# TAREA 1: MODELADO DE TRANSICIONES

Instituto Politécnico Nacional
Dinámica de Flujos Bifásicos

**Profesor**:
Dr. Florencio Sánchez

**Alumno**:
Luis Fernando Pérez

26 de marzo de 2022

Enunciado

---

Una mezcla de aire y agua fluye en un tubo horizontal de 5 cm de diámetro. El flujo volumétrico del agua es $q_l$ = 0.707 m$^3$/ hr y del aire es $q_g$ = 21.2 m$^3$/ hr. Las propiedades físicas de los fluidos están dadas por:

$$\rho_l = 993 \text{ kg/m}^3 \qquad \rho_g = 1.14 \text{ kg/m}^3$$
$$\mu_l = 0.68 \times 10^{-3} \text{ kg/m s} \qquad \mu_g = 1.9 \times 10^{-5} \text{ kg/m s}$$

- Calcular el nivel adimensional del líquido y calcular todos los otros parámetros adimensionales.
- Determinar el patrón del flujo

---

---

Dada la ecuación:

$$X^2 \left[ (\tilde{\nu}_l \tilde{d}_l)^{-n} \tilde{\nu}_l^2 \frac{\tilde{S}_l}{\tilde{A}_l} \right] - \left[ (\tilde{\nu}_g \tilde{d}_g)^{-m} \tilde{\nu}_g^2 \left( \frac{\tilde{S}_g}{\tilde{A}_g} + \frac{\tilde{S}_i}{\tilde{A}_l} + \frac{\tilde{S}_i}{\tilde{A}_g} \right) \right] + 4Y = 0, \tag{1}$$

Donde $X$ es el parámetro de Lockhart-Martinelli:

$$X^2 = \frac{C_l \rho_l \nu_{Sl}^2 (R_e)_g^m}{C_g \rho_g \nu_{Sg}^2 (R_e)_l^n},$$

$Y$ es el parámetro de Yehuda:

$$Y = (R_e)_g^m \frac{(\rho_l - \rho_g) g d \sin\theta}{2 C_g \rho_g \nu_{Sg}^2},$$

$\tilde{h}$, $\tilde{S}_g$, $\tilde{S}_l$ y $\tilde{S}_i$ son, respectivamente, la altura adimensional, los perímetros adimensionales del gas-pared, el líquido-pared y la interfaz.

$$\tilde{h} = \tilde{h}(X, Y), \qquad \tilde{S}_l = \pi - \tilde{S}_g,$$
$$\tilde{S}_g = \arccos(2\tilde{h} - 1), \qquad \tilde{S}_i = \sqrt{1 - (2\tilde{h} - 1)^2},$$

$\tilde{A}_g$, $\tilde{A}_l$, $A$ y $\tilde{A}$ son, respectivamente, el área del gas, del líquido, total y total adimensional.

$$\tilde{A}_g = \frac{1}{4}[\tilde{S}_g - (2\tilde{h} - 1)\tilde{S}_i], \qquad A = \frac{\pi}{4} d^2,$$
$$\tilde{A}_l = \frac{1}{4}[\pi - \tilde{S}_g + (2\tilde{h} - 1)\tilde{S}_i], \qquad \tilde{A} = \frac{\pi}{4},$$

$\nu_{SL}$, $\nu_{SG}$, $\tilde{\nu}_L$ y $\tilde{\nu}_G$ son, respectivamente, la velocidad superficial del líquido y del gas y las velocidades adimensionales del liquido y del gas.

$$\nu_{Sl} = \frac{q_l}{A}, \qquad \tilde{\nu}_l = \frac{\tilde{A}}{\tilde{A}_l},$$
$$\nu_{Sg} = \frac{q_g}{A}, \qquad \tilde{\nu}_g = \frac{\tilde{A}}{\tilde{A}_g},$$

$\tilde{d}_l$ y $\tilde{d}_g$ son, respectivamente, los diámetros adimensionales hidráulicos del gas y del líquido.

$$\tilde{d}_l = 4\frac{\tilde{A}_l}{\tilde{S}_l}, \qquad \tilde{d}_g = 4\frac{\tilde{A}_g}{\tilde{S}_g + \tilde{S}_i},$$

$(R_e)_g$ y $(R_e)_l$ son, respectivamente, los números de Reynolds de cada fase individual:

$$(R_e)_g = \frac{\rho_l \nu_{Sl} d}{\mu_l}, \qquad (R_e)_g = \frac{\rho_g \nu_{Sg} d}{\mu_g},$$

$n$, $m$, $C_l$ y $C_g$ son parámetros que dependen del estado de cada fluido de manera individual: Para flujos laminares, $n = m = 1$, $C_l = C_g = 16$ y para flujos turbulentos $n = m = 0.2$, $C_l = C_g = 0.046$ y $\theta$ es el ángulo de inclinación de la tubería.

Por otro lado, existen principalmente 4 transiciones en las fases en una tubería horizontal o ligeramente inclinada con flujo desarrollado, las cuales llamaremos A, B, C y D:

- Transición de flujo estratificado a no estratificado (Transición A): Para esta transición se define el número de Froude:

$$F^2 = \frac{\rho_g \nu_{Sg}^2}{(\rho_l - \rho_g) dg \cos\theta}, \tag{2}$$

  La condición crítica de esta transición es:

$$\text{Cond}_A = F^2 \frac{\tilde{\nu}_g^2 \tilde{S}_i}{\tilde{A}_i (1 - \tilde{h})^2}, \tag{3}$$

  - Si $\text{Cond}_A \geq 1$: El flujo es NO estratificado, revisar si existe transición a flujo anular/burbujeante/intermitente en transición B.
  - Si $\text{Cond}_A < 1$: Estratificado, revisar transición a flujo liso u ondulado en transición C.

- Transición de flujo anular a burbujeante o intermitente (Transición B):

  La condición crítica de esta transición es:

$$\text{Cond}_B = 0.35, \tag{4}$$

- Si $\tilde{h} \geq \text{Cond}_B$: Hay que revisar si el flujo es burbujeante o intermitente en transición D,
- Si $\tilde{h} < \text{Cond}_B$: El flujo es anular.

- Transición Flujo Estratificado Liso a Ondulado (Transición C): Para esta transición se define el número de Duckler:

$$K = F\sqrt{(R_e)_l}, \tag{5}$$

La condición crítica de esta transición es:

$$\text{Cond}_C = \frac{2}{\sqrt{\tilde{\nu}_l s}\tilde{\nu}_g}, \tag{6}$$

Donde $s$ es un coeficiente de recuperación que vale s = 0.01.

- Si $K \geq \text{Cond}_C$: El flujo es Estratificado Ondulado.
- Si $K < \text{Cond}_C$: El flujo es Estratificado Liso.

- Transición Flujo Intermitente a Burbujeante (Transición D): Para esta transición se define el número de Taitel:

$$T^2 = \frac{(R_e)_l^{-n}}{d}\frac{2C_l\rho_l\nu_{Sl}^2}{(\rho_l - \rho_g)g\cos(\theta)}, \tag{7}$$

La condición crítica de esta transición es:

$$\text{Cond}_D = \frac{8\tilde{A}_g(\tilde{\nu}_l - \tilde{d}_l)^n}{\tilde{S}_i\tilde{\nu}_l^2}, \tag{8}$$

- Si $T \geq \text{Cond}_D$: El flujo es Burbujeante.
- Si $T < \text{Cond}_D$: El flujo es Intermitente (o Slug).

La estrategia que se usó para resolver el problema es la siguiente: De la ecuación (1) se identifica que hay que obtener $\tilde{h}$, la altura adimensional, sin embargo, esta ecuación para $\tilde{h}$ es altamente no lineal, así que para un $n$, $m$ y $Y$ constantes hay que resolver de manera numérica o gráfica (1) la relación $\tilde{h} = \tilde{h}(X)$.

De manera gráfica, se puede graficar fácilmente la función inversa $X = X(\tilde{h})$ ya que solo hay que despejar de:

$$X(\tilde{h}) = \sqrt{\frac{f_1(\tilde{h}) - 4Y}{f_2(\tilde{h})}}, \tag{9}$$

Donde:

$$f_1(\tilde{h}) = (\tilde{\nu}_g \tilde{d}_g)^{-m} \tilde{\nu}_g^2 \left( \frac{\tilde{S}_g}{\tilde{A}_g} + \frac{\tilde{S}_i}{\tilde{A}_l} + \frac{\tilde{S}_i}{\tilde{A}_g} \right), \qquad f_2(\tilde{h}) = (\tilde{\nu}_l \tilde{d}_l)^{-n} \tilde{\nu}_l^2 \frac{\tilde{S}_l}{\tilde{A}_l},$$

Entonces, se puede graficar (9) para diferentes valores de $Y$, como $n$ y $m$ solo tienen dos posibles valores, se grafican para las combinaciones mas comunes en la figura 1: Línea punteada para gas turbulento y liquido laminar y línea sólida para ambos turbulentos.

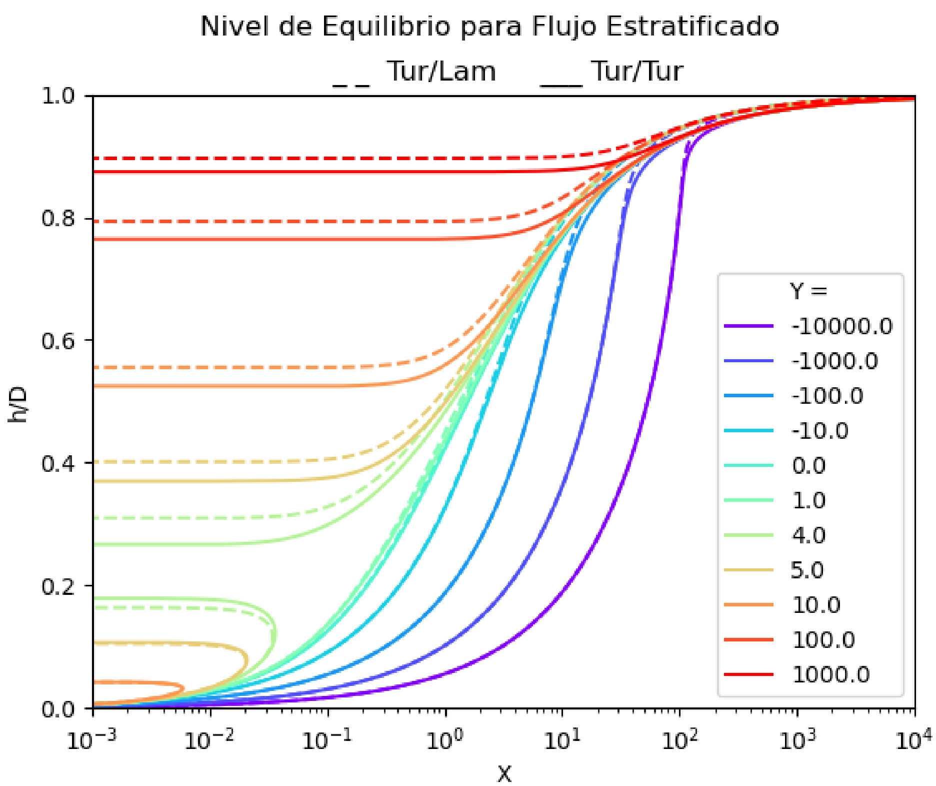


Figura 1: $X(\tilde{h})$

También se puede obtener un valor estimado de $\tilde{h} = \tilde{h}(X)$ de manera numérica, para ello se usa el método *fsolve* de la librería *scipy.optimize* de Python en la ecuación (1) para los valores del enunciado. A continuación se representa una tabla con los valores obtenidos para cada parámetro.

| Parámetro | valor |
|---|---|
| X | 1.00087 |
| Y | 0.00000 |
| $(R_e)_l$ | 7302.93 |
| $(R_e)_g$ | 8634.02 |
| $\tilde{h}$ | 0.421 |
| $\tilde{S}_g$ | 1.730 |
| $\tilde{S}_l$ | 1.412 |
| $\tilde{S}_i$ | 0.987 |
| $\tilde{A}_l$ | 0.314 |
| $\tilde{A}_g$ | 0.471 |
| $\tilde{\nu}_l$ | 2.501 |
| $\tilde{\nu}_g$ | 1.666 |
| $\tilde{d}_l$ | 0.889 |
| $\tilde{d}_g$ | 0.694 |

Tabla 1: Valores numéricos estimados de cada parámetro adimensional

De la tabla 1 se observa que ambos flujos están turbulentos. En el mismo programa de Python se programaron las condiciones (3), (4), (6) y (8) para las condiciones del enunciado y se obtuvo que el sistema está en Flujo Estratificado Ondulado.

Se puede obtener el código elaborado para este ejercicio en el siguiente repositorio de GitHub: `https://github.com/luisfernandoperez/flujos_bifasicos/blob/main/Tarea_1.py`