Probabilidade e Estatística
Aula 3 – Convergência estocástica

Luis A. F. Alvarez

24 de janeiro de 2025

Vetores aleatórios

- Seja $(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidade.
- Um vetor aleatório $\boldsymbol{Y} : \Omega \mapsto \mathbb{R}^k$ é uma função tal que cada coordenada $\boldsymbol{Y}_l : \Omega \mapsto \mathbb{R}$, $l = 1, \ldots, k$, é uma variável aleatória real.
- Um vetor aleatório induz uma distribuição de probabilidade sobre $(\mathbb{R}^k, \mathcal{B}(\mathbb{R}^k))$, dada por $\mathbb{P}_{\boldsymbol{Y}}[B] = \mathbb{P}[\boldsymbol{Y}^{-1}(A)]$, $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^k)$.
- Pelo lema do π-sistema, essa distribuição de probabilidade é carectarizada pela função de distribuição $F_{\boldsymbol{Y}} : \mathbb{R}^k \mapsto [0, 1]$, dada por:

$$F_{\boldsymbol{Y}}(\boldsymbol{c}) := \mathbb{P}_{\boldsymbol{Y}}\left[\prod_{l=1}^{k}(-\infty, \boldsymbol{c}_k]\right], \quad \boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^k .$$

Convergência quase-certa

- Seja $(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidade, e $\boldsymbol{Y}_1, \boldsymbol{Y}_2, \ldots$ uma sequência de vetores aleatórios.
- Dizemos que $\boldsymbol{Y}_n$ converge quase-certamente para um vetor aleatório $\boldsymbol{Y}$, denotado por $\boldsymbol{Y}_n \overset{\text{q.c.}}{\to} \boldsymbol{Y}$, se:

$$\mathbb{P}[\{\omega : \boldsymbol{Y}_n(\omega) \nrightarrow \boldsymbol{Y}(\omega)\}] = 0\,.$$

- Sequência de funções $\boldsymbol{Y}_n$ convergem (ponto a ponto), a não ser num conjunto de pontos de probabilidade zero.

Lema

$\boldsymbol{Y}_n \overset{q.c.}{\to} \boldsymbol{Y}$ *se, e somente se, para todo* $\epsilon > 0$*:*

$$\mathbb{P}\left[\limsup_n \{\omega : \|\boldsymbol{Y}_n(\omega) - \boldsymbol{Y}(\omega)\| > \epsilon\}\right] = 0\,.$$

Convergência em probabilidade

- Dizemos que $\boldsymbol{Y}_n$ converge em probabilidade para um vetor aleatório $\boldsymbol{Y}$, denotado por $\boldsymbol{Y}_n \xrightarrow{p} \boldsymbol{Y}$, se, para todo $\epsilon > 0$:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left[\{\omega : \|\boldsymbol{Y}_n(\omega) - \boldsymbol{Y}(\omega)\| > \epsilon\}\right] = 0\,.$$

Lema

Se $\boldsymbol{Y}_n \xrightarrow{q.c.} \boldsymbol{Y}$, então $\boldsymbol{Y}_n \xrightarrow{p} \boldsymbol{Y}$.

Convergência em distribuição

- Dizemos que $\boldsymbol{Y}_n$ converge em distribuição para um vetor aleatório $\boldsymbol{Y}$, denotado por $\boldsymbol{Y}_n \xrightarrow{d} \boldsymbol{Y}$, se as funções de distribuição dos $\boldsymbol{Y}_n$, $\{F_{\boldsymbol{Y}_n}\}_{n \in \mathbb{N}}$, convergem para a função de distribuição $F_{\boldsymbol{Y}}$ nos pontos em que $F_{\boldsymbol{Y}}$ é contínua.
  - Isto é, $\lim_n F_{\boldsymbol{Y}_n}(\boldsymbol{c}) = F_{\boldsymbol{Y}}(\boldsymbol{c})$ para todo $\boldsymbol{c}$ em que $F_{\boldsymbol{Y}}$ é contínua.
  - Conjunto de pontos em que uma função de distribuição é descontínua é enumerável $\implies$ se há convergência em distribuição, então, para qualquer $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^k$, é sempre possível encontrar um $\boldsymbol{c}' \geq \boldsymbol{c}$ em que a função de distribuição converge.

Lema

Se $\boldsymbol{Y}_n \xrightarrow{p} \boldsymbol{Y}$, então $\boldsymbol{Y}_n \xrightarrow{d} \boldsymbol{Y}$.

Lema (Trecho do lema Portmanteau)

$\boldsymbol{Y}_n \xrightarrow{d} \boldsymbol{Y}$ se, e somente se, para qualquer $f : \mathbb{R}^k \mapsto \mathbb{R}$ contínua e limitada.

$$\mathbb{E}[f(\boldsymbol{Y}_n)] \to \mathbb{E}[f(\boldsymbol{Y})] .$$

Convergência em L^p

- Dizemos que $\boldsymbol{Y}_n$ converge para um vetor aleatório $\boldsymbol{Y}$ na norma L^p, denotado por $\boldsymbol{Y}_n \xrightarrow{L_p} \boldsymbol{Y}$, se $\|\boldsymbol{Y}_n - \boldsymbol{Y}\|_p \to 0$.
- Pela desigualdade de Markov, convergência em L_p implica convergência em probabilidade.
    - Recíproca não é, no geral, verdadeira.

Teorema do mapa contínuo

Teorema

Seja $(\boldsymbol{X}_n)_n$ *uma sequêncai de vetores aleatórios,* $\boldsymbol{X}$ *um vetor aleatório, e* $f : \mathbb{R}^k \mapsto \mathbb{R}^l$ *uma função contínua num conjunto* C *do domínio tal que:* $\mathbb{P}[\{\omega : \boldsymbol{X}(\omega) \in C\}] = 1$*. Então:*

1. $\boldsymbol{X}_n \xrightarrow{q.c.} \boldsymbol{X} \implies f(\boldsymbol{X}_n) \xrightarrow{q.c.} f(\boldsymbol{X})$.
2. $\boldsymbol{X}_n \xrightarrow{p} \boldsymbol{X} \implies f(\boldsymbol{X}_n) \xrightarrow{p} f(\boldsymbol{X})$.
3. $\boldsymbol{X}_n \xrightarrow{d} \boldsymbol{X} \implies f(\boldsymbol{X}_n) \xrightarrow{d} f(\boldsymbol{X})$.

- Modos de convergência quase certa, em probabilidade e distribuição são preservados por transformações contínuas.

Resultados adicionais e lema de Slutsky

Lema

1. *Se* $\boldsymbol{X}_n \xrightarrow{d} \boldsymbol{X}$ *e* $\|\boldsymbol{X}_n - \boldsymbol{Y}_n\| \xrightarrow{p} 0$, *então* $\boldsymbol{Y}_n \xrightarrow{d} \boldsymbol{X}$.
2. *Se* $\boldsymbol{X}_n \xrightarrow{d} \boldsymbol{X}$ *e* $\boldsymbol{Y}_n \xrightarrow{p} c$, *onde* $c \in \mathbb{R}^k$ *é constante, então* $(\boldsymbol{X}_n, \boldsymbol{Y}_n) \xrightarrow{d} (\boldsymbol{X}, c)$.
3. *Se* $\boldsymbol{X}_n \xrightarrow{p} \boldsymbol{X}$ *e* $\boldsymbol{Y}_n \xrightarrow{p} \boldsymbol{Y}$, *então* $(\boldsymbol{X}_n, \boldsymbol{Y}_n) \xrightarrow{p} (\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$.

Corolário (Lema de Slutsky)

Função geradora de momentos

conteúdo...

Função característica

conteúdo...