

Exercícios sobre Redução de Dados

Exercício 1 Seja \mathbf{X} um vetor aleatório k -dimensional com distribuição normal $\mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$. Mostre que, para qualquer matriz A de tamanho $s \times k$, $A\mathbf{X} \sim N(A\boldsymbol{\mu}, A\boldsymbol{\Sigma}A')$. *Dica:* use a função característica de uma normal.

Exercício 2 Considere o experimento dado pela observação de $n \geq 2$ variáveis aleatórias normais independentes, X_1, X_2, \dots, X_n com parâmetro de média μ comum desconhecido e parâmetro de variância σ^2 **conhecido**.

- a Qual é o modelo \mathcal{P} ?
- b Mostre que $T(X_1, \dots, X_n) = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}$ é uma estatística completa suficiente em \mathcal{P} .
- c Mostre que $\hat{S}^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - T(X_1, \dots, X_n))^2}{n-1}$ é ancilar em \mathcal{P} . *Dica:* proceda indutivamente, começando de $n = 2$.
- d Conclua que, para todo valor possível de μ , $T(X_1, \dots, X_n)$ é independente de \hat{S}^2 .

Exercício 3 Considere o experimento dado pela observação de n variáveis aleatórias independentes com distribuição $U[0, \theta]$, com $\theta > 0$ desconhecido.

- a Qual é o modelo \mathcal{P} ?
- b Mostre que $X_{(n)} := \max_{1 \leq i \leq n} X_i$ é estatística suficiente para \mathcal{P} .
- c Mostre que a lei de probabilidade induzida por $X_{(n)}$ admite densidade com respeito à medida de Lebesgue λ em \mathbb{R}_+ dada por:

$$g_\theta(z) := \frac{nz^{n-1}}{\theta^n} \mathbf{1}_{[0, \theta]}(z)$$

- d Mostre que, para qualquer transformação $f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ tal que $\mathbb{E}_\theta[f(X_{(n)})] = 0$ para todo $\theta > 0$, devemos ter que:

$$\int t^{n-1} f^+(t) \mathbf{1}_{[0, \theta]} \lambda(dt) = \int t^{n-1} f^-(t) \mathbf{1}_{[0, \theta]} \lambda(dt).$$

Pela extensão do lema do π -sistema vista na Lista 1 do curso de verão, esse fato implicará que:

$$\int t^{n-1} f^+(t) \mathbf{1}_B(t) \lambda(dt) = \int t^{n-1} f^-(t) \mathbf{1}_B(t) \lambda(dt), \quad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+).$$

Usando o fato acima, mostre que $f(t) = 0$ em λ -quase-todo ponto. Conclua que $X_{(n)}$ é estatística completa suficiente..

- e Encontre um estimador não viciado de variância uniformemente mínima para θ . *Dica:* $2X_1$ é estimador não viciado de θ .

Exercício 4 Considere uma família exponencial $\{P_\eta : \eta \in \Xi\}$ com respeito a uma medida μ em que as densidades são da forma:

$$p_\theta(x) = \exp(\eta T(x) - B(\eta))h(x),$$

com $\xi \in \mathbb{R}$ e $T(x) \in \mathbb{R}$. O espaço Ξ é o conjunto de pontos em que:

$$\int \exp(\eta T(x))h(x)\mu(dx) < \infty$$

No que segue, vamos supor que esse conjunto é **aberto**.

- a Usando que p_η é densidade, encontre uma expressão fechada para $B(\eta)$.
- b Mostre que, para todo $\eta \in \Xi$, a função geradora de momentos de $T(X)$ existe numa vizinhança de zero, e é dada, nesta vizinhança, por:

$$M_{T(X)|\eta}(u) = \exp(B(\eta + u) - B(\eta))$$

- c Mostre que $\mathbb{E}_\eta[T(X)] = B'(\eta)$ para todo $\eta \in \Xi$.
- d Mostre que a variância de $T(X)$, visto enquanto estimador de $B'(\eta)$, atinge o limite inferior de Crámer-Rao.