

Tópicos sobre Transformada de Fourier

Luís Filipe Pereira Perrú *

2015

Resumo

A transformada de Fourier(TF) é uma ferramenta matemática essencial nas áreas de processamento de sinais, acústica, termodinâmica e outras. Este artigo elucida alguns conceitos relacionados a TF : a série de Fourier, a transformada de tempo contínuo, transformada de tempo discreto, o teorema da amostragem e a transformada rápida de Fourier. Estes conceitos são então relacionados a uma aplicação e tornando claro os limites de cada método matemático.

Palavras-chave: Análise de Fourier. Transformada de Fourier. Transformada discreta de Fourier. Amostragem. Transformada rápida de Fourier.

Introdução

No século XIX, Joseph Fourier pesquisava sobre soluções para a equação que governa o resfriamento dos corpos, conhecida atualmente como equação do calor ou lei de Fourier. Em dado momento,deparou-se com o seguinte problema: é possível representar uma função qualquer por combinações lineares de harmônicos? Os senos e cossenos são base natural para representar a solução da equação do calor, logo Fourier pretendia obter uma representação senóide para qualquer tipo de condição inicial. ([FIGUEIREDO, 2000](#))

Foi então criado o conceito de série de Fourier e posteriormente foi provado pelo Teorema de Dirichlet que sob certas condições tal série é converge. Ou seja, é possível representar uma função periódica de uma variável $f(x + 2L) = f(x)$ da seguinte forma:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right) \quad (1)$$

com os coeficientes a_0, a_n e b_n dados por:

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) dx \quad (2)$$

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx \quad (3)$$

*lfpperru@hotmail.com

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx \quad (4)$$

Esta é a conhecida série trigonométrica de Fourier. Além dessa série existe outra série cujo domínio são os números complexos. Manipulando a série trigonométrica e usando a relação de Euler $e^{(\pm ix)} = \cos(x) \pm i \operatorname{sen}(x)$ obtemos:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{-i \frac{n\pi x}{L}} \quad (5)$$

com o coeficiente c_n dado por:

$$c_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) e^{i \frac{n\pi x}{L}} dx \quad (6)$$

1 Transformada Contínua de Fourier

A obtenção da transformada de Fourier contínua dar-se-á, primeiramente, por meio de uma mudança de variáveis, em que $\omega = \frac{n\pi}{L}$, $\Delta\omega = \frac{\pi}{L}$ e $F(\omega) = \int_{-L}^L f(x) e^{i\omega x} dx$. Assim,

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{-i\omega x} \quad (7)$$

e

$$c_n = \frac{1}{2\pi} F(\omega) \Delta\omega \quad (8)$$

Substituindo (8) em (7) obtemos:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{-i\omega x} \Delta\omega \quad (9)$$

Quando $L \rightarrow \infty$, $\Delta\omega \rightarrow 0$ e (9) se assemelha a uma soma de Riemann. Portanto:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega x} d\omega \quad (10)$$

e

$$F(\omega) = \int_{-L}^L f(x) e^{i\omega x} dx \quad (11)$$

As Eq. (11) e (10) são o par de transformadas de Fourier conhecidos como transformada direta e inversa, respectivamente. Essa transformada é aplicável em funções não periódicas, o que permite que a transformada de Fourier análise casos incapazes pela série de Fourier. Os exemplos a seguir deixam esse fato ainda mais claro.

1.1 Aplicação: Medições Fluviométricas

Ambas série e transformada de Fourier são aplicáveis a sinais periódicos. Porém cada uma dessas representações possui um caráter muito específico na nova base - o domínio da frequência. Considere um pesquisador que realizou medições em um rio durante 400 dias.

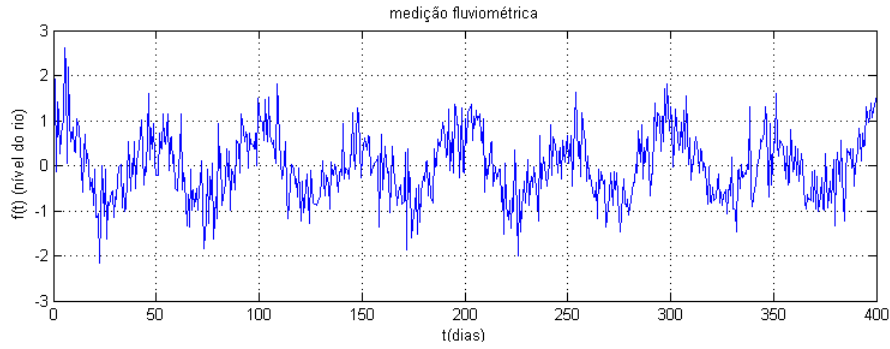


Figura 1 – Medições em um rio

Para formular um modelo de previsão dos níveis de água é necessário saber se as amostras coletadas possuem algum padrão ou periodicidade. Porém, como as medições foram feitas com instrumentos artesanais e o fenômeno em si não apresenta uma forte regularidade, estas amostras estão consideravelmente poluídas com ruído. Portanto, para determinar a periodicidade do fenômeno é necessário empregar a série de Fourier no sinal reprimando-o como uma combinação de senos e cossenos. A amplitude dos coeficientes é exibida a seguir:

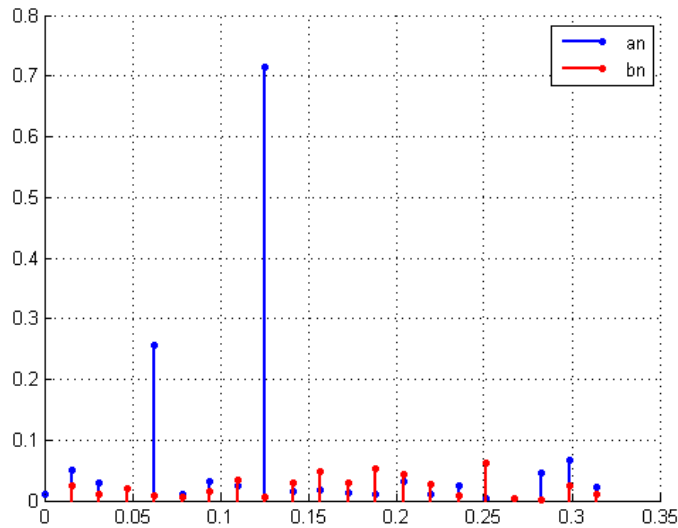


Figura 2 – Amplitude dos coeficientes a_n e b_n da representação em série de Fourier

Observe que as duas maiores amplitudes são de a_4 e a_8 . Isso caracteriza o fato de que a maior parte do comportamento do sinal no tempo deve-se as duas senóides $\cos\left(4\frac{2\pi}{400}x\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{100}x\right)$ e $\cos\left(8\frac{2\pi}{400}x\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{50}x\right)$, a primeira de período 100 dias e a outra de período 50 dias. Portanto, o nível do rio nesse período de tempo de 400 dias é uma curva bem aproximada pela soma dessas funções ponderadas pelos seus respectivos coeficientes:

$$f(t) \approx a_4 \cos\left(\frac{2\pi x}{100}\right) + a_8 \cos\left(\frac{2\pi x}{50}\right) \quad (12)$$

Usando a transformada de Fourier obtemos um resultado parecido:

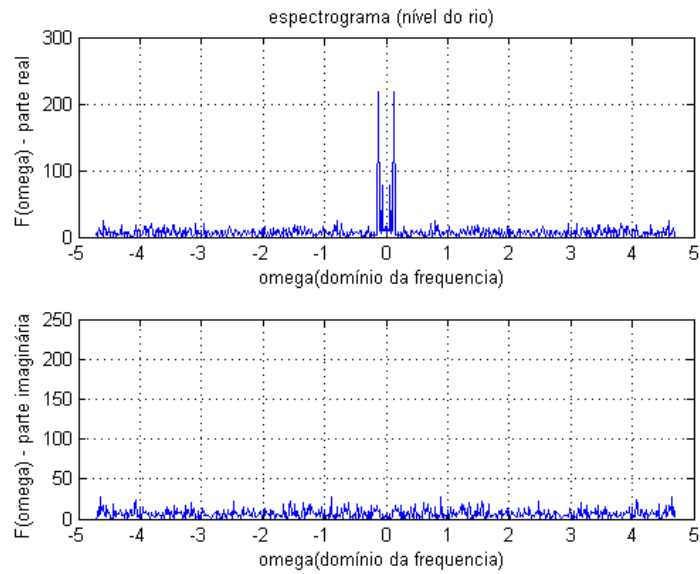


Figura 3 – Espectrograma das medições

E em detalhe:

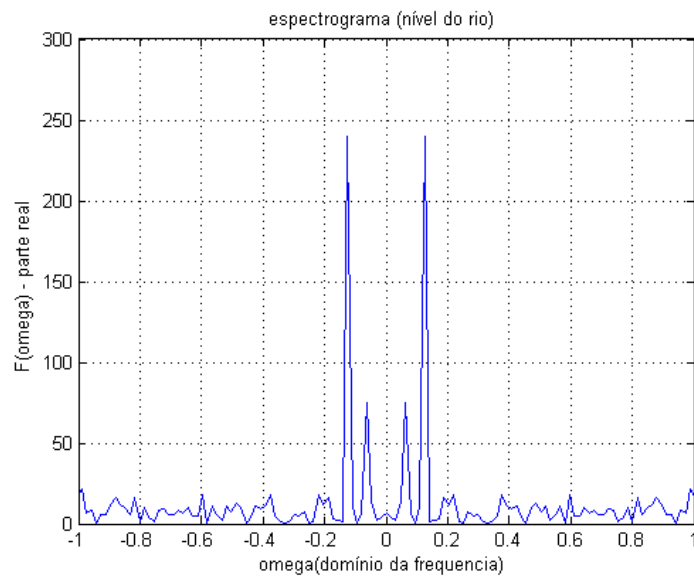


Figura 4 – Espectrograma das medições (em detalhe no intervalo -1 a 1)

Pode-se notar que há picos nas mesmas frequências que a série de Fourier, entretanto a transformada de Fourier $F(\omega)$ é uma função contínua . Portanto, conclui-se que a série de Fourier nos fornece uma versão discreta do domínio da frequência de um sinal contínuo, enquanto a transformada fornece uma versão contínua do mesmo sinal neste domínio.

A seguir é apresentado um modelo aproximado obtido através das amostras discretas

do nível do rio, tanto pela série quanto pela transformada de Fourier, desconsiderando os componentes de frequência de baixa amplitude. Com o modelo em mãos, o pesquisador tem condições de formular hipóteses de que fatores podem formar esses dois comportamentos periódicos: o de período de 100 dias poderia ser causado por variações climáticas e outro de 50 dias por razões populacionais e econômicos, por exemplo.

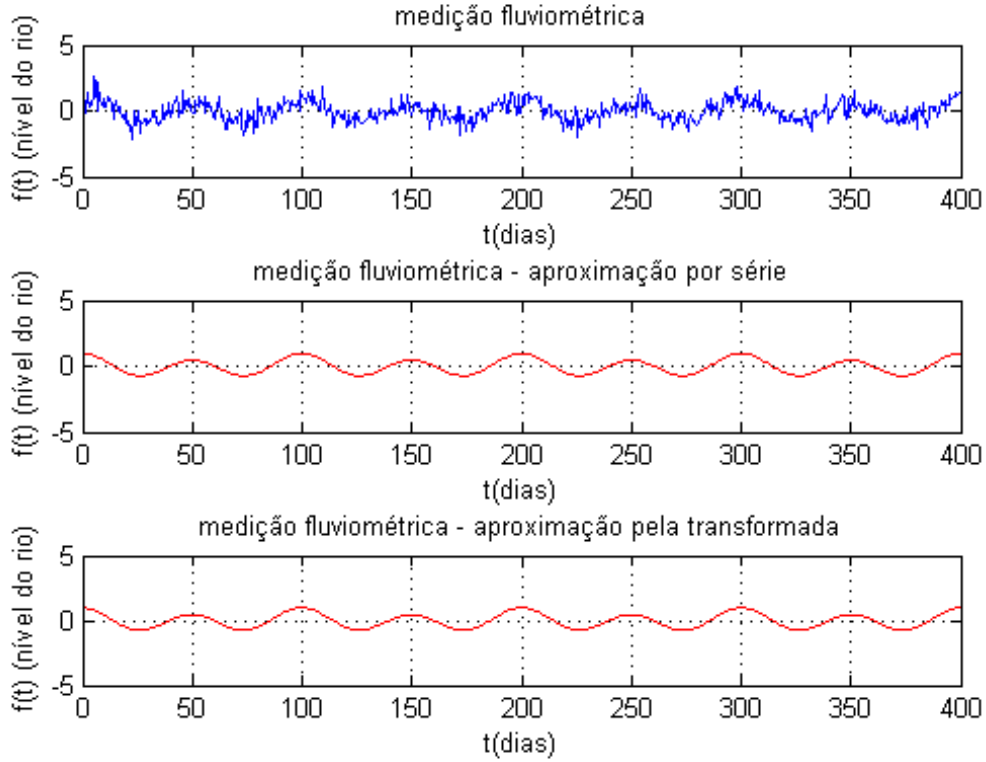


Figura 5 – Modelo aproximado

2 Transformada Discreta de Fourier

Seja um sinal ou função $x(t)$, pode-se calcular uma aproximação da transformada de Fourier contínua para um intervalo finito através de N pontos discretos desse sinal, isto é, $x(n)$, $n = 0, 1, \dots, N - 1$. (ROBERTS, 2009) Tal aproximação recebe o nome de transformada discreta de Fourier ou do inglês *Discrete Fourier Transform* (DFT) e é definida matematicamente como:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-i \frac{2\pi}{N} nk} \quad (13)$$

com $0 \leq k \leq N - 1$ e por:

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{i \frac{2\pi}{N} nk} \quad (14)$$

com $0 \leq n \leq N - 1$. É importante salientar que n é a variável que discretiza o domínio do tempo, enquanto k é a variável responsável por discretizar o domínio da frequência. O pseudo-código da DFT segue abaixo:

Algorithm 1 Transformada Discreta de Fourier

```

1: função DFT(x,N)
2:    $W_N \leftarrow e^{-i\frac{2\pi}{N}}$ 
3:   para  $k \leftarrow 0$  até  $N - 1$  faça
4:     para  $n \leftarrow 0$  até  $N - 1$  faça
5:        $X[k] \leftarrow X[k] + x[n]W_N^{nk}$ 
6:     fim para
7:   fim para
8: fim função

```

A complexidade de tempo da transformada discreta é $O(N^2)$ visto que são usados dois laços **for** em seu cálculo.

3 Transformada Rápida de Fourier

A Transformada Rápida de Fourier ou do inglês *Fast Fourier Transform*(FFT) é uma estratégia algorítmica eficiente que permite o cálculo da DFT recursivamente, utilizando suas propriedades de simetria e periodicidade, de forma que sua complexidade de tempo seja apenas $O(N \log N)$. Pensada inicialmente por Carl Friedrich Gauss em 1805, essa estratégia recursiva foi publicada somente por Cooley e Turkey em 1965.([COOLEY; LEWIS; WELCH, 1970](#)) Baseia-se nos seguintes resultados:

$$W_N^2 = \left(e^{-i\frac{2\pi}{N}}\right)^2 = e^{-i\frac{2\pi}{N}2} = e^{-i\frac{2\pi}{N/2}} = W_{N/2} \quad (15)$$

$$W_N^{k+N/2} = \left(e^{-i\frac{2\pi}{N}}\right)^{k+N/2} = e^{-i\frac{2\pi}{N}(k+N/2)} = e^{-i\frac{2\pi}{N}k - i\pi} = e^{-i\frac{2\pi}{N}k} e^{-i\pi} = -e^{-i\frac{2\pi}{N}k} = -W_N^k \quad (16)$$

Pela definição da DFT temos que:

$$\begin{aligned}
X(k) &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n)W_N^{nk} = \sum_{n=0}^{N/2-1} x(2n)W_N^{(2n)k} + \sum_{n=0}^{N/2-1} x(2n+1)W_N^{(2n+1)k} \\
&= \sum_{n=0}^{N/2-1} x(2n) \left(W_N^2\right)^{nk} + W_N^k \sum_{n=0}^{N/2-1} x(2n+1) \left(W_N^2\right)^{nk}
\end{aligned}$$

Pela fato (15):

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N/2-1} x(2n) \left(W_{N/2}\right)^{nk} + W_N^k \sum_{n=0}^{N/2-1} x(2n+1) \left(W_{N/2}\right)^{nk}$$

Definimos:

$$X_e(k) = \sum_{n=0}^{N/2-1} x(2n) \left(W_{N/2}\right)^{nk} \quad (17)$$

e

$$X_o(k) = \sum_{n=0}^{N/2-1} x(2n+1) \left(W_{N/2}\right)^{nk} \quad (18)$$

como as DFTs dos termos pares e ímpares, respectivamente, do sinal discreto original $x(n)$. Logo,

$$X(k) = X_e(k) + W_N^k X_o(k), 0 \leq k \leq N-1 \quad (19)$$

Podemos separar Eq. (19) em duas equações e redefinir o índice k :

$$\begin{cases} X(k) = X_e(k) + W_N^k X_o(k) \\ X(k + N/2) = X_e(k + N/2) + W_N^{k+N/2} X_o(k + N/2) \end{cases}, 0 \leq k \leq N/2 - 1 \quad (20)$$

Usando o fato (16) e cientes que $X_e(k)$ e $X_o(k)$ são periódicos de período $N/2$, reescrevemos a segunda equação de (20):

$$\begin{cases} X(k) = X_e(k) + W_N^k X_o(k) \\ X(k + N/2) = X_e(k) - W_N^k X_o(k) \end{cases}, 0 \leq k \leq N/2 - 1 \quad (21)$$

O pseudo-código da FFT pode ser resumido a seguir:

Algorithm 2 Transformada Rápida de Fourier

```

1: função FFT(x,N)
2:    $W_N \leftarrow e^{-i\frac{2\pi}{N}}$ 
3:   se  $N = 1$  então
4:     devolve  $x$ 
5:   senão
6:      $X_e \leftarrow FFT(\{x[0], x[2], \dots, x[N-2]\}, N/2 - 1)$ 
7:      $X_o \leftarrow FFT(\{x[1], x[3], \dots, x[N-1]\}, N/2 - 1)$ 
8:     para  $k \leftarrow 0$  até  $N/2 - 1$  faça
9:        $X[k] \leftarrow X_e[k] + W_N^k X_o[k]$ 
10:       $X[k + N/2] \leftarrow X_e[k] - W_N^k X_o[k]$ 
11:     fim para
12:     devolve  $X$ 
13:   fim se
14: fim função

```

4 Teorema da amostragem

O Teorema da amostragem ou Teorema de Nyquist permite compreender algumas restrições na representação da transformada de Fourier em sua forma discreta. (CHAPRA; CANALE, 2011) Isto pois há uma delimitação na faixa de frequências representáveis por uma DFT. Assim, segundo o teorema, a frequência mínima representável deve ser igual ao inverso do tempo amostrado T :

$$f_{min} = \frac{1}{T} \quad (22)$$

E a frequência máxima representável é a metade da frequência de amostragem $f_{amost.} = \frac{N}{T}$:

$$f_{max} = \frac{1}{2} f_{amost.} = \frac{N}{2T} \quad (23)$$

Um exemplo seria representar um sinal cujas 100 amostras discretas foram colhidas num intervalo de tempo de 2 segundos. Logo,

$$\begin{aligned} T &= 2s \\ N &= 100 \text{ amostras} \\ f_{amost.} &= 50 \text{ amostras/s} \\ f_{max} &= 25 \text{ Hz} \\ f_{min} &= 0.5 \text{ Hz} \end{aligned}$$

Ou seja, componentes do sinal com frequências abaixo de 0.5 Hz e acima de 25 Hz seriam desconsiderados. Outro exemplo, seria representar um sinal:

$$f(t) = 5 + \cos(2\pi(12.5)t) + \sin(2\pi(18.75)t) \quad (24)$$

amostrado com 8 amostras num período de tempo de 0.16 segundos. Então,

$$\begin{aligned} T &= 0.16 \\ N &= 8 \text{ amostras} \\ f_{amost.} &= \frac{N}{T} = \frac{8}{0.16} = 50 \text{ amostras/s} \end{aligned}$$

$$f_{max} = \frac{1}{2}f_{amost.} = 25 \text{ Hz}$$

$$f_{min} = \frac{1}{T} = \frac{1}{0.16} = 6.25 \text{ Hz}$$

Os valores da DFT estão exibidos abaixo:

Tabela 1 – Valores DFT

n	k	$freq$	$real$	$imag$
0	0	0	5	0
1	1	6.25	0	0
2	2	12.5	0.5	0
3	3	18.75	0	0.5
4	4	25	0	0
5	-1	31.25	0	-0.5
6	-2	37.5	0.5	0
7	-3	43.75	0	0

Pode-se notar que como as frequências das senóides formadoras (12.5 Hz e 18.75 Hz) do sinal $f(t)$ estão dentro do intervalo de frequências representáveis (6.25 Hz a 25 Hz). Portanto, o número de amostras é suficiente para representar perfeitamente o sinal no domínio da frequência

Considerações finais

Foi apresentada a obtenção da transformada de Fourier(TF) a partir da série de Fourier, sua versão com frequência discreta. Considerações foram feitas acerca da aplicação dessa ferramenta matemática na obtenção de um modelo do nível da água em um rio. Além disso, foram apresentados os pseudocódigos da transformada de tempo discreto e da transformada rápida de Fourier, um algoritmo eficiente para o cálculo da TF. Por fim, foram comentados alguns detalhes do teorema da amostragem que prevê certos limites de representação da TF discreta.

Referências

CHAPRA, S. C.; CANALE, R. P. *Métodos numéricos para engenharia*. [S.l.]: McGraw Hill Brasil, 2011. Citado na página [7](#).

COOLEY, J. W.; LEWIS, P.; WELCH, P. The fast fourier transform algorithm: Programming considerations in the calculation of sine, cosine and laplace transforms. *Journal of Sound and Vibration*, Elsevier, v. 12, n. 3, p. 315–337, 1970. Citado na página [6](#).

FIGUEIREDO, D. G. de. *Análise de Fourier e equações diferenciais parciais*. [S.l.]: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2000. Citado na página [1](#).

ROBERTS, M. J. *Fundamentos de sinais e sistemas*. [S.l.]: McGraw Hill Brasil, 2009. Citado na página [5](#).