

GEOMETRÍA DE PARCHES TÓRICOS

Luis David García-Puente
en colaboración con
Gheorghe Craciun (University of Wisconsin-Madison) y
Frank Sottile (Texas A&M University)

Department of Mathematics and Statistics
Sam Houston State University
Statistical and Applied Mathematical Sciences Institute

Coloquio del Instituto de Matemáticas, UNAM

MODELACIÓN GEOMÉTRICA Y GEOMETRÍA ALGEBRAICA

La **modelación geométrica** utiliza polinomios para construir modelos por computadora de objetos en diseño y manufactura industrial.

La **Geometría algebraica** investiga las propiedades algebraicas y geométricas de sistemas de polinomios.



REPRESENTACIÓN MATEMÁTICA DE CURVAS Y SUPERFICIES

EXPLÍCITA

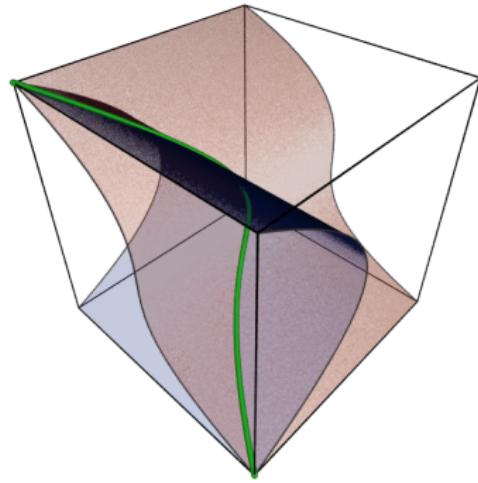
$$y = 3x + 1, \quad z = x^2 - y^2$$

IMPLÍCITA

$$xz - y^2 = 0 \cap x^3 - z = 0$$

PARAMÉTRICA

$$x(t) = t, \quad y(t) = t^2, \quad z(t) = t^3$$



MODELACIÓN GEOMÉTRICA DE CURVAS Y SUPERFICIES

MALLAS GEOMÉTRICAS

- Parches de Coons (Ford)
- Superficies de Gordon (General Motors)

MÉTODOS DE PUNTOS DE CONTROL

- Interpolación de Lagrange
- Métodos de Bézier y B-splines (Boeing)

MÉTODOS AVANZADOS

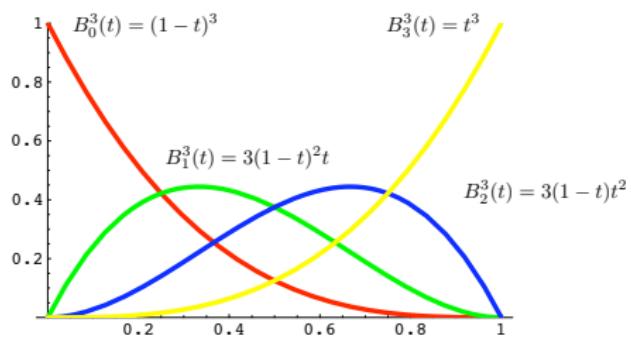
- Subdivisión (Pixar)



CURVAS DE BÉZIER

POLINOMIOS DE BERNSTEIN

$$B_i^n(t) := \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}$$



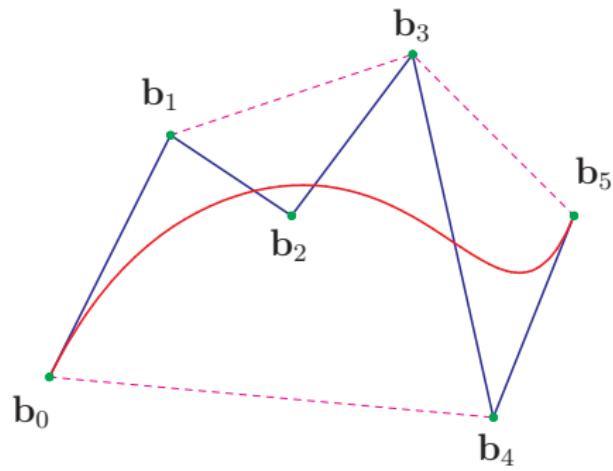
DEFINICIÓN PARAMÉTRICA

$$\varphi(t) := \sum_{i=0}^n B_i^n(t) \mathbf{b}_i, \quad t \in [0, 1]$$

donde $\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n$ son **puntos de control** en algún espacio afín.

CURVAS DE BÉZIER

$$\varphi(t) = (1-t)^5 \mathbf{b}_0 + 5t(1-t)^4 \mathbf{b}_1 + 10t^2(1-t)^3 \mathbf{b}_2 + \\ 10t^3(1-t)^2 \mathbf{b}_3 + 5t^4(1-t) \mathbf{b}_4 + t^5 \mathbf{b}_5.$$



PRECISIÓN LINEAL DE LAS CURVAS DE BÉZIER

PRECISIÓN LINEAL

$$\sum_{i=0}^n B_i^n(t) \frac{i}{n} = t$$

$$\frac{1}{3} \left[0(1-t)^3 + 3t(1-t)^2 + 6t^2(1-t) + 3t^3 \right] = t$$

- $\mathcal{A} = \{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, 1\}$.
- $\Delta = [0, 1]$ es la envolvente convexa de \mathcal{A} .
- Los polinomios de Bernstein están indexados por \mathcal{A} y tienen dominio Δ .
- Precisión lineal significa que $\varphi(t)$ es la identidad en Δ cuando $\mathbf{b}_i = \frac{i}{n}$.



PARCHES DEFINIDOS POR PUNTOS DE CONTROL

Defina $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^d$ (e.g. $d = 2$) como un conjunto finito de índices cuya envolvente convexa se denota Δ .

$\beta := \{\beta_{\mathbf{a}} : \Delta \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \mid \mathbf{a} \in \mathcal{A}\}$, **funciones base**, tal que, $1 = \sum_{\mathbf{a}} \beta_{\mathbf{a}}(x)$.

Dados **puntos de control** $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_{\mathbf{a}} \mid \mathbf{a} \in \mathcal{A}\} \subset \mathbb{R}^\ell$ (e.g. $\ell = 3$), obtenemos la función

$$F : \Delta \longrightarrow \mathbb{R}^\ell \quad x \longmapsto \sum \beta_{\mathbf{a}}(x) \mathbf{b}_{\mathbf{a}}$$

La imagen de F es un parche de forma Δ .



PARCHES TÓRICOS (KRASAUSKAS)

Cualquier politopo Δ cuyos vértices tienen coordenadas enteras es descrito a través de **desigualdades definidoras de facetas**

$$\Delta = \left\{ x \in \mathbb{R}^d \mid h_i(x) \geq 0, i = 1, \dots, r \right\},$$

donde $h_i(x)$ es una forma lineal con coeficientes enteros.

Para cada $\mathbf{a} \in \mathcal{A} := \Delta \cap \mathbb{Z}^d$, existe una **función tórica de Bézier**

$$\beta_{\mathbf{a}}(x) := h_1(x)^{h_1(\mathbf{a})} h_2(x)^{h_2(\mathbf{a})} \dots h_r(x)^{h_r(\mathbf{a})}.$$

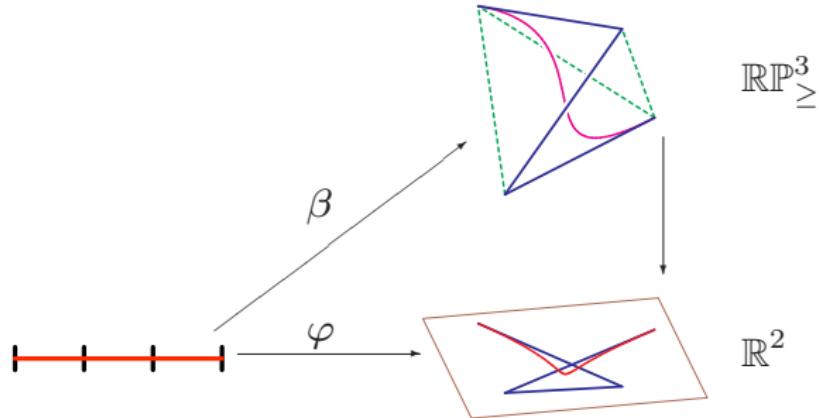
Sea $w = \{w_{\mathbf{a}} \mid \mathbf{a} \in \mathcal{A}\} \subset \mathbb{R}_>$, las funciones base están dadas por

$$\frac{w_{\mathbf{a}} \beta_{\mathbf{a}}}{\sum_{\mathbf{a} \in \mathcal{A}} w_{\mathbf{a}} \beta_{\mathbf{a}}} \quad \text{para cada } \mathbf{a} \in \mathcal{A}.$$

VARIEDADES TÓRICAS

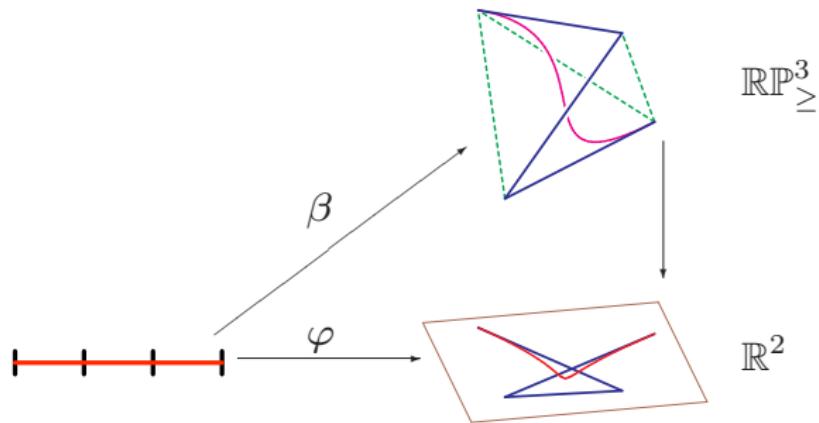
El mapeo $\varphi : \Delta \longrightarrow \mathbb{R}^\ell$ es la composición de un mapa inyectivo a un espacio proyectivo seguido por una proyección lineal.

$$\begin{array}{ccccccc}\varphi : \Delta & \xrightarrow{\beta} & \mathbb{RP}_{\geq}^A & & \xrightarrow{\mu} & \mathbb{RP}^\ell \\ x & \longrightarrow & [\beta_{\mathbf{a}}(x) \mid \mathbf{a} \in \mathcal{A}] & [y_{\mathbf{a}} \mid \mathbf{a} \in \mathcal{A}] & \longrightarrow & \sum_{\mathbf{a} \in \mathcal{A}} y_{\mathbf{a}}(1, \mathbf{b}_{\mathbf{a}})\end{array}$$

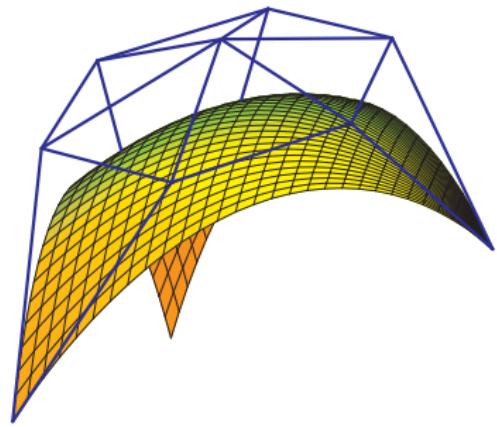
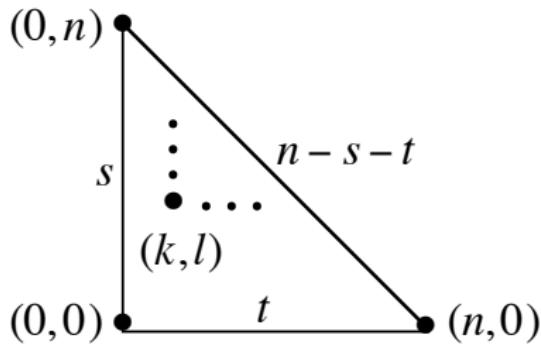


VARIEDADES TÓRICAS

Denote la imagen $\beta(\Delta)$ en $\mathbb{R}\mathbb{P}^A_>$ como $X_{\Delta,w}$, esta es la parte positiva de una variedad tórica.



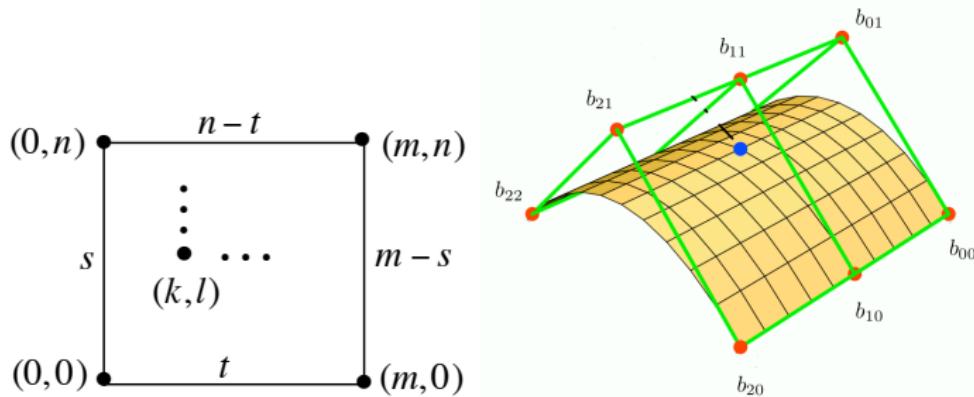
TRIÁNGULOS DE BÉZIER



$$\varphi(s, t) = \sum_{kl} \frac{\binom{n}{kl} s^k t^l (n-s-t)^{n-k-l}}{n^n} \mathbf{b}_{kl}$$

La variedad tórica correspondiente es la superficie de Veronese de grado n .

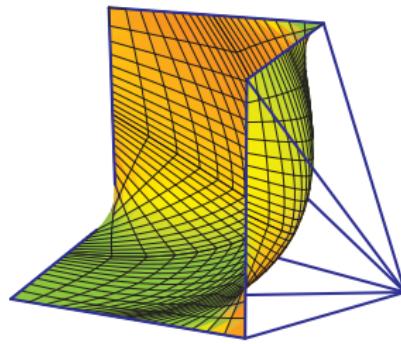
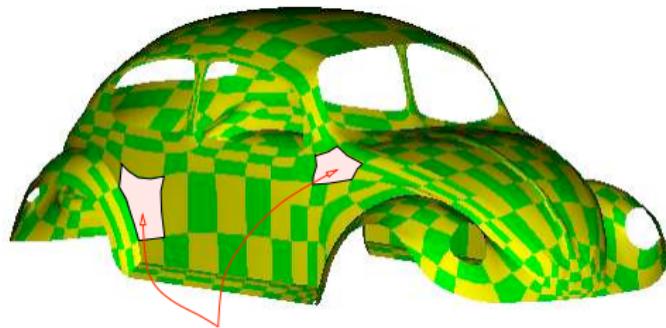
RECTÁNGULOS DE BÉZIER



$$\varphi(s, t) = \sum_{kl} \frac{\binom{m}{k} \binom{n}{l} s^k (m-s)^{m-k} t^l (n-t)^{n-l}}{m^m n^n} \mathbf{b}_{kl}$$

La variedad tórica correspondiente es el producto de Segre de dos curvas racionales normales de grados n y m .

PARCHES MULTILATERALES



PRECISIÓN LINEAL

MAPEO TAUTOLÓGICO

Dado un parche tórico (Δ, w) , fijemos $\mathbf{b}_\mathbf{a} = \mathbf{a}$ para todo $\mathbf{a} \in \mathcal{A}$ para obtener la función

$$\tau : \Delta \longrightarrow \Delta, \quad x \longmapsto \sum_{\mathbf{a} \in \mathcal{A}} \beta_\mathbf{a}(x) \mathbf{a}.$$

PRECISIÓN LINEAL

El parche tórico (Δ, w) tiene **precisión lineal** si y sólo si τ es la función identidad.

TEOREMA (G-SOTTILE)

Todo parche tórico tiene una única reparametrización con precisión lineal, dada por el inverso del moment map $\mu : X_{\Delta, w} \rightarrow \Delta$.

PRECISIÓN LINEAL RACIONAL

Dado un conjunto finito $\mathcal{A} \subset \mathbb{Z}^d$ y un sistema de pesos $w \in \mathbb{R}_{>}^{\mathcal{A}}$, el polinomio de Laurent $P_{w,\mathcal{A}}$ se define como

$$P_{w,\mathcal{A}} := \sum_{\mathbf{a} \in \mathcal{A}} w_{\mathbf{a}} x^{\mathbf{a}}, \quad \text{where } x^{\mathbf{a}} = x_1^{\mathbf{a}_1} x_2^{\mathbf{a}_2} \cdots x_d^{\mathbf{a}_d}.$$

TEOREMA (G-SOTTILE)

El parche tórico (Δ, w) tiene precisión lineal racional si y sólo si

$$x \longmapsto \frac{1}{P_{w,\mathcal{A}}} \left(x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} P_{w,\mathcal{A}}, x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} P_{w,\mathcal{A}}, \dots, x_d \frac{\partial}{\partial x_d} P_{w,\mathcal{A}} \right)$$

es un isomorfismo biracional $\mathbb{C}^d \dashrightarrow \mathbb{C}^d$. En este caso, $P_{w,\mathcal{A}}$ es una transformación polar tórica de Cremona.

PRECISIÓN LINEAL DE SUPERFICIES TÓRICAS

TEOREMA (GRAF VON BOTHMER-RANESTAD-SOTTILE)

Un polinomio $P \in \mathbb{C}[x, y]$ define una transformación polar tórica de Cremona si y sólo si es **equivalente** a una de las siguientes formas

- $(x + y + 1)^n$ (\iff triángulo de Bézier)
- $(x + 1)^m(y + 1)^n$ (\iff rectángulo de Bézier)
- $(x + 1)^m ((x + 1)^d + y)^n$ (\iff parche trapezoidal)
- $x^2 + y^2 + 1 - 2(xy + x + y)$

EQUIVALENTE

Acción de $SL(n, \mathbb{Z})$ en los exponentes de los monomios, multiplicación por monomios de Laurent, y multiplicación de variables por escalares.



PRECISIÓN LINEAL DE SUPERFICIES TÓRICAS

TEOREMA (GRAF VON BOTHMER-RANESTAD-SOTTILE)

Un polinomio $P \in \mathbb{C}[x, y]$ define una transformación polar tórica de Cremona si y sólo si es **equivalente** a una de las siguientes formas

- $(x + y + 1)^n$ (\iff triángulo de Bézier)
- $(x + 1)^m(y + 1)^n$ (\iff rectángulo de Bézier)
- $(x + 1)^m ((x + 1)^d + y)^n$ (\iff parche trapezoidal)
- $x^2 + y^2 + 1 - 2(xy + x + y)$

EQUIVALENTE

Acción de $SL(n, \mathbb{Z})$ en los exponentes de los monomios, multiplicación por monomios de Laurent, y multiplicación de variables por escalares.

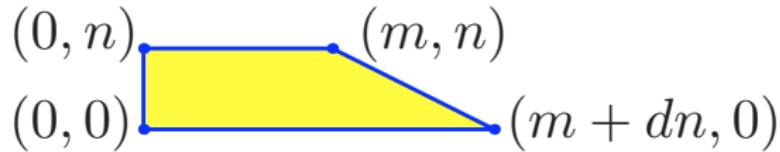


PARCHE TRAPEZOIDAL

Sean $n, d \geq 1$ and $m \geq 0$ números enteros, y fije

$$\mathcal{A} = \{(i, j) \mid 0 \leq j \leq n \text{ and } 0 \leq i \leq m + dn - dj\},$$

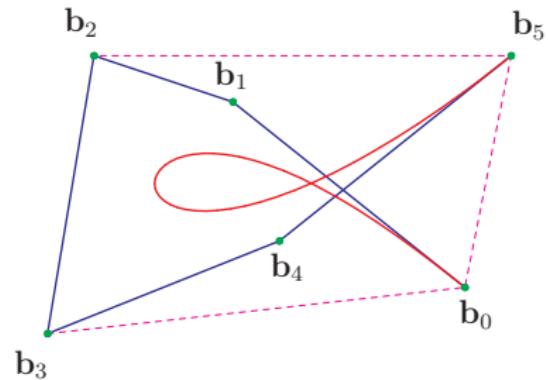
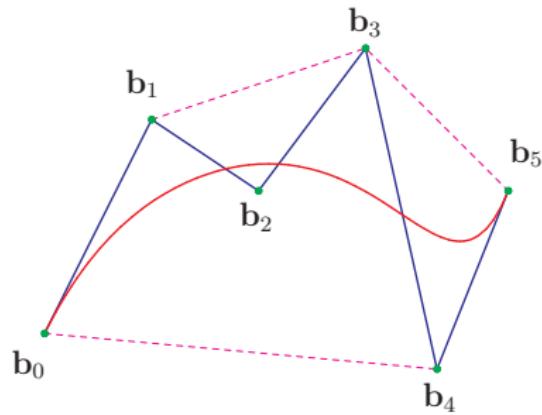
que son los puntos con coordenadas enteras en el trapezoide



Fije pesos $w_{ij} = \binom{n}{j} \binom{m+dn-dj}{i}$. Las funciones tóricas de Bézier se definen como

$$\beta_{ij}(s, t) = \binom{n}{j} \binom{m+dn-dj}{i} s^i (m+dn-dt-s)^{m+dn-dj-i} t^j (n-t)^{n-j}.$$

INYECTIVIDAD DE PARCHES TÓRICOS

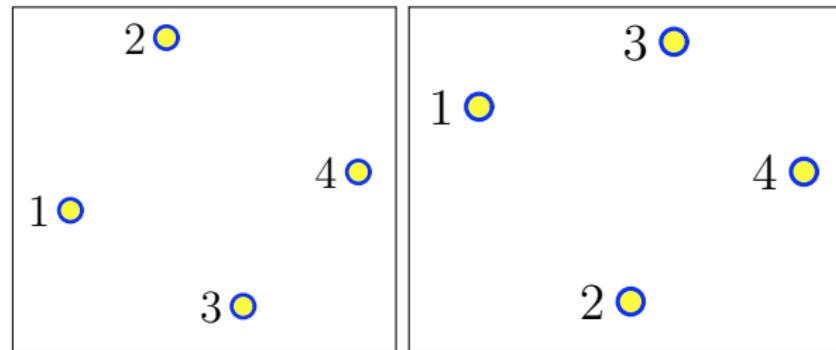


ORIENTACIONES COMPATIBLES

Sean \mathcal{A} and $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_\mathbf{a} \mid \mathbf{a} \in \mathcal{A}\}$ conjuntos finitos de puntos en \mathbb{R}^d .

Suponga que $\{\mathbf{a}_0, \dots, \mathbf{a}_d\} \subset \mathcal{A}$ y $\{\mathbf{b}_{\mathbf{a}_0}, \dots, \mathbf{b}_{\mathbf{a}_d}\} \subset \mathcal{B}$ son subconjuntos independientes, entonces cada lista determina una orientación.

Los conjuntos \mathcal{A} y \mathcal{B} son **compatibles** si cada par de subconjuntos definen la misma orientación o la orientación opuesta.

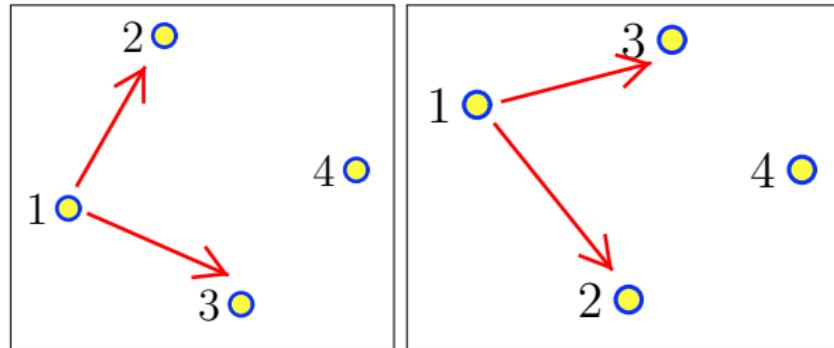


ORIENTACIONES COMPATIBLES

Sean \mathcal{A} and $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_\mathbf{a} \mid \mathbf{a} \in \mathcal{A}\}$ conjuntos finitos de puntos en \mathbb{R}^d .

Suponga que $\{\mathbf{a}_0, \dots, \mathbf{a}_d\} \subset \mathcal{A}$ y $\{\mathbf{b}_{\mathbf{a}_0}, \dots, \mathbf{b}_{\mathbf{a}_d}\} \subset \mathcal{B}$ son subconjuntos independientes, entonces cada lista determina una orientación.

Los conjuntos \mathcal{A} y \mathcal{B} son **compatibles** si cada par de subconjuntos definen la misma orientación o la orientación opuesta.

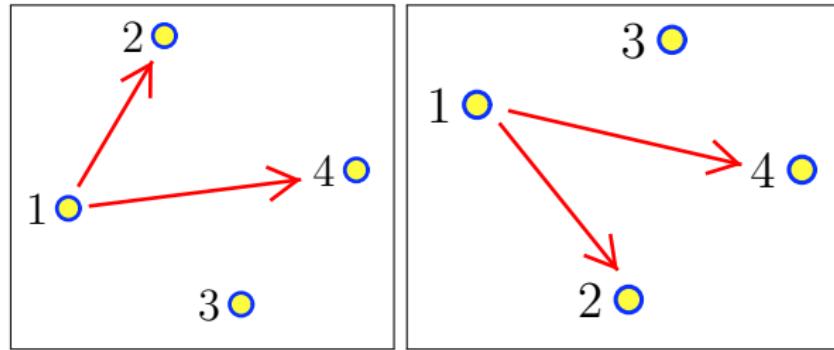


ORIENTACIONES COMPATIBLES

Sean \mathcal{A} and $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_\mathbf{a} \mid \mathbf{a} \in \mathcal{A}\}$ conjuntos finitos de puntos en \mathbb{R}^d .

Suponga que $\{\mathbf{a}_0, \dots, \mathbf{a}_d\} \subset \mathcal{A}$ y $\{\mathbf{b}_{\mathbf{a}_0}, \dots, \mathbf{b}_{\mathbf{a}_d}\} \subset \mathcal{B}$ son subconjuntos independientes, entonces cada lista determina una orientación.

Los conjuntos \mathcal{A} y \mathcal{B} son **compatibles** si cada par de subconjuntos definen la misma orientación o la orientación opuesta.

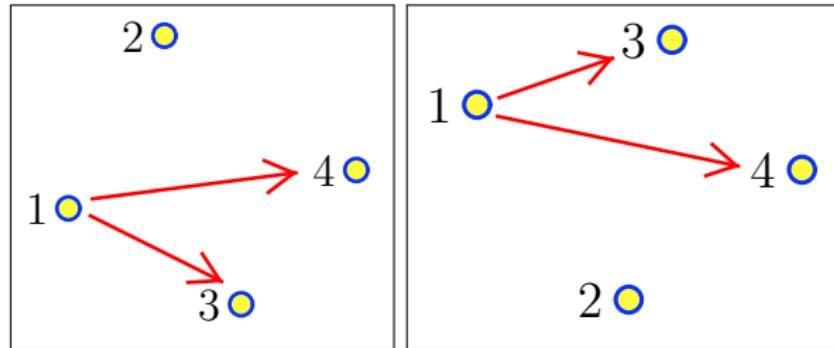


ORIENTACIONES COMPATIBLES

Sean \mathcal{A} and $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_\mathbf{a} \mid \mathbf{a} \in \mathcal{A}\}$ conjuntos finitos de puntos en \mathbb{R}^d .

Suponga que $\{\mathbf{a}_0, \dots, \mathbf{a}_d\} \subset \mathcal{A}$ y $\{\mathbf{b}_{\mathbf{a}_0}, \dots, \mathbf{b}_{\mathbf{a}_d}\} \subset \mathcal{B}$ son subconjuntos independientes, entonces cada lista determina una orientación.

Los conjuntos \mathcal{A} y \mathcal{B} son **compatibles** si cada par de subconjuntos definen la misma orientación o la orientación opuesta.

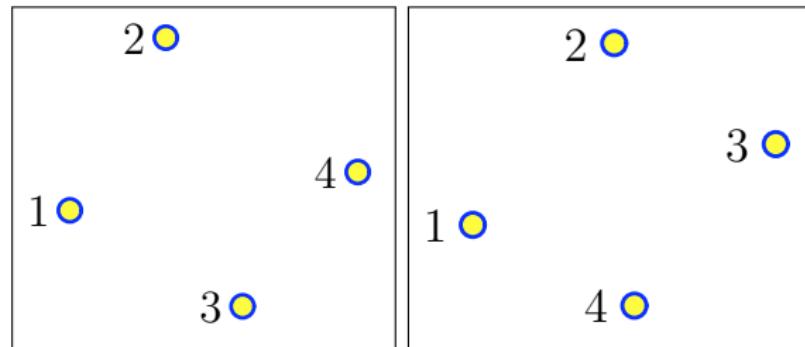


ORIENTACIONES COMPATIBLES

Sean \mathcal{A} and $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_\mathbf{a} \mid \mathbf{a} \in \mathcal{A}\}$ conjuntos finitos de puntos en \mathbb{R}^d .

Suponga que $\{\mathbf{a}_0, \dots, \mathbf{a}_d\} \subset \mathcal{A}$ y $\{\mathbf{b}_{\mathbf{a}_0}, \dots, \mathbf{b}_{\mathbf{a}_d}\} \subset \mathcal{B}$ son subconjuntos independientes, entonces cada lista determina una orientación.

Los conjuntos \mathcal{A} y \mathcal{B} son **compatibles** si cada par de subconjuntos definen la misma orientación o la orientación opuesta.

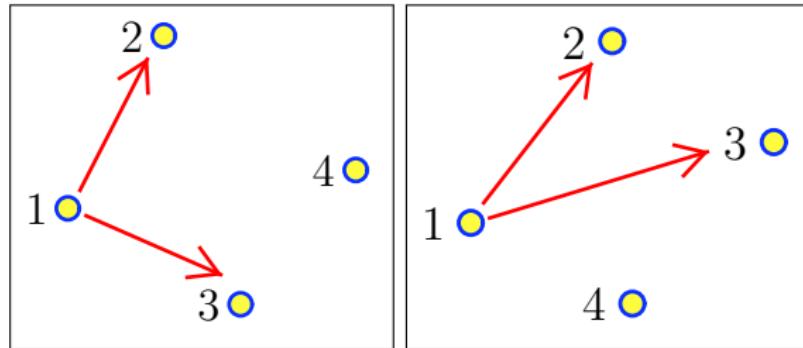


ORIENTACIONES COMPATIBLES

Sean \mathcal{A} and $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_\mathbf{a} \mid \mathbf{a} \in \mathcal{A}\}$ conjuntos finitos de puntos en \mathbb{R}^d .

Suponga que $\{\mathbf{a}_0, \dots, \mathbf{a}_d\} \subset \mathcal{A}$ y $\{\mathbf{b}_{\mathbf{a}_0}, \dots, \mathbf{b}_{\mathbf{a}_d}\} \subset \mathcal{B}$ son subconjuntos independientes, entonces cada lista determina una orientación.

Los conjuntos \mathcal{A} y \mathcal{B} son **compatibles** si cada par de subconjuntos definen la misma orientación o la orientación opuesta.

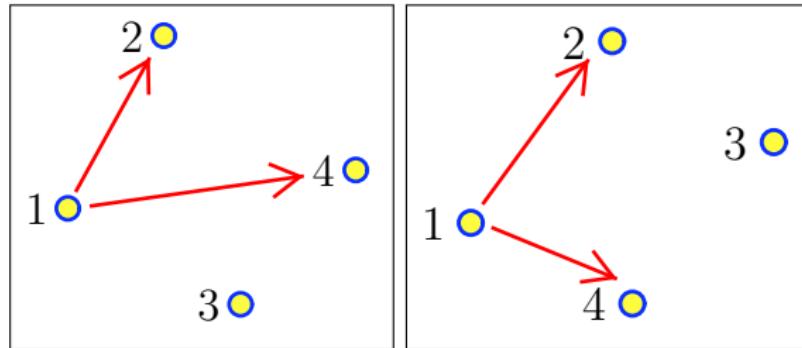


ORIENTACIONES COMPATIBLES

Sean \mathcal{A} and $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_\mathbf{a} \mid \mathbf{a} \in \mathcal{A}\}$ conjuntos finitos de puntos en \mathbb{R}^d .

Suponga que $\{\mathbf{a}_0, \dots, \mathbf{a}_d\} \subset \mathcal{A}$ y $\{\mathbf{b}_{\mathbf{a}_0}, \dots, \mathbf{b}_{\mathbf{a}_d}\} \subset \mathcal{B}$ son subconjuntos independientes, entonces cada lista determina una orientación.

Los conjuntos \mathcal{A} y \mathcal{B} son **compatibles** si cada par de subconjuntos definen la misma orientación o la orientación opuesta.

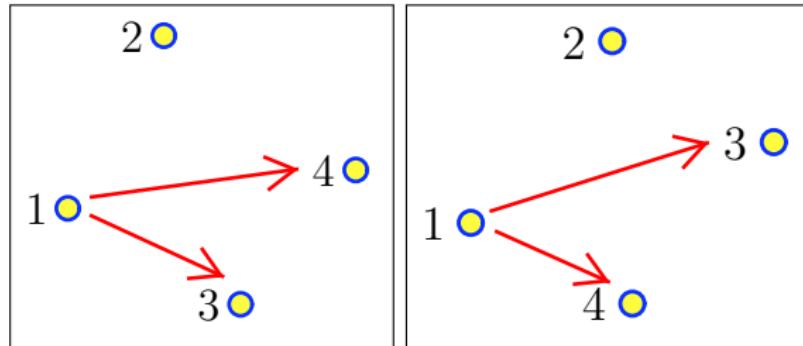


ORIENTACIONES COMPATIBLES

Sean \mathcal{A} and $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_\mathbf{a} \mid \mathbf{a} \in \mathcal{A}\}$ conjuntos finitos de puntos en \mathbb{R}^d .

Suponga que $\{\mathbf{a}_0, \dots, \mathbf{a}_d\} \subset \mathcal{A}$ y $\{\mathbf{b}_{\mathbf{a}_0}, \dots, \mathbf{b}_{\mathbf{a}_d}\} \subset \mathcal{B}$ son subconjuntos independientes, entonces cada lista determina una orientación.

Los conjuntos \mathcal{A} y \mathcal{B} son **compatibles** si cada par de subconjuntos definen la misma orientación o la orientación opuesta.



INYECTIVIDAD DE PARCHES TÓRICOS

Para cada $w \in \mathbb{R}_{>}^{\mathcal{A}}$, sea $\varphi_w: \Delta \rightarrow \mathbb{R}^d$ el parche tórico de forma (Δ, w) dado por los puntos de control $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}^d$:

$$\varphi_w(x) := \frac{\sum_{\mathbf{a} \in \mathcal{A}} w_{\mathbf{a}} \beta_{\mathbf{a}}(x) \mathbf{b}_{\mathbf{a}}}{\sum_{\mathbf{a} \in \mathcal{A}} w_{\mathbf{a}} \beta_{\mathbf{a}}(x)}.$$

TEOREMA (CRACIUN-G-SOTTILE)

El mapeo φ_w es inyectivo para cada $w \in \mathbb{R}_{>}^{\mathcal{A}}$ si y sólo si \mathcal{A} y \mathcal{B} son compatibles.

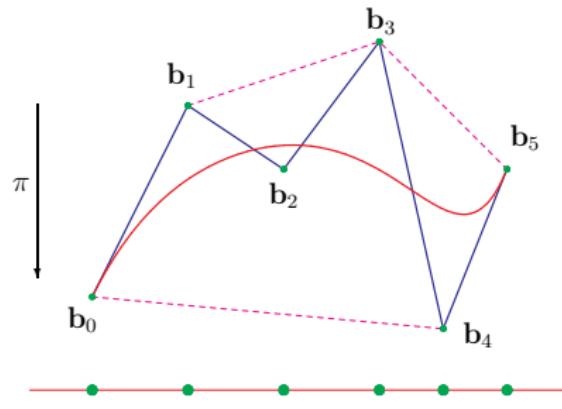
El caso $\mathbf{b}_{\mathbf{a}} = \mathbf{a}$ para cada $\mathbf{a} \in \mathcal{A}$ es conocido como el Teorema de Birch, un resultado fundamental en estadística y en geometría tórica.



INYECTIVIDAD DE CURVAS Y SUPERFICIES DE BÉZIER

TEOREMA (CRACIUN-G-SOTTILE)

Sean $A \subset \mathbb{R}^d$, $w \in \mathbb{R}_>^A$, y $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}^n$ los exponentes, pesos, y puntos de control de un parche tórico. Dada una proyección $\pi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^d$ tal que A es compatible con $\pi(\mathcal{B})$, entonces $\varphi_w: \Delta \rightarrow \mathbb{R}^n$ es inyectiva.

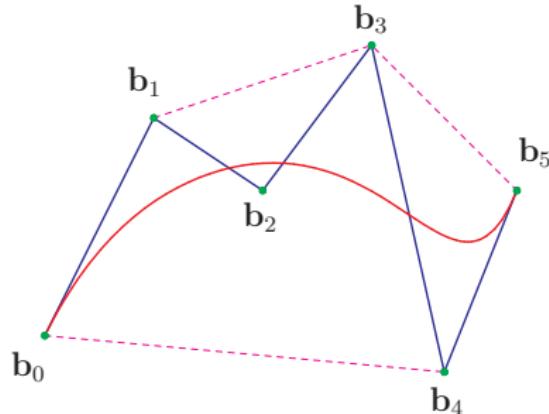


POLÍGONOS DE CONTROL

Sea $\varphi(t)$ la curva de Bézier dada por

$$\varphi(t) = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i} \mathbf{b}_i, \quad t \in [0, 1],$$

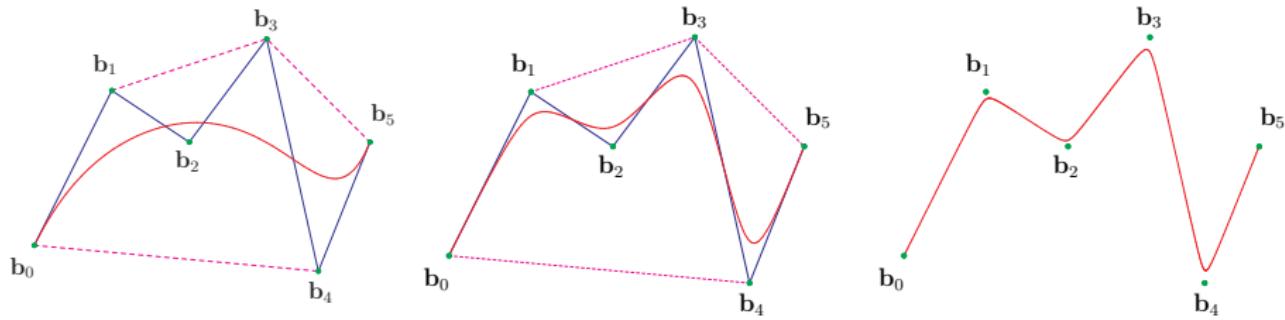
con puntos de control $\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n$ en \mathbb{R}^ℓ . El polígono de control es la unión de los segmentos $\overline{\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1}, \overline{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2}, \dots, \overline{\mathbf{b}_{n-1}, \mathbf{b}_n}$.



DEFORMACIONES DE CURVAS DE BÉZIER

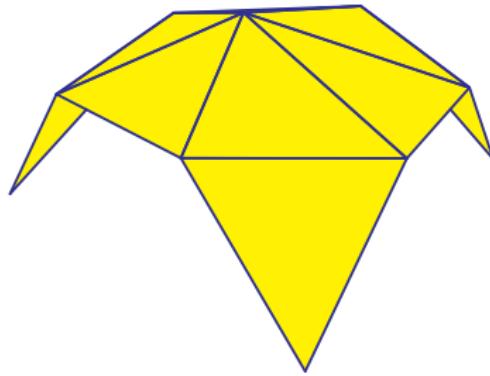
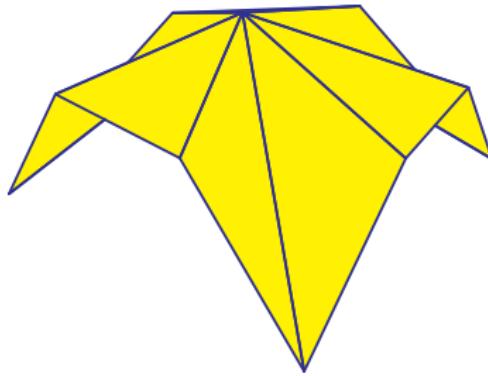
TEOREMA (CRACIUN-G-SOTTILE)

Dados puntos de control en \mathbb{R}^l , para cualquier $\epsilon > 0$, existen pesos tal que la curva de Bézier correspondiente se encuentra a distancia ϵ del polígono de control.

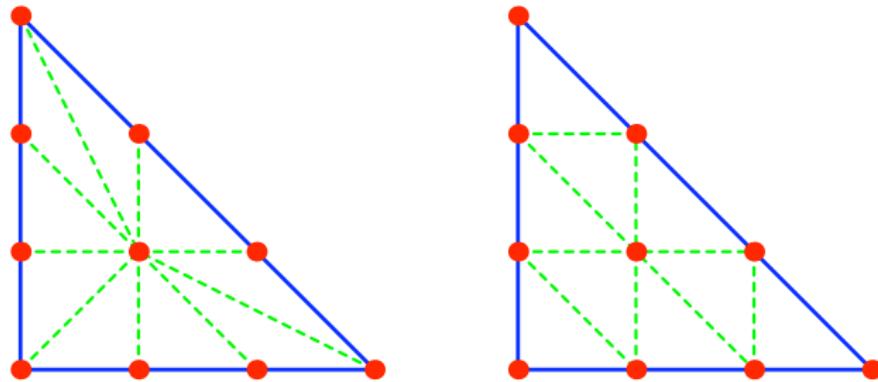
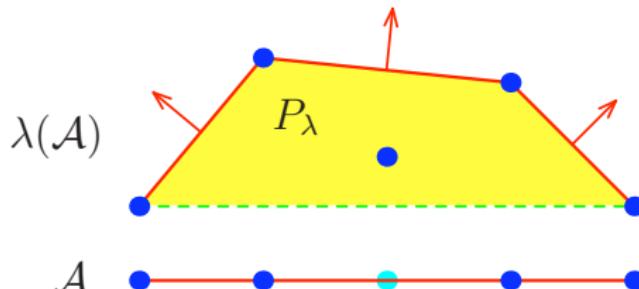


POLITOPOS DE CONTROL

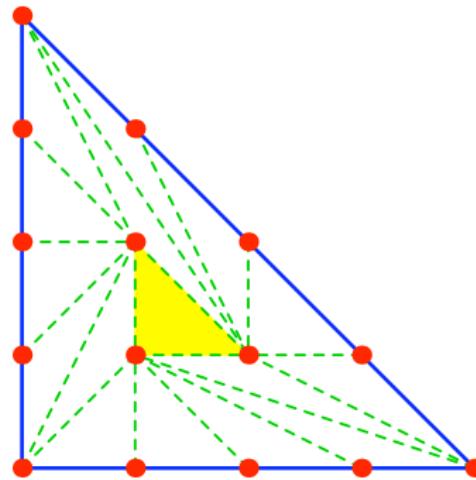
Dado un conjunto de puntos de control en \mathbb{R}^3 , existen muchas maneras de interpolar usando triángulos para obtener una superficie lineal por pedazos, llamada **politopo de control**.



TRIANGULACIONES REGULARES

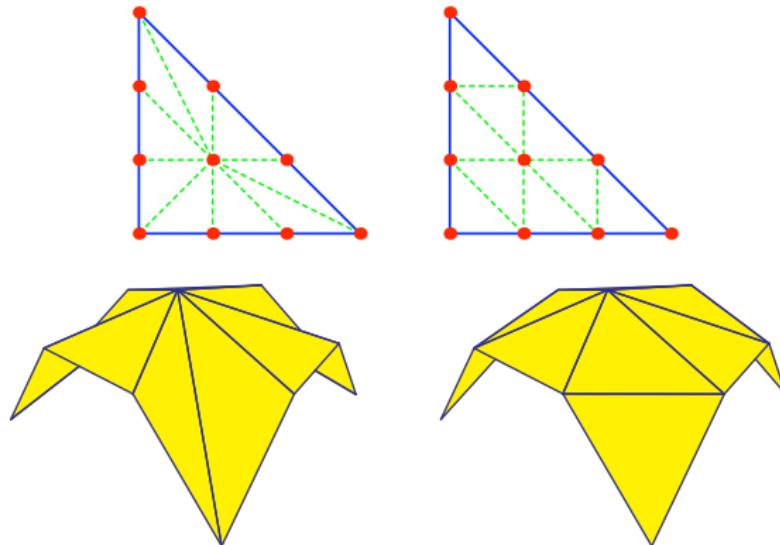


TRIANGULACIONES IRREGULARES



POLITOPOS REGULARES DE CONTROL

Fije puntos de control $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_\mathbf{a} \mid \mathbf{a} \in \mathcal{A}\} \subset \mathbb{R}^\ell$ indexados por $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^d$ con $d \leq \ell$. Dada una triangulación regular $\mathcal{T} = \{\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_m\}$ de \mathcal{A} , definimos al **politopo regular de control $\mathcal{B}(\mathcal{T})$** como la unión de los simplejos $\text{conv}\{\mathbf{b}_\mathbf{a} \mid \mathbf{a} \in \mathcal{A}_i\}$.



DEFORMACIONES DE SUPERFICIES DE BÉZIER

TEOREMA (CRACIUN-G-SOTTILE)

Dados $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^d$, $w \in \mathbb{R}_{>}^{\mathcal{A}}$, $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}^\ell$ y \mathcal{T} una t. r. de \mathcal{A} inducida por λ . Para cada $t > 0$, sea φ_t el parche tórico $(t^{\lambda(a)} w_a, \mathcal{A})$, entonces dado un $\epsilon > 0 \exists t_0$ tal que si $t > t_0$, la imagen $\varphi_t(\Delta)$ está a distancia ϵ de $\mathcal{B}(\mathcal{T})$.

BIBLIOGRAFÍA

- Rimvydas Krasauskas, [Toric surface patches](#), Adv. Comput. Math. **17** (2002), no. 1-2, 89–133.
- Luis Garcia-Puente and Frank Sottile, [Linear precision for parametric patches](#), to appear in Advances in Comp. Math.
- Hans-Christian Graf van Bothmer, Kristian Ranestad, and Frank Sottile, [Linear precision for toric surface patches](#), 2008. ArXiv:0806.3230.
- Gheorghe Craciun, Luis Garcia-Puente and Frank Sottile, [Some geometrical aspects of control points for toric patches](#), to appear in Lecture Notes in Computer Science.

