Resolución numérica de ecuaciones Integrales

Alfonso de Lucas Iniesta y Luis Lucas García

Universidad de Alicante - Facultad de Ciencias - Grado en física

Diciembre de 2024

Índice

Introducción

Función desconocida $y(x)$.

Definiciones [2]

Ecuación de Fredholm primera especie,

$$f(x) = \int_a^b K(x,s)y(s)\,ds \tag{1}$$

Ecuación de Fredholm de segunda especie,

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,s)y(s)\,ds \tag{2}$$

Definiciones

Ecuación de Volterra de primera especie,

$$f(x) = \int_a^x K(x,s)y(s)\,ds \tag{3}$$

Ecuación de Volterra de segunda especie,

$$y(x) = f(x) + \int_a^x K(x,s)y(s)\,ds \tag{4}$$

En todos los casos, $y(x)$ es la función desconocida. $K(x,s)$ es denotado como el **núcleo** y $f(x)$ se presume conocida. Cuando $f(x) = 0$ decimos que la ecuación integral es **homogénea**.

Motivación

¿Por qué razones querríamos nosotros estudiar las ecuaciones integrales?

- Condiciones de contorno particulares
- Más ventajosa y elegante en la resolución de ciertos problemas
- Resolución de problemas específicos

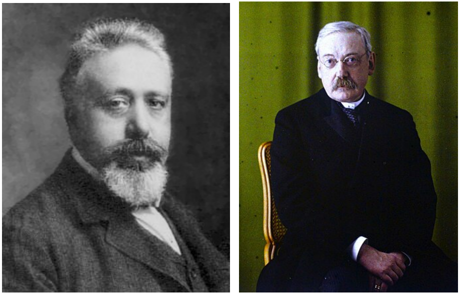


Figura: Los matemáticos Vito Volterra a la izquierda y Erik Ivar Fredholm a la derecha

Método del rectángulo [1]

Tomando una escuación de Volterra de segunda especie cualquiera (4). Vamos a utilizar la regla de aproximación más simple. Si queremos la solución en un intervalo $[0, T]$, podemos separar este intervalo en N subintervalos con forma $\Delta s = \frac{T}{N}$ y $t_n = n\frac{T}{N}$, con $n = 0, 1, \ldots, N$.

Regla del rectángulo

Tomando una primera aproximación sencilla de la integral (base por altura), tomando el valor de $k(t, s)$ al inicio del intervalo, se tiene que:

$$y(t_n) = g(t_n) + n\frac{T}{N}\sum_{i=0}^{n-1} k(t_n, t_i)y(t_i) \tag{5}$$

Esta expresión nos resulta familiar, y es que podemos expresar este problema en forma de matriz. Si lo escribimos en índices:

$$y_n = g_n + \frac{T}{N}\sum_{i=0}^{n-1} k_n^i y^i$$

Regla del trapecio

Si tomamos una aproximación algo más complicada para la integral en la ecuación, obtendríamos que queda:

$$y(t_n) = g(t_n) + \frac{T}{2N} \sum_{i=0}^{n-1} \left(k(t_n, t_i)y(t_i) + k(t_n, t_{i+1})y(t_{i+1})\right) \tag{6}$$

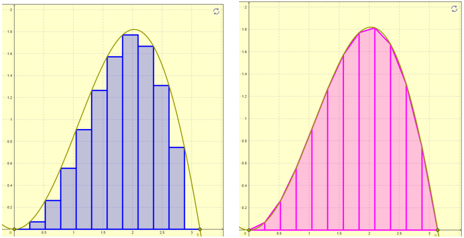


Figura: Reglas de integración numérica del rectángulo y el trapecio.

Resolución de un caso particular [5]

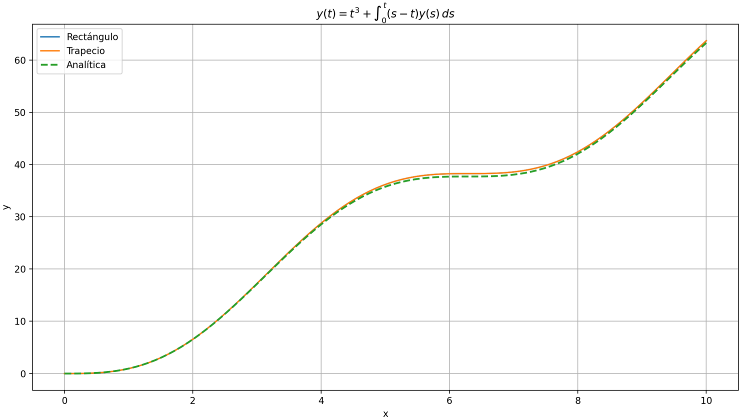


Figura: Solución de un problema de la referencia [2]

Análisis de ambos métodos

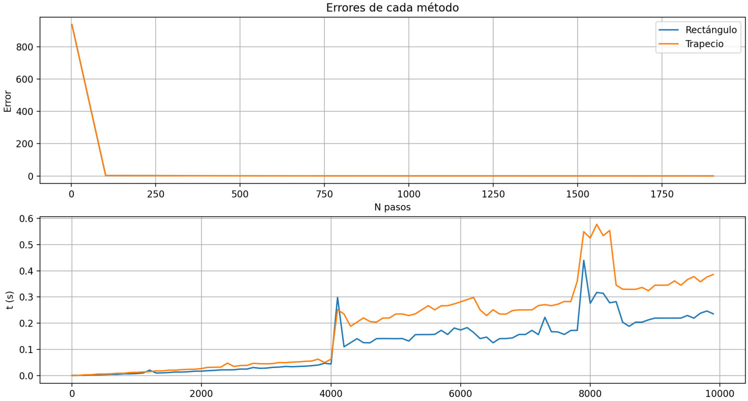


Figura: Error y tiempo de ejecución para cada uno de los métodos de resolución de la figura 3

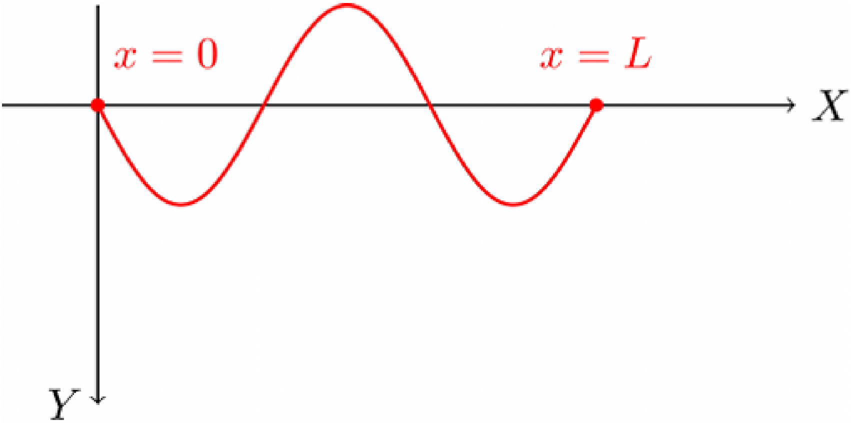


Figura: Nuestra cuerda

Oscilaciones libres en una Cuerda

Sea $y(x,t)$ la posición en el instante t de un punto de la cuerda con abcisa x. Sea λ la densidad lineal de la cuerda, supuesta constante por simplicidad.

Fuerza de Inercia

Siguiendo la 2ª Ley de Newton, la fuerza de inercia de la cuerda por unidad de longitud viene dada por:

$$-\lambda \frac{\partial^2 y(\xi,t)}{\partial t^2} \tag{7}$$

Donde el signo menos proviene de que la fuerza de inercia se opone a las oscilaciones de la cuerda.

Oscilaciones libres en una Cuerda

De esta manera la expresión va a tomar la forma siguiente:

Forma de la ecuación

$$y(x,t) = -\lambda \int_0^L K(x,\xi)\frac{\partial^2 y(\xi,t)}{\partial t^2}d\xi \tag{8}$$

Si consideramos que la cuerda realiza oscilaciones armónicas, es decir, $y(x,t) = y(x)sen(wt)$, donde $w > 0$ es la frecuencia (fija) e $y(x)$ es la amplitud de las socilaciones resulta que:

$$y(x,t) = \lambda w^2 \int_0^L K(x,\xi)y(\xi)sen(wt)d\xi \tag{9}$$

Donde:

$$K(x,\xi) = \begin{cases} \frac{x(L-\xi)}{T_0 L}, & 0 \leq x \leq \xi \\ \frac{(L-x)\xi}{T_0 L}, & \xi \leq x \leq L \end{cases}$$

Para finalizar, recordando que $y(x,t) = y(x)sen(wt)$ y diviendo por $sen(wt)$ a ambos lados de (9) tenemos que:

Forma de la ecuación

$$y(x) = \lambda w^2 \int_0^L K(x,\xi)y(\xi)d\xi \tag{10}$$

La cual es la expresión de una ecuación de Fredholm de segunda especie, en este caso homogénea.

Nuevamente emplearemos la regla del rectángulo y del trapecio, de forma que, en este caso la expresión queda de la siguiente manera.

Rectángulo y trapecio

Rectángulo:

$$y_n = g_n + \frac{T}{N} \sum_{i=0}^{N-1} k_n^i y^i \tag{11}$$

Trapecio:

$$y(t_n) = g(t_n) + \frac{T}{2N} \sum_{i=0}^{N-1} \left(k(t_n, t_i) y(t_i) + k(t_n, t_{i+1}) y(t_{i+1})\right) \tag{12}$$

Armónicos de la cuerda

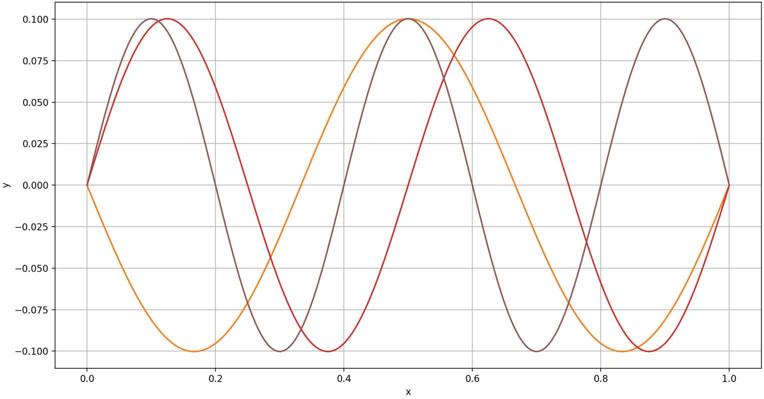
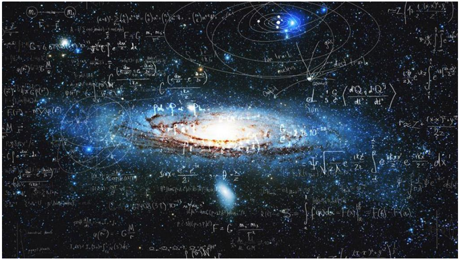


Figura: Oscilaciones de la cuerda con extremos fijos. Resolviendo la ecuación integral.

Conclusiones y Aplicaciones

- Herramienta rápida y elegante
- Procesos de coagulación
- Dinámica pobalcional
- Estabilidad de reactores nucleares
- Teoría de fotoesferas en Astrofísica [4]



Bibliografía I

[1] P. Linz. «Numerical methods for Volterra integral equations of the first kind». En: *The Computer Journal* 12.4 (ene. de 1969), págs. 393-397. ISSN: 0010-4620. DOI: 10.1093/comjnl/12.4.393. eprint: https://academic.oup.com/comjnl/article-pdf/12/4/393/1026131/120393.pdf. URL: https://doi.org/10.1093/comjnl/12.4.393.

[2] Frank Navarro Rojas. «Ecuaciones en diferencias de Volterra y aproximación numérica para ecuaciones integrales». Tesis de mtría. Universidad Nacional Mayor de San Marcos. Programa Cybertesis PERÚ, 2011.

[3] M. Rahman. *Integral Equations and Their Applications*. WIT, 2007. ISBN: 9781845641016. URL: https://books.google.es/books?id=6UjQCwAAQBAJ.

[4] V.V. Sobolev. *Course in Theoretical Astrophysics*. Course in Theoretical Astrophysics n.º 531. National Aeronautics y Space Administration, 1969. URL: https://books.google.es/books?id=GPZEAAAAIAAJ.

[5] WolframAlpha. *Solución de una ecuación integral de Volterra: Nuevo en Wolfram Language 11*. [Consultado: 15/12/2024]. URL: https://www.wolfram.com/language/11/symbolic-and-numeric-calculus/solve-a-volterra-integral-equation.html.es.