Propriedades das normas L_p

Professor Luís Antonio Fantozzi Alvarez

5 de fevereiro de 2026

Nestas notas, vamos demonstrar algumas propriedades das normas L_p vistas em aula.

Proposição 1 (Monotonicdade)**.** *Sejam* $1 \leq p \leq q$. *Se* $X \in L^q(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$, *então* $X \in L^p(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$ *e* $\|X\|_p \leq \|X\|_q$.

Observação: Observe que a desigualdade $\|X\|_p \leq \|X\|_q$ é trivialmente verdadeira quando $\|X\|_q = \infty$. Por isso a proposição cuida do caso em que $X \in L^q(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$, pois este é o interessante.

Demonstração. Começamos, inicialmente, considerando uma variável aleatória $X \in L^q(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$ tal que também $X \in L^p(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$. Nesse caso, observe que:

$$\mathbb{E}[|X|^q] = \mathbb{E}[|X|^q \mathbf{1}_{\{|X|>0\}}] + \mathbb{E}[\underbrace{|X|^q \mathbf{1}_{\{|X|=0\}}}_{=0\mathbf{1}_\Omega}] = \mathbb{E}[|X|^q \mathbf{1}_{\{|X|>0\}}] = \mathbb{E}[(\phi \circ \tau)(|X|^p)] \,,$$

onde $\phi : [0, \infty) \mapsto \mathbb{R}$ é definida como $\phi(z) = z^{q/p}$ e, $\tau : \mathbb{R} \mapsto [0, \infty)$ é definida como $\tau(s) = \max\{s, 0\}$. Observe que, como $q \geq p$, ϕ é convexa e monotônica crescente e que τ é convexa. Portanto, um simples argumento revela que a composição $(\phi \circ \tau) : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ é convexa,[1] e, como $\mathbb{E}[|X^p|] < \infty$ por hipótese, podemos aplicar a desigualdade de Jensen para concluir que:

[1] De fato, para $a, b \in \mathbb{R}$ e $\lambda \in [0, 1]$:

$$\begin{aligned}(\phi \circ \tau)(\lambda a + (1-\lambda)b) = \phi(\tau(\lambda a + (1-\lambda)b)) \leq \phi(\lambda\tau(a) + (1-\lambda)\tau(b)) \leq \\ \lambda\phi(\tau(a)) + (1-\lambda)\phi(\tau(b)) \,, \\ = \lambda(\phi \circ \tau)(a) + (1-\lambda)(\phi \circ \tau)(b)\end{aligned}$$

onde o primeiro passo segue da definição de composição de funções; a desigualdade seguinte decorre da convexidade de τ e do fato de que ϕ é monotônica crescente; o terceiro passo segue de que ϕ é convexa; e a última igualdade segue, novamente, da definição de composição de funções.

$$\mathbb{E}[|X|^q] \geq (\phi \circ \tau)(\mathbb{E}[|X|^p]) = (\max\{\mathbb{E}[|X|^p], 0\})^{\frac{q}{p}} = (\mathbb{E}[|X|^p])^{\frac{q}{p}} \implies \|X\|_q \geq \|X\|_p \,.$$

Para o caso geral, suponha agora somente que $X \in L^q(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$. Defina a sequência de variáveis aleatórias, $X_n := \max\{\min\{X_n, n\}, -n\}$, $n \in \mathbb{N}$. Observe que $|X_n| \leq n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, o que implica que $\max\{\|X_n\|_p, \|X_n\|_q\} \leq n < \infty$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Portanto, o resultado anterior se aplica, e temos que, para todo $n \in \mathbb{N}$:

$$\|X_n\|_p \leq \|X_n\|_q \,.$$

Observe que $|X_n| \uparrow |X|$. Mas então, segue da aplicação do teorema da convergência monótona que:

$$0 \leq |X_n|^p \uparrow |X|^p \implies \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[|X_n|^p] = \mathbb{E}[|X|^p] \,,$$

e

$$0 \leq |X_n|^q \uparrow |X|^q \implies \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[|X_n|^q] = \mathbb{E}[|X|^q] \,,$$

de onde concluímos que:

$$\|X\|_p = \lim_{n\to\infty} \|X_n\|_p \leq \lim_{n\to\infty} \|X_n\|_q = \|X\|_q \,.$$

□

Proposição 2 (Desigualdade de Hölder)**.** *Seja* $1 \leq p \leq q \leq \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. *Sejam* $X \in L^p(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$ *e* $Y \in L^q(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$. *Então* $X \cdot Y \in L^1(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$ *e:*

$$|\mathbb{E}[XY]| \leq \mathbb{E}[|XY|] \leq \|X\|_p \|Y\|_q \,.$$

Demonstração. Observe que, no caso em que $\|Y|_q = 0$, a desigualdade é trivialmente verdadeira, visto que:

$$\|Y|_q = 0 \implies \mathbb{P}[\{Y = 0\}] = 1 \implies \mathbb{P}[|XY| = 0] = \mathbb{P}[XY = 0] = 1 \,,$$

e, portanto:

$$\mathbb{E}[|XY|] = 0 \,,$$

$$\mathbb{E}[XY] = 0 \,,$$

$$\|X\|_p \|Y\|_q = 0 \,,$$

Consideremos, então, o caso em que $\|Y|_q > 0$. Nesse caso, $\mathbb{E}[|Y|^q]$ e, da nossa discussão sobre densidades da aula anterior, sabemos que o mapa $\tilde{P} : \Sigma \mapsto [0,1]$ definido por:

$$\tilde{P}[A] = \int \mathbf{1}_A \frac{|Y|^q}{\mathbb{E}[|Y|^q]} d\mathbb{P}, \quad \forall A \in \Sigma,$$

define uma medida de probabilidade. Mas então, podemos escrever:

$$\mathbb{E}[|XY|] = \int \frac{|X|}{|Y|^{q-1}} |Y|^q d\mathbb{P} = \mathbb{E}[|Y|^q] \int \frac{|X|}{|Y|^{q-1}} \frac{|Y|^q}{\mathbb{E}[|Y|^q]} d\mathbb{P} = \mathbb{E}[|Y|^q] \int |Z| d\tilde{P},$$

onde $Z := \frac{X}{Y^{q-1}}$, e a última igualdade segue, crucialmente, da fórmula de integrais de Lebesgue a partir de densidades que demonstramos na aula anterior. Mas então, como $p \geq 1$, segue da monotonicidade das normas L_p demonstradas anteriormente que:

$$\int |Z| d\tilde{P} \leq \left(\int |Z|^p d\tilde{P} \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Mas observe que:

$$\int |Z|^p d\tilde{P} = \int \frac{|X|^p}{|Y|^{(q-1)p}} \frac{|Y|^q}{\mathbb{E}[|Y|^q]} d\mathbb{P} = \frac{1}{\mathbb{E}[|Y|^q]} \int |X|^p |Y|^{q-(q-1)p} d\mathbb{P}.$$

Mas, como $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, temos que $p + q = pq$. Portanto $q - (q-1)p = 0$, e obtemos que:

$$\int |Z|^p d\tilde{P} = \frac{1}{\mathbb{E}[|Y|^q]} \int |X|^p d\mathbb{P}.$$

Coletando as desigualdades acima, e usando que $\frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{p}$, obtemos que:

$$\mathbb{E}[|XY|] = \mathbb{E}[|Y|^q] \int |Z| d\tilde{P} \leq \frac{\mathbb{E}[|Y|^q]}{\mathbb{E}[|Y|^q]^{\frac{1}{p}}} \|X\|_p = \|X\|_p \|X\|_q.$$

Portanto, concluímos que XY é integrável se $X \in L_p(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$ e $Y \in L_q(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$. Que $\mathbb{E}[XY] \leq \mathbb{E}[|XY|]$ segue imediatamente da monotonicidade e linearidade de integrais, visto que: $XY \leq |XY| \implies \mathbb{E}[XY] \leq \mathbb{E}[|XY|]$ e $-XY \leq |XY| \implies -\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[-XY] \leq \mathbb{E}[|XY|] \implies \mathbb{E}[XY] \geq -\mathbb{E}[|XY|]$. $\square$

O conteúdo abaixo é de leitura opcional:

Uma observação sobre a norma L_∞ observe que, na afirmação da desigualde de Hölder, existe a possibilidade de tomar-se p ou q iguais a ∞ (e, respectivamente, $q = 1$ ou $p = 1$). Nós não definimos no que consiste a norma L_p nesses casos, mas agora estamos munidos das ferramentas para fazê-lo. Observe que, pela monotonicidade das normas L^p, para uma dada variável aleatória $X \in m(\Sigma)$, a sequência de números reais estendidos:

$$(\|X\|_n)_{n\in\mathbb{N}}\,,$$

é monotônica não decrescente, e portanto possui um limite na reta estendida. Definimos como esse limite a norma L_∞, isto é:

$$\|X\|_\infty := \lim_{n\to\infty} \|X\|_n\,.$$

É imediato ver que a norma L_∞ satisfaz, por construção, a propriedade de monotonicidade que demonstramos no começo dessas notas e, por esse motivo, a desigualdade de Hölder também se aplica com p ou q iguais a ∞. Notamos, ademais que essa norma possui a seguinte caracterização alternativa.

Fato 1. $\|X\|_\infty = \inf\{C \geq 0 : \mathbb{P}[\{|X| > C\}] = 0\}$

Demonstração. Primeiramente, observamos que, para qualquer C tal que $\mathbb{P}[|X| > C] = 0$,

$$|X| \leq C,\ \mathbb{P}\text{-q.c.} \implies \|X\|_n \leq C,\ \forall n \in \mathbb{N} \implies \|X\|_\infty \leq C\,.$$

Portanto, $\|X\|_\infty$ é uma cota inferior de $\{C \geq 0 : \mathbb{P}[\{|X| > C\}] = 0\}$. Segue, assim, da definição de ínfimo que:

$$\|X\|_\infty \leq \inf\{C \geq 0 : \mathbb{P}[\{|X| > C\}] = 0\}\,.$$

Na outra direção, seja $U = \inf\{C \geq 0 : \mathbb{P}[\{|X| > C\}] = 0\}$. Consideramos os dois casos possíveis:

(a) $U = \infty$. Nesse caso, $\{C \geq 0 : \mathbb{P}[\{|X| > C\}] = 0\} = \emptyset \implies$ para todo $C \geq 0$, $\mathbb{P}[\{|X| > C\}] > 0$. Mas então, para um dado $K \in \mathbb{N}$ arbitrário, temos que:

$$K\mathbf{1}_{\{|X|>K\}} \leq |X| \implies \mathbb{P}[|X| > K]^{\frac{1}{n}} K \leq \|X\|_n\,, \forall n \in \mathbb{N} \implies K \leq \|X\|_\infty\,,$$

onde usamos que $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}[|X| > K]^{\frac{1}{n}} = 1$, pois $\mathbb{P}[|X| > K] = 1$. Mas, como K foi arbitrariamente escolhido, segue que, tomando $K \to \infty$, $\|X\|_\infty = \infty$.

(b) $U < \infty$. Nesse caso, para todo $l \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}[\{X > U - \frac{1}{l}\}] > 0$, de onde segue, por um argumento análogo ao anterior que:

$$(U + l^{-1})\mathbf{1}_{\{|X|>(U+l^{-1})\}} \leq |X| \implies \mathbb{P}[|X| > (U + l^{-1})]^{\frac{1}{n}}(U + l^{-1}) \leq \|X\|_n \, , \forall n \in \mathbb{N} \\ \implies (U + l^{-1}) \leq \|X\|_\infty \, ,$$

e, tomando $l \to \infty$, obtemos:

$$U \leq \|X\|_\infty \, ,$$

como desejado.

□

Da caracterização acima, concluímos que a norma L_∞ é finita se, e somente se, X é limitada quase-certamente (i.e. se existe $L \geq 0$ tal que $\mathbb{P}[\{|X| > L\}] = 0$).