

**TAREA: PÉRDIDAS DE PRESIÓN**

Instituto Politécnico Nacional  
Dinámica de Flujos Bifásicos

**Profesor:**

Dr. Florencio Sánchez

**Alumno:**

Luis Fernando Pérez

5 de abril de 2022

## Enunciado

---

Aire y agua fluyen a través de un tubo vertical de 2.54 cm de diámetro interno. Los flujos máscicos locales son:  $w_l = 1.0 \text{ kg/s}$  y  $w_g = 0.01135 \text{ kg/s}$ . En un punto del tubo, la temperatura es de  $25^\circ\text{C}$  y las propiedades físicas de los fluidos son:

$$\rho_l = 1000 \text{ kg/m}^3,$$

$$\mu_l = 1.0 \text{ cP},$$

$$\rho_g = 1.6 \text{ kg/m}^3,$$

$$\mu_g = 0.02 \text{ cP},$$

- a) Determinar los gradientes de presión: de fricción, gravitacional, de aceleración usando el modelo homogéneo.
- b) Determinar el patrón del flujo usando el modelo de Hewitt-Roberts.

Ahora bien, **suponiendo un flujo horizontal**,

- c) Determinar el patrón del flujo usando la Carta de Mandhane y el modelo de Taitel - Dukler
- d) Calcular la caída de presión suponiendo flujo homogéneo de Wallis.
- e) Calcular la caída de presión usando el método de Lockhart y Martinelli.
- f) Calcular la caída de presión usando el método de Dukler-Eaton-Flanigan.
- g) Calcular la caída de presión usando el método de Beggs y Brill.
- h) Comparar y comentar los resultados.

---

Cálculos preliminares:

Realizaremos algunos cálculos preliminares que nos serán útiles:

Temperatura en Kelvin:

$$T = T[^\circ\text{C}] + 273.150 = 298.150 \text{ K},$$

Área transversal de la tubería:

$$A = 0.25\pi d^2 = 0.00051 \text{ m}^2,$$

Velocidad superficial del líquido:

$$V_{sl} = \frac{w_l}{\rho_l A} = 1.974 \text{ m/s},$$

Velocidad superficial del gas:

$$V_{sg} = \frac{w_g}{\rho_g A} = 14.000 \text{ m/s},$$

Calidad:

$$x = \frac{w_g}{w_g + w_l} = 0.0112,$$

Flujo másico de la mezcla:

$$G = \frac{w_l + w_g}{A} = 1995.925 \text{ kg/(s m}^2\text{)},$$

Velocidad de la mezcla:

$$V_m = V_{sl} + V_{sg} = 15.973 \text{ m/s},$$

Fraccion de volumen superficial del liquido:

$$\lambda_l = \frac{V_{sl}}{V_m} = 0.124,$$

Densidad de la mezcla:

$$\rho_m = \lambda_l \rho_l + (1 - \lambda_l) \rho_g = 124.954 \text{ kg/m}^3,$$

Viscosidad de la mezcla usando semejanza:

$$\mu_m = \lambda_l \mu_l + (1 - \lambda_l) \mu_g = 0.00014 \text{ kg/(m s)},$$

Número de Reynolds de la mezcla:

$$Re_m = \frac{\rho_m V_m d}{\mu_m} = 359342.92773,$$

**a)** Determinar los gradientes de presión: de fricción, gravitacional, de aceleración usando el modelo homogéneo.

En el modelo de Flujo Homogéneo de Wallis (1969) se consideran las dos fases del fluido como una sola fase efectiva, en la que se promedian varias magnitudes de las fases originales. Para que esta aproximación sea válida, las fases tienen que estar perfectamente equilibradas, tener un movimiento unidireccional, ambas fases estar a la misma velocidad y no hay deslizamiento entre ellas.

Van a ser necesario los parámetros de Blasius para el modelo de fricción, en este caso  $n$  y  $C$ , donde para flujos laminares:  $n = 1$  y  $C = 16$  y para flujos turbulentos  $n = 0.2$  y  $C = 0.046$ . Como en este modelo se trata la mezcla como un fluido equivalente, su estado

equivalente sería turbulento debido a su número de Reynolds.

El factor de roce entonces es:

$$f_F = C Re_m^{-n} = 0.00356$$

Y se puede calcular la caída de presión debido a roce usando :

$$-\left(\frac{dp}{dz}\right)_f = \frac{2f_F \rho_m V_m^2}{d} = 8941.06 \text{ Pa/m}, \quad (1)$$

Por otro lado, el gradiente de presión por gravedad es (recordar que  $\theta = 90^\circ$ ):

$$-\left(\frac{dp}{dz}\right)_g = \rho_m g \sin(\theta) = 1225.80 \text{ Pa/m}, \quad (2)$$

Sin embargo, el cálculo del gradiente de presión por aceleración es mas complejo, su forma general es:

$$-\left(\frac{dp}{dz}\right)_a = G^2 \left[ \nu_{gl} \frac{dx}{dz} + \frac{dp}{dz} \left( x \frac{d\nu_g}{dz} + (1-x) \frac{d\nu_l}{dz} \right) \right] - \frac{G^2}{\rho_m A} \frac{dA}{dz}, \quad (3)$$

Ahora, en el problema el área transversal de la tubería permanece constante, así que  $\frac{dA}{dz} = 0$ , también el agua es para nuestros propósitos, un flujo incompresible y  $\frac{d\nu_l}{dz} = 0$  y en el flujo no hay cambios de fase, así que la calidad es constante  $\frac{dx}{dz} = 0$ , simplificándose la ecuación (3) a:

$$-\left(\frac{dp}{dz}\right)_a = G^2 x \frac{d\nu_g}{dz} \frac{dp}{dz}, \quad (4)$$

Si se supone el aire como un gas ideal de masa molar  $M = 0.029 \text{ kg/mol}$ , se puede calcular la variación de la volumen específico con respecto a la presión como:

$$\frac{d\nu_g}{dp} = -\frac{M}{RT\rho_g^2} = -4.5698 \times 10^{-6} \text{ m}^4/(\text{kg}^2 \text{ s}),$$

Donde  $R = 8.31446261815324 \text{ Pa m}^3/(\text{K mol})$  es la constante universal de los gases. Si tomamos en cuenta que la caída de presión total es:

$$\frac{dp}{dz} = \left(\frac{dp}{dz}\right)_f + \left(\frac{dp}{dz}\right)_g + \left(\frac{dp}{dz}\right)_a = \left(\frac{dp}{dz}\right)_f + \left(\frac{dp}{dz}\right)_g - \left(G^2 x \frac{d\nu_g}{dz}\right) \frac{dp}{dz},$$

Entonces se puede calcular la caída de presión inercial:

$$-\left(\frac{dp}{dz}\right)_a = -\frac{G^2 x \frac{d\nu_g}{dz}}{1 + G^2 x \frac{d\nu_g}{dz}} \left[ \left(\frac{dp}{dz}\right)_f + \left(\frac{dp}{dz}\right)_g \right] = 2610.42 \text{ Pa/m}, \quad (5)$$

b) Determinar el patrón del flujo usando el modelo de Hewitt-Roberts.

Para este ejercicio, la coordenada horizontal en el diagrama Hewitt-Roberts (HR) es  $3.89 \times 10^3 \text{ kg}/(\text{s}^2 \text{ m})$  mientras que la coordenada vertical en el diagrama HR:  $3.14 \times 10^2 \text{ kg}/(\text{s}^2 \text{ m})$ . Graficando este punto en el diagrama HR 1 da como patrón estimado el Anular Wipsy.

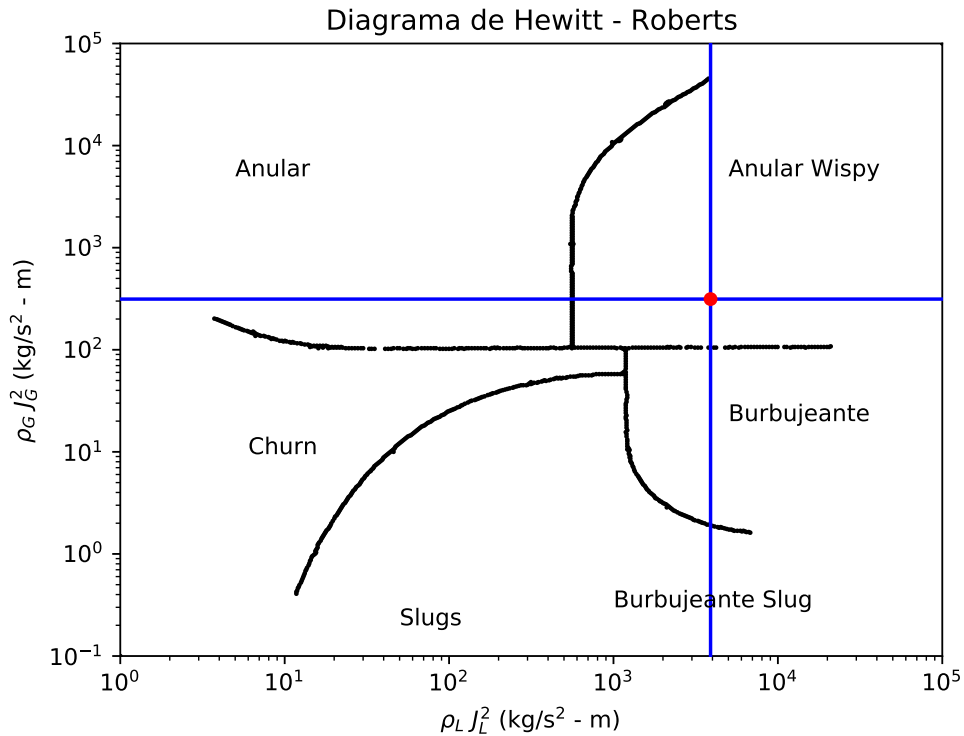


Figura 1: Diagrama de Hewitt-Roberts para la tubería vertical.

c) Determinar el patrón del flujo usando la Carta de Mandhane y el modelo de Taitel - Dukler.

A partir de aquí, la tubería está horizontal, así que  $\theta = 0$ .

Para este ejercicio, la coordenada horizontal en la carta de Mandhane es 1.95 m/s para la velocidad superficial líquido, mientras que la coordenada vertical es 0.157 m/s para la velocidad superficial gas. Graficando este punto en el diagrama de Mandhane 2 da como patrón estimado el flujo intermitente o slug

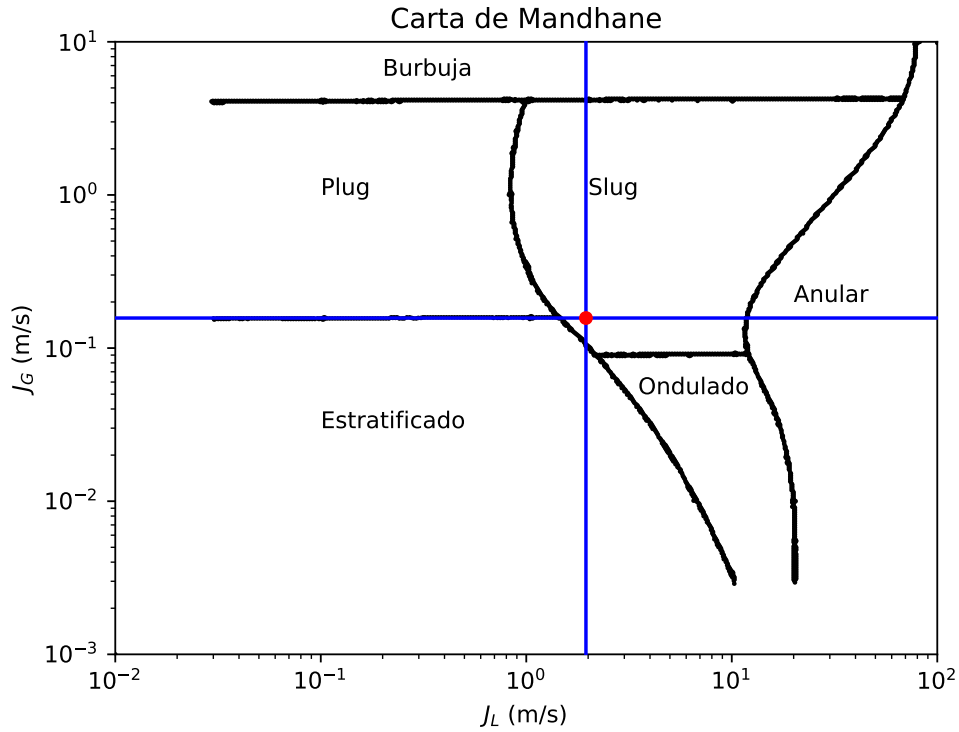


Figura 2: Carta de Mandhane para la tubería horizontal.

En el caso del modelo de Taitel y Dukler se usó el mismo código que en la tarea anterior de Modelado de Transiciones pero con los parámetros de este ejercicio, y los resultados para las variables adimensionales se encuentran en la tabla 1. Este modelo predice que el sistema está en la fase intermitente o slug, al igual que en la carta de Mandhane para el mismo sistema.

Parámetro	valor	Parámetro	valor	Parámetro	valor
X	3.33013	$\tilde{S}_g$	1.322	$\tilde{v}_l$	1.526
Y	0.00000	$\tilde{S}_l$	1.820	$\tilde{v}_g$	2.902
$(R_e)_l$	50127.54	$\tilde{S}_i$	0.969	$\tilde{d}_l$	1.131
$(R_e)_g$	28447.38	$\tilde{A}_l$	0.515	$\tilde{d}_g$	0.473
$\tilde{h}$	0.623	$\tilde{A}_g$	0.271		

Tabla 1: Valores numéricos estimados de cada parámetro adimensional para la tubería horizontal.

**d)** Calcular la caída de presión suponiendo flujo homogéneo de Wallis.

El modelo de Wallis ya se usó para calcular la caída de presión pero para el caso vertical. En este caso horizontal, solo hay que volver a usar la ecuación (1) para la caída de presión

por fricción, la ecuación (2) para la caída de presión por gravedad y la ecuación (5) para la caída de presión inercial, pero considerando que  $\theta = 0$ , por lo que se espera que en comparación al caso vertical, solo exista diferencia en los gradientes de presión por gravedad y por aceleración.

Caída de presión por fricción:

$$\left(-\frac{dp}{dz}\right)_f = \frac{2f_F \rho_m V_m^2}{d} = 8941.06 \text{ Pa/m},$$

Caída de presión por gravedad:

$$\left(-\frac{dp}{dz}\right)_g = \rho_m g \sin(\theta) = 0.0 \text{ Pa/m},$$

Caída de presión por aceleración:

$$\left(-\frac{dp}{dz}\right)_a = -\frac{G^2 x \frac{d\nu_g}{dz}}{1 + G^2 x \frac{d\nu_g}{dz}} \left[ \left(\frac{dp}{dz}\right)_f + \left(\frac{dp}{dz}\right)_g \right] = 2295.68 \text{ Pa/m},$$

La caída total de presión es la suma de las anteriores:

$$\left(-\frac{dp}{dz}\right) = \left(-\frac{dp}{dz}\right)_f + \left(-\frac{dp}{dz}\right)_g + \left(-\frac{dp}{dz}\right)_a = 11236.74 \text{ Pa/m}, \quad (6)$$

e) Calcular la caída de presión usando el método de Lockhart y Martinelli.

Para el método de Lockhart y Martinelli, se supone que la caída de presión en el líquido, el gas y el flujo bifásico como un todo son iguales:

$$\left(\frac{dp}{dz}\right)_g = \left(\frac{dp}{dz}\right)_l = \left(\frac{dp}{dz}\right)_{tp},$$

Por lo que solo hace falta calcular la caída de presión en una de las fases para saber la de la mezcla. Sin pérdida de generalidad, vamos a elegir la caída de presión del líquido, la cual es:

$$\left(\frac{dp}{dz}\right)_l = \phi_l^2 \left(\frac{dp}{dz}\right)_{sl}, \quad (7)$$

Donde  $\left(\frac{dp}{dz}\right)_{sl}$  es la caída de presión superficial de la fase líquida, es decir, suponiendo que solamente el líquido está en la tubería.

$$\left(\frac{dp}{dz}\right)_{sl} = 2f_l \frac{(Vs_l A \rho_l)^2}{d A^2 \rho_l} = \frac{2C_l}{Re_l^n} \frac{(Vs_l A \rho_l)^2}{d A^2 \rho_l} = 1619.661 \text{ Pa/m}$$

Donde d la tabla 1 del punto c), se ha usado el número de Reynolds de la fase líquida,  $Re_l = 50127.54$ , lo cual nos indica que es un flujo turbulento y por lo tanto  $n = 0.2$  y  $C_l = 0.046$ .

Por otro lado,  $\phi_l$  es el grupo adimensional de presión de la fase líquida. Normalmente es un parámetro difícil de calcular, sin embargo, en 1967 Chisholm proporcionó una forma aproximada pero sencilla de calcular  $\phi_l$  dependiendo solamente del parámetro de Lockhart y Martinelli:

$$\phi_l^2(X) = 1 + \frac{C}{X} + \frac{1}{X^2},$$

Donde  $C$  es un parámetro de que depende de las fases individuales:

C	Líquido	Gas
20	Turbulento	Turbulento
12	Laminar	Turbulento
10	Turbulento	Laminar
5	Laminar	Laminar

Tabla 2: Valores del parámetro de Chisholm.

El cual vale 20 debido a que como se ve en la tabla 1 del punto c),  $Re_g = 28447.38$  y el gas es un flujo turbulento. de la misma tabla se calculó el parámetro de Lockhart y Martinelli, y con eso se puede obtener la caída total de presión en (7):

$$\left(\frac{dp}{dz}\right)_{tp} = 1619.661 \left(1 + \frac{20}{X} + \frac{1}{X^2}\right) = 11493.04 \text{ Pa/m}, \quad (8)$$

f) Calcular la caída de presión usando el método de Dukler-Eaton-Flanigan.

La correlación de Dukler desarrollada en 1964 sub predice la fracción volumétrica de líquido y solo sirve para tuberías horizontales. Es por eso que se usan las correlaciones de Eaton y Flanigan sobre la original de Dukler para solventar estos problemas.

Como siempre, la caída de presión total es la combinación de las componentes por fricción, gravitacional e inercial:

$$\frac{dp}{dz} = \left(\frac{dp}{dz}\right)_f + \left(\frac{dp}{dz}\right)_g + \left(\frac{dp}{dz}\right)_a,$$

En el modelo de Dukler, se desprecia la componente por gravedad, y solo se toma en cuenta los efectos de la fricción y la gravedad. La componente por gravedad se calcula usando la correlación de Flanigan, la cual supone que la pérdida de presión por gravedad solamente



depende de los tramos ascendentes, ya que en los tramos descendentes debido a la estratificación, la presión no se recupera.

$$\Delta p_g = g \rho_l H_l^{up} \sum_i Z_i,$$

Donde  $Z_i$  son las alturas de las secciones ascendentes de la tubería. Como en el enunciado la tubería está horizontal,  $Z_i = 0$  y el gradiente de presión por gravedad es cero, dejando el gradiente de presión total dependiendo solamente de la fricción. Además,  $H_l^{up}$  es la fracción volumétrica de líquido llamada *Hold Up*.

$$H_l^{up} = \frac{1}{1 + 0.3264 (Vs_g^*)^{1.006}} = \frac{1}{1 + 1.0786 Vs_g^{1.006}} = 0.0612, \quad (9)$$

Donde  $Vs_g^*$  es la velocidad superficial del líquido en el sistema imperial (pie/s), como originalmente Flanigan lo publicó, esto es importante porque el factor medido de forma experimental, 0.3264, está pensando para esas unidades. Sin embargo, las velocidades anteriormente calculadas están en el S.I. es por eso que se multiplica la velocidad por el factor 3.281 para transformar del SI al sistema imperial, luego se eleva a 1.006 y se multiplica por el factor original de 0.3264, dando como resultado 1.0786, el factor de la correlación para velocidades en el SI.

La pérdida de presión por fricción, que en nuestro problema es la pérdida de presión total, fue calculada por Dukler como:

$$-\frac{dp}{dz} = -\left(\frac{dp}{dz}\right)_f = \frac{f_{tp} \rho_k V_m^2}{2d}, \quad (10)$$

Donde  $f_{tp}$  es el factor de fricción de la mezcla bifásica:

$$\frac{f_{tp}}{f_n} = 1 + \frac{y}{1.281 - 0.478y + 0.444y^2 - 0.094y^3 + 0.00843y^4}, \quad y = -\log(\lambda_l),$$

Siendo  $f_n$  el factor de fricción normalizado de Moody y se calcula usando la relación de Blasius

$$f_n = 0.00140 + 0.125 Re_k^{-0.32} = 0.00307,$$

En las notas de la clase,  $f_n$  está como  $f_n = 0.0056 + 0.5 Re_k^{0.32}$ , si se calcula la caída de presión usando la ecuación de la clase, se obtiene un valor extremadamente alto, de 111 892 118.11 Pa/m. La ecuación (10) se obtuvo del artículo de Dukler de 1964.

Por otro lado, la densidad efectiva es:

$$\rho_k = \frac{\rho_l \lambda_l^2}{H_l} + \frac{\rho_g (1 - \lambda_l)^2}{1 - H_l} = 250.7534 \text{ kg/m}^3,$$

La velocidad de la mezcla  $V_m$ , la viscosidad de la mezcla  $\mu_m$  y la fracción volumétrica superficial del líquido se obtuvieron en el inciso a). La fracción volumétrica de líquido se obtiene de (9) y el número de Reynolds efectivo se calcula de la siguiente forma:

$$Re_k = \frac{\rho_k V_m d}{\mu_m} = 721114.5063$$

Con todos los parámetros necesarios, ya se puede calcular la caída de presión total usando la correlación de Dukler (10)

$$-\frac{dp}{dz} = 9165.19 \text{ Pa/m}, \quad (11)$$

g) Calcular la caída de presión usando el método de Beggs y Brill.

El método de Beggs y Brill de 1973 se puede aplicar a un amplio rango de ángulos, no solamente flujo horizontal, y tiene una complejidad para aplicarlo mayor que los métodos anteriores de este ejercicio.

Como siempre, la caída de presión total es la suma de las componentes de fricción, gravedad y aceleración.

$$\frac{dp}{dz} = \left( \frac{dp}{dz} \right)_f + \left( \frac{dp}{dz} \right)_g + \left( \frac{dp}{dz} \right)_a,$$

**- Componente por Fricción:**

$$\left( \frac{dp}{dz} \right)_f = \frac{f \rho_n V_m^2}{2d}, \quad (12)$$

Donde  $f$  se puede calcular como:

$$\frac{f}{f_n} = e^{s(y)}, \quad y = \frac{\lambda_l}{H_l^2}, \quad (13)$$

Siendo  $s$  si  $1 < y < 1.2$ :

$$s = \ln(2.2y - 1.2),$$

Si no:

$$s = \frac{\ln(y)}{-0.0523 + 3.1812 \ln(y) - 0.8725 \ln(y)^2 + 0.01853 \ln(y)^4}, \quad (14)$$

Por otro lado,  $f_n$  es el factor de fricción de no deslizamiento. Debido a que en la correlación original se predecía el gradiente de presión a causa se que suponían tuberías lisas, Hall en 1957 presentó la siguiente relación para  $f_n$

$$f_n = 0.0055 \left[ 1 + \left( 2 \times 10^4 \frac{\epsilon}{d} + \frac{10^6}{Re_m} \right)^{1/3} \right]$$

Donde  $Re_m$  es el número de Reynolds de la mezcla (calculado al principio de la tarea) y  $\epsilon$  es la rigurosidad absoluta, la cual representa el promedio de las irregularidades en el ducto por donde están fluyendo las fases. En la figura 3 se representa una tabla con los valores de la rigurosidad absoluta para diferentes materiales<sup>1</sup>.

Material	e (mm)
Concrete	0.3 - 3.0
Cast Iron	0.26
Galvanized Iron	0.15
Asphalted Cast Iron	0.12
Commercial or Welded Steel	0.045
PVC, Glass, Other Drawn Tubing	0.0015

Figura 3: Rigurosidad absoluta para diferentes materiales.

Se supondrá que la tubería es de PVC, teniendo la rigurosidad absoluta un valor de  $\epsilon = 1,5 \times 10^{-6}$  m.

El parámetro que queda por calcular es la fracción volumétrica del líquido *Hold Up*, la cual mas adelante se calculará.

#### - Componente por Gravedad:

$$\left(\frac{dp}{dz}\right)_g = \rho_s g \sin(\theta), \quad (15)$$

En la pérdida de presión debido a la gravedad se define una nueva densidad efectiva  $\rho_s$  llamada densidad de deslizamiento, la cual es muy parecida a la densidad de la mezcla calculada al principio, pero en vez de depender de la fracción volumétrica superficial de líquido, depende del *Hold Up*.

$$\rho_s = H_l \rho_l + (1 - H_l) \rho_g, \quad (16)$$

Es decir, solo haría falta obtener la fracción volumétrica de líquido  $H_l$ , calcular  $y$  en (13) y  $\rho_s$  en (16) y ya se obtendría los valores numéricos de la caída de presión por fricción y gravedad.

#### - Componente por Aceleración:

$$\left(\frac{dp}{dz}\right)_a = \frac{\rho_s V_m V_{sg}}{p} \frac{dp}{dz}, \quad (17)$$

<sup>1</sup><https://www.pipeflow.com/pipe-pressure-drop-calculations/pipe-roughness>

Donde  $p$  es la presión del flujo bifásico inicial antes de la caída de presión. Ahora, con esta magnitud hay un problema, no conozco una forma de como calcular la presión ya que en el modelo de Beggs y Brill, no he visto una hipótesis sobre las presiones, como ocurre en el modelo de Taitel y Dukler, donde se suponen que el gradiente de las presiones en el flujo bifásico es el mismo que en cada fase. Se dejará la ecuación (17) en términos de esta presión y mas adelante, se aplicarán simplificaciones para obtener un resultado numérico.

### - Cálculo del *Hold Up*:

Para este cálculo, necesitaremos la fracción volumétrica superficial de líquido  $\lambda_l$  y el número de Froude de la mezcla para una tubería horizontal dado por:

$$Fr_m = \frac{V_m^2}{gd},$$

Con ambos parámetros, delimitaremos el patrón de flujo de la mezcla bifásica en fases estables de segregado, intermitente (slug) o distribuido más una fase inestable de transición, la cual ajustaremos un poco las cuentas para re-distribuir el sistema en alguno de los otros patrones. Para ellos se definiran otros parámetros dependientes de  $\lambda_l$ :

$$\begin{aligned} L_1 &= 316\lambda_l^{0.302}, & L_2 &= 0.0009252\lambda_l^{-2.4684}, \\ L_3 &= 0.1\lambda_l^{-1.4516}, & L_4 &= 0.5\lambda_l^{-6.738}, \end{aligned}$$

Las condiciones para saber el patrón en el que se encuentra cada fase se encuentran en la tabla 3.

Segregado	$\lambda_l < 0.01$ y $Fr_m < L_1$ $\lambda_l \geq 0.01$ y $Fr_m < L_2$
Transición	$\lambda_l \geq 0.01$ y $L_2 \leq Fr_m \leq L_3$
Intermitente	$0.01 \leq \lambda_l \leq 0.4$ y $L_3 < Fr_m \leq L_1$ $\lambda_l \geq 0.4$ y $L_3 \leq Fr_m \leq L_4$
Distribuido	$\lambda_l < 0.4$ y $Fr_m \geq L_1$ $\lambda_l \geq 0.4$ y $Fr_m > L_4$

Tabla 3: Condiciones de Transición en el modelo de Beggs y Brill.

Si el patrón resultante de la tabla 3 es Segregado, Intermitente o distribuido, se calcula el *Hold Up* como:

$$H_l = \frac{a\lambda_l^b}{Fr_m^c}\psi, \quad (18)$$

Donde  $a$ ,  $b$  y  $c$  son unos parámetros que dependen de cada patrón, como se observa en la siguiente figura.

Flow Regime	a	b	c
Segregated	0.98	0.4846	0.0868
Intermittent	0.845	0.5351	0.0173
Distributed	1.065	0.5824	0.0609

Figura 4: Valores de los parámetros  $a$ ,  $b$  y  $c$  en el modelo de Beggs y Brill.

$\psi$  es un parámetro que tiene en cuenta la inclinación de la tubería y que se escribe como:

$$\psi = 1 + C'[\sin(1.8\theta) - 0.333 \sin(1.8\theta)^3],$$

Donde:

$$C' = (1 - \lambda_l) \ln(d' \lambda_l^{e'} N_{LV}^{f'} Fr_m^{g'}),$$

Siendo  $N_{LV}$  es uno de los grupos adimensionales sugeridos por Duns y Ros en 1963 para la fracción volumétrica de líquido y sus variables están expresadas en  $\text{lb}_m/\text{pie}^3$  para la densidad, la velocidad en pies/s y la tensión superficial en dinas/cm, la cual a 25° C para el agua es  $\sigma_l = 72 \text{ dinas/cm}^2$ .

$$N_{LV} = 1.938 V_{sl}^4 \sqrt{\frac{\rho_l}{\sigma_l}}$$

Además,  $d'$ ,  $e'$ ,  $f'$  y  $g'$  son otros parámetros adimensionales que dependen de la fase y de la inclinación de la tubería como se encuentra en la figura 5.

Por contraste, si el patrón de flujo encontrado en la tabla 3 es de transición, la fracción volumétrica de líquido no se calcula como (18) sino como:

$$H_l^{\text{transición}} = AH_l^{\text{segregado}} + BH_l^{\text{intermitente}},$$

Donde:

$$A = (L_3 - Fr_m)(L_3 - L_2), \quad B = 1 - A,$$

Es decir, en la transición, el *Hold Up* se calcula como un promedio ponderado del patrón segregado e intermitente.

<sup>2</sup><http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbasees/surten.html#:~:text=La%20tensi%C3%B3n%20superficial%20del%20agua,cm%20a%2025%C2%B0C.>

Uphill	d	e	f	g
Segregated	0.011	-3.768	3.539	-1.614
Intermittent	2.96	0.305	-0.4473	0.0978
Distributed	$\beta = 0$			
Downhill	d	e	f	g
All	4.7	-0.3692	0.1244	-0.5056

Figura 5: Valores de los parámetros  $d'$ ,  $e'$ ,  $f'$  y  $g'$  en el modelo de Beggs y Brill. En la figura los parámetros no están primados y  $\beta$  es igual a  $C'$  en nuestra notación.

### - Resolución del Ejercicio:

Ahora ya tenemos las ecuaciones básicas en términos de casi todas las variables del enunciado y/o variables que han sido calculadas antes, exceptuando la presión  $p$  del flujo bifásico. Comenzamos usando el valor de  $\lambda_l$  que habíamos obtenido y calculamos el número de Froude de la mezcla:

$$\lambda_l = 0.124, \quad Fr_m = 1023.9582$$

Y las variables auxiliares:

$$L_1 = 168.0451, \quad L_2 = 2.0810, \quad L_3 = 0.16140 \quad L_4 = 657783.9324,$$

Con estos valores se usa la tabla 3 para encontrar el patrón, dando como resultado un flujo *Distribuido*. Por lo tanto usamos la ecuación (18) para calcular el *Hold Up*, como el flujo es distribuido (ver figura 5) y la tubería está horizontal,  $C' = 0 \rightarrow \psi = 1$ , y con los valores de la figura 4 se obtiene:

$$H_l = 1.065 \frac{0.124^{0.5824}}{1023.9582^{0.0609}} = 0.2066,$$

Con el *Hold Up* calculamos de la ecuación (13.b)  $y = 2.8948$ , por lo que calculamos  $s$  de la ecuación (14) como  $s = 0.4489$ . Con esto el factor de fricción sin deslizamiento para tuberías PVC es  $f_n = 0.0142$  y el factor de fricción de Hall (ecuación (13.a))  $f = 0.0222$ .

Por otro lado, con el *Hold Up* se puede calcular la densidad de deslizamiento de la ecuación (16), dando  $\rho_s = 207.86310 \text{ kg/m}^3$ . Para tuberías horizontales, la caída de presión por la gravedad de la ecuación (15) es 0, y debido a la fricción de la ecuación (12) como  $dp/dz)_f = 13965.34365 \text{ Pa/m}$ .

Con estos datos, se puede obtener el valor de la caída de presión total, faltando la presión como:

$$\frac{dp}{dz}(p) = \left(1 - \frac{\rho_s V_m V_{sg}}{p}\right)^{-1} \left[ \left(\frac{dp}{dz}\right)_f + \left(\frac{dp}{dz}\right)_g \right] = \frac{13965.34365}{p - 46482.39023} p, \quad (19)$$

La ecuación (19) representa la caída de presión del flujo bifásico en la tubería horizontal según el modelo de Beggs y Brill, sin embargo, depende de una presión  $p$  que no está en el enunciado del problema.

#### - Aproximación de Equilibrio:

Sin embargo, si se supone que el flujo está en equilibrio y desarrollado, de modo que las presiones en el líquido y el gas sean las mismas (ya que si una presión es mayor que la otra, el gas se expandiría o contraría hasta que las presiones sean iguales), entonces ambas presiones serían igual a la presión del flujo bifásico (al ser la presión una magnitud intensiva). Por simplicidad, se supondrá que el aire es un gas ideal, cuya masa molar es  $M_{\text{aire}} = 0.029$  kg/mol, entonces:

$$p = \frac{\rho_g RT}{M} = 136770.0430 \text{ Pa},$$

Si es así, la caída de presión (19) según el modelo de Beggs y Brill suponiendo que la presión del flujo bifásico es la presión del aire es:

$$\frac{dp}{dz} = 21155.0593 \text{ Pa/m}. \quad (20)$$

#### h) Comparar y comentar los resultados.

Los valores obtenidos de la caída de presión para los diferentes modelos están en la tabla 4:

Modelo	Caída de Presión (Pa)
Lockhart y Martinelli	11493.04
Dukler y Flanigan	9165.19
Beggs y Brill	21155.06

Tabla 4: Comparación caídas de presión diferentes modelos.

Se puede observar que los valores calculados usando el método de Lockhart y Martinelli y el método de Dukler y Flanigan dan resultados similares, sin embargo, lo calculado con el método de Beggs y Brill es aproximadamente el doble al valor obtenido de los otros dos métodos. Esto puede ser debido a las suposiciones que se realizaron (que la presión del flujo bifásico es igual a la presión del gas ideal del aire), las cuales no necesariamente tienen que ser ciertas.

Además, el patrón de flujo obtenido por el método de Beggs y Brill fue de Distribuido, cuando para el mismo sistema, con la carta de Mandhane y el modelo de Taitel y Dukler, el patrón de flujo obtenido fue de intermitente o slug, aumentando las sospechas de que la suposición del gas ideal no es cierta.