

Análise de Coerência Wavelet em Sinais Ruidosos com Picos Gaussianos Defasados

Ândrio Epping^a, Luís Felipe Lewandoski Borsoi^a

^aEscola Politécnica, Universidade do Vale do Rio dos Sinos - UNISINOS, São Leopoldo, Brasil

ARTICLE INFO

Keywords:

Transformada Wavelet
Espectro Cruzado
Coerência Wavelet
Sinais Ruidosos

ABSTRACT

Este trabalho apresenta uma metodologia baseada em análise tempo-frequência utilizando a transformada wavelet contínua e uma formulação adaptada para espectro cruzado e coerência entre sinais. A abordagem permite identificar, com precisão, picos gaussianos presentes em sinais ruidosos com defasagens temporais distintas. Aplicando-se a função wavelet de Morlet e a nova definição matemática apresentada por Schuck e Bardo (2019), foi possível representar e quantificar a semelhança local entre sinais com diferentes atrasos. A técnica foi validada em sinais sintéticos e mostra potencial para aplicações em engenharia biomédica e análise de séries temporais multivariadas.

1. Introdução

A análise de sinais ruidosos e defasados é uma tarefa recorrente na engenharia e nas ciências aplicadas, com impacto direto em áreas como neuroengenharia, telecomunicações, geofísica e diagnóstico de falhas. Muitas vezes, é necessário identificar padrões transitórios — como picos gaussianos — que ocorrem em diferentes momentos em múltiplos sinais corrompidos por ruído.

Enquanto técnicas clássicas como a Transformada de Fourier oferecem boa resolução em frequência, perdem a capacidade de localizar eventos no tempo. A Transformada Wavelet Contínua (CWT), por sua vez, resolve esse problema ao oferecer uma representação tempo-frequência multiescala, capturando eventos localizados de curta duração com alta resolução temporal, ao passo que eventos mais longos são representados com melhor definição em frequência.

O artigo de Schuck e Bardo (2019) propõe uma nova formulação matemática para o cálculo do espectro cruzado (WCS) e da coerência wavelet (WCO), redefinindo essas métricas para lidar melhor com sinais ruidosos e deslocados temporalmente. A abordagem introduz o conceito de autocorrelação e correlação cruzada não viesada (unbiased) como ponto de partida, ao invés do uso direto dos coeficientes da CWT. Em seguida, a transformada wavelet é aplicada a essas funções de correlação, promovendo uma análise tempo-frequência da similaridade estatística entre sinais.

Além disso, a nova definição de coerência proposta no artigo incorpora uma normalização de energia baseada apenas nos valores centrais das distribuições, reduzindo a influência de componentes fora de fase ou de padrões espúrios. Isso permite que estruturas locais semelhantes — como pulsos defasados ou deformados — sejam detectadas de forma mais robusta, mesmo sob ruído intenso.

Neste trabalho, adaptamos essa formulação para um conjunto de sinais sintéticos contendo ruído branco e pulsos

gaussianos. Nosso objetivo é validar a eficácia da técnica para detectar coerência entre eventos similares deslocados no tempo, além de propor uma representação visual bidimensional que evidencie as regiões de maior semelhança estrutural entre os sinais.

2. Fundamentação Teórica

A Transformada Wavelet Contínua (CWT) é uma ferramenta essencial para a análise tempo-frequência de sinais não estacionários, permitindo capturar variações locais em diferentes escalas. Ela é definida como:

$$W_x(b, a) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \psi^* \left(\frac{t-b}{a} \right) dt \quad (1)$$

onde:

- $x(t)$ é o sinal analisado;
- $a > 0$ é o parâmetro de **escala** (inversamente proporcional à frequência);
- b representa a **translação temporal**;
- $\psi(t)$ é a **wavelet-mãe**, cuja forma define a sensibilidade da análise em tempo e frequência;
- o asterisco denota o conjugado complexo.

Neste trabalho, emprega-se a **wavelet complexa de Morlet**, uma função amplamente utilizada na literatura devido à sua boa localidade tanto no tempo quanto na frequência. Essa wavelet consiste na modulação de uma gaussiana por uma senóide complexa, o que a torna particularmente adequada para a análise de eventos oscilatórios e transitórios.

2.1. Espectro de Potência e Coerência Clássicos

A partir dos coeficientes $W_x(b, a)$ da CWT, calcula-se o **Espectro de Potência Wavelet (WPS)** como:

$$WPS_x(b, a) = E \left\{ W_x(b, a) \overline{W_x(b, a)} \right\} \quad (2)$$

✉ andrioeping@gmail.com (Epping); luis.borsoi@gmail.com (L.F.L. Borsoi)

Borsoi)

ORCID(s):

Esse espectro representa a densidade local de energia do sinal ao longo do tempo e da escala. É uma ferramenta útil para identificar padrões transitórios em sinais ruidosos, como pulsos localizados em diferentes frequências.

A análise entre dois sinais $x(t)$ e $y(t)$ via CWT permite extrair o **Espectro Cruzado Wavelet (WCS)**:

$$\text{WCS}_{xy}(b, a) = E \left\{ W_x(b, a) \overline{W_y(b, a)} \right\} \quad (3)$$

A partir dele, define-se a **Coerência Wavelet Tradicional (WCO)**, uma medida normalizada de correlação local:

$$\text{WCO}_{xy}(b, a) = \frac{|\text{WCS}_{xy}(b, a)|^2}{|\text{WPS}_x(b, a)| \cdot |\text{WPS}_y(b, a)|} \quad (4)$$

Nessas expressões, $E\{\cdot\}$ representa o operador de valor esperado, que na prática é estimado por suavização bidimensional (por exemplo, convolução com um filtro gaussiano). A barra sobre os termos indica o conjugado complexo. O numerador mede a força da correlação local entre os dois sinais, enquanto o denominador normaliza essa medida em relação à energia de cada um.

2.2. Formulação Alternativa de Schuck e Bardo (2019)

Schuck e Bardo propõem uma redefinição das métricas de espectro e coerência no domínio wavelet. Em vez de aplicar a CWT diretamente aos sinais, a proposta consiste em aplicá-la às funções de autocorrelação e correlação cruzada dos sinais. Essa abordagem tende a ser mais robusta à presença de ruído e a defasagens temporais. A autocorrelação é uma medida da semelhança de um sinal com ele mesmo em diferentes atrasos temporais. Já a correlação cruzada mede a semelhança entre dois sinais distintos ao longo do tempo, capturando possíveis alinhamentos ou padrões comuns com defasagem.

As funções de correlação utilizadas são estimadas com expressões não tendenciosas (unbiased), definidas como:

$$\hat{R}_{xx}[m] = \frac{1}{N-m} \sum_{n=0}^{N-m-1} x[n+m] \cdot \overline{x[n]} \quad (5)$$

$$\hat{R}_{yy}[m] = \frac{1}{N-m} \sum_{n=0}^{N-m-1} y[n+m] \cdot \overline{y[n]} \quad (6)$$

$$\hat{R}_{xy}[m] = \frac{1}{N-m} \sum_{n=0}^{N-m-1} x[n+m] \cdot \overline{y[n]} \quad (7)$$

Essas expressões correspondem às definições clássicas de autocorrelação e correlação cruzada com correção de viés, utilizadas para capturar a dependência entre amostras com defasagem m .

A Transformada Wavelet Contínua é então aplicada às funções acima, gerando os espectros no domínio tempo-escala:

$$\text{WPS}_x(b, a) = E \left\{ \left| \text{CWT} \{ \hat{R}_{xx}[m] \} (b, a) \right|^2 \right\} \quad (8)$$

$$\text{WPS}_y(b, a) = E \left\{ \left| \text{CWT} \{ \hat{R}_{yy}[m] \} (b, a) \right|^2 \right\} \quad (9)$$

$$\text{WCS}_{xy}(b, a) = E \left\{ \text{CWT} \{ \hat{R}_{xy}[m] \} (b, a) \right\} \quad (10)$$

Com base nesses espectros, a **Coerência Wavelet Alternativa (WCO)** é definida como:

$$\text{WCO}_{xy}(b, a) = \frac{|\text{WCS}_{xy}(b, a)|^2}{|\text{WPS}_x(0, a)| \cdot |\text{WPS}_y(0, a)|} \quad (11)$$

Essa forma evita o uso de suavização bidimensional explícita e favorece a identificação de padrões similares mesmo quando ocorrem com atraso entre os sinais. A normalização é feita com os espectros em $b = 0$, onde a autocorrelação atinge seu valor máximo, enquanto a coerência cruzada pode alcançar seu pico em outro instante.

3. Materiais e Métodos

A metodologia foi implementada em Python utilizando as bibliotecas `numpy`, `pywt` e `matplotlib`. Os passos seguidos foram:

- Geração de dois sinais:
 - Um pulso gaussiano centrado em $t = 0,25$ s com largura de $0,1$ s.
 - Ruído branco adicionado aos sinais com variância reduzida.
 - O segundo sinal apresenta atraso de $0,4$ s em relação ao primeiro.
- Cálculo das correlações $R_{xx}(t)$, $R_{yy}(t)$ e $R_{xy}(t)$.
- Aplicação da CWT com a wavelet complexa de Morlet (`cmor0.5-1.5`) sobre as funções de correlação.
- Cálculo da coerência alternativa conforme definido por Schuck e Bardo.
- Visualização dos escalogramas de potência e coerência.

Neste trabalho, emprega-se a wavelet complexa de Morlet — identificada como `cmor0.5-1.5` — que combina uma gaussiana com uma oscilação senoidal no domínio do tempo. Essa wavelet é especificada com dois parâmetros:

- `0.5`: largura da janela gaussiana (valores maiores \Rightarrow melhor resolução em frequência);
- `1.5`: frequência central da onda portadora (valores maiores \Rightarrow melhor resolução temporal).

Essa configuração oferece um bom compromisso entre resolução temporal e frequencial, sendo adequada para eventos breves e localizados, como pulsos gaussianos.

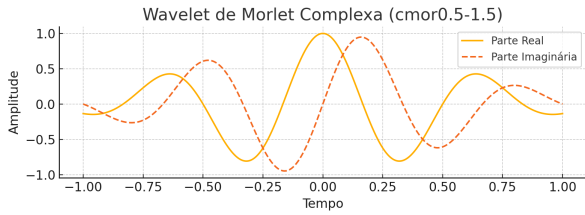


Figure 1: Wavelet complexa de Morlet com parâmetros cmor0.5-1.5: parte real (linha sólida) e parte imaginária (linha tracejada).

4. Resultados e Discussão

A Figura 2 mostra os dois sinais analisados. Eles constituem o mesmo pulso gaussiano modulado com amplitude unitária acrescido de um ruído branco, porém o segundo sinal está com um defasagem (delay) de 0,4 segundos, feito através do deslocamento do pulso original. A duração total do sinal é de 2 segundos e a taxa de amostragem é de 1000 Hz. Para a construção do pulso gaussiano modular, foi utilizada a equação 12, somada de valores aleatórios gerados com até 5% da intensidade total do sinal do pulso.

$$g(t) = e^{-t^2} \cdot \cos(6t) \quad (12)$$

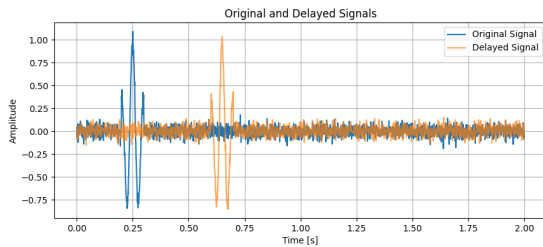


Figure 2: Sinais sintéticos: sinal original e sinal defasado com ruído.

Primeiramente foi calculado o WPS do sinal original e defasado utilizando a definição clássica para a Espectro de Potência Wavelet. Observa-se pelas figuras 3 e 4, que a potência de cada sinal aparece defasada no tempo, tal qual os 2 pulsos foram originalmente gerados. Isso nos sugere se tratarem de 2 pulsos diferentes.

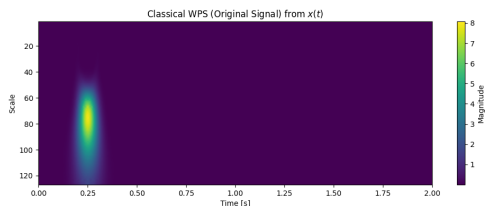


Figure 3: WPS clássico do sinal original

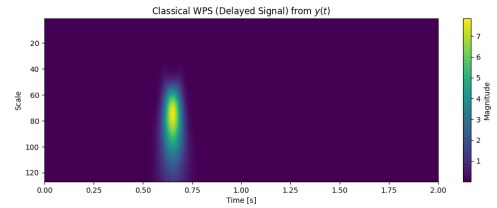


Figure 4: WPS clássico do sinal atrasado

Já na Figura 5 e 6, observa-se o espectro de potência wavelet (WPS) para cada sinal, obtido a partir de suas autocorrelações, conforme a definição alternativa sugere. Observa-se padrões similares nas escalas associadas ao pulso, porém agora ambos os pulsos se apresentam no mesmo instante de tempo, em torno de 0 s. Isso ocorre pois como são 2 pulsos rápidos em meio ao ruído branco, praticamente sua totalidade de correlação se encontra no instante de tempo 0, quando ambas as funções ainda estão sobrepostas.

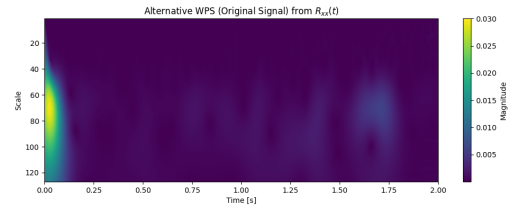


Figure 5: WPS alternativo do sinal original a partir de $R_{xx}(t)$.

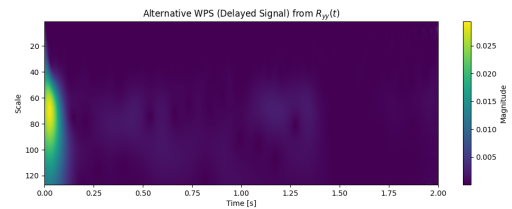


Figure 6: WPS alternativo do sinal atrasado a partir de $R_{yy}(t)$.

Partindo para o Espectro cruzado, observa-se na figura 7, produzida através da equação clássica, que ambos os sinais estão deslocados um em relação ao outro, e portanto apresentam baixa correlação cruzada.

Já a Figura 8 mostra o espectro cruzado obtido da função $R_{xy}(t)$, ou seja, calculado a partir correlação cruzada entre o sinal original e o defasado, destacando a correlação local em escalas intermediárias. Esse gráfico nos mostra que os sinais são altamente correlacionados dado um deslocamento de 0,4 segundos - exatamente o tempo de defasagem.

Seguindo na análise, a figura 9 mostra o WCO calculado da forma clássica e indica claramente que ambos os sinais

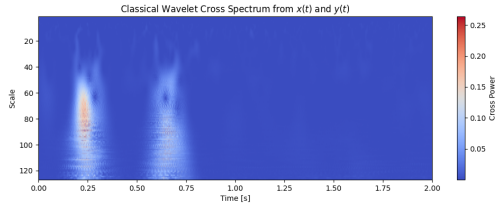


Figure 7: Espectro cruzado wavelet clássico

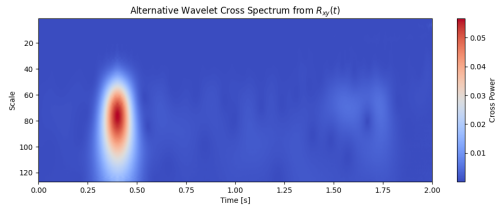


Figure 8: Espectro cruzado wavelet alternativo baseado em $R_{xy}(t)$.

não possuem nenhum grau de correlação local linear local ao longo de toda a extensão do sinal.

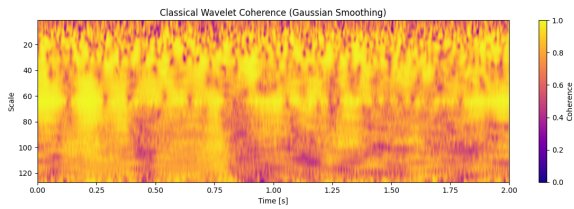


Figure 9: Coerência wavelet clássica

Por outro lado, a Figura 10 apresenta a coerência alternativa $WCO_{xy}(a, b)$. Observa-se uma clara zona de alta coerência normalizada, coincidente com o tempo do pulso nos dois sinais, mesmo com o atraso. Isso valida a robustez da técnica frente ao ruído e à defasagem. Nota-se que a coerência está centrada no ponto 0,4, coincidindo perfeitamente com o atraso gerado nos pulsos de entrada.

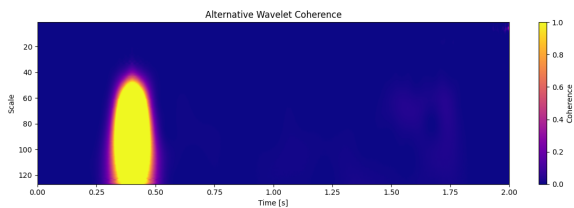


Figure 10: Coerência wavelet alternativa com base nas correlações.

5. Conclusão

O estudo demonstrou a aplicabilidade da nova formulação de Schuck e Bardo (2019) para análise de coerência wavelet entre sinais ruidosos e defasados. A abordagem permitiu a identificação precisa de eventos locais, como picos gaussianos, mesmo quando ocorrem com atraso temporal, independente do tamanho do atraso. A nova definição também permite identificar precisamente qual foi a magnitude do atraso, uma vez que a coerência Wavelet é apresentada deslocada da origem de tal maneira que se relacione com o atraso, o que não ocorre na definição clássica, onde os dois eventos parecem ser diferentes e possuem baixa correlação.

A análise mostrou que a função de coerência modificada apresenta vantagens significativas frente à definição tradicional, especialmente na detecção de padrões similares mascarados por ruído. Como resultado, esta técnica pode ser incorporada em sistemas de monitoramento sensíveis e em estudos de correlação estrutural entre sinais.

6. Trabalhos Futuros

Como proposta de continuação, os próximos passos incluem:

- Aplicação da técnica a sinais reais de EEG multicanal, vibração mecânica e séries ambientais.
- Extensão para análise bidimensional (2D), permitindo estudar imagens e mapas espaço-temporais.
- Exploração de técnicas de aprendizagem de máquina para detectar automaticamente regiões de alta coerência.

A implementação completa em Python, gráficos e dados gerados estão disponíveis neste repositório.

[4] [3] [2] [1]

References

- [1] I. Daubechies. *Ten Lectures on Wavelets*. SIAM, Philadelphia, 1992.
- [2] P. Developers. Continuous wavelet transform (cwt) — pywavelets documentation. <https://pywavelets.readthedocs.io/en/latest/ref/cwt.html>, 2024. Acesso em: 15 jun. 2025.
- [3] C. S. Herrmann, M. Grigutsch, and N. A. Bush. Eeg oscillations and wavelet analysis. In L. L. Schumaker, editor, *Event-related potentials: A methods handbook*. MIT Press, Cambridge, MA, 2005.
- [4] P. Schuck and A. Bardo. Cross-correlation and coherence analysis using continuous wavelet transforms. In C. Constanda and M. A. Ivanchikova, editors, *Integral Methods in Science and Engineering*, pages 223–231. Birkhäuser, 2019.