



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO MARANHÃO**  
**ENGENHARIA DA COMPUTAÇÃO**  
**PROCESSAMENTO DIGITAL DE SINAIS**

**FILTRO DE KALMAN**

Relatório do projeto, referente a terceira avaliação da disciplina EECp0018 - Processamento Digital De Sinais (2019 .1 - T01), sob a Supervisão do **Prof. Me. Arnaldo Pinheiro De Azevedo Junior**

SÃO LUÍS/MA

2019

**LUIS FELIPE FERREIRA SOARES**

**FILTRO DE KALMAN**

Relatório do projeto, referente a terceira avaliação da disciplina EECp0018 - Processamento Digital De Sinais (2019 .1 - T01), sob a Supervisão do **Prof. Me. Arnaldo Pinheiro De Azevedo Junior**

SÃO LUÍS/MA

2019

## **RESUMO**

A proposta do projeto foi o projeto e implementação do filtro de Kalman. Este se trata de um estimador ótimo, isto é, uma ferramenta que infere parâmetros desejados a partir de observações indiretas, incertas e/ou imprecisas de um sistema. É classificado com um filtro, pois determina a “melhor estimativa” do ruído de um sinal com o intuito de filtra-lo. Apesar disso, é frequentemente dito como a melhor solução para problemas de rastreamento e predição de trajetórias, pois não só exerce a função de filtro, mas também projeta as medidas na estimativa do estado do sistema. Alguns exemplos notáveis da aplicação do filtro de Kalman são: Determinação da órbita de planetas e estrelas, rastreamento (aeronaves, radares, mísseis) e robôs capazes de se auto localizarem. Este trabalho se propõe a apresentar e implementar a sua versão linear, aplicando-a como filtro em medições reais e artificiais da posição e velocidade de um projétil em trajetória vertical.

## SUMÁRIO

|  |    |
|--|----|
| RESUMO .....   | 3  |
| 1 INTRODUÇÃO .....                                     | 3  |
| 2 DERIVAÇÃO DO FILTRO DE KALMAN .....                  | 5  |
| 3 DESCRIÇÃO DA IMPLEMENTAÇÃO DO FILTRO DE KALMAN ..... | 7  |
| 3.1 Estimação do Estado.....                           | 7  |
| 3.2 Estimação da Covariância .....                     | 8  |
| 4 IMPLEMENTAÇÃO DO FILTRO DE KALMAN EM PYTHON.....     | 9  |
| REFERÊNCIAS .....                                      | 13 |

## 1 INTRODUÇÃO

Os filtros de Kalman são utilizados quando se tem incerteza na informação sobre a dinâmica de um sistema, porém o sistema é conhecido a ponto de que é possível prever o que ocorrerá a seguir. Mesmo que fatores externos interfiram no movimento previsto, o filtro de Kalman frequentemente será capaz de estimar o que de fato aconteceu. Assim, o filtro de Kalman é ideal para sistemas que estão constantemente mudando e quando há restrições de memória e velocidade, pois o algoritmo apenas depende do estado anterior e é muito rápido, sendo assim adequado em sistemas de tempo real e embarcados [1]. Os seus bons resultados na prática devido a sua performance e estrutura, a sua forma conveniente para processamento em tempo real, a simplicidade na formulação e implementação dado o conhecimento básico do seu funcionamento e a dispensa da necessidade de inverter as equações de medição tornam o filtro de Kalman uma escolha interessante em diversas aplicações [2].

O filtro de Kalman é dito um estimador ótimo [2, 3]. Ele é ótimo no sentido de que se o ruído é do tipo gaussiano, então o filtro minimiza o erro quadrático médio. Para observar este fato, considere que o sinal possa ser descrito da seguinte forma:

$$y_k = a_k x_k + n_k \quad (1.1)$$

onde  $y_k$  é uma medição no tempo,  $a_k$  um termo de ganho,  $x_k$  é o sinal real e  $n_k$ , o ruído. O objetivo é estimar  $x_k$ . A diferença entre o sinal medido e o real é dado por uma função de erro  $f$ . A forma de  $f$  depende da aplicação, mas se espera que esta seja positiva e cresça monotonicamente. Assim, uma função que satisfaz essas condições é

$$f(e_k) = (x_k - \hat{x}_k)^2. \quad (1.2)$$

Em termos estatísticos, uma métrica mais útil é o valor esperado de (1.2):

$$E = E[f(e_k)] = E[e_k^2], \quad (1.3)$$

que é o erro quadrático médio. Isto é equivalente a dizer que se busca  $\hat{x}_k$  tal que maximiza a probabilidade de que  $y_k$  aconteça. Conforme suposição que o ruído  $n_k$  é do tipo gaussiano, com variância  $\sigma_k^2$ , tem-se que

$$P(y_k | \hat{x}_k) = K_k \exp \left[ -\frac{1}{2} \frac{(y_k - a_k \hat{x}_k)^2}{\sigma_k^2} \right], \quad (1.4)$$

onde  $K_k$  é uma constante de normalização. A probabilidade máxima da função (1.4) em todo o domínio  $k$  é

$$P(y | \hat{x}) = \prod_k K_k \exp \left[ -\frac{1}{2} \frac{(y_k - a_k \hat{x}_k)^2}{\sigma_k^2} \right] \quad (1.5)$$

o que resulta em

$$\ln[P(y|\hat{x})] = -\frac{1}{2} \sum_k \frac{(y_k - a_k \hat{x}_k)^2}{\sigma_k^2} + C_K, \quad (1.6)$$

ou seja, o erro quadrático médio é a função a ser minimizada em  $\hat{x}_k$  quando a variação  $n_k$  é gaussiana. O filtro ótimo que tem esta característica, dentre todos aqueles que minimizam o erro quadrático médio, é o filtro de Kalman [3]. Quando o ruído não é gaussiano, dada apenas a variância do ruído, o filtro de Kalman é o melhor estimador linear, porém estimadores não-lineares podem ser melhores [2].

## 2 DERIVAÇÃO DO FILTRO DE KALMAN

Considere que se deseja obter o valor de uma variável de um processo na forma:

$$x_{k+1} = Ax_k + w_k, \quad (2.1)$$

onde  $x_k$  é o vetor de estados,  $A$  é a matriz de transição e  $w_k$  é um ruído branco com variância conhecida. As observações são dadas na forma

$$z_k = Hx_k + v_k, \quad (2.2)$$

onde  $z_k$  é o vetor de medidas atuais de  $x$  no tempo  $k$ ,  $H$  é uma matriz de relação entre todas as variáveis de estado consideradas e as variáveis de fato medidas e  $v_k$  é o vetor relacionado ao erro de medição. Como se deseja trabalhar com as distribuições gaussianas, é necessário conhecer as matrizes de covariância de  $w_k$  e  $v_k$ , que serão definidas, respectivamente, como:

$$R = E[v_k v_k^T] \quad (2.3)$$

e

$$Q = E[w_k w_k^T]. \quad (2.4)$$

O erro quadrático médio é dado por (1.3), isto é equivalente a

$$P_k = E[e_k e_k^T] = E[(x_k - \hat{x}_k)(x_k - \hat{x}_k)^T]. \quad (2.5)$$

Assumindo uma estimativa  $\hat{x}'_k$  a priori de  $\hat{x}_k$ , obtida através do conhecimento sobre o sistema, é possível determinar a equação para a estimativa de  $\hat{x}_k$ , combinando a estimativa a priori com os dados medidos, que é dada por:

$$\hat{x}_k = \hat{x}'_k + K_k(z_k - H\hat{x}'_k) = \hat{x}'_k + K_k i_k, \quad (2.6)$$

onde  $K_k$  é o ganho de Kalman e  $i_k$  é denominado “termo de inovação”. Combinando (2.6) e (2.2) com (2.5), tem-se

$$P_k = E[(I - K_k H)(\hat{x}_k - \hat{x}'_k) + K_k v_k][(I - K_k H)(\hat{x}_k - \hat{x}'_k) + K_k v_k]^T. \quad (2.7)$$

O termo  $\hat{x}_k - \hat{x}'_k$  é o erro da estimativa a priori. Sabendo que este erro não está relacionado com o ruído  $v_k$ , utilizando (2.3) e as propriedades do valor esperado, reescreve-se (2.7) como

$$P_k = (I - K_k H)E[\hat{x}_k - \hat{x}'_k](I - K_k H) + K_k E[v_k v_k^T]K_k^T = (I - K_k H)P'_k(I - K_k H) + K_k R K_k^T. \quad (2.8)$$

A equação em (2.8) atualiza a covariância do erro utilizando a covariância a priori  $P'_k$ . A matriz de covariância tem a forma

$$P_k = \begin{bmatrix} E[e_{k-1} e_{k-1}^T] & E[e_k e_{k-1}^T] & E[e_{k+1} e_{k-1}^T] \\ E[e_{k-1} e_k^T] & E[e_k e_k^T] & E[e_{k+1} e_k^T] \\ E[e_{k-1} e_{k+1}^T] & E[e_k e_{k+1}^T] & E[e_{k+1} e_{k+1}^T] \end{bmatrix}. \quad (2.9)$$

A diagonal da matriz (2.9) contém os erros quadráticos médios de  $e_{k-1}$ ,  $e_k$  e  $e_{k+1}$ . Assim, os erros quadráticos médios podem ser minimizados minimizando o traço da matriz  $P_k$ . O traço  $T$  de (2.8) é dado por

$$T[P_k] = T[P_k'] - 2T[K_k H P_k'] + T[K_k (H P_k' H^T + R) K_k^T]. \quad (2.10)$$

Diferenciando (2.10) em relação a  $K_k$ , tem-se

$$\frac{dT[P_k]}{dK_k} = -2(H P_k')^T + 2K_k (H P_k' H^T + R). \quad (2.11)$$

Igualando (2.11) a zero e rearranjando os termos, obtém-se

$$(H P_k')^T = K_k (H P_k' H^T + R). \quad (2.12)$$

Resolvendo (2.12) em  $K_k$ , finalmente se deriva a equação para o ganho de Kalman:

$$K_k = (H P_k')^T (H P_k' H^T + R)^{-1} = (H P_k')^T S_k^{-1}. \quad (2.13)$$

Aplicando (2.13) em (2.8), obtém-se

$$P_k = (I - K_k H) P_k'. \quad (2.14)$$

Como as próximas iterações dependem das estimativas a priori  $\hat{x}_k'$  e  $\hat{P}_k'$ , que variam com  $k$ , é necessário determiná-las no passo atual, ou seja, realizar uma projeção para determinar  $\hat{x}_{k+1}'$  e  $\hat{P}_{k+1}'$  [3]. Para tanto, combinam-se as equações (2.5), (2.6), (2.13) e (2.14), resultando em:

$$\hat{x}_{k+1}' = A \hat{x}_k \quad (2.15)$$

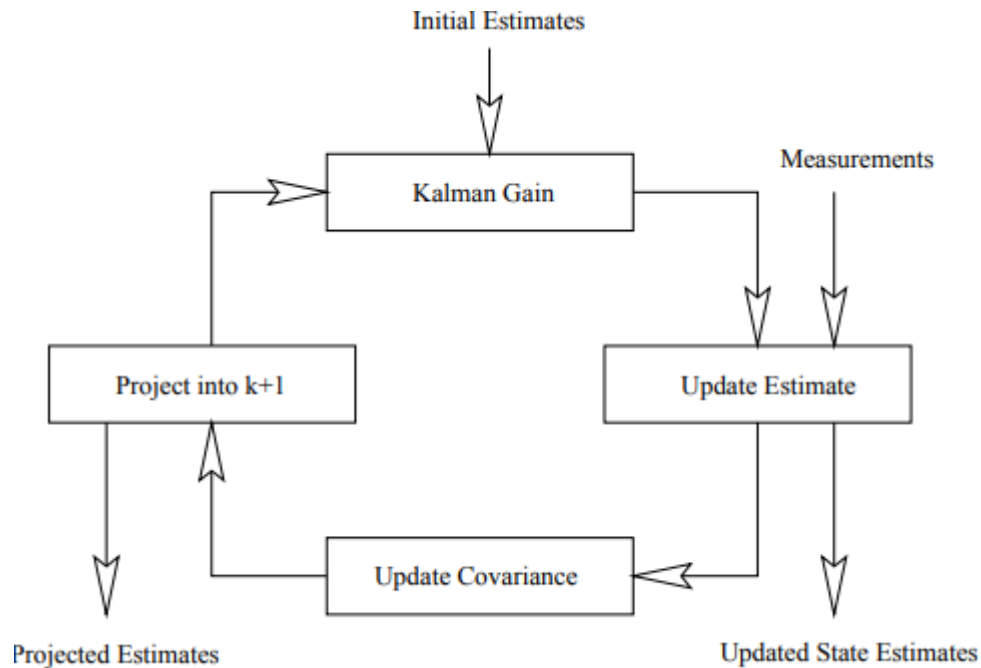
e

$$\hat{P}_{k+1}' = A P_k A^T + Q. \quad (2.16)$$



### 3 DESCRIÇÃO DA IMPLEMENTAÇÃO DO FILTRO DE KALMAN

**Figura 1-** Algoritmo do Filtro de Kalman



Fonte: Lacey [3]

As etapas da seção anterior podem ser descritas como um algoritmo recursivo, que funcionam conforme a **Figura 1**. Este consiste em etapas, sendo elas divididas em predição e atualização. Define-se as seguintes notações utilizadas no algoritmo [2]:

- $\hat{x}(k|k)$ : Estimativa de  $x(k)$  dadas as medidas  $z(k), z(k-1)\dots$
- $\hat{x}(k+1|k)$ : Estimativa de  $x(k+1)$  dadas as medidas  $z(k), z(k-1)\dots$
- $\hat{P}(k|k)$ : Estimativa da covariância  $x(k)$  dadas as medidas  $z(k), z(k-1)\dots$
- $\hat{P}(k+1|k)$ : Estimativa da covariância  $x(k+1)$  dadas as medidas  $z(k), z(k-1)\dots$

#### 3.1 Estimação do Estado

A estimação do estado é feita da seguinte forma:

1. Predição do estado:  $\hat{x}(k+1|k) = A\hat{x}(k|k) + Gu$
2. Predição da medição:  $\hat{z}(k+1|k) = H\hat{x}(k+1|k)$
3. Medição de resíduo:  $v(k+1) = z(k+1) - \hat{z}(k+1|k)$
4. Atualização da estimativa:  $\hat{x}(k+1|k+1) = \hat{x}(k+1|k) + K(k+1)v(k+1)$

### 3.2 Estimação da Covariância

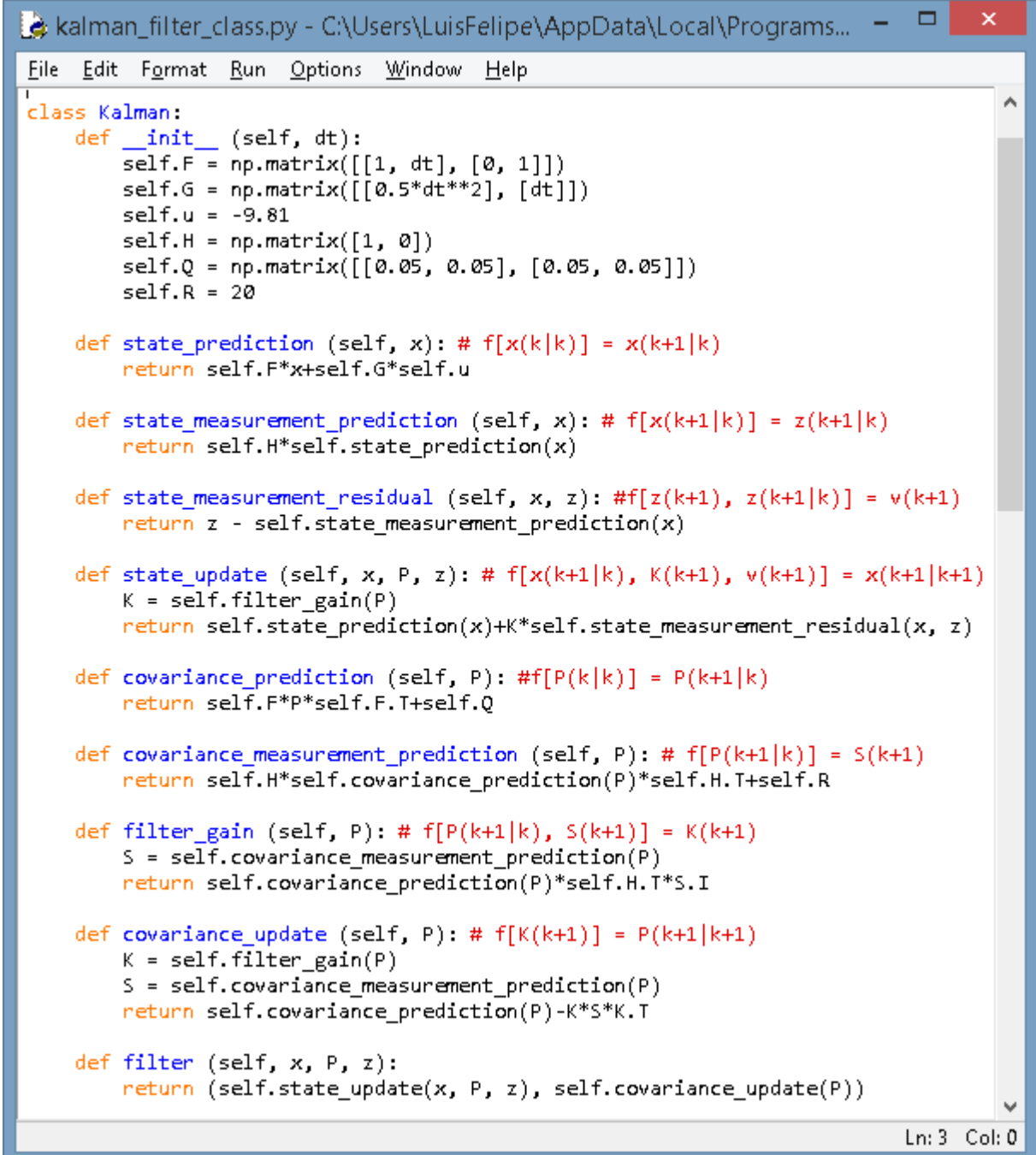
A estimação do estado é feita da seguinte forma:

1. Predição da covariância:  $P(k + 1|k) = AP(k|k)A^T + Q$
2. Predição da medição:  $S(k + 1) = HP(k + 1|k)H^T + R$
3. Ganho de Kalman:  $K(k + 1) = P(k + 1|k)H^T S^{-1}(k + 1)$
4. Atualização da estimativa:  $P(k + 1|k + 1) = P(k + 1|k) - K(k + 1)S(k + 1)K^T(k + 1)$

#### 4 IMPLEMENTAÇÃO DO FILTRO DE KALMAN EM PYTHON

O algoritmo da seção anterior foi implementado em “Python”, conforme mostra a **Figura 2**. Cada passo do algoritmo foi implementado como um método da classe Kalman. O método “Kalman.filter” devolve os valores filtrados  $\{x(k+1|k+1), P(k+1|k+1)\}$ .

**Figura 2** - Implementação em Python do Filtro de Kalman



```

class Kalman:
    def __init__(self, dt):
        self.F = np.matrix([[1, dt], [0, 1]])
        self.G = np.matrix([[0.5*dt**2], [dt]])
        self.u = -9.81
        self.H = np.matrix([1, 0])
        self.Q = np.matrix([[0.05, 0.05], [0.05, 0.05]])
        self.R = 20

    def state_prediction (self, x): # f[x(k|k)] = x(k+1|k)
        return self.F*x+self.G*self.u

    def state_measurement_prediction (self, x): # f[x(k+1|k)] = z(k+1|k)
        return self.H*self.state_prediction(x)

    def state_measurement_residual (self, x, z): #f[z(k+1), z(k+1|k)] = v(k+1)
        return z - self.state_measurement_prediction(x)

    def state_update (self, x, P, z): # f[x(k+1|k), K(k+1), v(k+1)] = x(k+1|k+1)
        K = self.filter_gain(P)
        return self.state_prediction(x)+K*self.state_measurement_residual(x, z)

    def covariance_prediction (self, P): #f[P(k|k)] = P(k+1|k)
        return self.F*P*self.F.T+self.Q

    def covariance_measurement_prediction (self, P): # f[P(k+1|k)] = S(k+1)
        return self.H*self.covariance_prediction(P)*self.H.T+self.R

    def filter_gain (self, P): # f[P(k+1|k), S(k+1)] = K(k+1)
        S = self.covariance_measurement_prediction(P)
        return self.covariance_prediction(P)*self.H.T*S.I

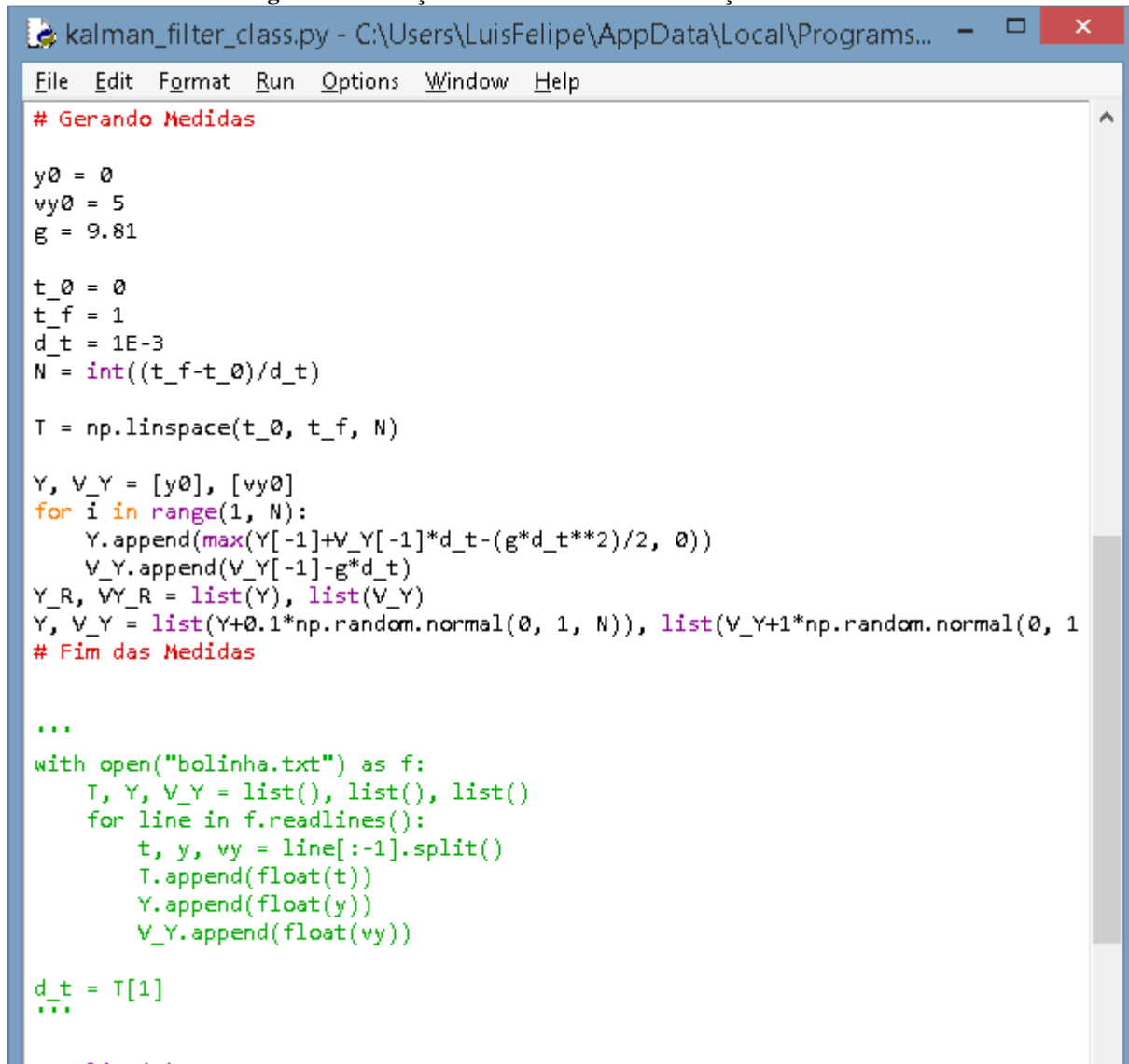
    def covariance_update (self, P): # f[K(k+1)] = P(k+1|k+1)
        K = self.filter_gain(P)
        S = self.covariance_measurement_prediction(P)
        return self.covariance_prediction(P)-K*S*K.T

    def filter (self, x, P, z):
        return (self.state_update(x, P, z), self.covariance_update(P))
  
```

Fonte: Elaborado pelo autor. Baseado no algoritmo de Kleeman [2].

Os dados são gerados artificialmente utilizando um modelo real e adicionando ruído (amostras aleatórias de uma distribuição normal) a este sinal com a biblioteca “numpy”, como pode ser visto em **Figura 3**. Dados experimentais também foram obtidos a partir da ferramenta de análise de vídeos “Tracker”, conforme mostra a **Figura 4**. A aplicação do filtro sobre os dados pode ser vista na **Figura 5**. A versão completa da implementação do algoritmo pode ser encontrada em [https://github.com/luisfelipe-fs/PDS\\_FILTRO\\_DE\\_KALMAN](https://github.com/luisfelipe-fs/PDS_FILTRO_DE_KALMAN)

**Figura 3** - Produção Artificial de Dados do Lançamento Vertical



```

kalman_filter_class.py - C:\Users\LuisFelipe\AppData\Local\Programs...
File Edit Format Run Options Window Help

# Gerando Medidas

y0 = 0
vy0 = 5
g = 9.81

t0 = 0
tf = 1
dt = 1E-3
N = int((tf-t0)/dt)

T = np.linspace(t0, tf, N)

Y, V_Y = [y0], [vy0]
for i in range(1, N):
    Y.append(max(Y[-1]+V_Y[-1]*dt-(g*dt**2)/2, 0))
    V_Y.append(V_Y[-1]-g*dt)
Y_R, V_Y_R = list(Y), list(V_Y)
Y, V_Y = list(Y+0.1*np.random.normal(0, 1, N)), list(V_Y+1*np.random.normal(0, 1
# Fim das Medidas

...

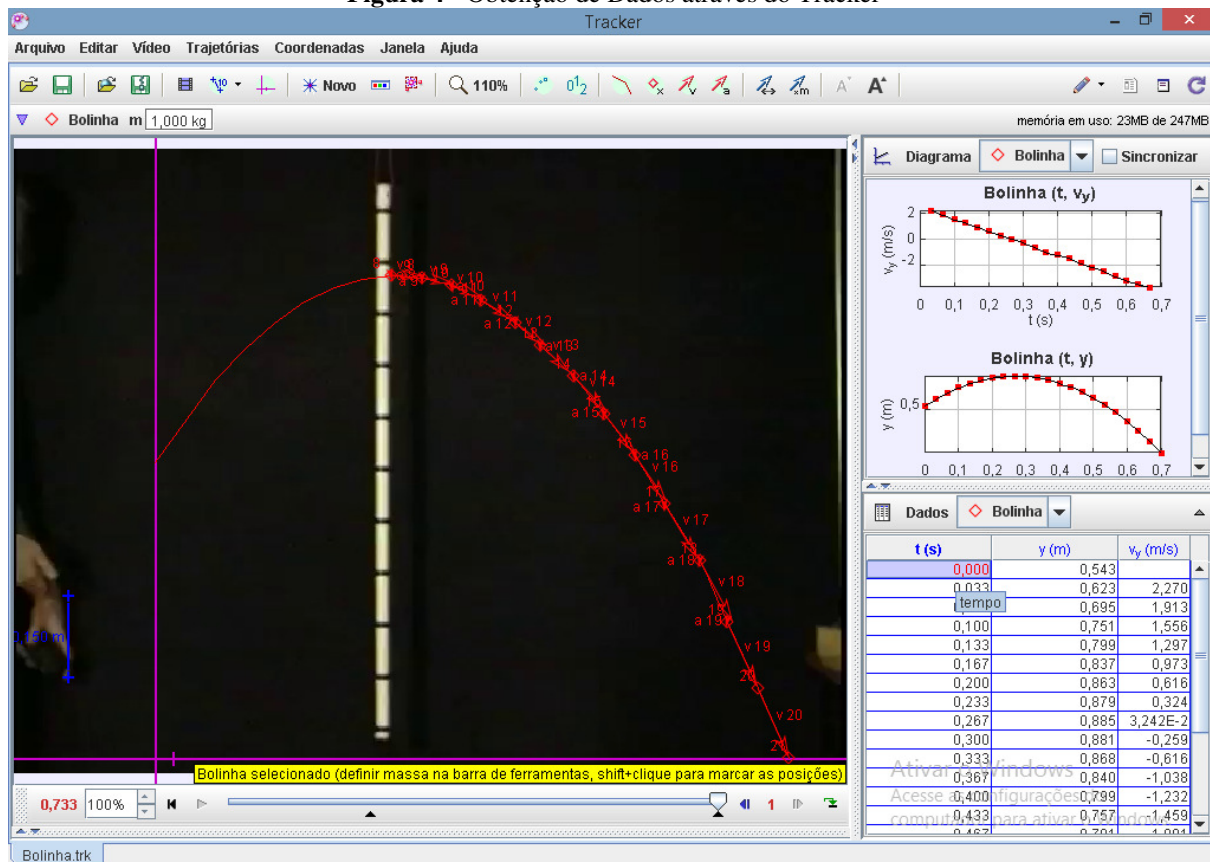
with open("bolinha.txt") as f:
    T, Y, V_Y = list(), list(), list()
    for line in f.readlines():
        t, y, vy = line[:-1].split()
        T.append(float(t))
        Y.append(float(y))
        V_Y.append(float(vy))

dt = T[1]
...

```

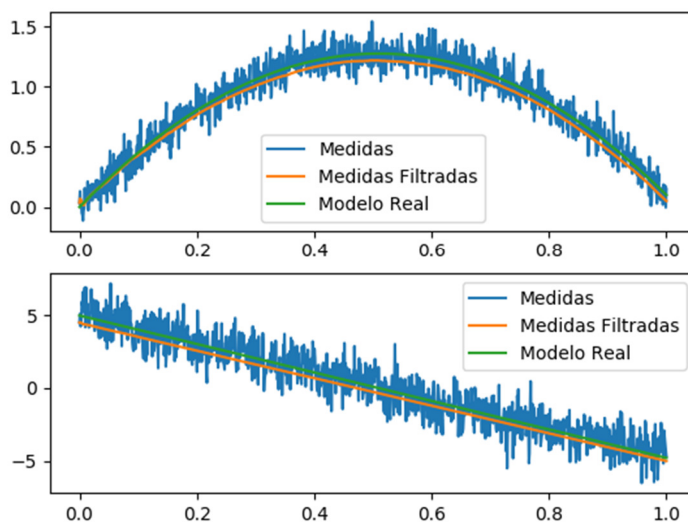
Fonte: Elaborado pelo autor.

**Figura 4 - Obtenção de Dados através do Tracker**



Fonte: Elaborado pelo autor.

**Figura 5 - Comparação Entre Dados Medidos e Filtrados**



Fonte: Elaborado pelo autor.

## CONCLUSÃO

Inicialmente, introduziu-se o filtro de Kalman descrevendo a sua natureza e as suas aplicações mais recorrentes para ilustrar as possibilidades do seu uso e para justificar a sua apresentação como tema de projeto no contexto da disciplina de Processamento Digital de Sinais. Em seguida, se descreve as ideias por trás do filtro de Kalman, com o intuito de enriquecimento teórico sobre o funcionamento do filtro e também permitir que seja possível compreender os parâmetros presentes nos detalhes da implementação do algoritmo. Esta implementação foi descrita através de fluxograma, em passo-a-passos escritos e também com a implementação na linguagem de programação Python. Os dados provenientes como entrada foram tanto gerados artificialmente, quanto experimentalmente utilizando o software Tracker para extrair dados da trajetória de um lançamento oblíquo. Com isso, conclui-se que o trabalho foi satisfatório, já que além de se conhecer esta poderosa ferramenta que é o filtro de Kalman, também se implementou o algoritmo, levando a um conhecimento mais profundo das ideias e parâmetros envolvidos na construção do filtro, abrindo a possibilidade para implementações futuras do filtro em problemas mais interessantes.

## REFERÊNCIAS

- [1] BZARG. **How a Kalman filter works, in pictures**. 2015. Disponível em: <https://www.bzarg.com/p/how-a-kalman-filter-works-in-pictures/>. Acesso em 06 jul. 2019.
- [2] Kleeman, L. **Understanding and Applying Kalman Filtering**. Monash University, 2017. Disponível em: <https://ecse.monash.edu/centres/irrc/LKPubs/Kalman.pdf>. Acesso em: 07 jul. 2019
- [3] LACEY, T. **Tutorial: The kalman filter**. Georgia Institute of Technology, 2019. Disponível em: <https://pdfs.semanticscholar.org/2a47/61df17525de463341320bf0458c98e04c654.pdf>. Acesso em: 06 jul. 2019.
- [4] SRINI, S. **The Kalman Filter: An algorithm for making sense of fused sensor insight**. 2018. Disponível em: <https://towardsdatascience.com/kalman-filter-an-algorithm-for-making-sense-from-the-insights-of-various-sensors-fused-together-ddf67597f35e>. Acesso em: 06 jul. 2019.
- [5] TEOW, J. **Understanding Kalman Filters with Python**. 2018. Disponível em: <https://medium.com/@jaems33/understanding-kalman-filters-with-python-2310e87b8f48>. Acesso em 05 jul. 2019.