Crescimento Econômico

Fatos, Modelo de Solow e Crescimento Endógeno

Sumário

1 Motivação e Fatos de Crescimento

1.1 Por que estudar crescimento econômico?

- Questão central de macro: por que alguns países são ricos e outros pobres?
- Diferenças persistentes em PIB per capita de ordem de 10×, 20×, 30×.
- Crescimento de longo prazo domina o bem-estar:
  - variações cíclicas são importantes, mas transitórias;
  - uma diferença pequena na taxa de crescimento, sustentada por décadas, gera enormes diferenças de nível.
- Objetivo dos modelos de crescimento:
  - organizar fatos empíricos (Kaldor facts, Industrial Revolution);
  - decompor fontes de crescimento: acumulação de fatores vs progresso tecnológico;
  - avaliar papel de políticas: poupança, educação, P&D, instituições.

1.2 Fatos básicos: crescimento de longo prazo

- Evidência histórica (ex.: Reino Unido, EUA):
  - até 1800: PIB per capita cresce pouco, próximo à subsistência;
  - a partir do séc. XIX: aceleração de crescimento (Revolução Industrial);
  - séries em log mostram trajetória quase linear com taxa aproximadamente constante (EUA $\approx$ 1,5% ao ano).
- Interpretação:
  - crescimento sustentado de PIB per capita é fenômeno relativamente recente;
  - explicação passa por acumulação de capital **e** progresso tecnológico.
- Pergunta teórica:
  - que tipo de modelo gera uma trajetória de crescimento balanceado consistente com esses fatos?

1.3 Fatos de Kaldor (versão moderna)

- Nos países desenvolvidos, ao longo de períodos longos:
  1. Taxa de crescimento de PIB per capita é aproximadamente constante.
  2. Razão capital-produto K/Y é aproximadamente constante.
  3. Participações de trabalho e capital na renda (labor share e capital share) são aproximadamente constantes.
  4. Taxa de retorno sobre o capital é aproximadamente constante.
- Interpretação:
  - economias parecem convergir para trajetórias de **crescimento balanceado**;
  - modelo de crescimento deve reproduzir simultaneamente essas constâncias.
- Papel do modelo de Solow:
  - é construído justamente para capturar esses padrões em equilíbrio de longo prazo;
  - fornece benchmark para discutir poupança, população, tecnologia.

2 Modelo de Solow sem Progresso Tecnológico

2.1 Ambiente básico do modelo de Solow

- Economia fechada, sem governo.
- Dois fatores de produção: capital K_t e trabalho L_t.
- Função de produção agregada:

$$Y_t = F(K_t, L_t),$$

  com retornos constantes de escala, $F(\lambda K, \lambda L) = \lambda F(K, L)$.

- Assumindo forma Cobb-Douglas:

$$Y_t = K_t^{\alpha} L_t^{1-\alpha}, \quad 0 < \alpha < 1.$$

- Evolução da força de trabalho:

$$L_{t+1} = (1 + n)L_t, \quad n \geq 0.$$

- Poupança exógena: fração constante s da renda é investida.

2.2 Acumulação de capital

- Equação de acumulação de capital:

$$K_{t+1} = (1 - \delta)K_t + I_t,$$

  com depreciação $\delta \in (0, 1)$.

- Fechamento: investimento igual à poupança

$$I_t = sY_t.$$

- Portanto:

$$K_{t+1} = (1 - \delta)K_t + sF(K_t, L_t).$$

- Para estudar PIB per capita, trabalhamos com variáveis em termos per worker:

$$k_t \equiv \frac{K_t}{L_t}, \qquad y_t \equiv \frac{Y_t}{L_t} = f(k_t).$$

- Com retornos constantes de escala: $f(k) = F(k,1)$. Para Cobb-Douglas:

$$f(k) = k^\alpha.$$

2.3 Dinâmica de capital per capita

- A dinâmica de k_t é obtida dividindo a equação de capital por $L_{t+1} = (1+n)L_t$:

$$k_{t+1} = \frac{K_{t+1}}{L_{t+1}} = \frac{(1-\delta)K_t + sY_t}{(1+n)L_t} = \frac{(1-\delta)}{1+n}k_t + \frac{s}{1+n}f(k_t).$$

- Escrevendo em forma de "diferença":

$$k_{t+1} - k_t = \frac{sf(k_t) - (\delta+n)k_t}{(1+n)}.$$

- Interpretação:
  - $sf(k_t)$: investimento por trabalhador;
  - $(\delta+n)k_t$: investimento necessário para manter k constante (depreciação + diluição pelo crescimento populacional);
  - $\Rightarrow$ se $sf(k_t) > (\delta+n)k_t$, o estoque de capital per capita cresce.

2.4 Estado estacionário sem tecnologia

- Estado estacionário em termos per capita:

$$k_{t+1} = k_t = k_{ss}.$$

- **Intuição**: é o ponto onde a economia "para de mudar" em termos per capita:
  - investimento por trabalhador $sf(k)$ é exatamente suficiente para repor a depreciação δk e a diluição pelo crescimento populacional nk;
  - capital por trabalhador deixa de crescer porque a força que empurra k_t para cima (poupança) iguala a força que puxa k_t para baixo (depreciação + população).

- Condição de steady state:

$$sf(k_{ss}) = (\delta+n)k_{ss}.$$

- Para Cobb-Douglas $f(k) = k^\alpha$:

$$k_{ss} = \left(\frac{s}{\delta + n}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}, \qquad y_{ss} = f(k_{ss}) = \left(\frac{s}{\delta + n}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}.$$

- Propriedades:
  - economia converge para k_{ss} a partir de qualquer $k_0 > 0$;
  - em steady state, k_t e y_t são constantes $\Rightarrow$ não há crescimento per capita;
  - PIB total Y_t cresce à taxa n, apenas acompanhando o crescimento populacional.

2.5 Efeitos de poupança, população e depreciação

- A partir de:

$$k_{ss} = \left(\frac{s}{\delta + n}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}},$$

  temos:
  - $\uparrow s \Rightarrow \uparrow k_{ss}, \uparrow y_{ss}$ (nível mais alto de renda per capita);
  - $\uparrow n \Rightarrow \downarrow k_{ss}, \downarrow y_{ss}$;
  - $\uparrow \delta \Rightarrow \downarrow k_{ss}, \downarrow y_{ss}$.
- Intuição:
  - maior poupança permite mais capital por trabalhador;
  - maior população (crescimento mais rápido) "dilui" o capital;
  - maior depreciação exige mais investimento apenas para repor capital.
- Ponto central: mudanças em s, n, δ geram **efeitos de nível** (novo steady state), mas não geram crescimento per capita sustentado.

3 Solow com Progresso Tecnológico

3.1 Progresso tecnológico e trabalho efetivo

- Para obter crescimento per capita sustentado, introduzimos tecnologia:

$$Y_t = F(K_t, A_t L_t),$$

onde A_t é nível de eficiência do trabalho.

- Suponha:
$$A_{t+1} = (1+g)A_t, \quad g > 0,$$
taxa constante de progresso tecnológico (exógena).

- Interpretar $A_t L_t$ como "trabalho efetivo".

- Com retornos constantes de escala e Cobb-Douglas:
$$Y_t = K_t^{\alpha}(A_t L_t)^{1-\alpha}.$$

3.2 Variáveis em termos de trabalho efetivo

- Defina:
$$\tilde{k}_t \equiv \frac{K_t}{A_t L_t}, \qquad \tilde{y}_t \equiv \frac{Y_t}{A_t L_t}.$$

- Com Cobb-Douglas:
$$\tilde{y}_t = f(\tilde{k}_t) = \tilde{k}_t^{\alpha}.$$

- Dinâmica de $\tilde{k}_t$:
$$\tilde{k}_{t+1} - \tilde{k}_t = \frac{sf(\tilde{k}_t) - (\delta + n + g)\tilde{k}_t}{(1+n+g)}.$$

- Estado estacionário em termos de trabalho efetivo:
$$sf(\tilde{k}_{ss}) = (\delta + n + g)\tilde{k}_{ss}.$$

- Resultado:
  - $\tilde{k}_t$ converge para $\tilde{k}_{ss}$;
  - mas K_t, Y_t e Y_t/L_t crescem por causa de A_t.

3.3 Trajetória de crescimento balanceado

- Em steady state em termos de trabalho efetivo:
$$\tilde{k}_t = \tilde{k}_{ss}, \quad \tilde{y}_t = \tilde{y}_{ss}.$$

- Implicações para níveis “em pessoa”:

$$\frac{Y_t}{L_t} = A_t \tilde{y}_{ss} \Rightarrow g_{Y/L} = g,$$

ou seja, PIB per capita cresce à taxa de progresso tecnológico.

- Capital por trabalhador:

$$\frac{K_t}{L_t} = A_t \tilde{k}_{ss} \Rightarrow g_{K/L} = g.$$

- Razão capital-produto:

$$\frac{K_t}{Y_t} = \text{constante},$$

pois ambos crescem à taxa $n + g$.

- Modelo com A_t exógeno reproduz Kaldor facts: crescimento per capita constante, relação K/Y constante, participações fatoriais constantes (com Cobb-Douglas).

4 Regra de Ouro da Acumulação de Capital

4.1 Consumo em steady state

- Em steady state (sem tecnologia, para simplicidade), consumo per capita é:

$$c_{ss} = (1 - s)y_{ss}.$$

- Mas y_{ss} depende de s via $k_{ss}(s)$.

- Reescrevendo o problema em termos de k_{ss}:

$$c_{ss}(k_{ss}) = f(k_{ss}) - (\delta + n)k_{ss}.$$

- Intuição:
  - produção total por trabalhador é $f(k_{ss})$;
  - para manter k_{ss} constante, é necessário investir $(\delta + n)k_{ss}$;
  - o que sobra para consumo é exatamente essa diferença.

4.2 Condição de Regra de Ouro

- A Regra de Ouro escolhe k_{gr} que maximiza $c_{ss}(k)$:

$$\max_k \; c_{ss}(k) = f(k) - (\delta + n)k.$$

- Condição de 1ª ordem:

$$f'(k_{gr}) = \delta + n.$$

- Interpretação:
  - no ponto ótimo, produto marginal do capital iguala "custo" de manter capital (depreciação + diluição);
  - se $f'(k) > \delta + n$, economia está "poupando pouco": aumentar k aumenta consumo de steady state;
  - se $f'(k) < \delta + n$, economia está "poupando demais": reduzir k aumenta consumo de steady state.
- Critério: alocação que maximiza consumo por cabeça para gerações em steady state.

4.3 Descontando gerações

- A regra de ouro maximiza o consumo per capita no steady state do modelo.
  - Isso é ótimo se o planejador valora o bem-estar médio de diferentes gerações de forma igual.
- No entanto, se o planejador desconta o bem-estar futuro a uma taxa β, convém pensar no problema de Ramsey:

$$\max_{(K_\tau)_{\tau \in \mathbf{N}}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t L_t u(c_t)$$

  sujeito a

$$F(K_t, L_t) = K_{t+1} - (1 - \delta)K_t + L_t c_t, \quad \forall t.$$

  - $u(c_t)$ é a utilidade de um indivíduo na geração t quando ele consome c_t (consumo per capita).
  - Planejador maximiza fluxo de bem-estar descontado das gerações.
  - Solução do problema acima é a mesma de uma economia com um agente representativo (dinastia que maximiza o fluxo descontado) e mercados competitivos (modelo de Ramsey-Cass-Koopmans).

- Não é difícil ver que a condição de Euler (suavização do consumo per capita) do problema nos dá:

$$u'(c_t) = \beta u'(c_{t+1})[f'(k_{t+1}) + (1-\delta)]$$

  o que implica, no steady-state com consumo per capita constante,

$$f'(k_{t+1}) = \frac{1}{\beta} + \delta - 1.$$

  – Regra de ouro é caso particular em que bem-estar médio em cada período é valorado de forma aproximadamente igual, i.e. $\beta \approx \frac{1}{(1+n)}$. Mas no geral, solução desse problema não coincide com regra de ouro.

5 Contabilidade do Crescimento e Evidência

5.1 Contabilidade do crescimento (growth accounting)

- Suponha função de produção agregada:

$$Y_t = F(K_t, L_t, A_t),$$

  com retornos constantes de escala.

- Defina taxa de crescimento:

$$g_Y \equiv \frac{Y_{t+1} - Y_t}{Y_t}.$$

- Aproximação de primeira ordem (Taylor):

$$g_Y \approx \underbrace{\frac{F_K K_t}{Y_t}}_{\text{participação do capital}} g_K + \underbrace{\frac{F_L L_t}{Y_t}}_{\text{participação do trabalho}} g_L + \underbrace{\frac{F_A A_t}{Y_t}}_{\text{residual de Solow}} g_A.$$

- Ideia:

  – decompor crescimento em contribuição do capital, do trabalho e do "residual", interpretado como progresso tecnológico (TFP).

5.2 TFP e fatos empíricos

- Na prática, calcula-se:

- crescimento de K e L a partir de dados;
- participações fatoriais a partir de contas nacionais (wages, lucros);
- residual como "o que sobra" para explicar g_Y.

- Resultado típico:
  - uma parcela substancial do crescimento de PIB per capita não é explicada por acumulação de fatores;
  - essa parte é atribuída à TFP (tecnologia, eficiência, organização).
- Conexão com Solow:
  - justifica foco em progresso tecnológico como determinante principal do crescimento per capita sustentado;
  - motiva modelos de **crescimento endógeno**, onde g é determinado pela economia (P&D, educação, instituições), e não apenas "exógeno".

5.3 Where do TFP Differences Come From?

- Crescimento de longo prazo e diferenças de renda entre países refletem, em grande parte, diferenças de **Produtividade Total dos Fatores (TFP)**:

$$y = Ak^{\alpha}\ell^{1-\alpha}.$$

  Pequenas diferenças em A geram grandes diferenças em y.

- **Fato empírico central**: capital e educação explicam pouco das variações internacionais de renda; TFP explica a maior parte.
  - Hall & Jones (1999): variação de TFP explica mais que 2/3 da variação de renda entre países.
  - Caselli (2005): diferenças de TFP são robustas mesmo ajustando para qualidade do capital e habilidades.
- Principais mecanismos que geram diferenças persistentes de TFP:
  1. **Instituições**: segurança de propriedade, enforcement, políticas que afetam entrada/saída, alocação de crédito.
     - North (1990); Acemoglu, Johnson & Robinson (2001).

2. **Misallocation**: alocação ineficiente de capital e trabalho entre firmas.

$$\text{Se } MRPK_i \neq MRPK_j, \Rightarrow \text{ produtividade agregada cai.}$$

   - Hsieh & Klenow (2009): até 50% da diferença EUA–Índia/China pode ser misallocation.

3. **Barreiras à adoção tecnológica**: custos de imitação, difusão, capacidades gerenciais.
   - Parente & Prescott (1994): "barreiras de mercado" criam gaps persistentes de TFP.

4. **Complementaridades**: capital humano, tecnologia e organização interagem.
   - Nelson & Phelps (1966): países com mais skills absorvem tecnologia mais rápido.

5. **Capacidade estatal e infraestrutura**: qualidade do setor público afeta produtividade privada.

- **Intuição geral**:
  - TFP não é um "resíduo misterioso": é consequência da forma como a economia aloca recursos, da qualidade das instituições e das barreiras à adoção de tecnologias.
  - Diferenças pequenas em fricções microeconômicas se amplificam em diferenças macro enormes.

6 Modelos de Crescimento Endógeno

6.1 Limitações do modelo de Solow

- Fornece boa descrição dos **níveis** e da convergência condicional:
  - taxas de crescimento de longo prazo determinadas por g exógeno;
  - poupança, população e depreciação afetam somente o nível de renda per capita.
- Limitação:
  - não explica *por que* g é 1,5% ao ano e não outro número;
  - não liga diretamente políticas e instituições a g no longo prazo.

- Modelos de crescimento endógeno:
  - procuram microfundamentar o processo de geração de conhecimento;
  - permitem que decisões de investimento em P&D, educação, etc., influenciem g.

6.2 Modelo simples tipo $Y = AK$

- Considere produção:
$$Y_t = AK_t,$$
  com $A > 0$ constante.
- Equação de acumulação:
$$\dot{K}_t = sY_t - \delta K_t = (sA - \delta)K_t.$$
- Resultado:
$$g_K = g_Y = sA - \delta.$$
- Se $sA > \delta$, capital e produto crescem a taxa constante *endógena*.
- Intuição:
  - retornos marginais do capital não caem (ausência de rendimentos decrescentes);
  - maior poupança aumenta **permanentemente** a taxa de crescimento.
- Interpretação:
  - pode ser vista como simplificação de modelos onde capital físico, capital humano e conhecimento se reforçam, gerando retornos agregados constantes.

6.3 Ideias, não-rivalidade e retornos crescentes

- Ideia central de crescimento endógeno:
  - conhecimento (ideias) é **não-rival**: uma vez produzido, pode ser usado simultaneamente por muitos;
  - isso gera retornos crescentes em escala na produção agregada.
- Romer (1990):

- setor de bens finais usa capital e uma variedade de insumos intermediários que incorporam ideias;
- ideias são protegidas por patentes, garantindo poder de monopólio temporário;
- lucros esperados de patentes justificam investimento em P&D.

- Consequência:
  - $\Rightarrow$ crescimento sustentado do estoque de conhecimento;
  - $\Rightarrow$ crescimento sustentado de produtividade e PIB per capita.

6.4 Estrutura básica do modelo de Romer

- Três blocos principais:
  1. Bens finais: utilizam trabalho e insumos intermediários que incorporam ideias.
  2. Setor de insumos intermediários: cada variedade é produzida por um monopolista que detém a patente.
  3. Setor de P&D: usa trabalho qualificado e conhecimento acumulado para produzir novas ideias.

- Equações típicas (esboço):
  - Produção de bens finais:
    $$Y = F(K, L_Y, A),$$
    onde A mede o número ou qualidade das ideias.
  - Produção de ideias:
    $$\dot{A} = \phi A^{\theta} L_A,$$
    com $0 < \theta \leq 1$, L_A trabalho em P&D.

- Integração:
  - alocação de trabalho entre produção e P&D é resultado de decisões privadas;
  - crescimento de A depende de incentivos econômicos (lucros esperados com novas ideias).

6.5 Equilíbrio e eficiência em Romer

- Em equilíbrio competitivo com patentes:
  - desenvolvedores de ideias internalizam apenas parte dos benefícios sociais de suas inovações;
  - há externalidades de conhecimento: nova ideia aumenta produtividade de toda a economia.
- Resultado típico:
  - número de pesquisadores L_A em equilíbrio é menor que o socialmente ótimo;
  - taxa de crescimento de equilíbrio é inferior à taxa de crescimento ótima.
- Intuição:
  - conhecimento é não-rival e parcialmente não-excludível;
  - lucros privados subestimam spillovers de conhecimento;
  - justifica papel de políticas de P&D, educação, proteção de propriedade intelectual, subsídios a inovação.

6.6 Modelos semi-endógenos (Jones)

- Evidência empírica sugere que crescimento de longo prazo não aumenta indefinidamente quando se expande esforço de P&D.
- Jones (1995) propõe:
$$\dot{A} = \phi A^{\theta} L_A, \quad 0 < \theta < 1.$$
- Consequência:
  - longo prazo: taxa de crescimento do conhecimento e do PIB per capita depende da taxa de crescimento da população (número de pesquisadores);
  - mudanças em poupança e em intensidade de P&D geram, principalmente, efeitos de nível, não de taxa de crescimento.
- Interpretação:
  - modelos semi-endógenos combinam intuições de Solow (importância de n) com intuições de Romer (papel de P&D e ideias).

7 Conexões e Resumo

7.1 Conexões entre Solow e crescimento endógeno

- **Solow clássico (sem tecnologia):**
  - convergência para steady state com PIB per capita constante;
  - poupança, população e depreciação determinam apenas nível de renda per capita.
- **Solow com progresso tecnológico exógeno:**
  - PIB per capita cresce à taxa de progresso tecnológico g;
  - modelo gera trajetória de crescimento balanceado que casa com Kaldor facts;
  - determina como parâmetros afetam níveis em torno da trajetória de crescimento.
- **Modelos endógenos:**
  - $Y = AK$: crescimento depende diretamente da taxa de poupança;
  - Romer (1990): crescimento resulta da interação entre mercado de ideias, P&D e retornos crescentes do conhecimento;
  - modelos semi-endógenos: papel crucial de população e P&D conjunto.

7.2 Resumo para a prova

- **Fatos**: Kaldor facts, aceleração pós-Revolução Industrial, importância de 1,5% ao ano sustentado.
- **Solow básico**:
  - estrutura $Y = F(K, L)$, dinâmica de k, steady state;
  - efeitos de s, n, δ e distinção nível vs taxa de crescimento.
- **Progresso tecnológico**:
  - $Y = F(K, AL)$, trabalho efetivo, trajetória de crescimento balanceado;
  - conexão com Kaldor: K/Y, factor shares e taxa de crescimento constantes.
- **Regra de Ouro**:
  - maximização de consumo de steady state, condição $f'(k_{gr}) = \delta + n$.

- **Contabilidade do crescimento**:
  - decomposição em capital, trabalho e TFP; importância do residual.
- **Endógeno**:
  - modelos $Y = AK$ e Romer (ideias, P&D, patentes);
  - externalidades de conhecimento, ineficiência do equilíbrio;
  - modelos semi-endógenos e dependência de n.

8 Aplicações em Crescimento

8.1 Crescimento: Ferreira, Pessoa & Veloso (2012)

- **Pergunta central:** Como evoluiu a **produtividade total dos fatores (TFP)** na América Latina desde 1960?
- **Principais fatos estilizados:**
  - Entre 1960–1980, TFP da América Latina era **alta**: cerca de 82% da TFP dos EUA.
  - Após o fim dos anos 1970, TFP **colapsa**: cai para 54% da TFP dos EUA em 2007.
  - Essa queda é robusta a: – diferentes bases de capital, – ajuste por recursos naturais, – inclusão de capital humano, – controle por qualidade da educação.
- **Metodologia:**
  - Modelo de contabilidade de crescimento:

$$y = A\,k^{\alpha}h^{1-\alpha}$$

  - Construção de capital via método do estoque perpétuo.
  - Capital humano via relação anos de estudo $\rightarrow$ produtividade (Bils & Klenow).
- **Principais conclusões:**
  - Antes de 1980, a América Latina não era pobre por TFP baixa, mas sim por **baixo capital físico e humano**.

  - Após 1980, o **declínio da TFP** explica a estagnação relativa da região.
  - Políticas de industrialização por substituição de importações não impediram TFP alta até 1980.

8.2 Crescimento: Itskhoki & Moll (2019)

- **Pergunta central:** Como fricções financeiras afetam o desenvolvimento de longo prazo e qual é o desenho ótimo de políticas de crescimento em economias com má alocação de capital?
- **Ambiente do modelo:**
  - Economia com empreendedores heterogêneos e restrições de crédito.
  - Capital não se move para os agentes mais produtivos $\Rightarrow$ **misallocation**.
  - A produtividade agregada depende da **distribuição** de capital entre agentes.
- **Resultados teóricos principais:**
  - O problema de política ótima é um problema de **Ramsey**: governo escolhe trajetórias de impostos, subsídios e empréstimos para maximizar bem-estar.
  - Fricções financeiras geram dois efeitos cruciais:
    * **Distortion effect**: impede que capital vá para agentes de alta produtividade.
    * **Redistribution effect**: políticas alteram a riqueza e, portanto, fricções futuras.
  - Políticas ótimas são **dinâmicas**: o governo deve intervir mais no curto prazo para corrigir má alocação e depois reduzir a intensidade da intervenção.
- **Implicações para Crescimento:**
  - Economias pobres com fricções financeiras crescem devagar porque a má alocação se auto-perpetua via distribuição de riqueza.
  - Políticas ótimas focam em **aceleração da realocação**: crédito direcionado, subsídios ao investimento para agentes produtivos, impostos redistributivos financiando alocação eficiente.
  - A convergência ao estado estacionário é lenta — crescimento sustentável exige melhorar a **eficiência alocativa**, não apenas aumentar poupança.

1 Objetivo dos capítulos 1 e 2

- Capítulo 1: construir uma teoria do consumidor a partir de axiomas sobre preferências, mostrar que ela admite representação via função utilidade e derivar a demanda Marshalliana por meio de um problema de maximização.
- Capítulo 2: explorar a **dualidade** do problema do consumidor (utilidade indireta e função de gasto), caracterizar **propriedades de demanda** (Slutsky, elasticidades) e introduzir **medidas de bem-estar** como CV, EV e excedente do consumidor.
- Em conjunto, os capítulos fornecem uma base axiomática e analítica para toda a teoria moderna de demanda e bem-estar.

2 Mapa conceitual - Teoria do Consumidor

1. **Axiomas e preferências**
   Definir espaço de consumo, relação de preferência e axiomas (completude, transitividade, continuidade, monotonicidade, convexidade).
2. **Representação por utilidade**
   Explicar que, sob esses axiomas, existe uma função utilidade contínua que representa as preferências (caráter ordinal, MRS).
3. **Problema do consumidor e demanda**
   Formular o problema primal, derivar FOCs, condição de tangência, demanda Marshalliana, homogeneidade e Lei de Walras.
4. **Dualidade**
   Introduzir utilidade indireta, função de gasto, demandas Hicksianas, identidade de Roy e lema de Shephard.
5. **Slutsky e propriedades de demanda**
   Decompor efeito preço em substituição e renda, matriz de Slutsky (simetria, negatividade) e conectar com integrabilidade.
6. **Bem-estar, preferência revelada e incerteza**
   Medidas de variação de bem-estar (CV, EV, ES), racionalização de demanda via preferência revelada e extensão para escolhas sob incerteza (VNM).

3 Preferências e Axiomas

3.1 Espaço de consumo e relação de preferência

- Espaço de consumo: conjunto de cestas

$$X \subseteq \mathbb{R}_{++},$$

  tipicamente convexo, fechado e não vazio.

- Elemento genérico: $x = (x_1, \ldots, x_n)$, onde $x_i \geq 0$ é a quantidade do bem i.
- Preferências do consumidor são descritas por uma relação binária

$$\succeq \subseteq X \times X,$$

  onde $x \succeq y$ significa que x é *pelo menos tão bom quanto* y.
- A partir de $\succeq$, definimos:
  - $x \succ y$ se $x \succeq y$ e não $y \succeq x$;
  - $x \sim y$ se $x \succeq y$ e $y \succeq x$.

3.2 Axiomas de preferência (1)

Axioma 1 (completude).

- Para todo $x, y \in X$: $x \succeq y$ ou $y \succeq x$ (ou ambos).
- Interpretação: o consumidor é capaz de comparar quaisquer duas cestas.

Axioma 2 (transitividade).

- Para todo $x, y, z \in X$: se $x \succeq y$ e $y \succeq z$, então $x \succeq z$.
- Garante consistência mínima do ranking.

Axioma 3 (continuidade).

- Para todo $x \in X$, os conjuntos

$$\{y \in X : y \succeq x\}, \quad \{y \in X : x \succeq y\}$$

  são fechados em X.
- Intuição: pequenas variações em x não provocam saltos bruscos nas preferências.

3.3 Axiomas de preferência (2)

Monotonicidade / Não-saciação local.

- Se $x \geq y$ componente a componente e $x \neq y$, então $x \succ y$.
- Mais de qualquer bem (sem reduzir outros) é estritamente melhor.
- Implica que a solução do problema do consumidor, quando existe, estará na fronteira do orçamento.

Convexidade.

- Se $x^1 \succeq x^0$, então $tx^1 + (1-t)x^0 \succeq x^0$ para todo $t \in [0, 1]$.
- Preferência por cestas "balanceadas" em relação a extremos.

Convexidade estrita.

- Se $x^1 \neq x^0$ e $x^1 \succeq x^0$, então $tx^1 + (1-t)x^0 \succ x^0$ para todo $t \in (0, 1)$.
- Implica curvas de indiferença estritamente convexas.

3.4 Conjuntos derivados e curvas de indiferença

Dada uma cesta $x^0 \in X$, definimos:

$$\begin{aligned} \succeq (x^0) &= \{x \in X : x \succeq x^0\} \quad \text{(conjunto superior)} \\ \preceq (x^0) &= \{x \in X : x^0 \succeq x\} \quad \text{(conjunto inferior)} \\ \sim (x^0) &= \{x \in X : x \sim x^0\} \quad \text{(curva de indiferença).} \end{aligned}$$

- Em $\mathbb{R}^2_+$, $\sim (x^0)$ é uma curva de indiferença passando por x^0.
- Axiomas de monotonicidade e convexidade implicam:
  - curvas de indiferença descendentes;
  - curvas convexas em direção à origem;
  - curvas não se cruzam (transitividade).

4 Representação por Utilidade

4.1 Função utilidade: definição e interpretação

Definição. Uma função $u : X \to \mathbb{R}$ é uma *função utilidade* que representa $\succeq$ se

$$x \succeq y \iff u(x) \geq u(y), \quad \forall x, y \in X.$$

- Utilidade é uma representação numérica do ranking de preferência.
- O valor de utilidade em si não é observável nem relevante: apenas a ordem importa.

Importante: utilidade é *ordinal*.

- Se u representa $\succeq$ e $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é estritamente crescente, então $v(x) = f(u(x))$ também representa $\succeq$.
- Qualquer transformação monotônica estrita preserva a ordem de preferência.
- Essa passagem de axiomas abstratos para uma função u é o passo conceitual central do Capítulo 1.

4.2 Teorema de representação por utilidade

Teorema (representação). Se $\succeq$ é completa, transitiva e contínua em um conjunto compacto e convexo $X \subset \mathbb{R}^n$, então existe uma função contínua $u : X \to \mathbb{R}$ que representa $\succeq$.

Relação entre axiomas e forma de u:

- Monotonicidade da preferência $\Rightarrow$ u estritamente crescente em cada argumento.
- Convexidade das preferências $\Rightarrow$ u *quasiconvexa*:

$$\{x \in X : u(x) \leq \alpha\} \text{ é convexo, } \forall \alpha.$$

- Convexidade estrita $\Rightarrow$ u estritamente quasiconvexa.

Isso garante a possibilidade de trabalhar com uma função utilidade bem-comportada sem perder o conteúdo das preferências subjacentes.

4.3 Taxa Marginal de Substituição (MRS)

Suponha que $u(x)$ é continuamente diferenciável.

Utilidade marginal:

$$MU_i(x) = \frac{\partial u(x)}{\partial x_i}.$$

Taxa marginal de substituição do bem 2 pelo bem 1:

$$MRS_{12}(x) = \left.\frac{dx_2}{dx_1}\right|_{u(x)=\text{cte}} = \frac{MU_1(x)}{MU_2(x)}.$$

- Ao longo de uma curva de indiferença, $du = 0$:

$$MU_1 dx_1 + MU_2 dx_2 = 0 \Rightarrow \frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{MU_1}{MU_2}.$$

- Com convexidade estrita, a MRS é decrescente ao longo da curva de indiferença.
- A MRS fornece o elo entre a geometria das curvas de indiferença e as condições de ótimo do consumidor.

5 Problema do Consumidor e Demanda Marshalliana

5.1 Conjunto orçamentário e problema primal

Dado vetor de preços $p \gg 0$ e renda $y > 0$, o conjunto orçamentário é

$$B(p, y) = \{x \in X : p \cdot x \leq y\}.$$

Problema primal do consumidor:

$$\max_{x \in X} u(x) \quad \text{sujeito a} \quad p \cdot x \leq y.$$

- Sob monotonicidade, a solução satisfaz $p \cdot x^* = y$.
- Sob continuidade e quasiconvexidade estrita de u, e compacidade de $B(p, y)$, existe solução única $x(p, y)$.
- Este problema é a base de toda a análise de demanda: o Capítulo 1 mostra como suposições sobre preferências se traduzem em propriedades de $x(p, y)$.

5.2 Lagrangiano, FOCs e condição de tangência

Lagrangiano:

$$\mathcal{L}(x, \lambda) = u(x) + \lambda(y - p \cdot x).$$

Condições de primeira ordem (solução interior):

$$\frac{\partial u}{\partial x_i}(x^*) = \lambda^* p_i, \quad i = 1, \ldots, n,$$

além da restrição orçamentária $p \cdot x^* = y$.

Condição de tangência:

$$\frac{MU_i(x^*)}{MU_j(x^*)} = \frac{p_i}{p_j} \quad \Rightarrow \quad MRS_{ij}(x^*) = \frac{p_i}{p_j}.$$

- No ponto ótimo interior, a inclinação da curva de indiferença coincide com a inclinação da reta orçamentária.

5.3 Demanda Marshalliana e propriedades

Denotamos a solução do problema primal por $x(p, y)$: **demanda Marshalliana**.

Propriedades fundamentais:

- **Homogeneidade de grau zero**:

$$x(\lambda p, \lambda y) = x(p, y), \quad \forall \lambda > 0.$$

- **Lei de Walras**:

$$p \cdot x(p, y) = y.$$

  Intuição: no ótimo, o consumidor sempre gasta exatamente toda a renda. Não faz sentido deixar parte do orçamento ocioso, pois a monotonicidade das preferências garante que gastar mais em qualquer bem sempre aumenta a utilidade. A Lei de Walras formaliza essa ideia: no ponto de escolha ótima, a despesa total é igual à renda.

- **Resposta à renda**: bens normais têm $\partial x_i / \partial y > 0$.
- **Bens inferiores**: $\partial x_i / \partial y < 0$.
- **Bens de Giffen**: possível ter $\partial x_i / \partial p_i > 0$ se o efeito renda domina o efeito substituição.

5.4 Exemplo: Cobb–Douglas

Considere $u(x) = x_1^{\alpha} x_2^{1-\alpha}$, com $\alpha \in (0, 1)$.

- Problema: $\max x_1^{\alpha} x_2^{1-\alpha}$ s.t. $p_1 x_1 + p_2 x_2 \leq y$.
- Lagrangiano: $\mathcal{L} = \alpha \ln x_1 + (1 - \alpha) \ln x_2 + \lambda(y - p_1 x_1 - p_2 x_2)$.
- FOCs:

$$\frac{\alpha}{x_1} = \lambda p_1, \quad \frac{1 - \alpha}{x_2} = \lambda p_2.$$

- Solução:

$$x_1(p, y) = \alpha \frac{y}{p_1}, \quad x_2(p, y) = (1 - \alpha) \frac{y}{p_2}.$$

- Cada bem recebe uma fração fixa da renda.

6 Dualidade: Utilidade Indireta e Função de Gasto

6.1 Função utilidade indireta

Definição:

$$v(p, y) = \max\{u(x) : p \cdot x \leq y\}.$$

Propriedades:

- Homogênea de grau zero em (p, y).
- Crescente em y.
- Não crescente em cada p_i.
- Quase-convexa em p.

Significado econômico:

- Para cada par (p, y), $v(p, y)$ dá o *máximo nível de utilidade* que o consumidor consegue atingir diante daqueles preços e daquela renda.
- Podemos interpretar v como uma "função de bem-estar" em termos de mercado: ela resume o problema de escolha ótima em um único número que depende apenas de (p, y), não mais da cesta x.

Sob hipóteses regulares, v é diferenciável em (p, y) e captura o "valor" da solução do problema primal.

6.2 Intuição econômica da dualidade

- O problema primal pergunta: dado (p, y), *qual cesta* o consumidor escolhe para maximizar utilidade?
- A função utilidade indireta responde: dado (p, y), *qual é o nível máximo de bem-estar* que o consumidor consegue atingir?
- A função de gasto pergunta o dual: dado (p, u), *quanto custa* atingir aquele nível de utilidade?
- Os capítulos 1 e 2 mostram que essas duas visões (escolha ótima e custo mínimo) são completamente equivalentes e geram as mesmas restrições sobre a demanda.

6.3 Identidade de Roy

Pelo teorema do envelope aplicado ao problema primal:

$$\frac{\partial v}{\partial y}(p, y) = \lambda^*(p, y), \quad \frac{\partial v}{\partial p_i}(p, y) = -\lambda^*(p, y)\, x_i(p, y).$$

Identidade de Roy:

$$x_i(p, y) = -\frac{\partial v(p, y)/\partial p_i}{\partial v(p, y)/\partial y}.$$

- Permite recuperar a demanda Marshalliana a partir da utilidade indireta.
- Mostra a conexão entre variações marginais em preços/renda e escolhas ótimas.

6.4 Função de gasto e demanda Hicksiana

Função de gasto:

$$e(p, \bar{u}) = \min\{p \cdot x : u(x) \geq \bar{u}\}.$$

Propriedades:

- Homogênea de grau 1 em p.
- Crescente em $\bar{u}$.
- Côncava em p.

A solução desse problema define a **demanda Hicksiana**:

$$h(p, \bar{u}) \in \arg\min\{p \cdot x : u(x) \geq \bar{u}\}.$$

6.5 Lema de Shephard

Sob diferenciabilidade de $e(p, \bar{u})$ em p:

Lema de Shephard:

$$\frac{\partial e(p, \bar{u})}{\partial p_i} = h_i(p, \bar{u}).$$

- A derivada do gasto mínimo em relação ao preço do bem i fornece a demanda Hicksiana desse bem.
- Esse resultado é a contrapartida dual da identidade de Roy.

Relação primal–dual importante:

$$x(p, y) = h(p, v(p, y)).$$

7 Slutsky, Matriz de Substituição e Integrabilidade

7.1 Equação de Slutsky

Usando a identidade $x(p, y) = h(p, v(p, y))$ e a regra da cadeia:

$$\frac{\partial x_i}{\partial p_j} = \frac{\partial h_i}{\partial p_j} + \frac{\partial h_i}{\partial \bar{u}} \cdot \frac{\partial v(p, y)}{\partial p_j}.$$

Manipulando com Roy e Shephard, obtemos a forma usual:

$$\frac{\partial x_i}{\partial p_j} = \underbrace{\frac{\partial h_i}{\partial p_j}}_{\text{substituição (Hicksiana)}} - x_j \underbrace{\frac{\partial x_i}{\partial y}}_{\text{efeito renda}}.$$

Interpretação:

- O termo $\frac{\partial h_i}{\partial p_j}$ mede o *efeito de substituição compensado*: como a demanda pelo bem i reage a uma variação em p_j quando o consumidor é compensado na renda de forma a manter o mesmo nível de utilidade.

- Ou seja, isolamos a pura resposta de substituição entre bens, mantendo constante o bem-estar, e separamos esse componente do *efeito renda* capturado por $-x_j \frac{\partial x_i}{\partial y}$.

- O efeito total de um aumento no preço p_j sobre x_i é a soma do efeito substituição (compensado) e do efeito renda.

7.2 Bem-estar do consumidor (CV, EV, ES)

7.2.1 Variações compensatória (CV) e equivalente (EV)

Seja uma mudança de preço de p^0 para p^1, com utilidades $u^0 = v(p^0, y)$ e $u^1 = v(p^1, y)$.

Variação compensatória (CV):

$$CV = e(p^1, u^0) - e(p^1, u^1).$$

Interpretação: quanto seria necessário compensar o consumidor, após o aumento de preço, para que ele volte ao nível original de utilidade.

Variação equivalente (EV):

$$EV = e(p^0, u^0) - e(p^0, u^1).$$

Interpretação: quanto o consumidor estaria disposto a pagar *antes* da mudança para evitar o aumento de preço.

7.2.2 Excedente do Consumidor (ES)

Sob utilidade quasilinear $u(x_1, x_2) = x_1 + v(x_2)$:

$$ES = \int_{p_1^1}^{p_1^0} x_1(p)\, dp.$$

- Representa o ganho monetário aproximado devido a mudança de preço.

- Se a utilidade é quasilinear, ES coincide exatamente com CV e EV.

- Em outros casos, ES é apenas uma aproximação, mas ainda assim bastante utilizada em aplicações empíricas.

Relação gráfica:

- ES é a área entre curva de demanda Marshalliana e o preço.

8 Preferência Revelada

8.1 Problema de escolha e preferência revelada

- Observamos escolhas do consumidor $C(p, y)$ em diferentes problemas orçamentários (p, y):

$$B(p, y) = \{x \in X : p \cdot x \leq y\}, \quad C(p, y) \subseteq B(p, y).$$

- A partir de um ponto $x \in C(p, y)$, dizemos que:

$$x \text{ é } \textit{preferido revelado} \text{ a } y \in B(p, y)$$

porque, tendo y disponível, o consumidor escolheu x.

- Preferência revelada usa dados de escolha para inferir um ranking de preferência implícito, sem supor utilidade a priori.

8.2 Relação de preferência revelada direta e WARP

Preferência revelada direta.

- Dizemos que x é *diretamente preferido revelado* a y, e escrevemos

$$xR^0y,$$

se existe algum orçamento (p, y) tal que $x \in C(p, y)$ e $y \in B(p, y)$.

WARP (Weak Axiom of Revealed Preference).

- Se xR^0y e yR^0x, então $x = y$.
- Intuição: não é possível observar o consumidor escolhendo estritamente "ambos" contra o outro quando os dois são factíveis — isso violaria consistência mínima das escolhas.

8.3 Racionalização de demanda e preferência revelada

- Pergunta central: existe uma relação de preferência (ou uma função utilidade) tal que, para cada (p, y), o conjunto de escolhas observadas $C(p, y)$ é solução de um problema de maximização de utilidade? Resposta: sim, sob uma versão mais forte de WARP (GARP).
- Ideia é que preferência revelada é a ponte entre a teoria axiomática (utilidade) e o comportamento observado (demanda); se os dados "se comportam bem", eles podem ser vistos como resultado da maximização de alguma função utilidade. Agenda de pesquisa de McFadden consiste em operacionalizar essa ideia empiricamente.

9 Incerteza e Utilidade Esperada

9.1 Consumo sob incerteza: loterias

- Agora, em vez de escolher cestas certas, o consumidor escolhe entre *loterias* sobre cestas.
- Seja $\{x^1, \dots, x^n\}$ o conjunto de possíveis resultados (cestas ou níveis de riqueza).
- Uma loteria é um vetor de probabilidades

$$p = (p_1, \dots, p_n), \quad p_i \geq 0, \ \sum_{i=1}^{n} p_i = 1,$$

  indicando a probabilidade de cada resultado x^i.
- O espaço de escolha é o simplex de probabilidades $\Delta(X)$; o consumidor tem preferências sobre loterias.

9.2 Axiomas de Von Neumann–Morgenstern

Para preferências sobre loterias, supomos:

- Completude e transitividade (como antes).
- **Continuidade**: pequenas variações nas probabilidades não mudam abruptamente o ranking.
- **Independência**: se o consumidor prefere p a q, então também prefere

$$\alpha p + (1-\alpha) r \quad \text{a} \quad \alpha q + (1-\alpha) r,$$

  para qualquer loteria r e $\alpha \in (0,1)$.

Teorema de representação VNM.

- Sob esses axiomas, existe uma função u tal que as preferências podem ser representadas por *utilidade esperada*:

$$U(p) = \sum_{i=1}^{n} p_i \, u(x^i).$$

- u é única a menos de transformações afim positivas: $v = a + bu$, com $b > 0$.

9.3 Atitude ao risco

Considere loterias sobre riqueza w e uma função utilidade von Neumann–Morgenstern $u(w)$.

- **Aversão ao risco**: u é estritamente côncava.

$$u\Big(\mathbb{E}[w]\Big) > \mathbb{E}[u(w)].$$

  O consumidor prefere a riqueza certa $\mathbb{E}[w]$ à loteria com mesma média.
- **Neutro ao risco**: u linear.

- **Amante do risco**: u estritamente convexa.

Conceitos relacionados:

- *Prêmio de risco*: quantia máxima que o consumidor estaria disposto a pagar para substituir a loteria por sua média certa.

- A atitude ao risco é capturada inteiramente pela curvatura de u.

10 Aplicações

10.1 Gruber & Kőszegi (2001): Consumidores com autocontrole imperfeito e tributação ótima

- **Ideia central do paper:** Pessoas que consomem bens viciantes (como cigarros) apresentam **preferências inconsistentes no tempo**: no futuro desejam consumir menos do que escolhem no presente. Isso viola o modelo padrão da Teoria do Consumidor, que assume preferências estáveis e consistentes.
- **Modelo de comportamento:** Os autores usam um modelo de **desconto quase-hiperbólico** $((\beta) - (\delta))$ no qual:

$$U_t = u(c_t) + \beta \sum_{s>t} \delta^{s-t} u(c_s), \qquad \beta < 1.$$

  O "eu do presente" supervaloriza o consumo imediato e ignora o custo para o "eu do futuro".
- **Consequência para Teoria do Consumidor:** O consumidor gera uma **internalidade**: um dano que ele mesmo impõe ao seu eu futuro. Assim, o consumo observado **não revela verdadeiramente suas preferências de longo prazo** — violando o núcleo da teoria padrão (preferências estáveis + maximização consistente).
- **Implicação normativa:** O imposto ótimo sobre bens como cigarros deve corrigir:

$$\text{Imposto ótimo} = \text{externalidade} + \text{internalidade}.$$

  Ou seja: além das externalidades clássicas, o imposto funciona como um **mecanismo de autocontrole** que aproxima o comportamento real do comportamento desejado pelo "eu de longo prazo".
- **Como usar na prova:** Este paper mostra como violações dos axiomas de preferência (consistência, estabilidade, racionalidade dinâmica) alteram conclusões sobre demanda e bem-estar e justificam políticas distintas das derivadas da teoria padrão.

10.2 Jensen & Miller (2008): Evidência de Bens de Giffen

Objetivo do paper: fornecer evidência causal de demanda crescente (Giffen behavior) entre consumidores extremamente pobres, exatamente sob as condições previstas pela teoria neoclássica.

- **Contexto teórico:** Demanda Marshalliana:

$$\frac{\partial x}{\partial p} = \underbrace{\frac{\partial h}{\partial p}}_{\text{substituição}} - x \underbrace{\frac{\partial x}{\partial y}}_{\text{efeito-renda}}.$$

  Giffen ocorre quando o bem é *fortemente inferior* e o efeito-renda domina o efeito-substituição.
- **Condições necessárias**:
  - pobreza extrema, mas não absoluta ("subsistence zone");
  - bem básico barato e muito calórico (arroz/trigo);

– existência de um “bem de luxo alimentar” para onde deslocar gasto.

Desenho experimental:

- Experimento randomizado em duas províncias chinesas: Hunan (arroz) e Gansu (trigo).
- 1.300 famílias muito pobres; subsídios aleatórios ao preço do alimento básico (0.10–0.30 RMB/jin).
- Três ondas de dados: pré-tratamento, durante o subsídio e pós-tratamento.

10.3 Resultados principais de Jensen & Miller (2008)

Resultados principais:

- **Hunan**: elasticidades-preço positivas robustas para arroz (demanda crescente), principalmente entre famílias “pobres-intermediárias”.
- Resposta em formato de U invertido: muito pobres (pouca substituição) e menos pobres (bem menos inferior) $\Rightarrow$ elasticidade negativa.
- **Gansu**: resultados mais fracos devido a: (i) dieta pouco diversificada; (ii) muitos substitutos próximos para trigo.

Contribuição:

- Primeira evidência empírica clara de bens de Giffen.
- Mostra que as previsões da teoria do consumidor são consistentes: elasticidade pode ser positiva em ambiente de subsistência.
- Implicação: subsídios alimentares podem não aumentar ingestão calórica se a família estiver na “zona Giffen”.

11 Resumo e Conexões

11.1 Resumo dos capítulos 1 e 2

Nível das preferências

- Partimos de um espaço de consumo $X \subseteq \mathbb{R}^n_+$ e de uma relação de preferência $\succeq$.
- Axiomas de completude, transitividade, continuidade, monotonicidade e convexidade garantem um ranking bem-comportado sobre cestas.
- Sob essas hipóteses, existe uma função utilidade contínua u que representa $\succeq$, com caráter estritamente ordinal.

Nível das escolhas

- O consumidor resolve o problema primal $\max u(x)$ s.a. $p \cdot x \leq y$, gerando a demanda Marshalliana $x(p, y)$.
- A solução satisfaz homogeneidade de grau zero, Lei de Walras, respostas a renda (bens normais, inferiores, Giffen) e propriedades de elasticidades e equações de Cournot–Engel.

11.2 Resumo (dualidade, bem-estar e extensões)

Dualidade e propriedades de demanda

- A utilidade indireta $v(p, y)$ resume o nível máximo de bem-estar dado (p, y) e, via identidade de Roy, gera $x(p, y)$.
- A função de gasto $e(p, u)$ e a demanda Hicksiana $h(p, u)$ permitem definir respostas compensadas, levando à equação de Slutsky.
- A matriz de Slutsky, simétrica e negativa semidefinida, é central para as restrições sobre sistemas de demanda e para o problema de integrabilidade.

Bem-estar, preferência revelada e incerteza

- CV, EV e ES fornecem medidas monetárias de variação de bem-estar associadas a mudanças de preços, com coincidência sob utilidade quasilinear.
- A teoria de preferência revelada mostra como racionalizar dados de demanda por meio de uma preferência (e, sob condições, uma utilidade) consistente com WARP/GARP.
- Sob incerteza, axiomas à la Von Neumann–Morgenstern levam à representação por utilidade esperada, e a curvatura de u sobre riqueza caracteriza a atitude ao risco.

12 Resumo e Conexões

12.1 Resumo dos capítulos 1 e 2 (revisão final)

- Axiomatização das preferências: completude, transitividade, continuidade, monotonicidade e convexidade.
- Existência de uma função utilidade contínua que representa a relação de preferência.
- Problema primal do consumidor: maximização de utilidade sob restrição orçamentária $\rightarrow$ demanda Marshalliana.
- Estrutura dual:
  - Utilidade indireta $v(p, y)$ e identidade de Roy.
  - Função de gasto $e(p, u)$, demanda Hicksiana $h(p, u)$ e lema de Shephard.
- Equação de Slutsky: decomposição do efeito preço em substituição e renda; matriz de Slutsky simétrica e negativa semidefinida.
- Capítulo 2 aprofunda: elasticidades, restrições de agregação (Cournot–Engel) e medidas de bem-estar (CV, EV, ES).
- Essas peças fecham a teoria do consumidor como base para modelos de equilíbrio geral, tributação ótima e avaliação de políticas.

1 Noções Primitivas e Objetivo da Firma

1.1 O que é uma firma?

- A firma é uma **entidade** criada por indivíduos para um propósito (tipicamente, produção e venda de bens/serviços).
- Ela:
  - adquire **insumos** em mercados de fatores (mão de obra, capital, energia, etc.);
  - transforma esses insumos em **produto**;
  - vende o produto em **mercados de bens**, gerando receita.
- **Lucro**: diferença entre **receita** (venda do output) e **custo** (gasto com insumos).
- A hipótese central: a firma **maximiza lucro econômico**, sujeita:
  - à tecnologia de produção disponível;
  - às condições de mercado para insumos e produto.

1.2 Por que maximização de lucro?

- Lucro é a renda dos proprietários da firma, que são também **consumidores**:
$$\text{Lucro} = \text{Receita} - \text{Custo} \quad \Rightarrow \quad \text{mais lucro} \Rightarrow \text{mais consumo possível.}$$
- Hipótese análoga à maximização de utilidade no lado do consumidor:
  - simples e consistente com comportamento auto-interessado;
  - gera previsões empiricamente razoáveis;
  - outras motivações (vendas, market share, prestígio) podem ser vistas como meios de **longo prazo** para maximizar lucro.
- Forças de mercado:
  - proprietários têm incentivo a substituir gestores que não maximizam lucro;
  - outsiders podem adquirir firmas mal-geridas e reorganizá-las.
- Assim, supomos sempre que a decisão da firma é guiada pela **maximização de lucro**, dadas suas restrições.

2 Tecnologia e Conjunto de Produção

2.1 Tecnologia da Firma

- A firma transforma insumos $x = (x_1, \ldots, x_n)$ em produto $y \in \mathbb{R}_+$.
- Tecnologia mais geral: **conjunto de produção**:
$$Y = \{(y, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n_+ : x \text{ pode produzir } y\}.$$
- Para um único produto, é conveniente representar por uma **função de produção**:
$$f(x) : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}_+, \quad y = f(x).$$
- Interpretação: $f(x)$ é o **máximo output** que pode ser produzido com o vetor de insumos x.

2.2 Propriedades da função de produção

Assumimos normalmente que $f : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}_+$ é:

- **Contínua**: pequenas variações em $x \Rightarrow$ pequenas variações em $f(x)$.
- **Estritamente crescente**: empregar estritamente mais de **cada** insumo gera estritamente mais output:
$$x' \gg x \Rightarrow f(x') > f(x).$$
- **Estritamente quasiconcava**: isoquantas convexas (há trade-offs suaves e algum grau de complementariedade entre insumos).
- **Normalização**: $f(0) = 0$ (sem insumos, sem produto).

Intuição da quasiconcavidade:

- combinações "médias" de insumos são tecnologicamente mais eficientes do que extremos (muito de um insumo e quase nada de outro);
- representa complementariedade: ambos insumos são importantes para gerar produção.

2.3 Isoquantas, produto marginal e TMST

- Para um nível de output y, a **isoquanta** é:
$$Q(y) = \{x \geq 0 : f(x) = y\}.$$
- **Produto marginal** do insumo i:
$$MP_i(x) = \frac{\partial f(x)}{\partial x_i}.$$
- **Produto médio** do insumo i:
$$AP_i(x) = \frac{f(x)}{x_i}.$$
- **Taxa Marginal de Substituição Técnica** do insumo j pelo insumo i:
$$TMST_{ij}(x) = \frac{MP_i(x)}{MP_j(x)} = -\frac{dx_j}{dx_i}\bigg|_{f(x)=y}.$$
- Intuição: quanto do insumo j precisa ser aumentado para compensar uma redução marginal em x_i, mantendo o mesmo nível de produção.

2.4 Retornos à escala: global e local

Seja $\lambda > 0$. Dizemos que f tem:

- **Retornos constantes à escala (CRS)**:
$$f(\lambda x) = \lambda f(x) \quad \forall \lambda > 0.$$
- **Retornos crescentes à escala (IRS)**:
$$f(\lambda x) > \lambda f(x) \quad \text{para } \lambda > 1.$$

- **Retornos decrescentes à escala (DRS)**:

$$f(\lambda x) < \lambda f(x) \quad \text{para } \lambda > 1.$$

Elasticidade de escala (medida local):

$$\mu(x) = \sum_{i=1}^{n} \mu_i(x), \quad \mu_i(x) = \frac{MP_i(x)\, x_i}{f(x)}.$$

- $\mu(x) = 1$: localmente CRS;
- $\mu(x) > 1$: localmente IRS;
- $\mu(x) < 1$: localmente DRS.

Distinção importante: retornos à escala (varia todos insumos proporcionalmente) vs **retornos a proporções variáveis** (curvas em que só um insumo varia, mantendo outros fixos).

3 Minimização de Custo

3.1 Problema de minimização de custo

Dado vetor de preços dos insumos $w \gg 0$ e nível de produção desejado y:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n_+} \{w \cdot x : f(x) \geq y\}.$$

- Solução: **demanda condicional de insumos** $x(w, y)$.
- Valor mínimo: **função custo**

$$c(w, y) = \min\{w \cdot x : f(x) \geq y\}.$$

- Interpretação: custo mínimo de produzir y quando a firma pode escolher livremente todos os insumos aos preços w (custo de **longo prazo**).

3.2 Condições de tangência e FOCs

Lagrangiano:

$$\mathcal{L}(x, \lambda) = w \cdot x + \lambda(y - f(x)).$$

FOCs (interior):

$$w_i = \lambda^* MP_i(x^*), \quad \forall i.$$

Condição de tangência:

$$TMST_{ij}(x^*) = \frac{MP_i(x^*)}{MP_j(x^*)} = \frac{w_i}{w_j}.$$

- No ponto de custo mínimo, a inclinação da isoquanta (TMST) é igual à razão de preços dos insumos.
- Análogo à condição de tangência do consumidor (MRS = razão de preços).

3.3 Propriedades da função custo

- **Homogeneidade de grau 1 em preços**:

$$c(\lambda w, y) = \lambda c(w, y).$$

- **Não decrescente em** y: produzir mais exige (fraca) elevação do custo mínimo.
- **Não decrescente em cada** w_i.
- **Côncava em** w.
- **Contínua** e $c(w, 0) = 0$.

Essas propriedades são análogas às da função de gasto no problema do consumidor, e são cruciais para a dualidade em produção.

3.4 Lema de Shephard e demanda condicional

Se $c(w, y)$ é diferenciável em w:

$$\frac{\partial c(w, y)}{\partial w_i} = x_i(w, y) \quad \text{(demanda condicional de insumo } i\text{).}$$

- A derivada do custo mínimo em relação ao preço de um insumo fornece a quantidade ótima daquele insumo.
- O **vetor de demandas condicionais** herda propriedades de Hicks:
  - homogêneo de grau zero em w;
  - matriz de substituição simétrica e semi-definida negativa (efeitos substituição compensados).

3.5 Custo de curto prazo e envelope

- No **curto prazo**, alguns insumos são fixos (por exemplo, capital):

$$z = (x, \bar{x}), \quad \bar{x} \text{ fixo.}$$

- Custo de curto prazo (ou **restrito**):

$$sc(w, \bar{w}, y; \bar{x}) = \min_x \{w \cdot x + \bar{w} \cdot \bar{x} : f(x, \bar{x}) \geq y\}.$$

- Custo de longo prazo é sempre **menor ou igual** ao de curto prazo para um dado y.
- **Resultado importante:** o custo de longo prazo é o **envoltório inferior** da família de curvas de custo de curto prazo:

$$c(w, y) = sc(w, \bar{w}, y; \bar{x}(y)),$$

  com $\bar{x}(y)$ escolhido para minimizar o custo de curto prazo.

4 Dualidade Produção–Custo

4.1 Dualidade completa em produção

- A tecnologia (f ou Y) determina a função custo $c(w, y)$.
- Reciprocamente, uma função $c(w, y)$ com as propriedades adequadas determina uma tecnologia subjacente:

$$f(x) = \sup\{y \geq 0 : c(w, y) \leq w \cdot x, \ \forall w \gg 0\}.$$

- Análogo exato de utilidade $\leftrightarrow$ função de gasto.
- Se f é quasiconcava, a tecnologia recuperada a partir de c coincide com a original.
- **Conexão com o consumidor**:
  - consumidor: $u(x)$, $e(p, u)$, $v(p, y)$;
  - firma: $f(x)$, $c(w, y)$, $\pi(p, w)$.
- Em ambos os casos, a estrutura dual permite ir de **comportamento observado** (demanda/oferta) para **preferências/tecnologia** subjacentes.

5 Maximização de Lucro

5.1 Problema de maximização de lucro

Em mercados competitivos (firma tomadora de preços em insumos e produto):

$$\max_{x \geq 0} \{\pi(p, w) = pf(x) - w \cdot x\}.$$

- p: preço do output, tomado como dado.
- w: vetor de preços dos insumos, tomados como dados.
- Solução: $x^*(p, w)$, $y^*(p, w) = f(x^*)$.

FOCs (interior):

$$p\, MP_i(x^*) = w_i \quad \forall i.$$

Interpretação:

- $p\, MP_i$: **produto de receita marginal** do insumo i.
- Condição de ótimo: VRM do insumo i = custo marginal desse insumo.

5.2 Lucro via custo: condição $p = CMg$

Podemos reescrever o problema em dois passos:

1. Para cada nível de output y, determinar o **custo mínimo** $c(w, y)$.
2. Escolher y para maximizar:

$$\max_{y \geq 0} \{py - c(w, y)\}.$$

FOC (se $y^* > 0$):

$$p = \frac{\partial c(w, y)}{\partial y}\bigg|_{y=y^*} = CMg(w, y^*).$$

- Em equilíbrio competitivo, a firma escolhe y^* tal que **preço = custo marginal**, com CMg não decrescente no ótimo.
- Se CRS e lucro econômico nulo, temos $p = CM = CMg$.

5.3 Função lucro e Lema de Hotelling

$$\pi(p, w) = \max_{x \geq 0} \{pf(x) - w \cdot x\}.$$

Propriedades:

- **Homogênea de grau 1** em (p, w).
- **Contínua** e **convexa** em (p, w).
- **Não decrescente** em p, **não crescente** em cada w_i.

Se f é estritamente côncava e π é diferenciável:
Lema de Hotelling:

$$\frac{\partial \pi}{\partial p} = y^*(p, w), \qquad \frac{\partial \pi}{\partial w_i} = -x_i^*(p, w).$$

- Derivadas da função lucro geram:
  - **oferta** da firma em função de (p, w);
  - **demanda ótima de insumos** (demanda de lucro-maximização).

6 Casos Clássicos: Cobb–Douglas e CES

6.1 Tecnologia Cobb–Douglas

$$f(x_1, x_2) = Ax_1^\alpha x_2^\beta, \quad A > 0, \ \alpha, \beta > 0.$$

- $MP_1 = \alpha A x_1^{\alpha-1} x_2^\beta, \quad MP_2 = \beta A x_1^\alpha x_2^{\beta-1}.$
- TMST:

$$TMST_{12}(x) = \frac{MP_1}{MP_2} = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{x_2}{x_1}.$$

- Retornos à escala:

$$\alpha + \beta \begin{cases} > 1 & \text{IRS}, \\ = 1 & \text{CRS}, \\ < 1 & \text{DRS}. \end{cases}$$

- Produção linearmente homogênea ($\alpha + \beta = 1$) implica concavidade de f e custos proporcionais ao nível de output.

6.2 Tecnologia CES

$$f(x_1, x_2) = \left(\alpha x_1^\rho + (1-\alpha) x_2^\rho\right)^{1/\rho}, \quad 0 \le \rho < 1.$$

- **Elasticidade de substituição** constante:

$$\sigma = \frac{1}{1-\rho}.$$

- Casos limite:
  - Cobb–Douglas: $\rho \to 0 \Rightarrow \sigma \to 1$.
  - Leontief: $\rho \to -\infty \Rightarrow \sigma \to 0$ (inputs em proporções fixas).
  - Perfeita substituição: $\rho \to 1 \Rightarrow \sigma \to \infty$.

- Muito usado porque permite calibrar o grau de substituição entre insumos via σ.

7 Conexões - Res

7.1 Teoria da Firma (Capítulo 3)

1. Tecnologia e comportamento da firma

- A firma é modelada como **maximizadora de lucro**:

$$\pi = pf(x) - w \cdot x.$$

- Tecnologia descrita por $f(x)$ (contínua, crescente, quasiconcava, $f(0) = 0$).

- Isoquantas, produto marginal, produto médio, TMST e elasticidade de substituição.

- Retornos à escala (CRS, IRS, DRS) e elasticidade de escala $\mu(x)$, distinguindo variações proporcionais de todos os insumos de movimentos ao longo de uma única dimensão.

2. Custos e dualidade em produção

- Minimização de custo:

$$c(w, y) = \min\{w \cdot x : f(x) \ge y\}$$

  define a **demanda condicional** $x(w, y)$.

- Propriedades de c: homogênea de grau 1 em w, côncava em w, não decrescente em y.

- Lema de Shephard: $\partial c / \partial w_i = x_i(w, y)$.

- Custo de curto prazo (insumos fixos) e relação envelope: o custo de longo prazo é o **envoltório inferior** dos custos de curto prazo.

- Dualidade: assim como no consumidor (utilidade $\leftrightarrow$ função de gasto), em produção temos tecnologia $\leftrightarrow$ função custo.

7.2 Ligações com Teoria do Consumidor

3. Lucro, oferta e demanda de insumos

- Problema de maximização de lucro:

$$\max_x \{pf(x) - w \cdot x\}.$$

- Condição de ótimo: $p\, MP_i(x^*) = w_i$ (produto de receita marginal = custo do insumo).
- Formulação via custo:

$$\max_y \{py - c(w, y)\} \Rightarrow p = CMg(w, y^*).$$

- Função lucro $\pi(p, w)$: homogênea de grau 1, convexa em (p, w), crescente em p, decrescente em w.
- Lema de Hotelling:

$$\frac{\partial \pi}{\partial p} = y^*(p, w), \quad \frac{\partial \pi}{\partial w_i} = -x_i^*(p, w),$$

fornecendo oferta e demanda ótima de insumos.

4. Conexão conceitual com o consumidor (para a prova)

- Consumidor: maximiza $u(x)$ sob $p \cdot x \leq y \Rightarrow$ demanda Marshalliana, função de gasto, utilidade indireta.
- Firma: maximiza $\pi(p, w)$ dado $f(x) \Rightarrow$ oferta de output, demanda de insumos, função custo e função lucro.
- Nos dois lados:
  - há um **problema primal** (maximização de utilidade ou lucro);
  - uma **representação dual** (gasto/custo, utilidade indireta/lucro);
  - identidades de envelope (Roy, Shephard, Hotelling) ligando funções de valor a escolhas ótimas.
- Essa simetria estrutural é o fio condutor entre teoria do consumidor e teoria da firma e aparece explicitamente em modelos de equilíbrio geral.

8 Teoria da Firma e Evidência Empírica

8.1 Teoria da Firma: Grubb (2009) – Selling to Overconfident Consumers

Ideia central:

- Consumidores são **sobreconfiantes** sobre seu uso futuro (subestimam consumo extra, penalidades, add-ons).
- Firmas exploram essa falha comportamental para extrair mais lucro via menus de contratos.

Estrutura do modelo:

- Consumidores acreditam que usarão pouco o serviço/produto, mas realizam consumo maior ex post (ex.: telefonia, cartões de crédito).
- A firma escolhe um menu de preços com uma parte "barata" e uma parte "cara" (tarifa básica + tarifas surpresa).
- A sobreconfiança gera demanda mais elástica para preços iniciais e inelástica para add-ons.

Comportamento ótimo da firma:

- Firma usa **preço-bait**: um preço de entrada baixo e altamente atraente.
- Depois recupera lucro cobrando **preços altos em contingências raras** (tarifas de uso adicional, penalidades, upgrades).
- Estratégia é ótima porque consumidores erram sistematicamente previsões de uso.

Implicações para Teoria da Firma:

- A firma maximiza lucro explorando vieses comportamentais, não apenas custos marginais.
  - Autor mostra que estrutura de tarifa não linear se mantém mesmo em mercados competitivos, em que poderia se esperar precificação linear.
- O contrato se torna um instrumento de **screening comportamental**: discrimina consumidores racionais vs. sobreconfiantes.
- A firma pode ter incentivos para tornar preços menos transparentes.
- Resultado: estrutura de preços distorcida e potencial ineficiência alocativa.

8.2 Teoria da Firma: Buera, Kaboski & Shin (2011); Buera & Shin (2013)

Ambiente microeconômico comum:

- Firmas operadas por empreendedores heterogêneos em habilidade e e riqueza a (produtividade individual específica).
- Escala ótima depende de capital e trabalho: existem retornos reduzidos via *span of control* $(1 - n)$, como no modelo
$$f(e, k, l) = e(k^{\alpha} l^{1-\alpha})^{1-n}.$$
- **Restrição colateral**: $k \leq \lambda a$ limita o tamanho da firma e gera operação abaixo da escala eficiente para empreendedores talentosos e pobres.

Buera, Kaboski & Shin (2011): má alocação estática

- Em equilíbrio, fricções financeiras geram:
  - firmas eficientes operando pequenas demais;
  - firmas ineficientes operando grandes demais por terem mais riqueza;
  - entrada/saída distorcidas.

- Resultado: distribuição de tamanho de firmas distorcida e TFP agregada baixa por má alocação de capital e talento.

Buera & Shin (2013): dinâmica e persistência

- Após reformas que removem distorções, firmas produtivas entram e expandem, mas **lentamente**, pois precisam acumular colateral ao longo do tempo.
- Firmas ricas porém pouco produtivas demoram a sair.
- Isso gera persistência histórica: a estrutura de firmas e a TFP convergem devagar porque o processo de realocação é mediado por restrições de crédito.

Conexão com Teoria da Firma:

- Fricções financeiras afetam diretamente as decisões de entrada, escala, investimento e permanência das firmas.
- A firma deixa de ser um agente price-taker com acesso irrestrito a capital: seu tamanho é determinado por riqueza própria, não apenas por produtividade.
- A distribuição de produtividade não se traduz em uma distribuição eficiente de tamanhos das firmas $\rightarrow$ surge má alocação microeconômica persistente.

1 Motivação e Estrutura da Economia

1.1 Da análise parcial ao equilíbrio geral

- Análise parcial: estuda um único mercado, mantendo "o resto da economia" fixo.
- Na prática:
  - demandas por cada bem dependem dos preços de *todos* os bens;
  - lucros das firmas afetam a renda dos consumidores;
  - mudanças em um mercado se propagam via preços relativos e renda.
- **Equilíbrio geral** formaliza a determinação conjunta de:
  - preços de todos os bens;
  - alocações de consumo;
  - planos de produção;

  de modo que todos otimizam e todos os mercados se limpam.
- Conexão com teoria do consumidor e da firma:
  - demandas Marshallianas $\Rightarrow$ lado da demanda em cada mercado;
  - minimização de custo e maximização de lucro $\Rightarrow$ oferta de bens e fatores.

1.2 Economia competitiva: agentes e dados

Economia pura de troca (sem produção):

- Conjunto finito de consumidores $i \in I$, conjunto de bens $k = 1, \dots, n$.
- Cada consumidor: preferências $u_i : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}$, dotação inicial $e^i \in \mathbb{R}^n_+$.
- Preços: vetor $p \in \mathbb{R}^n_{++}$.
- Dado p, consumidor i resolve:

$$\max_{x^i \in \mathbb{R}^n_+} u_i(x^i) \quad \text{sujeito a } p \cdot x^i \leq p \cdot e^i.$$

Extensão com produção:

- Firmas com conjuntos de produção Y^j ou funções de produção f_j.
- Lucros distribuídos aos consumidores como renda adicional (cotas θ_{ij}).

2 Equilíbrio em Economia de Troca

2.1 Equilíbrio competitivo em troca: definição

Considere uma economia de troca $(u_i, e^i)_{i \in I}$.

Definição (Equilíbrio Walrasiano / competitivo). Um par $(p^*, (x^{i*})_{i \in I})$, com $p^* \gg 0$, é um equilíbrio competitivo se:

- **Otimização individual:** para cada i,

$$x^{i*} \in \arg\max_{x^i \in \mathbb{R}^n_+} \{u_i(x^i) : p^* \cdot x^i \leq p^* \cdot e^i\};$$

- **Viabilidade (limpeza de mercados):**

$$\sum_{i \in I} x^{i*} = \sum_{i \in I} e^i.$$

Intuição:

- Consumidores escolhem a melhor cesta que o orçamento permite.
- Ao preço de equilíbrio, a soma das demandas coincide com a soma das dotações.

2.2 Excesso de demanda agregado

Demanda individual de i dado p e renda $m_i = p \cdot e^i$: $x^i(p, m_i)$.

Demanda agregada:

$$x(p) \equiv \sum_{i \in I} x^i(p, p \cdot e^i).$$

Excesso de demanda agregado por bem k:

$$z_k(p) \equiv \sum_{i \in I} x^i_k(p, p \cdot e^i) - \sum_{i \in I} e^i_k.$$

Vetor de excesso de demanda:

$$z(p) \equiv (z_1(p), \ldots, z_n(p)).$$

- $z_k(p) > 0$: excesso de demanda pelo bem k.
- $z_k(p) < 0$: excesso de oferta pelo bem k.
- **Equilíbrio competitivo** é um vetor de preços $p^* \gg 0$ tal que

$$z(p^*) = 0.$$

2.3 Propriedades de $z(p)$: continuidade, homogeneidade, Lei de Walras

Sob preferências contínuas, estritamente crescentes e estritamente quasiconvexas:

Teorema (Propriedades de z). Para todo $p \gg 0$:

- **Continuidade:** $z(\cdot)$ é contínua em p.
- **Homogeneidade de grau zero:**

$$z(\lambda p) = z(p) \quad \forall \lambda > 0.$$

- **Lei de Walras:**

$$p \cdot z(p) = 0.$$

Intuição da Lei de Walras:

- Cada consumidor gasta toda a renda: $p \cdot x^i(p, p \cdot e^i) = p \cdot e^i$.
- Somando sobre i e rearranjando: $p \cdot z(p) = 0$.
- Implicações:
  - se $n-1$ mercados estão em equilíbrio, o n-ésimo também está;
  - excesso de demanda em alguns bens implica excesso de oferta de igual valor em outros.

2.4 Eficiência de Pareto em troca

Definição (Eficiência de Pareto). Uma alocação factível $(x^i)_{i \in I}$ é Pareto-eficiente se não existe outra alocação factível $(y^i)_{i \in I}$ tal que:

- $u_i(y^i) \geq u_i(x^i)$ para todo i;
- $u_j(y^j) > u_j(x^j)$ para algum j.

Economia de Edgeworth (2 consumidores, 2 bens):

- Conjunto de contratos: pares (x^1, x^2) com $x^1 + x^2 = e^1 + e^2$.
- Curvas de indiferença dos dois consumidores no mesmo diagrama.
- **Conjunto de Pareto**: pontos onde as curvas de indiferença são tangentes ($\text{MRS}^1 = \text{MRS}^2$) ou cantos relevantes.

Interpretação:

- Eficiência significa ausência de ganhos de troca adicionais entre agentes.

3 Existência de Equilíbrio e Propriedades

3.1 Teorema de existência de equilíbrio (ideia)

Objetivo: mostrar que, sob hipóteses padrão, existe $p^* \gg 0$ tal que $z(p^*) = 0$.

Condições típicas em z:

- Continuidade em $\mathbb{R}^n_{++}$.
- Lei de Walras: $p \cdot z(p) = 0$.
- Condição de fronteira: se alguns preços vão a zero enquanto outros permanecem positivos, a demanda de pelo menos um bem com preço muito baixo explode (excesso de demanda não limitado).

Ideia da prova (Arrow–Debreu/McKenzie):

- Constrói-se uma correspondência de preços que ajusta p dependendo do sinal de $z(p)$.
- Aplica-se um teorema de ponto fixo (Brouwer ou Kakutani) a essa correspondência.
- O ponto fixo é um vetor de preços para o qual $z(p) = 0$, isto é, um equilíbrio.

Essas hipóteses garantem: (i) que a função de excesso de demanda se comporta bem no interior; (ii) que não há fuga para fronteiras com preços nulos; (iii) que existe um ponto fixo que representa o equilíbrio competitivo.

3.2 Propriedades adicionais do equilíbrio

- **Normalização de preços:**
  - como $z(\lambda p) = z(p)$, apenas razões de preços importam;
  - usual: fixar um numéraire, e.g. $p_1 = 1$ ou $\sum_k p_k = 1$.
- **Multiplicidade:** podem existir vários vetores de preços de equilíbrio.
- **Comparativa estática:** choques em dotações ou preferências deslocam $z(p)$ e permitem estudar:
  - direção da variação de preços;
  - efeitos sobre alocações de equilíbrio.
- **Equilíbrio parcial como projeção:** um equilíbrio em mercado individual é, em geral, a projeção de um equilíbrio geral em que renda e outros preços são endógenos.

4 Equilíbrio com Produção

4.1 Economia com produção: firmas e consumidores

Firmas:

- Conjuntos de produção $Y^j \subset \mathbb{R}^n$ (inputs negativos, outputs positivos) ou funções de produção $f_j(\cdot)$.
- Cada firma j escolhe y^j para maximizar lucro:

$$\max_{y^j \in Y^j} p \cdot y^j.$$

Propriedade das firmas:

- Lucros distribuídos aos consumidores segundo cotas θ_{ij}, com $\sum_i \theta_{ij} = 1$.
- Renda do consumidor i:

$$m_i(p) = p \cdot e^i + \sum_j \theta_{ij} p \cdot y^j(p).$$

- O problema do consumidor passa a depender de p e dos lucros das firmas.

4.2 Equilíbrio competitivo com produção

Definição. Um equilíbrio competitivo com produção é um triplo

$$(p^*, (x^{i*})_{i \in I}, (y^{j*})_{j \in J})$$

tal que:

- **Maximização de lucro:** para cada firma j,

$$y^{j*} \in \arg\max_{y^j \in Y^j} p^* \cdot y^j;$$

- **Maximização de utilidade:** para cada consumidor i,

$$x^{i*} \in \arg\max_{x^i} u_i(x^i) \quad \text{sujeito a} \quad p^* \cdot x^i \leq p^* \cdot e^i + \sum_j \theta_{ij} p^* \cdot y^{j*};$$

- **Viabilidade:**

$$\sum_{i \in I} x^{i*} = \sum_{i \in I} e^i + \sum_{j \in J} y^{j*}.$$

Conexão com teoria da firma:

- y^{j*} coincide com o plano de produção que maximizaria lucro em um problema isolado de firma competitiva.

5 Teoremas Fundamentais do Bem-Estar

5.1 Primeiro Teorema do Bem-Estar

Hipóteses típicas:

- Preferências dos consumidores: completas, transitivas, contínuas e **localmente não saciadas** (ou estritamente crescentes).
- Em versão com produção: tecnologia convexa, lucros distribuídos aos consumidores.

Teorema (1º Teorema do Bem-Estar). Qualquer equilíbrio competitivo (Walrasiano) é Pareto-eficiente.

Intuição (economia de troca):

- Se uma alocação de equilíbrio não fosse eficiente, haveria uma melhora de Pareto possível.
- Consumidores maximizam utilidade dado o orçamento, com o mesmo vetor de preços.
- Sob não-saciedade local, qualquer melhora estrita para alguém exigiria uma piora para outro ou violaria a restrição orçamentária agregada.

5.2 Segundo Teorema do Bem-Estar

Hipóteses adicionais:

- Preferências convexas (além de contínuas e localmente não saciadas).
- Conjunto de possibilidades factíveis convexo (inclui tecnologia convexa).

Teorema (2º Teorema do Bem-Estar). Qualquer alocação Pareto-eficiente (interior, sob hipóteses técnicas) pode ser descentralizada como um equilíbrio competitivo, para alguma redistribuição adequada de dotações iniciais (transferências lump-sum).

Intuição:

- Eficiência e equidade se separam:
  - escolhe-se uma alocação eficiente que reflita critérios distributivos (via transferências de dotação/renda);
  - deixa-se o mercado competitivo atuar para atingir essa alocação como equilíbrio.
- O argumento usa teorema de separação de conjuntos convexos: existe um hiperplano de suporte (vetor de preços) tangenciando o conjunto de possibilidades factíveis no ponto eficiente.

5.3 Interpretação dos Teoremas do Bem-Estar

Primeiro Teorema:

- Justifica a eficiência de mercados competitivos sob hipóteses fortes:
  - ausência de externalidades, bens públicos, informação assimétrica, mercados incompletos etc.
- Equilíbrio competitivo implica que não existe melhoria de Pareto possível.

Segundo Teorema:

- Sugere separar eficiência de distribuição:
  - usar redistribuição lump-sum para atingir a alocação desejada;
  - depois, deixar o sistema competitivo implementá-la.
- Na prática, problemas surgem quando não há instrumentos lump-sum: impostos distorcivos, restrições de informação, etc.

Limitações:

- Quando as hipóteses falham (não convexidades, externalidades, informação assimétrica, mercados incompletos), o 1º Teorema pode falhar.
- Em modelos de gerações sobrepostas (OLG), um equilíbrio competitivo pode ser Pareto-ineficiente.

6 Tempo, Incerteza e Arrow–Debreu

6.1 Planos contingentes e bens datados

- Até agora: bens atemporais e certeza.
- Extensão: bens indexados por:
  - data t;
  - estado do mundo s;
  - localização, etc.
- Um **bem contingente**:

  $$\text{“1 unidade do bem } k \text{ em } (t, s)\text{”}.$$
- Preços Arrow–Debreu: p_{kts} para cada bem contingente (k, t, s).

Ideia central:

- Com mercados para cada bem contingente, tempo e incerteza tornam-se apenas índices adicionais de bens.

6.2 Equilíbrio Arrow–Debreu

- Cada consumidor escolhe um vetor de consumo contingente $x^i = (x^i_{kts})_{k,t,s}$.
- Utilidade pode ter forma de utilidade esperada e/ou agregação intertemporal:

$$U_i(x^i) = \sum_s \pi_s u_i(x^i_s),$$

  com x^i_s consumo no estado s.
- Problema do consumidor:

$$\max_{x^i} U_i(x^i) \quad \text{sujeito a} \quad \sum_{k,t,s} p_{kts} x^i_{kts} \leq \sum_{k,t,s} p_{kts} w^i_{kts}.$$

Equilíbrio Arrow–Debreu:

- Vetor de preços contingentes p^* e alocação $(x^{i*})_i$ tais que:
  - cada x^{i*} resolve o problema de consumo dado p^*;
  - mercados contingentes se limpam: $\sum_i x^{i*} = \sum_i w^i$.
- Com mercados completos de Arrow–Debreu, os resultados de bem-estar se estendem a ambientes intertemporais e estocásticos.

7 Equilíbrio geral com fricções financeiras

7.1 Buera, Kaboski & Shin (2011)

Ideia central dos dois artigos:

- Fricções financeiras geram **má alocação** de capital e talento entre firmas.
- Isso reduz TFP agregada e produto e torna a transição após reformas **lenta e persistente**.

Buera, Kaboski & Shin (2011):

- Modelo de equilíbrio geral com dois setores: tradicional vs moderno.
- Trabalho e capital podem se realocar, mas fricções financeiras travam a expansão do setor moderno.
  - Problema de comprometimento limitado impede que empreendedores tenham acesso perfeito a crédito. Crédito para expansão de atividades produtivas no limite de um múltiplo λ de sua riqueza financeira a.
    - λ pode ser microfundamentado a partir de problema de agência (empreendedor pode fugir com uma fração do capital emprestado ao setor financeiro) $\implies$ contratos oferecidos devem satisfazer restrição de compatibilidade de incentivos (de onde vem λ).
- Desenvolvimento financeiro (aumentar λ) atua como choque de equilíbrio geral:
  - realoca fatores para o setor moderno,
  - aumenta TFP agregada e renda per capita,
  - acelera industrialização e mudança estrutural.

7.2 Buera & Shin (2013)

Buera & Shin (2013):

- Economia de equilíbrio geral com contínuo de empreendores, heterogêneos em sua habilidade (que está sujeita a risco idiossincrático não assegurável - mercado incompleto), e acesso a crédito restrito por colateral (riqueza do indivíduo).

- Reformas que removem distorções idiossincráticas (equalizam colateral entre os agentes) geram:

  - crescimento da TFP, mas
  - dinâmicas lentas de investimento,
  - convergência ao estado estacionário muito mais lenta que em um modelo neoclássico padrão sem fricções financeiras (em que essa reforma não afeta decisões de produção dado crédito perfeito).

- Reformas que reduzem fricções financeiras (diminuem requerimento de colateral) parecem produzir ganhos de bem-estar mais rapidamentes.

Relação com a Teoria do Equilíbrio Geral: Fricções financeiras atuam como *distorções nos mercados de fatores*, impedindo a livre mobilidade de capital e a alocação eficiente entre agentes heterogêneos. Isso rompe a eficiência de Pareto do equilíbrio competitivo, reduz TFP e gera equilíbrios com má alocação persistente. A transição entre equilíbrios é lenta porque depende da acumulação de riqueza e do auto-financiamento das firmas produtivas.

7.3 Araujo et al. (2018) – Equilíbrio geral com preferências que amam risco

Problema: Preferências *risk-loving* ou *ambiguity-loving* geram **não-convexidades**, o que pode impedir a existência de equilíbrio Arrow–Debreu em economias com número finito de agentes.

Contribuição principal:

- O paper demonstra condições suficientes para existência de equilíbrio geral mesmo com agentes que **amam risco/incerteza**.

- A chave é a presença de **incerteza agregada suficiente** e uma **prevalência de riqueza dos agentes avessos ao risco**.

Mecanismo:

- Agentes **risk lovers** querem especializar consumo em um estado (não-convexidade).

- Agentes **risk averters** desejam diversificação.

- Com incerteza agregada e endowments adequados, ocorre troca mutuamente benéfica: risk lovers absorvem parte do risco agregado; risk averters conseguem hedge.

Resultado:

- Mostram que um equilíbrio existe quando os agentes avessos ao risco possuem riqueza suficientemente grande em um estado para permitir a especialização dos amantes de risco.
- O resultado vale para várias classes de preferências: EU, CEU, Smooth Ambiguity, Variational Preferences.

8 Núcleo e Equilíbrio Competitivo

8.1 O núcleo de uma economia

Coalizão: subconjunto de consumidores $S \subseteq I$.

Alocação factível para S: $(y^i)_{i \in S}$ tal que

$$\sum_{i \in S} y^i \leq \sum_{i \in S} e^i$$

(com desigualdade componente a componente).

Bloqueio: uma coalizão S *bloqueia* uma alocação $(x^i)_{i \in I}$ se existe $(y^i)_{i \in S}$ factível para S tal que:

$$u_i(y^i) \geq u_i(x^i)\ \forall i \in S, \quad u_j(y^j) > u_j(x^j) \text{ para algum } j \in S.$$

Núcleo: conjunto de alocações factíveis que não são bloqueadas por nenhuma coalizão.

Interpretação:

- Núcleo = alocações que sobrevivem a todas as possíveis renegociações entre subconjuntos de agentes.

8.2 Exemplo: eficiente mas fora do núcleo

Considere 2 bens e 3 indivíduos com dotações:

$$e^1 = (5, 0), \quad e^2 = (0, 5), \quad e^3 = (1, 1),$$

e preferências simétricas e convexas: $u_1 = u_2 = u_3 = \sqrt{x_1 x_2}$.

- A alocação

  $$x_1 = x_2 = x_3 = (2, 2)$$

  é Pareto-eficiente.
- Mas não está no núcleo: os indivíduos 1 e 2 podem formar coalizão e realocar:

  $$y^1 = y^2 = (2{,}5, 2{,}5),$$

  estritamente melhor para ambos, factível usando apenas suas dotações.
- Uma alocação no núcleo é, por exemplo:

  $$x_1 = x_2 = (2{,}5, 2{,}5), \quad x_3 = (1, 1).$$

Conclusão: núcleo é conceito mais forte que eficiência de Pareto; exige ausência de melhorias para qualquer coalizão, não apenas para a economia inteira.

8.3 Equilíbrio competitivo e núcleo

Resultados clássicos:

- Em economias com preferências fortemente monotônicas:

$$\text{Equilíbrio competitivo} \subseteq \text{Núcleo}.$$

- Em economias replicadas muitas vezes (economias "grandes"):
  - o núcleo se contrai e se aproxima do conjunto de equilíbrios competitivos;
  - Teorema de Debreu–Scarf: no limite de réplicas, núcleo coincide com equilíbrios competitivos.

Intuição:

- Mercados competitivos podem ser vistos como limite de processos de negociação em economias grandes.
- Núcleo oferece noção cooperativa de solução; equilíbrio competitivo, não cooperativa. Em economias grandes, as duas convergem.

Elementos centrais:

- definição de coalizão, alocação factível para a coalizão, bloqueio e núcleo;
- relação entre núcleo, eficiência de Pareto e equilíbrios competitivos em economias grandes.

9 Escolha Social e Funções Bem-Estar

9.1 Problema de escolha social

- Equilíbrio geral e os Teoremas do Bem-Estar tratam de **eficiência** dados:
  - preferências individuais;
  - alocação de recursos.
- Um planejador ou sociedade precisa escolher:
  - entre diferentes alocações possíveis;
  - regras de decisão coletiva (eleições, votações etc.).
- O problema é construir uma **preferência social** ou **função de bem-estar social** a partir das preferências individuais.

Três questões fundamentais:

- **Comparabilidade interpessoal**: utilidades são comparáveis entre indivíduos?
- **Medida**: utilidade é ordinal ou cardinal?
- **Regra agregadora**: como combinar utilidades/preferências individuais em uma preferência/índice social.

9.2 Arrow: estrutura básica e axiomas

Configuração:

- Conjunto finito de alternativas X.
- Conjunto de indivíduos I.
- Cada indivíduo i tem preferência completa e transitiva $\succeq_i$ sobre X.

Função de escolha social (FCS):

- Associa a cada perfil $(\succeq_i)_{i \in I}$ uma preferência social $\succeq^S$ sobre X.

Axiomas de Arrow:

- **Domínio irrestrito (universalidade)**: FCS definida para todos os perfis possíveis.
- **Pareto fraco**: se todos preferem x a y, a sociedade deve preferir x a y.
- **Independência de alternativas irrelevantes (IIA)**: ranking entre x e y depende apenas das preferências individuais entre x e y.
- **Não-ditadura**: não existe indivíduo cujas preferências sempre coincidam com a preferência social.

9.3 Teorema da impossibilidade de Arrow

Teorema (Arrow). Se existem pelo menos 3 alternativas em X, qualquer FCS que satisfaça:

- domínio irrestrito,
- Pareto fraco,
- IIA,
- não-ditadura,

não pode gerar uma preferência social completa e transitiva para todos os perfis de preferências individuais.

Intuição:

- Com 3 ou mais alternativas, exigir simultaneamente Pareto, IIA e não-ditadura leva a conflitos lógicos (como ciclos ou concentração de poder em um indivíduo).

Moral:

- não existe regra de escolha social "perfeita" que satisfaça todos esses axiomas;
- é necessário relaxar ao menos um axioma (por exemplo, IIA) ou restringir o domínio de preferências.

9.4 Funções de bem-estar social: Rawls e utilitarismo

Função de bem-estar social (FBS):

- Atribui a cada vetor de utilidades $u = (u_1, \dots, u_I)$ um escalar $W(u)$.
- Ordena alocações via $W(u(x))$.

Formas clássicas:

- **Utilitarista:**
$$W(u) = \sum_i u_i.$$
  - Maximiza soma das utilidades (ou utilidade esperada em contexto de incerteza).
  - Permite trade-offs claros entre indivíduos com peso igual para todos.
- **Rawlsiana (maximin):** $W(u) = \min_i u_i$.
  - Prioriza o indivíduo pior posicionado.
  - Expressa forte preocupação com equidade e justiça distributiva.

Essas formas ilustram dois extremos:

- foco em eficiência agregada (utilitarismo);
- foco em justiça distributiva e proteção do pior-off (Rawls).

9.5 SWF, Pareto e representações por soma ponderada

FBS geral: $W(u_1(x_1), \dots, u_I(x_I))$.

- Se W é crescente em cada argumento, qualquer solução de
$$\max_x W(u_1(x_1), \dots, u_I(x_I)) \quad \text{sujeito a} \quad \sum_i x^i \leq \sum_i e^i$$
é Pareto-eficiente: não é possível aumentar W sem melhorar pelo menos um indivíduo.

Sob utilidades individuais crescentes e côncavas:

- Uma alocação x^* é Pareto-eficiente se, e somente se, existe um vetor de pesos $\lambda \in \mathbb{R}^I_+ \setminus \{0\}$ tal que x^* resolve: $\max_x \sum_i \lambda_i u_i(x_i) \quad \text{sujeito a} \quad \sum_i x^i \leq \sum_i e^i$.
- Assim, o conjunto de alocações de Pareto pode ser parametrizado por diferentes pesagens das utilidades individuais.

Conexão com os Teoremas do Bem-Estar:

- o 1º Teorema afirma que o equilíbrio competitivo seleciona um ponto no conjunto de Pareto;
- o 2º Teorema afirma que, para qualquer ponto de Pareto, existe redistribuição de dotações tal que um equilíbrio competitivo o implementa.

10 Resumo e Conexões

10.1 Resumo — Equilíbrio Geral

1. Estrutura geral

- Economia competitiva: consumidores (u_i, e^i), firmas (Y^j), preços p.
- Equilíbrio competitivo: preços e alocações tais que:
  - consumidores maximizam utilidade;
  - firmas maximizam lucro;
  - mercados se limpam.

2. Excesso de demanda e existência

- Excesso de demanda agregado $z(p)$ é construído a partir das demandas Marshallianas e da produção.
- Propriedades: continuidade, homogeneidade de grau zero, Lei de Walras.
- Sob condições adicionais, existe $p^* \gg 0$ com $z(p^*) = 0$.

3. Tempo, incerteza e Arrow–Debreu

- Bens contingentes e datados permitem tratar tempo e risco como índices adicionais.
- Com mercados completos de Arrow–Debreu, os Teoremas do Bem-Estar se estendem a ambientes intertemporais e estocásticos.

10.2 Resumo — Bem-Estar, núcleo e escolha social

5. Teoremas do Bem-Estar e núcleo

- 1º Teorema: qualquer equilíbrio competitivo é Pareto-eficiente.
- 2º Teorema: qualquer alocação eficiente (sob convexidade) pode ser descentralizada como equilíbrio competitivo após redistribuição lump-sum.
- Núcleo: alocações não bloqueadas por nenhuma coalizão; equilíbrios competitivos pertencem ao núcleo; em economias grandes, núcleo converge ao conjunto de equilíbrios competitivos.

6. Escolha social

- Problema de agregação de preferências: funções de escolha social (Arrow) e funções de bem-estar social.
- Teorema de Arrow: impossibilidade de ter Pareto, IIA, domínio irrestrito e não-ditadura simultaneamente com 3 ou mais alternativas.
- FBS utilitarista e rawlsiana: formas canônicas de incorporar julgamentos normativos sobre eficiência e equidade.

1 Fundamentos e Estrutura Geral

1.1 O que é um jogo?

Teoria dos jogos estuda situações em que o resultado para cada agente depende não só de suas próprias ações, mas também das ações dos demais. Os jogadores são racionais e maximizam utilidade (muitas vezes esperada).

Uma representação abstrata de um jogo é:

$$G = \Big(N, (S_i)_{i\in N}, (u_i)_{i\in N}\Big),$$

em que:

- N: conjunto de jogadores;
- S_i: conjunto de estratégias puras do jogador i;
- $u_i : S \to \mathbb{R}$, com $S = \prod_i S_i$: payoff de i para cada perfil estratégico.

Conexão com microeconomia:

- teoria do consumidor/firma trata o agente isolado frente a preços dados;
- teoria dos jogos endogeniza o "ambiente" via interações estratégicas.

O objetivo central é caracterizar noções de equilíbrio que sejam consistentes com racionalidade e expectativas corretas.

1.2 Racionalidade e racionalidade comum

Racionalidade individual:

- dado um jogo e crenças sobre as ações dos demais, o jogador escolhe uma estratégia que maximiza seu payoff esperado;
- formalmente, para crenças σ_{-i},

$$\sigma_i \text{ é racional se } \sigma_i \in BR_i(\sigma_{-i}).$$

Racionalidade comum:

- todos são racionais;
- todos sabem que todos são racionais;
- todos sabem que todos sabem que todos são racionais, e assim sucessivamente.

Conexões importantes:

- eliminação iterada de estratégias estritamente dominadas baseia-se em racionalidade comum;
- equilíbrio de Nash supõe que cada jogador acredita que os demais se comportam racionalmente (escolhem melhor resposta), e escolhe a sua melhor resposta a isso.

1.3 Exemplo inicial: duopólio de quantidade (Cournot estático)

Considere dois produtores $i = 1, 2$ que escolhem quantidades $q_i \geq 0$ simultaneamente.

Preço:

$$P(Q) = a - bQ, \quad Q = q_1 + q_2, \ a > b > 0.$$

Custo:

$$C_i(q_i) = cq_i, \quad 0 < c < a.$$

Payoff (lucro) de i:

$$u_i(q_1, q_2) = (P(Q) - c)q_i = (a - b(q_1 + q_2) - c)q_i.$$

Interpretação:

- cada firma escolhe q_i antecipando que o lucro depende da escolha da outra;
- este é um exemplo canônico de jogo estático em forma normal com ações contínuas.

2 Jogos Estáticos em Forma Normal

2.1 Estratégias puras e mistas

- **Estratégia pura**: escolha determinística de uma ação em S_i.
- **Estratégia mista**:

  $$\sigma_i \in \Delta(S_i),$$

  isto é, distribuição de probabilidade sobre estratégias puras.

Perfil estratégico:

$$s = (s_1, \ldots, s_n), \qquad \sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n).$$

Payoff esperado sob mistura:

$$u_i(\sigma) = \sum_{s \in S} \left(\prod_j \sigma_j(s_j) \right) u_i(s).$$

Intuição:

- estratégias mistas modelam randomização intencional ("jogar cara ou coroa") e incerteza estratégica;
- permitem recuperar existência de equilíbrio em jogos finitos.

2.2 Exemplo: pedra–papel–tesoura

O conjunto de estratégias é:

$$S_i = \{\text{Pedra},\ \text{Papel},\ \text{Tesoura}\}.$$

Payoffs:

- vitória: $+1$, derrota: -1, empate: 0.

Não há equilíbrio em estratégias puras: qualquer ação pode ser explorada pelo oponente. Uma estratégia mista simétrica de equilíbrio é:

$$\sigma_i^* = (1/3, 1/3, 1/3).$$

Intuição:

- a melhor maneira de não ser explorado é randomizar;
- esse é um exemplo limpo de por que precisamos de estratégias mistas na definição de equilíbrio.

3 Melhor Resposta e Dominância

3.1 Melhor resposta

A melhor resposta de i ao perfil dos outros σ_{-i} é:

$$BR_i(\sigma_{-i}) = \arg \max_{\sigma_i \in \Delta(S_i)} u_i(\sigma_i, \sigma_{-i}).$$

Para estratégias puras:

$$BR_i(s_{-i}) = \Big\{ s_i \in S_i : u_i(s_i, s_{-i}) \geq u_i(s_i', s_{-i}),\ \forall s_i' \Big\}.$$

Intuição:

- dado um "ambiente estratégico" (crenças sobre o que os outros fazem), racionalidade implica escolher uma melhor resposta;
- conceito análogo a "escolha ótima" em teoria do consumidor, só que agora o "preço" é o comportamento dos demais jogadores.

3.2 Dominância e racionalidade iterada

Uma estratégia s_i é **estritamente dominada** por s_i' se:

$$u_i(s_i', s_{-i}) > u_i(s_i, s_{-i}),\ \forall s_{-i}.$$

Dominância fraca:

$$u_i(s_i', s_{-i}) \geq u_i(s_i, s_{-i}),\ \forall s_{-i},$$

com estrita superioridade para algum perfil.

Eliminação iterada de estratégias estritamente dominadas:

$$S_i^0 = S_i, \quad S_i^{k+1} = S_i^k \setminus \{\text{estratégias dominadas em } S^k\}.$$

Interpretação:

- se todos são racionais e sabem disso (racionalidade comum), estratégias estritamente dominadas nunca são jogadas;

- o conjunto que sobrevive à eliminação iterada é consistente com esse raciocínio.

3.3 Exemplo: Dilema do Prisioneiro e dominância

Matriz de payoffs:

	C	D
C	$(3,3)$	$(0,4)$
D	$(4,0)$	$(1,1)$

- Estratégias: Cooperar (C), Desertar (D).

- Para cada jogador:
  - se o outro joga C: $u(D,C) = 4 > 3 = u(C,C)$;
  - se o outro joga D: $u(D,D) = 1 > 0 = u(C,D)$.

- Logo, D **estritamente domina** C para ambos.

- Eliminação de C para os dois jogadores leva ao perfil (D,D).

Intuição:

- melhor resposta ponto a ponto leva a um resultado ineficiente;

- exemplo clássico de conflito entre racionalidade individual e eficiência coletiva.

4 Equilíbrio de Nash

4.1 Nash em estratégias puras

Um perfil s^* é equilíbrio de Nash (NE) se:

$$s_i^* \in BR_i(s_{-i}^*),\ \forall i.$$

Condição equivalente:

$$u_i(s^*) \geq u_i(s_i', s_{-i}^*),\ \forall s_i',\ \forall i.$$

Intuição:

- cada jogador está fazendo melhor resposta dadas as ações dos outros;

- nenhum desvio unilateral melhora o payoff;

- crenças "ingênuas" mas consistentes: cada jogador toma o comportamento dos demais como dado.

Conexão com outros conceitos:

- análogo a um ponto de equilíbrio em modelos competitivos (onde preços são "dados");

- aqui a variável "dada" são as ações dos outros jogadores.

4.2 Nash em estratégias mistas

Alguns jogos não admitem equilíbrio em puras (por exemplo, pedra–papel–tesoura).

Definição:

$$\sigma^* = (\sigma_1^*, \ldots, \sigma_n^*)$$

é NE se:

$$\sigma_i^* \in BR_i(\sigma_{-i}^*), \ \forall i.$$

Condição operacional:

$$\text{se } \sigma_i^*(s_i) > 0 \Rightarrow u_i(s_i, \sigma_{-i}^*) = \max_{s_i'} u_i(s_i', \sigma_{-i}^*).$$

Intuição:

- o jogador só randomiza entre ações que lhe dão o mesmo payoff esperado;
- isso torna os outros "indiferentes" entre suas melhores respostas, gerando equilíbrio.

4.3 Existência de Nash

Teorema fundamental:

> **(Nash, 1950)**: Todo jogo finito admite equilíbrio em estratégias mistas.

Esboço da ideia:

- o conjunto de perfis de estratégias mistas é um simplex compacto e convexo;
- a correspondência de melhor resposta é não vazia, convexa e semicontínua superiormente;
- aplica-se o teorema do ponto fixo de Kakutani.

Conexão conceitual:

- garante que a noção de Nash não é "vazia";
- mas não garante unicidade nem estabilidade: múltiplos equilíbrios são comuns (coordenação, jogos de barganha, etc.).

4.4 Exemplo: Batalha dos Sexos

Matriz de payoffs:

	O	F
O	$(2,1)$	$(0,0)$
F	$(0,0)$	$(1,2)$

- Há dois equilíbrios em puras: (O,O) e (F,F).
- Há também um equilíbrio em mistas:

$$\sigma_1^* = (2/3, 1/3), \quad \sigma_2^* = (1/3, 2/3).$$

Intuição:

- jogo de coordenação com preferências assimétricas;
- múltiplos equilíbrios refletem multiplicidade de "normas" de coordenação;
- o equilíbrio misto captura uma forma de coordenação probabilística quando não há meio de comunicação pré-jogo.

5 Jogos em Forma Extensiva

5.1 Forma extensiva: estrutura geral

A forma extensiva representa decisões sequenciais com estrutura de informação explícita.

Elementos:

1. árvore de decisão (histórias possíveis);
2. nós de decisão e jogador responsável em cada nó;
3. conjuntos de informação (distinguem informação perfeita de imperfeita);
4. ações disponíveis em cada nó;
5. payoffs nos nós terminais.

Estratégia de i:

$$s_i = \text{ação especificada para cada conjunto de informação de } i.$$

Conexão com forma normal:

- qualquer jogo extensivo pode ser "colapsado" em forma normal;
- porém, a forma normal perde a estrutura de crenças e credibilidade.

5.2 Indução reversa (backward induction)

A indução reversa é aplicável a jogos finitos de **informação perfeita**.

Procedimento:

1. começar no último estágio;
2. em cada nó terminal, escolher a ação que maximiza o payoff;
3. substituir esses payoffs e recuar um nível;
4. repetir até o nó inicial.

Resultado:

$$\text{gera um perfil de estratégias que é NE e credível ao longo do jogo.}$$

Intuição:

- garante que em cada estágio futuro os jogadores se comportam racionalmente;
- exclui "ameaças vazias" que não seriam ótimas quando o estágio for alcançado.

5.3 Subjogo e Equilíbrio Perfeito em Subjogos (SPNE)

Um **subjogo** é parte da árvore que:

1. começa em um nó de informação única (não agrupa nós distintos);
2. contém todos os nós descendentes.

Definição de SPNE:

> Um perfil de estratégias s^* é um **Equilíbrio Perfeito em Subjogos (SPNE)** se, em todo subjogo, o restrito de s^* é um NE do subjogo.

Relação:

$$SPNE \subseteq NE.$$

Conexão com indução reversa:

- em jogos finitos de informação perfeita, indução reversa gera um SPNE;
- SPNE é generalização de "escolher por indução reversa" para jogos com múltiplos subjogos.

5.4 Exemplo: entrada e ameaça não crível

Considere o seguinte jogo:

- Jogador 1 decide **Entrar** (E) ou **Sair** (S).
- Se entrar, Jogador 2 (incumbente) decide **Lutar** (L) ou **Acomodar** (A).

Matriz de payoffs:

	L	A
E	$(-1,-1)$	$(2,1)$
S	$(0,2)$	$(0,2)$

Em árvore: primeiro 1 decide E/S; se E, então 2 observa e escolhe L ou A.

Indução reversa:

- dado E, o jogador 2 prefere A (1 recebe 2, 2 recebe 1);
- sabendo disso, 1 prefere E ($2 > 0$).

Assim, o SPNE é (E, A).
Intuição:

- a ameaça de "lutar" é não crível: quando o nó é alcançado, não é ótimo para o incumbente punir;
- SPNE formaliza a ideia de eliminar ameaças vazias.

6 Jogos Dinâmicos com Informação Imperfeita

6.1 Conjuntos de informação, crenças e decisões

Em muitos jogos dinâmicos, o jogador não sabe exatamente qual nó da árvore foi atingido (informação imperfeita).

Um **conjunto de informação** I_i é:

- uma coleção de nós indistinguíveis para o jogador i;
- o jogador sabe que está em algum $h \in I_i$, mas não qual.

Crenças em I_i:

$$\mu(h) = \Pr(\text{nó } h \mid I_i), \quad \sum_{h \in I_i} \mu(h) = 1.$$

Decisão ótima em I_i:

$$\max_{a \in A(I_i)} \sum_{h \in I_i} \mu(h)\, u_i(a, h).$$

Intuição:

- racionalidade sequencial agora depende de escolhas *e* crenças;
- a teoria precisa especificar ambos para definir equilíbrio.

6.2 Perfeição, credibilidade e informação imperfeita

Em informação perfeita, SPNE já resolve credibilidade.

Com informação imperfeita:

- subjogos podem não estar bem definidos para todos os conjuntos de informação;
- não basta olhar para cada "ramo": é necessário definir crenças em nós fora do caminho de equilíbrio.

Ideia central dos refinamentos:

- estratégias devem ser racionais dado crenças;
- crenças devem ser consistentes com as estratégias via regra de Bayes (onde aplicável).

Isso motiva os conceitos de Perfect Bayesian Equilibrium e Sequential Equilibrium.

7 Jogos Bayesianos (Harsanyi)

7.1 Jogos de informação incompleta

Tipos de incerteza:

- payoff desconhecido do outro jogador;
- custos privados de esforço;

- preferências (gostos) privados;
- tipo “duro” ou “flexível” em barganha.

Harsanyi modela isso por meio de **tipos**:

$$\theta_i \in \Theta_i, \quad \theta \sim \pi(\cdot).$$

Estrutura:

- a Natureza sorteia θ;
- cada jogador observa apenas o seu θ_i;
- estratégias condicionam ao tipo:
$$s_i : \Theta_i \to \Delta(S_i).$$

Payoff esperado:

$$U_i(s|\pi) = \mathbb{E}_\theta[u_i(s(\theta), \theta)].$$

7.2 Equilíbrio Bayes–Nash

Definição:

$$s_i^*(\theta_i) \in \arg\max_{s_i(\theta_i)} \mathbb{E}_{\theta_{-i}}\Big[u_i(s_i(\theta_i), s_{-i}^*(\theta_{-i}), \theta)\Big].$$

Intuição:

- cada tipo de cada jogador escolhe uma melhor resposta às estratégias dos outros tipos;
- as crenças sobre tipos seguem a distribuição π compartilhada;
- é a extensão natural de Nash quando introduzimos “tipos privados”.

Conexão:

- jogos com reputação e sinalização (por exemplo, qualidade, “toughness”) são formalizados como jogos Bayesianos dinâmicos.

7.3 Exemplo: leilão de 1º preço (esboço)

Considere:

- dois licitantes $i = 1, 2$, cada um observa valor privado $v_i \sim U[0, 1]$;
- estratégia: lance $b_i(v_i)$;
- quem der o maior lance vence e paga seu próprio lance; o perdedor recebe 0.

Payoff do tipo v_i se vence:

$$u_i = v_i - b_i(v_i).$$

O equilíbrio Bayes–Nash simétrico é:

$$b^*(v) = \frac{1}{2}v.$$

Intuição:

- maior valor leva a lance mais alto (ordem preservada);
- mas o jogador "sombra" o valor verdadeiro para extrair renda informacional;
- exemplo canônico de jogo Bayesiano estático com tipos privados.

8 Jogos Repetidos

8.1 Jogos repetidos: estrutura básica

Considere um jogo de estágio G repetido por T períodos ou $T = \infty$.

Payoff descontado:

$$U_i = (1 - \delta) \sum_{t=1}^{\infty} \delta^{t-1} u_i(a^t),$$

onde $\delta \in (0, 1)$ é o fator de desconto.

Estratégia:

$$s_i : H^{t-1} \to A_i,$$

isto é, pode depender do histórico completo até o período $t - 1$.

Intuição:

- interações de longo prazo permitem uso de punições e recompensas;
- comportamento presente afeta expectativas sobre ações futuras dos outros.

8.2 Teorema Folk: ideia central

Em jogos infinitamente repetidos com δ alto:

quase todo payoff factível e individualmente racional pode ser sustentado como SPNE.

"Individualmente racional" significa: payoff pelo menos tão alto quanto o minimax.

Intuição:

- ameaça de punições futuras (por exemplo, *grim trigger*) torna desvios não lucrativos;
- a força do castigo depende de δ: quanto mais paciente o jogador, mais forte a disciplina.

Conexão:

- jogos repetidos ampliam o conjunto de equilíbrios em relação ao jogo estático;
- formalizam a ideia de "cooperação sustentada por reputação e punição".

8.3 Exemplo: Dilema do Prisioneiro repetido (grim trigger)

Considere o Dilema do Prisioneiro com payoffs $T > R > P > S$.

Estratégia *grim trigger*:

- cooperar enquanto todos cooperaram no passado;
- se alguém desviar, jogar D para sempre.

Desvio unilateral hoje gera:

- ganho imediato: $T - R > 0$;
- perda futura: fluxo de R para P em todos os períodos seguintes.

Condição para sustentar cooperação:

$$T - R \leq \delta \frac{R - P}{1 - \delta}.$$

Intuição:

- quanto maior δ (mais paciente), mais valiosa é a cooperação futura;
- o "medo" da punição futura pode disciplinar desvios de curto prazo.

8.4 Jogos repetidos finitos

Se o horizonte é finito $T < \infty$, a indução reversa se aplica:

- no último período, joga-se o NE do jogo de estágio (sem futuro para punir);
- sabendo disso, no penúltimo período também se joga o NE estático;
- repetindo para trás, a cooperação colapsa.

Conclusão:

$$\text{Horizonte finito} \Rightarrow \text{equilíbrio em subjogos repete NE de estágio em todos os períodos.}$$

Intuição:

- ausência de futuro reduz o poder disciplinador de ameaças;
- isso mostra a importância da incerteza sobre o fim do jogo ou de um horizonte efetivamente infinito.

8.5 Reputação e jogos dinâmicos

Em jogos dinâmicos com incerteza sobre o tipo do jogador (Bayes–Harsanyi), **reputação** é chave:

- um jogador pode agir "duro" hoje para influenciar crenças de que ele é "tipo comprometido";
- essas crenças alteram o comportamento futuro dos oponentes.

Exemplo verbal:

- um banco que sempre pune inadimplência constrói reputação de "duro";
- mesmo se punir for custoso, manter reputação disciplina futuros tomadores de crédito.

Relação com jogos repetidos:

- reputação é um mecanismo de sustentação de equilíbrios cooperativos ou disciplinadores;
- combina teoremas Folk com jogos Bayesianos (crenças sobre o tipo do jogador).

9 Conexões entre os Conceitos

9.1 Conexões: de Nash a reputação

- **Nash em forma normal**:
  - ponto de partida – cada jogador escolhe melhor resposta dada ação dos outros.
- **SPNE em forma extensiva**:
  - incorpora a dimensão dinâmica e elimina ameaças não críveis;
  - generalização de Nash para jogos sequenciais com informação perfeita.
- **PBE e Sequential Equilibrium**:
  - adicionam crenças explícitas em ambientes de informação imperfeita;
  - exigem racionalidade em todos os conjuntos de informação, inclusive fora do caminho.
- **Jogos Bayesianos**:
  - formalizam incerteza sobre tipos, custos e preferências;
  - base para modelos de sinalização, *screening* dinâmico e reputação.
- **Jogos repetidos e reputação**:
  - reintroduzem o tempo em ambientes estratégicos;
  - permitem que ameaças e promessas sejam sustentadas por punições futuras;
  - reputação altera crenças e, portanto, o conjunto de equilíbrios possíveis.

10 Resumo Geral

10.1 Resumo dos conceitos

- **Jogos estáticos em forma normal**:
  - melhor resposta, dominância e equilíbrio de Nash.
- **Jogos extensivos**:
  - decisões sequenciais, indução reversa, SPNE.
- **Informação incompleta**:
  - jogos Bayesianos, equilíbrio Bayes–Nash, crenças sobre tipos.
- **Refinamentos dinâmicos**:
  - Perfect Bayesian Equilibrium e Sequential Equilibrium.
- **Jogos repetidos**:
  - punições e recompensas intertemporais, Teoremas Folk, reputação.
- Conjunto de ferramentas que permite analisar:
  - mercados com poder de mercado;
  - contratos intertemporais;
  - formação de reputação e incentivos dinâmicos.

11 Aplicações em Teoria dos Jogos: Três Papers

11.1 Bergemann & Morris (2019) – Information Design

Tema do paper: Como um "designer de informação" pode escolher o que revelar ou ocultar aos jogadores para influenciar o comportamento estratégico em jogos.

Ideia central:

- em muitos jogos, a informação sobre estados relevantes é incompleta;
- um agente (designer) pode escolher a **estrutura de informação** recebida pelos jogadores;
- isso altera crenças $\Rightarrow$ altera melhores respostas $\Rightarrow$ altera o equilíbrio.

Contribuições do survey:

- unifica literaturas de:
  - **Bayesian Persuasion** (Kamenica & Gentzkow, 2011);
  - **Communication in games** (Myerson, 1986; Forges, 1993);

  - **Correlated equilibrium**;
  - **Bayes correlated equilibrium (BCE)**.
- mostra como comparar estruturas de informação (mais revelação vs. menos revelação);
- analisa jogos estáticos, dinâmicos e de valor comum sob diferentes informações.

Conexão com Teoria dos Jogos:

- mostra que "o jogo" não é apenas ações e payoffs, mas também a **informação disponível**;
- estruturas de informação podem ser tratadas como escolhas estratégicas do analista (information designer);
- fundamenta modelos modernos de leilões, persuasão, comunicação e divulgação ótima.

11.2 Informação e Estratégia em Leilões (Bergemann et al., 2022)

Pergunta: Como um vendedor deve escolher **o que revelar** aos jogadores em um leilão para maximizar receita?

Mecanismo do jogo:

- leilão de segundo preço com **valorações privadas** i.i.d.;
- o vendedor escolhe uma **estrutura de informação**: quanto cada jogador sabe sobre seu próprio valor;
- as estratégias dos jogadores dependem de suas **crenças** $\Rightarrow$ jogo bayesiano.

Resultado central (Teorema 1):

- divulgar **toda informação** para valores baixos;
- **agrupar** (pooling) os valores altos acima de um quantil crítico;
- esse quantil depende apenas do número de jogadores, não da distribuição.

Intuição de Teoria dos Jogos:

- alto valor $\Rightarrow$ baixa competição $\Rightarrow$ alto *rendimento informacional* para o jogador;
- o vendedor oculta informação para reduzir o **poder de mercado individual** dos jogadores de alto valor.

Conexão com Teoria dos Jogos:

- problema de **design estratégico**: o vendedor escolhe a informação para moldar o jogo;
- interação estratégica via crenças (jogo bayesiano);
- o equilíbrio revela um trade-off entre eficiência (mais informação) e extração de *surplus*.

11.3 Jogos de Entrada e Concorrência Espacial (Jia, 2008)

Pergunta: Como modelar a entrada de grandes redes (Wal-Mart e Kmart) quando cada firma internaliza a reação da outra?

Estrutura do jogo:

- jogo estático de entrada com múltiplos mercados (2065 condados);
- estratégias: entrar ou não em cada mercado ⇒ vetor binário de ações;
- payoffs incluem:
  - competição direta do rival;
  - competição com pequenos varejistas;
  - **spillovers espaciais (chain effects)** entre lojas próprias.

Ferramentas de Teoria dos Jogos utilizadas:

- jogo de **melhores respostas** com complementaridades ⇒ supermodularidade;
- uso de **Tarski (1955)** e **Topkis (1978)** para garantir existência e encontrar equilíbrios;
- possíveis múltiplos equilíbrios ⇒ seleção pelo equilíbrio "mais lucrativo" da cadeia.

Resultados empíricos (interpretação de jogo):

- forte **efeito estratégico** entre Wal-Mart e Kmart: presença de uma reduz o payoff da outra;
- efeito de rede interno (chain effect) gera incentivos para localização geograficamente próxima.

Conexão com Teoria dos Jogos:

- um caso real de **jogos de entrada** com grandes players;
- complementaridades e substituições estratégicas moldam a estrutura de equilíbrio;
- demonstra como teoria dos jogos permite resolver modelos de competição espacial complexos.

1 Visão Geral: Estrutura e Desempenho de Mercado

1.1 Equilíbrio parcial e estrutura de mercado

- Até aqui: comportamento **individual** de consumidores e firmas, tomando preços como dados.
- Agora: interação em **um mercado específico** (ou grupo de mercados próximos).
- **Equilíbrio parcial**: fixamos "o resto" da economia e estudamos:
  - determinação de preço e quantidade em um mercado;
  - como a **estrutura** desse mercado afeta eficiência e bem-estar.
- Quatro estruturas básicas:
  1. Concorrência perfeita (preço-tomadores, muitos agentes).
  2. Monopólio (um único vendedor, barreiras à entrada).
  3. Oligopólio (poucas firmas, decisões interdependentes).
  4. Concorrência monopolística (muitas firmas, produtos diferenciados).
- Ponto central: como cada estrutura relaciona preço, custo marginal, quantidade e bem-estar.

2 Concorrência Perfeita

2.1 Mercado competitivo: demanda e oferta agregadas

- Bem q, preço p. Consumidores $i \in I$, firmas $j \in J$.
- **Demanda individual** de i:
$$q_i(p) = q_i(p, \mathbf{p}, y_i) \geq 0$$
onde $\mathbf{p}$ são preços dos demais bens e y_i é renda.
- **Demanda de mercado**:
$$q^d(p) = \sum_{i \in I} q_i(p).$$
- **Oferta individual** da firma j (curto prazo):
$$q_j(p) = q_j(p, w),$$
derivada de:
$$\max_{q_j} \{pq_j - c_j(q_j)\}.$$
- **Oferta de mercado (curto prazo)**:
$$q^s(p) = \sum_{j \in J} q_j(p).$$

2.2 Equilíbrio competitivo de curto prazo

- **Equilíbrio competitivo (curto prazo)**: um preço p^* tal que:

$$q^d(p^*) = q^s(p^*).$$

- Propriedades:
  - cada consumidor escolhe sua cesta ótima dado p^*;
  - cada firma escolhe o nível de produção que maximiza lucro dado p^*;
  - nenhum agente quer mudar seu comportamento.

- **Lucro de curto prazo** da firma j:

$$\pi_j(p) = pq_j(p) - c_j(q_j(p)).$$

- Curva de oferta da firma: parte crescente do custo marginal acima do custo variável médio.

2.3 Equilíbrio competitivo de longo prazo

- No longo prazo:
  - todos insumos são variáveis;
  - firmas podem **entrar** ou **sair** da indústria;
  - tecnologia é acessível a todos.

- **Condições de equilíbrio de longo prazo**:

$$q^d(\hat{p}) = \sum_{j=1}^{\hat{J}} q_j(\hat{p}),$$

  e

$$\pi_j(\hat{p}) = 0 \quad \forall j \in \{1, \ldots, \hat{J}\}.$$

- Intuição:
  - se $\pi_j > 0$ em equilíbrio de longo prazo $\rightarrow$ entrada de novas firmas;
  - se $\pi_j < 0 \rightarrow$ saída de firmas;
  - equilíbrio de longo prazo requer **lucro econômico zero**.

- Em mercados com livre entrada e tecnologia comum, $\hat{p}$ é único; $\hat{J}$ pode ser determinado ou não, dependendo da forma de custo (RET constantes, crescentes ou decrescentes).

2.4 Concorrência perfeita e eficiência

- Em equilíbrio competitivo com **livre entrada**:

$$p^* = CMg(q^*)$$

  e no longo prazo (CRS):

$$p^* = CMe(q^*) = CMg(q^*).$$

- Implicações:
  - preço igual ao custo marginal → **eficiência alocativa** (MRS entre consumo e dinheiro igual a custo social marginal);
  - nenhuma firma tem poder de mercado para elevar preço acima de CMg;
  - área sob demanda e acima de p^*: excedente do consumidor; área acima de custo marginal e abaixo de p^*: excedente do produtor.
- Concorrência perfeita é o **benchmark** de eficiência estática contra o qual comparamos as demais estruturas.

3 Monopólio

3.1 Monopólio: definição e problema de maximização

- **Monopólio puro**: um único vendedor de um bem sem substitutos próximos; entrada bloqueada (tecnologia, regulação, patentes, etc.).
- Demanda de mercado: $q = q(p)$, com $dq/dp < 0$. Inversa: $p = p(q)$.
- Custo: $c(q)$ com custo marginal $c'(q) = MC(q)$.
- **Problema do monopolista**:

$$\max_{q \geq 0} \ \pi(q) = p(q)q - c(q).$$

- Exprime-se frequentemente em termos de receita:

$$r(q) = p(q)q, \quad \pi(q) = r(q) - c(q).$$

3.2 Condição de ótimo: MR = MC (I)

- **Receita marginal**:

$$MR(q) = \frac{dr(q)}{dq} = p(q) + q\,p'(q).$$

- **FOC** para um máximo interior $q^* > 0$:

$$MR(q^*) = MC(q^*).$$

- **Elasticidade-preço da demanda**:

$$\varepsilon(q) = \frac{dq}{dp}\frac{p}{q} < 0.$$

- Usando elasticidade, podemos escrever:

$$MR(q) = p(q)\left(1 + \frac{1}{\varepsilon(q)}\right).$$

- No ótimo:

$$p(q^*)\left(1 + \frac{1}{\varepsilon(q^*)}\right) = MC(q^*).$$

3.3 Condição de ótimo: MR = MC (II)

- **Intuição econômica:**
  - Quando o monopolista vende mais uma unidade, ele **abaixa o preço de todas as unidades** — por isso $MR < p$.
  - A decisão ótima iguala o ganho marginal (MR) ao custo marginal (MC).
  - Quanto mais sensível a demanda ($|\varepsilon|$ grande), menor a diferença entre preço e custo marginal.
  - O markup é maior quando a demanda é mais inelástica, pois o consumidor reage menos a aumentos de preço.

3.4 Índice de Lerner e papel da elasticidade

- Reorganizando:
$$\frac{p(q^*) - MC(q^*)}{p(q^*)} = -\frac{1}{\varepsilon(q^*)} = \frac{1}{|\varepsilon(q^*)|}.$$
- **Índice de Lerner**:
$$L \equiv \frac{p - MC}{p} = \frac{1}{|\varepsilon|}.$$
- Interpretação:
  - mede o **poder de mercado**: quanto o preço se afasta do custo marginal;
  - quanto mais inelástica a demanda (menor $|\varepsilon|$), maior o markup;
  - com demanda altamente elástica ($|\varepsilon| \to \infty$), $L \to 0 \to$ aproximação de concorrência.
- Monopolista nunca escolhe ponto de demanda **inelástico** ($|\varepsilon| < 1$): nesse trecho, um pequeno aumento de preço aumentaria receita, o que é incompatível com o ótimo.

3.5 Monopólio e perda de peso morto

- Benchmark competitivo: $p_C = MC(q_C)$, com q_C determinado por demanda.
- Monopólio: $q_M < q_C$, $p_M > p_C$.
- **Efeitos de bem-estar**:
  - consumidores perdem excedente (preço maior, quantidade menor);
  - monopolista ganha parte dessa perda como lucro;
  - o restante é **perda de peso morto**: troca mutuamente benéfica que deixa de ocorrer.
- Geometricamente: triângulo entre demanda, custo marginal e quantidades q_M e q_C.
- Monopólio gera **ineficiência estática**: $p_M > MC$, violando condição necessária de eficiência alocativa.

4 Oligopólio e interdependência

4.1 Visão geral

- Oligopólio: poucos vendedores, produto homogêneo ou diferenciado.
- Cada firma reconhece que suas decisões afetam o preço e os lucros dos rivais — **interdependência estratégica**.
- Lucro da firma j:

$$\pi_j = \pi_j(q_1, \dots, q_J) \quad \text{ou} \quad \pi_j = \pi_j(p_1, \dots, p_J),$$

  dependendo se a variável de escolha é quantidade (Cournot) ou preço (Bertrand).
- **Equilíbrio de Nash**: cada firma escolhe sua melhor resposta dadas as ações dos rivais:

$$\frac{\partial \pi_j(q_1^*, \dots, q_J^*)}{\partial q_j} = 0 \quad \forall j.$$

- **Intuição econômica:**
  - Cada firma leva o comportamento rival como dado — não internaliza o efeito total de suas ações sobre lucros conjuntos.
  - Resultado típico: **output maior e preço menor** que no cartel; **preço maior e lucro menor** que na concorrência perfeita.
  - A natureza da competição depende da variável estratégica: quantidades reagem de forma suave (*Cournot*); preços geram competição agressiva (*Bertrand*).

4.2 Cournot

4.2.1 Modelo de Cournot com produto homogêneo

- J firmas, produto homogêneo, custo:

$$C(q_j) = cq_j, \quad c \geq 0.$$

- Demanda inversa:

$$p(Q) = a - bQ, \quad Q = \sum_{j=1}^{J} q_j.$$

- Lucro da firma j:

$$\pi_j = (a - bQ)q_j - cq_j.$$

- Cada firma escolhe q_j tomando q_k dos rivais como dados.
- **Intuição:**
  - A ação estratégica é **quantidade**, e o preço ajusta-se como resultado.
  - Produzir mais reduz o preço para todos — externalidade negativa que cada firma ignora.
  - Equilíbrio resulta da interação entre duas forças:
    - incentivo a expandir produção (para capturar mais lucro);
    - queda de preço que reduz lucro marginal.
  - Como ninguém coordena, o mercado produz "demais" em comparação ao monopólio.

4.2.2 Equilíbrio de Cournot: solução simétrica

- FOC da firma j:
$$\frac{\partial \pi_j}{\partial q_j} = a - 2bq_j - b\sum_{k\neq j} q_k - c = 0.$$

- Em equilíbrio simétrico,
$$\bar{q} = \frac{a-c}{b(J+1)}.$$

- Quantidade total, preço e lucro:
$$Q^C = \frac{J(a-c)}{b(J+1)}, \qquad p^C = a - \frac{J(a-c)}{J+1},$$
$$\pi_j^C = \frac{(a-c)^2}{b(J+1)^2}.$$

- **Intuição:**
  - Quanto maior o número de firmas, menor o poder de mercado individual.
  - Cada firma internaliza apenas a parte do impacto do seu output sobre o lucro próprio — não internaliza impacto sobre rivais.
  - À medida que $J \to \infty$, cada firma torna-se "pequena": não afeta preço $\to$ comportamento competitivo.

4.2.3 Cournot: comparação com monopólio e concorrência

- Monopólio:
$$Q^M = \frac{a-c}{2b}, \quad p^M = \frac{a+c}{2}.$$

- Concorrência perfeita:
$$Q^{PC} = \frac{a-c}{b}, \quad p^{PC} = c.$$

- Cournot:
$$p^C - c = \frac{a-c}{J+1} > 0.$$

- Como $J \to \infty$: $p^C \to c$, $Q^C \to Q^{PC}$.

- **Intuição:**
  - Cournot está "no meio do caminho": produz mais que monopólio e menos que concorrência.
  - Cada firma tem poder de mercado, mas limitado pela reação dos rivais.
  - O efeito de expansão de produção de uma firma é amortecido pelas respostas estratégicas das outras.

4.3 Bertrand

4.3.1 Bertrand: competição em preços

- Duopólio, produto homogêneo, custo marginal $c > 0$.
- Cada firma escolhe preço; consumidores compram do mais barato.
- Lucro da firma:

$$\pi_1(p_1, p_2) = \begin{cases} (p_1 - c)Q(p_1), & p_1 < p_2, \\ \frac{1}{2}(p_1 - c)Q(p_1), & p_1 = p_2, \\ 0, & p_1 > p_2. \end{cases}$$

- **Intuição:**
  - A ação estratégica é o **preço**, e pequenas reduções capturam todo o mercado.
  - Forte incentivo a cortar preço abaixo do rival → dinâmica agressiva.
  - Com produto homogêneo, acabar um centavo acima do rival significa perder *todo* o mercado.

4.3.2 Equilíbrio de Bertrand: resultado e intuição

- Único equilíbrio de Nash:

$$p_1^* = p_2^* = c.$$

- **Intuição econômica:**
  - Se ambos cobram $p = c$, ninguém pode aumentar preço sem perder demanda.
  - Se ambos cobram $p > c$, cada firma tem incentivo a cortar um pouco o preço para capturar o mercado inteiro.
  - Competição em preço com bens idênticos é "tudo ou nada": isso gera um resultado extremamente competitivo.
  - Mesmo com apenas duas firmas, o equilíbrio coincide com o de concorrência perfeita — o famoso **paradoxo de Bertrand**.
- Consequência:

$$p^B = c, \qquad \pi_i = 0.$$

4.3.3 Bertrand com capacidade limitado (Edgeworth, 1897)

- Diferença crucial em relação ao Bertrand padrão:

  Cada firma possui capacidade máxima $K < Q(p)$.

- Se uma firma tenta cobrar preço abaixo da rival, pode não conseguir atender toda a demanda.
- Função de demanda total: $Q(p)$, mas firma só pode atender até K.
- Lucro da firma 1:

$$\pi_1(p_1, p_2) = (p_1 - c) \cdot \min\{Q(p_1), K\} \quad \text{se } p_1 < p_2.$$

- Quando preços são iguais, demanda é alocada proporcionalmente às capacidades.

Intuição: capacidade limitada reduz agressividade da competição em preços; firma baixa o preço, mas não captura todo o mercado.

4.3.4 Equilíbrio de Edgeworth: ciclos e não existência

- Em contraste com Bertrand, com capacidade limitada **o equilíbrio pode não existir**.
- Porquê?
  - Se preços são altos: firma tem incentivo a cortar preço, mas não muito.
  - Se preços são muito baixos: firma rival pode aumentar preço e ainda vender sua capacidade.
- Resultado clássico:

Possível não haver equilíbrio puro de Nash.

- Em vez disso:
  - podem ocorrer ciclos de preços ("*Edgeworth price cycles*"),
  - preços flutuam entre limites inferior e superior.

Intuição: falta de capacidade impede firme de capturar todo o mercado $\rightarrow$ quebra da lógica do "um centavo abaixo".

4.3.5 Bertrand com diferenciação horizontal (Hotelling, 1929)

- Consumidores distribuem-se no intervalo $[0, 1]$.
- Duas firmas localizadas em 0 e 1.
- Preço de transporte (custos de deslocamento / preferência):

$$t > 0.$$

- Utilidade do consumidor x ao comprar da firma 1:

$$U_1(x) = v - p_1 - tx.$$

- Da firma 2:

$$U_2(x) = v - p_2 - t(1 - x).$$

- Ponto indiferente:

$$x^* = \frac{p_2 - p_1 + t}{2t}.$$

- Demandas:

$$D_1 = x^*, \qquad D_2 = 1 - x^*.$$

4.3.6 Equilíbrio de preços no modelo de Hotelling

- Lucro da firma 1:
$$\pi_1(p_1, p_2) = (p_1 - c) \cdot \frac{p_2 - p_1 + t}{2t}.$$
- FOCs simétricas resultam em:
$$p_1^* = p_2^* = c + t.$$
- Preço de equilíbrio acima do custo marginal:
$$p^* - c = t.$$
- **Intuição:**
  - Diferenciação horizontal $\rightarrow$ cada firma tem um "mercado cativo".
  - Competição é suavizada devido aos custos de transporte.
  - O paradoxo de Bertrand desaparece: mesmo com duas firmas, preço é maior que custo marginal.

4.4 Modelo de Stackelberg

4.4.1 Modelo de Stackelberg: liderança em quantidades

- Como Cournot, mas uma firma é **líder** e escolhe quantidade primeiro.
- A firma **seguidora** observa q_1 e responde com melhor resposta $BR_2(q_1)$.
- Demanda inversa:
$$p(Q) = a - bQ.$$
- Melhor resposta da seguidora (como Cournot):
$$BR_2(q_1) = \frac{a - c}{2b} - \frac{q_1}{2}.$$
- A líder escolhe q_1 maximizando:
$$\pi_1 = (a - b(q_1 + BR_2(q_1)))q_1 - cq_1.$$

4.4.2 Equilíbrio de Stackelberg: solução

- Substituindo $BR_2(q_1)$ na receita da líder:
$$q_1^* = \frac{a - c}{2b},$$
$$q_2^* = \frac{a - c}{4b}.$$
- Quantidade total:
$$Q^S = \frac{3(a - c)}{4b}.$$
- Comparações:
$$Q^M < Q^C < Q^S < Q^{PC}.$$
- **Intuição:**
  - A líder se antecipa à reação da concorrente: produz mais que Cournot.
  - A seguidora produz menos — está em desvantagem estratégica.
  - A estrutura temporal gera poder de mercado extra para a líder.

4.5 Colusão e jogos repetidos

4.5.1 Colusão e jogos repetidos

- Em jogos estáticos (uma vez), colusão não é sustentável — desvio é sempre lucrativo.
- Em jogos repetidos infinitos, ameaça de punição pode sustentar cooperação.
- Valor presente de cartel para cada firma:
$$V^{cartel} = \frac{\pi^M/J}{1-\delta},$$
onde δ é o fator de desconto.
- Valor do desvio:
$$V^{desvio} = \pi^{desvio} + \delta V^{punicao}.$$
- Caso típico: punição = comportamento de Nash para sempre:
$$V^{punicao} = \frac{\pi^{Nash}}{1-\delta}.$$

4.5.2 Condição para colusão sustentável (incentive compatibility)

- A colusão é sustentável se:
$$V^{cartel} \geq V^{desvio}.$$
- Substituindo:
$$\frac{\pi^M}{J(1-\delta)} \geq \pi^{desvio} + \delta \frac{\pi^{Nash}}{1-\delta}.$$
- Reorganizando:
$$\delta \geq \frac{\pi^{desvio} - \pi^{cartel}}{\pi^{desvio} - \pi^{Nash}}.$$
- **Intuição:**
  - Quanto maior o ganho de desviar (alto π^{desvio}), mais difícil sustentar cartel.
  - Quanto maior o ganho pela cooperação (alto π^M), mais fácil sustentar.
  - Quanto mais pacientes as firmas (alto δ), mais provável colusão.

5 Concorrência Monopolística

5.1 Concorrência monopolística: definição

- **Muitas firmas**, cada uma produzindo uma variedade diferenciada de um bem.
- Produtos são **substitutos próximos**, mas não perfeitos:
$$q_j = q_j(\mathbf{p}), \quad \frac{\partial q_j}{\partial p_j} < 0, \quad \frac{\partial q_j}{\partial p_k} > 0 \text{ para } k \neq j.$$
- Cada firma tem um certo **poder de mercado** sobre sua variedade:
  - enfrenta demanda própria inclinada negativamente;
  - escolhe preço para maximizar lucro como um monopolista *da própria variedade*.
- **Entrada livre**: novas firmas podem introduzir novas variedades quando houver lucro.

5.2 Equilíbrio de curto prazo em concorrência monopolística

- Número de firmas J dado.
- Firma j escolhe preço p_j (ou quantidade) para:

$$\max_{p_j} \ \pi_j(\mathbf{p}) = p_j q_j(\mathbf{p}) - c_j(q_j(\mathbf{p})).$$

- FOC interior (usando $MR_j = MC_j$):

$$MR_j(q_j(\mathbf{p})) = MC_j(q_j(\mathbf{p})).$$

- Em termos de elasticidade da demanda da variedade j, ε_j:

$$\frac{p_j - MC_j}{p_j} = \frac{1}{|\varepsilon_j|}.$$

- Assim como no monopólio: **markup positivo**, preço acima de custo marginal, quantidade menor do que sob concorrência perfeita.
- **Lucros de curto prazo** podem ser positivos, negativos ou zero.

5.3 Equilíbrio de longo prazo e excesso de capacidade

- Com **entrada livre** e muitas variedades potenciais:
  - lucros positivos atraem novas firmas;
  - entrada desloca demanda para cada variedade individual (mais competição por substitutos próximos);
  - no equilíbrio de longo prazo: $\pi_j = 0$ para todas as firmas ativas.
- Contudo, mesmo com lucro zero, temos:

$$p^* > MC(q^*),$$

  devido à inclinação negativa da demanda de cada variedade.
- Normalmente, q^* é **menor** do que a quantidade que minimiza o custo médio $\rightarrow$ **excesso de capacidade**.
- Trade-off: variedade de produtos (benefício para o consumidor) versus custo de produzir abaixo da escala eficiente e markup sobre o custo marginal.

6 Conexões - Res

6.1 Concorrência perfeita e monopólio

Concorrência perfeita

- Muitos compradores e vendedores, produto homogêneo, livre entrada/saída.
- Agentes são **tomadores de preço**.
- Equilíbrio de longo prazo: lucro econômico zero, $p = CMg$ (e com CRS, $p = CMe$).

- Resultado: **eficiência alocativa**, ausência de poder de mercado, nenhuma perda de peso morto.

Monopólio

- Um vendedor, entrada bloqueada, produto sem substitutos próximos.
- Escolhe q (ou p) para maximizar lucro:

$$MR(q^*) = MC(q^*).$$

- Markup:

$$\frac{p - MC}{p} = \frac{1}{|\varepsilon|},$$

- Gera preço acima do custo marginal, quantidade menor que a competitiva, **perda de peso morto**.

6.2 Oligopólio e concorrência monopolística

Oligopólio

- Poucas firmas, interdependência estratégica.
- **Cournot** (quantidades): $p > MC$, markup cai com número de firmas, concorrência perfeita como limite quando $J \to \infty$.
- **Bertrand** (preços): com produto homogêneo e mesmos custos, equilíbrio $p = c$, mesmo com duas firmas.

Concorrência monopolística

- Muitas firmas, produto diferenciado, entrada livre.
- Cada firma se comporta como monopolista de sua variedade:

$$\frac{p_j - MC_j}{p_j} = \frac{1}{|\varepsilon_j|}.$$

- No longo prazo: lucros econômicos zero, mas ainda $p > MC$ e produção abaixo da escala mínima eficiente $\to$ **excesso de capacidade**.
- Trade-offs de bem-estar: poder de mercado vs. benefícios de diversidade de produto.

6.3 Estruturas de Mercado: Neumark, Zhang & Ciccarella (2008)

Pergunta central: O que acontece com preços, concorrentes e estrutura de mercado quando uma grande firma (Walmart) entra em um mercado local?

Mecanismo de estrutura de mercado:

- Walmart possui forte poder de mercado na dimensão **preço**: custos menores via logística, escala e barganha com fornecedores.
- Entrada gera competição agressiva $\to$ **redução de preços nos supermercados locais**.

- Efeito deslocamento: lojas tradicionais perdem participação de mercado e algumas fecham.

Resultados empíricos chave:

- Preços de supermercados caem significativamente após a entrada do Walmart.
- Evidência de **poder de mercado dinâmico**: rivalidade inicial forte, mas possível redução da concorrência no longo prazo por saída de competidores menores.

Conexão com Estruturas de Mercado:

- Entrada de uma firma de grande escala altera a estrutura local: de mercado competitivo fragmentado para **mercado concentrado**.
- Ilustra o efeito de "chain stores" $\rightarrow$ comportamento estratégico e disciplina de preços.
- Mostra como poder de mercado emerge não só via preço, mas via **vantagens de custo**.

6.4 Estruturas de Mercado: Grubb (2009) – Overconfident Consumers

Bem analisado: Serviços de **telefonia celular pós-paga**, com franquia mensal ("allowance") e tarifas altas por uso excedente ("overage fees").

Pergunta do paper: Como firmas competem quando consumidores são **sobreconfiantes** sobre quanto vão usar o celular? A sobreconfiança permite às firmas extrair mais lucro via contratos complexos.

Ideia central:

- Consumidores acham que vão usar pouco, mas ex post usam mais.
- Demanda é muito sensível ao preço de entrada, mas pouco sensível às tarifas extras.
- Isso cria oportunidade para exploração estratégica pelas firmas.

Estratégia ótima da firma:

- Oferecer **preço inicial baixo** + cobrar **tarifas altas de uso excedente**.
- Estrutura típica: **three-part tariff** (1) mensalidade baixa; (2) franquia gratuita; (3) preço alto por minuto extra.
- Mesmo com muitas firmas no mercado, todas convergem para esse mesmo contrato.

Conexão com Estruturas de Mercado:

- **Competição não elimina poder de mercado**: lucro vem do viés comportamental.
- Preços não-lineares aparecem mesmo em mercados concorrenciais.
- Estrutura de mercado é determinada também pelo **comportamento do consumidor**, não apenas pelo número de firmas.

1 Ideia geral

1.1 Quando os teoremas do bem-estar falham

- Capítulo 10: sob preferências privadas e tecnologias sem interdependências:

  $$\text{Equilíbrio competitivo} \Rightarrow \text{Pareto ótimo} \quad \text{e} \quad \text{Qualquer Pareto ótimo} \Rightarrow \text{pode ser descentralizado.}$$

- Capítulo 11: duas fontes clássicas de **falha de mercado**:
  - **externalidades**: bem-estar ou tecnologia de um agente depende *diretamente* das ações de outro;
  - **bens públicos**: consumo por um agente não reduz disponibilidade para outros.
- Consequência central:

  $$\text{Equilíbrio competitivo, em geral} \neq \text{Pareto ótimo.}$$

- Políticas possíveis:
  - instrumentos de **quantidade**: quotas, provisão pública;
  - instrumentos de **preço**: impostos/subsídios pigouvianos;
  - criação de **direitos de propriedade** e mercados para a externalidade;
  - mecanismos de revelação de informação (Groves–Clarke).

2 Externalidade bilateral simples

2.1 Definição e exemplo básico

- **Externalidade** (Def. 11.B.1): bem-estar de um consumidor ou tecnologia de uma firma é **diretamente** afetado pelas ações de outro agente.
  - "Diretamente" = não mediado por preços (exclui *externalidades pecuniárias*).
- Exemplo: dois consumidores, $i = 1, 2$.
  - Consumidor 1 escolhe $h \geq 0$ (poluição, barulho, jardinagem, etc.).
  - Utilidade derivada de h (após escolher bens privados):

    $$v_i(h) = \phi_i(h) + w_i,$$

    com $\phi_i'(h) \neq 0$ para algum h.
- Interpretação:
  - $\phi_1(h)$: benefício privado de 1 ao escolher h;
  - $\phi_2(h)$: ganho ou perda de 2 decorrente de h.
- **Negativa**: $\phi_2(h) < 0$ (poluição, barulho, etc.).
- **Positiva**: $\phi_2(h) > 0$ (jardim bonito, conhecimento, etc.).

2.2 Equilíbrio competitivo x ótimo de Pareto

- Em equilíbrio competitivo, 1 escolhe h ignorando o efeito sobre 2:

$$h^* \in \arg\max_{h \geq 0} \phi_1(h) \quad \Rightarrow \quad \phi_1'(h^*) = 0 \text{ (se interior).}$$

- Ótimo de Pareto: maximiza excedente conjunto dos dois agentes:

$$h^0 \in \arg\max_{h \geq 0} \left[\phi_1(h) + \phi_2(h)\right].$$

$$\Rightarrow \ \phi_1'(h^0) + \phi_2'(h^0) = 0 \quad \Rightarrow \quad \phi_1'(h^0) = -\phi_2'(h^0).$$

- Se externalidade é **negativa** ($\phi_2'(h) < 0$) e retorno marginal para (1) é decrescente ($\phi_1'' < 0$):

$$\phi_1'(h^0) = -\phi_2'(h^0) > 0 \quad \Rightarrow \quad h^* > h^0.$$

- Mensagem:
  - mercado gera "excesso" de atividade que produz externalidade negativa;
  - simetricamente, "pouco" de atividade com externalidade positiva.

3 Soluções clássicas para externalidades

3.1 Quotas e imposto pigouviano

- **Quota**:
  - governo impõe $h \leq h^0$;
  - dado que $\phi_1(h)$ é crescente até h^0 e depois decrescente, 1 escolhe $h = h^0$.

- **Imposto pigouviano** (Pigou):
  - taxa t_h por unidade de h;
  - 1 resolve

$$\max_{h \geq 0} \ \phi_1(h) - t_h h \quad \Rightarrow \quad \phi_1'(h) = t_h \text{ (se interior).}$$

  - escolha de t_h:

$$t_h^\star = -\phi_2'(h^0).$$

  - então $h = h^0$ resolve ao mesmo tempo

$$\phi_1'(h^0) = t_h^\star \quad \text{e} \quad \phi_1'(h^0) = -\phi_2'(h^0).$$

- Intuição: o imposto replica o **custo marginal social** ignorado por 1.

3.2 Coase: direitos de propriedade e barganha

- **Ideia (Teorema de Coase)**:
  - se direitos de propriedade sobre h são bem definidos, exclusivos e *transacionáveis*, agentes podem barganhar e chegar a h^0;
  - o resultado eficiente independe de quem possui o direito inicialmente (afeta só a distribuição de renda).
- Exemplo:
  - se 2 tem direito ao "ar limpo": 1 só pode gerar $h > 0$ pagando compensação a 2;
  - se 1 tem direito de poluir: 2 paga para reduzir h;
  - barganha pára quando

$$\phi_1'(h) = -\phi_2'(h) \quad \Rightarrow \quad h = h^0.$$

- **Condições fortes** para Coase funcionar:
  1. informação completa sobre benefícios e custos marginais;
  2. custos de transação desprezíveis;
  3. externalidade mensurável e contratos verificáveis;
  4. número pequeno de agentes (sem free-riding).
- Se essas hipóteses falham, volta a necessidade de impostos, quotas ou regulação.

3.3 Externalidade como "mercado faltante"

- Ideia: externalidade existe porque **não há mercado** para comprar/vender o "direito" de gerar h.
- Se existir um mercado competitivo de "direitos de poluir" com preço p_h:
  - 1 escolhe h maximizando $\phi_1(h) - p_h h \Rightarrow \phi_1'(h) = p_h$;
  - 2 escolhe demanda de "redução de h" maximizando $-\phi_2(h) + p_h h \Rightarrow -\phi_2'(h) = p_h$.

$$\Rightarrow \quad \phi_1'(h) = p_h = -\phi_2'(h),$$

  que coincide com a condição de Pareto.
- Logo:

$$\text{Equilíbrio competitivo com mercado para } h \Rightarrow h = h^0.$$

- Mensagem:
  - externalidade = **ausência** de um mercado relevante;
  - em muitos casos, esse mercado é irrealista (poucos agentes, medição difícil).

4 Bens públicos

4.1 Definição e exemplos

- **Bem público** (Def. 11.C.1): bem cujo uso por um agente apresenta:
  - **Não-rivalidade**: consumo adicional por um indivíduo não diminui o consumo dos demais;
  - **Não-exclusão** (em muitos casos): é difícil ou impossível impedir indivíduos de consumir o bem.
- Exemplos:
  - defesa nacional, controle de enchentes, ruas e iluminação, ar limpo;
  - conhecimento (ideias).
- Também há **males públicos** (public bads): poluição, ruído.
- Relação com externalidades:
  - provisão privada de bem público gera externalidade positiva para todos (cada unidade beneficia todos os consumidores);
  - aparece o problema do **free rider**.

4.2 Condição ótima de Samuelson

- I consumidores, bem público q:

$$\phi_i(q), \quad \phi_i'(q) > 0,\ \phi_i''(q) < 0.$$

- Custo de produzir q: $c(q)$, com $c'(q) > 0$, $c''(q) > 0$.
- Ótimo de Pareto (quasilinear, parcial equilíbrio):

$$\max_{q \geq 0} \sum_{i=1}^{I} \phi_i(q) - c(q).$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{I} \phi_i'(q^0) = c'(q^0) \quad \text{(condição de Samuelson).}$$

- Interpretação:
  - **soma** das utilidades marginais individuais $\Rightarrow$ benefício marginal social;
  - deve ser igual ao custo marginal de produzir mais uma unidade.
- Diferença para bem privado:
  - bem privado: cada consumidor iguala $\phi_i'(x_i) = p = c'(x)$;
  - bem público: agregação é **vertical**: somam-se as MB_i.

4.3 Provisão privada e free-riding

- Considere provisão privada: cada consumidor i compra x_i de bem público a preço p:

$$q = \sum_i x_i.$$

- Cada i resolve:

$$\max_{x_i \geq 0} \ \phi_i\Big(x_i + \textstyle\sum_{j \neq i} x_j\Big) - px_i.$$

$$\Rightarrow \quad \phi_i'(q^*) = p \quad \text{(para quem escolhe } x_i^* > 0\text{)}.$$

- Firma escolhe q^* tal que:

$$p = c'(q^*).$$

- Em equilíbrio competitivo:

$$\phi_i'(q^*) = c'(q^*) \quad \text{apenas para o agente com maior } \phi_i'.$$

$$\Rightarrow \quad \sum_i \phi_i'(q^*) > c'(q^*) \Rightarrow q^* < q^0.$$

- **Free-rider problem**:
  - cada agente ignora o benefício que sua contribuição gera para os demais;
  - tende a "andar de carona" no esforço alheio.

4.4 Falhas de mercado e soluções (visão geral)

Falha fundamental: provisão privada é ineficiente (Livro, p. 361–363)

- Cada consumidor escolhe x_i ignorando os benefícios que gera para os demais.
- Resultado de equilíbrio:

$$\phi_i'(q^*) = p \quad \Rightarrow \quad q^* < q^\star$$

- Apenas o consumidor com maior benefício marginal tende a contribuir; os demais **free ride**.

Mecanismos de Correção:

- **Provisão pública direta:** governo escolhe $q^\star$ e financia via impostos.
- **Subsídios individuais** (Pigouvianos para bens públicos):

$$s_i = \phi_i'(q^\star)$$

  induzem cada indivíduo a internalizar o benefício aos demais.

- **Equilíbrio de Lindahl** (p. 363–364):
  - Preços personalizados p_i para cada agente.
  - Cada consumidor escolhe q tal que $\phi_i'(q) = p_i$.
  - Firma escolhe q com $\sum_i p_i = c'(q)$.
  - Resultado é eficiente, mas **não é realista**: exige exclusão, informação perfeita, e agentes preço-tomadores.

Mensagem central: sem intervenção, bens públicos são subofertados; políticas ótimas exigem alinhar incentivos individuais ao benefício social agregado.

4.5 Falhas de mercado e soluções com equações

Falha Fundamental (p. 361–363):

$$\phi_i'(q^*) = p \quad \text{para algum } i \quad \Rightarrow \quad q^* < q^\star$$

- Cada indivíduo contribui ignorando os benefícios aos demais.
- Surge o **free rider**: somente o agente com maior ϕ_i' paga.

(1) Provisão pública direta: Governo escolhe $q^\star$ tal que:

$$\sum_{i=1}^{I} \phi_i'(q^\star) = c'(q^\star)$$

(2) Subsídios Pigouvianos (internalizam benefício social):

$$s_i = \phi_i'(q^\star)$$

Com o subsídio, consumidor i escolhe x_i resolvendo:

$$\max_{x_i \geq 0} \ \phi_i(q) + s_i x_i - p x_i$$

FOC:

$$\phi_i'(q^\star) + s_i = p \Rightarrow \sum_i \phi_i'(q^\star) = c'(q^\star)$$

(3) Equilíbrio de Lindahl (p. 363–364):

- Preço personalizado: p_i.
- Consumidor i:
$$\phi_i'(q^L) = p_i$$
- Firma:
$$\sum_{i=1}^{I} p_i = c'(q^L)$$

Resultado:

$$q^L = q^\star,$$

mas requer informação perfeita + exclusão + mercados personalizados $\Rightarrow$ irrealista.

4.6 Lindahl: mercado idealizado para bens públicos

- Ideia: cada consumidor enfrenta um **preço personalizado** p_i por unidade do mesmo q.
- Consumidor i escolhe q_i (que será igual ao q comum no equilíbrio):

$$\max_{q_i \geq 0} \ \phi_i(q_i) - p_i q_i \quad \Rightarrow \quad \phi_i'(q) = p_i.$$

- Firma vê demanda agregada com preço total $\sum_i p_i$:

$$\sum_i p_i = c'(q).$$

- No equilíbrio de Lindahl:

$$\sum_i \phi_i'(q^L) = c'(q^L),$$

logo $q^L = q^0$ (eficiência).

- Problemas:
  - exige informação perfeita sobre preferências individuais;
  - exige exclusão (se não pagar, não consome q);
  - "mercado" com um comprador de cada bem personalizado $\Rightarrow$ hipótese de price-taking pouco plausível.

- Resultado: útil como **benchmark teórico**, pouco realista como política.

5 Multilateralidade e políticas

5.1 Externalidades multilaterais: depletáveis vs não-depletáveis

- Muitas externalidades importantes são **multilaterais**: vários geradores, vários afetados.

- Distinção central:
  - **depletáveis** (privadas, rivais): o que cai em um lugar não cai em outro (ex.: lixo em terrenos específicos);
  - **não-depletáveis** (públicas, não rivais): todos experienciam o mesmo nível (ex.: qualidade do ar, chuva ácida, congestionamento).

- Resultado:
  - depletáveis $\Rightarrow$ comportamento parecido com bem privado; com direitos de propriedade e muitos agentes, mercado de "direitos" funciona razoavelmente;
  - não-depletáveis $\Rightarrow$ problema de bem público (ou mal público): mercados competitivos padrão tendem a falhar, reaparece free-riding.

5.2 Depletable vs nondepletable (Mas-Colell p. 365)

- **Depletable**: externalidade é rival (ex.: lixo jogado em terreno alheio).

$$h_1 + h_2 + \cdots = \text{total}.$$

- **Nondepletable**: externalidade afeta todos igualmente (ex.: poluição do ar).

$$\text{todos os consumidores vivenciam o mesmo nível de } H.$$

- Em depletable $\rightarrow$ mercados funcionam se houver direitos de propriedade bem definidos.

- Em nondepletable $\rightarrow$ problema é essencialmente um bem público.

5.3 Ótimo para externalidade nondepletable

- N firmas, externalidade total $H = \sum_j h_j$.
- Consumidores têm dano $\phi_i(H)$.
- Problema social:

$$\max_{h_j \geq 0} \sum_i \phi_i \left(\sum_j h_j \right) + \sum_j \pi_j(h_j).$$

- Condição de primeira ordem (p. 367):

$$\sum_i \phi_i'(H) = -\pi_j'(h_j), \quad \forall j.$$

- Mercado competitivo não internaliza a soma à esquerda.

5.4 Externalidade não-depletável: impostos vs permissões negociáveis

Ambiente: externalidade "global" gerada por várias firmas

- Cada firma j escolhe $h_j \geq 0$ (ex.: emissões).
- Todos os consumidores sofrem dano do nível agregado:

$$H = \sum_j h_j, \qquad \text{dano individual: } \phi_i(H), \;\; \phi_i'(H) < 0.$$

Ótimo social (planejador):

- Escolher $\{h_j\}$ para maximizar bem-estar total.
- Condição de primeira ordem:

$$\sum_i \phi_i'(H^0) = -\, \pi_j'(h_j^0) \qquad \forall j.$$

- Intuição: **soma dos danos marginais** = **benefício marginal** da firma.

(1) Imposto Pigouviano uniforme

- Governo cobra imposto t_h por unidade de emissão:

$$t_h = -\sum_i \phi_i'(H^0).$$

- Firma j escolhe:

$$\max_{h_j \geq 0} \; \pi_j(h_j) - t_h h_j \quad \Rightarrow \quad \pi_j'(h_j) = -t_h.$$

- Resultado: cada firma internaliza o **dano marginal agregado**.

(2) Permissões negociáveis (cap-and-trade)

- Governo fixa o nível agregado ótimo H^0 (o "cap").
- Distribui ou leiloa H^0 permissões; cada permissão = 1 unidade de h.
- Firmas compram/vendem permissões; o preço emerge endogenamente.
- **Consequência:**
  - total de emissões = H^0 (eficiência no nível agregado);
  - alocação de h_j entre firmas é eficiente (custos marginais igualados).

6 Informação privada e mecanismos

6.1 Mecanismo de Groves–Clarke (GC)

Problema: em bens públicos e externalidades, agentes possuem **informação privada** sobre seus benefícios ou custos. Sem incentivos, eles mentem para manipular a decisão coletiva.

Ideia central do GC (Livro, p. 373):

- Cada agente **reporta** seu valor (benefício ou custo).
- O governo escolhe a ação (ex.: nível do bem público ou externalidade) que **maximiza o excedente social** *com base nos relatórios.*
- Pagamentos são definidos para que **cada agente internalize o impacto de sua mensagem** sobre os demais.

Propriedade-chave:

- **Verdade é estratégia dominante**: é o melhor que o agente pode fazer, independentemente dos outros.
- O resultado implementado é **eficiente** para todos os tipos possíveis.

Limitação fundamental (p. 374):

- O mecanismo **não equilibra o orçamento**: usualmente gera déficit ou superávit.
- Impossível ter simultaneamente: eficiência + verdade em estratégia dominante + orçamento balanceado.

Mensagem central: o GC mostra que é **possível implementar o ótimo** mesmo com informação privada — mas apenas sacrificando equilíbrio orçamentário.

7 Aplicações e Evidência Empírica

7.1 Externalidades de congestionamento: Kreindler (2023) – Congestion Pricing in Bangalore

Contexto: O trânsito de Bangalore sofre forte **externalidade de congestionamento**: cada motorista impõe custos de tempo aos demais.

Mecanismo da externalidade:

- As ruas operam em regime de **flow congestion**: velocidade cai quando o fluxo aumenta.
- Cada indivíduo ignora o impacto do seu deslocamento na velocidade dos outros.
- Resultado: equilíbrio descentralizado com tráfego excessivo e tempos de viagem ineficientes.

Modelo e contribuição:

- Modelo estrutural combinando teoria econômica e dados de GPS de milhões de viagens.
- Calcula o **custo marginal social** de cada viagem — base do pedágio ótimo.
- Mostra que o pedágio ótimo é **espacial e temporal**: depende da densidade local e da hora do dia.

Resultados principais:

- Pedágio ótimo reduz congestionamento em cerca de **7–10%** e aumenta velocidade média.
- Ganho de bem-estar significativo, especialmente nos horários de pico.
- Políticas simplificadas (flat toll) capturam boa parte do ganho.

Conexão com externalidades:

- Caso clássico de **Pigouvian tax**: corrige falha de mercado causada pela não internalização.
- O paper mostra como medir a externalidade e como precificar o uso de uma infraestrutura comum.

7.2 Externalidades de status: Charles, Hurst & Roussanov (2009) – Status Signaling

Contexto: Minorias nos EUA consomem mais bens visíveis (carros, roupas, joias) do que brancos de mesma renda.

Externalidade social:

- Conspicuous consumption gera um **jogo de status**: o consumo visível informa o "rendimento" do indivíduo.
- Cada pessoa tenta se destacar → aumenta consumo visível para manter posição relativa.
- Isso produz uma **externalidade negativa**: o status é posicional e depende da comparação com outros.

Modelo teórico:

- Bens visíveis funcionam como **sinal de renda** (à la Spence).
- O incentivo a sinalizar depende da renda média do grupo de referência.
- Previsão-chave: consumo visível **cai** quando a renda média do grupo sobe (validado nos dados).

Resultados empíricos:

- Blacks e Hispanics gastam cerca de **26% a mais** em bens visíveis do que brancos de mesma renda.
- Maior renda média do grupo → menor consumo visível individual.
- Status-seeking explica quase todo o gap racial em consumo visível.

Conexão com externalidades:

- Exemplo de **externalidade posicional**: o benefício privado gera prejuízo social via corrida por status.
- Equilíbrio ineficiente: famílias desviam recursos de bens produtivos (educação, saúde) para sinalização.
- Possíveis correções: políticas que reduzem a importância do sinal (informação) ou impostos sobre bens visíveis.

7.3 Aplicação: Sacrifice and Stigma (Iannaccone, 1992)

Ideia central do paper: A participação religiosa R_i gera um **bem público** Q ("qualidade/cohesão do grupo"). Cada membro se beneficia da participação dos outros → **externalidade positiva**. Por isso, no equilíbrio competitivo há **subinvestimento** em R (free-riding). Grupos eficientes usam **sacrifícios e estigmas** para elevar R e excluir free-riders.

Estrutura básica do modelo:

- Utilidade:
$$U_i = U(S_i, R_i, Q), \qquad Q = F(R_{-i}, N).$$
- Decisão individual:
$$(S_i, R_i), \qquad \tau_S S_i + \tau_R R_i \leq I_i.$$

- Interpretação: S_i (atividades seculares) competem com R_i; Q aumenta com a participação dos demais.

Por que surge a ineficiência?

- **Planejador social** internaliza que R_i aumenta Q:

$$\tau_R = \underbrace{MRS_{RS}}_{\text{benefício privado}} + \underbrace{MRS_{QS}}_{\text{benefício externo}}.$$

- **Equilíbrio competitivo / Nash** ignora o benefício externo:

$$\tau_R = MRS_{RS}.$$

Implicação:

$$R_i^{\text{Nash}} < R_i^{\text{ótimo}}$$

porque cada agente só considera seu próprio ganho — **free-riding em bem público**.

Ideia do autor: sacrifícios/estigmas elevam o "preço" de S_i e induzem maior R_i, aproximando o grupo do ótimo social e reduzindo free-riders.

1 Fundamentos de Informação Assimétrica

1.1 Visão geral: informação assimétrica

- Relações contratuais com **informação privada**:
  - um lado observa algo (tipo, esforço) que o outro não observa;
  - gera problemas de incentivos e eficiência.
- Dois ambientes centrais:
  1. **Hidden information / seleção adversa**:
     o agente conhece o seu tipo θ antes do contrato; o principal não.
  2. **Hidden action / moral hazard**:
     o agente escolhe esforço a após o contrato; o principal não observa.
- Respostas contratuais:
  - **Screening**: o lado não informado oferta um menu de contratos para induzir revelação do tipo.
  - **Signalling** (apenas de forma resumida): o lado informado envia um sinal custoso.
  - **Contratos de incentivo**: tornam pagamentos dependentes de resultados observáveis.
- Conexão com temas aplicados: seguros, crédito, tributação, regulação.

2 Screening com Seleção Adversa

2.1 Ambiente básico de seleção adversa (BD, Cap. 2)

- Um principal (monopolista, seguradora, banco) e um agente.
- Tipo do agente: $\theta \in \{\theta_L, \theta_H\}$, com $\theta_H > \theta_L$.
- Bem ou serviço $q \in \mathbb{R}_+$.
- Utilidade do agente:
  $$U(q, t; \theta) = v(q, \theta) - t,$$
  onde t é o pagamento ao principal ($t > 0$ = prêmio, preço).
- Custo do principal:
  $$C(q).$$
- Probabilidades ex ante: $\Pr(\theta_H) = \lambda$, $\Pr(\theta_L) = 1 - \lambda$.
- **Assimetria**: agente observa θ, principal não.

2.2 Primeiro melhor (tipo observável)

- Se o principal pudesse observar o tipo, escolheria (q_t^{FB}, t_t^{FB}) resolvendo:

$$\max_{(q_L,t_L),(q_H,t_H)} \lambda[t_H - C(q_H)] + (1-\lambda)[t_L - C(q_L)]$$

sujeito apenas a restrições de participação:

$$v(q_t^{FB}, \theta_t) - t_t^{FB} \geq 0, \quad t = L, H.$$

- Condição de eficiência para cada tipo:

$$v_q(q_t^{FB}, \theta_t) = C'(q_t^{FB}),$$

com t_t^{FB} escolhido de forma a extrair todo o excedente (se possível).

- Intuição:
  - cada tipo recebe a quantidade eficiente q_t^{FB};
  - informação perfeita permite extrair quase todo o excedente via t_t.

2.3 Segundo melhor com tipo oculto: menu de contratos

- Agora o principal não observa θ; oferece um menu:

$$(q_L, t_L), \quad (q_H, t_H).$$

- O agente escolhe o contrato que maximiza sua utilidade:

$$U(q_t, t_t; \theta) = v(q_t, \theta) - t_t.$$

- Restrições relevantes:
  - **IR** (*individual rationality*):

$$v(q_t, \theta_t) - t_t \geq 0, \quad t = L, H.$$

  - **IC** (*incentive compatibility*):

$$v(q_H, \theta_H) - t_H \geq v(q_L, \theta_H) - t_L \quad \text{(IC-H)},$$

$$v(q_L, \theta_L) - t_L \geq v(q_H, \theta_L) - t_H \quad \text{(IC-L)}.$$

- O principal escolhe (q_L, t_L, q_H, t_H) maximizando lucro esperado sujeito a IR e IC.

2.4 Estrutura de restrições no ótimo (BD)

Resultados típicos sob hipóteses padrão (v crescente em θ, monopólio, dois tipos):

- Ordem de qualidade:
$$q_H^{SB} > q_L^{SB}.$$
- No ótimo, apenas duas restrições são ativas:
$$\text{IR}_L \quad \text{e} \quad \text{IC}_H.$$
- Consequências:
$$q_L^{SB} = q_L^{FB}, \quad q_H^{SB} < q_H^{FB},$$
$$U_H^{SB} = v(q_H^{SB}, \theta_H) - t_H^{SB} > 0.$$
- Intuição econômica:
  - contrato do tipo baixo é **eficiente** (como no primeiro melhor);
  - contrato do tipo alto é **distorcido para baixo** (*distortion at the top*);
  - tipo alto recebe **renda informacional**.

2.5 Intuição da distorção e renda informacional

- Tipo alto tem maior disposição a pagar por qualidade:
$$v_q(q, \theta_H) > v_q(q, \theta_L).$$
- Se o principal oferecesse q_H^{FB}, o tipo baixo teria forte incentivo a imitar:
$$v(q_H^{FB}, \theta_L) - t_H^{FB} \text{ poderia ser maior que } v(q_L^{FB}, \theta_L) - t_L^{FB}.$$
- Para desincentivar imitação:
  - reduz-se q_H e/ou aumenta-se t_H, de forma a tornar o contrato alto menos atrativo para o tipo baixo;
  - isso preserva a auto-seleção, mas destrói eficiência no topo.
- Interpretação:
  - a informação privada gera um **custo informacional** que aparece como perda de eficiência no tipo alto e renda informacional para ele;
  - o principal "queima excedente" para implementar IC.

2.6 Aplicação: crédito, seleção adversa e racionamento (BD)

- Empreendedores precisam de um empréstimo L para financiar projeto.
- Cada projeto gera:
$$\tilde{Y} = \begin{cases} Y & \text{com probabilidade } p(\theta), \\ 0 & \text{com probabilidade } 1 - p(\theta), \end{cases}$$
com tipos $\theta \in \{\theta_L, \theta_H\}$ e $p(\theta_H) > p(\theta_L)$.
- Banco cobra taxa de juros nominal R (pagamento $(1+R)L$ em caso de sucesso) e pode pedir colateral K.
- **Seleção adversa:** o banco não observa θ, apenas a decisão de aceitar o contrato.
- Lucro esperado por empréstimo para um tipo θ:
$$\pi(R|\theta) = p(\theta)(1 + R)L - L.$$
- Quando R aumenta:
  - a margem por empréstimo sobe ($(1 + R)L - L$ maior);
  - mas tipos mais seguros deixam de demandar crédito $\rightarrow$ a qualidade média dos tomadores $\mathbb{E}[p(\theta) \mid \text{aceita}]$ cai.
- **Racionamento de crédito (à la Stiglitz–Weiss/BD):**
  - lucro esperado do banco $\Pi(R)$ pode ser *não monotônico* em R;
  - existe R^* que maximiza $\Pi(R)$;
  - se a demanda por crédito a R^* for maior que a oferta disponível, o equilíbrio envolve **racionamento em quantidade**, não juros mais altos.
- Conexão com screening: menus (R, K) podem ser usados para induzir auto-seleção de tipos, mas a assimetria de informação gera, em equilíbrio, distorções e possível racionamento.

3 Signalling (Resumo)

3.1 Signalling: resumo em uma slide

- Agora o **tipo informado** escolhe um sinal custoso s antes do contrato.
- Exemplo: educação (Spence):
$$c(s, \theta_H) < c(s, \theta_L),$$
isto é, o sinal é mais barato para o tipo alto.
- A firma observa apenas s e oferece salário $w(s)$.
- **Equilíbrio separador**:
$$s_H > s_L, \quad w(s_H) = \text{produtividade alta}, \quad w(s_L) = \text{produtividade baixa}.$$

- Intuições centrais:
  - o sinal *não* aumenta a produtividade, apenas revela o tipo;
  - a condição $c(s, \theta_H) < c(s, \theta_L)$ garante que só o tipo alto tem incentivo a escolher s_H;
  - diferença-chave em relação ao screening: em signalling o lado informado move primeiro (escolhe s), enquanto em screening o lado não informado move primeiro (oferece o menu de contratos).

4 Moral Hazard: Ação Oculta

4.1 Modelo básico de moral hazard (BD, Cap. 4)

- Timeline:
  1. principal oferece contrato $w(\cdot)$;
  2. agente aceita ou rejeita;
  3. se aceita, escolhe esforço não observável a;
  4. resultado x é realizado (sucesso/fracasso, ou nível de output);
  5. pagamento $w(x)$ é feito.
- Suponha output binário: $x \in \{0, 1\}$.
- Probabilidade de sucesso:

$$\Pr(x = 1|a) = p(a), \quad p'(a) > 0,\ p''(a) < 0.$$

- Salários contingentes:

$$w_1 = w(x = 1), \quad w_0 = w(x = 0).$$

- Utilidade do agente:

$$U = p(a)u(w_1) + [1 - p(a)]u(w_0) - \psi(a),$$

  com $u' > 0$, $u'' < 0$, $\psi' > 0$, $\psi'' > 0$.

4.2 Primeiro melhor (esforço observável)

- Se o esforço a fosse observável:
  - principal escolhe (w_0, w_1, a) para maximizar lucro esperado;
  - sujeito apenas à **participação** do agente.
- Se principal é neutro ao risco e agente é avesso a risco:

$$w_0 = w_1 = \bar{w} \quad \Rightarrow \quad \text{seguro completo.}$$

- Esforço eficiente a^{FB} satisfaz:

$$p'(a^{FB})[V - \bar{w}] = \psi'(a^{FB}),$$

  onde V é o valor do sucesso para o principal.

- Intuição:
  - com esforço observável, não há razão para expor o agente a risco;
  - separa-se perfeitamente decisão de esforço (incentivos) e seguro.

4.3 Segundo melhor (esforço não observável)

- Agora o esforço a é privado; contrato não pode depender diretamente de a.
- Agente escolhe a resolvendo:

$$\max_a \left[p(a)u(w_1) + (1 - p(a))u(w_0) - \psi(a)\right].$$

- O agente escolhe esforço:

$$a \in \arg\max_a U(a).$$

- Condição de incentivo (FOC interior):

$$p'(a)\left[u(w_1) - u(w_0)\right] = \psi'(a).$$

- Interpretação:
  - LHS = ganho marginal esperado de aumentar esforço (maior probabilidade de receber w_1 em vez de w_0);
  - RHS = custo marginal do esforço.
- Para induzir esforço mais alto:
  - é preciso aumentar o "gap" $u(w_1) - u(w_0)$;
  - para gerar esforço, o principal precisa criar um **incentive gap** $u(w_1) - u(w_0)$;
  - isso implica **expor o agente a risco** (variância maior de w).
  - qualquer gap positivo expõe o agente a risco, devido a $u'' < 0$.

4.4 Trade-off seguro–incentivo

- Se $w_1 = w_0$, então $u(w_1) - u(w_0) = 0 \to$ não há incentivo ao esforço.
- Se w_1 muito maior que w_0:
  - incentivos fortes;
  - mas agente enfrenta risco elevado $\to$ custo de risco alto por causa de $u'' < 0$.
- Contrato ótimo de *segundo melhor*:
  - escolhe (w_0, w_1, a) para maximizar lucro do principal

$$\max_{w_0,w_1,a} \Pi = p(a)\Big(y_1 - w_1\Big) + [1 - p(a)]\Big(y_0 - w_0\Big),$$

- sujeito a:
  * participação do agente (IR) ($U(a) \geq \bar{U}$);
  * condição de incentivo (IC) ($p'(a)[u(w_1) - u(w_0)] = \psi'(a)$).

- Conflito central (BD): O principal gostaria de seguro completo ($w_1 = w_0$), mas isso elimina incentivos. Para incentivar esforço, deve introduzir risco — que é custoso ao agente.

- Resultado geral:
  - esforço induzido $a^{SB} < a^{FB}$;
  - seguro parcial: nem $w_1 = w_0$, nem loteria extrema; $0 < w_1 - w_0 < \infty$;
  - portanto, esforço é subótimo e o seguro é apenas parcial;
  - estrutura do contrato reflete diretamente o trade-off seguro–incentivo;
  - salários contingentes ao output, mas não extremos;
  - seguro parcial: o agente enfrenta algum risco, mas o mínimo necessário.

4.5 Gap salarial: esforço, tecnologia e aversão ao risco

- Condição de incentivo:
$$p'(a)\Big[u(w_1) - u(w_0)\Big] = \psi'(a).$$

- Rearranjando:
$$u(w_1) - u(w_0) = \frac{\psi'(a)}{p'(a)}.$$

- Aproxime em salários (Taylor em torno de w_0):
$$u(w_1) - u(w_0) \approx u'(w_0)(w_1 - w_0)$$
$$\Rightarrow \quad w_1 - w_0 \approx \frac{\psi'(a)}{p'(a)\, u'(w_0)}.$$

- Aversão ao risco:
  - Como $u'' < 0 \Rightarrow u'(w_0)$ maior;
  - quanto mais avesso ao risco o agente (maior $u'(w_0)$), **menor** o gap salarial necessário para gerar o mesmo incentivo;
  - mas qualquer gap positivo expõe o agente a risco risco $\rightarrow$ custo aumentado para satisfazer IR.

4.6 Versão contínua e contratos lineares

- Em versões contínuas (BD, capítulos posteriores), output y é contínuo:
$$y = f(a) + \varepsilon.$$

- Usando utilidade CARA e $\varepsilon \sim N(0, \sigma^2)$, mostra-se que um contrato linear

$$w(y) = \alpha + \beta y$$

é ótimo dentro de uma classe ampla.

- Coeficiente de incentivo:

$$\beta^* = \beta(\rho, \sigma^2, f', \psi'),$$

decresce em risco e aversão ao risco, aumenta em sensibilidade do output ao esforço.

- Intuição:
  - quanto maior o ruído σ^2 ou a aversão ao risco ρ, menor deve ser β;
  - quanto mais informativo é o sinal y sobre o esforço (alto $f'(a)$), maior pode ser β.

5 Crédito: Seleção Adversa e Moral Hazard

5.1 Crédito como ambiente para informação assimétrica

- Empréstimo de valor L, taxa de juros nominal r.
- Repagamento (ideal) caso não haja default:

$$(1 + r)L.$$

- Probabilidade de repagamento depende:
  - do **tipo** do tomador (risco privado) $\to$ seleção adversa;
  - do **esforço** pós-empréstimo (esforço de repagamento, comportamento) $\to$ moral hazard.
- Repagamento esperado:

$$\mathbb{E}[\text{repag}|r] = (1 + r)L \Pr(\text{repag} \mid \text{tipo},\ \text{esforço}(r)).$$

- Banco observa apenas default agregado:

$$\Pr(\text{default}|r) = 1 - \Pr(\text{repag}|r),$$

misturando seleção e incentivos.

5.2 Seleção adversa em crédito

- Taxas de juros mais altas alteram composição dos tomadores:

$$r \uparrow \Rightarrow \text{tomadores mais seguros podem sair do mercado.}$$

- Tipos:
  - θ_H: alto risco, alta probabilidade de default;

- θ_L: baixo risco.

- Dado um menu (r, K) (juros, colateral), a decisão de aceitar o contrato depende da distribuição de retornos do projeto.
- Aumento em r:
  - reduz retorno líquido dos tipos conservadores;
  - pode não afastar tipos arriscados, que exploram o upside e ignoram downside (default).
- Efeito agregado: **piora da qualidade média** dos tomadores quando r sobe $\rightarrow$ base teórica para racionamento de crédito.

5.3 Moral hazard em crédito

- Após receber o empréstimo, o tomador escolhe ações não observáveis:
  - esforço de monitoramento do projeto;
  - nível de risco do investimento;
  - esforço em honrar o pagamento.
- Taxas mais altas podem afetar esse esforço:
  - juros muito altos aumentam o ganho de default;
  - podem reduzir incentivo a sacrificar consumo presente para pagar dívida.
- Papel do contrato:
  - cláusulas de colateral;
  - *dynamic incentives* (acesso futuro ao crédito condicionado ao histórico);
  - reestruturação vs punição em caso de atraso.
- Em teoria: moral hazard gera **subinvestimento em esforço** e aumento não eficiente de risco.

6 Aplicação Empírica: Karlan & Zinman (2009)

6.1 Karlan & Zinman (2009): contexto

- Experimento de campo na África do Sul com crédito pessoal.
- Banco parceiro envia ofertas de empréstimo a potenciais tomadores.
- Objetivo: separar empiricamente
  - **seleção adversa**: quem aceita a oferta?;
  - **moral hazard**: como os tomadores se comportam após o empréstimo?
- Estratégia:

- aleatorizar taxas de juros na oferta (*ex ante*);
- aleatorizar taxa efetiva no contrato (*ex post*) para quem aceitou.

6.2 Identificação de seleção adversa

- Passo 1: comparar default entre grupos que receberam **ofertas** com juros diferentes.
- Ideia:
  - taxa de oferta r^{offer} afeta quem aceita o empréstimo;
  - para um dado $r^{contract}$, mudanças em r^{offer} refletem apenas mudança na composição de tipos.
- Se:
$$r^{offer} \uparrow \Rightarrow \Pr(\text{default}|\text{tomador}) \uparrow,$$
  interpretamos como evidência de que:
  - juros mais altos atraem tomadores com maior propensão ao default;
  - consistente com seleção adversa na margem de entrada.

6.3 Identificação de moral hazard

- Passo 2: para quem aceitou o empréstimo, banco **randomiza** a taxa final do contrato:
$$r^{contract} \in \{r_{low}, r_{high}\}.$$
- Aqui a composição de tipos é mantida constante (mesmo conjunto de tomadores), e apenas o incentivo de repagamento muda.
- Se:
$$r^{contract} \uparrow \Rightarrow \Pr(\text{default}|\text{mesmo grupo de entrada}) \uparrow,$$
  interpretamos como:
  - tomadores ajustam esforço e comportamento ao incentivo;
  - juros mais altos reduzem esforço de repagamento $\rightarrow$ **moral hazard**.
- Resultado do paper:
  - evidência empírica tanto de seleção adversa quanto de moral hazard;
  - efeitos de moral hazard tendem a ser quantitativamente importantes.

6.4 Ligando teoria e evidência

- Do lado teórico (Bolton & Dewatripont):
  - screening: menus de contratos para tipos ocultos;
  - moral hazard: trade-off seguro–incentivo;
  - crédito: exemplo central em ambos os capítulos.
- Do lado empírico (Karlan & Zinman):
  - randomização ex ante e ex post permite separar mecanismos;
  - mostra que políticas de crédito que ajustam apenas taxa de juros podem:
    * atrair tipos piores (seleção adversa);
    * piorar o comportamento de repagamento (moral hazard).
- Para a prova:
  - descrever claramente os modelos de screening e moral hazard;
  - explicar como eles se aplicam ao mercado de crédito;
  - usar Karlan & Zinman como exemplo concreto de teste empírico da teoria.

6.5 Informação Assimétrica: Karlan & Zinman (2009)

Contexto: Mercado de crédito na África do Sul com forte assimetria de informação entre mutuários e banco. Autores implementam um experimento com 58.000 clientes.

Fonte da assimetria:

- **Hidden information** (seleção adversa): mutuários diferem em risco e esforço esperado, mas o banco não observa totalmente.
- **Hidden action** (moral hazard): após receber o empréstimo, mutuários escolhem esforço de pagamento que o banco não consegue monitorar.

Desenho experimental:

- Três randomizações independentes: (1) taxa de oferta (r^o), (2) taxa do contrato (rc), (3) taxa futura condicional (rf).
- Permite separar empiricamente seleção adversa (resposta ao r^o) de moral hazard (resposta a rc e rf).

Resultados:

- **Forte moral hazard**: 13–21% dos defaults decorrem de esforço ex-post insuficiente.
- **Seleção adversa fraca**: oferta (r^o) não altera significativamente o risco médio dentro do pool.

- Assimetria de informação explica parte das restrições de crédito, mesmo com juros altíssimos (200% APR).

Conexão com Informação Assimétrica:

- Demonstra empiricamente como separar **adverse selection** de **moral hazard**.
- Exemplo clássico de desenho experimental para identificar problemas de agência.
- Relevante para políticas públicas: garantia de crédito, regulamentação e desenho de contratos.

7 Resumo

7.1 Resumo — Informação Assimétrica

- **Screening (hidden information):**
  - tipos θ privados;
  - menu de contratos (q_t, t_t);
  - restrições IR e IC $\rightarrow$ *distortion at the top* e renda informacional.
- **Moral hazard (hidden action):**
  - esforço a não observável;
  - salário contingente a resultado (w_0, w_1);
  - trade-off seguro–incentivo $\rightarrow$ esforço de segundo melhor e seguro parcial.
- **Crédito:**
  - juros e colateral afetam seleção de tipos e esforço pós-empréstimo;
  - racionamento de crédito e contratos de incentivo emergem naturalmente.
- **Karlan & Zinman (2009):**
  - experimento de campo que separa seleção adversa e moral hazard;
  - ilustra como a teoria de contratos informa desenho de políticas de crédito.

7.2 Assimetria de Informação: Crawford, Pavanini & Schivardi (2018)

Pergunta do paper: Como **assimetria de informação** e **poder de mercado** bancário interagem para determinar concessão de crédito, taxas e risco em linhas de crédito para pequenas empresas?

Fontes de assimetria:

- **Hidden information**: bancos não observam totalmente risco e qualidade das firmas.
- **Hidden action**: após obter o crédito, firmas podem assumir riscos ou reduzir esforço.

- Resultado: seleção adversa + risco moral.

Modelo estrutural do paper:

- Modelo de demanda de crédito + oferta bancária com **informação assimétrica**.
- Estimação via dados de crédito da Itália, com granularidade firm-bank level.
- Banco forma crenças sobre risco usando dados internos e passados de default.

Resultados principais:

- Assimetria de informação gera **menos crédito** e **taxas maiores**.
- Bancos com maior poder de mercado exploram menos firmas arriscadas → podem **mitigar** efeitos negativos da assimetria.
- Mercados mais competitivos têm mais crédito, porém mais defaults (seleção pior).

Conexão com Assimetria de Informação:

- Mostra que assimetria de informação não opera sozinha: sua severidade depende da **estrutura competitiva** do mercado bancário.
- Ilustra como adverse selection e moral hazard distorcem preços e quantidades de crédito.
- Relevante para políticas de regulação e desenho de mercados financeiros.

1 Introdução e Roteiro

Roteiro da aula

1. Equivalência ricardiana (Bénassy)
2. Multiplicadores fiscais em um modelo Novo-Keynesiano com agente representativo (RANK) (Woodford)
   RANK = Representative-Agent New Keynesian model
3. Mercados incompletos: TANK e HANK e política fiscal
   TANK = Two-Agent New Keynesian model; HANK = Heterogeneous-Agent New Keynesian model
4. Condição de não-Ponzi: intuição e quebras (OLG e ativos seguros)
   OLG = Overlapping Generations
5. Apêndice: equações do modelo HANK canônico

2 Equivalência Ricardiana (Bénassy)

2.1 Família, títulos e fatores de desconto

Família:

- Preferências:
$$\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t U(C_t), \quad 0 < \beta < 1.$$
- D_t: quantidade real de **títulos públicos detidos pela família** no final do período t.
- r_t: **taxa de juros real** paga entre $t-1$ e t.
- Restrição orçamentária:
$$D_t = (1 + r_t) D_{t-1} + Y_t - T_t - C_t.$$

  T_t são impostos lump-sum.
  Dívida pública B_t:
$$B_t = (1 + r_t) B_{t-1} + G_t - T_t.$$

No equilíbrio, as famílias detêm os títulos do governo: $D_t = B_t$.

Fatores de desconto intertemporal:

$$A_t \equiv \prod_{j=0}^{t} \frac{1}{1+r_j},$$

o preço no tempo 0 de uma unidade de consumo no tempo t.

2.2 Equivalência ricardiana: álgebra e intuição

Multiplique a restrição da família por A_t, some em t e imponha não-Ponzi:

$$\lim_{t\to\infty} A_t D_t = 0 \implies \sum_{t=0}^{\infty} A_t C_t = D_{-1} + \sum_{t=0}^{\infty} A_t (Y_t - T_t).$$

Orçamento intertemporal do governo com não-Ponzi:

$$\lim_{t\to\infty} A_t B_t = 0 \implies \sum_{t=0}^{\infty} A_t T_t = B_{-1} + \sum_{t=0}^{\infty} A_t G_t.$$

Substituindo a restrição do governo na da família:

$$\sum_{t=0}^{\infty} A_t C_t = D_{-1} + \sum_{t=0}^{\infty} A_t (Y_t - G_t) - B_{-1}.$$

Intuição

- Dada a solvência, o valor presente dos impostos é determinado por $\{G_t\}$ e pela dívida inicial.
- A família representativa internaliza que dívida hoje *implica* impostos amanhã.
- Alterar a *temporização* dos impostos não muda o conjunto orçamentário vitalício, de modo que os equilíbrios $\{C_t\}$ e $\{Y_t\}$ são inalterados.

2.3 Condição de não-Ponzi: definição e papel

A condição de não-Ponzi do governo:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{B_t}{\prod_{j=0}^{t}(1+r_j)} = 0 \qquad \iff \qquad \lim_{t\to\infty} A_t B_t = 0.$$

Significado econômico

- A dívida não pode crescer para sempre mais rápido que o fator de juros reais.

- Eventualmente, a dívida deve ser lastreada por superávits primários (impostos maiores ou G_t menor).
- Isso fixa o valor presente dos impostos e descarta um esquema Ponzi fiscal puro.

Por que é necessária para a equivalência ricardiana?

Sem a condição de não-Ponzi, o governo poderia rolar a dívida indefinidamente sem jamais elevar impostos em valor presente se os mercados continuassem comprando. Diferentes planos de financiamento teriam efeitos-riqueza distintos para a família representativa, e dívida versus impostos **passariam** a importar.

2.4 Equivalência ricardiana também com produção

Em um modelo RBC/Ramsey padrão:

Família:

$$\max \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t [u(C_t) - v(H_t)],$$

$$C_t + K_{t+1} = (1-\delta)K_t + r_t K_t + w_t H_t - T_t.$$

Firmas:

$$Y_t = F(K_t, H_t), \quad r_t = F_K(K_t, H_t), \quad w_t = F_H(K_t, H_t).$$

Governo:

$$B_t = (1 + r_t)B_{t-1} + G_t - T_t, \quad \lim_{t\to\infty} A_t B_t = 0.$$

Por que o resultado ainda vale?

- Os impostos são lump-sum e o governo é solvente.
- Combinando as restrições intertemporais da família e do governo, o VP dos impostos é substituído pelo VP de $\{G_t\}$ e da dívida inicial.
- Os caminhos factíveis $\{C_t, K_t, H_t, Y_t\}$ dependem apenas de $\{G_t\}$, não do mix imposto/dívida.

3 Multiplicadores Fiscais em RANK (Woodford)

3.1 RANK com preços flexíveis: formulação

Modelos Novo-Keynesianos com agente representativo (RANK), com preços flexíveis.

Família:

$$\max_{\{C_t,H_t\}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t [u(C_t) - v(H_t)],$$

sujeita a uma restrição orçamentária intertemporal (focamos aqui na condição intratemporal).

Firma:

$$Y_t = f(H_t), \quad f' > 0, \, f'' < 0.$$

Restrição de recursos:

$$Y_t = C_t + G_t.$$

Ideia

- A família escolhe consumo C_t e horas de trabalho H_t.
- As firmas escolhem H_t dado o salário.
- Preços/salários flexíveis $\implies$ mercados se equilibram a cada período; o gasto do governo G_t usa recursos reais.

3.2 FOCs da família e da firma (preços flexíveis)

Otimização intratemporal da família:

$$\frac{v'(H_t)}{u'(C_t)} = \frac{W_t}{P_t},$$

ou seja, a taxa marginal de substituição lazer–consumo iguala o salário real.

Otimização da firma:

$$\max_{H_t} \Pi_t = P_t f(H_t) - W_t H_t$$

$$\Rightarrow \; P_t f'(H_t) = W_t \implies \frac{W_t}{P_t} = f'(H_t).$$

Combinando as FOCs:

$$\frac{v'(H_t)}{u'(C_t)} = f'(H_t) \implies u'(C_t) = v'(H_t) f'(H_t).$$

Esta é a condição intratemporal chave de Woodford no benchmark de preços flexíveis.

3.3 Equilíbrio com preços flexíveis e multiplicador

Produção: $Y_t = f(H_t)$, recursos: $Y_t = C_t + G_t$.

Usando $C_t = Y_t - G_t$ e definindo $\tilde{v}(Y) \equiv v(f^{-1}(Y))$, temos:

$$u'(Y_t - G_t) = \tilde{v}'(Y_t).$$

Diferenciando em relação a G_t e usando a notação de elasticidades de Woodford:

$$\boxed{\frac{dY_t}{dG_t} = \frac{\eta_u}{\eta_u + \eta_v}},$$

com $\eta_u, \eta_v > 0$, logo $0 < \frac{dY_t}{dG_t} < 1$.

Intuição

- G_t absorve parte de Y_t, então $C_t = Y_t - G_t$ precisa cair a menos que Y_t aumente.
- As famílias ofertam mais trabalho para elevar Y_t, mas enfrentam desutilidade marginal crescente de trabalho.
- O produto aumenta, mas menos do que um-para-um com G_t (*crowding out* do consumo privado).

3.4 Modelo Novo-Keynesiano com preços rígidos

Log-linearizado em torno do estado estacionário:

$$\pi_t = \beta \mathbb{E}_t[\pi_{t+1}] + \kappa x_t$$

(Curva de Phillips Novo-Keynesiana),

$$x_t = \mathbb{E}_t[x_{t+1}] - \frac{1}{\sigma}(i_t - \mathbb{E}_t[\pi_{t+1}] - r_t^\star)$$

(Curva IS),

$$i_t = \bar{i} + \phi_\pi \pi_t + \phi_x x_t, \quad \phi_\pi > 1$$

(Regra de Taylor).

Definições

- x_t: **hiato do produto** = log(produto efetivo) − log(produto eficiente com preços flexíveis).

- π_t: inflação; i_t: taxa de juros nominal; $r_t^\star$: taxa de juros real natural (com preços flexíveis).
- $\kappa > 0$: inclinação da Curva de Phillips; $\sigma > 0$: elasticidade intertemporal de substituição.

Todas as variáveis são desvios em log do estado estacionário (sistema log-linearizado).

3.5 Preços rígidos + Regra de Taylor: multiplicador < 1

Um choque em G_t:

$$G_t \implies x_t \uparrow \implies \pi_t \uparrow \implies i_t \uparrow \implies r_t \uparrow \implies C_t \downarrow .$$

Intuição

- O gasto público aumenta o hiato do produto e a inflação.
- Sob uma regra de Taylor, o banco central eleva juros nominais e reais ($\phi_\pi > 1$).
- Juros reais mais altos reduzem a demanda privada, compensando parcialmente G_t.
- Assim, o multiplicador fiscal permanece < 1 no RANK com preços rígidos (fora do ZLB).

3.6 ZLB: multiplicador pode exceder 1

Na restrição do limite zero da taxa nominal (ZLB):

$$i_t = 0 \implies r_t = -\mathbb{E}_t[\pi_{t+1}].$$

Um aumento em G_t ainda gera:

$$G_t \implies x_t \uparrow, \pi_t \uparrow,$$

mas agora:

$$i_t \text{ fixo em } 0 \implies r_t = -\mathbb{E}_t[\pi_{t+1}] \downarrow \implies C_t \uparrow .$$

Intuição

- Em tempos normais, a política monetária reage ao estímulo fiscal.
- No ZLB, não há espaço para elevar a taxa nominal; G_t aumenta a inflação e reduz a taxa real.
- Taxas reais mais baixas estimulam o consumo privado; o multiplicador pode superar 1.

4 Mercados Incompletos, TANK e HANK

4.1 Modelo TANK em dois períodos (Moll) – ambiente

Agora mostramos como a inclusão de mercados incompletos/restrições de crédito pode produzir multiplicadores maiores que um. Começamos com um modelo **Two-Agent New Keynesian** (TANK) em **dois períodos** das aulas EC2B1 do Moll, como uma **simplificação** para tornar mais claros os multiplicadores fiscais e os mecanismos.

Tempo: $t = 1, 2$.

Preferências e tecnologia:

- Utilidade do poupador representativo: $U(C_1) + \beta U(C_2)$, com forma CRRA.
- Tecnologia: $Y_t = A_t K_t$, $K_2 = I_1$ (capital deprecia totalmente). As firmas maximizam o valor presente real do fluxo de lucros:

  $$W = \max_{K_2} A_1 K_1 - K_2 + \frac{1}{(1 + r_1)} P_2 A_2 K_2$$

  o que implica a FOC da firma:

  $$1 = A_2(1 + r_1),$$

  com $(1 + r_1) = \frac{(1+i_1)}{(1+\pi_1)}$ denotando a taxa real (equação de Fisher).
- Restrições de recursos da economia:

  $$C_1 + I_1 + G_1 = Y_1, \quad C_2 + G_2 = Y_2.$$

Ambiente monetário:

- O preço nominal P_1 é **fixo** (preço rígido no período 1).

- A taxa de juros nominal i_1 é definida pela política monetária: determina o nível de preços P_2 via a FOC da firma $\implies$

$$P_2 = \frac{P_1}{A_1}(1 + i_1).$$

- Inclui-se uma restrição de caixa-antecipado (CIA) no período 2: é necessário deter saldos monetários M_2 para pagar o consumo, implicando $M_2 = P_2 C_2$.

4.2 TANK: renda, governo e bloco CIA

Famílias: gastadores (HTM) vs. poupadores

- Parcela λ são **gastadores/hand-to-mouth (HTM)**: $C_t^{sp} =$ renda disponível corrente. Não conseguem poupar entre períodos, logo têm alta propensão marginal a consumir (MPC).

- Parcela $1 - \lambda$ são **poupadores**: escolhem (C_1^{sa}, C_2^{sa}) de forma ótima (MPC baixa, pois suavizam consumo).

Distribuição de renda ("truque" gastador–poupador de Moll):

- Sem trabalho, a renda real das famílias é dada pelo valor presente dos dividendos das firmas (per capita): W.

- Gastadores recebem $W^{sp} = \gamma^{sp} W$, poupadores recebem $W^{sa} = \gamma^{sa} W$.

- As participações satisfazem:

$$\lambda W^{sp} + (1 - \lambda) W^{sa} = W \quad \Rightarrow \quad \gamma^{sa} = \frac{1 - \lambda \gamma^{sp}}{1 - \lambda}.$$

Restrição orçamentária do governo:

$$P_1 G_1 + \frac{P_2 G_2}{1 + i_1} = P_1 \Big(\lambda T_1^{sp} + (1 - \lambda) T_1^{sa} \Big) + \frac{P_2}{1 + i_1} \Big(\lambda T_2^{sp} + (1 - \lambda) T_2^{sa} \Big).$$

Tratamos $(G_1, G_2, T_1^{sp}, T_2^{sp}, T_1^{sa})$ como variáveis de política; T_2^{sa} ajusta para satisfazer esta equação.

4.3 Funções de política de consumo

Para os poupadores, obtemos que o consumo segue uma equação de Euler (suavização de consumo).

Equação de Euler dos poupadores (em termos reais):

$$C_1^{sa} = \left(\frac{1}{\beta(1+r_1)}\right)^{\sigma} C_2^{sa} = \left(\frac{1}{\beta A_2}\right)^{\sigma} C_2^{sa},$$

onde usamos a condição da firma $1 = A_2(1 + r_1)$.

Para os gastadores, como não conseguem poupar, temos as seguintes funções de política:

Gastadores:

$$C_1^{sp} = W^{sp} - T_1^{sp} = \gamma^{sp} Y_1 - T_1^{sp}, \quad C_2^{sp} = -T_2^{sp}.$$

Consumo agregado:

$$C_t = \lambda C_t^{sp} + (1-\lambda) C_t^{sa}.$$

4.4 Equilíbrio no modelo TANK com preços rígidos

Com preços rígidos e famílias com alta MPC, Moll mostra que o equilíbrio satisfaz:

$$C_1 = \frac{1}{1-\lambda\gamma^{sp}} \left[-\lambda T_1^{sp} + \left(\frac{1}{\beta A_2}\right)^{\sigma} \left(\frac{A_2 M_2}{(1+i_1)P_1} + \lambda T_2^{sp}\right)\right] + \frac{\lambda\gamma^{sp}}{1-\lambda\gamma^{sp}} \left[G_1 + \frac{M_2}{(1+i_1)P_1} + \frac{G_2}{A_2}\right],$$

$$I_1 = \frac{M_2}{(1+i_1)P_1} + \frac{G_2}{A_2},$$

$$Y_1 = \frac{1}{1-\lambda\gamma^{sp}} \left[G_1 - \lambda T_1^{sp} + \left(\frac{1}{\beta A_2}\right)^{\sigma} \left(\frac{A_2 M_2}{(1+i_1)P_1} + \lambda T_2^{sp}\right) + \frac{M_2}{(1+i_1)P_1} + \frac{G_2}{A_2}\right],$$

$$C_2 = A_2 \frac{M_2}{(1+i_1)P_1}, \qquad Y_2 = C_2 + G_2.$$

Observação chave

- Em comparação ao RANK, o único novo objeto é o fator $\dfrac{1}{1-\lambda\gamma^{sp}}$.
- Ele reflete um loop **keynesiano** impulsionado pela alta MPC e pela participação na renda dos gastadores.

4.5 Multiplicador de gasto público em TANK

Mantendo as demais variáveis de política constantes, o multiplicador do gasto público no período 1 é:

$$\boxed{\frac{\partial Y_1}{\partial G_1} = \frac{1}{1-\lambda\gamma^{sp}}}$$

Intuição econômica

- Primeiro round: $G_1 \uparrow$ aumenta diretamente Y_1 em 1 unidade (um-para-um).
- Segundo round: maior Y_1 aumenta a renda dos gastadores em $\gamma^{sp}Y_1$.
- Eles consomem toda a renda extra $\Rightarrow$ demanda adicional $\Rightarrow$ novo aumento em Y_1.
- Esse processo se repete: cada unidade extra de Y_1 eleva a renda dos gastadores, e portanto a demanda, em $\lambda\gamma^{sp}$.

Série geométrica:

$$1 + \lambda\gamma^{sp} + (\lambda\gamma^{sp})^2 + \cdots = \frac{1}{1 - \lambda\gamma^{sp}}.$$

Se $\lambda\gamma^{sp} > 0$, o multiplicador é maior que um.

4.6 Multiplicador de transferências em TANK

Considere um aumento na transferência aos gastadores em $t = 1$ (isto é, aumento em $-T_1^{sp}$). O impacto sobre Y_1 é:

$$\boxed{\frac{\partial Y_1}{\partial(-T_1^{sp})} = \frac{\lambda}{1 - \lambda\gamma^{sp}}}$$

Comparação com G_1

- Efeito direto: apenas a fração λ da população recebe a transferência, então o impacto inicial é λ.
- Porém, uma vez que o consumo deles aumenta, o mesmo loop keynesiano atua via $\gamma^{sp}Y_1$.
- Logo, o multiplicador total é o efeito direto (λ) vezes o fator de realimentação ($1/(1 - \lambda\gamma^{sp})$).

Mensagem

Transferências direcionadas a agentes com alta MPC podem ser *quase tão poderosas* quanto o gasto público, desde que esses agentes representem uma fatia relevante da população e da renda.

4.7 Limites do estímulo fiscal isolado

Embora o modelo TANK produza multiplicadores elevados para Y_1:

- A alocação de I_1 e C_2 ainda é distorcida em relação ao benchmark de preços flexíveis.
- A política fiscal aumenta a demanda hoje, mas não controla diretamente o trade-off intertemporal.
- A política monetária (via i_1) é mais adequada para restaurar a condição de Euler de primeira ordem.

Caráter de segunda melhor do estímulo fiscal

- A política fiscal é poderosa para fechar *hiatos de produto correntes*.
- Mas não é um substituto perfeito da política monetária nesse ambiente NK simples.

Isso motiva o resultado de equivalência de Christian Wolf, discutido a seguir.

4.8 TANK: produto, multiplicadores e intuição

Utilizando as restrições de recursos e o problema da firma, Moll obtém:

$$Y_1 = G_1 + \lambda(W^{sp} - T_1^{sp}) + \left(\frac{1}{\beta A_2}\right)^{\sigma} \left(\frac{A_2 M_2}{(1+i_1)P_1} + \lambda T_2^{sp}\right) + \frac{M_2}{(1+i_1)P_1} + \frac{G_2}{A_2}.$$

Usando $W^{sp} = \gamma^{sp} Y_1$, resolvemos para Y_1:

$$Y_1 = \frac{1}{1-\lambda\gamma^{sp}} \left[G_1 - \lambda T_1^{sp} + \left(\frac{1}{\beta A_2}\right)^{\sigma} \left(\frac{A_2 M_2}{(1+i_1)P_1} + \lambda T_2^{sp}\right) + \frac{M_2}{(1+i_1)P_1} + \frac{G_2}{A_2}\right].$$

Multiplicador de gasto público:

$$\boxed{\frac{\partial Y_1}{\partial G_1} = \frac{1}{1-\lambda\gamma^{sp}}}$$

Multiplicador de transferência (para gastadores):

$$\boxed{\frac{\partial Y_1}{\partial(-T_1^{sp})} = \frac{\lambda}{1-\lambda\gamma^{sp}}}.$$

Intuição

- Um aumento em G_1 eleva diretamente Y_1.
- Maior Y_1 aumenta a renda dos gastadores em $\lambda\gamma^{sp}Y_1$.
- Como a MPC deles é aproximadamente 1, essa renda adicional retroalimenta a demanda: um loop keynesiano.
- O fator $\frac{1}{1-\lambda\gamma^{sp}}$ captura essa *realimentação da demanda*; ele é > 1 sempre que parte da renda vai para agentes HTM.

4.9 "Missing intercept" de Wolf e resultado de equivalência

Christian Wolf (2022), "Interest Rate Cuts vs. Stimulus Payments: An Equivalence Result":

- Considera o mesmo ambiente TANK em dois períodos, mas adiciona um **subsídio ao investimento** s.
- Problema da firma:

$$\Omega = \max_{K_2} P_1(Y_1 - (1-s)K_2) + \frac{P_2}{1+i_1}A_2K_2.$$

- Isso altera a taxa de juros real efetiva via $(1+i_1)(1-s)$ e, portanto, o investimento I_1.

No modelo TANK com subsídio s, Moll mostra:

$$Y_1 = \frac{1}{1-\lambda\gamma^{sp}}\left[G_1 - \lambda T_1^{sp} + \left(\frac{1-s}{\beta A_2}\right)^{\sigma}\left(\frac{A_2M_2}{(1+i_1)(1-s)P_1} + \lambda T_2^{sp}\right) + \frac{M_2}{(1+i_1)(1-s)P_1} + \frac{G_2}{A_2}\right].$$

Intuição do "missing intercept"

- Transferências (T_1^{sp}, T_2^{sp}) entram em C_1 e Y_1 apenas diretamente; elas *não* afetam I_1, Y_2 ou C_2.
- Portanto, transferências por si só não deslocam toda a "curva IS" (demanda presente e futura); falta o *intercepto intertemporal do investimento*.
- O subsídio s altera $(1+i_1)(1-s)$, afetando o investimento e o produto do segundo período e preenchendo esse intercepto.
- Resultado de equivalência de Wolf: com (T_1^{sp}, T_2^{sp}, s) apropriados, qualquer trajetória de (Y,π) alcançável com política de juros pode ser implementada com *cheques de estímulo + subsídio ao investimento*.

4.10 Modelo HANK canônico: mercados incompletos

(Auclert, Rognlie & Straub, 2024, "Fiscal Policy with Heterogeneous Agents", Annual Review of Economics)

Os agentes resolvem um problema de mercados incompletos com risco idiossincrático de renda não segurável à la Aiyagari–Bewley:

$$V_t(a,e) = \max_{c,a'} \{u(c) + \beta \mathbb{E}_t[V_{t+1}(a',e')]\}$$

$$c + a' = w_t e + (1+r_t)a + T_t, \quad a' \geq \underline{a}.$$

Distribuição cross-section:

$$\mu_t(a,e): \text{ medida de agentes com ativos } a \text{ e estado de renda } e.$$

Agregação:

$$C_t = \int c(a,e)\, d\mu_t(a,e), \quad A_t = \int a(a,e)\, d\mu_t(a,e) = B_t.$$

Bloco Novo-Keynesiano (herdado de RANK):

$$\pi_t = \beta \mathbb{E}_t[\pi_{t+1}] + \kappa x_t \quad \text{(Curva de Phillips)},$$

e

$$i_t = \bar{i} + \phi_\pi \pi_t + \phi_x x_t, \quad \text{(Regra de Taylor)}.$$

Característica central

- O *bloco de definição de preços e política monetária* (PC + Regra de Taylor) é idêntico ao do RANK.
- A curva IS do RANK é substituída pelo **sistema de demanda agregada**:

$$\{r_t, w_t, T_t\}_{t\geq 0} \;\Rightarrow\; \{C_t\}_{t\geq 0},$$

  gerado ao resolver o modelo de mercados incompletos e agregar.

4.11 Hand-to-mouth endógeno em HANK

Mesmo sem um tipo HTM exógeno, muitos agentes se comportam como hand-to-mouth devido a:

- Risco idiossincrático de renda e poupança precaucional.
- Restrições de crédito $a' \geq \underline{a}$.
- Ativos ilíquidos (habitação, previdência) que não podem ser facilmente convertidos em consumo corrente.

$$\text{Wealthy Hand-to-Mouth (W-HTM): } a > 0 \text{ mas } c \approx \text{renda corrente.}$$

Implicação para política fiscal

- Modelos HANK geram agentes com alta MPC de forma **endógena**.
- Transferências temporárias ou aumentos de renda para esses agentes têm grande efeito sobre o consumo agregado.
- Isso reproduz e *generaliza* a intuição do TANK sem impor comportamento HTM por hipótese.

4.12 Transmissão fiscal em HANK: canais diretos e indiretos

Um estímulo fiscal financiado por déficit opera via vários canais:

1. **Canal direto de redistribuição:**
   Maior renda para agentes com alta MPC $\Rightarrow C_t \uparrow$ imediatamente.
2. **Canal indireto de renda (equilíbrio geral):**
   $G_t \uparrow \Rightarrow Y_t \uparrow \Rightarrow w_t \uparrow$ para famílias restritas
   $\Rightarrow$ novo aumento de renda e consumo desses agentes.
3. **Canal de taxa de juros (bloco NK):**
   No ambiente NK (especialmente perto do ZLB):
   $G_t \Rightarrow x_t \uparrow \Rightarrow \pi_{t+1} \uparrow \Rightarrow r_t \downarrow$
   $\Rightarrow$ poupadores elevam consumo via a equação de Euler.

Comparação com TANK

- TANK: dois tipos exógenos com MPCs e participações fixas (λ, γ^{sp}).
- HANK: distribuição contínua em $(a, e) \Rightarrow$ distribuição rica de MPCs e de exposição a choques.

- Isso permite:
  - Estudar *quais* famílias impulsionam o multiplicador.
  - Desenhar políticas direcionadas a grupos com alta MPC ou alto risco.
  - Captar a interação entre política fiscal, desigualdade e seguro incompleto.

4.13 Por que o multiplicador fiscal pode ser maior que 1 em HANK

Uma decomposição estilizada:

$$\frac{dY_t}{dG_t} = 1 + \underbrace{\mathbb{E}_t[\text{MPC}]}_{\text{resposta direta do consumo}} + \underbrace{\text{Feedback de renda}}_{\text{equilíbrio geral}} + \underbrace{\text{Efeito via taxa de juros}}_{\text{bloco NK}}.$$

Intuição econômica

- Agentes com alta MPC reagem fortemente a choques de renda $\Rightarrow$ impulso direto.
- G_t aumenta a renda futura (salários, transferências) desses agentes $\Rightarrow$ impulso indireto.
- No ZLB, a inflação reduz a taxa real, fazendo poupadores anteciparem consumo.

$$\Rightarrow \textbf{o consumo privado aumenta} \Rightarrow \Delta Y_t > \Delta G_t.$$

Comparação

- RANK: $\frac{dY}{dG} < 1$ exceto no ZLB, e mesmo assim limitado.
- TANK: gera multiplicadores maiores que 1, mas com agentes HTM muito estilizados que produzem respostas dinâmicas a choques (em versões de horizonte infinito) pouco compatíveis com os dados.
- HANK: MPCs altas endógenas, heterogeneidade rica de renda/riqueza e mercados incompletos tornam $\frac{dY}{dG} > 1$ relativamente comum, especialmente quando a política mira famílias restritas.

5 Não-Ponzi, OLG e Ativos Seguros

5.1 OLG: quando esquemas Ponzi podem funcionar

Economia de gerações sobrepostas (OLG) (Romer, *Advanced Macroeconomics*):

- Infinitas coortes; cada indivíduo vive dois períodos.
- Jovens poupam, velhos despoupam; o governo pode emitir dívida para os jovens.

Ineficiência dinâmica ($r < g$)

- Se a taxa de juros real r é menor que a taxa de crescimento g da economia, o capital está superacumulado.
  - Como cada geração vive apenas dois períodos, não internaliza os efeitos de sua poupança sobre gerações futuras (poupança excessiva).
- O governo pode emitir dívida e rolá-la para sempre; dívida/PIB permanece limitada ou cai.
- A condição usual de não-Ponzi pode não ser vinculante; tal "esquema Ponzi" pode melhorar o bem-estar ao reduzir o excesso de capital.

Intuição

Com infinitas gerações sobrepostas, a dívida é repassada de uma geração à seguinte. Se a economia cresce mais rápido que a taxa de juros, essa cadeia é sustentável e até desejável.

5.2 Ativos seguros: do $r < g$ em OLG a mercados incompletos

Brunnermeier, Merkel & Sannikov (2024, "Safe Assets", JPE) estendem a lógica $r < g$ de OLG para um ambiente de **mercados incompletos dinâmicos**:

- Famílias enfrentam risco idiossincrático de renda não segurável (ambiente à la Bewley/Aiyagari).
- Títulos públicos são **ativos seguros**, transacionados repetidamente para amortecer choques ruins.
- Poupança precaucional e demanda por ativos seguros podem empurrar a taxa livre de risco r_f **abaixo** da taxa de crescimento g mesmo em uma economia dinamicamente eficiente.

Fluxos de serviço da segurança

- Além dos fluxos de caixa de superávits primários, títulos seguros fornecem *valor de seguro* via revenda dinâmica.
- Na perspectiva de "dynamic trading", o preço dos títulos reflete:

$$\text{Preço} = \text{VP(superávits primários)} + \text{VP(fluxos de serviço de seguro)}.$$

- Investidores aceitam retornos reais baixos (até negativos) porque os títulos pagam em estados ruins e permitem auto-seguro.

5.3 Ativos seguros, $r < g$, bolhas e espaço fiscal

Implicações para a política fiscal

- Quando $r < g$, governos podem manter **déficits primários persistentes** com dívida/PIB estável: bolhas e demanda por ativos seguros criam espaço fiscal adicional.
- Mas isso vem acompanhado de uma **curva de Laffer da dívida**: "minerar a bolha" (emitir mais dívida para explorar o prêmio de segurança) eventualmente corrói a base tributária (o valor da dívida em circulação).
- Mercados incompletos são cruciais: a equivalência ricardiana falha porque o valor de seguro da dívida torna-se riqueza líquida.

5.4 Resumo (aula principal)

1. **Bénassy**: com impostos lump-sum e solvência (não-Ponzi), o timing dos impostos é irrelevante; apenas $\{G_t\}$ importa. Isso se estende a economias com produção.
2. **Woodford**: no benchmark de preços flexíveis, $0 < dY/dG < 1$; com preços rígidos e regra de Taylor, a política monetária neutraliza parcialmente G_t; no ZLB, a política fiscal reduz a taxa real e pode gerar multiplicadores > 1.
3. **TANK (Moll)**: em um modelo de dois períodos com agentes HTM, gasto público e transferências têm multiplicadores $\frac{1}{1-\lambda\gamma^{sp}}$ e $\frac{\lambda}{1-\lambda\gamma^{sp}}$; Wolf mostra como transferências mais subsídios ao investimento podem replicar a política de juros.
4. **HANK**: com agentes heterogêneos e mercados incompletos, MPCs altas surgem endogenamente; a política fiscal atua via redistribuição, feedback de renda e canal de taxa de juros NK, frequentemente produzindo multiplicadores > 1.

5. **OLG e ativos seguros**: quando o r ajustado ao risco é menor que g (por crescimento ou demanda por ativos seguros em mercados incompletos), a condição padrão de não-Ponzi pode falhar; governos conseguem sustentar déficits até certo limite sem explosão da dívida, mas enfrentam trade-offs ligados a bolhas e à curva de Laffer da dívida.

1 Neutralidade Monetária em um Modelo RBC

1.1 Um modelo RBC simples em dois períodos (apenas para intuição)

Observação: Este é um modelo RBC estilizado em 2 períodos, usado apenas para tornar mais transparente o resultado principal de neutralidade (seguindo Mankiw–Weinzierl e as notas do Moll).

Famílias

- Preferências:
$$U(C_1) + \beta U(C_2), \qquad U(C) = \frac{C^{1-1/\sigma} - 1}{1 - 1/\sigma}$$
- Restrição orçamentária (em termos reais):
$$C_1 + \frac{C_2}{1 + r_1} = W$$
em que W é o valor presente da renda ao longo da vida.

Firmas

- Produção: $Y_t = A_t K_t$, $t = 1, 2$, com $K_2 = I_1$ (capital deprecia totalmente no período 1).
- Lucros competitivos:
$$W = \max_{K_2} \left\{ A_1 K_1 - K_2 + \frac{A_2 K_2}{1 + r_1} \right\}.$$

1.2 Alocação de equilíbrio no benchmark RBC

EE das famílias (equação de Euler):

$$U'(C_1) = \beta(1 + r_1)U'(C_2).$$

Com utilidade CRRA,

$$C_1^{-1/\sigma} = \beta(1 + r_1)C_2^{-1/\sigma} \quad \Rightarrow \quad \frac{C_2}{C_1} = \Big[\beta(1 + r_1)\Big]^{\sigma}.$$

EE da firma (indiferença entre investir e desinvestir na margem):

$$1 + r_1 = A_2.$$

Restrições de recursos:

$$C_1 + I_1 = Y_1 = A_1 K_1, \qquad C_2 = Y_2 = A_2 K_2 = A_2 I_1.$$

Combinando essas expressões obtemos formas fechadas para $(C_1, C_2, I_1, Y_1, Y_2)$ que dependem apenas de $(A_1, A_2, \beta, \sigma, K_1)$, e não de variáveis monetárias.

1.3 Introduzindo moeda: nível de preços, inflação e juros

Para falar de política monetária, reintroduzimos variáveis nominais.

Restrição orçamentária da família em termos nominais:

$$P_1C_1 + \frac{P_2C_2}{1+i_1} = P_1\Pi_1 + \frac{P_2\Pi_2}{1+i_1},$$

em que i_1 é a taxa de juros nominal.

Inflação:

$$\pi_2 = \frac{P_2 - P_1}{P_1}, \qquad 1 + r_1 = \frac{1+i_1}{1+\pi_2}.$$

Para taxas pequenas:

$$i_1 \approx r_1 + \pi_2$$

(equação de Fisher).

Demanda por moeda: Usando um artifício simples de teoria quantitativa/"cash-in-advance" (o agente deve manter moeda para pagar consumo antecipadamente):

$$v_tM_t = P_tC_t,$$

com velocidade exógena e normalizada $v_t = 1$, de modo que o banco central controla M_t (ou i_t) e, portanto, os preços nominais.

1.4 Neutralidade monetária com preços flexíveis

Com **preços flexíveis** P_1 e P_2, podemos dividir os problemas nominais de famílias e firmas por P_1 e reescrever tudo em termos reais.

Implicação chave:

- A equação de Euler, a condição de primeira ordem da firma e as restrições de recursos são idênticas às do modelo RBC puramente real.
- A alocação real
  $$(C_1, C_2, I_1, Y_1, Y_2, r_1)$$
  depende apenas dos fundamentos reais $(A_1, A_2, \beta, \sigma, K_1)$.
- A política monetária (escolhas de M_2 ou i_1) afeta apenas variáveis nominais (P_1, P_2, π_2, M_t).

Definição (Neutralidade monetária): mudanças em variáveis monetárias afetam apenas preços nominais, não as alocações reais.

Isso motiva a passagem para modelos com *rigidezes nominais*, nos quais a neutralidade falha no curto prazo.

2 Rigidezes Nominais e Política Monetária em um Modelo DSGE

2.1 Do RBC ao modelo Novo-Keynesiano (DSGE)

O modelo Novo-Keynesiano (NK) incorpora:

- uma decisão intertemporal de consumo/poupança (equação de Euler), como em RBC;

- um lado da produção com concorrência imperfeita e decisão de preços;
- **rigidezes nominais** (por exemplo, Calvo ou Rotemberg) que tornam os preços rígidos;
- uma regra de política monetária para a taxa de juros nominal (regra de Taylor).

Referências canônicas: Woodford (2003), Galí (2015), Mankiw & Weinzierl (2011).

Em modelos DSGE completos, o horizonte é infinito e a acumulação de capital é totalmente dinâmica. Para intuição, novamente usamos uma simplificação em 2 períodos (seguindo as notas de aula), que preserva a curva IS NK e o papel da taxa de juros real.

2.2 Um modelo NK simples em dois períodos com preços rígidos

Simplificação: 2 períodos mais um pré-período em que um preço de referência P_0 é definido. Isso serve apenas para deixar o mecanismo mais transparente.

Decisão de preços

- O preço do período 1, P_1, é rígido (pré-definido com base em informação em $t = 0$).
- O preço do período 2, P_2, é flexível e se ajusta para limpar o mercado.

Política monetária

- O banco central escolhe M_2 ou a taxa de juros nominal i_1.
- Com uma restrição de caixa antecipado $M_2 = P_2C_2$, isso determina C_2 dados (M_2, i_1, P_1) via

$$\left.\begin{array}{ll} M_2 = P_2C_2 & \text{(CIA)} \\ A_2P_2 = P_1(1+i_1) & \text{(EE da firma/condição de indiferença)} \\ (1+r)(1+i_1) = (1+\pi) & \text{(equação de Fisher)} \end{array}\right\} \implies C_2 = \frac{A_2M_2}{(1+i_1)P_1}.$$

As famílias ainda satisfazem uma equação de Euler ligando C_1 e C_2, mas agora C_2 depende da política monetária, de modo que a política monetária afeta *a demanda corrente* C_1 também.

2.3 Não neutralidade monetária com preços rígidos

Com P_1 fixo:

- uma redução em i_1 (ou aumento em M_2) eleva C_2 via a restrição CIA:

$$M_2 = P_2C_2, \quad P_2 = \frac{1+i_1}{A_2}P_1;$$

- a equação de Euler implica então maior C_1 (substituição intertemporal);
- como $Y_1 = C_1 + I_1 + G_1$, maior C_1 requer maior Y_1 (já que P_1 não pode se ajustar).

Lição chave:

- Com preços rígidos, a política monetária pode melhorar o bem-estar após choques ao deslocar decisões de consumo intertemporal.

Observação:

- No nosso modelo de dois períodos com função de produção com retornos constantes à escala, esse resultado é verdadeiro mesmo se a taxa de juros real for constante e igual a A_2 (os efeitos são gerados via a restrição CIA).
  - Se permitirmos retornos decrescentes à escala no nosso modelo, a política monetária também afetará taxas de juros reais, amplificando seu efeito via substituição intertemporal.
  - Retornos decrescentes na produção agregada costumam ser a norma em modelos DSGE com horizonte infinito, de modo que o efeito sobre a taxa de juros real é o canal crucial nesses modelos.

2.4 Modelos DSGE mais gerais

O modelo canônico DSGE de horizonte infinito com preços rígidos costuma ser escrito (em forma log-linearizada) como:

$$\pi_t = \beta \mathbb{E}_t[\pi_{t+1}] + \kappa x_t$$

(Curva de Phillips Novo-Keynesiana, derivada das decisões de produtores com preços rígidos),

$$x_t = \mathbb{E}_t[x_{t+1}] - \frac{1}{\sigma}(i_t - \mathbb{E}_t[\pi_{t+1}] - r_t^\star)$$

(curva IS, derivada da equação de Euler do consumidor),

$$i_t = \bar{i} + \phi_\pi \pi_t + \phi_x x_t, \quad \phi_\pi > 1$$

(regra de Taylor / regra de política do Banco Central).

Definições

- x_t: **hiato do produto** = log(produto efetivo) − log(produto eficiente com preços flexíveis).
- π_t: inflação; i_t: taxa de juros nominal; $r_t^\star$: taxa de juros real natural (taxa real com preços flexíveis).
- $\kappa > 0$: inclinação da curva de Phillips; $\sigma > 0$: parâmetro da elasticidade intertemporal.

Todas as variáveis são desvios logarítmicos em relação ao estado estacionário (sistema log-linearizado).

Neste modelo, uma mudança na taxa de juros nominal altera a *taxa de juros real* no curto prazo. Pela curva IS NK, isso afeta a demanda agregada e o produto via substituição intertemporal.

2.5 Uma nota sobre a irrelevância da moeda

- Nossa discussão sobre política monetária baseou-se em uma formulação com restrição de caixa antecipado.
  - Nessa formulação, a moeda é "irrelevante", no sentido de que o banco central pode atuar apenas via i_t e produzir resultados idênticos aos que obteria ao escolher M_t.
    - Recorde as condições que determinam C_2: $M_2 = P_2 C_2$ e $P_2 = \frac{1+i_1}{A_2} P_1$. Isso implica que basta escolher i_t para controlar C_t.
  - Para fazer a moeda "desaparecer" completamente da economia, pode-se considerar uma economia quase sem uso de moeda, tomando $v_t \to \infty$.

* Economias caracterizadas por velocidade de circulação muito alta (meios de pagamento muito eficientes).
* Para uma taxa nominal i_1 dada, isso implica $M_t \to 0$.
* O resultado de irrelevância monetária implica que alta velocidade é irrelevante para resultados reais (dada a política de juros do banco central).

- Em artigo recente (Lagos e Zhang, "The Limits of (M)onetary Economics", 2022, Econometrica), os autores mostram que, se há concorrência imperfeita (poder de mercado) em intermediários financeiros (por exemplo, bancos, empresas de cartão de crédito), a possibilidade de liquidar transações via dinheiro em espécie gera uma *ameaça* crível que quebra a irrelevância da moeda – ela pode ter efeitos além das taxas de juros.
  - Isso é verdadeiro mesmo em economias quase sem uso de moeda, em que o dinheiro não é mantido em grandes quantidades em equilíbrio.

2.6 Objetivo de CEE (2005)

Christiano–Eichenbaum–Evans (JPE,2005)

O modelo NK DSGE canônico apresenta alguns padrões que vão de encontro ao observado nos dados.

- Em especial, no modelo de três equações, consumo e inflação reagem instantaneamente a um choque de política monetária, contrariamente à evidência empírica.

CEE constroem um DSGE de média escala para compatibilizar:

- Persistência e resposta lenta em produto, consumo, investimento, especificamente, IRFs (funções de resposta a impulso) em forma de "corcova" (hump-shaped) a choques monetários.
- Comovimento entre variáveis reais.

Ideia central Adicionar fricções além do NK básico:

- Formação de hábito;
- Custos de ajuste de investimento;
- Utilização variável do capital;
- Rigidez de preços e salários à la Calvo.

Esses elementos geram a persistência observada empiricamente.

2.7 Preferências com formação de hábito

Utilidade:

$$U = E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(C_t - hC_{t-1}).$$

A equação de Euler torna-se:

$$u'(C_t - hC_{t-1}) - h\beta E_t[u'(C_{t+1} - hC_t)] = \beta E_t \left[u'(C_{t+1} - hC_t)(1 + r_{t+1} - \delta)\right].$$

Intuição Com hábitos, o consumo responde gradualmente porque as famílias suavizam desvios em relação ao consumo passado, não apenas níveis.

2.8 Custos de ajuste de investimento

Custo de investimento:

$$I_t \left(1 + \frac{\phi}{2}\left(\frac{I_t}{I_{t-1}} - 1\right)^2\right).$$

Acumulação de capital:

$$K_{t+1} = (1-\delta)K_t + I_t - \Phi(I_t, I_{t-1}).$$

FOC em relação a I_t implica:

$$q_t = 1 + \phi\left(\frac{I_t}{I_{t-1}} - 1\right)\left(\frac{I_t}{I_{t-1}}\right),$$

onde q_t é o q de Tobin.

Interpretação Investimento reage lentamente → ajuda a gerar IRFs em forma de "corcova" para produção.

2.9 Utilização variável da capacidade

Produção:

$$Y_t = A_t F(K_t u_t, H_t).$$

O custo de utilização aumenta em u_t:

$$\Psi(u_t), \quad \Psi'(u_t) > 0.$$

FOC:

$$\Psi'(u_t) = r_t F_K(K_t u_t, H_t).$$

Significado Em booms: firmas elevam u_t, aumentando o produto sem alterar K_t → compatível com a prociclicidade da PTF (resíduo de Solow) observada empiricamente.

2.10 Rigidezes nominais em CEE

CEE incluem:

- Rigidez de preços à la Calvo (só uma fração de produtores pode reajustar preços a cada período).
- Rigidez de salários à la Calvo (só uma fração de sindicatos pode reajustar salários a cada período).

Duas curvas de Phillips:

Formação de preços:

$$\pi_t = \beta E_t[\pi_{t+1}] + \kappa_p x_t.$$

Formação de salários:

$$\pi_t^w = \beta E_t[\pi_{t+1}^w] + \kappa_w x_t^w.$$

onde x_t é o hiato do produto e x_t^w é o hiato salarial real (diferença entre MPL e salário real), com π_t^w denotando inflação salarial nominal.

Consequências

- O salário real ajusta-se lentamente → emprego responde mais.
- Salários rígidos amplificam os efeitos reais da política monetária.

2.11 CEE: sistema dinâmico completo (representação simplificada)

Em resumo, o modelo de CEE em forma log-linear vira um sistema com as seguintes equações-chave:

1. **Equação de Euler com hábito**

$$(c_t - hc_{t-1}) = E_t[c_{t+1} - hc_t] - \frac{1}{\sigma}(i_t - E_t\pi_{t+1}).$$

2. **Equação de Tobin-q para investimento**

$$q_t = \phi\left(\frac{i_t}{i_{t-1}} - 1\right) - \beta\phi E_t\left(\frac{i_{t+1}}{i_t} - 1\right).$$

3. **Curva de Phillips de preços**

$$\pi_t = \beta E_t\pi_{t+1} + \kappa_p(mc_t).$$

4. **Curva de Phillips de salários**

$$\pi_t^w = \beta E_t\pi_{t+1}^w + \kappa_w(mrp_t - w_t).$$

Interpretação As duas curvas de Phillips governam a lentidão nominal; hábito + teoria de q governam a lentidão real.

2.12 Juntando tudo

Um choque de política monetária ($i_t \downarrow$):

- reduz a taxa real $\rightarrow$ consumo reage lentamente (por causa de hábito);
- aumenta investimento de forma gradual (custos de ajuste);
- utilização da capacidade salta $\rightarrow$ amplifica o efeito de curto prazo sobre produção;
- rigidezes de preços e salários $\rightarrow$ inflação reage muito lentamente;
- **horas trabalhadas**: aumentam no impacto devido a salários rígidos.

Resultado Respostas a impulso em forma de "corcova" (hump-shaped) para Y, C, I, H, compatíveis com evidência de VAR.

2.13 Quanto os choques monetários importam? (Tabela 1 de CEE)

Decomposição de variância:

$$\text{Choques monetários explicam } 20{-}30\% \text{ das flutuações do produto.}$$

$$\approx 40\% \text{ das flutuações do investimento.}$$

$$10{-}15\% \text{ das flutuações do consumo.}$$

Conclusão A política monetária é importante, mas não o único motor do ciclo. Choques reais (tecnologia, específicos de investimento, preferências) ainda são relevantes.

3 Heterogeneidade, Mercados Incompletos: TANK e HANK

3.1 Modelo Novo-Keynesiano com dois agentes (TANK)

3.1.1 Famílias *hand-to-mouth*: o modelo TANK

Para capturar elevadas propensões marginais a consumir (PMCs) como observado nos dados, introduzimos, no modelo de dois períodos, heterogeneidade de agentes.

Gastadores vs. poupadores (Campbell–Mankiw, 1989; Galí et al., 2007; Bilbiie, 2008)

- Fração λ das famílias são "gastadoras" (*hand-to-mouth*):

$$C_t^{sp} = \text{renda disponível corrente}_t = \gamma^{\text{sp}} W,$$

  em que γ^{sp} é a parcela de W apropriada pelos gastadores (exógena).

- Fração $1 - \lambda$ são "poupadoras", que resolvem:

$$\max U(C_1^{sa}) + \beta U(C_2^{sa}), \text{ s.a.} \quad C_1^{sa} + \frac{C_2^{sa}}{1+r_1} = W^{sa} - \left(T_1^{sa} + \frac{T_2^{sa}}{1+r_1}\right).$$

- Consumo agregado:

$$C_t = \lambda C_t^{sp} + (1-\lambda) C_t^{sa}.$$

Este é o modelo **Two-Agent New Keynesian** (TANK) como nas notas de aula sobre famílias *hand-to-mouth*.

3.1.2 Política fiscal e monetária no modelo TANK

No modelo TANK com preços rígidos, expressões em forma fechada (das notas) mostram:

- Multiplicador de gasto do governo:

$$\frac{\partial Y_1}{\partial G_1} = \frac{1}{1 - \lambda \gamma^{sp}} > 1$$

  sempre que os gastadores recebem alguma renda ($\lambda > 0$, $\gamma^{sp} > 0$), o que gera multiplicador maior que em modelos NK padrão, em que o multiplicador usualmente ≤ 1 (Woodford 2011).

- Multiplicador de transferências para os gastadores:

$$\frac{\partial Y_1}{\partial(-T_1^{sp})} = \frac{\lambda}{1 - \lambda \gamma^{sp}} > 0.$$

- A política monetária ainda opera via a taxa de juros real, mas seus efeitos são amplificados quando redistribuem renda em favor dos gastadores com alta PMC.
  - Uma redução da taxa de juros aumenta o consumo corrente dos poupadores, o que aumenta a renda real, que por sua vez aumenta fortemente o consumo dos "gastadores", aumentando a renda real etc.

Intuição:

- O consumo dos gastadores acompanha a renda disponível corrente.
- Qualquer política que desloque renda para eles tem efeito imediato grande sobre C_1 e, assim, sobre Y_1 com preços rígidos.

3.2 Modelo Novo-Keynesiano com Agentes Heterogêneos (HANK)

3.2.1 Do TANK ao HANK

O modelo TANK captura uma dimensão de heterogeneidade, mas ainda é muito estilizado.

Modelos Novo-Keynesianos com Agentes Heterogêneos (HANK)

- Continuidade de famílias com:
  - risco idiossincrático de renda (por exemplo, choques de produtividade do trabalho);
  - mercados incompletos (um ativo livre de risco mais restrições de endividamento, sem seguro completo contra risco idiossincrático).
- Famílias resolvem um problema de poupança do tipo *buffer-stock*, como em Bewley–Huggett–Aiyagari.
  - Famílias ficam "endogenamente" restritas após sequências de choques ruins de produtividade e poupam dinamicamente para reverter essa situação.
  - Famílias restritas, sem poupança em determinado momento, reagem como gastadores TANK em resposta a choques de política monetária (ver Achdou, Moll et al., 2022, Review of Economic Studies, para fórmulas analíticas).
- Blocos Novo-Keynesianos:
  - rigidez de salários ou preços e uma curva de Phillips;
  - política monetária define a trajetória das taxas de juros nominais/reais.

Referências centrais: Kaplan, Moll & Violante; McKay & Reis; Guerrieri & Lorenzoni; Auclert (2019); Auclert, Rognlie & Straub (2025), "Fiscal and Monetary Policy with Heterogeneous Agents", para uma formulação canônica de HANK.

3.2.2 Canais de transmissão em modelos HANK

O modelo canônico HANK de Auclert–Rognlie–Straub destaca vários canais:

- **Canal de substituição intertemporal** (como no NK com agente representativo):
$$\downarrow r_t \Rightarrow \uparrow C_t \quad \text{para famílias não restringidas, com baixa PMC.}$$
- **Canais de renda e *cash-flow*:**
  - mudanças em r_t, salários, lucros e transferências alteram a renda disponível;
  - com restrições de crédito e PMCs altas, esses deslocamentos têm grandes efeitos sobre C_t.
- **Canal de redistribuição:**
  - política monetária e fiscal redistribuem entre agentes com diferentes PMCs;
  - os efeitos agregados dependem de se agentes com alta PMC ganham ou perdem.
- **Canais de riqueza e de Fisher:**
  - a inflação redistribui entre credores e devedores nominais;
  - a composição de portfólio das famílias importa para a transmissão da política.

A política monetária em HANK muitas vezes gera efeitos *agregados* semelhantes aos de NK com agente representativo, mas a decomposição em canais e os impactos distributivos são bem diferentes.

4 Mercados Incompletos e Macrodesenvolvimento

4.1 Mercados incompletos em macrodesenvolvimento

Agora o foco é: **desenvolvimento de longo prazo**, não estabilização.

Baseado em Buera & Shin (2013) e Buera, Kaboski & Shin (2015):

Ingredientes principais:

- Heterogeneidade em habilidade empreendedora z;
- escolha ocupacional: trabalhador ou empreendedor;
- **tecnologia de produção:**

$$y = zk^a\ell^u, \qquad a+u<1$$

  (retornos decrescentes à escala à la Lucas (1979) $\implies$ empreendedores de diferentes talentos podem coexistir no mercado);

- **mercados financeiros incompletos:** não há seguro completo; o endividamento externo é limitado;
- **restrição de colateral para financiamento de capital:**

$$k \le \lambda_f a$$

  - **Interpretação:** talento não consegue operar em grande escala sem riqueza. λ_f é o grau de fricção financeira ($\lambda_f = \infty$ na ausência de restrições de crédito).

Este é novamente um modelo com heterogeneidade e mercados incompletos, mas agora em um contexto de crescimento/desenvolvimento, não de estabilização de ciclo de negócios (Buera, Kaboski & Shin, 2015, "Entrepreneurship and Financial Frictions: A Macrodevelopment Perspective").

4.2 Problema dinâmico (Buera & Shin 2013, JPE)

A cada período, os agentes escolhem:

$$c,\ a',\ e \in \{0,1\},\ k,\ \ell.$$

Equação de Bellman:

$$V(a,z) = \max_{c,a',e,k,\ell} \Big\{ u(c) + \beta \mathbb{E}[V(a',z')] \Big\}.$$

Restrição orçamentária:

$$c + a' \le \begin{cases} w + (1+r)a & \text{trabalhador,} \\ zk^a\ell^u - w\ell - (r+\delta)k + (1+r)a - f & \text{empreendedor.} \end{cases}$$

Mercados incompletos: não há ativo que garanta seguro ou crédito perfeito; a dinâmica de riqueza e de empreendedorismo é interligada.

4.3 Persistência da história (Buera & Shin 2013)

Definição: a distribuição de riqueza passada afeta a alocação e a renda presentes, mesmo após reformas que removem distorções de política.

Mecanismo:

- indivíduos com alto z começam pobres e expandem-se lentamente devido às restrições de colateral;
- indivíduos com baixo z e ricos inicialmente operam firmas em escalas ineficientes;
- a acumulação de riqueza reorganiza a economia de forma gradual.

Implicação: trajetórias de desenvolvimento dependem da história de riqueza, não apenas das políticas correntes.

4.4 Contrafactual: igualdade vs. reforma financeira

Comparação em Buera & Shin (2013):

1) Igualar riqueza inicial (apagar a história)

$$\Rightarrow \text{ganhos modestos de longo prazo em produto e PTF.}$$

2) Relaxar restrições de crédito (aumentar λ_f)

$$\Rightarrow \text{grandes ganhos em produto, PTF e empreendedorismo.}$$

Conclusão: *mercados incompletos limitam o desenvolvimento mais do que a desigualdade inicial.*

Implicação de política: reformas financeiras superam redistribuição em termos de crescimento de longo prazo.

4.5 Resultados - res

Principais resultados (Buera & Shin, Buera et al.):

- Empreendedores de alta produtividade, mas pobres, são severamente restringidos $\Rightarrow$ má alocação e baixa PTF.
- Fricções financeiras distorcem especialmente entrada e crescimento em setores de grande escala e altos custos fixos.

Esses mecanismos são o análogo, em desenvolvimento, dos canais de mercados incompletos em HANK.

4.6 Mercados incompletos: política e crescimento

Papel dos mercados incompletos

- Acesso limitado a financiamento externo $\Rightarrow$ investimento depende fortemente de poupança interna.
- Empreendedores enfrentam risco idiossincrático não segurado e restrições de endividamento, assim como famílias em HANK.

  - Curto prazo: intervenções financeiras ou fiscais podem ter grandes multiplicadores de demanda e investimento.
  - Longo prazo: reformas que aliviam restrições de crédito ou melhoram a execução de contratos elevam PTF e renda per capita.

Ligação com a seção anterior

- Em modelos HANK e de macrodesenvolvimento, a distribuição de ativos, o risco de renda e as restrições são centrais para a transmissão de políticas.
- Política de estabilização (monetária/fiscal) e política de desenvolvimento (reformas financeiras) são duas faces da mesma moeda de mercados incompletos.

4.7 HANK vs. macrodesenvolvimento: mesma fricção, horizontes distintos

Fator comum: mercados incompletos + restrições de crédito.

HANK: estabilização de curto prazo

- Choques de curto prazo;
- redistribuição e heterogeneidade em PMC moldam os efeitos da política.

Macrodesenvolvimento: crescimento de longo prazo

- A dinâmica da riqueza governa entrada de firmas e escala;
- a má alocação se desfaz lentamente ⇒ convergência lenta da PTF;
- **persistência da história** emerge das fricções financeiras.

$$\text{Mesma mecânica} \Rightarrow \begin{cases} \text{Respostas de demanda ao ciclo de negócios (HANK)} \\ \text{Dinâmica de oferta ao longo de décadas (macrodesenvolvimento)} \end{cases}$$

4.8 Conclusão geral

1. **RBC:** moeda neutra na ausência de fricções.
2. **NK DSGE:** preços rígidos conferem efeitos reais à política monetária.
3. **TANK/HANK:** heterogeneidade e mercados incompletos remodelam a transmissão da política, deslocando o foco para canais de renda, *cash-flow* e redistribuição.
4. **Macrodesenvolvimento:** os mesmos mercados incompletos distorcem empreendedorismo e crescimento da PTF.

Visão unificada: *distribuição + fricções financeiras importam tanto para ciclos quanto para desenvolvimento.*