

## Probabilidade e Estatística

### Exercícios sobre Probabilidade e Medida

**Construindo medidas** Os próximos dois exercícios versarão sobre a construção de probabilidades em diferentes espaços.

**Exercício 1 (Probabilidade Elementar)** Nesse exercício, veremos como construir probabilidades em espaços elementares. Seja  $\Omega$  um conjunto **finito**. Considere um conjunto de números não-negativos  $\{p_\omega : \omega \in \Omega\}$  tal que  $\sum_{\omega \in \Omega} p_\omega = 1$ . Cada  $p_\omega$  pode ser visto como a probabilidade de que cada um dos  $\omega \in \Omega$  seja sorteado pela incerteza do problema em questão.

- a Considere o espaço mensurável  $(\Omega, 2^\Omega)$ . Mostre que a função  $S : 2^\Omega \mapsto \mathbb{R}$  dada por:

$$S(A) := \sum_{a \in A} p_a, \quad A \in 2^\Omega,$$

define uma medida de probabilidade sobre  $2^\Omega$ .

- b Mostre que a medida  $S$  é a única extensão possível de  $\{\{a\} : a \in \mathcal{A}\}$  para  $2^\Omega$  que preserva as probabilidades  $\{p_a\}_a$ , no seguinte sentido: qualquer outra medida  $H$  sobre  $2^\Omega$  que satisfaça  $H[\{a\}] = p_a$ ,  $\forall a \in \Omega$ , é tal que  $H = S$ .
- c Mostre que, tomando como base o espaço mensurável  $(\Omega, 2^\Omega)$ , qualquer função  $f : \Omega \mapsto \mathbb{R}$  constitui uma variável aleatória.

**Exercício 2 (Construindo a medida uniforme na reta)** O objetivo destes exercícios consiste em construir o espaço  $((0, 1], \mathcal{B}(0, 1], \text{Leb})$ .

- a Considere o conjunto  $\mathcal{A}$  de subconjuntos de  $(0, 1]$  da forma:

$$\cup_{i=1}^n (a_i, b_i],$$

com  $n \in \mathbb{N}$  e  $0 \leq a_1 \leq b_1 \leq a_2 \leq b_2 \leq \dots \leq a_n \leq b_n \leq 1$ . Mostre que esse conjunto  $\mathcal{A}$  forma uma **álgebra**, no seguinte sentido: (1)  $(0, 1], \emptyset \in \mathcal{A}$ ; (2) se  $A \in \mathcal{A}$ , então  $A^c \in \mathcal{A}$ ; e (3) sejam  $A_1, A_2, \dots, A_k$  elementos de  $\mathcal{A}$ , com  $k < \infty$ , então  $\cup_{l=1}^k A_l \in \mathcal{A}$ .

- b Defina a função  $\widetilde{\text{Leb}} : \mathcal{A} \mapsto [0, 1]$ , da seguinte forma. Se  $A = \cup_{i=1}^n (a_i, b_i]$ , então

$$\widetilde{\text{Leb}}(A) = \sum_{i=1}^n (b_i - a_i).$$

Mostre que  $\widetilde{\text{Leb}}$  está bem definida, isto é, que o valor de  $\widetilde{\text{Leb}}(A)$  é o mesmo para duas representações distintas de um mesmo conjunto  $A$  em termos de união de intervalos disjuntos; e que  $\widetilde{\text{Leb}}(\emptyset) = 0$  e  $\widetilde{\text{Leb}}(0, 1] = 1$ .

- c Mostre que  $\widetilde{\text{Leb}}$  é **aditiva** em  $\mathcal{A}$ , isto é, para  $A_1, A_2, \dots, A_k$ ,  $k < \infty$ , elementos **disjuntos** de  $\mathcal{A}$ :

$$\widetilde{\text{Leb}}(\cup_{l=1}^k A_l) = \sum_{l=1}^k \widetilde{\text{Leb}}(A_l)$$

- d Usando o resultado anterior, mostre que  $\widetilde{\text{Leb}}$  é enumeravelmente **aditiva** em  $\mathcal{A}$ , isto é, para  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{A}^\infty$ ,  $A_j \cap A_i = \emptyset$  se  $i \neq j$ , e tal que  $\cup_{l=1}^\infty A_l \in \mathcal{A}$ :

$$\widetilde{\text{Leb}}(\cup_{l=1}^\infty A_l) = \sum_{l=1}^\infty \widetilde{\text{Leb}}(A_l)$$

*Dica:* para os itens (c) e (d), veja o Teorema 1.3 em Billingsley (1995), “Probability and Measure”.

- e Recorra ao Teorema 1.7 de Williams (1991), “Probability with Martingales” para concluir que existe uma única medida de probabilidade que estende  $\widetilde{\text{Leb}}$  a  $\mathcal{B}(0, 1]$ .

**Exercício 3 (Conjuntos não mensuráveis)** O objetivo deste exercício consiste em mostrar que existem conjuntos que não estão em  $\mathcal{B}(0, 1]$ . Para começar, definamos a seguinte operação entre dois números  $x, y \in (0, 1]$ .

$$x \oplus y = \begin{cases} x + y, & \text{se } x + y \leq 1 \\ x + y - 1, & \text{se } x + y > 1 \end{cases}$$

É possível mostrar (não faremos isso) que, para todo  $x \in (0, 1]$  e  $A \in \mathcal{B}[0, 1]$ , o conjunto  $A \oplus x := \{a \oplus x : x \in A\}$  é mensurável (i.e.  $A \oplus x \in \mathcal{B}[0, 1]$ ) e que  $\text{Leb}(A \oplus x) = \text{Leb}(A)$  (a medida de Lebesgue é invariante a translações).

- a Defina a relação  $\sim$  sobre  $[0, 1]$  da forma:  $x \sim y \iff \exists r \in \mathbb{Q} \cap (0, 1], x \oplus r = y$ . Mostre que  $\sim$  é uma relação de equivalência, i.e. reflexiva, simétrica e transitiva.
- b Para  $x \in [0, 1]$ , defina a classe de equivalência  $[x]_\sim = \{a \in [0, 1] : a \sim x\}$ . Mostre que, se  $[x]_\sim \neq [y]_\sim$ , então  $[x]_\sim \cap [y]_\sim = \emptyset$ , e que  $\cup_{a \in (0, 1]} [a]_\sim = (0, 1]$ . Conclua que a coleção  $\mathcal{S} = \{[a]_\sim : a \in (0, 1]\}$  forma uma partição de  $(0, 1]$ .
- c Considere o conjunto  $H = \{h \in s : s \in \mathcal{S}\}$  que consiste em coletar um elemento de cada uma das classes de equivalência distintas de  $\sim$ . Considere os conjuntos  $H_n = H \oplus r_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , onde  $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$  é uma enumeração dos números racionais em  $(0, 1]$ . Mostre que os  $H_n$  são disjuntos, e que  $\cup_{n \in \mathbb{N}} H_n = (0, 1]$ .
- d Conclua que  $H \notin \mathcal{B}(0, 1]$ . *Dica:* suponha, por contradição, que  $H \in \mathcal{B}(0, 1]$ , e use a igualdade do item anterior.

**Exercício 4 (extensão do lema do  $\pi$ -sistema)** prove a seguinte extensão do lema do  $\pi$ -sistema. Seja  $(\Omega, \Sigma)$  um espaço mensurável, e  $\mu_1$  e  $\mu_2$  duas medidas sobre  $\Sigma$  que são  $\sigma$ -finitas num conjunto  $\mathcal{I}$ , i.e. tais que existem  $E_1, E_2, E_3 \dots \in \mathcal{I}$  disjuntos com  $\Omega = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$  com  $\mu_1(E_i) < \infty$  e  $\mu_2(E_i) < \infty$  para todo  $i \in \mathbb{N}$ . Prove que, se  $\mu_1(I) = \mu_2(I)$  para todo  $I \in \mathcal{I}$ , e  $\mathcal{I}$  é um  $\pi$ -sistema que gera  $\Sigma$ , então  $\mu_1 = \mu_2$ .

**Exercício 5 (um contraexemplo)** Considere o espaço de medida  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \text{Leb})$ , onde Leb é a medida de Lebesgue sobre a reta, que satisfaz:

$$\text{Leb}(a, b] = b - a, \quad \forall -\infty < a \leq b < \infty.$$

- a Use o resultado da questão anterior para concluir que as medidas dos intervalos  $(a, b]$  caracterizam a medida de Lebesgue na reta.
- b Considere a sequência de conjuntos mensuráveis  $E_n = (n, \infty)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Mostre que  $\mu(E_n) = \infty$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ , e que  $\mu(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} E_n) = 0$ . Por que o teorema de convergência visto em aula não vale nesse caso?

**Exercício 6 (um macaco e uma máquina de escrever)** Seja  $\mathcal{V}$  o conjunto de teclas de uma máquina de escrever. Considere um experimento em que um macaco digita sequencialmente em uma máquina de escrever, infinitamente no tempo. O espaço amostral é dado por  $\mathcal{V}^{\mathbb{N}}$ , o espaço de sequências com valores em  $\mathcal{V}$ . Considere a  $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{F}$  gerada pelos eventos  $\{\omega \in \mathcal{V}^{\mathbb{N}} : \omega_k = v\}$ , para todo  $k \in \mathbb{N}$   $v \in \mathcal{V}$ . Esses são os eventos em que o macaco digita um caractere  $v$  na  $k$ -ésima posição do texto.

- a Considere o subconjunto  $\mathcal{I}$  de eventos da forma  $\{\omega \in \mathcal{V}^{\mathbb{N}} : \omega_{i_1} = v_1, \omega_{i_2} = v_2, \dots, \omega_{i_k} = v_k\}$ , para todo  $k < \infty$ ,  $i_1 < i_2 < \dots < i_k$  e  $v_1, v_2, \dots, v_k \in \mathcal{V}$ . Inclua também o conjunto vazio em  $\emptyset$  em  $\mathcal{I}$ . Mostre que  $\mathcal{I}$  é um  $\pi$ -sistema e  $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{F}$ .
- b Suponha agora que o macaco digita as teclas de forma uniforme e independente no tempo, isto é, considere a probabilidade  $\mathbb{P}$  sobre  $(\mathcal{V}^{\mathbb{N}}, \mathcal{F})$  da forma:

$$\mathbb{P}[\{\omega \in \mathcal{V}^{\mathbb{N}} : \omega_{i_1} = v_1, \omega_{i_2} = v_2, \dots, \omega_{i_k} = v_k\}] = \frac{1}{|\mathcal{V}|^k}$$

para todo evento em  $\mathcal{I}$  não vazio, e  $\mathbb{P}[\emptyset] = 0$ . Use o lema do  $\pi$ -sistema para concluir que as probabilidades sobre  $\mathcal{I}$  caracterizam  $\mathbb{P}$ .

- c Seja  $S_n$  o evento em que, a partir da enésima posição do texto, o macaco digita as obras completas de Shakespeare. Use o segundo lema de Borell-Cantelli para concluir que a probabilidade de que o macaco digita as obras completas de Shakespeare infinitas vezes é 1.

**Exercício 7** Seja  $(\Omega, \Sigma)$  um espaço mensurável, e  $f : \Omega \mapsto \mathbb{R}$  uma função  $\Sigma/\mathcal{B}(\mathbb{R})$ -mensurável. Mostre que as seguintes funções são mensuráveis:

- a  $g = \max\{f, 0\}$ .
- b  $g = \min\{f, 0\}$ .
- c  $g = s \circ f$ , onde  $s : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$  é uma função contínua.