

# Propriedades das normas $L_p$

Professor Luís Antonio Fantozzi Alvarez

5 de fevereiro de 2026

Nestas notas, vamos demonstrar algumas propriedades das normas  $L_p$  vistas em aula.

**Proposição 1** (Monotonicidade). *Sejam  $1 \leq p \leq q$ . Se  $X \in L^q(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$ , então  $X \in L^p(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$  e  $\|X\|_p \leq \|X\|_q$ .*

**Observação:** Observe que a desigualdade  $\|X\|_p \leq \|X\|_q$  é trivialmente verdadeira quando  $\|X\|_q = \infty$ . Por isso a proposição cuida do caso em que  $X \in L^q(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$ , pois este é o interessante.

*Demonstração.* Começamos, inicialmente, considerando uma variável aleatória  $X \in L^q(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$  tal que também  $X \in L^p(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$ . Nesse caso, observe que:

$$\mathbb{E}[|X|^q] = \mathbb{E}[|X|^q \mathbf{1}_{\{|X|>0\}}] + \mathbb{E}[\underbrace{|X|^q \mathbf{1}_{\{|X|=0\}}}_{=0\mathbf{1}_\Omega}] = \mathbb{E}[|X|^q \mathbf{1}_{\{|X|>0\}}] = \mathbb{E}[(\phi \circ \tau)(|X|^p)],$$

onde  $\phi : [0, \infty) \mapsto \mathbb{R}$  é definida como  $\phi(z) = z^{q/p}$  e,  $\tau : \mathbb{R} \mapsto [0, \infty)$  é definida como  $\tau(s) = \max\{s, 0\}$ . Observe que, como  $q \geq p$ ,  $\phi$  é convexa e monotônica crescente e que  $\tau$  é convexa. Portanto, um simples argumento revela que a composição  $(\phi \circ \tau) : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$  é convexa,<sup>1</sup> e, como  $\mathbb{E}[|X^p|] < \infty$  por hipótese, podemos aplicar a desigualdade de Jensen para concluir que:

---

<sup>1</sup>De fato, para  $a, b \in \mathbb{R}$  e  $\lambda \in [0, 1]$ :

$$\begin{aligned} (\phi \circ \tau)(\lambda a + (1 - \lambda)b) &= \phi(\tau(\lambda a + (1 - \lambda)b)) \leq \phi(\lambda \tau(a) + (1 - \lambda)\tau(b)) \leq \\ &\quad \lambda \phi(\tau(a)) + (1 - \lambda)\phi(\tau(b)), \\ &= \lambda(\phi \circ \tau)(a) + (1 - \lambda)(\phi \circ \tau)(b) \end{aligned}$$

onde o primeiro passo segue da definição de composição de funções; a desigualdade seguinte decorre da convexidade de  $\tau$  e do fato de que  $\phi$  é monotônica crescente; o terceiro passo segue de que  $\phi$  é convexa; e a última igualdade segue, novamente, da definição de composição de funções.

$$\mathbb{E}[|X|^q] \geq (\phi \circ \tau)(\mathbb{E}[|X|^p]) = (\max\{\mathbb{E}[|X|^p], 0\})^{\frac{q}{p}} = (\mathbb{E}[|X|^p])^{\frac{q}{p}} \implies \|X\|_q \geq \|X\|_p.$$

Para o caso geral, suponha agora somente que  $X \in L^q(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$ . Defina a sequência de variáveis aleatórias,  $X_n := \max\{\min\{X_n, n\}, -n\}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Observe que  $|X_n| \leq n$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ , o que implica que  $\max\{\|X_n\|_p, \|X_n\|_q\} \leq n < \infty$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Portanto, o resultado anterior se aplica, e temos que, para todo  $n \in \mathbb{N}$ :

$$\|X_n\|_p \leq \|X_n\|_q.$$

Observe que  $|X_n| \uparrow |X|$ . Mas então, segue da aplicação do teorema da convergência monótona que:

$$0 \leq |X_n|^p \uparrow |X|^p \implies \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[|X_n|^p] = \mathbb{E}[|X|^p],$$

e

$$0 \leq |X_n|^q \uparrow |X|^q \implies \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[|X_n|^q] = \mathbb{E}[|X|^q],$$

de onde concluímos que:

$$\|X\|_p = \lim_{n \rightarrow \infty} \|X_n\|_p \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|X_n\|_q = \|X\|_q.$$

□

**Proposição 2** (Desigualdade de Hölder). *Seja  $1 \leq p \leq q \leq \infty$ ,  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . Sejam  $X \in L^p(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$  e  $Y \in L^q(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$ . Então  $X \cdot Y \in L^1(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$  e:*

$$|\mathbb{E}[XY]| \leq \mathbb{E}[|XY|] \leq \|X\|_p \|Y\|_q.$$

*Demonstração.* Observe que, no caso em que  $\|Y\|_q = 0$ , a desigualdade é trivialmente verdadeira, visto que:

$$\|Y\|_q = 0 \implies \mathbb{P}[\{Y = 0\}] = 1 \implies \mathbb{P}[|XY| = 0] = \mathbb{P}[XY = 0] = 1,$$

e, portanto:

$$\mathbb{E}[|XY|] = 0,$$

$$\mathbb{E}[XY] = 0,$$

$$\|X\|_p \|Y\|_q = 0,$$

Consideremos, então, o caso em que  $\|Y\|_q > 0$ . Nesse caso,  $\mathbb{E}[|Y|^q]$  e, da nossa discussão sobre densidades da aula anterior, sabemos que o mapa  $\tilde{P} : \Sigma \mapsto [0, 1]$  definido por:

$$\tilde{P}[A] = \int \mathbf{1}_A \frac{|Y|^q}{\mathbb{E}[|Y|^q]} d\mathbb{P}, \quad \forall A \in \Sigma,$$

define uma medida de probabilidade. Mas então, podemos escrever:

$$\mathbb{E}[|XY|] = \int \frac{|X|}{|Y|^{q-1}} |Y|^q d\mathbb{P} = \mathbb{E}[|Y|^q] \int \frac{|X|}{|Y|^{q-1}} \frac{|Y|^q}{\mathbb{E}[|Y|^q]} d\mathbb{P} = \mathbb{E}[|Y|^q] \int |Z| d\tilde{P},$$

onde  $Z := \frac{X}{Y^{q-1}}$ , e a última igualdade segue, crucialmente, da fórmula de integrais de Lebesgue a partir de densidades que demonstramos na aula anterior. Mas então, como  $p \geq 1$ , segue da monotonicidade das normas  $L_p$  demonstradas anteriormente que:

$$\int |Z| d\tilde{P} \leq \left( \int |Z|^p d\tilde{P} \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Mas observe que:

$$\int |Z|^p d\tilde{P} = \int \frac{|X|^p}{|Y|^{(q-1)p}} \frac{|Y|^q}{\mathbb{E}[|Y|^q]} d\mathbb{P} = \frac{1}{\mathbb{E}[|Y|^q]} \int |X|^p |Y|^{q-(q-1)p} d\mathbb{P}.$$

Mas, como  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ , temos que  $p + q = pq$ . Portanto  $q - (q-1)p = 0$ , e obtemos que:

$$\int |Z|^p d\tilde{P} = \frac{1}{\mathbb{E}[|Y|^q]} \int |X|^p d\mathbb{P}.$$

Coletando as desigualdades acima, e usando que  $\frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{p}$ , obtemos que:

$$\mathbb{E}[|XY|] = \mathbb{E}[|Y|^q] \int |Z| d\tilde{P} \leq \frac{\mathbb{E}[|Y|^q]}{\mathbb{E}[|Y|^q]^{\frac{1}{p}}} \|X\|_p = \|X\|_p \|X\|_q.$$

Portanto, concluímos que  $XY$  é integrável se  $X \in L_p(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$  e  $Y \in L_q(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$ . Que  $|\mathbb{E}[XY]| \leq \mathbb{E}[|XY|]$  segue imediatamente da monotonicidade e linearidade de integrais, visto que:  $XY \leq |XY| \implies \mathbb{E}[XY] \leq \mathbb{E}[|XY|]$  e  $-XY \leq |XY| \implies -\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[-XY] \leq \mathbb{E}[|XY|] \implies \mathbb{E}[XY] \geq -\mathbb{E}[|XY|]$ .  $\square$

O conteúdo abaixo é de leitura opcional:

**Uma observação sobre a norma  $L_\infty$**  observe que, na afirmação da desigualde de Hölder, existe a possibilidade de tomar-se  $p$  ou  $q$  iguais a  $\infty$  (e, respectivamente,  $q = 1$  ou  $p = 1$ ). Nós não definimos no que consiste a norma  $L_p$  nesses casos, mas agora estamos munidos das ferramentas para fazê-lo. Observe que, pela monotonicidade das normas  $L^p$ , para uma dada variável aleatória  $X \in m(\Sigma)$ , a sequência de números reais estendidos:

$$(\|X\|_n)_{n \in \mathbb{N}},$$

é monotônica não decrescente, e portanto possui um limite na reta estendida. Definimos como esse limite a norma  $L_\infty$ , isto é:

$$\|X\|_\infty := \lim_{n \rightarrow \infty} \|X\|_n.$$

É imediato ver que a norma  $L_\infty$  satisfaz, por construção, a propriedade de monotonicidade que demonstramos no começo dessas notas e, por esse motivo, a desigualdade de Hölder também se aplica com  $p$  ou  $q$  iguais a  $\infty$ . Notamos, ademais que essa norma possui a seguinte caracterização alternativa.

**Fato 1.**  $\|X\|_\infty = \inf\{C \geq 0 : \mathbb{P}[|X| > C] = 0\}$

*Demonstração.* Primeiramente, observamos que, para qualquer  $C$  tal que  $\mathbb{P}[|X| > C] = 0$ ,

$$|X| \leq C, \text{ } \mathbb{P}\text{-q.c.} \implies \|X\|_n \leq C, \forall n \in \mathbb{N} \implies \|X\|_\infty \leq C.$$

Portanto,  $\|X\|_\infty$  é uma cota inferior de  $\{C \geq 0 : \mathbb{P}[|X| > C] = 0\}$ . Segue, assim, da definição de ínfimo que:

$$\|X\|_\infty \leq \inf\{C \geq 0 : \mathbb{P}[|X| > C] = 0\}.$$

Na outra direção, seja  $U = \inf\{C \geq 0 : \mathbb{P}[|X| > C] = 0\}$ . Consideramos os dois casos possíveis:

- (a)  $U = \infty$ . Nesse caso,  $\{C \geq 0 : \mathbb{P}[|X| > C] = 0\} = \emptyset \implies$  para todo  $C \geq 0$ ,  $\mathbb{P}[|X| > C] > 0$ . Mas então, para um dado  $K \in \mathbb{N}$  arbitrário, temos que:

$$K \mathbf{1}_{\{|X| > K\}} \leq |X| \implies \mathbb{P}[|X| > K]^{\frac{1}{n}} K \leq \|X\|_n, \forall n \in \mathbb{N} \implies K \leq \|X\|_\infty,$$

onde usamos que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}[|X| > K]^{\frac{1}{n}} = 1$ , pois  $\mathbb{P}[|X| > K] = 1$ . Mas, como  $K$  foi arbitrariamente escolhido, segue que, tomando  $K \rightarrow \infty$ ,  $\|X\|_\infty = \infty$ .

- (b)  $U < \infty$ . Nesse caso, para todo  $l \in \mathbb{N}$ ,  $\mathbb{P}[\{X > U - \frac{1}{l}\}] > 0$ , de onde segue, por um argumento análogo ao anterior que:

$$(U + l^{-1})\mathbf{1}_{\{|X| > (U + l^{-1})\}} \leq |X| \implies \mathbb{P}[|X| > (U + l^{-1})]^{\frac{1}{n}}(U + l^{-1}) \leq \|X\|_n, \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\implies (U + l^{-1}) \leq \|X\|_\infty,$$

e, tomado  $l \rightarrow \infty$ , obtemos:

$$U \leq \|X\|_\infty,$$

como desejado.

□

Da caracterização acima, concluímos que a norma  $L_\infty$  é finita se, e somente se,  $X$  é limitada quase-certamente (i.e. se existe  $L \geq 0$  tal que  $\mathbb{P}[\{|X| > L\}] = 0$ ).