Selección Dependiente Aleatoria

Luis Felipe González Rivas

April 17, 2025

Contents

Capítulo 1

Introducción

Capítulo 2

El Método Probabilístico

2.1. Gráficas Aleatorias

2.2. El método básico

2.3. La linealidad del valor esperado

2.4. Selección Dependiente Aleatoria

Teorema 2.4.1. *(Lema Básico) Sean d, m, n, r, u enteros positivos. Sea G una gráfica en n vértices y grado promedio d. Si existe entero positivo t tal que*

$$\frac{d^t}{n^{t-1}} - \binom{n}{r}\left(\frac{m}{n}\right)^t \geq u$$

entonces G contiene un conjunto $U \subset V(G)$ de vértices tal que $|U| \geq u$ y tal que todo subconjunto S de U con $|S| = r$ tiene al menos m vecinos en común.

Capítulo 3

Teoría Extremal

3.1. La Subgráfica Prohibida

Dada una gráfica H, el *número de Turán* o *extremal* $ex(n, H)$, representa el número máximo de aristas de una gráfica en n vértices que no contiene a H, *subgráfica prohibida*, como subgráfica.

3.2. Teorema de Turán

Una gráfica $k-$ *partita* es aquella cuyo conjunto de vértices puede ser particionado en k subconjuntos, o *partes*, de tal manera que ninguna arista tiene como extremos a vértices de una misma parte. Una gráfica $k-$partita es *completa* si cualesquiera dos vértices en diferentes partes son adyacentes. Una gráfica completa k-partita en n vértices cuyas partes tienen tamaños que difieren a lo más en un vértice se les conoce como *gráficas de Turán* y se denotan como $T_{k,n}$.

Teorema 3.2.1. *Sea G una gráfica simple que no contiene a K_k, para $k \geq 2$. Entonces $e(G) \leq e(T_{k-1,n})$, con igualdad si y solo si $G \simeq T_{k-1,n}$.*

Demostración. Procederemos por inducción sobre k. El teorema se satisface trivialmente para $k = 2$. Suponga que se satisface para cualquier entero menor que k, y sea G una gráfica simple que no contiene a K_k. Seleccione un vértice v con grado máximo Λ en G. Haga $A = N(v)$ y $B = V \setminus A$. Entonces

$$e(G) = e(A) + e(A, B) + e(B).$$

Dado que G no contiene a ningún K_k, la gráfica inducida $G[A]$ no contiene a K_{k-1}. Por tanto, por inducción,

$$e(A) \leq e(T_{k-2,\Lambda}),$$

con igualdad si y solo si $G[A] \simeq T_{k-2,\Lambda}$. Además, dado que toda arista de G incidente a un vértice de B pertence a $E[A, B]$ o $E(B)$,

$$e(A, B) + e(B) \leq \Lambda(n - \Lambda),$$

con igualdad si y solo si B es un conjunto independiente y cuyos miembros tienen grado Λ. Luego, $e(G) \leq e(H)$, donde H es una gráfica obtenida de una copia de $T_{k-2,\Lambda}$ y añadiendo una copia de un conjunto independiente de $n - \Lambda$ vértices y uniendo cada uno de estos vértices con cada vértice de $T_{k-2,\Lambda}$. Observe que H es una gráfica completa $(k-1)$-partita en n vértices. Entonces $e(H) \leq e(T_{k-1,n})$ con igualdad si y solo si $H \simeq T_{k-1,n}$. Se sigue que $e(G) \leq e(T_{k-1,n})$, con igualdad si y solo si $G \simeq T_{k-1,n}$. □

3.3. Teorema de Erdős-Stone

3.4. Números de Ramsey

Un *clique* de una gráfica es un conjunto de vértices todos de ellos adyacentes.

Capítulo 4

Aplicaciones del Selección Dependiente Aleatoria

4.1. Números de Turán para Gráficas Bipartitas

Teorema 4.1.1. *Si $H = (A \cup B, F)$ es una gráfica bipartita en la que todos los vértices de B tienen grado a lo más r, entonces $ex(n, H) \leq cn^{2-1/r}$, donde $c = c(H)$ es una constante que solo depende de H.*

Demostración. Sean $|A| = a$, $|B| = b$, $m = a + b$, $t = r$ y $c = \text{máx}(a^{1/r}, \frac{3(a+b)}{r})$. Sea G una gráfica con $e(G) > 2cn^{2-1/r}$. De manera que $d = 2e(G)/n > 2cn^{1-1/r}$. Entonces

$$
\begin{aligned}
\frac{d^t}{n^{t-1}} - \binom{n}{r}\left(\frac{m}{n}\right)^t &= \frac{(2cn^{1-1/r})^r}{n^{r-1}} - \binom{n}{r}\left(\frac{a+b}{n}\right)^r \\
&\geq (2c)^r - \frac{n^r}{r!}\left((\frac{a+b}{n}\right)^r \\
&\geq (2c)^r - \left(\frac{e(a+b)}{r}\right)^r \\
&\geq c^r \geq a
\end{aligned}
$$

Por tanto, el Teorema 2.4.1 establece que existe un subconjunto U de $V(G)$ tal que $|U| = a$ y en el que todos sus subconjuntos de tamaño r tienen al menos $a + b$ vecinos en común.

Sea $f : A \to U$ una función inyectiva cualquiera. Demostraremos que f se puede extender a B de tal manera que esta extensión es un encaje de H en G. Etiquete los vértices de B como $v_1, \ldots, v_b$. Suponga que el vértice por encajar es $v_i \in B$. Sea $N_i \subset A$ la vecindad de v_i en H; por lo que $|N_i| \leq r$. Dado que $f(N_i)$ es un subconjunto de U de cardinalidad a lo más r, existen al menos $a + b$ vértices adyacentes a todos los vértices en $f(N_i)$. Como el total de vértices por encajar es $a + b$, existe un vértice $v \in V(G)$ que no se ha usado en el encaje y que es adyacente a $f(N_i)$ en G. Haga $f(v_i) = v$. Se observa que este procedimiento puede continuar hasta terminar de definir $f(v_i)$ para todo $i = 1, \ldots, b$. Por tanto f es un encaje de H en G. □

4.2. Números de Ramsey para Cubos

Para una gráfica H, el *número de Ramsey* $r(H)$, es el mínimo entero positivo N tal que cualquier *2-coloración* de las aristas de la gráfica completa en N vértices contiene una copia monocrómatica de H.

Teorema 4.2.1. $r(Q_r) \leq 2^{3r}$.

Demostración. En cualquier 2-coloración de las aristas de una gráfica comleta en $N = 2^{3r}$ vértices, el conjunto más denso entre los dos colores tiene al menos $\frac{1}{2}\binom{N}{2} \geq 2^{-7/3}N^2$ aristas. Sea G la gráfica del color más denso.

De manera que el grado promedio d de G es al menos $2^{-4/3}N$. Aplicando el Teorema 2.4.1 con $t = \frac{3}{2}r$, $m = 2^r$ y $a = 2^{r-1}$. Tenemos que

$$\frac{d^t}{N^{t-1}} - \binom{N}{r}\left(\frac{m}{N}\right)^t \geq$$

$\square$

4.3. Un Problema del tipo Turán-Ramsey para Gráficas libres de K_4

Capítulo 5

Comparación de Selección Dependiente Aleatoria con otros Métodos

5.1. Gráficas Bipartitas