

TAREA: PÉRDIDA DE PRESIÓN (2).

Instituto Politécnico Nacional.
Dinámica de Flujos Bifásicos.

Profesor:
Dr. Florencio Sánchez.

Alumno:
Luis Pérez.

18 de mayo de 2022

Enunciado:

Realizar y comprobar el modelo de Dukler-Hubbard 1975 para tuberías horizontales con flujo Slug.

El modelo de Dukler-Hubbard fue realizado como una aproximación experimental del movimiento de slugs en tuberías horizontales de agua y aire.

En conjunto con correlaciones para obtener ciertas variables, se pueden predecir el comportamiento hidrodinámico del sistema y de variables como la longitud del slug, la fracción volumétrica, distribución de presión, entre otros.

El modelo requiere ciertos parámetros de entrada, los cuales deben ser conocidos antes de aplicar el modelo. Algunos de estos parámetros son de los materiales (como densidad o viscosidad), geométricos (como diámetro de la tubería o su inclinación) o de las fases (como los flujos). También hay parámetros derivados directos que se pueden obtener a partir de los parámetros de entrada usando relaciones sencillas (que no son parte del modelo de Dukler-Hubbard).

A continuación en la siguiente tabla se detalla la notación de los parámetro de entrada y derivados:

Parámetro de Entrada	Símbolo	Unidad	Parámetro Derivado	Símbolo	Unidad
Densidad del líquido	ρ_l	kg m^{-3}	Flujo volumétrico del líquido	q_l	$\text{m}^3 \text{s}^{-1}$
Densidad del gas	ρ_g	kg m^{-3}	Flujo volumétrico del gas	q_g	$\text{m}^3 \text{s}^{-1}$
Viscosidad del líquido	μ_l	Pa s	Velocidad superficial del líquido	vs_l	m s^{-1}
Viscosidad del gas	μ_g	Pa s	Velocidad superficial del gas	vs_g	m s^{-1}
Diámetro de tubería	d	m	Velocidad superficial del slug o de la mezcla	v_s	m s^{-1}
Ángulo de inclinación	θ	rad	Área transversal del tubo	A	m^2
Flujo másico del líquido	w_l	kg s^{-1}	Fracción volumétrica del líquido en el Slug	h_{ls}	*
Flujo másico del gas	w_g	kg s^{-1}	Presión del gas	P_g	Pa
Rugosidad de la tubería	ϵ	mm	Frecuencia del Slug	ν_s	Hz
Temperatura del gas	T	K			

Cuadro 1: Parámetros de entrada y derivados del modelo de Dukler-Hubbard.

Una vez que se haya aplicado el modelo, se tendrán unos parámetros de salida, los cuales son:

Parámetro	Símbolo	Unidad	Parámetro	Símbolo	Unidad
Fracción volumétrica del líquido en la burbuja de Taylor	h_{ltb}	*	Velocidad de la burbuja de Taylor	v_{tb}	m s ⁻¹
Fracción volumétrica en equilibrio del líquido en la burbuja de Taylor	h_{ltbe}	*	Velocidad del gas en la burbuja de Taylor	v_{gtb}	m s ⁻¹
Longitud del slug	l_s	m	Velocidad del líquido en la burbuja de Taylor	v_{ltb}	m s ⁻¹
Longitud de la capa líquida	l_f	m	Velocidad en equilibrio de la burbuja de Taylor	v_{ltbe}	m s ⁻¹
Longitud de la unidad	l_u	m	Caída de Presión por aceleración	ΔP_a	Pa
Longitud de la zona de mezclado	l_m	m	Caída de Presión por fricción	ΔP_f	Pa

Cuadro 2: Parámetros de salida del modelo de Dukler-Hubbard.

Parámetros derivados del modelo:

Conocidos los parámetros de entrada, calculamos primero el área de la tubería:

$$A = \frac{1}{4}\pi d^2, \quad (1)$$

Luego los flujos volumétricos y las velocidades superficiales:

$$q_l = \frac{w_l}{\rho_l}, \quad v_{sl} = \frac{q_l}{A}, \quad q_g = \frac{w_g}{\rho_g}, \quad v_{sg} = \frac{q_g}{A}. \quad (2)$$

Velocidad del slug, la cual nos indica también la velocidad de la mezcla

$$v_s = v_{sl} + v_{sg}, \quad (3)$$

Para la frecuencia del Slug, se usa la correlación de Gregory y Scott (1969)¹, esta correlación no se dió en la clase, pero no pude entender bien como usar

¹Gregory, G. A., & Scott, D. S. (1969). Correlation of liquid slug velocity and frequency in horizontal cocurrent gas-liquid slug flow. AIChE Journal

la de la clase así que encontré esta:

$$\nu_s = 0,0226 \text{ [Hz]} \left\{ \frac{v_{sl}}{gd} \left(\frac{19,75 \text{ [m/s]}^2}{1,25v_s} + 1,25v_s \right) \right\}^{1,2}. \quad (4)$$

Esta correlación para la frecuencia del Slug sale a partir de analizar experimentalmente la dependencia de la misma con la velocidad del slug (ecuación (3)), como se observa en la figura 1.

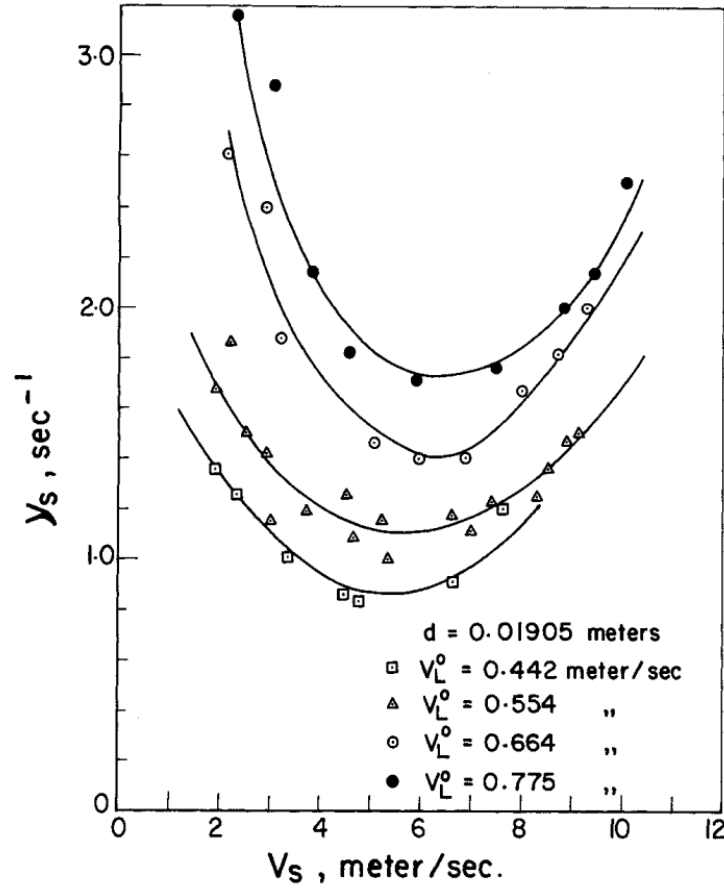


Fig. 3. Slug frequency vs. measured slug velocity (this study).

Figura 1: Correlación entre la frecuencia del Slug y la velocidad del slug según Gregory y Scott (1969). Las figuras son los datos experimentales para diferentes velocidades superficiales del líquido y las líneas negras son los ajustes.

Por otro lado, la fracción volumétrica del líquido en el slug usando la correlación de Gregory, Nicholson y Aziz:

$$h_{ls} = \frac{1}{1 + (v_s/8,66 \text{ [m/s]})^{1,39}}, \quad (5)$$

con esta fracción volumétrica (5), calculamos el número de Reynolds del slug:

$$Re_s = v_s d \frac{\rho_l h_{ls} + \rho_l (1 - h_{ls})}{\mu_l h_{ls} + \mu_l (1 - h_{ls})}, \quad (6)$$

luego se calcula un coeficiente de proporcionalidad que relaciona la velocidad del slug con la de la burbuja de Taylor:

$$c = 0,021 \log(Re_s) + 0,022. \quad (7)$$

La velocidad de la burbuja de Taylor se obtiene de la siguiente forma:

$$v_{tb} = (1 + c)v_s. \quad (8)$$

Para la longitud del slug (l_s), se usa el siguiente convenio: Sí el diámetro de la tubería es menor a una pulgada, se supone el slug como 30 veces su diámetro, si no se usa la correlación usada en el campo de Prudhoe Bay.

$$l_s = \begin{cases} 30d & d \leq 0,0254 \text{ m} \\ 0,3048 \exp(-2,099 + 4,859\sqrt{\log(39,3701d)}) & d > 0,0254 \text{ m} \end{cases} \quad (9)$$

Donde se ha usado el factor 0,0254 para pasar de metros a pulgadas, 39,3701 para pasar de pulgadas a metros y 0,3048 para pasar de pies a metros.

Finalmente, la longitud de la capa líquida es:

$$l_f = \frac{v_s}{\nu_s} - l_s, \quad (10)$$

El modelo:

Con todos estos parámetros, hace falta realizar un balance de momento para saber las relaciones entre la fracción volumétrica del líquido en el Slug, la fracción volumétrica del líquido en la burbuja de Taylor, la longitud del

A Model for Gas–Liquid Slug Flow in Horizontal and Near Horizontal Tubes

Abraham E. Dukler* and Martin G. Hubbard

Chemical Engineering Department, University of Houston, Houston, Texas 77004

A model is presented which permits the prediction in detail of the unsteady hydrodynamic behavior of gas–liquid slug flow. The model is based on the observation that a fast moving slug overruns a slow moving liquid film accelerating it to full slug velocity in a mixing eddy located at the front of the slug. A new film is shed behind the slug which decelerates with time. Mixing in the slug takes place first due to the mixing eddy and then due to the usual diffusion due to turbulence. The model predicts slug fluid velocity, velocity of propagation of the nose of the slug, film velocity as a function of time and distance, length of the slug, film region behind the slug, and mixing eddy and shape of the surface of the film region. Agreement with experimental data is good.

Slug y la longitud de la capa de líquido.

En el artículo de Dukler y Hubbard proponen el sistema de ecuaciones a seguir, en un punto se llega a una integral que no se puede solucionar de manera analítica, y la misma se resuelve de manera numérica.

La integral es la siguiente:

$$\int_{h_{ltbe}}^{h_{ls}} W(h_{ltb}) dh_{ltb} = \frac{l_f}{d}. \quad (11)$$

Donde $W(h_{ltb})$ es una función que se detallará mas adelante y h_{ltbe} es la fracción volumétrica del líquido **en equilibrio** en la burbuja de Taylor.

La integral (11) representa el perfil de la fracción volumétrica del líquido a lo largo de la burbuja de Taylor $h_{ltb}(z)$, esta fracción varía desde un nivel de equilibrio (h_{ltbe} , ver figura 2) donde la altura de la burbuja es constante al final de la misma; es importante resaltar que aunque la altura de equilibrio está al final de la burbuja, como límite de integración es el inferior ya que la altura de equilibrio es la menor posible; esta variación continúa hasta la nariz del slug, sin embargo, como en la fase líquida hay burbujas de gas, la fracción volumétrica **NO** es 1, si no que se considera una fracción volumétrica efectiva *como* sí el sistema estuviera estratificado, esta fracción volumétrica efectiva es la fracción volumétrica del líquido en el slug o h_{ls} .

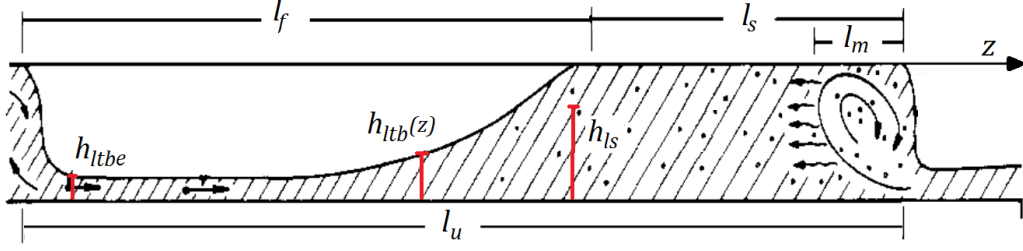


Figura 2: Diagrama de un slug en el modelo de Dukler y Hubbard.

La suma de todas las contribuciones de h_{ltb} a lo largo de la burbuja (el área bajo la curva de (11)) da el cociente entre la longitud de la capa líquida sobre la burbuja de Taylor y el diámetro l_f/d .

Sin embargo, hay un problema, la fracción de equilibrio h_{ltbe} no es conocida de manera directa, pero hay una ecuación que relaciona la misma con la longitud del slug usando la conservación de la masa:

$$l_s = \frac{v_{sl} - h_{ltbe}v_{tb} + ch_{ls}v_s}{\nu_s(h_{ls} - h_{ltbe})}, \quad (12)$$

Despejando h_{ltbe} de la ecuación anterior:

$$h_{ltbe} = \frac{v_{sl} + h_{ls}(cv_s - \nu_sl_s)}{v_{tb} - \nu_sl_s}. \quad (13)$$

Aunque se sigue sin conocer de manera exacta la longitud del slug l_s se tiene la correlación (9) hallada en los pozos de Prudhoe Bay que sirve para delimitar un valor máximo de la longitud del slug.

Conocido esto, hay que proponer valores de la longitud del slug l_s -hasta un valor máximo estimado en (9)-, calcular un valor tentativo de la fracción de equilibrio h_{ltbe} usando (13), usar la fracción de equilibrio como límite inferior en (11) y verificar si el resultado es igual o similar a l_f/d , si no, entonces hay que repetir con otro valor de l_s .

Sabiendo el algoritmo básico que hay que seguir, ahora se define el inte-

grando $W(h_{ltb})$ de (11):

$$W(h_{ltb}) = \frac{\left(\frac{ch_{ls}}{h_{ltb}}\right)^2 - \frac{1}{F_r} \left[\frac{\frac{\pi}{2} h_{ltb} \sin(\alpha/2) + \sin^2(\alpha/2)}{1 - \cos(\alpha/2)} - \frac{1}{2} \cos(\alpha/2) \right]}{f_t B^2 \frac{\alpha}{\pi} + \frac{h_{ltb}}{F_r} \sin(\theta)}, \quad (14)$$

donde c es el mismo parámetro calculado en (7), F_r es el número de Froude:

$$F_r = \frac{v_s^2}{gd}, \quad (15)$$

f_f es el factor de fricción de explícita de Hall (usando el número de Reynolds del slug, calculado en (6)):

$$f_f = 0,001375 \left[1 + \left(2 \times 10^4 \frac{\epsilon}{d} + \frac{1 \times 10^6}{Re_s} \right)^{1/3} \right], \quad (16)$$

B es un parámetro definido de la siguiente forma:

$$B = 1 + c \left(1 - \frac{h_{ls}}{h_{ltb}} \right), \quad (17)$$

y $\alpha = \alpha(h_{ltb})$ es el ángulo formado por el líquido con respecto al centro de la tubería, como se ve en la figura 3:

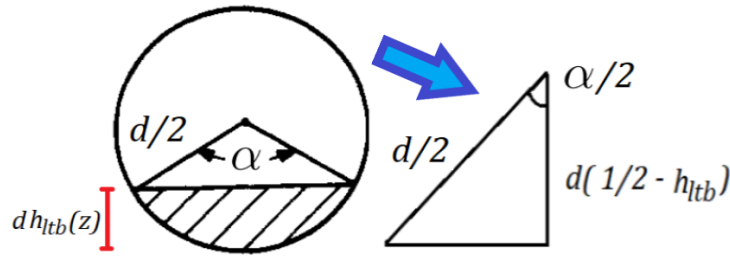


Figura 3: Definición del ángulo α en una sección transversal de la tubería dentro de la burbuja de Taylor.

De la figura 3 se puede obtener que:

$$\cos(\alpha/2) = 1 - 2h_{ltb}, \quad \sin(\alpha/2) = 2\sqrt{h_{ltb}(1 - h_{ltb})},$$

Con estas expresiones, se puede reescribir $W(h_{ltb})$ en solo en términos h_{ltb}

$$W(h_{ltb}) = \frac{\left(\frac{ch_{ls}}{h_{ltb}}\right)^2 - \frac{1}{F_r} \left[\frac{3}{2} + \frac{\pi}{2} \sqrt{h_{ltb}(1-h_{ltb})} - h_{ltb} \right]}{2f_t \left[1 + c \left(1 - \frac{h_{ls}}{h_{ltb}} \right) \right]^2 \frac{\arccos(1-2h_{ltb})}{\pi} + \frac{h_{ltb}}{F_r} \sin(\theta)}. \quad (18)$$

Con (18) expresada en términos de variables conocidas (exceptuando la longitud del slug) el algoritmo es el siguiente:

- Se prueban diferentes longitudes del slug: desde muy pequeñas (p.e.: 1e-5 m) hasta la longitud usada en la correlación de Prudhoe Bay en (9).
- Para cada l_s se calcula la fracción volumétrica de equilibrio h_{ltbe} con (13) usando también la frecuencia del slug (4) y la velocidad de la burbuja de Taylor (8).
- Se calcula la longitud de la película líquida en la burbuja de Taylor l_f usando (10).
- Se integra numéricamente (11) desde h_{ltbe} hasta h_{ls} , donde h_{ls} se calcula con (5).
- Si el valor de la integral (11) es, dentro de cierta tolerancia, cercano al cociente l_f/d , entonces se tienen los valores correctos de l_s , l_f y h_{ltbe} y se pueden calcular otras magnitudes de interés.
- En caso de que con algún valor de prueba de l_s no se logre igualar la integral (11) a l_f/d , entonces hay que probar con otro valor hasta que la diferencia sea menor que la tolerancia.

Una vez hallado los valores correctos de l_s , l_f y h_{ltbe} , ya se puede calcular l_u , l_m , ΔP_f , ΔP_A , v_{gtb} , v_{ltb} y v_{ltbe} :

La longitud de la unidad es la suma de la longitud de la capa líquida y del slug:

$$l_u = l_s + l_f. \quad (19)$$

Velocidad del gas en la burbuja de Taylor:

$$v_{gtb}(z) = v_{tb} - cv_s \left(\frac{1 - h_{ls}}{1 - h_{ltb}(z)} \right). \quad (20)$$

Velocidad del líquido en la burbuja de Taylor (en la nariz o inicio de la burbuja):

$$v_{ltb}(z) = v_{tb} - \frac{x}{\rho_l A h_{ltb}(z)}, \quad (21)$$

donde x es la tasa de recogimiento, derramamiento o levantamiento (en kg/s):

$$x = (v_{tb} - v_s) \rho_l A h_{ls}. \quad (22)$$

Un caso particular de (21) es la velocidad del líquido en la burbuja de Taylor en equilibrio:

$$v_{ltbe} = v_{tb} - \frac{x}{\rho_l A h_{ltbe}}. \quad (23)$$

Longitud de la zona de mezclado:

$$l_m = 0,15 \frac{(v_s - v_{ltbe})^2}{g}. \quad (24)$$

Caída de presión debido a la fricción:

$$\Delta P_f = 2 \frac{f_f v_s^2 l_s}{d} [\rho_l h_{ls} + \rho_g (1 - h_{ls})]. \quad (25)$$

Caída de presión debido a la aceleración:

$$\Delta P_a = \frac{x}{A} (v_s - v_{ltbe}). \quad (26)$$

Con esto, ya estarían listo todos los parámetros de salida del modelo de Dukler y Hubbard de 1975.

Ejemplo:

Realizaremos un ejemplo de este modelo, para comenzar, usaremos los datos de la tarea 2: Pérdidas de presión, en donde verificamos que el sistema estaba en flujo slug en el caso de tubería horizontal. Esto es muy importante

ya que el Dukler y Hubbard de 1975 es para flujos tipo slug o intermitente en tuberías poco o nada inclinadas.

Aire y agua fluyen a través de un tubo horizontal ($\theta = 0$) liso ($\epsilon = 0$) de 2.54 cm de diámetro interno. Los flujos máscicos locales son $w_l = 1.0$ kg/s y $w_g = 0.01135$ kg/s. En un punto de la tubería, la temperatura es de 25 deg C y las propiedades físicas de los fluidos son:

$$\begin{aligned}\rho_l &= 1000 \text{ kg/m}^3, & \rho_g &= 1,6 \text{ kg/m}^3, \\ \mu_l &= 1,0 \text{ cP}, & \mu_g &= 0,02 \text{ cP},\end{aligned}$$

Como se observa en la figura 4 de la carta de Mandhane, el sistema está en fase intermitente o slug. Este diagrama de fase se realizó en la tarea anterior.

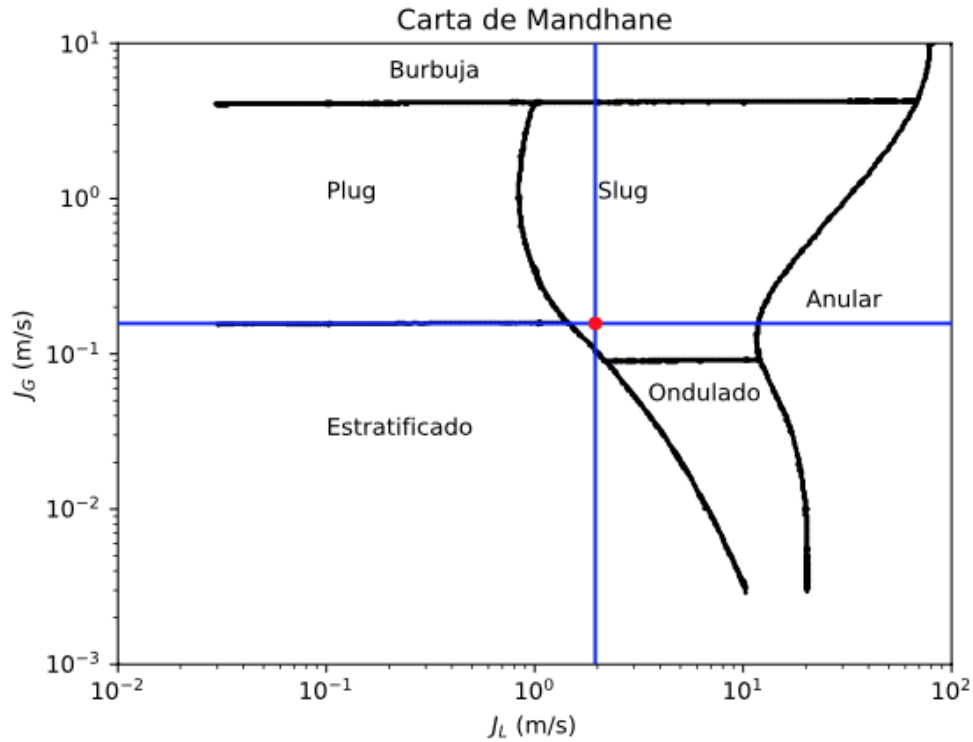


Figura 4: Carta de Mandhane del sistema agua-aire de la segunda tarea del curso.

Usando las ecuaciones correspondientes mostradas antes, se calculan los demás parámetros derivados y se muestran en la tabla 3.

Parámetro	Valor	Unidad
Área transversal de la tubería	$5,027 \times 10^{-4}$	m^2
Flujo volumétrico del líquido	$1,000 \times 10^{-3}$	$\text{m}^3 \text{s}^{-1}$
Flujo volumétrico del gas	$7,093 \times 10^{-3}$	$\text{m}^3 \text{s}^{-1}$
Velocidad superficial del líquido	1,9892	m s^{-1}
Velocidad superficial del gas	14,111	m s^{-1}
Velocidad superficial del slug/mezcla	16,010	m s^{-1}
Fracción volumétrica del líquido en el Slug	0,2969	*
Frecuencia del Slug	10,667	Hz
Número de Reynolds del Slug	407.323,4215	*
Coefficiente c	0,2933	*
Velocidad de la burbuja de Taylor	20,8212	m s^{-1}
Longitud máxima del slug	$0,7590 \times 10^{-3}$	m

Cuadro 3: Resultado de los parámetros derivados y algunos de salida del modelo de Dukler-Hubbard.

Con estos parámetros calculados, hace falta evaluar la integral (11), para ello se varía la longitud del slug de un número pequeño, por ejemplo, 0,0001 m hasta la longitud máxima estimada por la correlación de Prudhoe Bay (9) de 0,7590 m y se realiza el algoritmo explicado anteriormente. Para facilitar la búsqueda del mejor valor de l_s se define el valor absoluto del error relativo.

$$|E_{rel}| = 100 \frac{|d \cdot I_e - l_f|}{l_f}, \quad (27)$$

donde I_e es el valor esperado de la integral (11). Para la resolución numérica se usó la función *integrate* de la librería *Scipy* de Python. El código realizado para esta tarea se encuentra en el siguiente repositorio de GutHub: [aaa](#)

Se usaron 5000 puntos en la resolución de l_s , aunque la cantidad de puntos válidos es menor, ya que hay que descartar aquellos valores de l_s que hagan l_f negativo o que h_{ltbe} se salga del intervalo $(0, 1)$. La gráfica del valor absoluto del error relativo en función de la longitud del slug se encuentra en la figura 5.

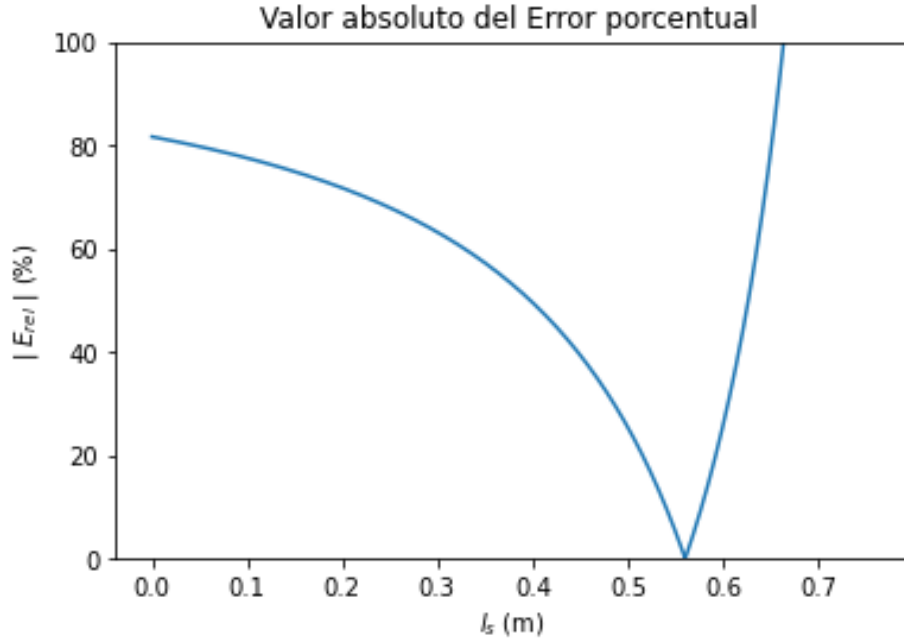


Figura 5: Error relativo de la integral (11) contra la longitud del slug.

En la figura 5 se observa que hay un valor de la longitud del slug en donde el error es mínimo, este valor es $l_s = 0,5601$ m, y el error obtenido con este valor es del 0,0011 %, por lo que se tienen muy buena precisión del valor obtenido.

Ya obtenido un valor aceptable de l_s , ya se pueden calcular el resto de parámetros de salida del modelo de Dukler y Hubbard usando las ecuaciones ya presentadas.

En la tabla 4 se muestran los resultados de los parámetros de salida restantes.

Parámetro	Símbolo	Valor	Unidad
Longitud del slug	l_s	0,5601	m
Fracción volumétrica del líquido en el Slug en equilibrio	h_{ltbe}	0,1089	*
Longitud de la capa líquida	l_f	1,3918	m
Longitud de la unidad	l_u	1,9519	m
Longitud de la zona de mezcla	l_m	1,0159	m
Tasa de derramamiento o levantamiento	x	0,7048	kg s ⁻¹
Velocidad del gas en la burbuja de Taylor delantera	v_{gtb}^d	16,0997	m s ⁻¹
Velocidad del gas en la burbuja de Taylor trasera	v_{gtb}^t	17,0960	m s ⁻¹
Velocidad del líquido en la burbuja de Taylor delantera	v_{ltb}	16,0997	m s ⁻¹
Velocidad del líquido en la burbuja de Taylor en equilibrio	v_{ltbe}	7,9486	m s ⁻¹
Caída de presión debido a la fricción	ΔP_f	11,0493	kPa
Caída de presión debido a la aceleración	ΔP_a	11,4278	kPa
Caída de presión total	ΔP	22,4771	kPa

Cuadro 4: Resultado de los parámetros de salida restantes del modelo de Dukler-Hubbard.

Una de las particularidades de las ecuaciones de la velocidad del gas y del líquido en la burbuja de Taylor en (20) y (21) es que ambas dependen de la fracción volumétrica de líquido en la burbuja de Taylor $h_{ltb} = h_{ltb}(z)$, la cual es una función de z , esto significa que el gas y el líquido a lo largo de la burbuja no se mueven de manera constante.

En la tabla 4 se observa que al inicio de la burbuja (en la 'nariz') el gas y el líquido se mueven a la misma velocidad de 16,0997 m/s.

Pero el gas al final de la burbuja tiene una velocidad 17,0960 m/s, teniendo en cuenta que el gas se mueve desde atrás de la burbuja hacia adelante (como se ve en la figura 6), significa que el gas se ralentiza y el número de Reynolds y la turbulencia son mas altas en la parte trasera de la burbuja.

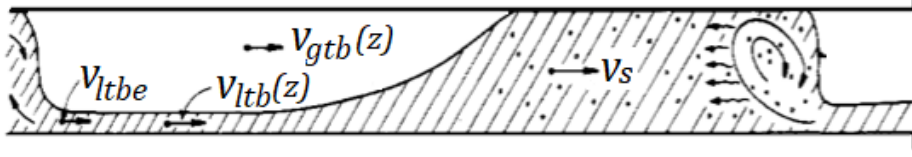


Figura 6: Diagrama de Velocidades descritas en el modelo de Dukler-Hubbard.

El líquido también se mueve desde atrás de la burbuja hacia adelante, como se ve en la figura 6, por lo que inicia con una velocidad de equilibrio de 7,9486 m/s y acelera a 16,0997 m/s al frente de la burbuja; el hecho de que en la zona de equilibrio la velocidad y la altura del líquido sea menor, nos dice que intuitivamente el flujo es menos turbulento. Para comprobarlo calculamos el número de Reynolds del líquido en la zona de equilibrio:

$$Re_{ltbe} = \frac{vs_{ltbe}\rho_l D_{ltbe}}{\mu_l}, \quad (28)$$

donde vs_{ltbe} es la velocidad superficial del líquido en zona de equilibrio en la burbuja de Taylor y D_{ltbe} es el diámetro hidráulico del líquido en zona de equilibrio. Estas se calcularán como se hizo en la tarea 1:

$$vs_{ltbe} = v_{ltbe} d^2 \frac{\tilde{A}_l}{A}, \quad D_{ltbe} = 4d \frac{\tilde{A}_l}{\tilde{S}_l},$$

donde \tilde{A}_l es el área del líquido, la tilde indica que la variable es adimensional y está dada por:

$$\tilde{A}_l = \frac{1}{4}[\pi - \tilde{S}_g + (1 - 2h_{ltbe})\tilde{S}_i],$$

y \tilde{S}_l , \tilde{S}_g y \tilde{S}_i son los perímetros adimensionales líquido-pared, gas-pared e interfaz:

$$\tilde{S}_g = \arccos(1 - 2h_{ltbe}), \quad \tilde{S}_l = \pi - \tilde{S}_g, \quad \tilde{S}_i = \sqrt{1 - (1 - 2h_{ltbe})^2}.$$

Reemplazando el diámetro hidráulico y la velocidad superficial en (28), se obtiene $Re_{ltbe} = 3267,7671$. Este valor es unas 125 veces menor al del slug ($Re_s = 407323,4215$). Aunque sigue siendo un flujo turbulento, su turbulencia es significativamente menor a la del slug y debería presentar menos burbujas, como se observa experimentalmente. Estos cálculos muestran que la cuentas realizadas en esta tarea no dan resultados absurdos.