Selección Dependiente Aleatoria

Luis Felipe González Rivas

April 19, 2025

1. Preliminares

Una gráfica G es una pareja ordenada $(V(G), E(G))$, donde $V(G)$ es un conjunto de *vértices*, $E(G)$ es un conjunto de *aristas* disjunto de $V(G)$ y una *función de incidencia* ψ_G que asocia a una arista de G una pareja de vértices (no necesariamente distintos) de G.

Si e es una arista y u y v son vértices tal que $\psi_G(e) = \{u, v\}$, entonces se dice que e *une* a los vértices u y v, y a estos vértices se les conoce como *extremos* de e.

El grado de un vértice v, denotado como $d(v)$, es el número de aristas en G que inciden en v.

Teorema 1.1 (del saludo)**.** *Para cualquier gráfica G con m aristas se tiene que*

$$\sum_{v \in V(G)} d(v) = 2m.$$

El *grado promedio* $\bar{d}$ de una gráfica G en n vértices es $\sum_{v \in V(G)} d(v)/n$. Así pues, el Teorema anterior implica que

Corolario 1.2. *Para cualquier gráfica G, se tiene que $\bar{d} = 2e(G)/n$.*

Una gráfica es *bipartita* si sus vértices pueden ser divididos en dos subconjuntos disjuntos A y B, llamados *partes*, de tal manera que todas las aristas de G tienen un extremo en A y el otro en B. Frecuentemente, denotaremos a una gráfica bipartia H con partes A y B como $G[A, B]$. Si todo vértice de A es adyacente a todo vértice de B, entonces diremos que G es una gráfica *biparita completa*. Si la cardinalidad de A es s y la de B es t, denotaremos a la gráfica bipartita completa como $K_{s,t}$.

2. El Método Probabilístico

El *método probabilista* es una técnica importante en combinatoria. Con frecuencia, deseamos probar la existencia de ciertra propiedad u objeto. Para ello, el método probabilista construye de manera aleatoria este objeto con probabilidad mayor que cero.

Teorema 2.1. *Toda gráfica con m vértices contiene una gráfica bipartita con $m/2$ aristas.*

Demostración. Sea $G = (V, E)$ una gráfica. Asigne un color, blanco o negro, a cada vértice de G de manera uniforme e independiente.

Sea E' el conjunto de aristas con un extremo negro y otro blanco. La gráfica $H = (V, E')$ es una subgráfica bipartita de G. Toda arista de G pertenece a E' con probabilidad $1/2$. Por linealidad del valor esperado, el tamaño esperado de E' es

$$\mathbb{E}[|E'|] = \frac{1}{2}|E|.$$

Entonces existe una coloración de tal manera que $|E'| \geq \frac{1}{2}|E|$. La gráfica $H = (V, E')$ es la subgráfica deseada. $\square$

3. La linealidad del valor esperado

Sean $X_1, \ldots, X_n$ variables aleatorias y sean $X = c1X_1 + \ldots + c_nX_n$, donde c_i son números reales. La *linealidad del valor esperado* establece que

$$\mathbb{E}[X] = c_1\mathbb{E}[X_1] + \ldots + c_n\mathbb{E}[X_n].$$

7. Selección Dependiente Aleatoria

Para un vértice v en una gráfica G, sea $N(v)$ el conjunto de vecinos de v en G. Dado un subconjunto de vértices $U \subset V(G)$, la *vecindad común* $N(U)$ de U en G es el conjunto de todos los vértices en G que son adyacentes a todo vértice de U. Un $d-$conjunto es un conjunto de cardinalidad d. Para A conjunto, denotaremos a $\binom{A}{d}$ como la familia de $d-$subconjuntos de A.

Teorema 7.1. *Sea t un entero positivo. Sea G una gráfica en n vértices con grado promedio $d = \epsilon n$. Entonces G continee un conjunto de t vértices cuya vecindad tiene al menos $\epsilon^t n - \binom{t}{2}$ vecinos en común.*

Demostración. Sean $v_1, \ldots, v_t$ vértices seleccionados uniformemente en $V(G)$ y sea $T = \{v_1, \ldots, v_t\}$. Para un vértice u, la probabilidad que u es una vecino en común de T es $\left(\frac{d(v)}{n}\right)^t$. Por tanto, si $A = N(T)$, se tiene que

$$\begin{aligned} E[|A|] &= \sum_{v \in V(G)} Pr(v \in A) \\ &= \sum_{v \in V(G)} \left(\frac{d(v)}{n}\right)^t \\ &\geq n \left(\frac{d}{n}\right)^t \\ &= \epsilon^t n, \end{aligned}$$

donde la desigualdad se sigue de la convexidad de la función $z \mapsto z^t$. Por tanto, existe una elección del conjunto T con al menos $\epsilon^t n$.

Note que es posible que en la elección de T existan vértices repetidos, esto es, $|T| < t$. Note que $Pr(v_i = v_j) = 1/n$, entonces $Pr(|T| < t) \leq \binom{t}{2}/n$. Dado que todo vértices v satisface que $d(v) < n$, entonces

$$\begin{aligned} \epsilon^t n &\leq E[|A|] \\ &= E[|A|||T| = t]Pr(|T| = t) + E[|A|||T| < t]Pr(|T| < t) \\ &\leq E[|A|||T| = t] + \binom{t}{2} \end{aligned}$$

$\square$

Teorema 7.2. *(Lema Básico) Sean d, m, n, r, u enteros positivos. Sea G una gráfica en n vértices y grado promedio d. Si existe entero positivo t tal que*

$$\frac{d^t}{n^{t-1}} - \binom{n}{r}\left(\frac{m}{n}\right)^t \geq u$$

entonces G contiene un conjunto $U \subset V(G)$ de vértices tal que $|U| \geq u$ y tal que todo subconjunto S de U con $|S| = r$ tiene al menos m vecinos en común.

Demostración. Seleccione t vértices $v_1, \ldots, v_t$ elegidos uniformemente con repetición y defina $T = \{v_1, \ldots, v_t\}$. Sea $A = N(T)$, la vecindad de T en G. ¿Cuál es la cardinalidad de A? Por linealidad del valor esperado, se tiene que

$$\begin{aligned} E[|A|] &= \sum_{v\in V(G)} Pr(v\in A) \\ &= \sum_{v\in V(G)} \left(\frac{|N(v)|}{n}\right)^t \\ &= n^{-t}\sum_{v\in V(G)} |N(v)|^t \\ &\geq n^{1-t}\left(\frac{\sum_{v\in V(G)}|N(v)|}{n}\right)^t \\ &= \frac{d^t}{n^{t-1}}, \end{aligned}$$

donde la desigualdad se debe a la convexidad de la función $z \mapsto z^t$.

Sea Y la variable aleatoria que cuenta el número de conjuntos S en $\binom{A}{r}$ que tienen menos de m vecinos en común. Note que la probabilidad de que un $r-$conjunto de vértices cualquiera sea subconjunto de A es $\left(\frac{|N(S)|}{n}\right)^t$. A lo más existen $\binom{n}{r}$ subconjuntos $r-$subconjuntos con $|N(S)| < m$. Luego,

$$E[Y] < \binom{n}{r}\left(\frac{m}{n}\right)^t.$$

Por linealidad del valor esperado,

$$E[X-Y] \geq \frac{d^t}{n^{t-1}} - \binom{n}{r}\left(\frac{m}{n}\right)^t \geq u.$$

Por tanto existe una elección de T en el cual el conjunto $A = N(T)$ satisface que $X - Y \geq u$. Sea U el conjunto resultante al borrar un vértice de cada r-subconjunto S de A que tenga menos de m vecinos en común. Entonces $|U| \geq u$ y todos los $r-$subconjuntos de U tienen al menos m vecinos en común. □

Teorema 7.3. *Si $\epsilon > 0$ y $d \leq n$ son enteros positivos, y $G = (V, E)$ es una gráfica con $N > 4d\epsilon^{-d}n$ vértices y al menos $\epsilon N^2/2$ aristas, entonces existe un subconjunto U de vértices de G con $|U| > 2n$ tal que la fracción de $d-$conjuntos $S \subset U$ con $|N(S) < n$ es menor que $(2d)^{-d}$.*

8. La Subgráfica Prohibida

Dada una gráfica H, el *número de Turán* o *extremal* $ex(n, H)$, representa el número máximo de aristas de una gráfica en n vértices que no contiene a H, *subgráfica prohibida*, como subgráfica.

9. Teorema de Turán

Una gráfica $k-$ *partita* es aquella cuyo conjunto de vértices puede ser particionado en k subconjuntos, o *partes*, de tal manera que ninguna arista tiene como extremos a vértices de una misma parte. Una gráfica $k-$partita es *completa* si cualesquiera dos vértices en diferentes partes son adyacentes. Una gráfica completa k-partita en n vértices cuyas partes tienen tamaños que difieren a lo más en un vértice se les conoce como *gráficas de Turán* y se denotan como $T_{k,n}$.

Teorema 9.1. *Sea G una gráfica que no contiene a K_k, para $k \geq 2$. Entonces $e(G) \leq e(T_{k-1,n})$, con igualdad si y solo si $G \simeq T_{k-1,n}$.*

Demostración. Procederemos por inducción sobre k. El teorema se satisface trivialmente para $k = 2$. Suponga que se satisface para cualquier entero menor que k, y sea G una gráfica simple que no contiene a K_k. Seleccione un vértice v con grado máximo Δ en G. Haga $A = N(v)$ y $B = V \setminus A$. Entonces

$$e(G) = e(A) + e(A, B) + e(B).$$

Dado que G no contiene a ningún K_k, la gráfica inducida $G[A]$ no contiene a K_{k-1}. Por tanto, por inducción,

$$e(A) \leq e(T_{k-2,\Delta}),$$

con igualdad si y solo si $G[A] \simeq T_{k-2,\Delta}$. Además, dado que toda arista de G incidente a un vértice de B pertence a $E[A, B]$ o $E(B)$,

$$e(A, B) + e(B) \leq \Delta(n - \Delta),$$

con igualdad si y solo si B es un conjunto independiente y cuyos miembros tienen grado Δ. Luego, $e(G) \leq e(H)$, donde H es una gráfica obtenida de una copia de $T_{k-2,\Delta}$ y añadiendo una copia de un conjunto independiente de $n - \Delta$ vértices y uniendo cada uno de estos vértices con cada vértice de $T_{k-2,\Delta}$. Observe que H es una gráfica completa $(k-1)$-partita en n vértices. Entonces $e(H) \leq e(T_{k-1,n})$ con igualdad si y solo si $H \simeq T_{k-1,n}$. Se sigue que $e(G) \leq e(T_{k-1,n})$, con igualdad si y solo si $G \simeq T_{k-1,n}$. $\square$

Sea G una gráfica. Recuerde que un conjunto independiente S de vértices en G es aquel en el que ninguna arista en G tiene como extremos dos vértices en S. De manera complementaria, un clique C en G es un conjunto de vértices en G en el cual cualquier par de vértices es adyacente. Es decir, un clique C con $|C| = k$ induce una gráfica isomorfa a K_k, $G[C] \equiv K_k$. Por tanto el Teorema de Turán puede reescribirse como *toda gráfica G en n vértices y con más de $e(T_{k-1,n})$ aristas contiene un clique de orden k.*

Los conjuntos independientes y los cliques están relacionados de la siguiente manera. Para una gráfica G, sea $\alpha(G)$ la cardinalidad del conjunto independiente de vértices más grande en G. Y sea $\omega(G)$ la cardinaliad del clique más grande en G. Entonces

$$\omega(G) = \alpha(\bar{G}),$$

donde $\bar{G}$ es la gráfica complemento de G. Por tanto, toda proposición cierta para cliques puede reescribirse en términos de conjuntos independientes. Tal es el caso del Teorema de Turán. El siguiente resultado fue demostrado por Caro [**?**] y Wei

Teorema 9.2. *(Caro y Wei) Sea $G = (V, E)$ una gráfica. Entonces*

$$\alpha(G) \geq \sum_{v \in V} \frac{1}{d(v) + 1}.$$

Demostración. Sea $<$ una orden total de V elegido uniformemente. Defina

$$I = \{v \in V : vw \in E \Rightarrow v < w\}.$$

Sea X_v la variable aleatoria indicadora para $v \in I$ y $X = \sum_{v \in V} X_v = |I|$. Para cada v,

$$E[X_v] = Pr[v \in I] = \frac{1}{d(v) + 1},$$

dado que $v \in I$ si y solo si v es el elemento menor entre v y sus vecinos. Luego

$$E[X] = \sum_{v \in V} \frac{1}{d(v) + 1}.$$

Por tanto existe un orden total $<$ con

$$|I| \geq \sum_{v \in V} \frac{1}{d(v) + 1}.$$

Pero si $x, y \in I$ y $xy \in E$ entonces $x < y$ y $y < x$, una contradicción. Por tanto I es un conjunto independiente y $\alpha(G) \geq |I|$. $\square$

Teorema 9.3. *(Turán) Sea G una gráfica en n vértices y $e(G) \leq e(T_{k-1,n})$ aristas. Entonces $\alpha(G) \geq k$ con $\alpha(G) = k$ si y solo si $G \equiv T_{k-1,n}$.*

Demostración. La gráfica $T_{k-1,n}$ tiene $\sum_{v \in V}(d(v) + 1)^{-1} =$ $\square$

10. Teorema de Erdős-Stone

11. Números de Ramsey

Un *clique* de una gráfica es un conjunto de vértices todos de ellos adyacentes.

12. Números de Turán para Gráficas Bipartitas

Teorema 12.1. *Si $H = (A \cup B, F)$ es una gráfica bipartita en la que todos los vértices de B tienen grado a lo más r, entonces $ex(n, H) \leq cn^{2-1/r}$, donde $c = c(H)$ es una constante que solo depende de H.*

Demostración. Sean $|A| = a$, $|B| = b$, $m = a + b$, $t = r$ y $c = \text{máx}(a^{1/r}, \frac{3(a+b)}{r})$. Sea G una gráfica con $e(G) > 2cn^{2-1/r}$. De manera que $d = 2e(G)/n > 2cn^{1-1/r}$. Entonces

$$\begin{aligned}
\frac{d^t}{n^{t-1}} - \binom{n}{r}\left(\frac{m}{n}\right)^t &= \frac{(2cn^{1-1/r})^r}{n^{r-1}} - \binom{n}{r}\left(\frac{a+b}{n}\right)^r \\
&\geq (2c)^r - \frac{n^r}{r!}\left((\frac{a+b}{n}\right)^r \\
&\geq (2c)^r - \left(\frac{e(a+b)}{r}\right)^r \\
&\geq c^r \geq a
\end{aligned}$$

Por tanto, el Teorema 7.2 establece que existe un subconjunto U de $V(G)$ tal que $|U| = a$ y en el que todos sus subconjuntos de tamaño r tienen al menos $a + b$ vecinos en común.

Sea $f : A \to U$ una función inyectiva cualquiera. Demostraremos que f se puede extender a B de tal manera que esta extensión es un encaje de H en G. Etiquete los vértices de B como $v_1, \ldots, v_b$. Suponga que el vértice por encajar es $v_i \in B$. Sea $N_i \subset A$ la vecindad de v_i en H; por lo que $|N_i| \leq r$. Dado que $f(N_i)$ es un subconjunto de U de cardinalidad a lo más r, existen al menos $a + b$ vértices adyacentes a todos los vértices en $f(N_i)$. Como el total de vértices por encajar es $a + b$, existe un vértice $v \in V(G)$ que no se ha usado en el encaje y que es adyacente a $f(N_i)$ en G. Haga $f(v_i) = v$. Se observa que este procedimiento puede continuar hasta terminar de definir $f(v_i)$ para todo $i = 1, \ldots, b$. Por tanto f es un encaje de H en G. □

13. Números de Ramsey para Cubos

Para una gráfica H, el *número de Ramsey* $r(H)$, es el mínimo entero positivo N tal que cualquier *2-coloración* de las aristas de la gráfica completa en N vértices contiene una copia monocrómatica de H.

Teorema 13.1. $r(Q_r) \leq 2^{3r}$.

Demostración. En cualquier 2-coloración de las aristas de una gráfica comleta en $N = 2^{3r}$ vértices, el conjunto más denso entre los dos colores tiene al menos $\frac{1}{2}\binom{N}{2} \geq 2^{-7/3}N^2$ aristas. Sea G la gráfica del color más denso. De manera que el grado promedio d de G es al menos $2^{-4/3}N$. Aplicando el Teorema 7.2 con $t = \frac{3}{2}r$, $m = 2^r$ y $a = 2^{r-1}$, tenemos que

$$\frac{d^t}{N^{t-1}} - \binom{N}{r}\left(\frac{m}{N}\right)^t \geq 2^{-4/3t}N - N^{r-t}m^t/r! \geq 2^r - 1 \geq 2^{r-1}.$$

Por tanto, existe un subconjunto U de G de tamaño 2^{r-1} en el que todo r vértices en U tiene al menos 2^r vecinos en común. Dado que Q_r es una gráfica bipartita r-regular con partes de tamaño 2^{r-1}, podemos encontrar un encaje de Q_r en G tal y como lo hicimos en el Teorema 12.1 □

14. Gráficas Bipartitas