

# INTRODUÇÃO À ECONOMETRIA SEMIPARAMÉTRICA

## AULA 1 - ESTIMAÇÃO NÃO PARAMÉTRICA CLÁSSICA

Luis A. F. Alvarez

7 de outubro de 2024

# ESTIMANDO UMA DENSIDADE

- Suponha que você, pesquisador, possui uma amostra aleatória  $\{X_i\}_{i=1}^n$  de uma distribuição contínua  $F$ , cuja densidade denotamos por  $f$ .
  - Por exemplo, você possui dados da riqueza não financeira de uma amostra de indivíduos.
- Você está interessado em estimar a densidade  $f$ .
- Como você pode fazer isso?

## ESTIMAÇÃO PARAMÉTRICA

- Um caminho consiste em realizar uma hipótese de forma funcional acerca de  $f$ .
- Por exemplo, se nossa população de interesse está restrita à cauda superior da distribuição de riqueza, a literatura sugere que deve valer a “lei de Pareto” (Benhabib e Bisin, 2018), segundo a qual:

$$f(x) = g(x|x_0, \alpha) = \alpha \frac{x_0^\alpha}{x^{\alpha+1}} \mathbf{1}\{x \geq x_0\}, \quad x_0, \alpha > 0$$

- Distribuição compatível com modelos de agentes heterogêneos com mercados incompletos e ativos arriscados (Achdou et al., 2022).
- Sob a hipótese de forma funcional, a estimação de  $f$  se resume à estimação de dois parâmetros,  $(x_0, \alpha) \in \mathbb{R}^2$ .
- Por exemplo, podemos estimá-los através de máxima verossimilhança:

$$(\hat{x}_0, \hat{\alpha}) \in \operatorname{argmax}_{(z,a) \in \mathbb{R}^2} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log g(X_i|z, a)$$

# FORMA FUNCIONAL E ESTIMAÇÃO NÃO PARAMÉTRICA

- E se a lei de Pareto não for válida?
  - Nesse caso, a densidade estimada não recuperará a distribuição correta, mesmo em amostras grandes.
- Como podemos estimar a distribuição correta sem requerer a hipótese de forma funcional?
- Para isso, necessitamos de métodos **não paramétricos**, que dispensem da hipótese de forma funcional.

# HISTOGRAMA

- O estimador não paramétrico mais simples é o histograma.
- Em um histograma, o suporte da distribuição é dividido em  $J$  células (*bins*) de comprimento  $2h$ , e a densidade para os pontos na  $j$ -ésima célula,  $[a_j, b_j)$ , é estimada como constante igual a:

$$\hat{f}_h(x_j) = \frac{1}{n2h} \sum_{i=1}^n \mathbf{1} \{|X_i - x_j| \leq h\} ,$$

onde o  $x_j = \frac{a_j+b_j}{2}$  é o ponto intermediário da célula  $j$ .

## ESTIMADOR DE *KERNEL* PARA DENSIDADE

- O estimador  $\hat{f}_h(x_j)$  usado na construção do histograma é um caso particular de um *estimador de kernel* para uma densidade em um ponto  $x$ , que é dado por:

$$\hat{f}_h(x) = \frac{1}{nh} \sum_{j=1}^n K\left(\frac{X_j - x}{h}\right),$$

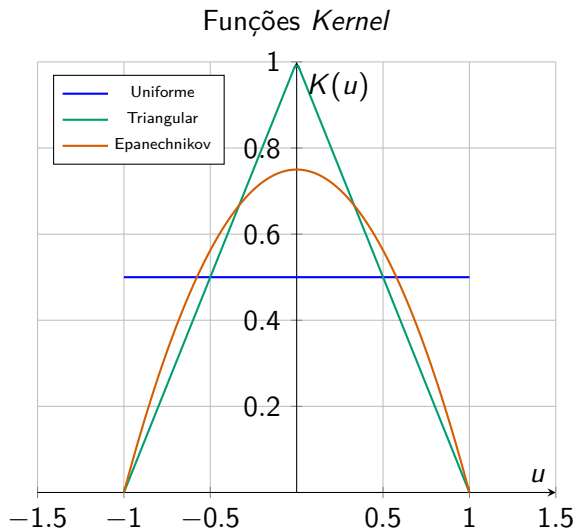
onde  $K : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$  é um *kernel*, i.e. uma função satisfazendo  $\int_{-\infty}^{\infty} K(u)du = 1$  e simétrica em torno do zero,  $K(u) = K(-u)$ .

- No que segue, vamos supor que  $K$  é uma função não negativa com suporte no intervalo  $[-1, 1]$ , embora essas hipóteses não sejam necessárias para a maioria dos resultados.
- Sob a hipótese anterior, estimador de *kernel* propõe estimar  $f(x)$  “contando” os pontos da amostra com distância a menos de  $h$  de  $x$ .  $K$  nos dá então o peso relativo de cada ponto dentro de essa região.

## EXEMPLOS DE *KERNEL*

<i>Kernel</i>	Fórmula
Uniforme	$K(u) = \frac{1}{2} \cdot \mathbf{1}( u  \leq 1)$
Triangular	$K(u) = (1 -  u ) \cdot \mathbf{1}( u  \leq 1)$
Epanechnikov	$K(u) = \frac{3}{4}(1 - u^2) \cdot \mathbf{1}( u  \leq 1)$

# EXEMPLOS DE *KERNEL*





## CALCULANDO O VIÉS DO ESTIMADOR DE *KERNEL*

- Vamos analisar as propriedades estatísticas do estimador de *kernel*.
- Considere um ponto  $x$  do suporte da distribuição tal que  $f(\cdot)$  seja duas vezes continuamente diferenciável numa vizinhança de  $x$ . Neste caso, temos que, à medida que  $h \rightarrow 0$ :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\hat{f}_h(x)] &= \frac{1}{nh} \sum_{i=1}^n \mathbb{E} \left[ K \left( \frac{X_i - x}{h} \right) \right] = \frac{1}{h} \mathbb{E} \left[ K \left( \frac{X_1 - x}{h} \right) \right] = \\ &= \frac{1}{h} \int_{x-h}^{x+h} K \left( \frac{s-x}{h} \right) f(s) ds \stackrel{u=\frac{s-x}{h}}{=} \int_{-1}^1 K(u) f(x+hu) du = \\ &= f(x) \underbrace{\int_{-1}^1 K(u) du}_{=1} + f'(x) h \underbrace{\int_{-1}^1 u K(u) du}_{=0} + \int_{-1}^1 (uh)^2 \frac{f''(\tilde{x}_{hu})}{2} K(u) du = \\ &= f(x) + \frac{h^2}{2} f''(x) \int_{-1}^1 u^2 K(u) du + o(h^2)\end{aligned}$$

onde, da segunda para a terceira linha, aplicamos o teorema do valor médio de segunda ordem, e a última passagem usa continuidade (uniforme) da segunda derivada numa vizinhança de  $x$ .

## CALCULANDO A VARIÂNCIA DO ESTIMADOR DE *KERNEL*

- Do mesmo modo:

$$\mathbb{V}[\hat{f}_h(x)] = \frac{1}{nh^2} \mathbb{V} \left[ K \left( \frac{X_1 - x}{h} \right) \right]$$

- Mas:

$$\mathbb{E} \left[ K \left( \frac{X_1 - x}{h} \right)^2 \right] = h \int_{-1}^1 f(x) K^2(u) du + O(h^3)$$

e

$$\mathbb{E} \left[ K \left( \frac{X_1 - x}{h} \right) \right]^2 = h^2 f(x)^2 + O(h^3)$$

- De modo que:

$$\mathbb{V}[\hat{f}_h(x)] = \frac{1}{nh} \int_{-1}^1 f(x) K^2(u) du + \frac{1}{n} f(x)^2 + \underbrace{O\left(\frac{h}{n}\right)}_{=o\left(\frac{1}{nh}\right)}$$

## ERRO QUADRÁTICO MÉDIO DO ESTIMADOR DE KERNEL

- Combinando os pontos anteriores, temos que:

$$\begin{aligned} \text{EQM}[\hat{f}_h(x)] &= \mathbb{E}[(\hat{f}_h(x) - f(x))^2] = \\ &= h^4 f''(x)^2 \left( \int_{-1}^1 u^2 K(u) du \right)^2 + \frac{1}{nh} \int_{-1}^1 f(x) K^2(u) du + \frac{1}{n} f(x)^2 + o\left(\frac{1}{nh} \vee h^4\right) \end{aligned}$$

- Portanto, se  $n \rightarrow \infty$  com  $h \rightarrow 0$  e  $nh \rightarrow \infty$ .

$$\text{EQM}[\hat{f}_h(x)] \rightarrow 0,$$

e o estimador de kernel é *consistente*.

- Além disso, da expressão acima escolha  $h$  ótima, que balanceia *trade-off* viés-variância, é dada por:

$$h_n \propto n^{-1/5}$$

# ESTIMAÇÃO DE DENSIDADES MULTIDIMENSIONAIS

- O estimador anteriormente introduzido é facilmente extensível para a estimação de uma densidade em  $\mathbb{R}^d$ . Seja  $\mathbf{f}$  uma densidade em  $\mathbb{R}^d$ , e  $\{\mathbf{X}_i\}_{i=1}^n$  uma amostra aleatória desta distribuição. Podemos estimar  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$  como:

$$\hat{\mathbf{f}}_{\mathbf{h}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{nh_1 \dots h_d} \sum_{i=1}^n \mathbf{K}_{\mathbf{h}}(\mathbf{X}_i - \mathbf{x})$$

onde  $\mathbf{K}_{\mathbf{h}}(\mathbf{u}) = \prod_{j=1}^d K(u_j/h_j)$ , com  $K$  um *kernel* univariado.

- Nesse caso, viés é proporcional da ordem de  $d \max_j h_j^2$  e variância a  $\frac{1}{nh_1 \dots h_d}$ . Portanto, se:

$$\max_j h_j \rightarrow 0, \quad nh_1 \dots h_d \rightarrow \infty,$$

estimador é consistente.

# ESTIMADOR NADARAYA-WATSON PARA A ESPERANÇA CONDICIONAL

- A lógica do estimador anterior pode ser estendida para, dada uma amostra aleatória  $\{(Y_i, X_i)\}_{i=1}^n$  de  $(Y, X)$ , estimar-se a função de esperança condicional  $m(X) = \mathbb{E}[Y|X]$  num ponto  $x$ .
- Nesse caso, podemos tomar médias locais, dadas pelo estimador de **Nadaraya-Watson**:

$$\hat{m}(x) = \frac{\sum_{i=1}^n K((X_i - x)/h) Y_i}{\sum_{i=1}^n K((X_i - x)/h)}$$

# VIÉS E VARIÂNCIA DO ESTIMADOR DE NADARAYA-WATSON

- Para uma  $m$  duas vezes continuamente diferenciável numa vizinhança de  $x$ , com densidade  $f$  positiva e continuamente diferenciável numa vizinhança de  $x$ , temos, se  $n \rightarrow \infty$  e  $nh \rightarrow \infty$

$$\text{Viés}(\hat{m}(x)) = h^2 \left( \frac{1}{2} m''(x) + \frac{m'(x)f'(x)}{f(x)} \right) \int_{-\infty}^{\infty} u^2 K(u) du + o(h^2)$$

$$\mathbb{V}(\hat{m}(x)) = \frac{\sigma^2(x)}{f(x)nh} \int_{-\infty}^{\infty} K^2(u) du + o\left(\frac{1}{nh}\right)$$

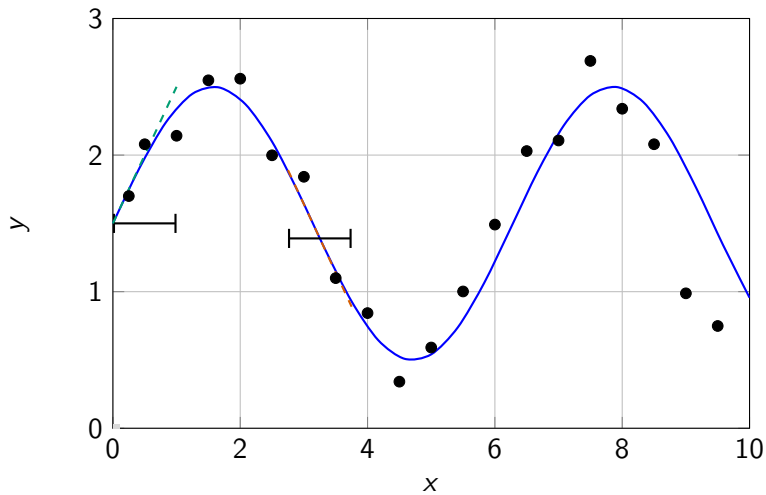
onde  $\sigma^2(X) = \mathbb{V}[Y|X]$ .

- Estimador é consistente para  $m(x)$  se  $n \rightarrow \infty$ ,  $h \rightarrow 0$  e  $nh \rightarrow \infty$ .
- Banda ótima em termos de erro quadrático médio é dada por:  
 $h_n \propto n^{-1/5}$

## VIÉS DE FRONTEIRA

- A derivação anterior pressupõe um ponto interior ao suporte de  $X$ ,
- Para pontos na fronteira do suporte, a expansão de Taylor é unilateral, de modo que haverá um componente de viés adicional em  $\hat{m}(x)$ .
  - Esse componente adicional de viés tem taxa de convergência mais lenta, de  $h$  e não  $h^2$ , e será proporcional a  $m'(x)$ .

# VISUALIZAÇÃO





# REGRESSÃO LINEAR LOCAL

- O estimador de Nadaraya-Watson resolve:

$$\hat{m}(x) = \operatorname{argmin}_{a \in \mathbb{R}} \sum_{i=1}^n K\left(\frac{X_i - x}{h}\right) (Y_i - a)^2$$

- Uma expansão de Taylor  $m(X_i) \approx m(x) + m'(x)(X_i - x)$ , e a expressão acima sugerem a estimação de  $m(x)$  como o intercepto da regressão linear local:

$$\min_{a, b} \sum_{i=1}^n K\left(\frac{X_i - x}{h}\right) (Y_i - a - b(X_i - x))^2$$

- Coeficiente associado a  $(X_i - x)$ ,  $\hat{b}$ , estima  $m'(x)$ , embora esse estimador não seja “bom” (regressão quadrática local é preferível).

# VIÉS E VARIÂNCIA DA REGRESSÃO LINEAR LOCAL E AJUSTE AUTOMÁTICO À FRONTEIRA

- Sob as mesmas condições do estimador de Nadaraya-Watson, o estimador  $\tilde{m}(x)$  satisfaz, para os pontos interiores do suporte de  $X$ .

$$\text{Viés}(\tilde{m}(x)) = \frac{h^2}{2} m''(x) \int_{-\infty}^{\infty} u^2 K(u) du + o(h^2)$$

$$\mathbb{V}(\tilde{m}(x)) = \frac{\sigma^2(x)}{f(x)nh} \int_{-\infty}^{\infty} K^2(u) du + o\left(\frac{1}{nh}\right)$$

- Ademais, uma fórmula análoga (com as mesmas taxas), vale para os pontos de fronteira do suporte (Fan e Gijbels, 1996, Teorema 3.3).
- Banda ótima em termos de erro quadrático médio é dada por  $h_n \propto n^{-1/5}$

# INFERÊNCIA

- Sob condições de regularidade, temos que:

$$\sqrt{nh} \left( \frac{\tilde{m}(x) - m(x) - \text{Viés}(\tilde{m}(x))}{\sqrt{\mathbb{V}[x]}} \right) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, 1).$$

- Estimador é assintoticamente normal, embora não necessariamente seja centrado no parâmetro de interesse.
- Se  $\sqrt{nh}\text{Viés}(\tilde{m}(x)) \rightarrow 0$ , mau centramento desaparece assintoticamente, e intervalo de confiança

$$[\tilde{m}(x) + z_{\alpha/2} \sqrt{\widehat{\mathbb{V}[\tilde{m}(x)]}}, \tilde{m}(x) + z_{1-\alpha/2} \sqrt{\widehat{\mathbb{V}[\tilde{m}(x)]}}],$$

tem cobertura assintótica de  $1 - \alpha$ .

- $\sqrt{nh}\text{Viés}(\tilde{m}(x)) \rightarrow 0 \iff nh^5 \rightarrow 0$  (condição de *undersmoothing*).
- Banda ótima para estimação pontual **não** satisfaz essa condição.
- Condição também não é “ótima” sob diferentes critérios inferenciais (Armstrong e Kolesár, 2020; Calonico, Cattaneo e Farrell, 2022)

## ALTERNATIVAS INFERENCIAIS

- Calonico, Cattaneo e Titiunik (2014), Calonico, Cattaneo e Farrell (2018) e Calonico, Cattaneo e Farrell (2022): estime  $\widehat{\text{Viés}}(\tilde{m}(x))$  e ajuste erro padrão pela incerteza desta etapa, considerando o intervalo de confiança:

$$\tilde{m}(x) - \widehat{\text{Viés}}(\tilde{m}(x)) \pm z_{1-\alpha/2} \sqrt{\widehat{\mathbb{V}[\tilde{m}(x) + \widehat{\text{Viés}}(\tilde{m}(x))]}},$$

- Armstrong e Kolesár (2020): considere o intervalo de confiança

$$\tilde{m}(x) \pm c_{1-\alpha/2}(M) \sqrt{\widehat{\mathbb{V}[\tilde{m}(x)]}},$$

onde o valor crítico ajustado  $c_q(M)$  incorpora o efeito do pior viés possível, numa classe de funções “suaves”, com parâmetro de suavidade  $M$ , sobre o valor crítico.

- Intervalos *undersmoothened* ou corrigidos por viés podem ser vistos como escolhendo um  $M$  implicitamente e, nesse caso, construindo um intervalo de maior comprimento.

## APROXIMAÇÃO UNIFORME

- A discussão até aqui focou na qualidade da aproximação local em um único ponto.
- Entretanto, para o uso dos estimadores locais em análises posteriores, é interessante entender suas propriedades de aproximação, **uniformemente no suporte**.
- Einmahl e Mason (2005): para o estimador de Nadaraya-Watson com vetor aleatório  $\mathbf{X}$  em  $\mathbb{R}^d$ , e para qualquer subconjunto compacto  $I$  em  $\mathbb{R}^d$ :

$$\sup_{\mathbf{x} \in I} |\hat{m}(\mathbf{x}) - m(\mathbf{x}) - \text{Viés}(\hat{m}(\mathbf{x}))| = O_{\mathbb{P}} \left( \sqrt{\frac{(-\sum_{j=1}^d \log(h_j)) \vee \log \log n}{nh_1 \dots h_d}} \right)$$

- Para as bandas ótimas,  $h_j \propto n^{-1/(d+4)}$ , taxa é de  $\sqrt{\frac{\log(n)}{n^{4+d}}}$ .
- Resultados similares para dados com dependência temporal (Alvarez e Pinto, 2023).

## APROXIMAÇÃO “GLOBAL”

- Recorde-se que, sob condições bastante gerais, o estimador de MQO de  $Y$  num vetor  $\mathbf{X}$  é consistente para o minimizador de

$$\min_{b \in \mathbb{R}^d} \mathbb{E}[(Y - \mathbf{X}'b)^2],$$

e que esse mesmo minimizador também resolve

$$\min_{b \in \mathbb{R}^d} \mathbb{E}[(\mathbb{E}[Y|\mathbf{X}] - \mathbf{X}'b)^2],$$

de modo que o estimador de MQO recupera a melhor aproximação linear à função de esperança condicional  $\mathbb{E}[Y|\mathbf{X}]$  na norma  $L_2(\mathbb{P}_{\mathbf{X}})$ .

- No entanto, essa aproximação pode ser bastante ruim quando o objetivo não é “resumir”  $\mathbb{E}[Y|\mathbf{X}]$ , e sim analisar seu comportamento “global”.

# APROXIMANDO A ESPERANÇA CONDICIONAL

- Recorde-se que a função esperança condicional resolve:

$$\min_{h \in L_2(\mathbb{P}_{\mathbf{X}})} \mathbb{E}[(Y - h(\mathbf{X}))^2]$$

- Quando o suporte  $\mathcal{X}$  de  $\mathbf{X}$  é finito e pequeno relativamente a  $n$ , análogo amostral do problema acima é factível, visto que  $L_2(\mathbb{P}_{\mathbf{X}}) = \{\sum_{s \in \mathcal{X}} a_s \mathbf{1}\{\mathbf{x} = s\} : (a_s)_{s \in \mathcal{X}} \in \mathbb{R}^{\mathcal{X}}\}$ .
  - Regressão “saturada”, com indicadores de todos os pontos do suporte, é um estimador não paramétrico factível de  $\mathbb{E}[Y|\mathbf{X}]$ .
- No entanto, se  $|\mathcal{X}|$  é grande em relação a  $n$ , análogo amostral torna-se impraticável.
  - Pouco ou nenhum (se  $|\mathcal{X}| \geq n$ ) grau de liberdade para estimar a esperança condicional.
  - Em particular, se  $\mathbf{X}$  contiver alguma variável aleatória contínua, existirão infinitas soluções que se adequarão aos dados perfeitamente, e poderão distar de  $\mathbb{E}[Y|\mathbf{X}]$  tão mal quanto se queira.

# ESTIMADOR DE SÉRIES

- Dada a impraticabilidade de se estimar:

$$\min_{h \in L_2(\mathbb{P}_{\mathbf{X}})} \sum_{i=1}^n (Y_i - h(\mathbf{X}_i))^2,$$

o estimador não paramétrico de **séries** propõe-se a estimar:

$$\min_{h \in \Theta_{J_n}} \sum_{i=1}^n (Y_i - h(\mathbf{X}_i))^2,$$

onde  $(\Theta_j)_{j \in \mathbb{N}}$  são uma sequência crescente de subespaços lineares de  $L^2(\mathbb{P}_{\mathbf{X}})$  de **dimensão finita**, tais que a função de esperança condicional  $m(\mathbf{X})$  satisfaz:

$$m \in \mathcal{A},$$

onde  $(\mathcal{A}, d)$  é um espaço métrico com  $\cup_{i \in \mathbb{N}} \Theta_j \subseteq \mathcal{A} \subseteq L^2(\mathbb{P}_{\mathbf{X}})$  e  $\mathcal{A} = \overline{\cup_{i \in \mathbb{N}} \Theta_j}$ .

- Em palavras,  $m$  é aproximada tão bem quanto se queira na métrica  $d$ , por um elemento de  $\cup_{i \in \mathbb{N}} \Theta_j$ .



# VIÉS DE APROXIMAÇÃO E *TRADE-OFF*

## VIÉS-VARIÂNCIA

- As propriedades de aproximação do estimador de séries dependem crucialmente do **viés de aproximação** :

$$\rho_j = \inf_{s \in \Theta_j} d(m, s).$$

- Essas quantidades são conhecidas teoricamente para diferentes classes de séries, com base em resultados de teoria da aproximação.
- A escolha de  $J_n$  pode ser feita contrastando uma estimativa de  $\hat{\rho}_j$  com a variância estimada do estimador, de modo a equalizar o trade-off viés-variância ou garantir inferência correta (Belloni, Chernozhukov, Chetverikov e Kato, 2015; Chen, T. Christensen e Kankanala, 2024).

# POLINÔMIOS

- Considere a situação em que o suporte de  $\mathbf{X}$  é dado por um intervalo  $[a, b]$  de  $\mathbb{R}$ .
- Nesse caso, podemos considerar a classe de polinômios:

$$\Theta_j = \left\{ \sum_{l=0}^j a_l x^l : (a_l)_{l=0}^j \in \mathbb{R}^{j+1} \right\},$$

- Pelo teorema de Stone-Weierstrass, sabemos que, se  $m$  é contínua em  $[a, b]$ , então  $m$  é tão bem aproximada quanto se queira por um polinômio, na norma uniforme.
  - Sob condições de diferenciabilidade e Hölder-continuidade nas derivadas de  $m$ , podemos encontrar uma função explícita para  $\rho_j$  como função de  $j$  e  $m$ .

## SPLINES

- Os polinômios da seção anterior podem funcionar bastante mal, especialmente na fronteira do suporte (fenômeno de Runge).
  - Isso se deve à convexidade de  $x^p$ .
- Uma alternativa bastante comum consiste no uso de *splines*.
- Um *spline* cúbico com nós  $a < t_1 < t_2 < \dots t_{j-4} < b$  é dado por:

$$\Theta_j = \text{span}\{1, x, x^2, x^3, \max(x - t_1, 0)^3, \dots, \max(x - t_{j-4}, 0)^3\}$$

- Função  $3 - 1 = 2$  vezes continuamente diferenciável em  $[a, b]$ .
- Ordem do polinômio é *fixa*, o que mudam é o número de nós (uma convenção é usar percentis igualmente espaçados do suporte).
- Melhores propriedades de aproximação para funções em espaços Hölder que polinômios (veja Belloni, Chernozhukov, Chetverikov e Kato, 2015).
- Um *B-Spline* é uma base do espaço gerado por um *spline* com propriedades computacionais desejáveis.

## TENSOR PRODUCTS

- Os resultados anteriores pressupunham que  $\mathbf{X}$  era univariado.
- O caso multivariado pode ser lidado através de tensores. Construímos séries univariadas para cada uma das entradas de  $\mathbf{X}$ , e depois consideramos o espaço gerado pelos produtos das bases de cada um dos espaços.
- Por exemplo, se  $\mathbf{X} = (X_1, X_2)$  é bidimensional, e consideramos polinômios de grau 2 para cada uma das dimensões, o espaço-produto é:

$$\text{span}\{1, x_1, x_2, x_1x_2, x_1^2x_2, x_2^2, x_1x_2^2, x_1^2, x_2^2, x_1^2x_2^2\}$$

- Resultado de aproximação uniforme para estimador de séries baseado em tensores de *splines* (Belloni, Chernozhukov, Chetverikov e Kato, 2015) e escolha “ótima” de  $J_n$ :

$$\sup_{x \in \mathcal{X}} |\hat{h}(x) - m(x)| = O_{\mathbb{P}} \left( \left( \frac{\log n}{n} \right)^{s/(2s+d)} \right),$$

onde  $s$  é o “grau de suavidade” de  $m$ , dado pelas restrições sobre sua derivada.

# RESULTADOS ADICIONAIS DE ESTIMAÇÃO DE SÉRIES

1. Outras bases (veja Chen, 2007; Belloni, Chernozhukov, Chetverikov e Kato, 2015; Cattaneo, Farrell e Feng, 2020):
  - Polinômios particionados.
  - Bases de Fourier.
  - Ondaletas.
2. Aproximações com dependência temporal (Chen e T. M. Christensen, 2015).
3. Outras funções objetivo.
  - Quantil (Belloni, Chernozhukov, Chetverikov e Fernández-Val, 2019).

# BIBLIOGRAFIA I



Achdou, Yves et al. (2022). “Income and wealth distribution in macroeconomics: A continuous-time approach”. *Em: The review of economic studies* 89.1, pp. 45–86.



Alvarez, Luis e Cristine Pinto (2023). *A maximal inequality for local empirical processes under weak dependence*. arXiv: 2307.01328 [econ.EM]. URL: <https://arxiv.org/abs/2307.01328>.



Armstrong, Timothy B e Michal Kolesár (2020). “Simple and honest confidence intervals in nonparametric regression”. *Em: Quantitative Economics* 11.1, pp. 1–39.



Belloni, Alexandre, Victor Chernozhukov, Denis Chetverikov e Iván Fernández-Val (2019). “Conditional quantile processes based on series or many regressors”. *Em: Journal of Econometrics* 213.1, pp. 4–29.

# BIBLIOGRAFIA II



Belloni, Alexandre, Victor Chernozhukov, Denis Chetverikov e Kengo Kato (2015). "Some new asymptotic theory for least squares series: Pointwise and uniform results". *Em: Journal of Econometrics* 186.2, pp. 345–366.



Benhabib, Jess e Alberto Bisin (2018). "Skewed wealth distributions: Theory and empirics". *Em: Journal of Economic Literature* 56.4, pp. 1261–1291.



Calonico, Sebastian, Matias D Cattaneo e Max H Farrell (2018). "On the effect of bias estimation on coverage accuracy in nonparametric inference". *Em: Journal of the American Statistical Association* 113.522, pp. 767–779.



— (2022). "Coverage error optimal confidence intervals for local polynomial regression". *Em: Bernoulli* 28.4.



Calonico, Sebastian, Matias D Cattaneo e Rocio Titiunik (2014). "Robust nonparametric confidence intervals for regression-discontinuity designs". *Em: Econometrica* 82.6, pp. 2295–2326.

## BIBLIOGRAFIA III



Cattaneo, Matias D, Max H Farrell e Yingjie Feng (2020). “Large sample properties of partitioning-based series estimators”. Em: *The Annals of Statistics* 48.3, pp. 1718–1741.



Chen, Xiaohong (2007). “Chapter 76 Large Sample Sieve Estimation of Semi-Nonparametric Models”. Em: ed. por James J. Heckman e Edward E. Leamer. Vol. 6. Handbook of Econometrics. Elsevier, pp. 5549–5632. DOI: [https://doi.org/10.1016/S1573-4412\(07\)06076-X](https://doi.org/10.1016/S1573-4412(07)06076-X). URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S157344120706076X>.



## BIBLIOGRAFIA IV



Chen, Xiaohong, Timothy Christensen e Sid Kankanala (mar. de 2024). “Adaptive Estimation and Uniform Confidence Bands for Nonparametric Structural Functions and Elasticities”. Em: *The Review of Economic Studies*, rdae025. ISSN: 0034-6527. DOI: 10.1093/restud/rdae025. eprint: <https://academic.oup.com/restud/advance-article-pdf/doi/10.1093/restud/rdae025/57021176/rdae025.pdf>. URL: <https://doi.org/10.1093/restud/rdae025>.



Chen, Xiaohong e Timothy M. Christensen (2015). “Optimal uniform convergence rates and asymptotic normality for series estimators under weak dependence and weak conditions”. Em: *Journal of Econometrics* 188.2. Heterogeneity in Panel Data and in Nonparametric Analysis in honor of Professor Cheng Hsiao, pp. 447–465. ISSN: 0304-4076. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jeconom.2015.03.010>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0304407615000792>.

# BIBLIOGRAFIA V



Einmahl, Uwe e David M. Mason (2005). “Uniform in bandwidth consistency of kernel-type function estimators”. Em: *The Annals of Statistics* 33.3, pp. 1380–1403. DOI: 10.1214/009053605000000129. URL: <https://doi.org/10.1214/009053605000000129>.



Fan, Jianqing e Irene Gijbels (mar. de 1996). *Local polynomial modelling and its applications*. en. Chapman & Hall/CRC Monographs on Statistics and Applied Probability. Philadelphia, PA: Chapman & Hall/CRC.