbf{B}$  incorpora o efeito contemporâneo de inovações fundamentais sobre as variáveis em  $\mathbf{Y}_t$ .

# MODELO SVAR(p)

- Em diversas situações, não necessariamente queremos partir de (1) para chegar a (2)
  - Não necessariamente temos uma descrição completa da economia.
  - De modo relacionado, a formulação (2) pode ser compatível com mais de uma formulação estrutural linear completa.
- Nesses casos, podemos definir diretamente um modelo vetorial autorregressivo (semi)estrutural de ordem  $p$ , SVAR(p), como o processo

$$\mathbf{Y}_t = \mathbf{c} + \sum_{j=1}^p \mathbf{C}_j \mathbf{Y}_{t-j} + \mathbf{B} \epsilon_t, \quad (3)$$

onde  $\epsilon_t$  são inovações fundamentais, isto é ruídos brancos não contemporaneamente correlacionados, e  $\mathbf{B}$  é a matriz que captura os efeitos contemporâneos das inovações fundamentais sobre  $\mathbf{Y}_t$ .

## FUNÇÃO DE RESPOSTA AO IMPULSO

- Os efeitos causais dinâmicos, na modelagem SVAR, são capturados pelos efeitos de surpresas dos choques fundamentais sobre o comportamento do sistema.
  - Note que, por construção,  $\epsilon_t$  captura fatores não antecipados com base no passado.
  - Como  $\epsilon_t$  é não contemporaneamente correlacionado, faz sentido pensar em surpresas em um de seus componentes, mantidos os outros constantes.
- Formalmente, o efeito causal de uma surpresa de uma unidade na  $j$ -ésima inovação do sistema em  $t$ ,  $\epsilon_{jt}$ , sobre a  $i$ -ésima variável do sistema em  $t + h$ ,  $h \geq 0$ , é dada pela **função de resposta ao impulso**

$$F_h(i|j) = \frac{\partial Y_{i,t+h}}{\partial \epsilon_{j,t}}$$

- $F_0(i|j) = \mathbf{B}_{ij}$ ,  $F_1(i|j) = \sum_{l=1}^d \mathbf{C}_{1,i,l} \mathbf{B}_{lj} = \sum_{l=1}^d \mathbf{C}_{1,i,l} F_0(l|j)$ ,  
 $F_2(i|j) = \sum_{l=1}^d \mathbf{C}_{1,i,l} F_1(l|j) + \sum_{l=1}^d \mathbf{C}_{2,i,l} F_0(l|j)$ , etc.

## FRI NORMALIZADA, FRI ACUMULADA

- Em diversos casos, é costumeiro normalizar a FRI pelo desvio padrão dos choques, isto é, reporta-se:

$$F_h(i|j)/\sigma_{j,t}.$$

- Neste caso, os coeficientes são interpretáveis como o efeito causal de uma surpresa de um desvio padrão na  $j$ -ésima inovação.
- Também podemos reportar a FRI acumulada:

$$\sum_{\tau=0}^h F_{\tau}(i|j).$$

- Se a  $i$ -ésima variável está em primeiras diferenças, a FRI acumulada reporta o efeito da surpresa sobre o nível da série em  $t + h$ .
- Alternativamente, FRI acumulada pode ser interpretada como o efeito de uma sequência de surpresas (por construção, não antecipadas) de uma unidade na  $j$ -ésima variável do sistema por  $h$  períodos.
  - Note que, pela crítica de Lucas, sabemos que isto é **diferente** do efeito de um aumento permanente de uma unidade sobre a  $j$ -ésima variável do sistema.



# DECOMPOSIÇÃO DA VARIÂNCIA DO ERRO DE PREDIÇÃO

- Com base no SVAR(p), somos capazes, analogamente ao VAR(p), de calcular previsões para  $T + h$ , com dados até  $T$ ,  $\mathbf{Y}_{T+h|T}$ :

$$\mathbf{Y}_{T+1|T} = \mathbf{c} + \sum_{j=0}^{p-1} \mathbf{C}_{j+1} \mathbf{Y}_{T-j}$$

$$\mathbf{Y}_{T+2|T} = \mathbf{c} + \mathbf{C}_j \mathbf{Y}_{T+1|T} + \sum_{j=0}^{p-2} \mathbf{C}_{j+2} \mathbf{Y}_{T-j}$$

$\vdots$

- O erro de previsão no horizonte  $h$  é dado por  $\mathbf{Y}_{T+h} - \mathbf{Y}_{T+h|T}$ .
- Dada a natureza estrutural dos choques, é possível mostrar que somos capazes de decompor aditivamente a **variância do erro de previsão de cada variável** na contribuição de cada choque:

$$\mathbb{V}[\mathbf{Y}_{i,T+h} - \mathbf{Y}_{i,T+h|T}] = \sum_{j=1}^d \text{contribuição do choque } j$$

## DECOMPOSIÇÃO DA VARIÂNCIA DO ERRO DE PREDIÇÃO (CONT.)

- Decomposição da variância do erro de predição nos permite dizer, para cada horizonte, quantos % da incerteza futura depende de cada uma das inovações estruturais.
- Fácil de ver que a decomposição não depende de  $t$ , mas tão somente do horizonte e variável de interesse,
- Se tomamos  $h \rightarrow \infty$ , temos uma decomposição da variância de longo prazo (incondicional) do sistema.
  - Por exemplo, podemos dizer quanto da variabilidade da atividade econômica se deve a choques monetários.

## SVAR(p) E VAR(p)

- Note que um SVAR(p) da forma (3) sempre define um VAR(p).
- De fato, se definirmos  $\mathbf{u}_t = \mathbf{B}\epsilon_t$ , podemos escrever:

$$\mathbf{Y}_t = \mathbf{c} + \sum_{j=1}^p \mathbf{C}_j \mathbf{Y}_{t-j} + \mathbf{u}_t, \quad (4)$$

onde  $\mathbf{u}_t$  é um ruído branco contemporaneamente correlacionado, cuja matriz de variância é dada por  $\mathbb{V}[\mathbf{u}_t] = \mathbf{B}\mathbb{V}[\epsilon_t]\mathbf{B}' = \Sigma$ .

- VAR(p) em que ruído branco segue da combinação linear de choques estruturais.
- Essas combinações lineares produzem um ruído branco contemporaneamente correlacionado, na medida em que choques fundamentais afetam simultaneamente mais de uma variável do sistema.
- A um VAR(p) derivado de um SVAR(p), daremos o nome de modelo vetorial em forma reduzida.

# O PROBLEMA DE IDENTIFICAÇÃO CAUSAL NO SVAR(p)

- Recorde-se que, sob condições bastantes gerais, podemos estimar consistentemente os parâmetros de um VAR(p).
  - Resultado vale para séries estacionárias, e mesmo para processos integrados (embora, nesse caso, a inferência com base em distribuições convencionais não seja válida).
- Como os parâmetros do VAR(p) são consistentemente estimáveis, segue que, com  $T$  grande, somos capazes de recuperar aproximadamente as **inovações reduzidas**  $\{\mathbf{u}_t : 1 \leq t \leq T\}$ .
  - Como essas inovações são recuperáveis com  $T$  grande, também somos capazes de estimar consistentemente  $\Sigma = \mathbb{V}[\mathbf{u}_t]$ .
- O **problema de identificação causal no SVAR(p)** consiste em prover condições a partir das quais sejamos capazes de **recuperar os choques estruturais  $\epsilon_t$  a partir da observação de  $\mathbf{u}_t$** .
  - Ideia é encontrar condições que nos permitam descorrelacionar os choques reduzidos em termos das inovações fundamentais.

# IDENTIFICAÇÃO DOS CHOQUES ESTRUTURAIS

- Para descorrelacionar  $\mathbf{u}_t$ , precisamos recuperar a matriz  $\mathbf{B}$ .
- Em geral, as análises estruturais preferem ser agnósticas sobre os componentes autorregressivos do processo  $\implies$  coeficientes  $\mathbf{C}_j$  não nos trazem informação sobre  $\mathbf{B}$ .
  - Componentes autorregressivos aparecem pois queremos ser relativamente agnósticos sobre a “propagação” de choques intertemporalmente (teoria dificilmente nos diz algo sobre isso), o que sugere não restringir sua relação com os  $\mathbf{B}$ .
- Nesses casos, única informação para descorrelacionar choques deve vir da própria distribuição dos  $\mathbf{u}_t$ .
- Em particular, se queremos ser também agnósticos sobre a distribuição dos choques estruturais  $\epsilon_t$ , é possível mostrar que a única fonte de informações sobre  $\mathbf{B}$  vem da equação:

$$\mathbb{V}[\mathbf{u}_t] = \mathbf{B}\mathbb{V}[\epsilon_t]\mathbf{B}'$$

onde somos capazes de recuperar o lado esquerdo, com  $T$  grande.

- Problema de identificação passa a ser separar, a partir da observação de  $\mathbb{V}[\mathbf{u}_t]$ , a variância dos choques estruturais  $\mathbb{V}[\epsilon_t]$  da matriz  $\mathbf{B}$ .

## RESTRIÇÕES FALTANTES

- Precisamos recuperar os parâmetros das matrizes  $\mathbb{V}[\epsilon_t]$  ( $d$  parâmetros) e  $\mathbf{B}$  ( $d^2$  parâmetros) de **forma única** a partir de  $\mathbb{V}[\mathbf{u}_t]$ .
- A observação (em amostras grandes) de  $\mathbb{V}[\mathbf{u}_t]$  nos provê  $d(d-1)/2 + d$  restrições.
  - Diagonal principal e região abaixo dela.
- Dessa forma, temos um sistema com  $d(d-1)/2 + d$  equações e  $d(d+1)$  incógnitas.
  - Precisamos de restrições adicionais para recuperar esses parâmetros de forma única.
- Uma normalização natural é supor que a diagonal principal de  $\mathbf{B}$  é igual a 1.
  - **Escala dos choques estruturais corresponde às variáveis observadas**, de modo que choque de uma unidade em  $\epsilon_{j,t}$  corresponde a aumento não antecipado de uma unidade em  $\mathbf{Y}_{j,t}$ .
- Nesse caso, temos um sistema com  $d(d+1)/2$  equações e  $d^2$  incógnitas.
  - Precisamos de  $d(d-1)/2$  restrições sobre os parâmetros estruturais para identificar o sistema.

## SVAR(p) JUSTAMENTE IDENTIFICADO

- O problema de identificação do SVAR(p) pode ser visto como o problema de encontrar restrições suficientes para que seja possível definir uma função  $f$  tal que:

$$(\mathbf{B}, \mathbb{V}[\epsilon_t]) = f(\mathbb{V}[\mathbf{u}_t])$$

- Dadas restrições suficientes sobre o modelo, existe um único jeito (resumido na função  $f$ ) de encontrar  $(\mathbf{B}, \mathbb{V}[\epsilon_t])$  compatíveis com  $\mathbb{V}[\mathbf{u}_t]$ .
- Se colocamos exatamente  $d(d-1)/2$  restrições sobre o sistema, estamos no caso **justamente identificado**.
  - Neste caso, as hipóteses de identificação não geram restrições testáveis sobre o sistema, e é possível mostrar que o estimador mais eficiente dos parâmetros estruturais é dado por:

$$(\widehat{\mathbf{B}}, \widehat{\mathbb{V}[\epsilon_t]}) = f(\widehat{\mathbb{V}[\mathbf{u}_t]}),$$

onde  $\widehat{\mathbb{V}[\mathbf{u}_t]}$  é o estimador da matriz de covariância do ruído branco de um VAR(p) reduzido, estimado via máxima verossimilhança condicional (onde a verossimilhança é derivada sob a hipótese auxiliar de inovações Gaussianas).

## SVAR(p) SOBREIDENTIFICADO

- Se colocamos mais de  $d(d-1)/2$  restrições sobre o sistema, estamos no caso **sobreidentificado**.
- Neste caso, o estimador mais eficiente consiste na máxima verossimilhança condicional (derivada sob a hipótese auxiliar de inovações Gaussianas), que impõe as restrições sobre a matriz de covariância das inovações  $\mathbf{B}\mathbb{V}[\epsilon_t]\mathbf{B}'$  diretamente na maximização.
  - Neste caso, também é possível testar as restrições de identificação através da estatística LR:

$$LR = 2(\hat{L}_{VAR} - \hat{L}_{SVAR})$$

onde  $\hat{L}_{VAR}$  é a log-verossimilhança do VAR(p) reduzido e  $\hat{L}_{SVAR}$  a log-verossimilhança do SVAR(p) estimado.

- Sob estacionariedade e a hipótese nula de correta especificação, estatística segue  $\chi^2$  com  **$n^o$  restrições** -  $d(d-1)/2$  graus de liberdade. Rejeita-se a nula de correta especificação para valores altos da estatística de teste.
- **Observação:** para escolhermos a ordem  $p$ , a não ser que a teoria econômica nos traga alguma informação, fazemos os procedimentos discutidos em aulas passada **num VAR reduzido preliminar**.



# DIFICULDADES DA ESTIMAÇÃO CONVENCIONAL DO SVAR(P)

- Em diversas situações, as restrições identificadoras sobre os parâmetros estruturais tomam forma bastante complicada.
  - Nesses casos, pode ser bastante difícil de impor as restrições na estimação dos parâmetros.
- Além disso, nesses casos em que a forma das restrições é bastante complicada, é difícil saber se as restrições são suficientes para garantir a identificação.
  - Restrições podem **auxiliar na identificação**, no sentido de que o conjunto de parâmetros estruturais  $(\mathbf{B}, \mathbb{V}[\epsilon_t])$  compatíveis com a forma reduzida  $\mathbb{V}[\mathbf{u}_t]$  é diminuído sob as restrições, mas ainda pode haver mais de um par de parâmetros estruturais compatíveis com  $\mathbb{V}[\mathbf{u}_t]$ .
  - Nesse caso, a inferência usual (estatísticas  $t$  e  $F$ ) **sobre os parâmetros** deixa de ser válidas.
    - Teste  $LR$  derivado anteriormente ainda é válido.
- Nessa situação, a literatura costuma abandonar a estimação vista anteriormente e passa a adotar **procedimentos Bayesianos**.

# ESTIMAÇÃO BAYESIANA DO SVAR(P)

- Heuristicamente, abordagem Bayesiana consiste em adotar uma distribuição *a priori*  $\mathbf{p}$  sobre os parâmetros estruturais  $(\mathbf{c}, (\mathbf{C}_j)_{j=1}^p, \mathbf{V}\epsilon_t, \mathbf{B})$ .
  - Essa distribuição reflete o conjunto de valores plausíveis para os parâmetros estruturais (restrições), além de nossa incerteza teórica sobre eles.
    - Se quisermos ser agnósticos sobre os parâmetros, adotamos distribuições *a priori* “uniformes” no conjunto de valores restritos.
- Usando a regra de Bayes, podemos calcular a *distribuição a posteriori*:

$$\mathbf{p}((\mathbf{c}, (\mathbf{C}_j)_{j=1}^p, \mathbf{V}\epsilon_t, \mathbf{B}), \{\mathbf{y}_t\}_{t=1}^T) \propto \\ \mathbf{p}(\{\mathbf{y}_t\}_{t=1}^T | (\mathbf{c}, (\mathbf{C}_j)_{j=1}^p, \mathbf{V}\epsilon_t, \mathbf{B})) \mathbf{p}((\mathbf{C}_j)_{j=1}^p, \mathbf{V}\epsilon_t, \mathbf{B}))$$

onde  $\mathbf{p}(\{\mathbf{y}_t\}_{t=1}^T | (\mathbf{c}, (\mathbf{C}_j)_{j=1}^p, \mathbf{V}\epsilon_t, \mathbf{B}))$  é a verossimilhança do modelo.

- Estimativas pontuais podem ser calculadas usando a *mediana* da distribuição *a posteriori*, e incerteza a partir de seus quantis.
- Não vamos entrar em mais detalhes sobre essa abordagem, embora enfatizaremos casos em que esses métodos são usados.

# ESTRATÉGIAS DE IDENTIFICAÇÃO DO SVAR(p)

- No que segue, discutiremos as principais abordagens para se identificar um SVAR(p).
  1. Restrições de curto prazo.
  2. Restrições de longo prazo.
  3. Restrições de sinal.
  4. Restrições narrativas.
  5. Identificação por instrumentos externos.
  6. Identificação por heterocedasticidade.