Probabilidade e Estatística

Aula 1 – Medida e Probabilidade

Luis A. F. Alvarez

22 de janeiro de 2025

Formalizando a noção de incerteza

- A Estatística está fundamentalmente associada à tomada de decisão sob incerteza.
  - Qual a “melhor” estimativa para o salário médio de uma população, com base em uma amostra dessa população?
  - Como quantificar minha incerteza acerca de uma projeção da taxa de inflação futura?
- A linguagem formal para se expressar a incerteza é aquela das probabilidades.
  - Probabilidades são funções matemáticas que quantificam a “confiança” que possuímos sobre diferentes eventos e que respeitam certos axiomas.
- A definição rigorosa das probabilidades e o estudo de suas propriedades são um pré-requisito operacional para a Estatística.
  - Ocuparemo-nos com o estudo formal da teoria das probabilidades na primeira parte do curso.

σ-ÁLGEBRA E ESPAÇO MENSURÁVEL

No que segue, seja Ω um espaço genérico.

Definição

Uma σ-álgebra em Ω é uma família Σ de subconjuntos de Ω, i.e. $\Sigma \subseteq 2^{\Omega}$, que satisfaz as seguintes propriedades:

1. $\emptyset, \Omega \in \Sigma$.
2. Se $A \in \Sigma$, então $A^{\complement} \in \Sigma$.
3. Se $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \Sigma^{\mathbb{N}}$, então $\cup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \Sigma$.

- Uma σ-álgebra é uma família de subconjuntos de Ω fechada sob complementação e uniões enumeráveis de elementos de Σ.
  - Também fechada por intersecções enumeráveis.
- Exemplos de σ-álgebras: $\{\emptyset, \Omega\}$ e 2^{Ω}.
- O par (Ω, Σ) é conhecido como espaço mensurável.

σ-Álgebra gerada e σ-Álgebra de Borel

- De modo geral, σ-álgebras são objetos difíceis de serem manipulados.
- Por esse motivo, dado um subconjunto "tratável" $\mathcal{I} \subseteq 2^{\Omega}$, definimos como $\sigma(\mathcal{I})$ a menor (no sentido da relação de inclusão $\subseteq$) σ-álgebra em Ω que contém $\mathcal{I}$.
  - Isto, é, se $\mathcal{A}$ é qualquer outra σ-álgebra que contém $\mathcal{I}$, então $\sigma(\mathcal{I}) \subseteq \mathcal{A}$
  - Objeto está sempre bem-definido, visto que:

$$\sigma(\mathcal{I}) = \cap_{\mathcal{A} \subseteq 2^{\Omega} : \mathcal{A} \text{ é } \sigma\text{-álgebra}} \mathcal{A} \neq \emptyset\,.$$

- Se Ω é um espaço topológico (i.e. espaço munido da noção de aberto ou fechado), denotamos por $\mathcal{B}(\Omega)$, a menor σ-álgebra que contém os conjuntos abertos de Ω, também conhecida como σ-álgebra de Borel.
  - $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ é a menor σ-álgebra que contém os abertos em $\mathbb{R}^d$ (abertos induzidos pela distância Euclidiana).

Lema

Seja $\mathcal{I} = \{\prod_{j=1}^{d}(-\infty, c_j] : c \in \mathbb{R}^d\}$, *então:* $\sigma(\mathcal{I}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$.

Medida e espaço de medida

Definição

Seja (Ω, Σ) um espaço mensurável. Uma função $\mu : \Sigma \mapsto [0, \infty]$ é uma medida sobre (Ω, Σ) se:

- $\mu(\emptyset) = 0$.
- Seja $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \Sigma^{\mathbb{N}}$ tal que $A_i \cap A_j = \emptyset$ para todo $i \neq j$, então:

$$\mu\left(\cup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

.

- Tripla (Ω, Σ, μ) é conhecida como espaço de medida.
- Medida é dita **finita** se $\mu(\Omega) < \infty$.
- Medida é dita $\boldsymbol{\sigma}$**-finita** se $\Omega = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$, com $\{A_n \in \Sigma : n \in \mathbb{N}\}$ disjuntos e $\mu(A_n) < \infty$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Probabilidade e espaço de probabilidade

Definição

Seja (Ω, Σ) um espaço mensurável. Uma função $\mathbb{P} : \Sigma \mapsto [0,1]$ é uma medida de probabilidade sobre (Ω, Σ) se:

- $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$ e $\mathbb{P}(\Omega) = 1$.
- Seja $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \Sigma^{\mathbb{N}}$ tal que $A_i \cap A_j = \emptyset$ para todo $i \neq j$, então:

$$\mathbb{P}\left(\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n)$$

.

- Uma probabilidade nada mais é do que uma medida finita com a normalização $\mathbb{P}[\Omega] = 1$.
- Tripla $(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$ é conhecida como espaço de probabilidade.

Interpretação e o porquê da construção

- Em Probabilidade, o espaço Ω é usualmente conhecido como espaço amostral.
  - Espaço onde mora a incerteza do problema em questão.
- Natureza ou acaso sorteia um ponto $\omega \in \Omega$ de acordo com a lei de probabilidade $\mathbb{P}$.
  - Elementos $E \in \Sigma$ são os eventos, aos quais prescrevemos uma probabilidade $\mathbb{P}[E]$ de que o sorteio resulte em $\omega \in \Omega$.
- Uma dúvida que pode restar é por que não definimos a probabilidade sobre 2^Ω. Em outras palavras, por que temos de fazer recurso ao conceito de σ-álgebra?
  - Embora, em espaços simples (por exemplo, quando Ω é finito), possamos definir uma probabilidade sobre a σ-álgebra 2^Ω, este não é o caso para espaços mais complexos, como $(0, 1]$.
  - Nesses casos, **não** é possível definir uma probabilidade de forma consistente sobre todos os subconjuntos de $(0, 1]$.

Propriedades básicas de medidas

Proposição

Seja (Ω, Σ, μ) *um espaço de medida. Então:*

1. *Se* $A, B \in \Sigma$, *com* $A \subseteq B$, *então,* $\mu(A) \leq \mu(B)$.
   - *Além disso, se* $\mu(A) < \infty$, $\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$.

2. *Seja* $A_1, \ldots, A_n \in \Sigma$, *então* $\mu(\cup_{i=1}^n A_i) \leq \sum_{i=1}^n \mu(A_i)$.

3. *Seja* $(F_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \Sigma^{\mathbb{N}}$, *com* $F_i \subseteq F_{i+1}$ *para todo* $i \in \mathbb{N}$, *então* $\mu(F_n) \uparrow \mu(\cup_{i\in\mathbb{N}} F_i)$.

4. *Seja* $(F_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \Sigma^{\mathbb{N}}$, *com* $F_i \supseteq F_{i+1}$ *para todo* $i \in \mathbb{N}$ *e* $\mu(F_1) < \infty$, *então* $\mu(F_n) \downarrow \mu(\cap_{i\in\mathbb{N}} F_i)$.

5. *Seja* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \Sigma^{\mathbb{N}}$, *então* $\mu[\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n] \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu[A_n]$.

π-SISTEMA

- Seja (Ω, Σ) um espaço mensurável, e μ_1 e μ_2 duas medidas sobre Σ.
- Em alguns casos, estamos interessados em verificar se $\mu_1 = \mu_2$.
  - No entanto, verificar se $\mu_1(A) = \mu_2(A)$ para todo $A \in \Sigma$ pode ser complicado.
- O resultado abaixo nos mostra que é suficiente verificar a igualdade em um subconjunto menor de eventos.

Definição

Um π-sistema em Ω é uma família $\mathcal{I}$ de subconjuntos de Ω, i.e. $\mathcal{I} \subseteq 2^{\Omega}$, que satisfaz:

$$I_1, I_2 \in \mathcal{I} \implies I_1 \cap I_2 \in \mathcal{I}$$

Lema

(Lema do π-sistema) Seja (Ω, Σ) um espaço mensurável, μ_1 e μ_2 duas medidas sobre Σ, e $\mathcal{I}$ um π-sistema tal que $\Sigma = \sigma(\mathcal{I})$. Se $\mu_1(I) = \mu_2(I)$ para todo $I \in \mathcal{I}$ e $\mu_1(\Omega) = \mu_2(\Omega) < \infty$, então:

$$\mu_1 = \mu_2$$

O espaço de probabilidade $((0,1], \mathcal{B}(0,1], \mathsf{Leb})$

- Um espaço de probabilidade bastante importante é aquele em que o espaço amostral é $(0,1]$, dotado da σ-álgebra de Borel $\mathcal{B}(0,1]$, e a medida de probabilidade é a medida uniforme ou de Lebesgue em $(0,1]$, que é caracterizada (i.e. unicamente definida) por:

$$\mathsf{Leb}(0,c] = c, \quad c \in [0,1]\,.$$

  - Note que, pelo lema do π-sistema, é suficiente conhecer Leb no conjunto de intervalos $\mathcal{I} = \{(0,c], c \in [0,1]\}$ para caracterizá-la, visto que qualquer outra medida de probabilidade que coincida nesse conjunto, coincidirá em $\mathcal{B}(0,1] = \sigma(\mathcal{I})$.

- Existência do espaço $((0,1], \mathcal{B}(0,1], \mathsf{Leb})$ será demonstrada por vocês na lista.

Quase certamente e infinitamente frequente

- Seja $(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidade.
- Dizemos que uma afirmação $a : \Omega \mapsto \{V, F\}$ vale $\mathbb{P}$-quase certamente se $S_a := \{\omega \in \Omega : a(\omega) = V\}$ é mensurável (i.e. $S_a \in \Sigma$) e:

$$\mathbb{P}[S_a] = 1$$

- Seja $(E_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \Sigma^{\mathbb{N}}$ uma sequência de eventos. Damos o nome E_n inifinitamente frequente ao evento

$$\limsup_{n\to\infty} E_n := \cap_{n\in\mathbb{N}} \cup_{k\geq n} E_k$$

- De onde vem o nome? Observe que:

$$\omega \in \cap_{n\in\mathbb{N}} \cup_{k\geq n} E_k \iff \forall n \in \mathbb{N}, \exists k \geq n, \omega \in E_k$$

Lema

Seja $(E_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \Sigma^{\mathbb{N}}$ uma sequência de eventos.

1. *Se $\mathbb{P}[E_n] = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}[\cap_{n\in\mathbb{N}} E_n] = 1$.*
2. *(Primeiro lema de Borel-Cantelli) Se $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}[E_n] < \infty$, $\mathbb{P}[\limsup_{n\to\infty} E_n] = 0$.*

Função mensurável e variável aleatória

Sejam (Ω_1, Σ_1) e (Ω_2, Σ_2) espaços mensuráveis. Uma função $f : \Omega_1 \mapsto \Omega_2$ é dita Σ_1/Σ_2-mensurável se:

$$f^{-1}(B) \in \Sigma_1, \quad \forall B \in \Sigma_2$$

Nesse contexto, dizemos que uma função $X : \Omega_1 \mapsto \mathbb{R}$ é uma variável aleatória (real) se ela for $\Sigma_1/\mathcal{B}(\mathbb{R})$-mensurável, isto é:

$$X^{-1}(B) \in \Sigma_1, \quad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

Além disso, dizemos que uma função com valores na reta estendida $Y : \Omega_1 \mapsto \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$ é uma variável aleatória (real) estendida se ela for $\Sigma_1/\mathcal{B}(\mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\})$-mensurável, isto é:

$$Y^{-1}(B) \in \Sigma_1, \quad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\})$$

Variável aleatória: interpretação

- Uma variável aleatória real é tão somente uma transformação mensurável do espaço onde mora a incerteza para os números reais.
  - Requerimento de mensurabilidade é o mínimo que precisamos para calcularmos probabilidades aos eventos associados com esta variável.
  - Variáveis aleatórias reais estendidas são importantes quando trabalhamos com limites.
- Dado um espaço mensurável (Ω, Σ), denotaremos o espaço de variáveis aleatórias reais com domínio em Ω e Σ-mensuráveis por $m(\Sigma)$.

Verificação da mensurabilidade

Lema

Sejam (Ω_1, Σ_1) *e* (Ω_2, Σ_2) *espaços mensuráveis. Considere uma função* $f : \Omega_1 \mapsto \Omega_2$. *Se* $f^{-1}(I) \in \Sigma_1$ *para todo* $I \in \mathcal{I}$, *com* $\sigma(\mathcal{I}) = \Sigma_2$, *então* f *é mensurável.*

Corolário

Um mapa $X : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ *é uma variável aleatória real se:*
$X^{-1}(-\infty, c] = \{\omega : X(w) \leq c\} \in \Sigma, \quad \forall c \in \mathbb{R}$.

Mensurabilidade: propriedades

Lema

Considere um espaço mensurável (Ω, Σ)*:*

1. *Sejam* $X_1, X_2 \in m(\Sigma)$ *e* $\lambda \in \mathbb{R}$*, então* $\lambda X_1, X_1 + X_2, X_1 \cdot X_2 \in m(\Sigma)$.
2. *Seja* $Y \in m(\Sigma)$*,* $f \in m(\mathcal{B}(\mathbb{R}))$*, então* $f \circ Y \in m(\Sigma)$.
3. *Seja* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *uma sequência de elementos de* $m(\Sigma)$*, então:*

$$\inf_{n\in\mathbb{N}} X_n, \ \liminf_{n\to\infty} X_n, \ \limsup_{n\to\infty} X_n$$

   são variáveis aleatórias reais estendidas.

σ-Álgebra gerada

- Seja (Ω, Σ) um espaço mensurável, e X uma variável aleatória.
- Definimos a σ-álgebra gerada por X, denotada por $\sigma(X)$, como a menor sub-σ-álgebra de Σ tal que X é $\sigma(X)$-mensurável.
  - Fácil mostrar que $\sigma(X) = \{X^{-1}(B) : B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$.
- De modo mais geral, dada uma coleção de variáveis aleatórias $\{X_\theta : \theta \in \Theta\}$ com domínio em Ω, denotamos por $\sigma(\{X_\theta : \theta \in \Theta\})$ a menor σ-álgebra contida em Σ tal que cada X_θ, $\theta \in \Theta$, é mensurável.

Proposição

Sejam $X_1, \ldots, X_n \in m(\Sigma)$. Então $Y \in m(\sigma(X_1, \ldots, X_n))$ se, e somente se, existir uma $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)/\mathcal{B}(\mathbb{R})$-mensurável tal que $Y = f(X_1, \ldots, X_n)$.

Lei de probabilidade induzida e função de distribuição

- Seja $(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidade, e X uma variável aleatória.
- Observe que X induz uma medida de probabilidade $\mathcal{L}_X$ sobre $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, dada por $\mathcal{L}_X(B) := \mathbb{P}[\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\}] = \mathbb{P}[X^{-1}(B)]$, $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.
    - A essa medida de probabilidade costumamos dar o nome de lei (de probabilidade) de X
- Pelo lema do π-sistema, para conhecer $\mathcal{L}_X$, basta conhecermos as probabilidades associadas aos eventos $\mathcal{L}_X(-\infty, c]$, $c \in \mathbb{R}$.
    - À função $F_X(c) = \mathcal{L}_X(-\infty, c]$, $c \in \mathbb{R}$ damos o nome de função de distribuição de X.

Proposição

Seja F_X uma função de probabilidade de uma variável aleatória X definida num espaço de probabilidade. Então:

1. $F_X(c) \in [0, 1]$ $\forall c$ *e* $c \leq c' \implies F_X(c) \leq F_X(c')$.
2. $\lim_{c \to -\infty} F_X(c) = 0$ *e* $\lim_{c \to -\infty} F_X(c) = 1$.
3. *F_X é contínua à direita e os limites à esquerda existem.*

Construção reversa

- A proposição anterior nos mostra que a função de distribuição de uma variável aleatória X satisfaz as propriedades 1-3 discutidas anteriormente.
- Uma pergunta reversa é se, dada uma função F com as propriedades 1-3 anteriores, é possível definir um espaço de probabilidade e uma variável aleatória X com função de distribuição F.
  - Afirmação é verdadeira, e sua construção é conhecida como representação de Skorokhod.
  - Construção depende da capacidade do espaço de probabilidade $([0,1], \mathcal{B}[0,1], \text{Leb})$.

Independência

- Seja $(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidade.
- Uma coleção $\{\mathcal{G}_j\}_{j \in \mathcal{C}}$ de sub-σ-álgebras de Σ é dita independente se, para toda coleção de eventos $G_j \in \mathcal{G}_j$, $j \in \mathcal{C}$, e quaisquer $j_1, j_2, \ldots, j_k \in \mathcal{C}$ *distintos*, com $k < \infty$:

$$\mathbb{P}[G_{j_1} \cap G_{j_2} \cap \ldots \cap G_{j_k}] = \prod_{l=1}^{k} \mathbb{P}[G_{j_l}],$$

- Uma coleção de variáveis aleatórias $\{\mathcal{X}_j\}_{j \in \mathcal{C}}$ é independente se $\{\sigma(X_j)\}_{j \in \mathcal{C}}$ são independentes.
- Uma coleção de eventos $\{E_j\}_{j \in \mathcal{C}}$ é independente se a sequência de σ-álgebras "simples" $\{\{\emptyset, E_j, E_j^{\complement}, \Omega\}\}_{j \in \mathcal{C}}$ é independente.
  - Essa definição concorda com a nossa noção "básica" de independência.

Verificação da Independência

Lema

Sejam $\mathcal{I}$ e $\mathcal{J}$ dois π-sistemas. Se

$$\mathbb{P}[I \cap J] = \mathbb{P}[I]\mathbb{P}[J], \quad \forall I \in \mathcal{I}, J \in \mathcal{J}\,,$$

então $\sigma(\mathcal{I})$ e $\sigma(\mathcal{J})$ são independentes.

Corolário

Variáveis aleatórias $(X_i)_{i=1}^n$ são independentes se, para todo $c_i, c_2, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$:

$$\mathbb{P}[\cap_{i=1}^n \{\omega \in \Omega : X_i(\omega) \leq c\}] = \prod_{i=1}^n \mathbb{P}[\{\omega \in \Omega : X_i(\omega) \leq c_i\}]$$

Segundo lema de Borel-Cantelli

Lema

Sejam $E_1, E_2, \ldots$ uma sequência de eventos independentes. Se:
$\sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}[E_i] = \infty$ *então* $\mathbb{P}[\limsup_n E_n] = 1$.