

## Proabilidade e Estatística

### Exercícios sobre Integração e Expectativa

**Exercício 1** Seja  $(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$  um espaço de probabilidade, e  $X_n \geq 0$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , uma sequência de variáveis aleatórias não negativas.

- a Mostre que  $\mathbb{E}[\sum_{n=1}^{\infty} Z_n] = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}[Z_n]$ .
- b Mostre que  $\mathbb{E}[\sum_{n=1}^{\infty} Z_n] < \infty \implies \mathbb{P}[\{\omega : \sum_{n=1}^{\infty} Z_n(\omega) < \infty\}] = 1$ .
- c Mostre que  $\mathbb{P}[\{\omega : \sum_{n=1}^{\infty} Z_n(\omega) < \infty\}] = 1 \implies \mathbb{P}[\{\omega : Z_n(\omega) \not\rightarrow 0\}] = 0$ .

**Exercício 2** Seja  $(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$  um espaço de probabilidade, e  $X$  uma variável aleatória. Mostre que, para todo  $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$  mensurável tal que  $\|f(x)\| < \infty$ .

$$\mathbb{E}[f(X)] = \int f(x) \mathbb{P}_X(dx),$$

onde  $\mathbb{P}_X$  é a medida de probabilidade induzida por  $X$  sobre  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ . *Dica:* mostre para funções  $f$  simples, depois aproxime para funções não-negativas pelo teorema da convergência monótona, depois use a definição de integral para funções gerais.

**Exercício 3** Demonstre a desigualdade de Jensen *estrita*: se  $X$  é uma variável aleatória integrável sobre um espaço de probabilidade  $(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$ ,  $f : A \mapsto \mathbb{R}$  uma função **estritamente** convexa sobre  $A \subseteq \mathbb{R}$  aberto, com  $\mathbb{P}[X \in A] = 1$  e  $\mathbb{E}[|c(X)|] < \infty$ . Se  $\mathbb{P}[X = \mathbb{E}[X]] = 0$ , então:

$$c(\mathbb{E}[X]) < \mathbb{E}[c(X)]$$

**Exercício 4** Seja  $(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$  um espaço de probabilidade. Para  $A, B \in \mathcal{L}_2(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$  a covariância entre  $A$  e  $B$  é definida como:

$$\mathbb{C}(A, B) := \mathbb{E}[AB] - \mathbb{E}[A]\mathbb{E}[B].$$

Para duas variáveis aleatórias  $X, Y$  definidas em  $(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$ , mostre que  $X$  é independente de  $Y$  se, e somente se, para quaisquer funções  $h : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$  e  $g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$  limitadas e mensuráveis:

$$\mathbb{C}(h(X), g(Y)) = 0.$$

*Dica:* para a direção “se”, observe que, para todo  $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ ,  $\mathbb{P}[X^{-1}(B)] = \mathbb{E}[\mathbf{1}_{X^{-1}(B)}] = \mathbb{E}[\mathbf{1}_B(X)]$ . Para a outra direção, mostre para funções simples e depois aproxime para funções limitadas por funções-escada.

**Exercício 5** Seja  $(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$  e  $Y \in L^2(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$ . Seja  $\mathcal{G}$  uma sub- $\sigma$ -álgebra de  $\Sigma$ .

- a Mostre que  $\mathbb{E}[Y|\mathcal{G}] \in L^2(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$ .
- b Mostre que  $\mathbb{E}[Y|\mathcal{G}]$  é a única (a não ser num evento de probabilidade zero) solução ao problema de minimização:

$$\min_{S \in L^2(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})} \mathbb{E}[(Y - S)^2]$$

- c Mostre que, quando  $\mathcal{G} = \{\emptyset, \Omega\}$ ,  $\mathbb{E}[Y|\mathcal{G}] = \mathbb{E}[Y]$ , e que, quando  $\mathcal{G} = \Sigma$ ,  $\mathbb{E}[Y|\mathcal{G}] = Y$ . À luz do item anterior, qual a interpretação desses resultados?
- d Seja  $E \in \Sigma$ , com  $1 > \mathbb{P}[E] > 0$ . Tome  $\mathcal{G} = \{\emptyset, E, E^c, \Omega\}$ . Mostre que a função:

$$g(\omega) = \begin{cases} \frac{\mathbb{E}[Y\mathbf{1}_E]}{\mathbb{P}[E]}, & \text{se } \omega \in E \\ \frac{\mathbb{E}[Y\mathbf{1}_{E^c}]}{\mathbb{P}[E^c]}, & \text{se } \omega \in E^c \end{cases},$$

é uma versão de  $\mathbb{E}[Y|\mathcal{G}]$ . Qual a interpretação desse resultado, à luz do item (b)?

**Exercício 6** Seja  $(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$ , e  $X$  e  $Y$  duas variáveis aleatórias reais. Considere  $\mathbb{P}_{X,Y}[B] := \mathbb{P}[\{\omega : (X(\omega), Y(\omega)) \in B\}]$ ,  $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ , a medida de probabilidade induzida por  $(X, Y)$  em  $(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2))$ . Dizemos que  $\mathbb{P}_{X,Y}$  admite densidade  $f$  com respeito a medida de Lebesgue  $\lambda^2$  em  $(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2))$ <sup>1</sup> se, para todo  $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ :

$$\mathbb{P}_{X,Y}[B] = \int f(\omega_1, \omega_2) \mathbf{1}_B(\omega_1, \omega_2) \lambda(d\omega),$$

onde, por uma extensão do resultado visto em aula,  $\lambda(d\omega)$  pode ser substituída pela integral dupla (de Riemann) quando  $(\omega_1, \omega_2) \mapsto f(\omega_1, \omega_2) \mathbf{1}_B(\omega_1, \omega_2)$  for Riemann-integrável.

- a Mostre que  $f_1(\omega) := \int f(\omega, y) \lambda(dy)$  define uma densidade para a probabilidade  $\mathbb{P}_X$  induzida sobre  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ . *Dica:* tome  $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$  e use o teorema de Fubini para mostrar que  $\mathbb{P}_X[A] = \mathbb{P}_{X,Y}[A \times \mathbb{R}] = \int \mathbf{1}_{A \times \mathbb{R}} f d\lambda^2 = \int \mathbf{1}_A f_1 d\lambda_1$ .
- b Suponha que  $\mathbb{E}[|Y|] < \infty$ . Mostre que a função  $g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ :

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{f_1(x)} \int y f(y, x) \lambda(dy), & \text{se } f_1(x) > 0 \\ 0, & \text{se } f_1(x) = 0 \end{cases},$$

define uma função de expectativa condicional de  $Y$  em  $X$ , i.e. que  $g(X)$  é uma versão de  $\mathbb{E}[Y|X]$ . A escolha, na definição de  $g$ , do valor 0 quando  $f_1(x) = 0$ , faz alguma diferença? Por quê?

<sup>1</sup>A medida de Lebesgue em  $\mathbb{R}^2$  é igual à medida produto  $\lambda \otimes \lambda$  sobre  $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ , onde  $\lambda$  é a medida de Lebesgue em  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$

**Exercício 7** Seja  $(\Omega, 2^\Omega, \mathbb{P})$  um espaço de probabilidade em que  $\Omega$  é finito. Defina a *medida de contagem*  $c$  sobre  $(\Omega, 2^\Omega)$  como, para todo  $B \subseteq \Omega$ :

$$c(B) = |B| = \sum_{\omega \in \Omega} \mathbf{1}_B(\omega).$$

Mostre que  $\mathbb{P}$  admite densidade com respeito a  $c$ , e que essa densidade é dada por  $g(\omega) = \mathbb{P}[\{\omega\}]$ .

**Exercício 8** Se  $(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$  um espaço de probabilidade, e  $X$  uma variável aleatória real cuja imagem está contida num intervalo  $[a, b]$  de  $\mathbb{R}$ . Suponha que a função de distribuição de  $X$ ,  $F_X$  é contínua em  $[a, b]$ , e diferenciável em  $(a, b)$ . Mostre que a função  $g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ , dada por:

$$g(x) = \begin{cases} F'_X(x), & \text{se } x \in (a, b) \\ 0, & \text{se } x \notin (a, b) \end{cases} \text{ define uma densidade de } \mathbb{P}_X \text{ com respeito à}$$

medida de Lebesgue em  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ . *Dica:* use o teorema fundamental do cálculo e o lema do  $\pi$ -sistema.