Exercícios sobre Redução de Dados

Exercício 1 Seja $\boldsymbol{X}$ um vetor aleatório k-dimensional com distribuição normal $\mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$. Mostre que, para qualquer matriz A de tamanho $s \times k$, $A\boldsymbol{X} \sim N(A\boldsymbol{\mu}, A\boldsymbol{\Sigma}A')$. *Dica:* use a função característica de uma normal.

Exercício 2 Considere o experimento dado pela observação de $n \geq 2$ variáveis aleatórias normais independentes, X_1,X_2,..., X_n com parâmetro de média μ comum desconhecido e parâmetro de variância σ^2 **conhecido**.

a Qual é o modelo $\mathcal{P}$?

b Mostre que $T(X_1, \dots, X_n) = \frac{X_1+X_2+\dots+X_n}{n}$ é uma estatística completa suficiente em $\mathcal{P}$.

c Mostre que $\hat{S}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - T(X_1,\dots,X_n))^2}{n-1}$ é ancilar em $\mathcal{P}$. *Dica:* proceda indutivamente, começando de $n = 2$.

d Conclua que, para todo valor possível de μ, $T(X_1, \dots, X_n)$ é independente de $\hat{S}^2$.

Exercício 3 Considere o experimento dado pela observação de n variáveis aleatórias independentes com distribuição $U[0, \theta]$, com $\theta > 0$ desconhecido.

a Qual é o modelo $\mathcal{P}$?

b Mostre que $X_{(n)} \coloneqq \max_{1 \leq i \leq n} X_i$ é estatística suficiente para $\mathcal{P}$.

c Mostre que a lei de probabilidade induzida por $X_{(n)}$ admite densidade com respeito à medida de Lebesgue λ em $\mathbb{R}_+$ dada por:

$$g_\theta(z) \coloneqq \frac{nz^{n-1}}{\theta^n}\mathbf{1}_{[0,\theta]}(z)$$

d Mostre que, para qualquer transformação $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ tal que $\mathbb{E}_\theta[f(X_{(n)})] = 0$ para todo $\theta > 0$, devemos ter que:

$$\int t^{n-1} f^+(t)\mathbf{1}_{[0,\theta]}\lambda(dt) = \int t^{n-1} f^-(t)\mathbf{1}_{[0,\theta]}\lambda(dt)\,.$$

Pela extensão do lema do π-sistema vista na Lista 1 do curso de verão, esse fato implicará que:

$$\int t^{n-1} f^+(t)\mathbf{1}_B(t)\lambda(dt) = \int t^{n-1} f^-(t)\mathbf{1}_B(t)\lambda(dt)\,, \quad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)\,.$$

Usando o fato acima, mostre que $f(t) = 0$ em λ-quase-todo ponto. Conclua que $X_{(n)}$ é estatística completa suficiente..

e Encontre um estimador não viciado de variância uniformemente mínima para θ. *Dica:* $2X_1$ é estimador não viciado de θ.

Exercício 4 Considere uma família exponencial $\{P_\eta : \eta \in \Xi\}$ com respeito a uma medida μ em que as densidades são da forma:

$$p_\eta(x) = \exp(\eta T(x) - B(\eta))h(x)\,,$$

com $\eta \in \mathbb{R}$ e $T(x) \in \mathbb{R}$. O espaço $\Xi \subseteq \mathbb{R}$ é o conjunto de pontos em que:

$$\int \exp(\eta T(x))h(x)\mu(dx) < \infty$$

No que segue, vamos supor que esse conjunto é **aberto**.

a Usando que p_η é densidade, encontre uma expressão fechada para $B(\eta)$.

b Mostre que, para todo $\eta \in \Xi$, a função geradora de momentos de $T(X)$ existe numa vizinhança de zero, e é dada, nesta vizinhança, por:

$$M_{T(X)|\eta}(u) = \exp(B(\eta + u) - B(\eta))$$

c Mostre que $\mathbb{E}_\eta[T(X)] = B'(\eta)$ para todo $\eta \in \Xi$.

d Mostre que a variância de $T(X)$, visto enquanto estimador de $B'(\eta)$, atinge o limite inferior de Crámer-Rao.