Conectando a Integral de Riemann e a Integral de Lebesgue

Professor Luís Antonio Fantozzi Alvarez

21 de fevereiro de 2025

Nestas notas, conectaremos a noção de integral de Riemann de uma função $f : [0, 1] \mapsto \mathbb{R}$, com a integral de Lebesgue de uma variável aleatória $g : [0, 1] \mapsto \mathbb{R}$ mensurável com respeito ao espaço de medida $([0, 1], \mathcal{B}[0, 1], \lambda)$, onde λ denota a medida de Lebesgue sobre os Borelianos de $[0, 1]$.

Começamos revisando a construção de integral de Riemann. Para isso, introduzimos o conceito de partição do intervalo $[0, 1]$.

Definição 1. *Uma partição $\mathcal{P}$ de $[0, 1]$ é uma coleção de subconjuntos do intervalo $[0, 1]$ da forma:*

$$\mathcal{P} = \{[a_0, a_1), [a_1, a_2), [a_2, a_3), \ldots, [a_k, a_{k+1}]\} ,$$

onde $k \in \mathbb{N}$ e $0 = a_0 < a_1 < \ldots < a_k = a_{k+1} = 1$.

Uma partição do intervalo $[0, 1]$ consiste numa decomposição do intervalo $[0, 1]$ em termos de sub-intervalos disjuntos.

No que segue, considere uma função $f : [0, 1] \mapsto \mathbb{R}$.

Definição 2. *A **soma de Darboux superior** de f com respeito a $\mathcal{P}$ é definida como a quantidade:*

$$U(f; \mathcal{P}) := \sum_{j=0}^{k} \bar{f}_j (a_{j+1} - a_j) ,$$

*onde $\bar{f}_j = \sup_{x \in [a_j, a_{j+1})} f(x)$ se $j < k$ e $\bar{f}_k = \sup_{x \in [a_k, a_{k+1}]} f(x)$. Similarmente, a **soma de Darboux inferior** de f com respeito a $\mathcal{P}$ é definida como a quantidade*

$$L(f; \mathcal{P}) := \sum_{j=0}^{k} \underline{f}_j (a_{j+1} - a_j) ,$$

onde $\underline{f}_j = \inf_{x \in [a_j, a_{j+1})} f(x)$ se $j < k$ e $\underline{f}_k = \inf_{x \in [a_k, a_{k+1}]} f(x)$.

Observe que as somas de Darboux superior e inferior correspondem, respectivamente, à integral de Lebesgue das seguintes funções simples.

$$\bar{f}_{\mathcal{P}} = \sum_{j=0}^{k} \mathbf{1}_{[a_j,a_{j+1})} \bar{f}_j + \mathbf{1}_{\{1\}} \bar{f}_k$$

$$\underline{f}_{\mathcal{P}} = \sum_{j=0}^{k} \mathbf{1}_{[a_j,a_{j+1})} \underline{f}_j + \mathbf{1}_{\{1\}} \underline{f}_k$$

Com base na definição de somas de Darboux, estamos preparados para construir a integral de Riemann de uma função.

Definição 3. *A **integral de Riemann superior** de uma função $f : [0,1] \mapsto \mathbb{R}$ é dada por:*

$$U(f) = \inf\{U(f;\mathcal{P}) : \mathcal{P} \text{ é partição de } [0,1]\}\,.$$

*Simetricamente, a **integral de Riemann inferior** é dada por*

$$L(f) = \sup\{L(f;\mathcal{P}) : \mathcal{P} \text{ é partição de } [0,1]\}\,.$$

*Note que $L(f) \leq U(f)$. Se $L(f) = U(f) \in \mathbb{R}$, dizemos que f é **Riemann-integrável**, e denotamos a integral de Riemann por $\int_0^1 f(x)dx = L(f)$.*

No que segue, provaremos a seguinte propriedade importante das integrais de Riemann superior e inferior.

Lema 1. *Se $U(f) \in \mathbb{R}$, existe uma sequência monotônica decrescente de funções simples $(\bar{f}_n)_n$, $\bar{f}_n \geq f$, tais que $\lambda(\bar{f}_n) \downarrow U(f)$. Simetricamente, se $L(f) \in \mathbb{R}$, existe uma sequência monotônica crescente de funções simples $(\underline{f}_n)_n$, $\underline{f}_n \leq f$, tais que $\lambda(\underline{f}_n) \uparrow L(f)$.*

Demonstração. Vamos provar o caso para $U(f)$, pois a demonstração para $L(f)$ é análoga. Para cada $n \in \mathbb{N}$, observe que, pela definição de ínfimo, $U(f) + \frac{1}{n}$ não é cota inferior do conjunto:

$$\{U(f;\mathcal{P}) : \mathcal{P} \text{ é partição de } [0,1]\}\,;$$

consequentemente, existe uma partição $\mathcal{P}_n$ tal que: $U(f) \leq \lambda(\bar{f}_{\mathcal{P}_n}) < U(f) + \frac{1}{n}$, garantindo a existência de uma sequência de funções simples com $\bar{f}_{\mathcal{P}_n} \geq f$ cujas integrais de Lebesgue convergem a $U(f)$. Para garantir que a sequência é monotônica decrescente e que as integrais convergem monotonicamente, definimos o conceito de refinamento de uma partição. Sejam $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ duas partições de $[0,1]$. Definimos a partição refinada de $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ como:

$$\mathcal{A} \wedge \mathcal{B} = \{A \cap B : A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}\}\,.$$

Não é difícil ver que $\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}$ é uma partição em $[0,1]$. Ademais, segue pelas propriedades de supremo que:

$$\bar{f}_{\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}} \leq \bar{f}_{\mathcal{A}}\,,$$

de onde também segue, pela monotonicidade da integral de Lebesgue que:

$$\lambda(\bar{f}_{A \wedge B}) \leq \lambda(\bar{f}_{A})\,.$$

Dessa forma, segue que podemos definir a sequência $(\bar{f}_n)_n$ desejada como, para todo $n \in \mathbb{N}$:

$$\bar{f}_n = \bar{f}_{\mathcal{P}_1 \wedge \mathcal{P}_2 \wedge \ldots \wedge \mathcal{P}_n}\,.$$

□

Com base no resultado acima, podemos mostrar a proposição vista em aula:

Proposição 1. *Seja $f : [0,1] \mapsto \mathbb{R}$ não negativa e Riemann integrável. Então f é mensurável e $\lambda(f) = \int_0^1 f(x)dx$.*

Demonstração. Pelo lema anterior, existe uma sequência decrescente $(\bar{f}_n)_n$ tal que:

$$\lambda(\bar{f}_n) \downarrow \int_0^1 f(x)dx\,,$$

Similarmente, existe uma sequência crescente $(\underline{f}_n)_n$ tal que:

$$\lambda(\underline{f}_n) \uparrow \int_0^1 f(x)dx$$

Como as sequências de funções são monotônicas, note que as seguintes funções estão bem-definidas e são mensuráveis:

$$\bar{f} = \lim_n \bar{f}_n\,,$$

$$\underline{f} = \lim_n \underline{f}_n\,,$$

Note, ademais, que, por monotonicidade de limites:

$$\overline{f}_n \geq f \geq \underline{f}_n, \quad \forall n \implies \overline{f} \geq f \geq \underline{f},$$

e que, pelo teorema da convergência monótona:

$$0 \leq \underline{f}_n \uparrow \underline{f} \implies \lambda(\underline{f}_n) \uparrow \int_0^1 f(x)dx = \lambda(\underline{f})$$

$$0 \leq \overline{f}_1 - \overline{f}_n \uparrow \overline{f}_1 - \overline{f} \implies \lambda(\overline{f}_n) \downarrow \int_0^1 f(x)dx = \lambda(\overline{f})$$

Consequentemente, temos que $\overline{f} - \underline{f} \geq 0$ e $\lambda(\overline{f} - \underline{f}) = 0 \implies \overline{f} = \underline{f} \quad \lambda-$quase-certamente $\implies \overline{f} = f \quad \lambda-$quase-certamente $\implies f$ é mensurável e $\lambda(f) = \int_0^1 f(x)dx$.

$\square$

A recíproca do resultado acima é claramente falsa: existem funções não negativas Lebesgue-integráveis que não são Riemann integráveis. De fato, tomando $g = \mathbf{1}_{[0,1]\setminus\mathbb{Q}}$, obtemos que $\lambda(g) = \lambda([0,1] \setminus \mathbb{Q}) = \lambda([0,1]) - \lambda(\mathbb{Q} \cap [0,1]) = 1 - 0 = 1$, mas para toda partição $\mathcal{P}$ de $[0,1]$, $U(f;\mathcal{P}) = 1$ e $L(f;\mathcal{P}) = 0$.