

# PROBABILIDADE E ESTATÍSTICA

## AULA 1 – MEDIDA E PROBABILIDADE

Luis A. F. Alvarez

12 de janeiro de 2026

# FORMALIZANDO A NOÇÃO DE INCERTEZA

- A Estatística está fundamentalmente associada à tomada de decisão sob incerteza.
  - Qual a “melhor” estimativa para o salário médio de uma população, com base em uma amostra dessa população?
  - Como quantificar minha incerteza acerca de uma projeção da taxa de inflação futura?
- A linguagem formal para se expressar a incerteza é aquela das probabilidades.
  - Probabilidades são funções matemáticas que quantificam a “confiança” que possuímos sobre diferentes **eventos** e que respeitam certos axiomas.
- A definição rigorosa das probabilidades e o estudo de suas propriedades são um pré-requisito operacional para a Estatística.
  - Ocuparemos com o estudo formal da teoria das probabilidades na primeira parte do curso.

# $\sigma$ -ÁLGEBRA E ESPAÇO MENSURÁVEL

No que segue, seja  $\Omega$  um espaço genérico.

## DEFINIÇÃO

Uma  $\sigma$ -álgebra em  $\Omega$  é uma família  $\Sigma$  de subconjuntos de  $\Omega$ , i.e.  $\Sigma \subseteq 2^\Omega$ , que satisfaz as seguintes propriedades:

1.  $\emptyset, \Omega \in \Sigma$ .
2. Se  $A \in \Sigma$ , então  $A^c \in \Sigma$ .
3. Se  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \Sigma^{\mathbb{N}}$ , então  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \Sigma$ .

- Uma  $\sigma$ -álgebra é uma família de subconjuntos de  $\Omega$  fechada sob complementação e uniões enumeráveis de elementos de  $\Sigma$ .
  - Também fechada por intersecções enumeráveis.
- Exemplos de  $\sigma$ -álgebras:  $\{\emptyset, \Omega\}$  e  $2^\Omega$ .
  - Seja  $A \subseteq \Omega$ ,  $A \notin \{\emptyset, \Omega\}$ . Também é  $\sigma$ -álgebra  $\{\emptyset, A, A^c, \Omega\}$ .
- O par  $(\Omega, \Sigma)$  é conhecido como **espaço mensurável**.

## $\sigma$ -ÁLGEBRA GERADA E $\sigma$ -ÁLGEBRA DE BOREL

- De modo geral,  $\sigma$ -álgebras são objetos difíceis de serem manipulados.
- Por esse motivo, dado um subconjunto “tratável”  $\mathcal{I} \subseteq 2^\Omega$ , definimos como  $\sigma(\mathcal{I})$  a menor (no sentido da relação de inclusão  $\subseteq$ )  $\sigma$ -álgebra em  $\Omega$  que contém  $\mathcal{I}$ .
  - Isto, é, se  $\mathcal{A}$  é qualquer outra  $\sigma$ -álgebra que contém  $\mathcal{I}$ , então  $\sigma(\mathcal{I}) \subseteq \mathcal{A}$
  - Objeto está sempre bem-definido, visto que:

$$\sigma(\mathcal{I}) = \bigcap_{\mathcal{A} \subseteq 2^\Omega: \mathcal{A} \text{ é } \sigma\text{-álgebra e } \mathcal{A} \supseteq \mathcal{I}} \mathcal{A} \neq \emptyset.$$

- Se  $\Omega$  é um espaço topológico (i.e. espaço munido da noção de aberto ou fechado), denotamos por  $\mathcal{B}(\Omega)$  a menor  $\sigma$ -álgebra que contém os conjuntos abertos de  $\Omega$ , também conhecida como  $\sigma$ -álgebra de Borel.
  - $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$  é a menor  $\sigma$ -álgebra que contém os abertos em  $\mathbb{R}^d$  (abertos induzidos pela distância Euclidiana).

### LEMA

Seja  $\mathcal{I} = \{\prod_{j=1}^d (-\infty, c_j] : c \in \mathbb{R}^d\}$ , então:  $\sigma(\mathcal{I}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ .

# MEDIDA E ESPAÇO DE MEDIDA

## DEFINIÇÃO

Seja  $(\Omega, \Sigma)$  um espaço mensurável. Uma função  $\mu : \Sigma \mapsto [0, \infty]$  é uma medida sobre  $(\Omega, \Sigma)$  se:

- $\mu(\emptyset) = 0$ .
- Seja  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \Sigma^{\mathbb{N}}$  tal que  $A_i \cap A_j = \emptyset$  para todo  $i \neq j$ , então:

$$\mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

- Tripla  $(\Omega, \Sigma, \mu)$  é conhecida como espaço de medida.
- Medida é dita **finita** se  $\mu(\Omega) < \infty$ .
- Medida é dita  **$\sigma$ -finita** se  $\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ , com  $\{A_n \in \Sigma : n \in \mathbb{N}\}$  disjuntos e  $\mu(A_n) < \infty$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

# PROBABILIDADE E ESPAÇO DE PROBABILIDADE

## DEFINIÇÃO

Seja  $(\Omega, \Sigma)$  um espaço mensurável. Uma função  $\mathbb{P} : \Sigma \mapsto [0, 1]$  é uma medida de **probabilidade** sobre  $(\Omega, \Sigma)$  se:

- $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$  e  $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ .
- Seja  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \Sigma^{\mathbb{N}}$  tal que  $A_i \cap A_j = \emptyset$  para todo  $i \neq j$ , então:

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n)$$

- Uma probabilidade nada mais é do que uma medida finita com a normalização  $\mathbb{P}[\Omega] = 1$ .
- Tripla  $(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$  é conhecida como espaço de probabilidade.

# INTERPRETAÇÃO E O PORQUÊ DA CONSTRUÇÃO

- Em Probabilidade, o espaço  $\Omega$  é usualmente conhecido como **espaço amostral**.
  - Espaço onde mora a incerteza do problema em questão.
- Natureza ou acaso sorteia um ponto  $\omega \in \Omega$  de acordo com a lei de probabilidade  $\mathbb{P}$ .
  - Elementos  $E \in \Sigma$  são os **eventos**, aos quais prescrevemos uma probabilidade  $\mathbb{P}[E]$  de que o sorteio resulte em  $\omega \in E$ .
- Uma dúvida que pode restar é por que não definimos a probabilidade sobre  $2^\Omega$ . Em outras palavras, por que temos de fazer recurso ao conceito de  $\sigma$ -álgebra?
  - Embora, em espaços simples (por exemplo, quando  $\Omega$  é finito), possamos definir uma probabilidade sobre a  $\sigma$ -álgebra  $2^\Omega$ , este não é o caso para espaços mais complexos, como  $(0, 1]$ .
  - Nesses casos, **não** é possível definir uma probabilidade de forma consistente sobre todos os subconjuntos de  $(0, 1]$ .

# PROPRIEDADES BÁSICAS DE MEDIDAS

## PROPOSIÇÃO

Seja  $(\Omega, \Sigma, \mu)$  um espaço de medida. Então:

1. Se  $A, B \in \Sigma$ , com  $A \subseteq B$ , então,  $\mu(A) \leq \mu(B)$ .
  - Além disso, se  $\mu(A) < \infty$ ,  $\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$ .
2. Seja  $A_1, \dots, A_n \in \Sigma$ , então  $\mu(\cup_{i=1}^n A_i) \leq \sum_{i=1}^n \mu(A_i)$ .
3. Seja  $(F_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \Sigma^{\mathbb{N}}$ , com  $F_i \subseteq F_{i+1}$  para todo  $i \in \mathbb{N}$ , então  $\mu(F_n) \uparrow \mu(\cup_{i \in \mathbb{N}} F_i)$ .
4. Seja  $(F_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \Sigma^{\mathbb{N}}$ , com  $F_i \supseteq F_{i+1}$  para todo  $i \in \mathbb{N}$  e  $\mu(F_1) < \infty$ , então  $\mu(F_n) \downarrow \mu(\cap_{i \in \mathbb{N}} F_i)$ .
5. Seja  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \Sigma^{\mathbb{N}}$ , então  $\mu[\cup_{n \in \mathbb{N}} A_n] \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu[A_n]$ .

## $\pi$ -SISTEMA

- Seja  $(\Omega, \Sigma)$  um espaço mensurável, e  $\mu_1$  e  $\mu_2$  duas medidas sobre  $\Sigma$ .
- Em alguns casos, estamos interessados em verificar se  $\mu_1 = \mu_2$ .
  - No entanto, verificar se  $\mu_1(A) = \mu_2(A)$  para todo  $A \in \Sigma$  pode ser complicado.
- O resultado abaixo nos mostra que é suficiente verificar a igualdade em um subconjunto menor de eventos.

### DEFINIÇÃO

Um  $\pi$ -sistema em  $\Omega$  é uma família  $\mathcal{I}$  de subconjuntos de  $\Omega$ , i.e.  $\mathcal{I} \subseteq 2^\Omega$ , que satisfaz:

$$I_1, I_2 \in \mathcal{I} \implies I_1 \cap I_2 \in \mathcal{I}$$

### LEMA

*(Lema do  $\pi$ -sistema) Seja  $(\Omega, \Sigma)$  um espaço mensurável,  $\mu_1$  e  $\mu_2$  duas medidas sobre  $\Sigma$ , e  $\mathcal{I}$  um  $\pi$ -sistema tal que  $\Sigma = \sigma(\mathcal{I})$ . Se  $\mu_1(I) = \mu_2(I)$  para todo  $I \in \mathcal{I}$  e  $\mu_1(\Omega) = \mu_2(\Omega) < \infty$ , então:*

$$\mu_1 = \mu_2$$

## O ESPAÇO DE PROBABILIDADE $((0, 1], \mathcal{B}(0, 1], \text{Leb})$

- Um espaço de probabilidade bastante importante é aquele em que o espaço amostral é  $(0, 1]$ , dotado da  $\sigma$ -álgebra de Borel  $\mathcal{B}(0, 1]$ , e a medida de probabilidade é a **medida uniforme ou de Lebesgue** em  $(0, 1]$ , que é **caracterizada** (i.e. unicamente definida) por:

$$\text{Leb}(0, c] = c, \quad c \in [0, 1].$$

- Note que, pelo lema do  $\pi$ -sistema, é suficiente conhecer  $\text{Leb}$  no conjunto de intervalos  $\mathcal{I} = \{(0, c], c \in [0, 1]\}$  para caracterizá-la, visto que qualquer outra medida de probabilidade que coincida nesse conjunto, coincidirá em  $\mathcal{B}(0, 1] = \sigma(\mathcal{I})$ .
- **Existência** do espaço  $((0, 1], \mathcal{B}(0, 1], \text{Leb})$  será demonstrada por vocês na lista.

## QUASE CERTAMENTE E INFINITAMENTE FREQUENTE

- Seja  $(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$  um espaço de probabilidade.
- Dizemos que uma afirmação  $a : \Omega \mapsto \{V, F\}$  vale  $\mathbb{P}$ -quase certamente se  $S_a := \{\omega \in \Omega : a(\omega) = V\}$  é mensurável (i.e.  $S_a \in \Sigma$ ) e:

$$\mathbb{P}[S_a] = 1$$

- Seja  $(E_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \Sigma^{\mathbb{N}}$  uma sequência de eventos. Damos o nome  $E_n$  **ininfinitamente frequente** ao evento

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} E_n := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{k \geq n} E_k$$

- De onde vem o nome? Observe que:

$$\omega \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{k \geq n} E_k \iff \forall n \in \mathbb{N}, \exists k \geq n, \omega \in E_k$$

### LEMA

Seja  $(E_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \Sigma^{\mathbb{N}}$  uma sequência de eventos.

1. Se  $\mathbb{P}[E_n] = 1$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\mathbb{P}[\bigcap_{n \in \mathbb{N}} E_n] = 1$ .
2. (Primeiro lema de Borel-Cantelli) Se  $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}[E_n] < \infty$ ,  $\mathbb{P}[\limsup_{n \rightarrow \infty} E_n] = 0$ .

# FUNÇÃO MENSURÁVEL E VARIÁVEL ALEATÓRIA

Sejam  $(\Omega_1, \Sigma_1)$  e  $(\Omega_2, \Sigma_2)$  espaços mensuráveis. Uma função  $f : \Omega_1 \mapsto \Omega_2$  é dita  $\Sigma_1/\Sigma_2$ -mensurável se:

$$f^{-1}(B) \in \Sigma_1, \quad \forall B \in \Sigma_2$$

Nesse contexto, dizemos que uma função  $X : \Omega_1 \mapsto \mathbb{R}$  é uma **variável aleatória (real)** se ela for  $\Sigma_1/\mathcal{B}(\mathbb{R})$ -mensurável, isto é:

$$X^{-1}(B) \in \Sigma_1, \quad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

Além disso, dizemos que uma função com valores na reta estendida  $Y : \Omega_1 \mapsto \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$  é uma **variável aleatória (real) estendida** se ela for  $\Sigma_1/\mathcal{B}(\mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\})$ -mensurável, isto é:

$$Y^{-1}(B) \in \Sigma_1, \quad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\})$$

# VARIÁVEL ALEATÓRIA: INTERPRETAÇÃO

- Uma variável aleatória real é tão somente uma transformação mensurável do espaço onde mora a incerteza para os números reais.
  - Requerimento de mensurabilidade é o mínimo que precisamos para calcularmos probabilidades aos eventos associados com esta variável.
  - Variáveis aleatórias reais estendidas são importantes quando trabalhamos com limites.
- Dado um espaço mensurável  $(\Omega, \Sigma)$ , denotaremos o espaço de variáveis aleatórias reais com domínio em  $\Omega$  e  $\Sigma$ -mensuráveis por  $m(\Sigma)$ .

# VERIFICAÇÃO DA MENSURABILIDADE

## LEMA

*Sejam  $(\Omega_1, \Sigma_1)$  e  $(\Omega_2, \Sigma_2)$  espaços mensuráveis. Considere uma função  $f : \Omega_1 \mapsto \Omega_2$ . Se  $f^{-1}(I) \in \Sigma_1$  para todo  $I \in \mathcal{I}$ , com  $\sigma(\mathcal{I}) = \Sigma_2$ , então  $f$  é mensurável.*

## COROLÁRIO

*Um mapa  $X : \Omega \mapsto \mathbb{R}$  é uma variável aleatória real se:*  
$$X^{-1}(-\infty, c] = \{\omega : X(\omega) \leq c\} \in \Sigma, \quad \forall c \in \mathbb{R}.$$

# MENSURABILIDADE: PROPRIEDADES

## LEMA

Considere um espaço mensurável  $(\Omega, \Sigma)$ :

1. Sejam  $X_1, X_2 \in m(\Sigma)$  e  $\lambda \in \mathbb{R}$ , então  $\lambda X_1, X_1 + X_2, X_1 \cdot X_2 \in m(\Sigma)$ .
2. Seja  $Y \in m(\Sigma)$ ,  $f \in m(\mathcal{B}(\mathbb{R}))$ , então  $f \circ Y \in m(\Sigma)$ .
3. Seja  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  uma sequência de elementos de  $m(\Sigma)$ , então:

$$\inf_{n \in \mathbb{N}} X_n, \liminf_{n \rightarrow \infty} X_n, \limsup_{n \rightarrow \infty} X_n$$

são variáveis aleatórias reais estendidas.

## $\sigma$ -ÁLGEBRA GERADA

- Seja  $(\Omega, \Sigma)$  um espaço mensurável, e  $X$  uma variável aleatória.
- Definimos a  $\sigma$ -álgebra gerada por  $X$ , denotada por  $\sigma(X)$ , como a menor sub- $\sigma$ -álgebra de  $\Sigma$  tal que  $X$  é  $\sigma(X)$ -mensurável.
  - Fácil mostrar que  $\sigma(X) = \{X^{-1}(B) : B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$ .
- De modo mais geral, dada uma coleção de variáveis aleatórias  $\{X_\theta : \theta \in \Theta\}$  com domínio em  $\Omega$ , denotamos por  $\sigma(\{X_\theta : \theta \in \Theta\})$  a menor  $\sigma$ -álgebra contida em  $\Sigma$  tal que cada  $X_\theta$ ,  $\theta \in \Theta$ , é mensurável.

### PROPOSIÇÃO

*Sejam  $X_1, \dots, X_n \in m(\Sigma)$ . Então  $Y \in m(\sigma(X_1, \dots, X_n))$  se, e somente se, existir uma  $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$   $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)/\mathcal{B}(\mathbb{R})$ -mensurável tal que  $Y = f(X_1, \dots, X_n)$ .*

# LEI DE PROBABILIDADE INDUZIDA E FUNÇÃO DE DISTRIBUIÇÃO

- Seja  $(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$  um espaço de probabilidade, e  $X$  uma variável aleatória.
- Observe que  $X$  induz uma medida de probabilidade  $\mathcal{L}_X$  sobre  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ , dada por  $\mathcal{L}_X(B) := \mathbb{P}[\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\}] = \mathbb{P}[X^{-1}(B)]$ ,  $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ .
  - A essa medida de probabilidade costumamos dar o nome de lei (de probabilidade) de  $X$
- Pelo lema do  $\pi$ -sistema, para conhecer  $\mathcal{L}_X$ , basta conhecermos as probabilidades associadas aos eventos  $\mathcal{L}_X(-\infty, c]$ ,  $c \in \mathbb{R}$ .
  - À função  $F_X(c) = \mathcal{L}_X(-\infty, c]$ ,  $c \in \mathbb{R}$  damos o nome de **função de distribuição de  $X$** .

## PROPOSIÇÃO

*Seja  $F_X$  uma função de distribuição de uma variável aleatória  $X$  definida num espaço de probabilidade. Então:*

1.  $F_X(c) \in [0, 1] \ \forall c \in \mathbb{R}$ ; e  $c \leq c' \implies F_X(c) \leq F_X(c')$ .
2.  $\lim_{c \rightarrow -\infty} F_X(c) = 0$  e  $\lim_{c \rightarrow +\infty} F_X(c) = 1$ .
3.  $F_X$  é contínua à direita e os limites à esquerda existem.

# CONSTRUÇÃO REVERSA

- A proposição anterior nos mostra que a função de distribuição de uma variável aleatória  $X$  satisfaz as propriedades 1-3 discutidas anteriormente.
- Uma pergunta reversa é se, dada uma função  $F$  com as propriedades 1-3 anteriores, é possível definir um espaço de probabilidade e uma variável aleatória  $X$  com função de distribuição  $F$ .
  - Afirmação é verdadeira, e sua construção é conhecida como [representação de Skorokhod](#).
  - Construção depende da existência do espaço de probabilidade  $([0, 1], \mathcal{B}[0, 1], \text{Leb})$ .

# INDEPENDÊNCIA

- Seja  $(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$  um espaço de probabilidade.
- Uma coleção  $\{\mathcal{G}_j\}_{j \in \mathcal{C}}$  de sub- $\sigma$ -álgebras de  $\Sigma$  é dita independente se, para toda coleção de eventos  $G_j \in \mathcal{G}_j$ ,  $j \in \mathcal{C}$ , e quaisquer  $j_1, j_2, \dots, j_k \in \mathcal{C}$  distintos, com  $k < \infty$ :

$$\mathbb{P}[G_{j_1} \cap G_{j_2} \cap \dots \cap G_{j_k}] = \prod_{l=1}^k \mathbb{P}[G_{j_l}],$$

- Uma coleção de variáveis aleatórias  $\{X_j\}_{j \in \mathcal{C}}$  é independente se  $\{\sigma(X_j)\}_{j \in \mathcal{C}}$  são independentes.
- Uma coleção de eventos  $\{E_j\}_{j \in \mathcal{C}}$  é independente se a sequência de  $\sigma$ -álgebras “simples”  $\{\{\emptyset, E_j, E_j^c, \Omega\}\}_{j \in \mathcal{C}}$  é independente.
  - Essa definição concorda com a nossa noção “básica” de independência.

# VERIFICAÇÃO DA INDEPENDÊNCIA

## LEMA

*Sejam  $\mathcal{I}$  e  $\mathcal{J}$  dois  $\pi$ -sistemas. Se*

$$\mathbb{P}[I \cap J] = \mathbb{P}[I]\mathbb{P}[J], \quad \forall I \in \mathcal{I}, J \in \mathcal{J},$$

*então  $\sigma(\mathcal{I})$  e  $\sigma(\mathcal{J})$  são independentes.*

## COROLÁRIO

*Variáveis aleatórias  $(X_i)_{i=1}^n$  são independentes se, para todo  $c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ :*

$$\mathbb{P}[\cap_{i=1}^n \{\omega \in \Omega : X_i(\omega) \leq c_i\}] = \prod_{i=1}^n \mathbb{P}[\{\omega \in \Omega : X_i(\omega) \leq c_i\}]$$

## SEGUNDO LEMA DE BOREL-CANTELLI

### LEMA

*Sejam  $E_1, E_2, \dots$  uma sequência de eventos independentes. Se:*  
 $\sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}[E_i] = \infty$  *então*  $\mathbb{P}[\limsup_n E_n] = 1$ .