Proabilidade e Estatística

Exercícios sobre Integração e Expectativa

Exercício 1 Seja $(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidade, e $X_n \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$, uma sequência de variáveis aleatórias não negativas.

a Mostre que $\mathbb{E}[\sum_{n=1}^{\infty} Z_n] = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}[Z_n]$.

b Mostre que $\mathbb{E}[\sum_{n=1}^{\infty} Z_n] < \infty \implies \mathbb{P}[\{\omega : \sum_{n=1}^{\infty} Z_n(\omega) < \infty\}] = 1$.

c Mostre que $\mathbb{P}[\{\omega : \sum_{n=1}^{\infty} Z_n(\omega) < \infty\}] = 1 \implies \mathbb{P}[\{\omega : Z_n(\omega) \nrightarrow 0\}] = 0$.

Exercício 2 Seja $(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidade, e X uma variável aleatória. Mostre que, para todo $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ mensurável tal que $\mathbb{E}[|f(X)|] < \infty$.

$$\mathbb{E}[f(X)] = \int f(x)\mathbb{P}_X(dx)\,,$$

onde $\mathbb{P}_X$ é a medida de probabilidade induzida por X sobre $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. *Dica:* mostre para funções f simples, depois aproxime para funções não-negativas pelo teorema da covnergência monótona, depois use a definição de integral para funções gerais.

Exercício 3 Demonstre a desigualdade de Jensen *estrita*: se X é uma variável aleatória integrável sobre um espaço de probabilidade $(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$, $f : A \mapsto \mathbb{R}$ uma função **estritamente** convexa sobre $A \subseteq \mathbb{R}$ convexo e aberto, com $\mathbb{P}[X \in A] = 1$ e $\mathbb{E}[|X|] < \infty$, $\mathbb{E}[|c(X)|] < \infty$. Se $\mathbb{P}[X \neq \mathbb{E}[X]] > 0$, então:

$$f(\mathbb{E}[X]) < \mathbb{E}[f(X)]$$

Exercício 4 Seja $(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidade. Para $A, B \in \mathcal{L}_2(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$ a covariância entre A e B é definida como:

$$\mathbb{C}(A, B) := \mathbb{E}[AB] - \mathbb{E}[A]\mathbb{E}[B]\,.$$

Para duas variáveis aleatórias X, Y definidas em $(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$, mostre que X é independente de Y se, e somente se, para quaisquer funções $h : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ limitadas e mensuráveis:

$$\mathrm{C}(h(X), g(Y)) = 0\,.$$

Dica: para a direção "se", observe que, para todo $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $\mathbb{P}[X^{-1}(B)] = \mathbb{E}[\mathbf{1}_{X^{-1}(B)}] = \mathbb{E}[\mathbf{1}_B(X)]$. Para a outra direção, mostre para funções simples e depois aproxime para funções limitadas por funções-escada.

Exercício 5 Seja $(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$ e $Y \in L^2(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$. Seja $\mathcal{G}$ uma sub-σ-álgebra de Σ.

a Mostre que $\mathbb{E}[Y|\mathcal{G}] \in L^2(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$.

b Mostre que $\mathbb{E}[Y|\mathcal{G}]$ é a única (a não ser num evento de probabilidade zero) solução ao problema de minimização:

$$\min_{S \in L^2(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})} \mathbb{E}[(Y - S)^2]$$

c Mostre que, quando $\mathcal{G} = \{\emptyset, \Omega\}$, $\mathbb{E}[Y|\mathcal{G}] = \mathbb{E}[Y]$, e que, quando $\mathcal{G} = \Sigma$, $\mathbb{E}[Y|\mathcal{G}] = Y$. À luz do item anterior, qual a interpretação desses resultados?

d Seja $E \in \Sigma$, com $1 > \mathbb{P}[E] > 0$. Tome $\mathcal{G} = \{\emptyset, E, E^{\complement}, \Omega\}$. Mostre que a função:

$$g(\omega) = \begin{cases} \frac{\mathbb{E}[Y\mathbf{1}_E]}{\mathbb{P}[E]}, & \text{se } \omega \in E \\ \frac{\mathbb{E}[Y\mathbf{1}_{E^{\complement}}]}{\mathbb{P}[E^{\complement}]}, & \text{se } \omega \in E^{\complement} \end{cases},$$

é uma versão de $\mathbb{E}[Y|\mathcal{G}]$. Qual a interpretação desse resultado, à luz do item (b)?

Exercício 6 Seja $(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$, e X e Y duas variáveis aleatórias reais. Considere $\mathbb{P}_{X,Y}[B] \coloneqq \mathbb{P}[\{\omega : (X(\omega), Y(\omega)) \in B]$, $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$, a medida de probabilidade induzida por (X, Y) em $(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2))$. DIzemos que $\mathbb{P}_{X,Y}$ admite densidade f com respeito a medida de Lebesgue λ^2 em $(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2))$[1]se, para todo $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$:

$$\mathbb{P}_{X,Y}[B] = \int f(\omega_1, \omega_2)\mathbf{1}_B(\omega_1, \omega_2)\lambda^2(d\omega)\,,$$

onde, por uma extensão do resultado visto em aula, $\lambda(d\omega)$ pode ser substituída pela integral dupla (de Riemann) quando $(\omega_1, \omega_2) \mapsto f(\omega_1, \omega_2)\mathbf{1}_B(\omega_1, \omega_2)$ for Riemann-integrável.

a Mostre que $f_1(\omega) \coloneqq \int f(\omega, y)\lambda(dy)$ define uma densidade para a probabilidade $\mathbb{P}_X$ induzida sobre $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. *Dica:* tome $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ e use o teorema de Fubini para mostrar que $\mathbb{P}_X[A] = \mathbb{P}_{X,Y}[A \times \mathbb{R}] = \int \mathbf{1}_{A\times\mathbb{R}} f d\lambda^2 = \int \mathbf{1}_A f_1 d\lambda_1$.

b Suponha que $\mathbb{E}[|Y|] < \infty$. Mostre que a função $g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$:

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{f_1(x)} \int y f(x, y)\lambda(dy), & \text{se } f_1(x) > 0 \\ 0, & \text{se } f_1(x) = 0 \end{cases},$$

define uma função de expectativa condicional de Y em X, i.e. que $g(X)$ é uma versão de $\mathbb{E}[Y|X]$. A escolha, na definição de g, do valor 0 quando $f_1(x) = 0$, faz alguma diferença? Por quê?

[1]A medida de Lebesgue em $\mathbb{R}^2$ é igual à medida produto $\lambda \otimes \lambda$ sobre $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$, onde λ é a medida de Lebesgue em $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$

Exercício 7 Seja $(\Omega, 2^\Omega, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidade em que Ω é finito. Defina a *medida de contagem* c sobre $(\Omega, 2^\Omega)$ como, para todo $B \subseteq \Omega$:

$$c(B) = |B| = \sum_{\omega \in \Omega} \mathbf{1}_B(\omega)\,.$$

Mostre que $\mathbb{P}$ admite densidade com respeito a c, e que essa densidade é dada por $g(\omega) = \mathbb{P}[\{\omega\}]$, $\omega \in \Omega$.

Exercício 8 Se $(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidade, e X uma variável aleatória real cuja imagem está contida num intervalo $[a, b]$ de $\mathbb{R}$. Suponha que a função de distribuição de X, F_X é contínua em $[a, b]$, e diferenciável em (a, b). Mostre que a função $g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, dada por:

$$g(x) = \begin{cases} F'(x), & \text{se } x \in (a, b) \\ 0, & \text{se } x \notin (a, b) \end{cases}$$

define uma densidade de $\mathbb{P}_X$ com respeito à medida de Lebesgue em $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.*Dica:* use o teorema fundamental do cálculo e o lema do π-sistema.