Leis dos grandes números

Professor Luís Antonio Fantozzi Alvarez

12 de fevereiro de 2026

Nestas notas, veremos duas versões das leis dos grandes números vistas em aula:

Proposição 1 (Lei forte de Kolmogorov)**.** *Seja $X_1, X_2, \ldots$ uma sequência de variáveis aleatórias iid em $L^1(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$. Então existe $\mu \in \mathbb{R}$ tal que $\mathbb{E}[X_j] = \mu$ para todo $j \in \mathbb{N}$ e, quando $n \to \infty$:*

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j \overset{q.c.}{\to} \mu\,.$$

Demonstração. Para a primeira parte, observe que, pelo segundo exercício da Lista 2, para todo $i \in \mathbb{N}$.

$$\mathbb{E}[X_i] = \int x\mathbb{P}_{X_i}(dx)\,,$$

onde $\mathbb{P}_{X_i}$ é a lei induzida por X_i sobre $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Mas, pelo lema do π-sistema, como $F_{X_i} = F_{X_j}$ para todo i e j (visto que a sequência é identicamente distribuída), então $\mathbb{P}_{X_i} = \mathbb{P}_{X_j}$ para todo i e j; de onde concluímos que $\mathbb{E}[X_i] = \mathbb{E}[X_j]$ para todo i, j.

Para a segunda parte, vamos fazer a demonstração supondo que a sequência está em $L^2(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$.[1] Nesse caso, observe que, por um argumento similar ao do parágrafo precedente, $\infty > \mathbb{V}[X_1] = \mathbb{E}[X_1^2] - \mathbb{E}[X_1]^2 = \mathbb{E}[X_i^2] - \mathbb{E}[X_i]^2 = \mathbb{V}[X_i]$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Nós também notamos que é suficiente provar a convergência quase-certa para um sequência de variáveis aleatórias iid em $L^2(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$ **não negativas** (i.e. tais que $X_i \geq 0$ para todo $i \in \mathbb{N}$). De fato, suponha que tenhamos provado a lei forte para o caso não negativo. Para o caso geral, sempre podemos escrever:

[1] O caso geral pode ser obtido adaptando-se o argumento a seguir (embora isso não seja tão imediato como se possa imaginar).

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^+ - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^- \,.$$

Como $(X_i)_i$ é iid, não é difícil ver que $(X_i^+)_i$ é iid, e $(X_i^-)_i$ é iid.[2] Ademais como os X_i estão em $L^2(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$, então $\max\{\mathbb{E}[(X_i^+)^2], \mathbb{E}[(X_i^-)^2]\} \leq \mathbb{E}[X_i^2] < \infty$, i.e. os X_i^+ e X_i^- também estão em $L^2(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$. Mas então a lei forte se aplica às sequências de variáveis aleatórias não negativas $(X_i^+)_i$ e $(X_i^-)_i$, i.e.:

$$\mathbb{P}\left[\left\{\omega : \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^+(\omega) \to \mathbb{E}[X_1^+]\right\}\right] = 1\,,$$

$$\mathbb{P}\left[\left\{\omega : \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^-(\omega) \to \mathbb{E}[X_1^-]\right\}\right] = 1\,,$$

de onde obtemos que:

$$1 = \mathbb{P}\left[\left\{\omega : \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^+(\omega) \to \mathbb{E}[X_1^+]\right\} \cap \left\{\omega : \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^-(\omega) \to \mathbb{E}[X_1^-]\right\}\right] \leq \mathbb{P}\left[\left\{\omega : \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i(\omega) \to \mathbb{E}[X_1]\right\}\right]$$

mostrando a lei forte no caso geral. Portanto, de agora em diante, vamos supor que $X_i \geq 0$ para todo i.

Fixe $\alpha > 1$ e, para um $\epsilon > 0$, defina sequência de eventos:

$$E_k^\epsilon := \left\{\left|\frac{1}{\lceil \alpha^k \rceil}\sum_{i=1}^{\lceil \alpha^k \rceil}(X_i - \mu)\right| > \epsilon\right\}, \quad k \in \mathbb{N}\,,$$

onde, para $x \in \mathbb{R}_+$, $\lceil x \rceil$ consiste na operação " arrendondar para cima", i.e. $\lceil x \rceil$ é o menor número natural z tal que $z \geq x$.

Observe que, pela desigualdade de Markov, temos:

$$\mathbb{P}[E_k^\epsilon] \leq \frac{\mathbb{V}[\frac{1}{\lceil \alpha^k \rceil}\sum_{i=1}^{\lceil \alpha^k \rceil} X_i]}{\epsilon^2}$$

A demonstração então se valerá do seguinte fato, cuja demonstração consiste em uma simples manipulação algébrica:

[2] Isso segue da observação de que, para todo $i \in \mathbb{N}$ e $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. $(X_i^+)^{-1}(A) = X_i^{-1}(h^{-1}(A))$, onde $h : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ é a transformação dada por $h(x) = \max\{x, 0\}$. Como h é contínua, h é $\mathcal{B}(\mathbb{R})$-mensurável, e portanto $h^{-1}(A) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Mas então $(X_i^+)^{-1}(A) \in \sigma(X_i)$, e, como A foi escolhido arbitrariamente, $\sigma(X_i^+) \subseteq \sigma(X_i)$.

Fato 1. *Seja* $Y_1, \dots, Y_l$ *uma sequência de variáveis aleatórias em* $L^2(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$, *então:*

$$\mathbb{V}\left[\sum_{i=1}^{l} Y_i\right] = \sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{l} \operatorname{cov}(Y_i, Y_j)\,.$$

e, além disso, do fato abaixo, cuja demonstração encontra-se no Williams (Teorema 7.1; um resultado similar foi por vocês demonstrado na lista 2).

Fato 2. *Sejam* X *e* Z *variáveis aleatórias independentes em* $L^2(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$, *então:*

$$\operatorname{cov}(X, Z) = 0\,.$$

Combinando os dois fatos acima, temos que:

$$\mathbb{P}[E_k^\epsilon] \le \frac{\sum_{i=1}^{\lceil \alpha^k \rceil} \mathbb{V}[X_i]}{\epsilon^2 \lceil \alpha^k \rceil^2} = \frac{\mathbb{V}[X_1]}{\epsilon^2 \lceil \alpha^k \rceil} \le \frac{\mathbb{V}[X_1]}{\epsilon^2 \alpha^k}$$

Mas então, como $|1/\alpha| < 1$, segue que:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}[E_k^\epsilon] \le \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mathbb{V}[X_1]}{\epsilon^2 \alpha^k} < \infty\,,$$

de onde concluímos, por aplicação do primeiro lema de Borel-Cantelli, que:

$$\mathbb{P}\left[\limsup_k E_k^\epsilon\right] = 0\,,$$

e como $\epsilon > 0$ foi escolhido arbitrariamente, obtemos, da caracterização de convergência quase certa vista em aula, que:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{\lceil \alpha^k \rceil} \sum_{i=1}^{\lceil \alpha^k \rceil} X_i = \mu\,, \quad \mathbb{P}\text{-quase certamente}\,.$$

Para concluir, notamos o seguinte fato. Para todo $n \in \mathbb{N}$, é possível encontrar um $k(n) \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tal que: $\alpha^{k(n)} \le n \le \alpha^{k(n)+1}$.[3] Observe que essa sequência é tal que $\lim_{n\to\infty} k(n) = \infty$ e satisfaz as seguintes propriedades:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha^{k(n)}}{\lceil \alpha^{k(n)} \rceil} = 1$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha^{k(n)+1}}{\lceil \alpha^{k(n)+1} \rceil} = 1$$

[3] De fato, isso é consequência direta de $\alpha > 1$ e $\lim_{s\to\infty} \alpha^s = \infty$.

e que além disso, as seguintes implicações são imediatas:

$$\frac{\alpha^{k(n)}}{n} \leq 1, \quad \forall n \implies \limsup_{n\to\infty} \frac{\alpha^{k(n)}}{n} \leq 1$$

$$\frac{\alpha^{k(n)}}{n} \geq \frac{1}{\alpha}, \quad \forall n \implies \liminf_{n\to\infty} \frac{\alpha^{k(n)}}{n} \geq \frac{1}{\alpha}$$

Ademais, como os X_i são não negativos, temos, para todo $n \in \mathbb{N}$, que:

$$\begin{aligned}
\frac{\alpha^{k(n)}}{n} \frac{\lceil \alpha^{k(n)} \rceil}{\alpha^{k(n)}} \frac{\sum_{i=1}^{\lceil \alpha^{k(n)} \rceil} X_i}{\lceil \alpha^{k(n)} \rceil} &= \\
\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{\lceil \alpha^{k(n)} \rceil} X_i &\leq \\
\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i &\leq \\
\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{\lceil \alpha^{k(n)+1} \rceil} X_i &= \\
\frac{\sum_{i=1}^{\lceil \alpha^{k(n)+1} \rceil} X_i}{\lceil \alpha^{k(n)+1} \rceil} \frac{\lceil \alpha^{k(n)+1} \rceil}{\alpha^{k(n)+1}} \frac{\alpha^{k(n)+1}}{n} &
\end{aligned}$$

Dos fatos acima, não é difícil ver que a seguinte inclusão de eventos é verdadeira:

$$\left\{ \omega : \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\lceil \alpha^k \rceil} \sum_{i=1}^{\lceil \alpha^k \rceil} X_i(\omega) = \mu \right\} \subseteq$$

$$\left\{ \omega : \frac{1}{\alpha}\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i(\omega) \leq \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i(\omega) \leq \alpha\mu \right\} =: A_\alpha$$

e que, portanto, como a probabilidade do evento incluso é 1, $\mathbb{P}[A_\alpha] = 1$. Mas então, considerando uma sequência $\alpha_j = (1 + \frac{1}{j})$ para todo $j \in \mathbb{N}$, observe que:

$$\cap_{j\in\mathbb{N}} A_{\alpha_j} \subseteq \left\{ \omega : \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} X_i = \mu \right\},$$

e, como $\mathbb{P}\left[\cap_{j\in\mathbb{N}} A_{\alpha_j}\right] = 1$, segue a conclusão desejada. $\square$

Proposição 2 (Lei fraca de Markov)**.** *Seja* $X_1, X_2, \ldots$ *uma sequência de variáveis aleatórias em* $L^2(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$*, não correlacionadas e tais que* $\sup_{j\in\mathbb{N}} \mathbb{V}[X_j] < \infty$*. Se* $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n \mathbb{E}[X_j]$ *existe em* $\mathbb{R}$*, então, denotando esse limite por* μ*, temos, quando* $n \to \infty$*:*

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j \xrightarrow{p} \mu\,.$$

Demonstração. Fixe $\epsilon > 0$. Da desigualdade de Markov, temos que:

$$\mathbb{P}\left[\left\{\omega : \left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i(\omega) - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}[X_i]\right| > \frac{\epsilon}{2}\right\}\right] \leq 4\frac{\mathbb{V}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i\right]}{\epsilon^2} \leq 4\frac{\sup_{j\in\mathbb{N}}\mathbb{V}[X_j]}{n\epsilon^2}\,.$$

O limite superior acima vai a zero quando $n \to \infty$; portanto, pelo lema do sanduíche, $\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}\left[\left\{\omega : \left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i(\omega) - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \mathbb{E}[X_i]\right| > \epsilon\right\}\right] = 0$. Para concluir, note que, como $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{j=1}\mathbb{E}[X_j]$ existe e é um número real μ, existe um K^* tal que, para todo $n \geq K^*$:

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{j=1}\mathbb{E}[X_j] - \mu\right| < \frac{\epsilon}{2}\,,$$

e portanto, para todo $n \geq K^*$, segue da desigualdade triangular a seguinte inclusão:

$$\left\{\omega : \left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i(\omega) - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}[X_i]\right| \leq \frac{\epsilon}{2}\right\} \subseteq \left\{\omega : \left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i(\omega) - \mu\right| \leq \epsilon\right\}$$

de onde concluímos que, para $n \geq K^*$:

$$\mathbb{P}\left[\left\{\omega : \left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i(\omega) - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}[X_i]\right| > \frac{\epsilon}{2}\right\}\right] \geq \mathbb{P}\left[\left\{\omega : \left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i(\omega) - \mu\right| > \epsilon\right\}\right]\,,$$

e portanto, $\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}\left[\left\{\omega : \left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i(\omega) - \mu\right| > \epsilon\right\}\right] = 0$. Como ϵ foi escolhido de forma arbitrária, obtemos a conclusão desejada. □