

INTRODUÇÃO À ECONOMETRIA  
SEMIPARAMÉTRICA  
AULA 3 - ESTIMAÇÃO SEMIPARAMÉTRICA

Luis A. F. Alvarez

15 de outubro de 2024

## EXEMPLO

- Considere uma população de interesse em que definimos um tratamento individual binário, denotado por uma variável aleatória,  $D \in \{0, 1\}$  e um resultado de interesse  $Y$ .
  - Os resultados potenciais, que descrevem o que acontece com um indivíduo caso ele seja alocado ao tratamento ou não, são dados por  $(Y(0), Y(1))$ , de modo que o resultado observado é dado por  $Y = DY(1) + (1 - D)Y(0)$  e o efeito da política é  $Y(1) - Y(0)$ .
- Sejam  $X$  um vetor de características observáveis, tais que seja razoável supor que:

$$Y(0) \perp D|X$$

# ESTIMAÇÃO DO ATT

- Sob a hipótese de identificação anterior, se supomos que  $\mathbb{P}[D = 1] > 0$  e a seguinte hipótese de suporte comum (*overlap*):

$$\exists \epsilon > 0, \quad \mathbb{P}[\mathbb{P}[D = 0|X] \geq \epsilon] = 1$$

- Então é possível identificar o efeito médio do tratamento nos tratados (ATT),

$$\mathbb{E}[Y(1) - Y(0)|D = 1] = \frac{\mathbb{E}[DY]}{\mathbb{E}[D]} - \frac{1}{\mathbb{E}[D]} \mathbb{E} \left[ \frac{\mathbb{P}[D = 1|X = 1]}{1 - \mathbb{P}[D = 1|X = 1]} (1 - D)Y \right]$$

- O problema é que a hipótese de suporte comum pode ser irrazoável em alguns contextos.

# COMBINAÇÕES CONVEXAS DE ATTs CONDICIONAIS

- Considere, como alternativa, o estimando  $\beta^*$  que resolve

$$(\beta^*, g) = \operatorname{argmin}_{b \in \mathbb{R}, h \in \mathcal{H}} \mathbb{E}[(Y - bD - h(X))^2],$$

onde  $\mathcal{H}$  é um sub-espço fechado de  $L_2(\mathbb{P}_X)$ .

- Nesse caso, é possível mostrar que, se  $\mathbb{P}[D = 1|X] \in \mathcal{H}$  ou  $\mathbb{E}[Y(0)|X] \in \mathcal{H}$ , então:

$$\beta^* = \frac{\mathbb{E}[\mathbb{E}[Y(1) - Y(0)|X, D = 1]\mathbb{P}[D = 1|X](1 - m(X))]}{\mathbb{E}[\mathbb{P}[D = 1|X](1 - m(X))]}$$

onde  $m(X) = \operatorname{argmin}_{h \in \mathcal{H}} \mathbb{E}[(D - h(X))^2]$ .

- Resultado é extensão direta de Angrist (1998). [▶ Detalhes](#)
- Se  $m(X) \in [0, 1]$  com probabilidade 1, estimando é uma combinação convexa de ATTs condicionais, dando mais peso para pontos do suporte com melhor sobreposição.
  - Combinação convexa mais fácil de se estimar eficientemente (Goldsmith-Pinkham, Hull e Kolesár, 2024), sob algumas hipóteses.

## ESTIMANDO $\beta^*$

- Com base no resultado anterior e uma amostra aleatória da população, poderíamos tentar estimar  $\beta^*$  resolvendo o análogo amostral do problema.
  - Para implementar classes “complexas”  $\mathcal{H}$ , podemos alternar o estimador de MQO dos resíduos  $(Y_i - \tilde{g}(X_i))$  em  $D_i$  e o estimador que projeta  $Y_i - \tilde{\beta} D_i$  em  $\mathcal{H}$  até convergência.
- Note, entretanto, que para a representação anterior valer, devemos escolher uma classe suficiente expressiva para representar ou  $\mathbb{E}[Y(0)|X]$  ou  $\mathbb{P}[D = 1|X]$ .
  - Especificamente, se  $X$  contém variável contínua com suporte na reta que é relevante para a seleção, então classe linear não será capaz de satisfazer  $m(X) \in [0, 1]$  com probabilidade 1, e não teremos combinação convexa de ATTs (pesos negativos).
  - Além disso, se há muitos possíveis controles, mas somente um subconjunto é relevante para explicar a seleção ao tratamento, deveríamos utilizar métodos de alta dimensão válidos sob esparsidade.
- Estimador resultante é dado por:

$$\hat{\beta} = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n D_i (Y_i - \hat{g}(X_i))}{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n D_i^2}.$$

# APROXIMAÇÃO ASSINTÓTICA DO ESTIMADOR

$$\sqrt{n}(\hat{\beta} - \beta^*) =$$

$$\underbrace{\left(\frac{1}{n} \sum_{i \in I} D_i^2\right)^{-1} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i \in I} D_i U_i}_{=:a} + \underbrace{\left(\frac{1}{n} \sum_{i \in I} D_i^2\right)^{-1} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i \in I} D_i (g(X_i) - \hat{g}(X_i))}_{=:b}$$

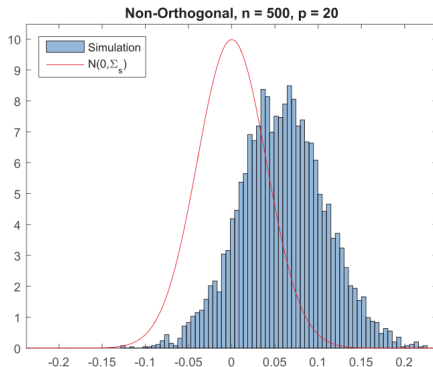
onde  $U_i = Y_i - \beta^* D_i - g(X_i)$ .

- Termo  $a$  é bem comportado em amostras grandes  $a \xrightarrow{d} N(0, \sigma^2)$ .
- No entanto, termo  $b$  é dado por:

$$b = (E[D_i^2])^{-1} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i \in I} m(X_i) (g(X_i) - \hat{g}(X_i)) + o_P(1)$$

- Esse termo não é bem comportado para estimadores não paramétricos, especialmente modernos.
  - Comparar EQM do MQO com outras alternativas que operam no trade-off viés variância.
    - No MQO,  $\sqrt{n}(\hat{\delta}'x - \delta_0'x) \xrightarrow{d} N(0, x' \Sigma_{\delta}^2 x)$ , de modo que esperamos que, em amostras grandes,  $\infty > \mathbb{V}[b] > 0$ , mas  $\mathbb{E}[b] \approx 0$ .
    - Para estimadores não paramétricos modernos que operam no tradeoff viés-variância  $\mathbb{E}[b] = \frac{1}{n^{-1/2+\psi}}$ , para  $\psi < 1/2$  (ver exemplo do Lasso).
    - Distribuição arbitrariamente não centrada em  $\beta^*$  em amostras grandes.

# EXEMPLO: VIÉS NA DISTRIBUIÇÃO DO ESTIMADOR SEMIPARAMÉTRICO “INGÊNUO”



## ESTIMADOR ALTERNATIVO

- É possível mostrar que parâmetro de interesse pode ser identificado como:

$$\beta^* = \frac{\mathbb{E}[(Y - g(X))(D - m(X))]}{\mathbb{E}[(D - m(X))D]}$$

- Considere então:

$$\check{\beta} = \left( \frac{1}{n} \sum_{i \in I} \hat{V}_i D_i \right)^{-1} \frac{1}{n} \sum_{i \in I} \hat{V}_i (Y_i - \hat{g}(X_i)) ,$$

onde  $\hat{V}_i = D_i - \hat{m}(X_i)$ .



# PROPRIEDADES DO ESTIMADOR ALTERNATIVO.

- Estimador escrever-se-á como:

$$\sqrt{n}(\check{\beta} - \beta^*) = a + b + c + o_{\mathbb{P}}(1),$$

onde

1.  $a^* = (E[V^2])^{-1} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i \in I} V_i U_i \xrightarrow{d} N(0, \sigma^2)$ 
  - Termo bem comportado, como antes
2.  $b^* = (E[V^2])^{-1} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i \in I} (\hat{m}(X_i) - m(X_i)) (\hat{g}(X_i) - g(X_i))$ 
  - Agora, viés dos estimadores não paramétricos podem decair para zero a  $n^{-1/4}$  e  $b^* = o_{\mathbb{P}}(1)$ .
3.  $c^* = (E[V^2])^{-1} \left[ \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i \in I} U_i (\hat{m}(X_i) - m(X_i)) + \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i \in I} V_i (\hat{g}(X_i) - g(X_i)) \right]$ 
  - Termo captura a correlação dos estimadores com componente idiossincrático da amostra.
  - Caso haja algum sobreajuste, esse termo não desaparecerá, produzindo vieses.
  - **Solução:** estimar as funções não paramétricas em outra amostra  $I^c$  tal que  $I \cap I^c = \emptyset$ .
  - Nesse caso, garantiremos que esse termo possui média zero (por quê?) e que  $c^* = o_{\mathbb{P}}(1)$ .

# DEBIASED MACHINE LEARNING

- A estratégia anterior de utilização de aprendizagem estatística para a estimação de parâmetros consistiu de dois ingredientes cruciais.
  - Um ajuste na fórmula do estimador como forma de reduzir o viés devido a regularização de estimadores que operam no trade-off viés-variância para reduzir EQM.
  - *Sample-splitting* como forma de remover o viés de sobreajuste que seria gerado em modelos muito complexos.
- Esse método recebeu na literatura o nome de *debiased machine learning* (DML) (Chernozhukov, Chetverikov et al., 2018).
- No que segue, vamos estudar como encontrar a correção do viés genericamente.

## FUNÇÃO INFLUÊNCIA

- Seja  $\hat{\theta}$  um estimador de um parâmetro escalar de interesse.
  - Seja  $\theta(P)$  o limite de probabilidade do estimador, quando a distribuição verdadeira dos observáveis,  $S$ , é  $P$ .
  - Vamos focar no caso *não-paramétrico*, em que  $P$  pode ser “qualquer” distribuição de probabilidade sobre  $S$ , a não ser por condições de regularidade.
- Nesse caso, definimos a função influência de  $\hat{\theta}$  como o mapa  $\psi(S; P)$  tal que, para “qualquer” distribuição  $H$ :

$$\left. \frac{d}{d\tau} \theta(P_\tau) \right|_{\tau=0} := \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\theta(P + \tau(H - P)) - \theta(P)}{\tau} = \int \psi(s; P) H(ds),$$

onde  $P_\tau = P + \tau(H - P)$ .

- Nome função influência vem do fato de que, heurísticamente, ela nos dá o efeito sobre o viés do estimador de se incluir uma observação “contaminada” na amostra.
- Aplicações em estimação robusta (Rousseeuw et al., 1986) e na construção de estimadores eficientes em modelos semiparamétricos estritos (em que  $P$  não pode ser qualquer coisa) (Newey, 1990; Bickel et al., 1993).

# CÁLCULO DA FUNÇÃO INFLUÊNCIA E SUAS PROPRIEDADES

- Existe uma literatura bastante consolidada sobre como computar  $\psi(S; P)$  na prática, que não entraremos por limitações de tempo.
  - Veja Ichimura e Newey (2022) e Kennedy (2023) para métodos.
- Somente notamos as seguintes propriedades de funções influência, que nos serão úteis a seguir.

$$\int \psi(s; P) P(ds) = 0$$

$$\int \frac{d}{d\tau} \psi(s; P_\tau) \Big|_{\tau=0} P(ds) = - \int \psi(s; P) H(ds)$$

# UM PROBLEMA DE ESTIMAÇÃO SEMIPARAMÉTRICA

- Nesta aula, vamos focar no seguinte problema de função semiparamétrica. O objetivo é estimar

$$\theta_0 := \mathbb{E}[m(S; \gamma_0)],$$

onde  $\gamma_0$  é uma função que desejamos aproximar não parametricamente (e.g. uma esperança condicional, quantil condicional ou densidade).

- Nós propomos estimar  $\theta_0$  partindo da seguinte condição de momento:

$$\mathbb{E}[m(S; \gamma_0) + \psi(S; P_0)] - \theta_0 = 0,$$

onde  $P_0$  é a distribuição verdadeira, e  $\psi(s; P_0)$  é a **função influência de primeiro-estágio** de se perturbar a parte não paramétrica:

$$\left. \frac{d}{d\tau} \mathbb{E}[m(S; \gamma(P_0 + \tau(H - P_0)))] \right|_{\tau=0} = \int \psi(s; P_0) H(ds)$$

# ROBUSTEZ LOCAL DA CONDIÇÃO DE MOMENTO E ESTIMADOR

- A condição de momento modificada é localmente robusta a “vieses” na estimação não paramétrica da primeira etapa, no sentido que:

$$\frac{d}{d\tau} \mathbb{E}[m(S; \gamma(P_\tau)) + \psi(S; P_\tau)] \Big|_{\tau=0} = 0$$

- Metodologia de Chernozhukov, Chetverikov et al., 2018, particione amostra em  $\mathcal{I}_1$  e  $\mathcal{I}_2$ , com tamanhos aproximadamente iguais.
  - Na parte  $\mathcal{I}_1$ , estime  $\gamma_0$ ,  $\hat{\gamma}^1$  e a função influência (que no geral depende de uma parte não paramétrica),  $\hat{\psi}^1$ .
  - Na partição  $\mathcal{I}_2$ , estimar  $\theta$  como:

$$\hat{\theta}_2 = \frac{1}{|\mathcal{I}_2|} \sum_{i \in \mathcal{I}_2} (m(S_i; \hat{\gamma}^1) + \hat{\psi}^1(S_i)) \quad (1)$$

- Para não perder observações, podemos trocar o papel de  $\mathcal{I}_1$  e  $\mathcal{I}_2$ , calcular  $\hat{\theta}_1$  analogamente e fazer o estimador *cross-fitted*:

$$\hat{\theta} = \frac{1}{2} \hat{\theta}_1 + \frac{1}{2} \hat{\theta}_2$$

# INFERÊNCIA E EXTENSÕES

- Resultado principal de Chernozhukov, Chetverikov et al., 2018:  
 $\sqrt{n}(\hat{\theta} - \theta_0) \xrightarrow{d} N(0, \sigma^2)$ , onde  $\sigma^2 = \mathbb{V}[m(S; \gamma_0) + \psi(S; P_0)]$ .
  - Quantidade  $\sigma^2$  pode ser estimada consistentemente usando a variância amostral do estimador  $\hat{\theta}$ .
- Inferência tornou-se imediata agora!
- Literatura enorme com extensões desse caso simples: GMM (Chernozhukov, Chetverikov et al., 2018; Chernozhukov, Escanciano et al., 2022), *expected shortfall* (Chetverikov, Liu e Tsyvinski, 2022), entre outros.

# DERIVAÇÃO DA REPRESENTAÇÃO DO ESTIMANDO

- Para uma v.a. arbitrária  $S$  que “mora” na mesma fonte de incerteza de  $(Y(0), Y(1), D, X)$ , seja  $P_{\mathcal{H}}(S) = h^*(X)$ , onde  $h^* \in \operatorname{argmin}_{h \in \mathcal{H}} \mathbb{E}[(Y - h(X))^2]$ .
  - Como  $\mathcal{H}$  é subespaço linear fechado do espaço de variáveis aleatórias com variância finita (fechado com respeito à norma  $\|h(S)\|_2^2 = \int h(S)^2 \mathbb{P}(ds)$ , onde  $S = (Y(0), Y(1), D, X)$ ),  $P_{\mathcal{H}}$  é um operador linear bem-definido, com  $\mathbb{E}[(S - P_{\mathcal{H}}(S))h(X)] = 0$  para todo  $h \in \mathcal{H}$  (ver Seções 3.2 e 3.3 de Kreyszig, 1991, para detalhes).
- Nesse caso,  $g(X) = P_{\mathcal{H}}(Y - \beta^* D) = P_{\mathcal{H}}(Y(0)) + P_{\mathcal{H}}(D(Y(1) - Y(0))) - \beta^* P_{\mathcal{H}}(D)$
- Combinando a expressão acima à CPO que  $\beta^*$  deve satisfazer, temos:

$$\beta^* = \frac{\mathbb{E}[(D(Y(1) - Y(0)) + [Y_0 - P_{\mathcal{H}}(Y(0))]) - P_{\mathcal{H}}(D(Y(1) - Y(0)))](D - P_{\mathcal{H}}(D))]}{\mathbb{E}[D(D - P_{\mathcal{H}}(D))]}$$

- Note que  $\mathbb{E}[(D - P_{\mathcal{H}}(D))P_{\mathcal{H}}(D(Y(1) - Y(0)))] = 0$  pela definição do operador.
- Ademais, note que:

$$\mathbb{E}[(Y(0) - P_{\mathcal{H}}(Y(0)))](D - P_{\mathcal{H}}(D)) = 0$$

se  $\mathbb{E}[Y(0)|X] \in \mathcal{H}$  ou  $\mathbb{P}[D = 1|X] \in \mathcal{H}$ , pela lei das expectativas iteradas e a hipótese de identificação  $Y(0) \perp D|X$ .

- Representação segue então da lei das expectativas iteradas. [◀ Voltar](#)



# BIBLIOGRAFIA I



Angrist, Joshua D. (1998). “Estimating the Labor Market Impact of Voluntary Military Service Using Social Security Data on Military Applicants”. Em: *Econometrica* 66.2, pp. 249–288. ISSN: 00129682, 14680262. URL: <http://www.jstor.org/stable/2998558> (acesso em 10/10/2024).



Bickel, Peter J et al. (1993). *Efficient and adaptive estimation for semiparametric models*. Vol. 4. Springer.



Chernozhukov, Victor, Denis Chetverikov et al. (jan. de 2018). “Double/debiased machine learning for treatment and structural parameters”. Em: *The Econometrics Journal* 21.1, pp. C1–C68. ISSN: 1368-4221. DOI: 10.1111/ectj.12097. eprint: <https://academic.oup.com/ectj/article-pdf/21/1/C1/27684918/ectj00c1.pdf>. URL: <https://doi.org/10.1111/ectj.12097>.

# BIBLIOGRAFIA II



Chernozhukov, Victor, Juan Carlos Escanciano et al. (2022). “Locally Robust Semiparametric Estimation”. Em: *Econometrica* 90.4, pp. 1501–1535. DOI: <https://doi.org/10.3982/ECTA16294>. eprint: <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.3982/ECTA16294>. URL: <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.3982/ECTA16294>.



Chetverikov, Denis, Yukun Liu e Aleh Tsyvinski (2022). *Weighted-average quantile regression*. arXiv: 2203.03032 [econ.EM].



Goldsmith-Pinkham, Paul, Peter Hull e Michal Kolesár (2024). *Contamination Bias in Linear Regressions*. arXiv: 2106.05024 [econ.EM]. URL: <https://arxiv.org/abs/2106.05024>.

# BIBLIOGRAFIA III



Ichimura, Hidehiko e Whitney K. Newey (2022). “The influence function of semiparametric estimators”. Em: *Quantitative Economics* 13.1, pp. 29–61. DOI: <https://doi.org/10.3982/QE826>. eprint: <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.3982/QE826>. URL:

<https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.3982/QE826>.



Kennedy, Edward H. (2023). *Semiparametric doubly robust targeted double machine learning: a review*. arXiv: 2203.06469 [stat.ME].



Kreyszig, Erwin (1991). *Introductory functional analysis with applications*. Vol. 17. John Wiley & Sons.



Newey, Whitney K (1990). “Semiparametric efficiency bounds”. Em: *Journal of applied econometrics* 5.2, pp. 99–135.



Rousseeuw, Peter J et al. (1986). *Robust statistics: the approach based on influence functions*.