Proabilidade e Estatística

Exercícios sobre Convergência Estocástica

Exercício 1 Considere o espaço de probabilidade $(\{0,1\}, 2^{\{0,1\}}, \mathbb{P})$, com $\mathbb{P}[\{0\}] = 1/2$. Considere a sequência de variáveis aleatórias $X_n = \mathbf{1}_{\{1\}}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $X = \mathbf{1}_{\{0\}}$. Mostre que $X_n \xrightarrow{d} X$, mas que não há convergência em probabilidade de X_n a X.

Exercício 2 Considere o espaço de probabilidade $([0,1], \mathcal{B}[0,1], \lambda)$, com λ a medida uniforme. Considere a sequência de variáveis aleatórias:

$$\begin{aligned}
X_1 &= \mathbf{1}_{[0,1]} \\
X_2 &= \mathbf{1}_{[0,1]} + \mathbf{1}_{[0,1/2]} \\
X_3 &= \mathbf{1}_{[0,1]} + \mathbf{1}_{[1/2,1]} \\
X_4 &= \mathbf{1}_{[0,1]} + \mathbf{1}_{[0,1/3]} \\
X_5 &= \mathbf{1}_{[0,1]} + \mathbf{1}_{[1/3,2/3]} \\
X_6 &= \mathbf{1}_{[0,1]} + \mathbf{1}_{[2/3,1]} \\
X_7 &= \mathbf{1}_{[0,1]} + \mathbf{1}_{[0,1/4]} \\
&\vdots
\end{aligned}$$

a Mostre que, para todo $\omega \in [0,1]$, a sequência $(X_n(\omega))_{n\in\mathbb{N}}$ **não converge**. Conclua que não X_n não converge quase certamente.

b Mostre que $X_n \xrightarrow{p} X_1$.

Exercício 3 Seja X_n uma sequência de variáveis aelatórias, que converge em distribuição a uma variável aleatória X. Mostre que, se a função distribuição F_X de X é contínua, então:

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{s\in(-\infty,\infty)} |F_{X_n}(s) - F_X(s)| = 0\,.$$

Dica: considere $k \in \mathbb{N}$ e use continuidade para encontrar pontos $s_1, s_2, \ldots, s_k$ tais que $F_X(s_j) = \frac{j}{k+1}$. Use esses pontos para limitar por cima o supremo.

Exercício 4 No que segue, sejam X_n e Y_n duas sequências de variáveis aleatórias definidas num mesmo espaço de probabilidade, e a_n e b_n duas sequências de números reais. Mostre que:

1. $X_n = O_P(1)$ se e somente se existe uma sequência de números reais $\epsilon_n \uparrow \infty$ tais que $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}[|X_n| > \epsilon_n] = 0$.
2. Se $X_n = O_P(a_n)$ e $a_n \downarrow 0$, então $Y_n = o_P(1)$.

3. Se $X_n = o_P(a_n)$, então $Y_n = O_P(a_n)$.
4. Se $X_n = O_P(a_n)$ e $Y_n = O_P(b_n)$ então $X_nY_n = O_P(a_nb_n)$. e $X_nY_n = O_P(\max\{a_n, b_n\})$.
5. Se, para $r > 0$, $\mathbb{E}[|X_n|^r] < \infty$ para todo $n \in \mathbb{N}$ então $X_n = O_P(\|X_n\|_r)$. *Dica:* use a desigualdade de Markov.

Exercício 5 Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_n$ duas variáveis aleatórias definidas num mesmo espaço de probabilidade. Mostre que essas variáveis aleatórias são independentes se, e somente se, definindo o vetor aleatório $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)'$, a função caractéristica de $\boldsymbol{X}$ satisfaz:

$$\phi_{\boldsymbol{X}}(s) = \prod_{i=1}^{n} \phi_{X_i}(s_i)\,, \quad \forall s \in \mathbb{R}^n\,.$$

Exercício 6 Sejam $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)'$ um vetor de variáveis aleatórias definidas no mesmo espaço de probabilidade. Dizemos que $\boldsymbol{X}$ segue distribuição normal com média $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^n$ e matriz de variância-covariância $\Sigma \in \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} : A \text{ positiva semidefinida}\}$, denotado por $\boldsymbol{X} \sim \mathcal{N}(\mu, \boldsymbol{\Sigma})$ se a medida induzida $\mathbb{P}_{\boldsymbol{X}}$ admite densidade (com respeito à medida de Lebesgue em $\mathbb{R}^n$) dada por:

$$f(\boldsymbol{s}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}\sqrt{\det(\Sigma)}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\boldsymbol{s}-\boldsymbol{\mu})'\Sigma(\boldsymbol{s}-\boldsymbol{\mu})\right)\,.$$

Nesse caso, é possível mostrar que $\mathbb{E}[X_j] = \boldsymbol{\mu}_j$ e $\Sigma_{i,j} = \mathbb{C}(\boldsymbol{X}_i, \boldsymbol{X}_j)$ para todo $i, j = 1, \ldots, n$.

a Mostre que $X_1, \ldots, X_n$ são independentes se, e somente se, $\mathbb{C}(\boldsymbol{X}_i, \boldsymbol{X}_j) = 0$ para $i \neq j$. *Dica:* a função característica de $\boldsymbol{X}$ é $\boldsymbol{s} \mapsto \exp(\boldsymbol{\mu}'\boldsymbol{s} + (1/2)\boldsymbol{s}'\Sigma\boldsymbol{s})$.

b A equivalência anterior também é verdadeira pra qualquer distribuição não normal?

Exercício 7 Seja $\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2, \ldots$ uma sequência de vetores aleatórios k-dimensionais iid com $\mathbb{V}[\boldsymbol{X}_{1,l}] < \infty$, para $l = 1\ldots, k$. Denote por $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^k$ o vetor com j-ésima entrada dada por $\boldsymbol{\mu}_j = \mathbb{E}[\boldsymbol{X}_{1,j}]$ e Σ a matriz $k \times k$ com entrada (i, j) dada por $\Sigma_{i,j} = \mathbb{C}(\boldsymbol{X}_{1,i}, \boldsymbol{X}_{1,j})$ Use o dispositivo de Crámer-Wold para mostrar que, quando $n \to \infty$:

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{n} (\boldsymbol{X}_j - \boldsymbol{\mu}) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(\boldsymbol{0}, \Sigma)$$