Отчёт по лабораторной работе №5

Вероятностные алгоритмы проверки чисел на простоту

Студент: Гонсалес Ананина Луис Антонио, 1032175329
Группа: НФИмд-02-21
Преподаватель: Кулябов Дмитрий Сергеевич,
д-р.ф.-м.н., проф.

Москва 2021

Содержание

List of Figures

1 Цель работы

Цель данной лабораторной работы- изучить теорию и реализовать все рассмотренные алгоритмы программно.

2 Теоретические сведения

Вопрос определения того, является ли натуральное число *N* простым, известен как проблема простоты.

Тестом простоты (или проверкой простоты) называется алгоритм, который, приняв на входе число *N*, позволяет либо не подтвердить предположение о составности числа, либо точно утверждать его простоту. Во втором случае он называется истинным тестом простоты. Таким образом, тест простоты представляет собой только гипотезу о том, что если алгоритм не подтвердил предположение о составности числа *N*, то это число может являться простым с определённой вероятностью. Это определение подразумевает меньшую уверенность в соответствии результата проверки истинному положению вещей, нежели истинное испытание на простоту, которое даёт математически подтверждённый результат[1].

Тест простоты Ферма в теории чисел — это тест простоты натурального числа n, основанный на малой теореме Ферма.

Если n — простое число, то оно удовлетворяет сравнению a^n-1 =1 (mod n) для любого a, которое не делится на n.

Выполнение сравнения a^n-1 =1 (mod n) является необходимым, но не достаточным признаком простоты числа. То есть, если найдётся хотя бы одно a, для которого a^n-1 !=1 (mod n), то число n — составное; в противном случае ничего сказать нельзя, хотя шансы на то, что число является простым, увеличиваются. Если для составного числа n выполняется сравнение a^n-1 =1 (mod n), то число n называют псевдопростым по основанию a . При проверке числа на простоту тестом Ферма выбирают несколько чисел a. Чем больше количество a, для которых a^n-1 =1 (mod n), тем больше шансы, что число n простое[2].

Тест Соловея — Штрассена — тест всегда корректно определяет, что простое число является простым, но для составных чисел с некоторой вероятностью он может дать неверный ответ.

Алгоритм Соловея — Штрассена параметризуется количеством раундов k. В каждом раунде случайным образом выбирается число $a < n$. Если НОД(a,n) > 1, то выносится решение, что n составное. Иначе проверяется справедливость сравнения a^(n-1)/2=(a/n)(mod n). Если оно не выполняется, то выносится решение, что n — составное. Если это сравнение выполняется, то a является свидетелем простоты числа n. Далее выбирается другое случайное a и процедура повторяется. После нахождения k свидетелей простоты в k раундах выносится заключение, что n является простым числом с вероятностью 1-2^-k[3].

Тест Миллера — Рабина — вероятностный полиномиальный тест простоты. Тест Миллера — Рабина, наряду с тестом Ферма и тестом Соловея — Штрассена, позволяет эффективно определить, является ли данное число составным. Однако, с его помощью нельзя строго доказать простоту числа. Тем не менее тест Миллера — Рабина часто используется в криптографии для получения больших случайных простых чисел.

Как и тесты Ферма и Соловея — Штрассена, тест Миллера — Рабина опирается на проверку ряда равенств, которые выполняются для простых чисел. Если хотя бы одно такое равенство не выполняется, это доказывает что число составное[4].

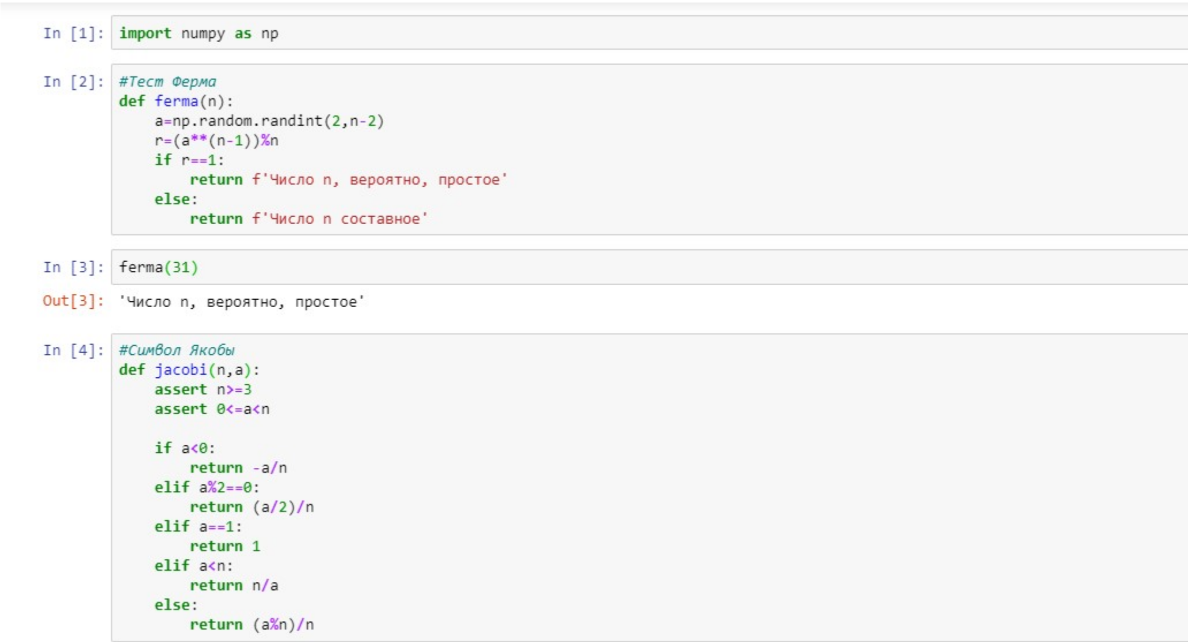
Для теста Миллера — Рабина используется следующее утверждение:

Пусть n — простое число и $n-1=2^s d$, где d — нечётно. Тогда для любого a из $\mathbb{Z}_n$ выполняется хотя бы одно из условий:

1. $a^d \equiv 1 \pmod{n}$
2. Существует целое число $r < s$ такое что $a^{2^r d} \equiv -1 \pmod{n}$

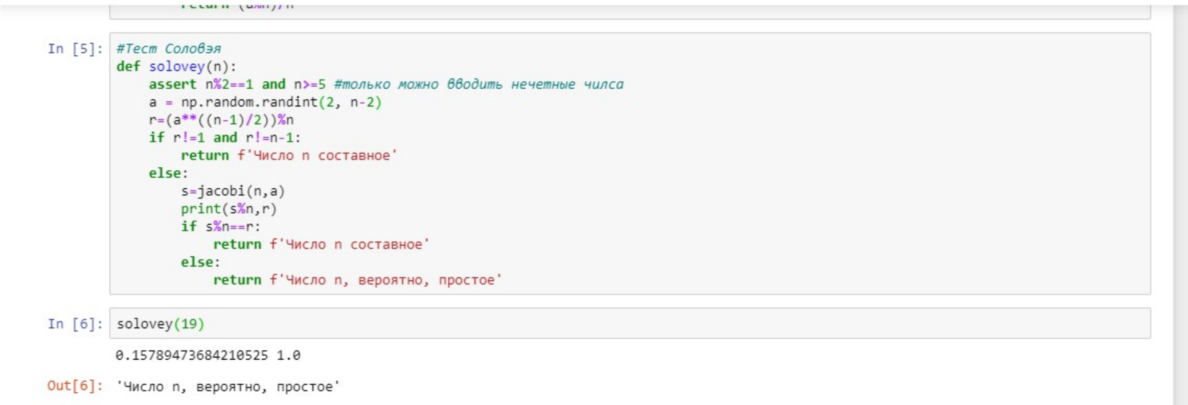
Figure 2.1: Тест Миллера

3 Выполнение работы



```
In [1]: import numpy as np

In [2]: #Тест Ферма
        def ferma(n):
            a=np.random.randint(2,n-2)
            r=(a**(n-1))%n
            if r==1:
                return f'Число n, вероятно, простое'
            else:
                return f'Число n составное'

In [3]: ferma(31)

Out[3]: 'Число n, вероятно, простое'

In [4]: #Символ Якобы
        def jacobi(n,a):
            assert n>=3
            assert 0<=a<n

            if a<0:
                return -a/n
            elif a%2==0:
                return (a/2)/n
            elif a==1:
                return 1
            elif a<n:
                return n/a
            else:
                return (a%n)/n
```

Figure 3.1: Тест Ферма



```
In [5]: #Тест Соловэя
        def solovey(n):
            assert n%2==1 and n>=5 #только можно вводить нечетные чилса
            a = np.random.randint(2, n-2)
            r=(a**((n-1)/2))%n
            if r!=1 and r!=n-1:
                return f'Число n составное'
            else:
                s=jacobi(n,a)
                print(s%n,r)
                if s%n==r:
                    return f'Число n составное'
                else:
                    return f'Число n, вероятно, простое'

In [6]: solovey(19)

        0.15789473684210525 1.0

Out[6]: 'Число n, вероятно, простое'
```

Figure 3.2: Тест Соловэя

```
In [7]: #Тест Миллера
        def view(n):
            assert n%2==0
            init_n=n
            s=0
            t=0
            while 1:
                n/=2
                s+=1
                if n%2==1:
                    return s,int(n)

        def miller(n):
            assert n>=5 and n%2==1 ##только можно вводить нечетные чилса

            s,r=view(n-1)
            a=np.random.randint(2,n-2)
            y=(a**r)%n
            if y!=1 and y!=n:
                j=1
                if j<=s-1 and y!=n-1:
                    y=(y**2)%n
                    if y==1:
                        return f'Число n составное'
                    else:
                        j+=1
                if y!=n-1:
                    return f'Число n сосатвное'
            return f'Число n, вероятно, простое'

In [8]: miller(23)

Out[8]: 'Число n, вероятно, простое'

In [ ]:
```

Figure 3.3: Тест Миллера

4 Выводы

В итоге в данной лабораторной работы я изучил теорию и реализовал все рассмотренные алгоритмы программно.

Список литературы

1. Тест Простоты [Электронный ресурс]. Википедия, 2021. URL: https://ru.wikipedia.org/wiki/Тест_простоты.
2. Тест Ферма [Электронный ресурс]. Википедия, 2021. URL: https://ru.wikipedia.org/wiki/Тест_Ферма.
3. Тест Соловея [Электронный ресурс]. Википедия, 2021. URL: https://ru.wikipedia.org/wiki/Тест_Соловея_—_Штрассена.
4. Тест Миллера [Электронный ресурс]. Википедия, 2021. URL: https://ru.wikipedia.org/wiki/Тест_Миллера_—_Рабина.