Problema 1. Si A y B son dos conjuntos en $\mathcal{M}$ con $A \subset B$, entonces $mA \leq mB$.

Demostración. Como $A \subset B$, entonces $B = (B \setminus A) \cup (A \cap B) = (B \setminus A) \cup A$. Los conjuntos $(B \setminus A)$ y A son disjuntos y pertenecen a $\mathcal{M}$. Luego, $mB = m(B \setminus A) + mA$, que implica que $mB \geq mA$. □

Problema 2. Sea (E_n) una sucesión de conjuntos en $\mathcal{M}$. Entonces $m(\bigcup E_n) \leq \sum mE_n$.

Demostración. Por la **Proposición** 1, existe una sucesión (A_n) de conjuntos de $\mathcal{M}$ tales que $A_m \cap A_n = \emptyset$ para $n \neq m$; $A_n \subset E_n$ para toda $n \in \mathbb{N}$ y

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Por el **Problema 1**, $A_n \subset E_n$ implica que $0 \leq mA_n \leq mE_n$, por lo que $\sum mA_n \leq \sum E_n$. Luego,

$$\begin{aligned} m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) &= m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} E_n. \end{aligned}$$

□

Problema 3. Si existe un conjunto A in $\mathcal{M}$ tal que $mA < \infty$, entonces $m\emptyset = 0$.

Demostración. Como $\emptyset \subset A$, por el **Problema 1**, $m\emptyset \leq mA < \infty$. Suponga que $m\emptyset > 0$. Entonces existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $k(m\emptyset) > mA$. Luego, $m\emptyset = m(\bigcup_{n=1}^{k} \emptyset) = k(m\emptyset) > mA$, lo cual es una contradicción. Por tanto $m\emptyset = 0$.

□

Problema 4. Sea nE igual a ∞, si E es un conjunto infinito; y sea nE el número de elementos de E, si E es finito. Demuestre que n es una función aditiva numerable, invariante bajo traslaciones y está definida para todo conjunto de números reales.

Demostración. **Pendiente.** Como todo subconjunto de $\mathbb{R}$ es finito o infinito, n es una función definida para todo subconjunto de $\mathbb{R}$. Sea $y \in \mathbb{R}$ y sea $A \subset \mathbb{R}$. Si A es infinito, entonces $A + y$ es infinito y por tanto $nA = n(A + y)$. Si A es finito, digamos con k elementos, entonces existe una correspondencia biyectiva entre $\{1, \ldots, k\}$ y el conjunto A. Para todo $a \in A$, el mapeo $a \mapsto a + y$, establece una correspondencia biyectiva entre el conjunto A y $A + y$. Por tanto, existe una correspondencia biyectiva entre el conjunto $\{1, \ldots, k\}$ y el conjunto $A + y$, es decir, $A + y$ tiene k elementos. Por tanto, $nA = n(A + y)$. Finalmente, sea (E_n) una sucesión disjunta de subconjuntos de $\mathbb{R}$. Si algún elemento de la sucesión es infinito, entonces $n(\bigcup E_n) = \sum nE_n = \infty$., ...

□

Problema 5. Sea A el conjunto de números racionales entre 0 y 1, y sea $\{I_n\}$ una colección finita de intervalos abiertos que cubren a A. Entonces $\sum l(I_n) \geq 1$.

Demostración. Como $\mathbb{Q} \subset \bigcup_{n=1}^{k} I_n$ y $\mathbb{Q}$ es denso en $[0,1]$, entonces $[0,1] = \overline{\mathbb{Q} \cap [0,1]} \subset \overline{\bigcup_{n=1}^{k} I_n} = \bigcup_{n=1}^{k} \overline{I_n}$ †. Además, como $l(I_n) = l(\overline{I_n})$, entonces $1 = l([0,1]) \leq m^*(\bigcup_{n=1}^{k} \overline{I_n}) \leq \sum_{n=1}^{k} l(\overline{I_n}) = \sum_{n=1}^{k} l(I_n)$.

□

Problema 6. Demuestre la Proposición 5.

Demostración. **PENDIENTE** Sea $\epsilon > 0$ y $A \subset \mathbb{R}$. Si $m^*A = \infty$, entonces $\mathbb{R}$ es un abierto que contiene a A y $m^*\mathbb{R} = \infty \leq m^*A + \epsilon = \infty + \epsilon$. Suponga que $m^*A < \infty$. Entonces existe una colección de intervalos abiertos $\{I_n\}$ que cubren a A y $\sum l(I_n) < m^*A + \epsilon$. Sea $O = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$. Entonces O es un abierto que contiene a A y $m^*O \leq \sum_{n=1}^{\infty} l(I_n) < m^*A + \epsilon$.

□

Problema 7. Demuestre que m^* es invariante a traslaciones.

Demostración. Sea $y \in \mathbb{R}$ y sea $I = (a,b)$ un intervalo abierto y acotado. Note que, $I + y = (a+y, b+y)$. Por lo que $l(I+y) = (b+y) - (a+y) = b - a$. Por tanto, I e $I + y$ tienen la misma longitud. Si I es no acotado, $I + y$ es no acotado y por tanto I e $I + y$ tienen longitud infinita.

Sea A un subconjunto de $\mathbb{R}$ y sea $\{I_n\}$ una colección de intervalos abiertos que cubren a A. Entonces $\{I_n + y\}$ es una colección de intervalos abiertos que cubren a $A + y$. Se tiene que $\sum I_n = \sum(I_n + y)$. Luego $m^*(A+y) \leq m^*A$.

Sea ahora $\{I_n\}$ una colección de intervalos abiertos que cubren a $A + y$. Entonces $\{I_n - y\}$ es una colección de intervalos abiertos que cubren a A. Como $\sum I_n = \sum(I_n - y)$, entonces $m^*A \leq m^*(A+y)$.

□

Problema 8. Demuestre que si $m^*A = 0$, entonces $m^*(A \cup B) = m^*B$.

Demostración. Claramente, $m^*B \leq m^*(A \cup B)$. Por otro lado, $m^*(A \cup B) \leq m^*A + m^*B = m^*B$. Por tanto, $m^*(A \cup B) = m^*B$.

□

Problema 9. Demuestre que si E es un conjunto medible, entonces cualquier traslación $E + y$ es también medible.

Demostración. Sea $A \subset \mathbb{R}$ y sea $y \in \mathbb{R}$. Como E es medible, entonces $m^*A = m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^c)$. Por el problema

□

Problema 10. Demuestre que si E_1 y E_2 son medibles, entonces $m(E_1 \cup E_2) + m(E_1 \cap E_2) = mE_1 + mE_2$.

†Aquí es importante señalar que esto sólo es válido si la unión es finita.

Demostración. Si alguno de los conjuntos E_1, E_2 tiene medida infinita, entonces la igualdad se cumple. Por tanto suponga que $mE_1 < \infty$ y $mE_2 < \infty$. Como $E_1 = (E_1 \cap E_2^c) \cup (E_1 \cap E_2)$, $E_2 = (E_1^c \cap E_2) \cup (E_1 \cap E_2)$ y $E_1 \cup E_2 = (E_1^c \cap E_2) \cup (E_1 \cap E_2^c) \cup (E_1 \cap E_2)$ ‡, entonces $mE_1 = m(E_1 \cap E_2^c) + m(E_1 \cap E_2)$, $mE_2 = m(E_1^c \cap E_2) + m(E_1 \cap E_2)$ y $m(E_1 \cup E_2) = m(E_1 \cap E_2^c) + m(E_1^c \cap E_2) + m(E_1 \cap E_2)$. Luego,

$$\begin{aligned} m(E_1 \cup E_2) &= m(E_1 \cap E_2^c) + m(E_1^c \cap E_2) + m(E_1 \cap E_2) \\ &= [m(E_1 \cap E_2^c) + m(E_1 \cap E_2)] + [m(E_1^c \cap E_2) + m(E_1 \cap E_2)] - m(E_1 \cap E_2) \\ &= mE_1 + mE_2 - m(E_1 \cap E_2), \end{aligned}$$

que es el resultado deseado.

□

Problema 11. Muestre que la condición $mE_1 < \infty$ es necesaria en la Proposición 14 dando un ejemplo de una sucesión decreciente (E_n) de conjuntos medibles tales que $\emptyset = \bigcap E_n$ y $mE_n = \infty$ para toda n.

Demostración. Sea $E_n = [n, \infty)$ para $n \in \mathbb{N}$. E_n es medible, $E_{n+1} \subset E_n$ y $mE_n = \infty$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Se comprueba que $\bigcap E_n = \emptyset$, por lo que $m(\bigcap E_n) = 0$. Pero $\lim_{n\to\infty} mE_n = \infty$.

□

Problema 12. Sea (E_n) una sucesión disjunta de conjuntos medibles y sea A un conjunto. Entonces

$$m^*\left(A \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} m^*(A \cap E_n).$$

Problema 13.

Problema 14.

a. Demuestre que el conjunto de Cantor tiene medida cero.

b. Sea F un subconjunto de $[0,1]$ construido de la misma manera que el conjunto de Cantor, excepto que cada intervalo removido en el $n-$ésimo paso tiene longitud $\alpha 3^{-n}$ con $0 < \alpha < 1$. Entonces F es cerrado, F^c es denso en $[0,1]$ y $mF = 1 - \alpha$.

Problema 15. Demuestre que si E es medible y $E \subset P$, entonces $mE = 0$.

Problema 16. Demuestre que, si A es cualquier conjunto con $m^*A > 0$, entonces existe un conjunto no medible $E \subset A$.

Problema 17.

a. De un ejemplo donde (E_n) es una sucesión disjunta de conjuntos y $m^*(\bigcup E_n) < \lim m^* E_n$.

b. De un ejemplo de una sucesión de conjuntos (E_n) con $E_n \supset E_{n+1}$, $m^*E_n < \infty$, y $m^*(\bigcap E_n) < \lim m^* E_n$.

‡Todas estas son uniones de conjuntos disjuntos.

Proposición 1. *Sea $\mathcal{A}$ una álgebra de conjuntos y sea (A_n) una sucesión de conjuntos de $\mathcal{A}$. Entonces existe una sucesión (B_n) de conjuntos de $\mathcal{A}$ tal que $B_n \cap B_m = \emptyset$ para $n \neq m$ y*

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n.$$