Problema 4. Demuestre que el principio del buen orden implica el principio de inducción matemática.

Sea $P(n)$ una proposición definida para toda $n \in \mathbb{N}$. Suponga que $P(1)$ es verdadero y si $P(k)$ es verdadero para un natural k, entonces $P(k+1)$ también es verdadero. Demostraremos que $P(n)$ es verdadero para todo $n \in \mathbb{N}$.

Para esto, considere el conjunto $A = \{n \in \mathbb{N} : P(n) \text{ es falso.}\}$ y suponga que es no vacío. Entonces, por el principio del buen orden, A contiene un primer elemento, digamos m. Como $P(1)$ es verdadero, entonces $m > 1$. Por la definición de m, $m-1$ no pertenece a A. Entonces $P(m-1)$ es verdadero, lo cual implica que $P((m-1)+1) = P(m)$ también es verdadero. Pero entonces m no pertenece a A, lo cual es una contradicción. Por tanto, el supuesto que A es no vacío es falso. Luego, $P(n)$ es verdadero para todo $n \in \mathbb{N}$.

Problema 5. Utilice inducción matemática para demostrar el principio del buen orden.

Sea S un subconjunto no vacío de $\mathbb{N}$ y consideremos la proposición $P(n)$: si $n \in S$, entonces S tiene un primer elemento. Demostraremos por inducción que $P(n)$ es verdadero para toda $n \in \mathbb{N}$.

Observe que $1 < m$ para todo $m \in N$. Luego, si $1 \in S$, entonces 1 es el elemento mínimo de S. Es decir, $P(1)$ es verdadero. Suponga ahora que $P(k)$ es verdadero para todo natural $k < m$ y suponga que $P(m)$ es falso. Es decir, $m \in S$, pero S no tiene primer elemento. Como $m \in S$, este no es el primer elemento de S y por tanto existe $n \in S$ tal que $n < m$. Pero, $P(n)$ es verdadero, entonces S tiene primer elemento, lo cual es una contradicción.

Problema 6. Sea $f : X \to Y$ una función de un conjunto X no vacío en un conjunto Y. Demuestre que f es $1-1$ si y solo si existe una función $g : Y \to X$ tal que $g \circ f$ es la función identidad en X.

Suponga que f es $1-1$. Sea $x_0 \in X$. Defininamos la función $g : Y \to X$ como $g(y) = x$ si $f(x) = y$. Luego, $(g \circ f)(x_0) = g(f(x_0)) = x_0$. Hemos demostrado que $(g \circ f)$ es la función identidad en X.

Suponga que existe una función $g : Y \to X$ tal que $g \circ f$ es la identidad en X. Sean x_1, x_2 en X tales que $f(x_1) = f(x_2)$. Entonces $x_1 = g(f(x_1)) = g(f(x_2)) = x_2$. Por tanto f es $1-1$.

Problema 7. Sea $f : X \to Y$ una función de X en Y. Demuestre que f es *sobre* si y solo si existe una función $g : Y \to X$ tal que $f \circ g$ es la función identidad en Y.

Suponga que existe una función $g : Y \to X$ tal que $f \circ g$ es la función identidad en Y. Sea $y \in Y$. Por definición $(f \circ g)(y) = y$. Entonces $g(y)$ es un elemento de X que satisface $f(g(y)) = y$. Por tanto f es una función sobre. **Incompleto.**

Problema 16. Demuestre que:

a) $f[\bigcup A_\lambda] = \bigcup f[A_\lambda]$.

b) $f[\bigcap A_\lambda] \subset \bigcap f[A_\lambda]$.

c) De un ejemplo donde

$$f[\bigcap A_\lambda] \neq \bigcap f[A_\lambda].$$

En lo siguiente asumiremos que $\{A_\lambda\}$ está indexada por un conjunto Λ.

a) Demostraremos primero que $f[\bigcup A_\lambda] \subset \bigcup f[A_\lambda]$. Sea $y \in f[\bigcup A_\lambda]$. Entonces existe $x \in \bigcup A_\lambda$ tal que $f(x) = y$. Luego existe $\bar{\lambda} \in \Lambda$ tal que $x \in A_{\bar{\lambda}}$. Entonces $y = f(x) \in f[A_{\bar{\lambda}}] \subset \bigcup f[A_\lambda]$. Por tanto, $f[\bigcup A_\lambda] \subset \bigcup f[A_\lambda]$. Para demostrar la segunda contención, sea $y \in \bigcup f[A_\lambda]$. Entonces existe $\bar{\lambda} \in \Lambda$ tal que $y \in f[A_{\bar{\lambda}}]$. Entonces existe $x \in A_{\bar{\lambda}}$ tal que $f(x) = y$. Como $A_{\bar{\lambda}} \subset \bigcup A_\lambda$, entonces $y = f(x) \in f[A_{\bar{\lambda}}] \subset f[\bigcup A_\lambda]$. Por tanto, $f[\bigcup A_\lambda] \supset \bigcup f[A_\lambda]$. Podemos concluir que $f[\bigcup A_\lambda] = \bigcup f[A_\lambda]$.

b) Sea $y \in f[\bigcap A_\lambda]$. Entonces existe $x \in \bigcap A_\lambda$ tal que $f(x) = y$. Entonces, para toda $\lambda \in \Lambda$, $x \in A_\lambda$. Esto implica que $y = f(x) \in f[A_\lambda]$ para todo $\lambda \in \Lambda$. Luego, $y = f(x) \in \bigcap f[A_\lambda]$. Por tanto, $f[\bigcap A_\lambda] \subset \bigcap f[A_\lambda]$.

c) Considere la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida como $f(x) = x^2$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Observe que $f[[0,\infty)] = [0,\infty) = f[(-\infty,0]]$. Entonces $[0,\infty) = f[[0,\infty)] \cap f[(-\infty,0]] \neq f[(-\infty,0] \cap [0,\infty)] = f[\{0\}] = \{0\}$.

Problema 17. Demuestre que:

a) $f^{-1}[\bigcup B_\lambda] = \bigcup f^{-1}[B_\lambda]$.

b) $f^{-1}[\bigcap B_\lambda] = \bigcap f^{-1}[B_\lambda]$.

c) $f^{-1}[B^c] = f^{-1}[B]^c$, para $B \subset Y$.

En lo siguiente asumiremos que $\{B_\lambda\}$ está indexada por un conjunto Λ.

a) Primero demostraremos que $f^{-1}[\bigcup B_\lambda] \subset \bigcup f^{-1}[B_\lambda]$. Sea $x \in f^{-1}[\bigcup B_\lambda]$. Entonces $f(x) \in \bigcup B_\lambda$. Luego, existe un $\bar{\lambda} \in \Lambda$ tal que $f(x) \in B_{\bar{\lambda}}$. Entonces $x \in f^{-1}[B_{\bar{\lambda}}] \subset \bigcup f^{-1}[B_\lambda]$. Por tanto, $f^{-1}[\bigcup B_\lambda] \subset \bigcup f^{-1}[B_\lambda]$.

Ahora bien, sea $x \in \bigcup f^{-1}[B_\lambda]$. Entonces existe $\bar{\lambda} \in \Lambda$ tal que $x \in f^{-1}[B_{\bar{\lambda}}]$. Esto implica que $f(x) \in B_{\bar{\lambda}} \subset \bigcup B_\lambda$. Lo cual implica que $x \in f^{-1}[\bigcup B_\lambda]$. Por tanto, $f^{-1}[\bigcup B_\lambda] \supset \bigcup f^{-1}[B_\lambda]$.

Se concluye que $f^{-1}[\bigcup B_\lambda] = \bigcup f^{-1}[B_\lambda]$.

b) Sea $x \in f^{-1}[\bigcap B_\lambda]$. Entonces $f(x) \in \bigcap B_\lambda$; esto es, $f(x) \in B_\lambda$, para todo $\lambda \in \Lambda$. Luego, $x \in f^{-1}[B_\lambda]$ para todo $\lambda \in \Lambda$. Lo cual, implica que $x \in \bigcap f^{-1}[B_\lambda]$. Por tanto, $f^{-1}[\bigcap B_\lambda] \subset \bigcap f^{-1}[B_\lambda]$.

Para la segunda contención, sea $x \in \bigcap f^{-1}[B_\lambda]$. Entonces, $x \in f^{-1}[B_\lambda]$, para todo $\lambda \in \Lambda$. Esto implica que $f(x) \in B_\lambda$ para todo $\lambda \in \Lambda$; es decir, $f(x) \in \bigcap B_\lambda$. Se sigue que $x \in f^{-1}[\bigcap B_\lambda]$. Por tanto, $f^{-1}[\bigcap B_\lambda] \supset \bigcap f^{-1}[B_\lambda]$.

Concluimos que $f^{-1}[\bigcap B_\lambda] = \bigcap f^{-1}[B_\lambda]$.

c) Sea $x \in f^{-1}[B^c]$. Entonces $f(x) \in B^c$; es decir, $f(x)$ no pertence a B. Luego, x no pertenece a $f^{-1}[B]$. Entonces $f(x) \in f^{-1}[B]^c$. Por tanto, $f^{-1}[B^c] \subset f^{-1}[B]^c$.

Sea $x \in f^{-1}[B]^c$. Entonces x no pertenece a $f^{-1}[B]$. Luego, $f(x)$ no es elemento de B; es decir, $f(x) \in B^c$. Esto implica que $x \in f^{-1}[B]$. Por tanto, $f^{-1}[B^c] \supset f^{-1}[B]^c$.

Por lo anterior, podemos concluir que $f^{-1}[B^c] = f^{-1}[B]^c$.

Problema 18. Demuestre que si f mapea X en Y y $A \subset X$, $B \subset Y$, entonces:

a) $f[f^{-1}[B]] \subset B$ y $f^{-1}[f[A]] \supset A$.

b) De ejemplos que muestre que no se cumple la igualdad de conjuntos.

c) Demuestre que si f mapea X sobre Y y $B \subset Y$, entonces

$$f[f^{-1}[B]] = B.$$

a) Sea $y \in f[f^{-1}[B]]$. Entonces existe $x \in f^{-1}[B]$ tal que $f(x) = y$. Como $x \in f^{-1}[B]$, entonces $f(x) = y \in B$. Por tanto $f[f^{-1}[B]] \subset B$.

Ahora, sea $x \in A$. Entonces $f(x) \in f[A]$. Luego, $x \in f^{-1}[f[A]]$. Por tanto $f^{-1}[f[A]] \supset A$.

b) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida como $f(x) = x^2$ para toda $x \in \mathbb{R}$. Observe que, si $B = [-1, \infty)$, entonces $f[f^{-1}[B]] = f(\mathbb{R}) = [0, \infty) \neq B$.

Por otro lado, si $A = B$, entonces $f^{-1}[f[A]] = f^{-1}[[0, \infty)] = \mathbb{R} \neq A$.

c) Suponga que f es sobre. Sea $y \in B$. Entonces existe $x \in X$ tal que $f(x) = y$. Luego $x \in f^{-1}[B]$. Esto implica que $y = f(x) \in f[f^{-1}[B]]$. Por tanto $f[f^{-1}[B]] \supset B$. Con lo anterior y con el inciso a), se concluye que $f[f^{-1}[B]] = B$.

Problema 20. Sea $f : X \to Y$ una función sobre. Entonces existe una función $g : Y \to X$ tal que $f \circ g$ es la función identidad en Y.

Sea C el conjunto definido como

$$C = \{A \subset X : \text{existe } y \in Y \text{ tal que } A = f^{-1}[\{y\}]\}.$$

Por el axioma de elección, existe una función $F : C \to \bigcup_{A \in C} A$ que asigna a cada elemento $A \in C$ un elemento $F(A) \in A$. Como f es sobre, $f^{-1}[\{y\}] \neq \emptyset$, para todo $y \in Y$. Luego $f^{-1}[\{y\}] \in C$ para todo $y \in Y$. Entonces podemos definir $g : Y \to X$ como $g(y) = F(f^{-1}[\{y\}])$, para todo $y \in Y$. Si $y \in Y$, entonces $(f \circ g)(y) = f(g(y)) = f(F(f^{-1}[\{y\}])) = y$, ya que $F(f^{-1}[\{y\}]) \in f^{-1}[\{y\}]$. Por tanto, $f \circ g$ es la función identidad en Y.

Problema 22. Demuestre la Proposición 6 utilizando las Proposiciones 4 y 5.

Sea f una función definida como sigue:

$$\begin{aligned}(p,q,1) &\longmapsto \frac{p}{q}\\ (p,q,2) &\longmapsto \frac{-p}{q}\\ (1,1,3) &\longmapsto 0\end{aligned}$$

donde p, q son números naturales. Esta es una función definida en un subconjunto del conjunto de todas las suceciones finitas de $\mathbb{N}$ y rango igual a $\mathbb{Q}$. Como $\mathbb{N}$ es numerable, por la Proposición 5, el conjunto de todas las suceciones finitas de $\mathbb{N}$ es numerable. Por la Proposición 4, el dominio de f es numerable. Luego, $\mathbb{Q}$ se puede poner en correspondencia 1 a 1 con el conjunto de los números naturales. Por tanto $\mathbb{Q}$ es numerable.

Problema 23. Demuestre que el conjunto E de sucesiones infinitas de $\{0,1\}$ es no numerable.

Suponga que E es numerable. Entonces E es el rango de una función f definida en $\mathbb{N}$. Note que, para toda $m \in \mathbb{N}$, $f(m) = (a_{mn})_{n=1}^{\infty}$ con $\{a_n\} \subset \{0,1\}$. Ahora bien, definamos la sucesión $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ como $b_n = 1 - a_{nn}$. Observe que $\{b_n\} \subset \{0,1\}$, y por tanto $(b_n)_{n=1}^{\infty} \in E$. Pero $(b_n)_{n=1}^{\infty} \neq (a_{mn})_{n=1}^{\infty} = f(m)$ para toda $m \in \mathbb{N}$. Es decir, encontramos un elemento de E que no está en el rango de f, lo cual es una contradicción. Por tanto, la suposición de que E es numerable es falsa.

Problema 29. De un ejemplo de un conjunto parcialmente ordenado que tiene un elemento mínimo único pero que no tiene primer elemento.

Ejemplo. Sea $E = \{(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) : n \in \mathbb{N}\} \cup \{\{2\}, \{2,3\}\}$. Consideremos el orden parcial $\subset$ usual de conjuntos. Observe que el elemento $\{2\}$ es minimal en E y es único. Sin embargo, el conjunto E no tiene primer elemento.