

Proabilidade e Estatística

Exercícios sobre Integração e Expectativa

Exercício 1 Seja $(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidade, e $X_n \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$, uma sequência de variáveis aleatórias não negativas.

- a Mostre que $\mathbb{E}[\sum_{n=1}^{\infty} Z_n] = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}[Z_n]$.
- b Mostre que $\mathbb{E}[\sum_{n=1}^{\infty} Z_n] < \infty \implies \mathbb{P}[\{\omega : \sum_{n=1}^{\infty} Z_n(\omega) < \infty\}] = 1$.
- c Mostre que $\mathbb{P}[\{\omega : \sum_{n=1}^{\infty} Z_n(\omega) < \infty\}] = 1 \implies \mathbb{P}[\{\omega : Z_n(\omega) \rightarrow 0\}] = 0$.

Exercício 2 Seja $(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidade, e X uma variável aleatória. Mostre que, para todo $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ mensurável tal que $\mathbb{E}[|f(X)|] < \infty$.

$$\mathbb{E}[f(X)] = \int f(x) \mathbb{P}_X(dx),$$

onde \mathbb{P}_X é a medida de probabilidade induzida por X sobre $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. *Dica:* mostre para funções f simples, depois aproxime para funções não-negativas pelo teorema da convergência monótona, depois use a definição de integral para funções gerais.

Exercício 3 Demonstre a desigualdade de Jensen *estrita*: se X é uma variável aleatória integrável sobre um espaço de probabilidade $(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$, $f : A \mapsto \mathbb{R}$ uma função **estritamente** convexa sobre $A \subseteq \mathbb{R}$ convexo e aberto, com $\mathbb{P}[X \in A] = 1$ e $\mathbb{E}[|X|] < \infty$, $\mathbb{E}[|f(X)|] < \infty$. Se $\mathbb{P}[X \neq \mathbb{E}[X]] > 0$, então:

$$f(\mathbb{E}[X]) < \mathbb{E}[f(X)]$$

Exercício 4 Seja $(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidade. Para $A, B \in \mathcal{L}_2(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$ a covariância entre A e B é definida como:

$$\mathbb{C}(A, B) := \mathbb{E}[AB] - \mathbb{E}[A]\mathbb{E}[B].$$

Para duas variáveis aleatórias X, Y definidas em $(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$, mostre que X é independente de Y se, e somente se, para quaisquer funções $h : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ limitadas e mensuráveis:

$$\mathbb{C}(h(X), g(Y)) = 0.$$

Dica: para a direção “se”, observe que, para todo $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $\mathbb{P}[X^{-1}(B)] = \mathbb{E}[\mathbf{1}_{X^{-1}(B)}] = \mathbb{E}[\mathbf{1}_B(X)]$. Para a outra direção, mostre para funções simples e depois aproxime para funções limitadas por funções-escada.

Exercício 5 Seja $(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$ e $Y \in L^2(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$. Seja \mathcal{G} uma sub- σ -álgebra de Σ .

- a Mostre que $\mathbb{E}[Y|\mathcal{G}] \in L^2(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$.
- b Mostre que $\mathbb{E}[Y|\mathcal{G}]$ é a única (a não ser num evento de probabilidade zero) solução ao problema de minimização:

$$\min_{S \in L^2(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})} \mathbb{E}[(Y - S)^2]$$

- c Mostre que, quando $\mathcal{G} = \{\emptyset, \Omega\}$, $\mathbb{E}[Y|\mathcal{G}] = \mathbb{E}[Y]$, e que, quando $\mathcal{G} = \Sigma$, $\mathbb{E}[Y|\mathcal{G}] = Y$. À luz do item anterior, qual a interpretação desses resultados?
- d Seja $E \in \Sigma$, com $1 > \mathbb{P}[E] > 0$. Tome $\mathcal{G} = \{\emptyset, E, E^c, \Omega\}$. Mostre que a função:

$$g(\omega) = \begin{cases} \frac{\mathbb{E}[Y\mathbf{1}_E]}{\mathbb{P}[E]}, & \text{se } \omega \in E \\ \frac{\mathbb{E}[Y\mathbf{1}_{E^c}]}{\mathbb{P}[E^c]}, & \text{se } \omega \in E^c \end{cases},$$

é uma versão de $\mathbb{E}[Y|\mathcal{G}]$. Qual a interpretação desse resultado, à luz do item (b)?

Exercício 6 Seja $(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$, e X e Y duas variáveis aleatórias reais. Considere $\mathbb{P}_{X,Y}[B] := \mathbb{P}[\{\omega : (X(\omega), Y(\omega)) \in B\}]$, $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$, a medida de probabilidade induzida por (X, Y) em $(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2))$. Dizemos que $\mathbb{P}_{X,Y}$ admite densidade f com respeito a medida de Lebesgue λ^2 em $(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2))$ ¹ se, para todo $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$:

$$\mathbb{P}_{X,Y}[B] = \int f(\omega_1, \omega_2) \mathbf{1}_B(\omega_1, \omega_2) \lambda^2(d\omega),$$

onde, por uma extensão do resultado visto em aula, $\lambda(d\omega)$ pode ser substituída pela integral dupla (de Riemann) quando $(\omega_1, \omega_2) \mapsto f(\omega_1, \omega_2) \mathbf{1}_B(\omega_1, \omega_2)$ for Riemann-integrável.

- a Mostre que $f_1(\omega) := \int f(\omega, y) \lambda(dy)$ define uma densidade para a probabilidade \mathbb{P}_X induzida sobre $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. *Dica:* tome $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ e use o teorema de Fubini para mostrar que $\mathbb{P}_X[A] = \mathbb{P}_{X,Y}[A \times \mathbb{R}] = \int \mathbf{1}_{A \times \mathbb{R}} f d\lambda^2 = \int \mathbf{1}_A f_1 d\lambda_1$.
- b Suponha que $\mathbb{E}[|Y|] < \infty$. Mostre que a função $g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$:

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{f_1(x)} \int y f(y, x) \lambda(dy), & \text{se } f_1(x) > 0 \\ 0, & \text{se } f_1(x) = 0 \end{cases},$$

define uma função de expectativa condicional de Y em X , i.e. que $g(X)$ é uma versão de $\mathbb{E}[Y|X]$. A escolha, na definição de g , do valor 0 quando $f_1(x) = 0$, faz alguma diferença? Por quê?

¹A medida de Lebesgue em \mathbb{R}^2 é igual à medida produto $\lambda \otimes \lambda$ sobre $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$, onde λ é a medida de Lebesgue em $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$

Exercício 7 Seja $(\Omega, 2^\Omega, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidade em que Ω é finito. Defina a *medida de contagem* c sobre $(\Omega, 2^\Omega)$ como, para todo $B \subseteq \Omega$:

$$c(B) = |B| = \sum_{\omega \in \Omega} \mathbf{1}_B(\omega).$$

Mostre que \mathbb{P} admite densidade com respeito a c , e que essa densidade é dada por $g(\omega) = \mathbb{P}[\{\omega\}]$, $\omega \in \Omega$.

Exercício 8 Se $(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidade, e X uma variável aleatória real cuja imagem está contida num intervalo $[a, b]$ de \mathbb{R} . Suponha que a função de distribuição de X , F_X é contínua em $[a, b]$, e diferenciável em (a, b) . Mostre que a função $g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, dada por:

$$g(x) = \begin{cases} F'_X(x), & \text{se } x \in (a, b) \\ 0, & \text{se } x \notin (a, b) \end{cases}$$

define uma densidade de \mathbb{P}_X com respeito à medida de Lebesgue em $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. *Dica:* use o teorema fundamental do cálculo e o lema do π -sistema.