Exame Final

Probabilidade e Estatística

Professor Luís Antonio Fantozzi Alvarez

21 de fevereiro de 2025

Instruções: Coloque nome e número USP em **todas as folhas que for utilizar**. A prova vale 12 pontos. Ao final, entregue esta prova impressa junto de suas respostas.

Exercício 1 (2 pontos) Enuncie e demonstre:

a (1 ponto) O primeiro lema de Borel-Cantelli.

b (1 ponto) A desigualdade de Markov.

Exercício 2 (2 pontos) Mostre os seguintes pontos.

a (0,5 ponto) Se uma sequência de variáveis aleatórias definidas num mesmo espaço de probabilidade converge quase certamente para uma outra variável aleatória, então ela converge em probabilidade para a mesma variável aleatória.

b (0,5 ponto) Seja $(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidade. Se $E_n \in \Sigma$, $n \in \mathbb{N}$, é uma sequência de eventos com $\mathbb{P}[E_n] \to 0$, então $\mathbf{1}_{E_n} \xrightarrow{p} 0$.

c (0,5 ponto) $\{a\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ para todo $a \in \mathbb{R}$.

d (0,5 ponto) Seja $(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidade. Se X é uma variável aleatória com função de distribuição F, então, para $a \in \mathbb{R}$, $\mathbb{P}[\{\omega : X(\omega) = a\}] = F(a) - \lim_{\epsilon \uparrow 0} F(a + \epsilon)$.

Exercício 3 (2 pontos) Seja Ω um espaço. Dizemos que $\mathcal{P} \subseteq 2^\Omega$ define uma partição finita sobre Ω se $\mathcal{P} = \{E_1, \ldots, E_n\}$, com $E_i \cap E_j = \emptyset$ se $i \neq j$ e $\cup_{i=1}^n E_i = \Omega$.

a (0,5 ponto) Defina a classe $\mathcal{S} = \{\cup_{j \in A} E_j : A \in 2^{\{1,2,\ldots,n\}}\}$. Mostre que $\mathcal{S}$ é uma σ-álgebra. Infira que $\sigma(\mathcal{P}) \subseteq \mathcal{S}$.

b (0,5 ponto) Argumente que qualquer σ-álgebra que contém $\mathcal{P}$ contém $\mathcal{S}$. Conclua que $\mathcal{S} \subseteq \sigma(\mathcal{P})$ e que, portanto, $\mathcal{S} = \sigma(\mathcal{P})$.

c (1 ponto) Seja $(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidade tal que $\mathcal{P} \subseteq \Sigma$. Suponha que $\mathbb{P}[E_j] > 0$ para todo $i = 1, \ldots, n$. Para uma variável aleatória Y integrável definida sobre $(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$, mostre que a função $f : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ definida por:

$$f(\omega) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\mathbb{E}[Y \mathbf{1}_{E_j}]}{\mathbb{P}[E_j]} \mathbf{1}_{E_j} ,$$

é uma versão de $\mathbb{E}[Y|\sigma(\mathcal{P})]$.

Exercício 4 (2,75 pontos) Seja $X_1, X_2, \ldots$ uma sequência de variáveis aleatórias iid integráveis definidas no mesmo espaço de probabilidade. No que segue, defina $\bar{X}_n := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$ e $\mu := \mathbb{E}[X_1]$.

a (0,25 ponto) Fixe $K > 0$ e mostre que:

$$\|\bar{X}_n - \mu\|_1 \leq \|\bar{X}_{n,K} - \mu_K\|_1 + \|\bar{X}_n - \bar{X}_{n,K}\|_1 + \|\mu - \mu_K\|_1 ,$$

onde $\bar{X}_{n,K} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i \mathbf{1}_{\{|X_i| \leq K\}}$ e $\mu_K = \mathbb{E}[X_1 \mathbf{1}_{\{|X_1| \leq K\}}]$.

b (0,5 ponto) Mostre que $\|\bar{X}_{n,K} - \mu_K\|_1 \leq \sqrt{\frac{\sigma_K^2}{n}}$, onde $\sigma_K^2 = \mathbb{V}[X_1 \mathbf{1}_{\{|X_1| \leq K\}}]$. *Dica:* use a monotonicidade das normas L_p.

c (0,5 ponto) Mostre que $\|\bar{X}_n - \bar{X}_{n,K}\|_1 \leq \mathbb{E}[|X_1| \mathbf{1}_{\{|X_1| > K\}}]$ e $\|\mu - \mu_K\|_1 \leq \mathbb{E}[|X_1| \mathbf{1}_{\{|X_1| > K\}}]$.

d (1 ponto) Use o teorema da convergência dominada para mostrar que $\lim_{K \uparrow \infty} \mathbb{E}[|X_1| \mathbf{1}_{\{|X_1| > K\}}] = 0$.

e (0,5 ponto) Conclua que $\limsup_{n \to \infty} \|\bar{X}_n - \mu\|_1 \leq 2\mathbb{E}[|X_1| \mathbf{1}_{\{|X_1| > K\}}]$, e disso que $\lim_{n \to \infty} \|\bar{X}_n - \mu\|_1 = 0$. Conclua que $\bar{X}_n \xrightarrow{p} \mu$.

Exercício 5 (1,5 ponto) Considere o espaço mensurável $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, e $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de medidas de probabilidade sobre esse espaço. Suponha que cada medida P_n admite densidade g_n com respeito à medida de Lebesgue λ sobre $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Suponha, ademais, que existe uma função $g \geq 0$ tal que, para todo $x \in \mathbb{R}$.

$$\lim_{n \to \infty} g_n(x) = g(x)\,,$$

com $\int g(\omega)\lambda(d\omega) = 1$. No que segue, defina $\delta_n \coloneqq g_n - g$.

a (0,25 ponto) Mostre que $\int \delta_n d\lambda = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

b (0,5 ponto) Sejam $\delta_n^+ = \max\{\delta_n, 0\}$ e $\delta_n^- = -\min\{\delta_n, 0\}$ as partes positiva e negativa de δ_n. Mostre que $0 \leq \delta_n^- \leq g$ e $\delta_n^- \to 0$. Use o teorema da convergência dominada para concluir que $\lim_{n \to \infty} \int \delta_n^- d\lambda = 0$. Mostre em seguida que $\lim_{n \to \infty} \int \delta_n^+ d\lambda = 0$.

c (0,5 ponto) Use o item anterior para mostrar que para qualquer $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$:

$$\lim_{n \to \infty} \left| P_n(A) - \int_A g(\omega)\lambda(d\omega) \right| = 0$$

d (0,25 ponto) Usando o resultado anterior, mostre o seguinte resultado: seja $(X_n)_n$ uma sequência de variáveis aleatórias cujas medidas de probabilidade induzidas sobre $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ admitem densidade $(h_n)_n$ com respeito à medida de Lebesgue λ. Seja X uma variável aleatória cuja probabilidade induzida admite densidade h com respeito a λ. Se $h_n(x) \to h(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$, então $X_n \xrightarrow{d} X$.

Exercício 6 (1,75 pontos) Seja $(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidade. Definimos o completamento de Σ com respeito a $\mathbb{P}$, como a coleção de conjuntos da forma:

$$\mathcal{C}(\Sigma, \mathbb{P}) \coloneqq \{N \cup A : A \in \Sigma,\ N \subseteq B,\ \text{com } B \in \Sigma \text{ e } \mathbb{P}[B] = 0\}\,.$$

Intuitivamente, o completamento de uma σ-álgebra com respeito a uma medida "adiciona" à σ-álgebra subconjuntos de eventos de probabilidade zero.

a (0,75 ponto) Mostre que $\mathcal{C}(\Sigma, \mathbb{P})$ é uma σ-álgebra. *Dica:* Para qualquer $N \subseteq B$, $N^{\complement} = (B \setminus N) \cup B^{\complement}$.

b (0,5 ponto) Considere a seguinte função P^* sobre $\mathcal{C}(\Sigma, \mathbb{P})$.

$$P^*[N \cup A] = \mathbb{P}[A]\,, A \in \Sigma,\ N \subseteq B,\ \text{com } B \in \Sigma \text{ e } \mathbb{P}[B] = 0\,.$$

Mostre que P^* define uma medida de probabilidade sobre $\mathcal{C}(\Sigma, \mathbb{P})$ que coincide com $\mathbb{P}$ nos eventos em Σ. Em outras palavras, P^* é uma extensão de $\mathbb{P}$ a $\mathcal{C}(\Sigma, \mathbb{P})$.

c (0,5 ponto) Seria possível estender $\mathbb{P}$ a $\mathcal{C}(\Sigma, \mathbb{P})$ de outra forma? Por quê?