Grado en Ingeniería Informática
Doble Grado en Informática y Administración de Empresas

Colección de Problemas de Cálculo Diferencial Aplicado

Manuel Carretero (**coordinador**)

[Mag 81-82-801; Mag 83; Gr 81; Gr 82;] (Grado y Doble Grado Leganés, español)

Antonio José Ocaña Avila

[Gr 83] (Grado, Leganés, español)

Eduardo J. Sánchez Villaseñor

[Mag 80-81; Gr 80; Gr 81] (Colmenarejo, Grado y Doble Grado, español)

Luis Bonilla

[Mag 89-88; Gr 801] (Grado y Doble Grado, Leganés, inglés)

Jesús Salas

[Gr 88; Gr 89] (Grado, Leganés, inglés)

Curso 2021–2022

UNIVERSIDAD CARLOS III DE MADRID

Escuela Politécnica Superior, campus de Leganés y Colmenarejo

Departamento de Matemáticas,

Grado en Ingeniería Informática, Doble Grado en Ingeniería Informática y Administración de Empresas

Asignatura: **CÁLCULO DIFERERENCIAL APLICADO**

Curso: **2021-2022**

1. Ecuaciones Diferenciales de Primer Orden
   - Estudio de ecuaciones lineales, separables, exactas y homogéneas.
2. Ecuaciones Diferenciales de Segundo Orden
   - Estudio de ecuaciones lineales homogéneas y no homogéneas.
   - Estudio de la reducción de orden.
   - Estudio de las ecuaciones de Euler-Cauchy.
3. Transformada de Laplace
   - Aplicación en la resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias.
4. Sistemas de Ecuaciones Diferenciales
   - Métodos de resolución.
5. Series de Fourier y Separación de Variables
   - Estudio de series de Fourier.
   - Ecuaciones diferenciales en derivadas parciales. Resolución mediante el método de separación de variables.
6. Métodos Numéricos
   - Métodos de Euler y Runge-Kutta.

Bibliografía Básica:

BOYCE, WILLIAM E. Y DIPRIMA R. C.
Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera. Tercera Edición. Limusa (1991).
SIMMONS, GEORGE FINLAY.
Ecuaciones diferenciales : con aplicaciones y notas históricas. Segunda Edición. McGraw-Hill.
ZILL, DENNIS G.
Ecuaciones diferenciales con aplicaciones de modelado. Sexta Edición. International Thomson (1997).

Bibliografía Complementaria:

KISELIOV, ALEKSANDR I.
Problemas de ecuaciones diferenciales ordinarias. Sexta Edición. Mir (1984).
HABERMAN, RICHARD.
Ecuaciones en derivadas parciales con series de Fourier y problemas de contorno. Tercera Edición.. Pearson-Prentice Hall.
WEINBERGER, HANS F. *Ecuaciones diferenciales en derivadas parciales : con métodos de variable compleja y de transformaciones integrales.* Reverté.
SIMMONS, GEORGE FINLAY.
Ecuaciones diferenciales : teoría, técnica y práctica. McGraw-Hill Interamericana.

Índice

1. Ecuaciones Diferenciales de Primer Orden

1.1. Aplicaciones físicas

Problema 1.1 Consideremos un circuito eléctrico que consta de un condensador de capacidad C cargado con una carga Q, conectado en serie con una resistencia R y un interruptor, inicialmente abierto. Al cerrar el interruptor, se genera una diferencia de potencial a través de la resistencia e, inmediatamente, comienza a fluir una corriente, disminuyendo la carga en el condensador. La ecuación que describe el comportamiento de dicho circuito es:

$$\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{RC}q = 0\,,$$

donde $q(t)$ denota la carga en el condensador en función del tiempo. Demostrar que la descarga del condensador tiene un comportamiento exponencial. Establecer el tiempo necesario para que el condensador adquiera una carga igual a $1/\mathrm{e} \approx 0.37$ veces la carga inicial.

Problema 1.2 Supongamos que el ritmo al que se enfría un cuerpo caliente es proporcional a la diferencia de temperatura entre éste y el ambiente más frío que lo rodea (ley de enfriamiento de Newton). Un cuerpo se calienta a $110^{\mathrm{o}}C$. Calcular el tiempo que debe transcurrir para que se enfríe a $30^{\mathrm{o}}C$. Considérese que la constante de proporcionalidad antes señalada toma el valor $-1\mathrm{h}^{-1}$, con $1\mathrm{h} = 60\mathrm{min}$, siendo la temperatura ambiente $T_m = 20^{\mathrm{o}}C$. ¿Cuánto tiempo debe transcurrir según este modelo teórico hasta que el objeto alcance la temperatura ambiente?

Problema 1.3 Cuando el agua sale por el orificio de un recipiente, su velocidad es $\sqrt{2gh}$, donde h es la distancia vertical desde el orificio a la superficie libre del agua en el recipiente y g es la aceleración de la gravedad. La velocidad efectiva de salida del agua por un pequeño orificio de área A es, aproximadamente, $0.6\sqrt{2gh}$, produciendo una descarga de $0.6A\sqrt{2gh}$ unidades cúbicas por segundo. El factor 0.6 aparece por la fricción y por una cierta contracción del tamaño del chorro. Hallar el tiempo requerido en vaciar un contenedor cilíndrico a través de un agujero circular de radio R_0 en su fondo; supóngase que el radio del cilindro es R y que el agua alcanzaba inicialmente una altura h_0.

1.2. Resolución de EDOs de primer orden

- **NOTA:** En los siguientes problemas, se entiende que se quieren resolver las EDOs en los respectivos dominios de las funciones involucradas.

Problema 1.4 Resolver las siguientes EDOs lineales de primer orden:

1. $y' + y = 2e^{-x} + x^2$.
2. $y' + \frac{1}{x}y = x^2 - 1\,,\ x > 0$.
3. $y' + y\cos x = \operatorname{sen} x \cos x$.

Problema 1.5 Resolver las siguientes EDOs separables:

1. $y' = x^2/y$.
2. $y' = \frac{x^2}{y(1+x^3)}$.
3. $y' + y^2 \operatorname{sen} x = 0$.

Problema 1.6 Resolver el problema de valores iniciales

$$(PC)\begin{cases}(1-x)(1-y)y' = \alpha \in \mathbb{R} \\ y(0) = 0\end{cases}.$$

Problema 1.7 Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales exactas:

1. $x^3 + xy^2 + (x^2y + y^3)y' = 0$.
2. $e^y + \big(xe^y + 2y\big)y' = 0$.
3. $y^2e^{xy} + \cos x + \big(e^{xy} + xye^{xy}\big)y' = 0$.

Problema 1.8 Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales homogéneas:

1. $y' = (2x + y)/(x - y)$.
2. $y' = (x^2 + 3y^2)/2xy$.
3. $y' = (y + \sqrt{x^2 - y^2})/x$.

2. Ecuaciones Diferenciales de Segundo Orden

2.1. Resolución de EDOs de segundo orden

Problema 2.1 Hallar la solución general de las siguientes ecuaciones diferenciales homogéneas:

$$\text{(a)}\quad 2y'' - 5y' - 3y = 0 \qquad \text{(b)}\quad y'' - 10y' + 25y = 0 \qquad \text{(c)}\quad y'' + 4y' + 7y = 0\,.$$

Hallar la única solución de $(a), (b)$ y (c) que satisface las siguientes condiciones iniciales: $y(0) = 1\,, y'(0) = -1\,.$

Problema 2.2 Hallar la solución general de las siguientes ecuaciones diferenciales:

$$\text{(a)}\quad y'' - 4y' + 4y = (x+1)e^{2x} \qquad \text{(b)}\quad 4y'' + 36y = \csc(3x)\,.$$

Problema 2.3 Resolver el siguiente problema de valores iniciales:

$$\begin{cases}y'' - y' - 2y = 3e^{2x} \\ y(0) = 0\,,\;\; y'(0) = -2\end{cases}.$$

Problema 2.4 Resolver las siguientes EDOs aplicando el método de los coeficientes indeterminados, utilizando el principio de superposición en caso necesario:

$$\begin{array}{llll}\text{(a)} & y'' - 4y = \operatorname{sen} x & \text{(b)} & y'' + 4y = 4\cos(2x) \\ \text{(c)} & y'' + 4y = -4x & \text{(d)} & y'' + 4y = 4\cos(2x) - 4x\,.\end{array}$$

2.2. Reducción de orden

Problema 2.5 Reducir el orden de las siguientes ecuaciones diferenciales y hallar su solución general:

a) $x^2y'' - 4xy' + 6y = 0\,, x > 0\,$, sabiendo que una solución particular es $y_1(x) = x^2\,.$

b) $x^2y'' + 3xy' + y = 0\,, x > 0\,$, sabiendo que una solución particular es $y_1(x) = \frac{1}{x}\,.$

Problema 2.6

a) Dada la EDO $xy'' - y' + 4x^3y = 0\,, \quad x > 0\,$, comprobar que una solución particular es $y_1(x) = \mathrm{sen}(x^2)\,$. Reducir el orden de la ecuación (no es necesario resolverla).

b) ?Dada la EDO $(x-1)y'' - xy' + y = 0\,, \quad x > 1\,$, comprobar que una solución particular es $y_1(x) = e^x\,$. Reducir el orden de la ecuación (no es necesario resolverla).

2.3. Ecuaciones de Euler-Cauchy

Problema 2.7 Hallar la solución general de las siguientes ecuaciones diferenciales:

a) $x^2y'' + xy' + y = 0\,, \quad x > 0\,.$

b) $x^2y'' + 3xy' + \frac{5}{4}y = 0\,, \quad x > 0\,.$

c) $x^2y'' + 4xy' + 2y = 0\,, \quad x > 0\,.$

d) $x^2y'' - 4xy' - 6y = 0\,, \quad x > 0\,.$

3. Transformada de Laplace

3.1. Resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias

Problema 3.1 Usar la transformada de Laplace para resolver los siguientes problemas de valores iniciales:

1. $y'' - 4y' + 4y = 0\,,\ y(0) = 1\,,\ y'(0) = 1.$
2. $y'' - y' - 2y = 0\,,\ y(0) = 1\,,\ y'(0) = 0.$
3. $y'' + 3y' + 2y = 0\,,\ y(0) = 1\,,\ y'(0) = 0.$
4. $y'' - 2y' + 2y = e^{-x}\,,\ y(0) = 0\,,\ y'(0) = 1.$
5. $y'' - 2y' + 2y = \cos x\,,\ y(0) = 1\,,\ y'(0) = 0.$
6. $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0\,,\ y(0) = 0\,,\ y'(0) = 1\,,\ y''(0) = 0.$
7. $y^{(4)} - 4y''' + 6y'' - 4y' + y = 0\,,\ y(0) = 0\,,\ y'(0) = 1\,,\ y''(0) = 0\,,\ y'''(0) = 1.$

3.2. Producto de convolución

Problema 3.2 Hallar la Transformada de Laplace de las siguientes funciones integrales:

1. $h(t) = \displaystyle\int_0^t (t-\alpha)^3 \operatorname{sen}(\alpha)\, d\alpha.$

2. $h(t) = \displaystyle\int_0^t e^{-(t-\alpha)} \cos(5\alpha)\, d\alpha.$

3. $h(t) = \displaystyle\int_0^t \left((t-\alpha)\,\alpha\right)^5\, d\alpha.$

4. $h(t) = \displaystyle\int_0^t e^{10\,(t-\alpha)}\alpha^3 d\alpha.$

5. $h(t) = \displaystyle\int_0^t \operatorname{sen}(t-\alpha)\cos(\alpha)\, d\alpha.$

Problema 3.3 Aplicar el teorema de convolución para calcular la Transformada inversa de Laplace de cada una de las siguientes funciones:

1. $F(s) = \dfrac{1}{s^4(s^2+1)}.$

2. $F(s) = \dfrac{1}{(s+2)^2(s^2+16)}.$

3. $F(s) = \dfrac{5s}{(s+2)^2(s^2+16)}.$

4. $F(s) = \dfrac{1}{(s^2+1)^2}.$

5. $F(s) = \dfrac{G(s)}{s^2+4}$, siendo $G(s) = \mathcal{L}\{g(t)\}$, donde g y G son funciones conocidas.

4. Sistemas de Ecuaciones Diferenciales

Problema 4.1 Para cada uno de los siguientes sistemas de ecuaciones diferenciales, $\vec{x}'(t) = A\,\vec{x}(t)$, encontrar su solución general. Además, en los problemas de valor inicial: 2, 3, 5, 6 y 10, hallar su única solución . En todos los casos, comprobar los resultados obtenidos:

1. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$

2. $A = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, \ \vec{x}(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}.$

3. $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}, \ \vec{x}(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}.$

4. $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}.$

5. $A = \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$, $\vec{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

6. $A = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$, $\vec{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$.

7. $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$.

8. $A = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$.

9. $A = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 8 & -4 \end{bmatrix}$.

10. $A = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 4 & -7 \end{bmatrix}$, $\vec{x}(0) = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$.

5. Series de Fourier y Separación de Variables

Problema 5.1 Consideremos la ecuación del calor

$$k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = \frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\,, \quad t > 0\,, \quad x \in (0,L)\,,$$

sometida a las siguientes condiciones :

$$\begin{aligned} (CC) \text{ Condiciones de Contorno} \quad & u(0,t) = 0\,, \;\; u(L,t) = 0\,, \;\; \forall t > 0\,, \\ (CI) \text{ Condición Inicial} \quad & u(x,0) = f(x)\,, \;\; \forall x \in [0,L]\,. \end{aligned}$$

La solución formal a este problema se expresa como:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \mathrm{e}\left(-k\frac{n^2\pi^2}{L^2}t\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right).$$

donde

$$A_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \mathrm{d}x\,,$$

con $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$

(a) Deducir, con todo detalle, las expresiones de $(A_n : n \in \mathbb{N})$, imponiendo la condición inicial $u(x,0) = f(x)$, $\forall x \in [0,L]$, y sabiendo que, para todo $m, n \in \mathbb{N}$, se cumple que

$$\int_0^L \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{L}x\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \mathrm{d}x = \begin{cases} 0\,, & m \neq n \\ L/2\,, & m = n \end{cases}\,.$$

(b) Calcular los coeficientes $(A_n : n \in \mathbb{N})$, así como la expresión final de la solución $u(x,t)$, cuando la distribución inicial de temperatura viene dada por:

$$f(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi x}{L}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{5\pi x}{L}\right).$$

(c) Ahora se cambia la distribución inicial de temperatura del problema $f(x)$. Calcular los coeficientes $(A_n : n \in \mathbb{N})$, así como la expresión final de la solución $u(x,t)$, para

$$f(x) = \begin{cases} x\,, & 0 \leq x < L/2 \\ 0\,, & L/2 \leq x \leq L \end{cases} \quad .$$

Problema 5.2 Al aplicar separación de variables a un modelo de ecuación del calor 1-D, con condiciones de contorno aisladas (condiciones de Neumann homogéneas) se llega al siguiente problema de valores en la frontera (problema regular de Sturm-Liouville):

$$\left\{ \begin{array}{l} X''(x) + \lambda X(x) = 0 \\ X'(0) = 0\,, \quad X'(1) = 0 \end{array} \right. , \quad \lambda \in \mathbb{R}\,.$$

Determinar sus *autovalores*, es decir, los valores de λ que conducen a soluciones no triviales $X \neq 0$ del problema. Determinar, asimismo, la solución asociada a cada autovalor (*autofunciones* del problema).

Problema 5.3 Consideremos el siguiente modelo 1-D de ecuación del calor aplicado a una barra de longitud L:

$$k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = \frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\,, \quad t > 0\,, \quad x \in [0,L]\,,$$

sometida a las siguientes condiciones:

$$\begin{array}{rl} (CF) \text{ Condiciones de Frontera} & u(0,t) = 0\,, \quad u(L,t) = 0\,, \quad \forall\, t > 0\,, \\ (CI) \text{ Condición Inicial} & u(x,0) = f(x)\,, \quad \forall\, x \in [0,L]\,. \end{array}$$

La solución formal de este problema se expresa como:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \mathrm{e}\left(-k\frac{n^2\pi^2}{L^2}t\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right).$$

donde

$$A_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \mathrm{d}x\,, \quad \text{con } n \in \mathbb{N} = \{1,2,3,\ldots\}$$

Tomando $L = \pi$, se pide:

i) Hallar la solución $u(x,t)$, para $f(x) = 5\operatorname{sen}(x) + 3\operatorname{sen}(2x) - \operatorname{sen}(4x)$.

ii) Hallar el valor de u en el punto medio de la barra para cualquier instante de tiempo t.

iii) Analizar qué valor (o valores) tomará u en cualquier punto de la barra cuando el tiempo $t \to +\infty$.

vi) Comprobar la solución obtenida en el apartado i).

Problema 5.4 Dado el siguiente problema de ecuación del calor:

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) & = & 4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)\,, \quad 0 < x < \pi\,, \; t > 0 \\ u(0,t) & = & 0\,, \; \dfrac{\partial u}{\partial x}(\pi,t) = 0\,, \quad t > 0\,, \text{ (condiciones frontera)} \\ u(x,0) & = & f(x)\,, \quad 0 \leq x \leq \pi \text{ (condición inicial con } f(x) \text{ función conocida)} \end{array}$$

Se pide:

i) Aplicar el método de separación de variables tomando $u(x,t) = X(x)T(t)$ y hallar la ecuación diferencial que satisface la función $T(t)$

ii) Demostrar que la función $X(x)$ satisface el problema de contorno:

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0; \quad X(0) = 0; \quad X'(\pi) = 0\,;$$

iii) Hallar los autovalores y las autofunciones del problema del apartado ii)

Problema 5.5 Consideremos el siguiente modelo de ecuación del calor:

$$\begin{aligned} \text{Ecuación en Derivadas Parciales (EDP)} \quad &: \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = \frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\,, \ \ t > 0\,, \ \ x \in (0,\pi) \\ \text{Condiciones de Contorno (CC)} \quad &: \quad u(0,t) = 0\,, \ \ u(\pi,t) = 0\,, \ \ t > 0\,, \\ \text{Condición Inicial (CI)} \quad &: \quad u(x,0) = f(x)\,, \ \ x \in [0,\pi]\,. \end{aligned}$$

Aplicando separación de variables $u(x,t) = X(x)\,T(t) \not\equiv 0$, se pide:

i) Demostrar que $T(t) = ce^{-\lambda t}$, siendo $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, y λ la constante de separación.

ii) Demostrar que $X(x)$ satisface: $X'' + \lambda X = 0\,; X(0) = 0\,; X(\pi) = 0\,;$ y hallar los valores de $\lambda > 0$ que dan lugar a soluciones no nulas.

iii) Sabiendo que la solución $u(x,t)$ se puede expresar como:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-n^2 t} \operatorname{sen}(nx)\ ; \quad \text{con } A_n \in \mathbb{R}\,,$$

hallar los coeficientes $A_n\,, n \in \mathbb{N}$, sabiendo que la función del dato inicial es: $f(x) = \operatorname{sen}^3(x)$

Nota: Pueden ser útiles los siguientes resultados:

- Dados $L > 0$ y $m\,, n \in \mathbb{N}$, se tiene que: $\displaystyle\int_0^L \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{L}x\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \mathrm{d}x = \begin{cases} 0\,, \ m \neq n \\ L/2\,, \ m = n \end{cases}$
- $\operatorname{sen}(3x) = \operatorname{sen}(x)(3 - 4\operatorname{sen}^2(x))\,, \forall\, x \in \mathbb{R}\,;$

Problema 5.6 Consideremos el siguiente modelo de ecuación del calor:

$$\begin{aligned} \text{Ecuación en Derivadas Parciales (EDP)} \quad &: \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = \frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\,, \ \ t > 0\,, \ \ x \in (0,\pi/3) \\ \text{Condiciones de Contorno (CC)} \quad &: \quad \frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 0\,, \ \ \frac{\partial u}{\partial x}(\pi/3,t) = 0\,, \ \ t > 0\,, \\ \text{Condición Inicial (CI)} \quad &: \quad u(x,0) = f(x)\,, \ \ x \in [0,\pi/3]\,. \end{aligned}$$

Aplicando separación de variables $u(x,t) = X(x)\,T(t) \not\equiv 0$, se pide:

i) Demostrar que $X(x)$ satisface el siguiente problema de valores en la frontera:

$$X'' + \lambda X = 0\,; \quad X'(0) = 0\,; X'(\pi/3) = 0\,;$$

y hallar los valores de la constante de separación $\lambda \geq 0$ que dan lugar a soluciones no nulas.

ii) Sabiendo que la solución $u(x,t)$ se puede expresar como:

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n e^{-9n^2 t} \cos(3nx) \; ; \quad \text{con } A_n \in \mathbb{R}\,,$$

hallar el valor aproximado de $u(\pi/6, 1/9)$, tomando solamente los tres primeros sumandos de la serie anterior, sabiendo que la función del dato inicial es: $f(x) = 2x + 1$

Nota: Puede ser útil el siguiente resultado:

- Dados $L > 0$ y $m\,, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, se tiene que: $\displaystyle\int_0^L \cos\left(\frac{m\pi}{L}x\right)\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\,\mathrm{d}x = \begin{cases} 0\,;\; m \neq n \\ L/2\,;\; m = n \neq 0 \\ L\,;\; m = n = 0 \end{cases}$

Problema 5.7 Consideremos el siguiente modelo 1D de la ecuación de onda correspondiente a una cuerda de longitud $L = \pi$, anclada a sus extremos:

$$\begin{aligned} \text{Ecuación en Derivadas Parciales} \;&:\; \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t)\,;\;\; t > 0\,,\;\; 0 < x < \pi \\ \text{Condiciones de Contorno} \;&:\; u(0,t) = 0\,,\;\; u(\pi,t) = 0\,;\;\; t > 0 \\ \text{Condiciones Iniciales} \;&:\; \textbf{(i)}\; u(x,0) = 7\,\text{sen}(3x) - 3\,\text{sen}(7x)\,,\quad \textbf{(ii)}\; \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0\,,\;\; 0 \le x \le \pi\,. \end{aligned}$$

Se pide:

i) Tomando $u(x,t) = X(x)\,T(t) \not\equiv 0$, aplicar el método de separación de variables y demostrar que $X(x)$ satisface el siguiente problema de valores en la frontera:

$$X'' + \lambda X = 0\,; \quad X(0) = 0\,;\, X(\pi) = 0\,;$$

y hallar los valores de la constante de separación $\lambda > 0$ que dan lugar a soluciones no nulas.

ii) Sabiendo que la solución $u(x,t)$ se puede expresar como:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(nt)\,\text{sen}(nx) \; ; \quad \text{con } A_n \in \mathbb{R}\,.$$

Hallar el valor de $u(\pi/2, \pi)$

Problema 5.8 Consideremos el siguiente modelo:

$$\begin{aligned} \text{Ecuación en Derivadas Parciales (EDP)} \;&:\; \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t)\,;\;\; t > 0\,,\;\; 0 < x < \pi\,, \\ \text{Condiciones de Contorno (CC)} \;&:\; u(0,t) = 0\,,\;\; u(\pi,t) = 0\,;\;\; t > 0 \\ \text{Condiciones Iniciales (CI)} \;&:\; \textbf{(i)}\; u(x,0) = 4\,\text{sen}(x) - 2\,\text{sen}(3x)\,,\; \textbf{(ii)}\; \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0\,,\;\; 0 \le x \le \pi\,. \end{aligned}$$

Se pide:

i) Clasificar el tipo de modelo indicando específicamente el significado de las condiciones de contorno (CC) e iniciales (CI).

ii) Sabiendo que la solución $u(x,t)$ se puede expresar como:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(nt) \operatorname{sen}(nx) \; ; \quad \text{con } A_n \in \mathbb{R} \, .$$

Hallar el valor de los coeficientes A_n y obtener la solución $u(x,t)$.

iii) Comprobar la solución obtenida en el apartado ii)

Problema 5.9 Dado el siguiente problema modelo 1D de la ecuación de onda:

$$\begin{aligned}
&4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t), \qquad 0 < x < \pi \, , \quad t > 0 \\
&\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 0, \qquad \frac{\partial u}{\partial x}(\pi,t) = 0 \, , \quad t > 0 \, , \quad \text{(condiciones de frontera)} \\
&u(x,0) = 3\cos x \, , \qquad 0 \le x \le \pi \qquad \text{(posición inicial)} \\
&\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 1 - \cos 4x \, , \quad 0 \le x \le \pi \qquad \text{(velocidad inicial)}
\end{aligned}$$

a) Aplicar el método de separación de variables tomando $u(x,t) = X(x)T(t) \neq 0$ y hallar la ecuación diferencial que satisface la función $T(t)$.

b) Hallar el problema de contorno que satisface la función $X(x)$ y los valores de $\lambda \ge 0$ que dan lugar a soluciones no nulas, siendo λ la constante de separación.

c) Hallar la solución $u(x,t)$ del problema.

6. Métodos Numéricos

7. Problemas propuestos en exámenes de cursos anteriores

Problema 7.1 Resolver el problema de valores iniciales

$$(PVI) \begin{cases} y' = \dfrac{1}{x} y + x e^x \, , \quad x > 0 \\ y(1) = 1 \end{cases} .$$

Problema 7.2 Dada la EDO

$$2xy^3 + 3x^2y^2y' = 0 \, , \quad x \neq 0 \, ,$$

discutir si es exacta y calcular su solución general.

Problema 7.3 Resolver la siguiente EDO aplicando el método de variación de constantes:

$$y'' - 2y' + y = xe^x \, , \quad x \in \mathbb{R} \, .$$

Problema 7.4 Resolver la siguiente EDO aplicando el método de coeficientes indeterminados:

$$y'' - y' - 6y = 12x\,, \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

Problema 7.5 Resolver el siguiente problema de valores iniciales aplicando la transformada de Laplace, expresando el resultado en términos de funciones hiperbólicas:

$$y'' - 2y' - 2y = 0\,;\ \ y(0) = 2\,,\ \ y'(0) = 0\,.$$

Datos: $\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{s-a}\right] = e^{at}$, $s > a$. $\cosh(x) = (e^x + e^{-x})/2$, $\operatorname{senh}(x) = (e^x - e^{-x})/2$.

Problema 7.6 Resolver el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\vec{x}'(t) = \begin{bmatrix} -4 & 3 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \vec{x}(t)$$

bajo la condición inicial $\vec{x}(0) = [5, 0]^{\mathrm{T}}$. Comprobar explícitamente que la solución obtenida verifica el sistema de ecuaciones.

Problema 7.7 Consideremos la ecuación del calor

$$k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = \frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\,,\ \ t > 0\,,\ \ x \in [0, L]\,,$$

sometida a las condiciones de frontera siguientes:

$$\begin{aligned} (CC) \quad & u(0,t) = 0\,,\ \ u(L,t) = 0\,,\ \ \forall t > 0\,, \\ (CI) \quad & u(x,0) = f(x)\,,\ \ \forall x \in [0, L]\,. \end{aligned}$$

La solución a este problema de valores en la frontera se expresa:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \mathrm{e}\left(-k\frac{n^2\pi^2}{L^2}t\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right).$$

donde

$$A_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \mathrm{d}x\,,$$

con $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$

(a) Deducir, con todo detalle, las expresiones de $(A_n\,:\,n \in \mathbb{N})$, imponiendo la condición inhomogénea $u(x,0) = f(x)$, $\forall x \in [0, L]$, y sabiendo que

$$\int_0^L \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{L}x\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \mathrm{d}x = \begin{cases} 0\,,\ \ m \neq n \\ L/2\,,\ \ m = n \end{cases}\,.$$

(b) Calcular los coeficientes $(A_n\,:\,n \in \mathbb{N})$, así como la expresión final de la solución $u(x,t)$, para

$$f(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi x}{L}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{5\pi x}{L}\right).$$

Problema 7.8 Resolver el siguiente problema de valores iniciales, clasificando previamente la ecuación diferencial:

$$(PVI)\begin{cases} \operatorname{sen} x - ye^{-x} + (e^{-x} + 2y)y' = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases} .$$

Problema 7.9 Resolver el problema de valores iniciales

$$(PVI)\begin{cases} y'' - y' - 2y = 3e^{2x}\,, \;\; x \in \mathbb{R} \\ y(0) = 0\,, \;\; y'(0) = 4 \end{cases}$$

aplicando el método de coeficientes indeterminados.

Problema 7.10 Resolver el ejercicio anterior aplicando la transformada de Laplace.
Puede ser útil: $\mathcal{L}\left[t^n e^{at}\right](s) = \dfrac{n!}{(s-a)^{n+1}}$, $s > a$, $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Problema 7.11 Encontrar la solución del sistema de ecuaciones $\vec{x}\,'(t) = A\,\vec{x}(t)$, con

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 0 \end{bmatrix},$$

bajo la condición inicial $\vec{x}(0) = [1, 0]^{\mathrm{T}}$. Comprobar explícitamente que la solución obtenida verifica el sistema. Representar la trayectoria del sistema en el espacio de fase y discutir su periodicidad.

Problema 7.12 Condidérese la ecuación de Laplace en una región cuadrada de lado unidad

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0\,, \;\; x, y \in [0,1]\,,$$

sometida a las condiciones de contorno siguientes:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial x}(0,y) = 0\,, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(1,y) = 0\,, \;\; \forall y \in (0,1)\,, \\ &u(x,0) = 0\,, \quad u(x,1) = f(x)\,, \;\; \forall x \in (0,1)\,, \end{aligned}$$

La solución a este problema de valores en la frontera se expresa:

$$u(x,y) = A_0 y + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{senh}(n\pi y) \cos(n\pi x)\,,$$

donde

$$A_0 = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$$

y

$$A_n = \frac{2}{\operatorname{senh}(n\pi)} \int_0^1 f(x) \cos(n\pi x)\,\mathrm{d}x\,,$$

para todo $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$.

(a) Deducir, con todo detalle, las expresiones de A_0 y $(A_n \,:\, n \in \mathbb{N})$, imponiendo la condición inhomogénea $u(x,1) = f(x)$, $\forall x \in (0,1)$, y sabiendo que

$$\int_0^1 \cos(m\pi x) \cos(n\pi x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\delta_{mn}\,, \;\; m, n \in \mathbb{N}\,,$$

donde δ_{mn} denota la delta de Kronecker.

(b) Calcular los coeficientes A_0 y $(A_n : n \in \mathbb{N})$, así como la expresión final de la solución $u(x, y)$, para

$$f(x) = \sum_{m=100}^{200} m \cos(m\pi x) \, .$$

Problema 7.13 La obtención de la solución general de la ecuación de Laplace en el ejercicio anterior pasa por la resolución del siguiente problema regular de Sturm-Liouville:

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 \\ X'(0) = 0 \, , \;\; X'(1) = 0 \end{cases} , \;\; \lambda \in \mathbb{R} \, .$$

Determinar sus *autovalores*, es decir, los valores de λ que conducen a soluciones no triviales $X \neq 0$ del problema. Determinar, asimismo, la solución asociada a cada autovalor (*autofunciones* del problema).

Problema 7.14 Dada la Ecuación Diferencial Ordinaria (EDO):

$$-5x^4 + 2y + xy' = 0 \quad \text{con} \quad x > 0;$$

Se pide:

i) Clasificar, razonadamente, la EDO.

ii) Resolver la ecuación sabiendo que $y(1) = 2$.

iii) Comprobar el resultado obtenido en el apartado anterior.

Problema 7.15 Dada la Ecuación Diferencial Ordinaria (EDO):

$$y'' - 3y' + 2y = e^{ax} \, ; \quad \text{donde } a \text{ es un parámetro real.}$$

Se pide:

i) Resolver la EDO cuando $a \neq 1$ y $a \neq 2$.

ii) Resolver la EDO cuando $a = 1$.

Problema 7.16 Sea $F(s)$ la Transformada de Laplace de la función $y(t)$. Sabiendo que $y(t)$ resuelve el siguiente Problema de Valor Inicial (PVI):

$$y'' + 4y' + 4y = e^t \, ; \quad y(0) = 1; \quad y'(0) = 0 \, .$$

Se pide:

i) Hallar el valor de $F(2)$.

ii) Hallar el valor de $y(2)$.

Nota: Puede ser útil la siguiente fórmula: $\mathcal{L}\{\frac{t^n e^{at}}{n!}\} = 1/(s-a)^{n+1}$ para $n = 0, 1, 2, \ldots$

Problema 7.17 Se considera el siguiente Problema de Valor Inicial (PVI):

$$y'' + 4y' + 3y = 0 \, ; \quad y(0) = 1; \quad y'(0) = 2 \, .$$

Se pide:

i) Aplicar el cambio de variables $X_1 = y\,;X_2 = y'$, con $\vec{X} = (X_1, X_2)^{\mathrm{T}}$ para transformar el PVI anterior en el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\vec{X}'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \end{pmatrix} \vec{X}(t)\,; \quad \text{bajo la condición inicial} \quad \vec{X}(0) = (1,2)^{\mathrm{T}}.$$

ii) Resolver el sistema del apartado anterior.

Problema 7.18 Consideremos la ecuación del calor

$$k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = \frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\,, \;\; t > 0\,, \;\; x \in [0, L]\,,$$

sometida a las condiciones de frontera siguientes:

$$\begin{aligned} (CC) \quad & u(0,t) = 0\,, \;\; u(L,t) = 0\,, \;\; \forall t > 0\,, \\ (CI) \quad & u(x,0) = f(x)\,, \;\; \forall x \in [0, L]\,. \end{aligned}$$

La solución a este problema de valores en la frontera se expresa:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \mathrm{e}\left(-k\frac{n^2\pi^2}{L^2}t\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right).$$

donde

$$A_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\,\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\mathrm{d}x\,, \quad \text{con } n \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$$

Se pide:

i) Deducir, con todo detalle, las expresiones de A_n, $n \in \mathbb{N}$, sabiendo que

$$\int_0^L \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{L}x\right)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\mathrm{d}x = \begin{cases} 0\,, & m \neq n \\ L/2\,, & m = n \end{cases} .$$

ii) Tomando $L = \pi$, hallar la solución $u(x,t)$, para

$$f(x) = 3\,\operatorname{sen}(2x) + \frac{5}{3}\,\operatorname{sen}(4x).$$

Problema 7.19 Dada la ecuación diferencial

$$x^2 y'' + 5\,x\,y' - 21y = 5\,x\,\cos\left(\ln(x)\right);$$

Se pide:

i) Clasificar, razonadamente, la ecuación.

ii) Aplicar el cambio de variable independiente: $x = e^t$, y demostrar que la ecuación diferencial se transforma en

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 4\frac{dy(t)}{dt} - 21y(t) = 5\cos(t)e^t$$

iii) Comprobar que la solución de la ecuación del apartado ii) es

$$y(t) = Ae^{-7t} + Be^{3t} + \frac{e^t}{65}(6\,\operatorname{sen}(t) - 17\cos(t))\,; \quad \text{siendo } A, B \text{ constantes.}$$

iv) Hallar la solución de la ecuación del enunciado.

Problema 7.20 Resolver la siguiente ecuación diferencial ordinaria:

$$y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{1+x^2}\,.$$

Problema 7.21 Dado el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden:

$$\left\{\begin{array}{l} x_1' = 2x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 6x_1 - 4x_2 \end{array}\right. ,$$

Se pide:

i) Resolver el sistema bajo la condición inicial $\vec{X}(0) = (x_1(0), x_2(0)) = (1,1)$.

ii) Comprobar la solución obtenida en i)

Problema 7.22 Resolver el siguiente problema de valores iniciales, en función del parámetro $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$:

$$(PVI)\left\{\begin{array}{l} y' - \dfrac{\alpha x^2}{y(1+x^3)} = 0\,, \quad x \in [0,+\infty) \\ \\ y(0) = 0 \end{array}\right.$$

Problema 7.23 Dado el siguiente problema de ecuación del calor:

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) & = & 4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)\,, \quad 0 < x < \pi\,,\ t > 0 \\ u(0,t) & = & 0\ ,\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(\pi,t) = 0\,, \quad t > 0\,, \text{(condiciones frontera)} \\ u(x,0) & = & f(x)\,, \quad 0 \le x \le \pi \text{ (condición inicial con } f(x) \text{ función conocida)} \end{array}$$

Se pide:

i) Aplicar el método de separación de variables tomando $u(x,t) = X(x)T(t)$ y hallar la ecuación diferencial que satisface la función $T(t)$

ii) Demostrar que la función $X(x)$ satisface el problema de contorno:

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0; \quad X(0) = 0; \quad X'(\pi) = 0\,;$$

iii) Hallar los autovalores y las autofunciones del problema del apartado ii)

Problema 7.24 Dado el problema de valor inicial

$$\text{(PVI)}\left\{\begin{array}{l} y \operatorname{sen} x + (2y - \cos x)y' = \dfrac{-x}{x^2+1}\,, \quad 0 \le x \le 1/2 \\ \\ y(0) = 0 \end{array}\right.$$

clasificar, razonadamente, la ecuación diferencial y resolver el PVI.

Problema 7.25 Hallar la solución general de la siguiente ecuación diferencial:

$$y'' - 4y' + 13y = e^x \operatorname{sen}(3x) \,.$$

Problema 7.26 Resolver el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\vec{X}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \vec{X}$$

Problema 7.27 A una ecuación diferencial de tercer orden lineal no homogénea con coeficientes constantes y con sus respectivas condiciones iniciales se le ha aplicado la transformación de Laplace obteniendo la siguiente ecuación algebraica:

$$\mathcal{L}\{y(t)\}(s) = Y(s) = \frac{2}{s^3(s-1)}$$

Se pide:

1. Mediante el teorema de convolución obtener la solución de la ecuación diferencial original.
2. Resolver el siguiente problema de valor inicial:

$$y'''(t) = 2e^t \,, \quad y(0) = 0,\, y'(0) = 0,\, y''(0) = 0$$

Nota: pueden ser útiles las siguientes fórmulas: $\mathcal{L}\{t^n\} = \dfrac{n!}{s^{n+1}}$; $\mathcal{L}\{e^{at}\} = \dfrac{1}{s-a}$, con n entero positivo y $s > a$.

Problema 7.28 Aplicar el método de variación de los parámetros para hallar la solución general de la siguiente ecuación diferencial:

$$y'' - 3y' + 2y = \frac{e^{2x}}{1 + e^x}$$

Problema 7.29 Resuelve la siguiente ecuación diferencial ordinaria:

$$(2x - 1)dx + (3y + 7)dy = 0$$

Problema 7.30 Resolver el siguiente problema de valor inicial, aplicando la transformada de Laplace.

$$y'' - 2y' + 5y = -8e^{-t}; \qquad y(0) = 2;\, y'(0) = 12;$$

Problema 7.31 Hallar la solución general del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\vec{X}' = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \vec{X}$$

Problema 7.32 Dada la siguiente ecuación diferencial ordinaria:

$$(yx^2 + x\cos(y) + y^3)y' = -xy^2 - \operatorname{sen}(y)$$

Se pide:

a) Clasificarla razonadamente.
b) Resolverla sabiendo que $y(0) = 1$.

Problema 7.33 Dada la Ecuación Diferencial Ordinaria (EDO) de 2^o orden

$$y'' - 6y' + 10y = e^x \operatorname{sen}(3x)$$

Se pide:

a) Hallar la solución de la ecuación homogénea.

b) Resolver la EDO encontrando una solución particular por el método de los coeficientes indeterminados.

Problema 7.34 Dado el siguiente problema de valor inicial (PVI)

$$y'''(t) = 2e^t\,, \quad y(0) = 0,\, y'(0) = 0,\, y''(0) = 0$$

se pide:

a) Resolver directamente el PVI integrando tres veces consecutivas, obteniendo las correspondientes contantes de integración.
b) Resolver el PVI mediante la transformada de Laplace.

Nota 1: Al resolver el apartado b) puedes usar resultados obtenidos en a)
Nota 2: Pueden ser útiles las siguientes fórmulas: $\mathcal{L}\{t^n\} = \dfrac{n!}{s^{n+1}}$; $\mathcal{L}\{e^{at}\} = \dfrac{1}{s-a}$, con n entero positivo y $s > a$.

Problema 7.35 Encontrar la solución del sistema de ecuaciones $\overrightarrow{X}' = A\overrightarrow{X}(t)$, con

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

bajo la condición inicial $\overrightarrow{X}(0) = (2, \;\; 0, \;\; 1)^T$ y comprobar el resultado obtenido.

Problema 7.36 Dada la siguiente ecuación diferencial ordinaria:

$$(x + \sqrt{xy})y' = y\,; \qquad x > 0$$

Se pide:

a) Clasificarla razonadamente.
b) Resolverla.

Problema 7.37 Dada la Ecuación Diferencial Ordinaria (EDO) de 2^o orden

$$y'' - 6y' + \lambda y = 0 \quad \text{con} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Se pide:

a) Obtener razonadamente los valores de λ para los que en la solución general no aparecen funciones trigonométricas.

b) Resolverla para $\lambda = 10$.

Problema 7.38 Resolver el siguiente problema de valores iniciales aplicando la transformada de Laplace:

$$y''' - 3y'' + 4y = e; \quad y(0) = 1, \;\; y'(0) = 0, \;\; y''(0) = 1$$

Problema 7.39 Encontrar la solución del sistema de ecuaciones $\overrightarrow{X}' = A\overrightarrow{X}(t)$, con

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

bajo la condición inicial $\overrightarrow{X}(0) = (2, \ \ 0, \ \ 4)^T$

Problema 7.40 Dada la ecuación diferencial ordinaria (EDO):

$$y'' + y = xe^x + 2e^{-x}$$

i) Hallar la solución general de la EDO.

ii) Encontrar la solución que satisface las siguientes condiciones iniciales: $y(0) = 1, \quad y'(0) = 1$.

Problema 7.41 Dado el siguiente problema de valor inicial (PVI)

$$y'' - 3y' + 2y = e^{-4t}\,; \quad y(0) = 1\,; \quad y'(0) = 5$$

i) Hallar la solución del PVI aplicando la transformada de Laplace.

ii) Calcular $f(\frac{1}{4})$ sabiendo que $f(t) = 6y(t) - 9y'(t) + 3y''(t)$

Problema 7.42 Dado el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden:

$$\vec{X}'(t) \ = \ \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 8 & -6 \end{pmatrix} \vec{X}(t)$$

siendo $t > 0$.

i) Hallar la solución general del sistema y comprobar los resultados.

ii) Analizar el comportamiento de la solución del apartado i) cuando el tiempo t tiende a infinito. ¿Puede depender dicho comportamiento de la condición inicial que se asigne al sistema?

Problema 7.43 Sabiendo que $g(x) = -1 - x/2$, resolver el siguiente PVI

$$\begin{cases} -\dfrac{2y + x}{y + x} y' &= \dfrac{2y}{x^2}(1 + g)\,, \quad x \geq 1\,, \\ y(1) &= 1 \end{cases}$$

Problema 7.44 Consideremos el siguiente modelo de ecuación del calor:

$$\begin{aligned} \text{Ecuación en Derivadas Parciales (EDP)} \ &: \ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = \frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\,, \ \ t > 0\,, \ \ x \in (0,\pi) \\ \text{Condiciones de Contorno (CC)} \ &: \ \ u(0,t) = 0\,, \ \ u(\pi,t) = 0\,, \ \ t > 0\,, \\ \text{Condición Inicial (CI)} \ &: \ \ u(x,0) = f(x)\,, \ \ x \in [0,\pi]\,. \end{aligned}$$

Aplicando separación de variables $u(x,t) = X(x)\,T(t) \not\equiv 0$, se pide:

i) Demostrar que $T(t) = ce^{-\lambda t}$, siendo $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, y λ la constante de separación.

ii) Demostrar que $X(x)$ satisface: $X'' + \lambda X = 0\,; X(0) = 0\,;\ X(\pi) = 0\,;$ y hallar los valores de $\lambda > 0$ que dan lugar a soluciones no nulas.

iii) Sabiendo que la solución $u(x,t)$ se puede expresar como:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-n^2 t} \operatorname{sen}(nx)\ ; \quad \text{con } A_n \in \mathbb{R}\,,$$

hallar los coeficientes $A_n\,, n \in \mathbb{N}$, sabiendo que la función del dato inicial es: $f(x) = \operatorname{sen}^3(x)$

Nota: Pueden ser útiles los siguientes resultados:

- Dados $L > 0$ y $m\,, n \in \mathbb{N}$, se tiene que: $\displaystyle\int_0^L \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{L}x\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \mathrm{d}x = \begin{cases} 0\,,\ m \neq n \\ L/2\,,\ m = n \end{cases}$
- $\operatorname{sen}(3x) = \operatorname{sen}(x)(3 - 4\operatorname{sen}^2(x))\,, \forall x \in \mathbb{R}\,;$

Problema 7.45 Sea el problema de valor inicial (PVI)

$$\begin{cases} y' &= 1 + \dfrac{y}{2}\,, \\ y(0) &= 0 \end{cases}$$

al que se le aplica el siguiente esquema numérico (Euler mejorado):

$$Y_{n+1} = Y_n + \frac{h}{2}(\,f(t_n, Y_n) + f(t_{n+1}, Y_n + hf(t_n, Y_n))\,)$$

i) Calcular, usando los pasos $h_1 = 0.2$ y $h_2 = 0.1$, las soluciones aproximadas $Y^{h_1}_{t=0.4}$, $Y^{h_2}_{t=0.4}$ de $y(0.4)$.

ii) Estimar el orden del método a partir de los resultados anteriores, sabiendo que la solución exacta del PVI es: $y(t) = 2(e^{t/2} - 1)$.

Problema 7.46 Dada la ecuación diferencial $\quad x^2y'' - 3xy' + 4y = \ln x \quad x > 0, \quad$ se pide:

i) Efectuar el cambio de variable adecuado que permite transformarla en una ecuación diferencial con coeficientes constantes.

ii) Resolver la ecuación diferencial así obtenida sujeta a las condiciones $y(1) = \dfrac{1}{2}$, $y'(1) = 1$.

Problema 7.47 Resuelve la siguiente ecuación diferencial de segundo orden utilizando la transformada de Laplace:

$$y'' + 16y = e^{4t}\,, \quad y(0) = 0\,,\, y'(0) = 1\,.$$

Problema 7.48 Considera el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden

$$\begin{pmatrix} X_1'(t) \\ X_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ \alpha & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1(t) \\ X_2(t) \end{pmatrix}$$

con $\alpha \in \mathbb{R}$ y $t > 0$.

i) Encuentra el valor de α para el cual el comportamiento cualitativo de las soluciones del sistema cambia (*sugerencia*: calcula los valores propios de la matriz de coeficientes en términos de α). Justifica tu respuesta.

ii) Halla la solución del sistema cuando $\alpha = 1$ y $(X_1(0), X_2(0)) = (1, 0)$. Además, calcula la distancia $d(t)$ desde la posición $(0,0)$ hasta la posición de la partícula que esté moviéndose acorde a la solución calculada (*sugerencia*: utiliza la fórmula $d(t) = \sqrt{X_1(t)^2 + X_2(t)^2}$).

Problema 7.49 Resuelve el siguiente PVI

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x^2 + e^y + (xe^y + \cos y)y' & = & 0 \\ y(0) & = & g(\pi/2) \end{array} \right.$$

sabiendo que la función g cumple

$$g'(x) = \operatorname{sen}(x)\,, \quad g(0) = -1\,.$$

Problema 7.50 Consideremos el siguiente modelo de ecuación del calor:

$$\begin{array}{rcl} \text{Ecuación en Derivadas Parciales (EDP)} & : & \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t)\,,\ \ t > 0\,,\ \ x \in (0, \pi/3) \\ \text{Condiciones de Contorno (CC)} & : & \dfrac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 0\,,\ \ \dfrac{\partial u}{\partial x}(\pi/3, t) = 0\,,\ \ t > 0\,, \\ \text{Condición Inicial (CI)} & : & u(x,0) = f(x)\,,\ \ x \in [0, \pi/3]\,. \end{array}$$

Aplicando separación de variables $u(x,t) = X(x)\,T(t) \not\equiv 0$, se pide:

i) Demostrar que $X(x)$ satisface el siguiente problema de valores en la frontera:

$$X'' + \lambda X = 0\,; \quad X'(0) = 0\,; \, X'(\pi/3) = 0\,;$$

y hallar los valores de la constante de separación $\lambda \geq 0$ que dan lugar a soluciones no nulas.

ii) Sabiendo que la solución $u(x,t)$ se puede expresar como:

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n e^{-9n^2 t} \cos(3nx)\ ; \quad \text{con } A_n \in \mathbb{R}\,,$$

hallar el valor aproximado de $u(\pi/6, 1/9)$, tomando solamente los tres primeros sumandos de la serie anterior, sabiendo que la función del dato inicial es: $f(x) = 2x + 1$

Nota: Puede ser útil el siguiente resultado:

- Dados $L > 0$ y $m\,, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, se tiene que: $\displaystyle\int_0^L \cos\left(\frac{m\pi}{L}x\right)\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\,\mathrm{d}x = \begin{cases} 0\,;\ m \neq n \\ L/2\,;\ m = n \neq 0 \\ L\,;\ m = n = 0 \end{cases}$

Problema 7.51 Se quiere resolver numéricamente el siguiente PVI

$$\left\{ \begin{array}{rcl} y' & = & t + \dfrac{y}{2} + 1\,, \\ y(0) & = & 1 \end{array} \right.$$

mediante el esquema numérico de Adams-Bashforth:

$$Y_{n+2} = Y_{n+1} + \frac{3}{2}hf(t_{n+1}, Y_{n+1}) - \frac{1}{2}hf(t_n, Y_n)$$

i) Calcula con paso $h_1 = 0.1$ la solución aproximada $Y^{h_1}_{t=0.3}$ de $y(0.3)$, sabiendo que Y_1 debe calcularse mediante el método de Euler explícito.

ii) Usando el paso $h_2 = 0.01$ se obtiene la aproximación $Y^{h_2}_{t=0.3} = 1.5327258$. Estima el orden del método a partir de $Y^{h_1}_{t=0.3}$, $Y^{h_2}_{t=0.3}$ y la solución exacta $y(t) = 7e^{t/2} - 2(t+3)$.

Problema 7.52 Resolver la siguiente ecuación diferencial de primer orden

$$y^2 + \left(2xy - \cos x - \frac{1}{1+y^2}\right) y' = -y \operatorname{sen} x$$

junto con la condición inicial $y(\alpha) = 1$, donde α es un parámetro real.

Problema 7.53 Considerar la ecuación diferencial de segundo orden

$$x^2y'' - 4xy' + 6y = 6\,(\ln x)^2 \quad \text{for } x > 0\,.$$

i) Aplicar un cambio de variable que transforme la ecuación en otra con coeficientes constantes.

ii) Resolver la ecuación obtenida en i) usando un método apropiado.

Problema 7.54

i) Resolver el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden:

$$X' = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ -5 & 6 \end{pmatrix} X\,; \quad \text{siendo} \quad X = X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$$

ii) Comprobar la solución del sistema obtenida en el apartado anterior.

Problema 7.55 Resuelve el siguiente problema de valor inicial utilizando la transformada de Laplace:

$$y'' - 2y' + 5y = e^{-3t}, \quad y(0) = 0, y'(0) = 1\,,$$

Problema 7.56 Resolver la siguiente ecuación diferencial de primer orden

$$y = (x + \sqrt{xy})\; y'$$

para $x > 0$, junto con la condición inicial $y(1) = 1$.

Problema 7.57 Resolver la siguiente ecuación diferencial de segundo orden

$$y'' + 3y' + 2y = \operatorname{sen}(e^{\,x})$$

y comprobar el resultado obtenido.

Problema 7.58

i) Demostrar que ecuación diferencial ordinaria $y'' - 6y' + 13y = 0$ es equivalente al siguiente sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden:

$$X' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -13 & 6 \end{pmatrix} X\,; \quad \text{siendo} \quad X = X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$$

ii) Resolver el sistema del apartado anterior sabiendo que:

$$X(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Problema 7.59 Resuelve el siguiente problema de valor inicial (PVI) utilizando la transformada de Laplace:

$$y'' - 2y' + 5y = e^{-3t}, \quad y(0) = 1, y'(0) = 0\,,$$

Problema 7.60 Resuelve el siguiente PVI

$$\begin{cases} xy' \operatorname{sen} \frac{y}{x} + x = y \operatorname{sen} \frac{y}{x} \\ y(1) = 0 \end{cases}, \quad x > 0.$$

Problema 7.61 Halla, mediante serie de potencias, la solución a la siguiente EDO:

$$(1 + x^2)y'' + 2xy' - 2y = 0\,.$$

Problema 7.62

- Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$X' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} X$$

- Halla la solución a la EDO

$$y'' - 2y' + 2y = e^{2t}$$

- Demuestra la equivalencia de la EDO homogénea asociada a la EDO de segundo orden anterior y el sistema de ecuaciones del primer apartado.

Problema 7.63 Resuelve el siguiente PVI utilizando la transformada de Laplace:

$$y'' - y' - 2y = 3, \quad y(0) = 1, y'(0) = 2\,,$$

Problema 7.64 Sea el problema de valor inicial (PVI) dado por la ecuación diferencial ordinaria:

$$y''' + 4y' = 4e^{2t}\ ; \quad \text{y las condiciones iniciales} \quad y(0) = 1, \ \ y'(0) = 0, \ \ y''(0) = 1;$$

Se pide, resolver el PVI mediante los dos métodos siguientes:

M1) Aplicando la transformada de Laplace.

M2) Siguiendo los siguientes pasos:
(i) Aplicar el cambio $v(t) = y'(t)$ a la ecuación diferencial del PVI y hallar la solución general de la ecuación de segundo orden resultante.
(ii) Deshacer el cambio hecho en (i), integrar y obtener la solución $y(t)$ del PVI.

Problema 7.65 Dada la ecuación diferencial ordinaria (EDO): $y'' - 4xy' - 4y = e^{x}$; se pide:

(a) Asumiendo que la solución de la EDO viene dada por la serie de potencias: $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$; encontrar la relación de recurrencia que deben satisfacer los coeficientes a_n.

(b) Suponiendo que $a_0 = 1$ y $a_1 = 0$, hallar el valor aproximado de la solución de la EDO en el punto $x = 2$, usando solamente los cinco primeros términos de la serie de potencias del apartado (a).

NOTA: Puede ser útil el siguiente resultado: $e^x = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$.

Problema 7.66 Sea el problema de valor inicial (PVI)

$$\left\{ \begin{array}{l} 2ty + (t^2 + y)y' = 0 \\ y(0) = -2 \end{array} \right. \quad , \quad 0 \leq t \leq 1$$

Se pide:

i) Clasificar la ecuación diferencial y demostrar que la solución del PVI es: $y(t) = -t^2 - \sqrt{t^4 + 4}$

ii) Expresar la ecuación diferencial de i) en la forma $y' = f(t, y)$ y considerar el esquema numérico:

$$Y_{n+1} = Y_n + \frac{h}{2}(f(t_{n+1}, \tilde{Y}_{n+1}) + f(t_n, Y_n)) , \quad \text{con} \quad \tilde{Y}_{n+1} = Y_n + hf(t_n, Y_n) .$$

Demostrar que $Y_1 = \dfrac{4}{h^2 - 2}$ para cualquier paso h. Además, encontrar el valor aproximado a $y(1)$ utilizando un paso $h_1 = 0.5$.

iii) Estimar el orden del método numérico sabiendo que la aproximación a $y(1)$ es $Y_{10}^{h_2} = -3.239$ donde se ha utilizado un paso $h_2 = 0.1$.

Problema 7.67 Consideremos el siguiente modelo de ecuación del calor:

$$\begin{array}{rcl} \text{Ecuación en Derivadas Parciales (EDP)} & : & \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) \, , \ \ t > 0 \, , \ \ 0 < x < \pi/3 \\ \text{Condiciones de Contorno (CC)} & : & \dfrac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 0 \, , \ \ \dfrac{\partial u}{\partial x}(\pi/3,t) = 0 \, , \ \ t > 0 \, , \\ \text{Condición Inicial (CI)} & : & u(x,0) = 2x + 1 \, , \ \ 0 \leq x \leq \pi/3 \, . \end{array}$$

Aplicando separación de variables $u(x, t) = X(x)\, T(t) \not\equiv 0$, se pide:

i) Demostrar que $X(x)$ satisface el siguiente problema de valores en la frontera:

$$X'' + \lambda X = 0 \, ; \quad X'(0) = 0 \, ; \, X'(\pi/3) = 0 \, ;$$

y hallar los valores de la constante de separación $\lambda \geq 0$ que dan lugar a soluciones no nulas.

ii) Sabiendo que la solución $u(x, t)$ se puede expresar como:

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n e^{-9n^2 t} \cos(3nx) \; ; \quad \text{con } A_n \in \mathbb{R} \, ,$$

hallar el valor aproximado de $u(\pi/6, 1/9)$, tomando solamente los tres primeros sumandos de la serie anterior.

Nota: Puede ser útil el siguiente resultado:

- Dados $L > 0$ y $m\,, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, se tiene que: $\displaystyle\int_0^L \cos\left(\frac{m\pi}{L}x\right)\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\,\mathrm{d}x = \begin{cases} 0\,;\ m \neq n \\ L/2\,;\ m = n \neq 0 \\ L\,;\ m = n = 0 \end{cases}$

Problema 7.68 Dado el sistema de ecuaciones diferenciales $\overrightarrow{X}'(t) = A\overrightarrow{X}(t)$, con $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ que satisface la condición inicial $\overrightarrow{X}(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, se pide:

(a) Hallar la solución $\overrightarrow{X}(t) = \begin{pmatrix} X_1(t) \\ X_2(t) \end{pmatrix}$.

(b) Resolver el siguiente problema de valor inicial aplicando la transformada de Laplace.

$$y'' - 6y' + 9y = 0; \qquad y(0) = 1, \quad y'(0) = 6,$$

(c) Aplicando el cambio de variables, $X_2(t) = y(t)$, demostrar que el sistema de ecuaciones es equivalente al problema de valor inicial del apartado (b). Comparar las soluciones obtenidas en los apartados (a) y (b)

NOTA: Puede ser útil la siguiente fórmula: $\mathcal{L}\{\frac{t^n e^{at}}{n!}\} = 1/(s-a)^{n+1}$ para $n = 0, 1, 2, ...$

Problema 7.69 Sea la función $f(x) = 27 + (x^2+1)\,y'$, donde y' es la derivada primera de la función $y = y(x)$ respecto de la variable independiente x. Sabiendo que y es suficientemente derivable, se pide:

(a) Demostrar que la ecuación $f'(x) = 0$ equivale a la ecuación diferencial $(x^2+1)y'' + 2xy' = 0$.

(b) Resolver la ecuación diferencial del apartado (a) mediante series de potencias de la forma $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n$.

(c) Imponer la condición inicial $y(0) = \beta\,,\ y'(0) = 1$. Hallar para qué valor del parámetro $\beta \in \mathbb{R}$ se obtiene una solución impar, esto es, $y = y(x)$ satisface que $y(-x) = -y(x)\,.$

Problema 7.70 Dado el siguiente problema de valor inicial (PVI)

$$\left\{ \begin{array}{l} y' + ky = k \operatorname{sen} t + \cos t \\ y(0) = 1 \end{array} \right. \quad , \quad t \geq 0\,,$$

donde k es un parámetro real positivo.

(a) Clasificar la ecuación diferencial del PVI y hallar su solución.

(b) Tomando $k = 3$ en el PVI, hallar el valor aproximado de $y(\pi/4)$ mediante el método de Euler explícito con paso $h = \pi/4$. Comparar el resultado con el obtenido usando la solución exacta $y(t) = \operatorname{sen} t + e^{-3t}$

(c) ¿Es admisible la aproximación obtenida en el apartado (b) con el paso $h = \pi/4$? En caso afirmativo, justificar la respuesta. En caso negativo, obtener una cota superior del paso h que aproxime $y(\pi/4)$ de manera admisible.

Problema 7.71 Consideremos el siguiente modelo de ecuación del calor:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) &= \frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\,, \quad t>0\,, \quad 0<x<\pi/3 \\
\frac{\partial u}{\partial x}(0,t)=0\,, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(\pi/3,t) &= 0\,, \quad t>0\,, \\
u(x,0) &= 2x+1\,, \quad 0\le x\le \pi/3\,.
\end{aligned}
$$

(a) Aplicando el método de separación de variables $u(x,t) = X(x)\,T(t) \not\equiv 0$, demostrar que $T(t) = ce^{-\alpha t}$, siendo $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, y α la constante de separación.

(b) Demostrar que $X(x)$ satisface el siguiente problema de valores en la frontera:

$$X'' + \alpha X = 0\,; \quad X'(0) = 0\,;\, X'(\pi/3) = 0\,;$$

y hallar los valores de $\alpha \ge 0$ que dan lugar a soluciones no nulas.

(c) Sabiendo que la solución $u(x,t)$ se puede expresar como:

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n e^{-9n^2 t} \cos(3nx)\;; \quad \text{con } A_n \in \mathbb{R}\,,$$

hallar el valor aproximado de $u(\pi/6, 1/9)$, tomando solamente los tres primeros sumandos de la serie anterior.

Nota: Puede ser útil el siguiente resultado:

- Dados $L>0$ y $m\,,n \in \mathbb{N}\cup\{0\}$, se tiene que: $\displaystyle\int_0^L \cos\left(\frac{m\pi}{L}x\right)\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\,\mathrm{d}x = \begin{cases} 0\,;\ m\ne n \\ L/2\,;\ m=n\ne 0 \\ L\,;\ m=n=0 \end{cases}$

Problema 7.72 Dada la siguiente ecuación diferencial

$$(x+y)^2 + (2xy + x^2 - 1)y' = 0\,,$$

se pide:

i) Clasificar la ecuación, razonando la respuesta.

ii) Hallar la solución general de la ecuación.

iii) Escribir la solución que satisface $y(3) = 1$.

Problema 7.73 Resolver el siguiente problema de valor inicial utilizando el método de los coeficientes indeterminados

$$y'' + 2y' + 2y = t + e^{2t}\,; \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 1\,,$$

Problema 7.74 Resolver el siguiente problema de valor inicial utilizando la transformada de Laplace:

$$y'' + 2y' + 2y = e^{2t}\,; \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 1\,,$$

Problema 7.75 Dada la siguiente ecuación diferencial

$$3x^2 - 2xy + (6y^2 - x^2 + 3)y' = 0\,,$$

se pide:

i) Clasificar la ecuación, razonando la respuesta.

ii) Hallar la solución general de la ecuación.

iii) Escribir la solución que satisface $y(0) = 1$.

Problema 7.76 Resolver el siguiente problema de valor inicial utilizando el método de variación de los parámetros

$$y'' - 2y' + 2y = e^t\,; \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 1\,,$$

Problema 7.77 Resolver el siguiente problema de valor inicial utilizando la transformada de Laplace:

$$y'' - 2y' + 2y = e^t\,; \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 1\,,$$

Problema 7.78 Dada la ecuación diferencial

$$3x^2y + 2xy + y^3 + (x^2 + y^2)y' = 0\,,$$

se pide:

i) Probar que la ecuación diferencial no es exacta.

ii) Comprobar que la ecuación se convierte en exacta si se multiplica por el factor e^{3x}.

iii) Hallar la solución sabiendo que $y(1) = 2$.

Problema 7.79 Dada la ecuación diferencial

$$y'' - 5y' + 6y = e^{2t}$$

se pide:

i) Hallar su solución general aplicando el método de variación de los parámetros.

ii) Hallar una solución particular de la ecuación mediante el método de coeficientes indeterminados.

Problema 7.80

i) Resolver el siguiente problema de valor inicial utilizando la transformada de Laplace.

$$y'' - y' - 6y = 0\,; \quad y(0) = 1,\ y'(0) = -1\,,$$

ii) Comprobar la solución.

iii) Explicar el comportamiento de la solución cuando la variable independiente tiende a $\pm\infty$.

Problema 7.81 Dado el sistema de ecuaciones diferenciales $\overrightarrow{X}'(t) = A\overrightarrow{X}(t)$, con $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$,
Se pide:

i) Hallar la solución general del sistema $\overrightarrow{X}(t)$

ii) Estudiar el comportamiento de la solución general cuando la variable $t \to -\infty$

Problema 7.82 Consideremos el siguiente problema:

$$\begin{array}{rcl} \text{Ecuación en Derivadas Parciales} & : & \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t)\,;\;\; t > 0\,,\;\; 0 < x < \pi \\ \text{Condiciones de Contorno} & : & u(0,t) = 0\,,\;\; u(\pi,t) = 0\,;\;\; t > 0 \\ \text{Condiciones Iniciales} & : & (\mathbf{i})\; u(x,0) = 7\,\mathrm{sen}(3x) - 3\,\mathrm{sen}(7x)\,, \quad (\mathbf{ii})\; \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0\,,\;\; 0 \le x \le \pi\,. \end{array}$$

Se pide:

i) Tomando $u(x,t) = X(x)\,T(t) \not\equiv 0$, aplicar el método de separación de variables y demostrar que $X(x)$ satisface el siguiente problema de valores en la frontera:

$$X'' + \lambda X = 0\,; \quad X(0) = 0\,;\, X(\pi) = 0\,;$$

y hallar los valores de la constante de separación $\lambda > 0$ que dan lugar a soluciones no nulas.

ii) Sabiendo que la solución $u(x,t)$ se puede expresar como:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(nt)\,\mathrm{sen}\,(nx)\;; \quad \text{con } A_n \in \mathbb{R}\,.$$

Hallar el valor de $u(\pi/2, \pi)$

Problema 7.83 Dada la ecuación diferencial ordinaria $y' + x = e^x - 3y$ se pide:

a) Hallar su solución general.

b) Obtener la solución particular que cumple y(0)=1 y comprobar la solución obtenida.

Problema 7.84 Resolver la ecuación diferencial ordinaria $y'' + 2y' + y = \dfrac{e^{-x}}{x}$, con $x \neq 0$.

Problema 7.85 Resolver el siguiente problema de valores iniciales aplicando la transformada de Laplace:

$$y'' + 4y' + 5y = e^{-2x}; \qquad y(0) = 1,\;\; y'(0) = 2$$

Problema 7.86 Encontrar la solución del sistema de ecuaciones $\overrightarrow{X}' = A\overrightarrow{X}(t)$,

con $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ bajo la condición inicial $\overrightarrow{X}(0) = (0,\;\; 1,\;\; -1)^T$.

Problema 7.87 Dado el siguiente problema de ecuación del calor:

$$\begin{array}{l} 4u_{xx} = u_t \ , \qquad 0 < x < \pi \ , \quad t > 0 \\ u_x(0,t) = 0, \quad u_x(\pi,t) = 0 \ , \qquad t > 0 \ , \quad \text{(condiciones frontera)} \\ u(x,0) = f(x) \ , \qquad 0 \le x \le \pi \qquad \text{(condición inicial)} \end{array}$$

a) Aplicar el método de separación de variables tomando $u(x,t) = X(x)T(t)$ y hallar la ecuación diferencial que satisface la función $T(t)$ y el problema de contorno que satisface la función $X(x)$.

b) Escribir la solución general $u(x,t)$ del problema y obtener la solución particular para el caso $f(x) = 3x$.

Problema 7.88 Dada la siguiente ecuación diferencial ordinaria:

$$y + e^y y' = k - x(1 + y') \, ; \qquad x > 0 \, ; \qquad k \in \mathbb{R}$$

Se pide:
a) Clasificarla razonadamente.
b) Hallar su solución general.
c) En función de k hallar todas las soluciones particulares que cumplen $y(1) = 1$.
d) Escribir la solución del apartado c) que se obtiene para $k = 1$.

Problema 7.89 Resolver el siguiente problema de valor inicial:

$$y'' - y = e^{-x} + \operatorname{sen} x; \qquad y(0) = 1, \qquad y'(0) = 1.$$

Problema 7.90 Resolver el siguiente problema de valores iniciales aplicando la transformada de Laplace:

$$y'' - 2y' + y = \cos t; \qquad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2$$

Problema 7.91 Dado el sistema de ecuaciones $\overrightarrow{X}' = A\overrightarrow{X}(t)$, con $A = \begin{bmatrix} 1 & 10 \\ 6 & -3 \end{bmatrix}$

a) Encontrar la solución que cumple la condición inicial $\overrightarrow{X}(0) = (2 \ \ 0)^T$.
b) Comprobar la solución obtenida.

Problema 7.92 Dado el siguiente problema de ecuación del calor:

$$2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) \, , \qquad 0 < x < \pi \ , \quad t > 0$$

$$u(0,t) = 0, \quad u(\pi,t) = 0 \ , \qquad t > 0 \ , \quad \text{(condiciones de frontera)}$$

$$u(x,0) = f(x) \ , \qquad 0 \le x \le \pi \qquad \text{(condición inicial)}$$

a) Aplicar el método de separación de variables tomando $u(x,t) = X(x)T(t) \neq 0$ y hallar la ecuación diferencial que satisface la función $T(t)$, tomando como constante de separación $\lambda \in \mathbb{R}$.

b) Hallar el problema de contorno que satisface la función $X(x)$ y los valores de $\lambda > 0$ que dan lugar a soluciones no nulas.

c) Escribir la solución general $u(x,t)$ del problema y obtener la solución concreta cuando $f(x) = 2(\operatorname{sen}(3x) - \operatorname{sen}(4x))$.

Problema 7.93 Dada la siguiente ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4x^2 + xy + y^2}{x^2},$$

se pide:

i) Clasificar la ecuación, razonando la respuesta.

ii) Hallar la solución general de la ecuación.

iii) Escribir la solución que satisface $y(1) = 2$.

Problema 7.94 Dada la ecucuación diferencial

$$y'' - 3y' + 2y = e^{-t}\,; \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 1\,,$$

se pide:

i) Hallar su solución general.

ii) Obtener la solución que cumple $y(0) = 0\,;\, y'(0) = 1\,.$

iii) Comprobar la solución obtenida en el apartado ii).

Problema 7.95 Resolver el siguiente problema de valor inicial utilizando la transformada de Laplace:

$$y'' + y = te^{-t}\,; \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 0\,,$$

Problema 7.96 Resolver el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{cases} x_1'(t) = 5\,x_1(t) - 6\,x_2(t) \\ x_2'(t) = 3\,x_1(t) - \,x_2(t) \end{cases}$$

sabiendo que $x_1(0) = -1\,;\, x_2(0) = 2\,.$

Problema 7.97 Dada la siguiente ecuación diferencial

$$6\,x + y\,\cos(x) + (e^y + \operatorname{sen}(x))\,y' = 0\,,$$

se pide:

i) Clasificar la ecuación, razonando la respuesta.

ii) Hallar su solución general.

iii) Comprobar dicha solución.

Problema 7.98 Dada la ecuación diferencial

$$y'' - 3y' + 2y = 5e^{2t}\,;$$

se pide:

i) Hallar su solución general.

ii) Obtener la solución que cumple $y(0) = 0\,;\, y'(0) = 1\,.$

Problema 7.99 Resolver el siguiente problema de valor inicial utilizando la transformada de Laplace:

$$y'' + 2\,y' + y = \cos(2t)\,; \quad y(0) = 0,\; y'(0) = 0\,,$$

Problema 7.100 Resolver el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{cases} x_1'(t) = 3\,x_1(t) + 2\,x_2(t) \\ x_2'(t) = -2\,x_1(t) + 3\,x_2(t) \end{cases}$$

sabiendo que $x_1(0) = 2\,;\; x_2(0) = -1\,.$

Problema 7.101 Dada la ecuación diferencial

$$\alpha y'' + y' + \frac{1}{4}y = f(x)\,,$$

donde α es un parámetro real y $f(x)$ es una función, se pide:

i) Clasificar y resolver la ecuación diferencial cuando $\alpha = 0$ y $f(x) = e^{\frac{3x}{4}}$

ii) Clasificar y resolver la ecuación diferencial cuando $\alpha = 5$ y $f(x) = 0$.

iii) Usando dos métodos distintos para hallar soluciones particulares, resolver el problema de valor inicial que resulta cuando $\alpha = 1$ y $f(x) = 2e^{\frac{x}{2}}$, sabiendo que $y(0) = 1\,, y'(0) = 0$.

Problema 7.102 Dado el sistema de ecuaciones diferenciales $\overrightarrow{X}'(t) = A\overrightarrow{X}(t)$, con $A = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$,
Se pide:

i) Hallar la solución general del sistema $\overrightarrow{X}(t)$

ii) Estudiar el comportamiento de la solución general cuando la variable $t \to +\infty$

Problema 7.103 Hallar la solución del siguiente modelo de ecuación del calor, siguiendo los pasos que se indican:

$$\begin{array}{rcl} \text{Ecuación en Derivadas Parciales (EDP)} & : & \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) = 4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)\,;\;\; t > 0\,,\;\; 0 < x < 4\,, \\ \text{Condiciones de Contorno (CC)} & : & u(0,t) = 0\,,\;\; u(4,t) = 0\,;\;\; t > 0\,, \\ \text{Condición Inicial (CI)} & : & (\mathbf{i})\; u(x,0) = f(x) = 4\,\mathrm{sen}(\dfrac{3\pi}{4}x)\,. \end{array}$$

Paso 1: Tomando $u(x,t) = X(x)\,T(t) \not\equiv 0$, aplicar el método de separación de variables, llamando λ a la constante de separación.

Paso 2: Demostrar que la función $T(t)$ satisface la ecuación $T' + 4\lambda T = 0$, y resolverla.

Paso 3: Demostrar que $X(x)$ satisface el siguiente problema de valores en la frontera:

$$X'' + \lambda X = 0\,; \quad X(0) = 0\,; X(4) = 0\,;$$

y hallar los valores $\lambda > 0$ que dan lugar a soluciones no nulas.

Paso 4: Escribir la solución $u(x,t)$ en forma de serie, teniendo en cuenta las funciones $T(t)$ y $X(x)$ obtenidas en los pasos 2 y 3.

Paso 5: Usar la condición inicial (CI) para hallar, finalmente, la solución del modelo.

Problema 7.104 Consideremos el siguiente modelo:

$$\begin{aligned}
\text{Ecuación en Derivadas Parciales (EDP)} &: \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t)\,; \ \ t>0\,, \ \ 0<x<\pi\,, \\
\text{Condiciones de Contorno (CC)} &: \quad u(0,t)=0\,, \ \ u(\pi,t)=0\,; \ \ t>0 \\
\text{Condiciones Iniciales (CI)} &: \quad (\mathbf{i})\ u(x,0) = 4\,\mathrm{sen}(x) - 2\,\mathrm{sen}(3x)\,,\ (\mathbf{ii})\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=0\,, \ \ 0\le x\le \pi\,.
\end{aligned}$$

Se pide:

i) Clasificar el tipo de modelo indicando específicamente el significado de las condiciones de contorno (CC) e iniciales (CI).

ii) Sabiendo que la solución $u(x,t)$ se puede expresar como:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(nt)\,\mathrm{sen}\,(nx)\ ; \quad \text{con } A_n \in \mathbb{R}\,.$$

Hallar el valor de los coeficientes A_n y obtener la solución $u(x,t)$.

iii) Comprobar la solución obtenida en el apartado ii)

Problema 7.105

a) Resolver la siguiente ecuación diferencial $\quad \dfrac{x}{y}y' = 1 + \ln x - \ln y$

b) Calcular la solución que cumple la condición: $\quad y(1) = 2$.

Problema 7.106 Resolver el siguiente problema de valor inicial utilizando el método de coeficientes indeterminados o el de variación de los parámetros:

$$y'' - y' - 6y = e^x + 1; \qquad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$$

Problema 7.107 Resolver el siguiente problema de valores iniciales aplicando la transformada de Laplace:

$$y'' + 5y' - 6y = 7e^x; \quad y(0) = 1, \ \ y'(0) = 0.$$

Problema 7.108 Sea el sistema de ecuaciones $\overrightarrow{X}' = A\overrightarrow{X}(t)$, con $A = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ \alpha & -3 \end{bmatrix}$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Se pide:

a) Hallar la solución general cuando $\alpha = 2$.

b) Resolver el sistema bajo la condición inicial $\overrightarrow{X}(0) = (3,\ 2)^T$ cuando $\alpha = 0$.

Problema 7.109 Dado el siguiente problema modelo de ecuación de ondas:

$$4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) \ = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t), \qquad 0 < x < \pi\ , \quad t > 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t)=0, \qquad \frac{\partial u}{\partial x}(\pi,t)=0\ , \quad t>0\ , \quad \text{(condiciones de frontera)}$$

$$u(x,0)=3\cos x\ , \qquad 0\le x\le\pi \qquad \text{(posición inicial)}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=1-\cos 4x\ , \quad 0\le x\le\pi \qquad \text{(velocidad inicial)}$$

a) Aplicar el método de separación de variables tomando $u(x,t)=X(x)T(t)\neq 0$ y hallar la ecuación diferencial que satisface la función $T(t)$.

b) Hallar el problema de contorno que satisface la función $X(x)$ y los valores de $\lambda\ge 0$ que dan lugar a soluciones no nulas, siendo λ la constante de separación.

c) Hallar la solución $u(x,t)$ del problema.