Probabilidade e Estatística
Aula 3 – Convergência estocástica

Luis A. F. Alvarez

24 de janeiro de 2025

Vetores aleatórios

- Seja $(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidade.
- Um vetor aleatório $\boldsymbol{Y} : \Omega \mapsto \mathbb{R}^k$ é uma função tal que cada coordenada $\boldsymbol{Y}_l : \Omega \mapsto \mathbb{R}$, $l = 1, \ldots, k$, é uma variável aleatória real.
- Um vetor aleatório induz uma distribuição de probabilidade sobre $(\mathbb{R}^k, \mathcal{B}(\mathbb{R}^k))$, dada por $\mathbb{P}_{\boldsymbol{Y}}[B] = \mathbb{P}[\boldsymbol{Y}^{-1}(A)]$, $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^k)$.
- Pelo lema do π-sistema, essa distribuição de probabilidade é carectarizada pela função de distribuição $F_{\boldsymbol{Y}} : \mathbb{R}^k \mapsto [0, 1]$, dada por:

$$F_{\boldsymbol{Y}}(\boldsymbol{c}) := \mathbb{P}_{\boldsymbol{Y}}\left[\prod_{l=1}^{k}(-\infty, \boldsymbol{c}_k]\right], \quad \boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^k .$$

Convergência quase-certa

- Seja $(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidade, e $\boldsymbol{Y}_1, \boldsymbol{Y}_2, \ldots$ uma sequência de vetores aleatórios.
- Dizemos que $\boldsymbol{Y}_n$ converge quase-certamente para um vetor aleatório $\boldsymbol{Y}$, denotado por $\boldsymbol{Y}_n \overset{\text{q.c.}}{\to} \boldsymbol{Y}$, se:

$$\mathbb{P}[\{\omega : \boldsymbol{Y}_n(\omega) \nrightarrow \boldsymbol{Y}(\omega)\}] = 0\,.$$

- Sequência de funções $\boldsymbol{Y}_n$ convergem (ponto a ponto), a não ser num conjunto de pontos de probabilidade zero.

Lema

$\boldsymbol{Y}_n \overset{q.c.}{\to} \boldsymbol{Y}$ se, e somente se, para todo $\epsilon > 0$:

$$\mathbb{P}\left[\limsup_n \{\omega : \|\boldsymbol{Y}_n(\omega) - \boldsymbol{Y}(\omega)\| > \epsilon\}\right] = 0\,.$$

Convergência em probabilidade

- Dizemos que $\boldsymbol{Y}_n$ converge em probabilidade para um vetor aleatório $\boldsymbol{Y}$, denotado por $\boldsymbol{Y}_n \stackrel{p}{\to} \boldsymbol{Y}$, se, para todo $\epsilon > 0$:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left[\{\omega : \|\boldsymbol{Y}_n(\omega) - \boldsymbol{Y}(\omega)\| > \epsilon\}\right] = 0\,.$$

Lema

Se $\boldsymbol{Y}_n \stackrel{q.c.}{\to} \boldsymbol{Y}$, então $\boldsymbol{Y}_n \stackrel{p}{\to} \boldsymbol{Y}$.

Convergência em distribuição

- Dizemos que $\boldsymbol{Y}_n$ converge em probabilidade para um vetor aleatório $\boldsymbol{Y}$, denotado por $\boldsymbol{Y}_n \stackrel{p}{\to} \boldsymbol{Y}$, se, para todo $\epsilon > 0$:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left[\{\omega : \|\boldsymbol{Y}_n(\omega) - \boldsymbol{Y}(\omega)\| > \epsilon\}\right] = 0\,.$$

Lema

Se $\boldsymbol{Y}_n \stackrel{q.c.}{\to} \boldsymbol{Y}$, então $\boldsymbol{Y}_n \stackrel{p}{\to} \boldsymbol{Y}$.