Probabilidade Estatística

Princípios de Redução de Dados e Elementos da Teoria da Decisão Estatística

Luis Antonio Fantozzi Alvarez

Universidade de São Paulo

O Problema de Inferência Estatística

Ambiente

- Nosso ponto de partida é um espaço mensurável (Ω, Σ).
    - Ω é o espaço amostral.
    - Σ é o espaço de eventos aos quais podemos atribuir probabilidades (σ-álgebra).
- Pesquisador observa uma amostra, dada pela variável aleatória $\boldsymbol{X} := \mathrm{Id}_\Omega$, cuja lei é dada por uma probabilidade P sobre (Ω, Σ) desconhecida.
- O pesquisador postula uma família de leis de probabilidade $\mathcal{P} = \{P_\theta : \theta \in \Theta\}$ candidatas a terem gerado a amostra.
    - Θ é o espaço de parâmetros que indexa a família.
    - À família $\mathcal{P}$ damos o nome de modelo.
- Dizemos que um modelo está bem-especificado se $\exists \theta_0 \in \Theta,\ P = P_{\theta_0}$.
- Notação: $\mathbb{E}_\theta$ denota a expectativa de uma variável aleatória com domínio em (Ω, Σ) com respeito a P_θ.

Amostragem aleatória

- Em diversos contextos, o experimento definido por (Ω, Σ, P) tem a seguinte interpretação: pesquisador possui acesso a uma amostra de n unidades sorteadas ao acaso de uma população de interesse, para os quais ele observa um vetor de k características X_i, $i = 1, \ldots, n$.
- Se população é grande, o conceito adequado para modelar o experimento é o de amostragem aleatória.
  - **Amostragem aleatória**: espaço é $(\prod_{i=1}^{n}(\mathbb{R}^k), \otimes_{i=1}^{n}\mathcal{B}(\mathbb{R}^k), \otimes_{i=1}^{n} G)$.
    - G é a lei de probabilidade sobre $(\mathbb{R}^k, \mathcal{B}(\mathbb{R}^k))$ que reflete a distribuição conjunta das características de interesse na população.
    - Observações $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ são tais que cada X_i tem a mesma distribuição que G, e as observações X_i são independentes entre si (o valor amostrado na i-ésima posição não exibe associação com o valor amostrado em outra posição $j \neq i$)
  - Quando o experimento é definido por amostragem aleatória, modelo se resume a uma família de distribuições para as características de interesse na população.
    - Em outras palavras, modelo é da forma $\mathcal{P} = \{\otimes_{i=1}^{n} G : G \in \mathcal{G}\}$, onde $\mathcal{G}$ é uma família de distribuições em $(\mathbb{R}^k, \mathcal{B}(\mathbb{R}^k))$

Exemplo

- Exemplo: pesquisador observa uma variável escalar, e supõe que tenha sido amostrada de uma distribuição normal com média desconhecida e variância unitária.
  - Quem é $\mathcal{P}$?
  - E se a variância é desconhecida?
  - E se pesquisador possui n observações independentes?

Modelos

- Um modelo $\mathcal{P}$ é dito de dimensão finita quando o espaço de parâmetros pode ser identificado com um subconjunto de $\mathbb{R}^s$, $s \in \mathbb{N}$.
    - Amostragem aleatória de uma população normal com média e variância desconhecidas define um modelo cujo espaço de parâmetros é da forma $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$.
- Um modelo $\mathcal{P}$ é dito de dimensão infinita quando ele não tem dimensão finita.
    - Amostragem aleatória de uma população cuja distribuição admite uma densidade com respeito à medida de Lebesgue simétrica em relação à média define um modelo de dimensão infinita.

Definição de estatística

- Uma estatística é uma transformação mensurável da amostra, i.e. uma função $T : \Omega \mapsto \mathcal{T}$ em que $T^{-1}(B) \in \Sigma$, para todo $B \in \mathcal{S}$, onde $\mathcal{S}$ é uma σ-álgebra sobre o espaço $\mathcal{T}$.
  - Nesse caso $T(\boldsymbol{X})$ define uma variável aleatória com valores em $\mathcal{T}$.

Família dominada

- No que segue, supomso que existe uma medida μ σ-finita tal que todo elemento $P_\theta \in \mathcal{P}$ admite densidade p_θ com respeito a μ (nesse caso, dizemos que a família $\mathcal{P}$ é *dominada*).
  - Para famílias de distribuições "discretas" sobre o espaço $(\Omega, 2^\Omega)$, com Ω é enumerável, μ é a medida de contagem e p_θ são as f.m.p. definidas por $p_\theta(x) = P_\theta(\{x\})$ para todo $x \in \Omega$.
  - Para famílias de distribuições "contínuas" sobre $(\mathbb{R}^s, \mathcal{B}(\mathbb{R}^s))$, μ é a medida de Lebesgue sobre $\mathcal{B}(\mathbb{R}^s)$ e p_θ são as f.d.p.

Condição técnica

- No que segue, vamos supor também que, para qualquer estatística, as distribuições condicionais de $\boldsymbol{X}|T(\boldsymbol{X})$ sob cada P_θ admitem uma probabilidade condicional regular $(A, t) \mapsto P_\theta[\boldsymbol{X} \in A|T(\boldsymbol{X}) = t]$.
  - Para cada $A \in \Sigma$, $\omega \mapsto P_\theta[\boldsymbol{X} \in A|T(\boldsymbol{X}) = T(\omega)]$ é uma versão da probabilidade condicional $P_\theta[A|\sigma(T(\boldsymbol{X}))]$; e para cada $\omega \in \Omega$, $A \mapsto P_\theta[A|T(\boldsymbol{X}) = T(\omega)]$ é uma medida de probabilidade sobre Σ.
  - Essa condição limita a complexidade de (Ω, Σ).
  - Na maior parte dos casos práticos é satisfeita.
  - Condições suficientes em Durrett (2019) (fora do escopo do curso).
- Exemplo: no caso discreto, podemos tomar $P_\theta[\boldsymbol{X} \in A|T(\boldsymbol{X}) = t] = \sum_{a \in A} P_\theta[\{a\}|T(\boldsymbol{X}) = t]$, onde

$$P_\theta[\{a\}|T(\boldsymbol{X}) = t] = \begin{cases} \frac{P_\theta(\{a\})}{P_\theta[\{T(\boldsymbol{X})=t\}]}, & \text{se} \, T(a) = t \text{ e } P_\theta[\{T(\boldsymbol{X}) = t\}] > 0 \\ 0, & \text{se} \, T(a) \neq t \text{ e } P_\theta[\{T(\boldsymbol{X}) = t\}] > 0 \\ P_\theta(\{a\}), & \text{se } P_\theta[\{T(\boldsymbol{X}) = t\}] = 0 \end{cases}$$

Suficiência Estatística

Estatística suficiente

- Uma estatística é tão somente uma transformação (mensurável) da amostra, isto é, uma função $T(\boldsymbol{X})$ tal que $T^{-1}(A) \in \Sigma$ para todo A na σ-álgebra do contradomínio.

Definição

Uma estatística T é dita suficiente para θ se a distribuição condicional de $\boldsymbol{X}|T(\boldsymbol{X})$ não depende de θ, isto é, se existe H tal que:

$$P_\theta[\boldsymbol{X} \in A|T(\boldsymbol{X})] = H(A|T(\boldsymbol{X})), \quad \forall\theta \in \Theta, A \in \Sigma\,.$$

- Uma vez que conhecemos $T(\boldsymbol{X})$, não há mais informação adicional sobre θ na amostra.

-

Exemplo

Suponha que a amostra consista de duas Bernoullis independentes e identicamente distribuídas, com parâmetro $\theta \in (0,1)$ desconhecido. Neste caso, a f.m.p. é:

$$P_\theta[X_1 = x, X_2 = y] = \theta^x(1-\theta)^{1-x}\theta^y(1-\theta)^{1-y}, \quad \forall x, y \in \{0,1\},$$

de onde segue que, para todo $t \in \{0, 1/2, 1\}$.

$$P_\theta[X_1 = x, X_2 = y | X_1 + X_2 = 2t] = \frac{P_\theta[X_1 = x, X_2 = y, X_1 + X_2 = 2t]}{P_\theta[X_1 + X_2 = 2t]} =$$

$$= \frac{\theta^{x+y}(1-\theta)^{2-x-y}\mathbf{1}\{x+y=2t\}}{\binom{2}{2t}\theta^{2t}(1-\theta)^{1-2t}} = \frac{1}{\binom{2}{2t}}\mathbf{1}\{x+y=2t\},$$

de onde concluímos que $(X_1 + X_2)/2$ é suficiente.

Teorema da fatoração de Neyman-Fisher

Teorema

$T(\boldsymbol{X})$ é suficiente para θ se, e somente se, existem funções h_θ, $\theta \in \Theta$, e c tais que, para todo $\theta \in \Theta$:

$$p_\theta(\boldsymbol{x}) = h_\theta(T(\boldsymbol{x}))c(\boldsymbol{x}), \quad \mu\text{-q.t.p.}$$

- Critério conveniente para encontrar uma estatística suficiente.
  - No caso discreto, "μ-q.t.p." pode ser lido como para todo $\boldsymbol{x}$.
  - No caso contínuo, condição pode ser violada num conjunto de medida de Lebesgue zero (por exemplo, conjuntos enumeráveis de pontos).
- Veremos demonstração no caso discreto.
  - Demonstração no caso geral é mais complexo, pois requer resultados adicionais sobre famílias dominadas.

Teorema da fatoração (caso discreto)

No que segue, considere uma família $\mathcal{P}$ sobre o espaçp $(\Omega, 2^{\Omega})$, onde Ω é enumerável.

Demonstração.

$\Longrightarrow$ Suponha que $T(\boldsymbol{X})$ é suficiente. Fixe $x \in \Omega$. Observe que:

$$\begin{aligned} p_\theta(x) = P_\theta[\{x\}] = P_\theta[\{x\} \cap \{T(\boldsymbol{X}) = T(x)\}] = \\ \mathbb{E}_\theta[P_\theta[\{x\}|T(\boldsymbol{X})]\mathbf{1}_{\{T(\boldsymbol{X})=T(x)\}}] = \\ \sum_{\omega\in\Omega} P_\theta[\{x\}|T(\boldsymbol{X}) = T(\omega)]\mathbf{1}_{\{T(\boldsymbol{X})=T(x)\}}(\omega)p_\theta(\{\omega\}) = \\ \underbrace{P_\theta[\{x\}|T(\boldsymbol{X}) = T(x)]}_{c(x)} \underbrace{\sum_{\omega\in\Omega: T(\omega)=T(x)} p_\theta(\{\omega\})}_{=P_\theta[\{T(\boldsymbol{X})=T(x)\}]=h_\theta(T(x))} \end{aligned}$$

$\Longleftarrow$ Suponha que p_θ é fatorável. Considere $\tilde{P}[A|T(\boldsymbol{X}) = t] = \frac{\sum_{a\in A} c(a)\mathbf{1}\{T(a)=t\}}{\sum_{\omega\in\Omega: T(\omega)=t} c(\omega)}$ se $\sum_{\omega\in\Omega: T(\omega)=t} c(\omega) > 0$ e 0 do contrário. Fácil verificar que $\tilde{P}$ define uma probabilidade condicional regular para todo θ. $\square$

Exemplo

Suponha que o pesquisador observe uma amostra iid $X_1, X_2, \ldots, X_n$ de uma distribuiçao exponencial com parâmetro $\lambda > 0$ desconhecido. Neste caso, observe que:

$$p_\lambda(x_1, x_2, \ldots x_n) = \prod_{i=1}^{n} (\lambda e^{-\lambda x} \mathbf{1}\{x > 0\}) =$$

$$= \lambda^n \exp\left(-\lambda \sum_{i=1}^{n} x_i\right) \mathbf{1}\{\min_i x_i > 0\} = h_\lambda\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) c(\boldsymbol{x}),$$

de onde concluímos que $(X_1 + X_2 + \ldots X_n)/n$ é estatística suficiente.

Estatística suficiente minimal

- Observe que o conceito de estatística suficiente só nos informa sobre a capacidade de uma transformação em condensar a informação relevante na amostra sobre θ.
- Este conceito não versa sobre o "tamanho" desta estatística.
  - De fato, a própria amostra, $T(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{X}$, é sempre uma estatística suficiente.
- Note que, se T é estatística suficiente e $T = M \circ U$, então U é estatística suficiente (pois $\sigma(T) \subseteq \sigma(U)$).
  - Estatísticas mais "finas" que uma estatística suficiente são estatísticas suficientes.
- Na outra direção, podemos pensar na estatística suficiente mais "grossa" possível.

Estatística suficiente minimal (cont.)

Definição

Uma estatística T é dita suficiente minimal, se:

1. T é suficiente.
2. Para qualquer outra estatística S suficiente, existe M tal que $T = M \circ S$.

Lema

Considere uma estatística T tal que:

$$T(\boldsymbol{x}) = T(\boldsymbol{y}) \iff \boldsymbol{y} \in D(\boldsymbol{x}),$$

onde

$$D(\boldsymbol{x}) = \{\boldsymbol{y} : p_\theta(\boldsymbol{y}) = p_\theta(\boldsymbol{x}) h(x, y) \quad \forall \theta \in \Theta \text{ e algum } h(x, y) > 0\}.$$

Então T é suficiente minimal.

Exemplo

Suponha que o espaço amostral é $\mathbb{R}_+^n$. Considere uma amostra aleatória de $U[0, \theta]$, $\theta > 0$. Neste caso:

$$p_\theta(x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{\theta^n} \mathbf{1}\{\max_i x_i < \theta\}\,.$$

Pelo critério de fatoração, $X_{(n)} := \max_i X_i$ é suficiente. Vamos mostrar que é minimal suficiente usando o lema anterior. Observe que $D(\boldsymbol{x}) = \{\boldsymbol{y} : y_{(n)} = x_{(n)}\}$. De fato, se $y_{(n)} \neq x_{(n)}$, ao considerar $\theta' = (x_{(n)} + y_{(n)})/2$, teremos que $0 = p_{\theta'}(\boldsymbol{x}) < p_{\theta'}(\boldsymbol{y})$ ou $0 = p_{\theta'}(\boldsymbol{y}) < p_{\theta'}(\boldsymbol{x})$. Segue do lema anterior que $X_{(n)}$ é minimal.

Ancilaridade

Definição

Uma estatística é dita ancilar para θ se sua distribuição não depende de θ, i.e., se existe F tal que:

$$P_\theta[T(X) \in A] = F[A], \quad \forall\theta \in \Theta, A \in \mathcal{S},$$

onde $\mathcal{S}$ é σ-álgebra acoplada ao contradomínio de T.

Exemplo

No modelo linear Gaussiano homocedástico com regressores fixos:

$$\boldsymbol{y}_{n\times 1} \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{Z}\beta, \sigma^2 \mathbb{I}_n),$$

onde posto($\boldsymbol{Z}$) $= k$, $\beta \in \mathbb{R}^k$ desconhecido e $\sigma^2 > 0$ conhecido; veremos em Econometria I que a estatística $S = \hat{\boldsymbol{e}}'\hat{\boldsymbol{e}}$, onde $\hat{\boldsymbol{e}} = \boldsymbol{y} - \boldsymbol{Z}\hat{\beta}_{\text{MQO}}$, é ancilar.

Suficiência completa

- Gostaríamos de que uma estatística suficiente fosse independente de estatísticas ancilares, visto que essas não nos trazem informação de θ.
- Conceito apropriado para isto é o de estatística completa suficiente.

Definição

Uma estatística T é dita completa para θ se, para qualquer f mensurável com valores reais:

$$\mathbb{E}_\theta[f(T)] = 0, \forall \theta \in \Theta \implies \mathbb{P}_\theta[f(T) = 0] = 1, \forall \theta \in \Theta$$

Teorema (Basu)

Uma estatística completa suficiente para θ é independente de qualquer estatística ancilar de θ.

Suficiência completa vs. suficiência minimal

Teorema (Bahadur)

Se U é estatística completa suficiente de dimensão finita, então é suficiente minimal.

- Recíproca **não** é verdadeira: existem estatísticas minimais suficientes de dimensão finita que não são completas (veja Lehmann e Casella, 1998).

Famílias Exponenciais

Família exponencial

Definição

Uma família de distribuições $\mathcal{P} = \{P_\theta : \theta \in \Theta\}$ sobre um espaço mensurável (Ω, Σ) é dita uma família exponencial se:

1. Existe uma medida μ tal que cada elemento $P_\theta \in \mathcal{P}$ admite densidade p_θ com respeito a μ.
2. Existem $\eta : \Theta \mapsto \mathbb{R}^s$, $T : \Omega \mapsto \mathbb{R}^s$, $B : \Theta \mapsto \mathbb{R}$ e $h : \Omega \mapsto \mathbb{R}_+$ tais que:

$$p_\theta(\boldsymbol{x}) = \exp(\eta(\theta)' T(\boldsymbol{x}) - B(\theta)) h(\boldsymbol{x})$$

- Diversas distribuições conhecidas pertecem a esta família: Gamma, Chi-Quadrado, Beta, Normal, Poisson, Negativo-Binomial.
- Propriedade útil: se $\mathcal{P}_1, \ldots, \mathcal{P}_n$ são famílias exponenciais, então $\mathcal{P}^n := \{\otimes_{i=1}^n P_i : P_i \in \mathcal{P}_i\}$ é uma família exponencial.
  - Consequência: a distribuição amostral de uma amostra aleatória de uma família exponencial também constitui uma família exponencial.

Exemplo

Sejam $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)'$ uma amostra aleatória de $N(\mu, \sigma^2)$, onde $\mu \in \mathbb{R}$ e $\sigma^2 > 0$ são desconhecidos. Neste caso, fazendo $\theta = (\mu, \sigma^2)'$, temos:

$$
\begin{aligned}
p_\theta(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(\frac{-(x_i - \mu)^2}{2\sigma^2}\right) = \\
\exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \frac{\mu}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n} x_i - \frac{\mu^2}{2\sigma^2} n\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\right)^n,
\end{aligned} \tag{1}
$$

de onde segue que a família é exponencial com $T(\boldsymbol{x}) = (\sum_{i=1}^{n} x_i^2, \sum_{i=1}^{n} x_i)'$ e $\eta(\theta) = \left(-\frac{1}{2\sigma^2}, \frac{\mu}{\sigma^2}\right)'$.

Definição

Para uma família $\{P_\theta : \theta \in \Theta\}$, dizemos que o parâmetro é identificável se:

$$\theta = \theta' \iff P_\theta = P_{\theta'}$$

- Identificação é o requerimento básico para estimação pontual (mais à frente).
  - Requer a existência de um mapa 1-1 entre parâmetro e distribuição amostral.
- No exemplo anterior, θ é identificado, visto que $f_1(P_\theta) := \mathbb{E}_\theta[X_1] = \mu$ e $f_2(P_\theta) := \mathbb{E}[X_1^2] = \sigma^2 + \mu^2$.
- Por outro lado, se a família paramétrica fosse $\{\mathcal{N}(\theta \vee 0, 1) : \theta \in \mathbb{R}\}$, θ não é identificável.

Parametrização natural de família exponencial

Note que, da definição de família exponencial:

$$p_\theta(\boldsymbol{x}) = \exp(\eta(\theta)' T(\boldsymbol{x}) - B(\theta))h(\boldsymbol{x}), \quad \theta \in \Theta,$$

segue uma reparametrização natural

$$p_{\boldsymbol{\eta}}(\boldsymbol{x}) = \exp(\eta' T(\boldsymbol{x}) - B^*(\boldsymbol{\eta}))h(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{\eta} \in \Xi,$$

onde $\Xi := \{\eta(\theta) : \theta \in \Theta\} \subseteq \mathbb{R}^s$ é o espaço paramétrico natural; e $B^*(\boldsymbol{\eta}) = B(\theta)$ para algum (qualquer) $\theta \in \Theta$ tal que $\eta(\theta) = \boldsymbol{\eta}$

Definição

Uma família exponencial $\{P_\theta : \theta \in \Theta\}$ é dita uma família de posto cheio se sua reparametrização natural é tal que η é identificável e Ξ contém uma bola aberta de $\mathbb{R}^s$.

- No exemplo de amostra aleatória normal, $\Theta = (-\infty, 0) \times \mathbb{R}$, logo a família tem posto cheio.
- $\{N(\mu, \mu^2) : \mu \in \mathbb{R}\}$ não tem posto cheio (família curvada).

Suficiência em famílias exponenciais

Corolário

Numa família exponencial, $T(\boldsymbol{X})$ é uma estatística suficiente.

Corolário

Numa família exponencial de posto cheio, $T(\boldsymbol{X})$ é uma estatística suficiente minimal.

Teorema

Numa família exponencial de posto cheio, $T(\boldsymbol{X})$ é uma estatística suficiente completa.

Elementos de decisão estatística

O problema de decisão estatística

- Considere um experimento estatístico (Ω, Σ, P), e um modelo de leis de probabilidade candidatas para P, $\mathcal{P} = \{P : \theta \in \Theta\}$, com $P = P_{\theta_0}$ para algum $\theta_0 \in \Theta$.
- Suponha que o pesquisador esteja interessado em realizar inferência sobre um parâmetro escalar $\psi(\theta_0) \in \mathbb{R}$.
  - Após observar $\boldsymbol{X} = \mathrm{Id}_\Omega$, pesquisador deve produzir estimativa para $\psi(\theta_0)$.
- A perda que o pesquisador incorre em afirmar um valor c a $\psi(\theta_0)$ quando $\theta_0 = \theta$ é dada por $L(\theta, c)$, com $L : \Theta \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}_+$.
  - Perda quadrática: $L(\theta, c) = (c - \psi(\theta))^2$.
  - Perda absoluta: $L(\theta, c) = |c - \psi(\theta)|$.
- Uma regra de decisão estatística ou estimador é uma transformação mensurável $\delta : \Omega \mapsto \mathbb{R}$.
  - Após observar o valor de $\boldsymbol{X}(\omega)$ realizado, pesquisador reporta a estimativa dada por $\delta(\boldsymbol{X}(\omega))$.
- A perda esperada ou risco da regra de decisão δ, quando $\theta_0 = \theta$, é dada por:

$$R(\theta, \delta) = \mathbb{E}_\theta[L(\theta, \delta(\boldsymbol{X}))]$$

Escolhendo uma regra de decisão

- Dado que desconhecemos o valor verdadeiro de θ_0, uma regra de comunicação ideal δ^* numa classe de regras candidatas Δ deveria ser tal que, para todo $\theta \in \Theta$:

$$\delta^* = \inf_{\delta \in \Delta} R(\theta, \delta)\,,$$

- Infelizmente, se Δ é irrestrita, problema não possuirá, no geral, solução.
    - Por exemplo, sob perda quadrática, para todo $\theta \in \Theta$, a regra de decisão $\delta(\boldsymbol{X}) = \psi(\theta)$ atinge risco zero sob $\theta_0 = \theta$, o que implica que, a não ser em casos extremos em que $\theta \mapsto \psi(\theta)$ é constante ou $\boldsymbol{X}$ é perfeitamente informativo sobre $\psi(\theta)$, a regra ótima δ^* inexistirá.
- Dada a inexistência, no geral, de um δ^* que minimiza o risco uniformemente sobre Θ quando Δ é irrestrito, a literatura estatística propõe dois conjuntos soluções alternativas ao problema
    1. Restringir Δ.
    2. Minimizar o pior risco sobre Θ (estimação minimax) ou um risco médio sobre Θ, onde a média se dá com respeito a uma distribuição sobre Θ (estimadores de Bayes).

Restringindo Δ: estimadores não viciados

- Uma restrição bastante comum à classe de estimadores é de que eles não possuam viés.
- Formalmente, um estimador δ de um parâmetro $\psi(\theta)$ é não viciado numa família $\mathcal{P} = \{P_\theta : \theta \in \Theta\}$ de distribuições candidatas se:

$$\mathbb{E}_\theta[\delta(\boldsymbol{X})] = \psi(\theta), \quad \forall \theta \in \Theta\,.$$

- Um estimador δ de $\psi(\theta)$ é dito não viciado de variância uniformemente mínima (numa família $\mathcal{P}$) se:
  1. δ é não viciado.
  2. para qualquer outro estimador $\tilde{\delta}$ de $\psi(\theta)$ não viciado em $\mathcal{P}$:

$$\mathbb{V}_\theta[\delta(\boldsymbol{X})] \leq \mathbb{V}_\theta[\tilde{\delta}(\boldsymbol{X})], \quad \forall \theta \in \Theta$$

Caracterizando estimadores NVVUM

Um estimador δ é dito de variância finita em $\mathcal{P}$ se $\mathbb{V}_\theta[\delta(\boldsymbol{X})] < \infty$ para todo $\theta \in \Theta$.

Teorema

Um estimador δ de variância finita e não viciado para $\psi(\theta)$ em $\mathcal{P}$ é não viciado de variância uniformemente mínima em $\mathcal{P}$ se, e somente se, para qualquer estimador U de variância finita e não viciado para zero em $\mathcal{P}$:

$$\mathbb{E}_\theta[\delta(\boldsymbol{X})U(\boldsymbol{X})] = 0\,, \quad \forall \theta \in \Theta\,.$$

Corolário

Se um estimador δ de $\psi(\theta)$ com variância finita é não viciado com variância uniformemente mínima em $\mathcal{P}$, então ele é único.

Funções perdas mais gerais

- Estimadores não viciados de variância uniformemente mínima minimizam o risco, sob perda quadrática, uniformemente na classe de estimadores não viciados.
- Será que é possível encontrar estimadores que minimizem o risco uniformemente, na mesma classe, para outras funções perdas?
  - Resposta dada pelo teorema abaixo.

Teorema

Seja δ um estimador não viciado de um parâmetro $\psi(\theta)$ numa família $\mathcal{P}$, e T uma estatística completa suficiente para $\mathcal{P}$. Então:

1. $\phi(\boldsymbol{X}) = \mathbb{E}[\delta | T(\boldsymbol{X})]$ *define um estimador não viciado de $\psi(\theta)$, e o único estimador não viciado de $\psi(\theta)$ que é função de T.*
2. ϕ *minimiza o risco uniformemente na classe de estimadores não viciados de $\psi(\theta)$, para qualquer perda $L(\theta, z)$ convexa no segundo argumento.*
3. *Se ϕ possui risco finito para algum θ e a perda é estritamente convexa no segundo argumento, então ϕ é o único estimador que minimiza o risco uniformemente na classe de estimadores não viciados de $\psi(\theta)$.*

Limite inferior de Crámer-Rao

- Resultados anteriores nos deram dois métodos para se tentar construir um ENVVUM.
  - Encontrar δ resolvendo o "sistema de equações": $\mathbb{E}_\theta[\delta(\boldsymbol{X})] = \psi(\theta)$, $\mathbb{E}_\theta[\delta(\boldsymbol{X})U(\boldsymbol{X})] = 0$ para todo θ e U não viciado para zero (de variância finita).
  - Encontrar um estimador não viciado, uma estatística completa suficiente e calcular a esperança condicional.
- Uma pergunta alternativa é: se temos um estimador não viciado, será que existe uma condição suficiente simples de ser verificada, que quando garantida implica que estimador é ENVVUM?
  - Resposta é afirmativa, e dada pelo limite inferior de Crámer-Rao.
  - Esse limite nos dá a menor variância que um estimador não viciado de um parâmetro em uma família de dimensão finita pode atingir.
  - Limite nem sempre é atingível por um estimador, mas, se for o caso, sabemos que ele é ENNVVUM.

Limite inferior de Crámer-Rao: derivação

- Seja $\mathcal{P} = \{P_\theta : \theta \in \Theta\}$ uma família (dominada) de dimensão finita, com $\Theta \subseteq \mathbb{R}^s$.
- Suponha que, para todo $\theta \in \text{int}(\Theta)$ e $x \in \Omega$, $\tau \mapsto p_\tau(x)$ é continuamente diferenciável em $\tau = \theta$.
- Considere um estimador δ não viciado de um parâmetro escalar $\psi(\theta)$.
- Tome um ponto $\theta \in \text{int}(\Theta)$.
- Considere uma direção $\boldsymbol{e} \in \mathbb{R}^s$, $\boldsymbol{e} \neq \mathbf{0}$.
- Defina a variável aleatória $S_{\theta,\boldsymbol{e}}(x) = \frac{\nabla_\tau p_{\theta_0}(x) \cdot \boldsymbol{e}}{p_\theta(x)}$.
- Observe que, como $\int p_\tau(x)\mu(dx) = 1$ para todo τ, se pudermos diferenciar em τ por dentro da integral, segue que $\mathbb{E}_\theta[S_{\theta,\boldsymbol{e}}(x)] = 0$ e que $\text{cov}_\theta(\delta, S_{\theta,\boldsymbol{e}}) = \int \delta(x)(\nabla_\tau p_\theta(x) \cdot \boldsymbol{e})\mu(dx)$.
- Ademais, como $\int \delta(x) p_\tau(x)\mu(dx) = \psi(\tau)$ para todo τ, se pudermos diferenciar por debaixo da integral, segue que $\text{cov}_\theta(\delta, S_{\theta,\boldsymbol{e}}) = \nabla_\tau \psi(\theta) \cdot \boldsymbol{e}$

Derivação (cont)

- Combinando os fatos anteriores com a desigualdade de Cauchy-Schwarz, temos:

$$\frac{(\partial_\tau \psi(\theta) \cdot \boldsymbol{e})^2}{\mathbb{V}_\theta[S_{\theta,\boldsymbol{e}}]} \leq \mathbb{V}_\theta[\delta]$$

onde $\mathbb{V}_\theta[S_{\theta,\boldsymbol{e}}] = \boldsymbol{e}'\mathbb{V}_\theta\left[\partial_\tau \log p_\theta\right]\boldsymbol{e}$, e $\mathbb{V}_\theta\left[\partial_\tau \log p_\theta\right]$ é a matriz de covariância do vetor aleatório $\partial_\tau \log p_\theta = \frac{\partial_\tau p_\theta}{p_\theta}$.

- Não é difícil mostrar que, se $\mathbb{V}_\theta\left[\partial_\tau \log p_\theta\right]$ tem posto cheio, então, maximizando com respeito a $\boldsymbol{e}$, chegamos a:

$$\mathbb{V}_\theta[\delta] \geq (\partial_\tau \psi(\theta))' I(\theta)^{-1} (\partial_\tau \psi(\theta)),$$

onde $I(\theta) := \mathbb{V}_\theta\left[\partial_\tau \log p_\theta\right]$ é conhecida como informação de Fisher.

  - Invertibilidade de $I(\theta)$ está relacionada com identificabilidade da família $\{P_\theta\}$.
  - Sob condições adicionais de diferenciabilidade, fácil ver que $I(\theta) = -\mathbb{E}_\theta[\frac{\partial^2}{\partial\tau\partial\tau'} \log p_\theta]$.

Referências

Referências

- Casella, George e Roger L Berger (2001). *Statistical inference*. Duxbury.
- Durrett, Rick (2019). *Probability: Theory and Examples*. 5ª ed. Cambridge Series in Statistical and Probabilistic Mathematics. Cambridge University Press. DOI: 10.1017/9781108591034.
- Lehmann, E e George Casella (1998). *Theory of point estimation*. Springer Science & Business Media.
- Lehmann, E e J Romano (2005). *Testing Statistical Hypotheses*. Springer Texts in Statistics. Springer New York. ISBN: 9780387276052. URL: https://books.google.com.br/books?id=K6t5qn-SEp8C.
- Schervish, Mark J. (1995). *Theory of Statistics*. Springer New York. DOI: 10.1007/978-1-4612-4250-5. URL: https://doi.org/10.1007/978-1-4612-4250-5.