UNIVERSIDADE FEDERAL DO MARANHÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE ELETRICIDADE

**JOSÉ ARTUR LIMA CABRAL MARQUES**

# MODELAGEM E OTIMIZAÇÃO PARA PLANEJAMENTO DE TRANSPORTE DE PASSAGEIROS COM RESTRIÇÕES DE CUSTO E QUALIDADE DE SERVIÇO

São Luís

2012

**JOSÉ ARTUR LIMA CABRAL MARQUES**

# MODELAGEM E OTIMIZAÇAO PARA PLANEJAMENTO DE TRANSPORTE DE PASSAGEIROS COM RESTRIÇÕES DE CUSTO E QUALIDADE DE SERVIÇO

Dissertação apresentada a Universidade Federal do Maranhão para obtenção do titulo de Mestre em Engenharia

São Luís

2012

**JOSÉ ARTUR LIMA CABRAL MARQUES**

# MODELAGEM E OTIMIZAÇÃO PARA PLANEJAMENTO DE TRANSPORTE DE PASSAGEIROS COM RESTRIÇÕES DE CUSTO E QUALIDADE DE SERVIÇO

Dissertação apresentada a Universidade Federal do Maranhão para obtenção do titulo de Mestre em Engenharia

Área de Concentração: Engenharia de Automação e Controle

Orientador: Prof. Dr. João Viana da Fonseca Neto

São Luís

2012

Marques, José Arthur Lima Cabral

Modelagem e otimização para planejamento de transporte de passageiros com restrições de custo e qualidade de serviço./ José Arthur Lima Cabral Marques. __São Luís: Universidade Federal do Maranhão, 2012.

86f.

Dissertação (Mestrado em Engenharia) - Universidade Federal do Maranhão.

Orientador: Prof. Dr. João Viana da Fonseca Neto

1.Transporte de Passageiros - Engenharia 2. Transporte de Passageiros - Qualidade 3. Otimização de transporte II. Título

CDU 621.315

# MODELAGEM E OTIMIZAÇÃO PARA PLANEJAMENTO DE TRANSPORTE DE PASSAGEIROS COM RESTRIÇÕES DE CUSTO E QUALIDADE DE SERVIÇO

**José Artur Lima Cabral Marques**

Dissertação aprovada em 21 de setembro de 2012.

Prof. João Viana da Fonseca Neto, Dr.
(Orientador)

Prof. Raimundo Carlos Silvério Freire, Dr.
(Membro da Banca Examinadora)

Prof. Ewaldo Eder Carvalho Santana, Dr.
(Membro da Banca Examinadora)

A todos aqueles que acreditam na educação como o verdadeiro fator de transformação da sociedade e dos homens.

# AGRADECIMENTOS

Aos meus filhos Hugo, Gabriel Arthur e Nathan, e a minha esposa Anna Valéria, razões de minha vida, pela compreensão das horas de lazer sacrificadas.

Ao meu orientador, Prof. Dr. João Vianna da Fonseca Netto, pelo estímulo sempre presente nos desafios enfrentados.

Aos meus pais, Marinice e José Maria, responsáveis pela minha formação como ser humano e profissional.

Aos amigos e colegas de trabalho da Secretaria de Transito e Transporte de São Luís, em particular a Ribamar Oliveira Filho, que me apoiaram e incentivaram nesta jornada.

Aos colegas de graduação (turma da UFMA de 1982) e mestrado que proporcionaram convivência agradável e aprendizado conjunto.

*"A engenharia é o que de mais importância se pode alcançar no mundo. Ela leva a sociedade a um nível mais elevado".*

*Steve Wozniack*

# RESUMO

Neste trabalho é apresentado um modelo de otimização derivado do problema clássico de transporte, que tem a finalidade de dar suporte ao planejamento de transporte de passageiros , com otimização global, dimensionando a frota de veículos de transporte rodoviário, qualificando as rotas possíveis entre cada origem/destino para satisfazer as restrições de custo (rentabilidade) e qualidade de serviço. Abrange métodos clássicos de solução de modelos de programação linear considerados de fluxo contínuo de redes e propõe melhorias no modelo canônico do problema de transporte a partir da perspectiva do planejamento operacional, além de analisar o uso de métodos de programação dinâmica, métodos evolutivos e heurísticos para a solução do problema de minimização.

Palavras-chave: modelo de otimização, programação linear, planejamento de transportes, transporte público, programação dinâmica.

.

# ABSTRACT

This master dissertation presents a optimization mathematical programming model derived from the classical problem of transport, which aims to scale, with global optimization, the fleet of a system of road passenger transport, describing possible routes between each source/target to meet the constraints of cost (profitability) and quality of service. It covers classic methods of solution of linear programming models considered streaming networks and proposes improvements to the canonical model of the transport problem from the perspective of transit planning, and analyze the use of dynamic programming, evolutionary methods and heuristics for solving the problem of minimization of the model.

Keywords: optimization model, linear programming, transit planning, public transportation, dynamic programming.

# LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

| | |
|---|---|
| ADP | Approximate Dynamic Programming |
| AG | Algoritmo Genético |
| HJB | Hamilton –Jacobi - Bellman |
| NPD | Neuro Dynamic Programming |
| PD | Programação Dinâmica |
| PL | Programação Linear |
| PNTC | Problema de Transbordo Não Capacitado |
| RNA | Rede Neural Artificial |
| TNDSP | Transit Network Design & Scheduling Problem |
| TNDSFP | Transit Network & Frequencies Setting Problem |
| TNSP | Transit Network Scheduling Problem |
| TNDP | Transit Network Design Problem |
| TNTP | Transit Network Timetable Problem |
| TNFSP | Transit Network Frequencies Setting Problem |

# LISTA DE FIGURAS E TABELAS

Figura 1 – Abstração do problema de transporte...............................................19
Figura 2 – Representação das variáveis características do modelo.....................19
Figura 3 – Estrutura dos problemas de redes de transporte................................23
Figura 4 – Ciclo de construção do modelo........................................................33
Figura 5 – Classificação das abordagens aproximativas...................................47
Figura 6 – Processo de decisão com vários estágios.........................................50
Figura 7 – Métodos de solução para programação dinâmica.............................50
Figura 8 – Redes de filas logísticas.................................................................52
Figura 9 – Modelo dinâmico de transporte de cargas com dois estágios............53
Figura 10 – Modelo com a configuração multi-estágios e conexão *feedforward*.........................................................................................55
Figura 11 – Sistema dinâmico com retroalimentação........................................56
Figura 12 – Topologia (grafo) do caso teste....................................................61

Tabela 1 – Processo de planejamento de um sistema de transporte....................22
Tabela 2 – Trabalhos relevantes relacionados ao tema......................................24
Tabela 3 – Resultados da simulação do caso teste 1..........................................63
Tabela 4 – Valores das variáveis de decisão do caso teste 1..............................64
Tabela 5 – Resultados da simulação do caso teste 2..........................................65
Tabela 6 – Valores das variáveis de decisão do caso teste 2..............................66
Tabela 7– Resultados da simulação do caso teste 3..........................................67
Tabela 8 – Valores das variáveis de decisão do caso teste 3..............................68

# SUMÁRIO

**1. INTRODUÇÃO ........................................................................................................15**

1.1. Dificuldades no processo de modelagem......................................................................17

1.2. Objetivos ..........................................................................................................................18

1.3. Descrição do problema do sistema de transporte ..........................................................18

1.4. Estrutura do trabalho .......................................................................................................20

**2. ESTADO DA ARTE E CARACTERIZAÇÃO DO PROBLEMA ..............................21**

2.1. O problema de determinação da frequência em sistemas de transporte (TNDSP - *Transit network frequencies setting problem)*.......................................................................................25

2.1.1. Abordagens matemáticas...............................................................................................26

2.1.2. Abordagens heurísticas..................................................................................................26

2.1.3. Outras abordagens.........................................................................................................26

2.2. O problema do projeto da rede e determinação da frequência das linhas (TNDFSP - *Transit network design and frequencies setting problem)*..........................................................27

2.2.1. Abordagens matemáticas...............................................................................................27

2.2.2. Abordagens heurísticas..................................................................................................28

2.2.3. Procedimentos de busca na vizinhança.........................................................................28

2.2.4. Algoritmos evolucionários.............................................................................................29

2.2.5. Outras abordagens.........................................................................................................29

2.3. O problema da programação da rede de transporte (TNDFSP - *Transit network scheduling problem)*...........................................................................................................................29

2.3.1. Procedimentos heurísticos.............................................................................................30

2.3.2. Algoritmos evolucuionários...........................................................................................30

2.3.3. Outros métodos..............................................................................................................30

2.3.4. Aplicativos computacionais...........................................................................................30

2.4. Caracterização do problema........................................................................................31

**3. MODELO DO SISTEMA DE TRANSPORTE DE PASSAGEIROS ........................... 33**

3.1. O problema de otimização com restrições ..........................................................................35

3.2 O problema clássico do transporte ......................................................................................35

3.3. As funções qualidade e custo do transporte de passageiros .............................................37

3.3.1. A função qualidade do transporte de passageiros .........................................................38

3.3.2. A função custo do transporte de passageiros.................................................................39

3.4. Modelo proposto de otimização de frota do sistema de transporte de passageiros .........................40

**4. MÉTODOS DE SOLUÇÃO DO MODELO PROPOSTO. ............................................ 44**

4.1. A solução do problema proposto pelo método clássico.....................................................44

4.2. Soluções com procedimentos aproximativos para programação linear inteira............. .................47

4.3 A programação dinâmica .....................................................................................................49

4.4 A programação dinâmica para o problema do transporte...................................................51

**5. VALIDAÇÃO DO MODELO ........................................................................................ 60**

5.1 Simulações com dados numéricos.........................................................................................60

5.1.1 Caso teste 1........................................................................................................................60

5.1.2 Caso teste 2 .......................................................................................................................64

5.1.3 Caso teste3.........................................................................................................................66

**6. CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS................................................................. 70**

REFERÊNCIAS ....................................................................................................................... 72

APÊNDICES ............................................................................................................................ 75

# CAPITULO 1

# INTRODUÇÃO

A oferta adequada do transporte urbano de forma a atender a demanda de passageiros tem sido um problema crucial para a maioria das áreas metropolitanas no mundo. A qualidade de vida das populações tem sido negativamente impactada pelo aumento de acidentes de trânsito, tempos excessivamente longos de deslocamentos, e consumo de recursos naturais. Tornou-se crítico determinar um procedimento efetivo e eficiente para melhorar a mobilidade, acessibilidade e qualidade ambiental, se reordenando os sistemas de transporte público de forma a adequá-los as necessidades dos habitantes dos centros urbanos (FENG *et al*, 2010).

Como afirmam Guihaire e Hao (2008):

> O planejamento do transporte público cobre uma área muito ampla de pesquisa. Do projeto de redes a programação de escala de tripulações, da análise da demanda a programação de viagens, de métodos matemáticos de solução clássicos a evolucionários, o processo de projetar um sistema público de transportes tem sido abordado por vários lados. Este interesse completo é em parte devido ao fato que o desenvolvimento do transporte público é um tema crucial na sociedade moderna. Confrontado com o congestionamento do tráfego, os problemas de estacionamento urbano, e a poluição crescente os motoristas dos automóveis podem considerar em migrar para o transporte público se tivessem um sistema acessível e de boa qualidade a sua disposição. É dever e objetivo dos órgãos de trânsito de oferecer tais condições, ajustando adequadamente seus sistemas, de forma a maximizar a qualidade do serviço ao usuário enquanto minimiza custos. É necessário, então, que seja feito um equilíbrio e é onde entram no jogo várias técnicas de otimização.

Segundo Novaes (1978), a otimização não é um processo de busca do melhor absoluto, mas a procura sistemática da melhor prática aliada ao conhecimento do mecanismo de determinado problema e, algumas vezes, determinar as relações entre as variáveis já constitui um avanço considerável.

As medidas de mérito são constituídas ou representadas matematicamente por escalares que assumem como unidades os valores de comprimento (km), monetário ($), etc.

Alerta, ainda, Novaes (1978):

> O analista de transportes, ao equacionar seu problema e ao elaborar modelos, deve ter sempre presentes as vantagens e as limitações de qualquer das técnicas de otimização ou de análise de sistemas. O uso indiscriminado do computador e de técnicas de otimização, sem a devida análise crítica dos dados e da adequabilidade das técnicas e dos modelos, pode levar a resultados bem distantes da realidade.

O tema deste trabalho está relacionado com otimização, transporte público, planejamento tático de sistemas de transporte urbano e ao amplo campo de processos de tomada de decisão, especificamente o da otimização aplicada. Neste estudo não será levado em consideração o problema do transbordo, portanto, será considerado somente o deslocamento entre uma origem e um destino, sem troca de veículos em paradas intermediárias.

Segundo Cascetta (2009), o sistema de transportes consiste não somente de elementos organizacionais e físicos que interagem entre si para produzir oportunidades de transportes, mas também da demanda (passageiros) que tira vantagens destas oportunidades para se transportar de um lugar a outro, e esta demanda é resultado de interações entre várias atividades sociais e econômicas que ocorrem em determinada área.

Assevera Cascetta (2009), que os modelos matemáticos de sistemas de transportes representam, para um sistema de transportes hipotético ou real, o fluxo da demanda (passageiros), o funcionamento dos elementos organizacionais e físicos, a interação entre eles, e seus efeitos no ambiente externo, e assim estes modelos são ferramentas fundamentais para analisar e/ou programar ações que afetem os elementos físicos (vias, etc.) e ou organizacionais (programação de horários de viagem) dos sistemas de transportes.

O modelo aqui proposto está relacionado com o planejamento tático (programação) de sistemas de transportes, como a análise de rotas em função de suas características relacionadas às variáveis do modelo e a frota necessária para atender a demanda de passageiros, portanto este modelo não visa a atender o planejamento estratégico onde as rotas são adequadamente projetadas.

Importante ressaltar que devido ao grande número de variáveis envolvidas e a complexidade de suas interações, o uso destes modelos exige ferramentas matemáticas complexas que tornem estas combinações satisfatórias, cabendo-nos na formulação do modelo a identificação de quais das variáveis envolvidas, dos elementos físicos e organizacionais, são indispensáveis. O sistema de transportes é composto de múltiplos elementos com interações não lineares e a inerente imprevisibilidade de várias características o que torna necessário que os estados de vários elementos sejam representados por variáveis aleatórias. Entre as aproximações que iremos adotar para reduzir a complexidade do modelo estão as representações das variáveis aleatórias pelos seus valores esperados e a linearização das relações entre os seus elementos.

O modelo proposto é criado a partir das funções de qualidade e custo de um sistema de transporte de passageiros (SILVA; FERRAZ, 1991) e busca encontrar forma similar ao modelo canônico do problema de transporte. A natureza do problema é de programação linear inteira, mas o modelo permite uma aproximação com o uso de programação linear contínua, e a adaptação da forma canônica do modelo de otimização do problema do transporte (GOLDBARG; LUNA, 2005).

## 1.1 O processo de modelagem

Tendo em vista os instrumentos de representação do problema encontrado, se faz necessárias seguintes considerações:

- Alguns fenômenos reais terão dificuldade em serem representados por variáveis de decisão, ou lógica convencional e, portanto, deverão ser criadas variáveis artificiais para compatibilização e consistência da representação;
- Do ponto de vista do comportamento das variáveis: face ao risco, ou conflito, pode haver incerteza com relação a este comportamento, além disso, os casos imprevisíveis por natureza serão visto dentro da ótica da Teoria do Caos;
- E, finalmente, considerando a ferramenta de solução: a formulação do modelo lógico cria um hiato para o problema real, o mesmo ocorre para a formulação do modelo computacional para o modelo lógico, e, ainda, se o modelo computacional se mostrar muito complexo ou não se dispor de técnicas exatas necessárias poderá haver problemas de desempenho do modelo.

Muitas vezes se abre mão das técnicas exatas por técnicas não necessariamente exatas chamadas heurísticas, nas quais se sacrifica o modelo ideal por eficiência no processo de busca.

## 1.2 Objetivos

Os objetivos a serem alcançados por este trabalho são:

- Objetivo Geral

  - Desenvolver um modelo para otimizar a solução do problema de dimensionamento de frota de veículos de transporte de passageiros.

- Objetivos específicos

  - Aplicar o modelo no planejamento de transporte em rede;
  - Avaliar os métodos numéricos para solução do problema;
  - Modelar as restrições de custo e qualidade de serviço.

## 1.3 Descrição do problema do sistema de transporte

Para a operação de um sistema de transporte de passageiros é necessário planejar as linhas de transporte entre os diversos pares origem/destino de forma a otimizar o deslocamento dos usuários entre as diversas partes de um aglomerado populacional. O modelo desenvolvido busca dimensionar a frota total de um sistema deste tipo de forma que seja feita a otimização global (minimização) do número de veículos, sem que a qualidade do serviço seja afetada e buscando a rentabilidade mínima possível para a operação do sistema.

Como efeito, o modelo está relacionado com a programação de linhas sob a análise de rotas em função de suas características relacionadas às variáveis de decisão do modelo e à frota necessária para atender à demanda de passageiros, portanto, este modelo não visa a projetar um sistema de transportes, mas elaborar o planejamento tático (programação) de um sistema existente de acordo com as variações de demanda e de seus elementos físicos (vias).

O modelo desenvolvido deve permitir a otimização da frota de veículos disponível na situação de várias rotas alternativas para o deslocamento de passageiros de um local de origem até seu local de destino, de modo que a frota escolhida atenda as restrições de custo e qualidade, considerando o modelo clássico do problema de transporte da programação linear e os conceitos de engenharia de transportes. Este modelo deverá ser matricial, permitindo assim o cálculo simultâneo para diversas linhas, com *m* origens e *n* destinos, conforme Figura 1, de modo que o cálculo seja simultâneo e indique um ganho (otimização) global.

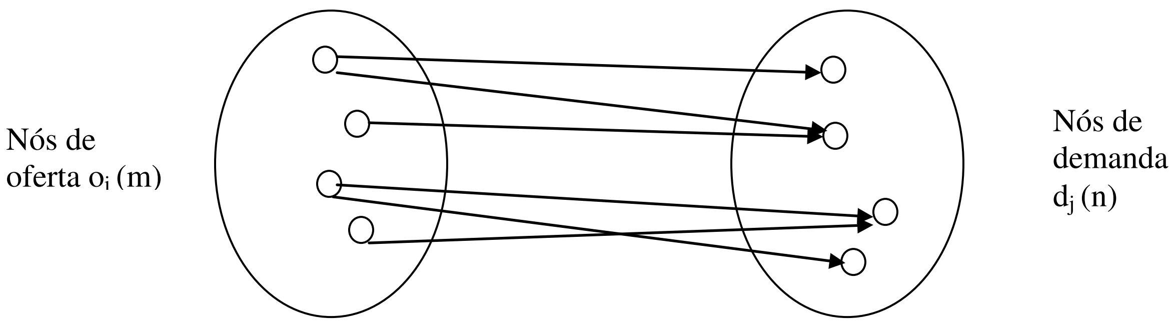


**Figura 1**: Abstração do problema de transporte

A identificação do sistema de transportes que aqui se busca deve encontrar as dimensões espaciais e as dimensões temporais relevantes e os componentes, também relevantes, da demanda, considerando o problema da frota de veículos de passageiros com restrição de custo e qualidade de serviço.

Nesta proposição, a modelagem de um sistema de transporte deve levar em consideração pelo menos as variáveis mostradas na Figura 2.

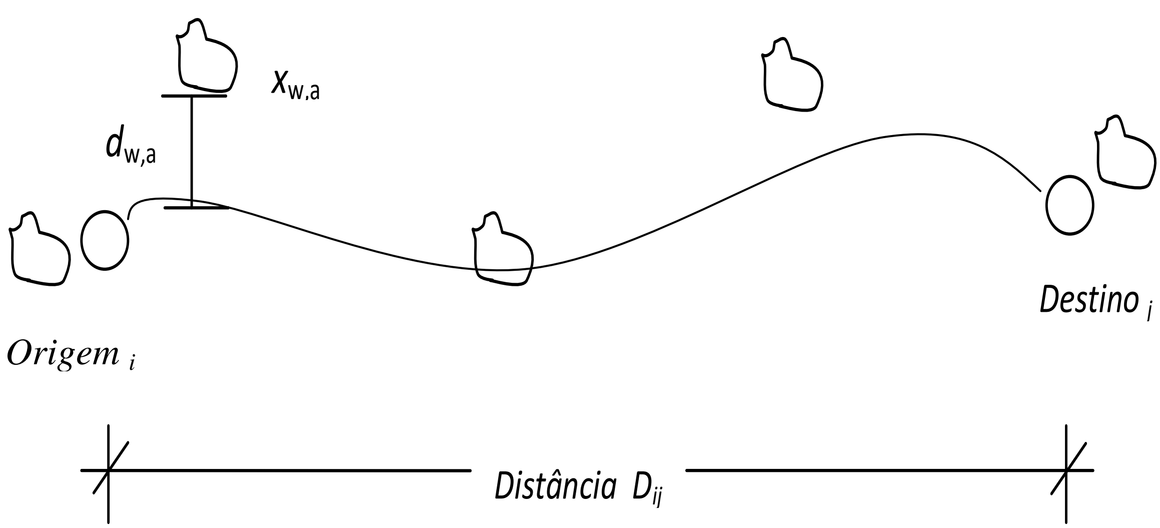


**Figura 2**: Representação das variáveis características do modelo

Pode-se ver na Figura 2 que a rota $\boldsymbol{R}_{ij}$, a ser escolhida entre a origem $i$ e o destino $j$, deve levar em consideração a distância total a ser percorrida $\boldsymbol{Dij}$, a distância $\boldsymbol{d}_{\mathrm{w,a}}$ dos núcleos populacionais a esta rota e as populações $\boldsymbol{x}_{\mathrm{w,a}}$ destes núcleos, sendo o índice $a$ referente a rota escolhida. Estas variáveis são todas determinísticas, com exceção das populações $\boldsymbol{x}_{\mathrm{w,a}}$ que tende a ter um comportamento aleatório no tempo em um espaço amostral conhecido.

A operação deste sistema significa, de fato, um percurso de ida e volta, ou seja, origem-destino-origem, onde o percurso destino-origem não é necessariamente igual ao percurso origem-destino. Neste percurso o agente transportador, o veículo, irá transportar os passageiros de um ponto ao outro da rota, não necessariamente da origem ao destino, sendo que este transporte em um percurso parcial é extremamente benéfico à rentabilidade da operação, pois gera ganhos adicionais, podendo o número de passageiros na rota ser superior a lotação máxima do veículo, neste caso se considera um índice de rotatividade de passageiros ao longo da rota, que quantificará o chamado “sobe e desce” de passageiros e possibilita que o número de passageiros transportados seja maior que a lotação do veículo em uma viajem. O desafio no planejamento (programação) e operação deste sistema é torná-lo rentável com um serviço de qualidade; atributos que será descrita adiante, para isto sendo escolhida a rota de maior qualidade atendida com a menor frota.

## 1.4 Estrutura do trabalho

O trabalho se inicia na Introdução, onde são apresentadas as justificativas para a realização do mesmo, seus objetivos e caracterização do problema. No Capítulo 2 é feita uma revisão do estado da arte sobre o assunto de modelagem relacionado com o planejamento de sistemas de transporte. No Capítulo 3 é apresentado o modelo de otimização proposto, com as funções que deram origem a sua formatação. No Capítulo 4 discorre-se sobre os métodos de solução de problemas de otimização da formulação clássica até os métodos aproximativos. O Capítulo 5 trata da validação do modelo com o relato das simulações computacionais realizadas. E finalmente, as conclusões e sugestões de continuidade do trabalho são apresentadas no Capítulo 6.

# CAPITULO 2

# O ESTADO DA ARTE E CARACTERIZAÇÃO DO PROBLEMA

O primeiro procedimento formulado para o problema de planejamento de transporte foi proposto por A. Patz no idioma germânico em 1925 (GUIHAIRE; HAO, 2008) e desde então diversos métodos e modelos matemáticos foram desenvolvidos pelos estudiosos do assunto.

Esta revisão do estado da arte segue o raciocínio elaborado por Guihaire e Hao (2008) que orienta:

> ...o processo de planejamento do transporte público é, geralmente, dividido na sequência de cinco passos: (1) o desenho das rotas, (2) o cálculo das frequências, (3) a programação do quadro de horários, (4) a escala de veículos e (5) a escala de serviço de tripulação. (...) os três primeiros, elementos fundamentais do processo de planejamento de transporte público, também chamados planejamento estratégico (passo 1) e planejamento tático (passos 2 e 3). Todas as informações necessárias aos passageiros, ou seja, as rotas, as frequências e horários de partidas, são determinados durante estas fases. Poder-se-ia pensar, portanto, que estes passos são orientados essencialmente ao usuário. Entretanto, o problema permanece multiobjectivo desde que os objetivos financeiros devem ser levados em consideração. Mesmo dentro da área de restrição de nosso problema, têm sido propostos diversos procedimentos, integrando diferentes restrições, visando vários objetivos, e combinando características heterogêneas.

De acordo com Ceder e Wilson (1986) o processo de planejamento de um sistema de transporte pode ser explicitado conforme é mostrado na Tabela 1.

| Entradas Independentes | Atividade de Planejamento | Saída |
|---|---|---|
| Dado de demanda<br>Dados de oferta<br>Indicadores de desempenho da rota | Projeto da rede | Mudanças de rota<br>Novas rotas<br>Estratégias de operação |
| Subsídio disponível<br>Veículos disponíveis<br>Políticas de serviço | Determinação de frequências | Frequências de serviço |
| Demanda horária<br>Horários de primeira e última viajem<br>Tempo de ciclo | Desenvolvimento do quadro de horários | Horários de partida<br>Horários de chegada |
| Períodos de intervalo<br>Períodos de manutenção<br>Restrições de calendário<br>Estrutura de custo | Programação de veículos | Escala de veículos |
| Regras trabalhistas de motoristas<br>Estrutura de custo de viajem | Programação de motoristas | Escala de motoristas |

**Tabela 1**. Processo de planejamento de um sistema de transporte. Fonte: Guihaire e Hao (2008)

Ainda de acordo com Guihaire e Hao (2008), o processo tem uma complexidade excepcional, e para tratá-lo este deve ser dividido em vários subproblemas, como a seguir:

- Projeto da rede de transporte: define o conjunto de rotas dos ônibus em uma determinada área, cada rota sendo determinada por uma sequência de paradas;
- Determinação das frequências da rede: calcula as frequências de cada linha e para cada período de tempo, e consequentemente a frota a ser ofertada;
- Programação horária da rede: esta etapa fornece o quadro de horários para cada linha que inclui o tempo de partida para todas as paradas e pontos terminais;
- Escala de veículos: programação de veículos para o quadro de horário; e,
- Escala de tripulação; dimensionamento e escala da tripulação por período.

O objeto deste trabalho está restrito ao cálculo das frequências e programação do quadro de horários ou, como de forma mais restrita ainda, o dimensionamento de linhas de transporte público, ou seja, o planejamento tático do sistema (passos 2 e 3), ou mais especificamente ainda, ao cálculo da frequência a partir do dimensionamento da frota de cada linha do sistema estudado.

Para uma revisão do estado da arte do planejamento de sistemas de transporte foi adotada a terminologia proposta por Guihaire e Hao (2008), conforme mostrado na Figura 3.

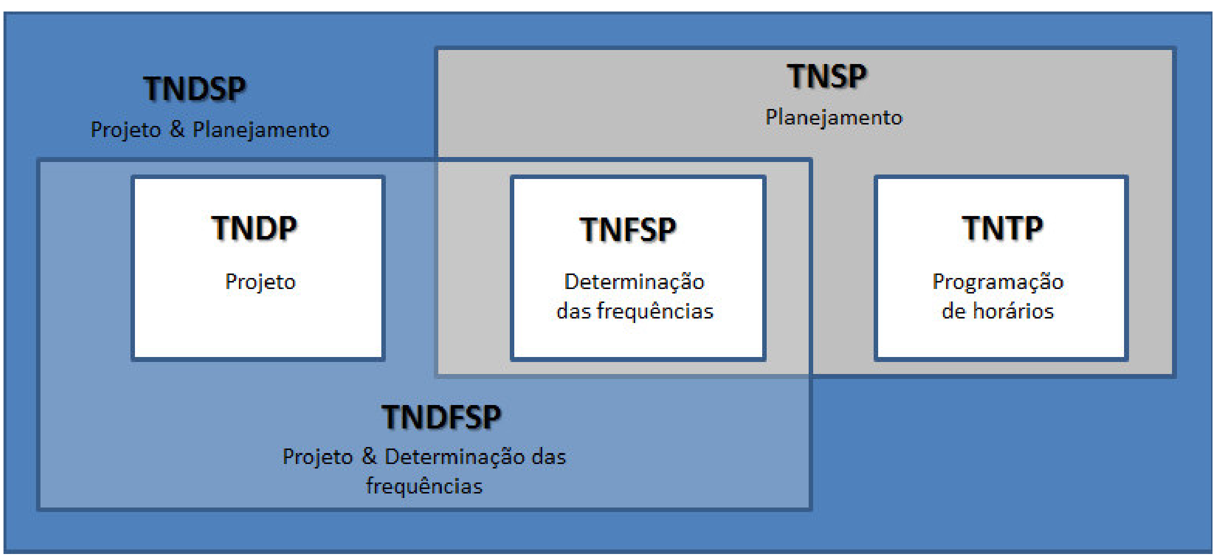


**Figura 3**: Estrutura dos Problemas de Rede de Transporte. Fonte: Guihaire e Hao (2008)

O problema global de planejamento de sistemas de transporte público (TNDSP- *Transit network design and scheduling problem*) pode ser dividido em duas etapas:

- TNDFSP – *Transit network design and frequencies setting* (projeto da rede e determinação da frequencia)*;*
- TNSP – *Transit network scheduling problem* (problema do planejamento da rede de transporte).

Estas duas etapas são divididas em três problemas básicos:

- TNDP – *Design* (projeto);
- TNFSP – *Frequencies setting* (Determinação da frequência*);*
- TNTP – *Timetable* (Programação de horários).

Considerando a revisão das publicações científicas sobre programação e projeto de redes de transporte, desde a pioneira publicação de Patz, realizada por Guihaire e Hao (2008), o foco da revisão do estado da arte aqui buscada se concentra no problema TNFSP – Determinação da frequência, ou na etapa TNDFSP – *Design e frequencies setting*. A Tabela 2 apresenta os trabalhos mais significativos voltados para este tema daquela data inicial até os dias de hoje, sendo que na coluna "Método" se tem as classificações possíveis: "H"-heurístico, "M" - matemático, "E" - evolucionário, e "O" – Outros.

| Autor | Ano | Problema | Método | Objetivos | Restrições | Aplicação | Especifico |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Patz** | 1925 | TNDP | H | Número de assentos vazios | Capacidade do veículo e demanda | Pequeno exemplo | Otimização no exemplo específico |
| **Salzborn** | 1972 | TNFSP | M | Frota, tempo de espera | Taxa de cheda de passageiros | - | Serviço de alimentadora |
| **Silman et al** | 1974 | TNDFSP | H | Frota, jornada de trabalho e superlotação | Orçamento | Haifa | Método esqueleto |
| **Shih et al** | 1994/ 1998 | TNDFSP | O | Tempo de viagem, satisfação de demanda e frota | | | Modelo de atribuição de viagem para terminal de transferência temporária |
| **Chakroborty** | 2001 | TNTP | E | Coordenação de transbordo (tempo de espera) e frota | Frota total, tempo de parada, *headways*, tempo de | Teórica | Considerações sobre dimensão da frota |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | transbordo | | |
| **Bielli** | 2002 | TNDFSP | E | Tempo médio de viagem, Frota, Desempenho da rede | Somente linhas pré-definidas | Parma | Análise Multicritério, Análise da função de ajuste |
| **Ceder** | 2003 | TNDFSP | H | Custos de usuários e operadores, frota | Comprimento da rota, desvio do caminho mais curto | | Giro curto |
| **Ngamcha et al** | 2003 | TNDFSP | E | Frota, tempo de espera e no veículo | Cobertura do serviço | Benchmark | Operadores de Problemas Específicos |
| **Quak** | 2003 | TNDSP | H | Tempo de condução, número de linhas operantes, tempo de desvio, sobrecarga, frota, tempo de espera | Limites do headway | Software | Sem rede inicial |
| **Park** | 2005 | TNFSP | O | Frota, Tempo de viagem, tempo de espera e tempo no veículo | Linhas, Tempos estocásticos de chegada dos veículos | Estudo de caso | Urbano |

**Tabela 2**: Trabalhos relevantes relacionados ao tema

## 2.1 O problema de determinação da frequência de sistemas de transporte *(TNDSP-Transit network frequencies setting problem)*

Este problema consiste na determinação de frequências adequadas para cada linha do sistema de transporte analisado em cada período determinado de tempo, de acordo com a hora do dia, dia da semana ou do ano considerando o atendimento da demanda de passageiros (GUIHAIRE; HAO, 2008).

### 2.1.1 Abordagens matemáticas

Conforme Guilherme e Hao (2008), Salzborn, em 1972, publicou um estudo que determinava as frequências da taxa de chegada de passageiros, de forma a minimizar o tamanho da frota e o tempo de espera de passageiros.

Schelle, em 1980, propôs um modelo não linear com o objetivo de minimizar o tempo total de viagem do passageiro e a designação da viagem ao passageiro.

Em 1982, Furth e Wilson apresentaram um método cujo objetivo era maximizar o benefício social, consistindo do tempo de espera economizado e o benefício da viagem. O problema era resolvido por um algoritmo utilizando as condições de Kuhn-Tucker numa relaxação de um programa não-linear. O resultado final é a frota ótima para cada rota.

Constatin e Florian, em 1995, apresentaram um modelo e método de resolução com o objetivo de minimizar o tempo total de viagem e tempo de espera sob condições de restrição de frota. O modelo formulado era um misto de programação inteira e programação não-linear não-convexa. O algoritmo utilizado era o sub-gradiente projetado.

### 2.1.2 Abordagens heurísticas

Em 1985, Han e Wilson propuseram uma abordagem heurística em dois estágios. Na primeira fase, as frequências mínimas são estabelecidas de forma a atender a demanda. No segundo estágio, as frequências são incrementadas uniformemente entre as linhas de forma a utilizar os veículos disponíveis (GUIHAIRE; HAO, 2008).

### 2.1.3 Outras abordagens

O uso de algoritmo genético para solução deste problema surgiu em 2005 com Park, sendo considerados dois casos distintos: o primeiro para processos determinísticos das chegadas dos ônibus usava um algoritmo genético simples em combinação com operadores de problemas específicos a fim de otimizar o *headway* e, o segundo caso, otimizava os *headways* e os tempos de folga com a simulação baseada em algoritmo genético (GUIHAIRE; HAO, 2008).

## 2.2 O problema do projeto da rede e determinação da frequência das linhas (TNDFSP – *Transit network design & frequencies setting problem*)

Neste problema é necessária a determinação de um conjunto de rotas associadas com frequência de veículos em uma determinada área, dada uma demanda associada e o conjunto de restrições como: cobertura do serviço, custo operacionais, etc. (GUIHAIRE; HAO, 2008).

### 2.2.1 Abordagens matemáticas

Asseguram Guilherme e Hao que Hasselstrom no período de 1979 a 1981 desenvolveu um modelo de três estágios para aplicações em sistemas reais do problema do TNSFP. No primeiro estágio, um conjunto completo de linhas é considerado e, a partir daí, são geradas um conjunto de rotas possíveis. No último estágio, as rotas são selecionadas pela atribuição de frequências, com a utilização de programação linear. Neste caso, rotas e frequências são determinadas simultaneamente.

Um modelo matemático foi proposto por Bussieck, em 1998, para criar rotas e frequências de linhas que poderia ser aplicado a transporte de massas. Métodos de programação matemática como relaxação e *branch-and-bound* foram aplicados com *solvers* comerciais.

Para este problema, Borndorfer *et al* (2008), propuseram um modelo que foi chamado de problema de planejamento de linhas, que minimizava uma combinação do tempo de viagem do passageiro e o custo operacional. Foram usados métodos de relaxação LP combinados com *solvers* comerciais.

Uma formulação de programação inteira mista foi proposta por Wan e Lo (2003) *apud* (GUIHAIRE; HAO, 2008), de forma que fosse linearizada e resolvida por *solvers* comerciais em sistemas de pequeno porte.

Mais recentemente, Barra *et al* (2007) *apud* (GUIHAIRE; HAO, 2008) propuseram um modelo de satisfação de restrições a fim de ser usado em conjunto com um *solver* comercial de programação com restrição.

### 2.2.2 Abordagens heurísticas

Conforme Guihaire e Hao (2008), um procedimento sequencial para o problema TNDFSP foi proposto por Lampkin e Saalmans, em 1967, onde na primeira fase um algoritmo heurístico baseado em um método esqueleto é desenvolvido para projetar a rede iterativamente, adicionando rotas com o objetivo de maximizar o número de passageiros. As frequências são determinadas na segunda fase utilizando uma pesquisa em base gananciosa randômica de forma a minimizar o tempo total de viagem, dado o tamanho da frota e a capacidade dos veículos.

Bel *et al*, em 1979, propuseram um procedimento sequencial com três subproblemas: seleção do conjunto de ruas, o conjunto de linhas, e as frequências ótimas. Técnicas de busca heurísticas baseadas no gradiente foram utilizadas para minimização de tempos de espera.

O método proposto por Van Ness *et al*, em 1988, simultaneamente projetava a rede e determinava as frequências das rotas, a partir de uma determinada frota, com um método de solução que combinava programação matemática e elementos heurísticos.

Um procedimento heurístico baseado em inteligência artificial foi proposto por Lee e Vuchic, em 2005, em um contexto de demanda variável com um procedimento interativo. O objetivo era minimizar o tempo total de viagem dos usuários.

### 2.2.3 Procedimentos de busca na vizinhança

No trabalho de Fan e Machemel (2006), são utilizados cinco diferentes algoritmos: busca tabu, arrefecimento simulado, algoritmo genético, busca aleatória e busca local. O trabalho apresentava um estudo do problema no contexto de “nó de distribuição”, ao contrário dos trabalhos anteriores que agregavam a demanda de viagem na zona agregada em um único nó. O modelo utilizado é um misto de problema de programação inteira com não linear multiobjetivo.

Para problemas de larga-escala, Zhao (2006), utilizou um método de solução com algoritmo genético integrado ao método de solução de arrefecimento simulado.

### 2.2.4 Algoritmos evolucionários

Na determinação simultânea de rotas e frequências, Pattnaik (1998) propôs um método baseado em algoritmo genético, com o objetivo de minimizar os custos do operador e o tempo de viagem, dadas as restrições de *headway* (GUIHAIRE; HAO, 2008).

Bielli *et al* (2002) também propuseram um algoritmo baseado em algoritmo genético para calcular os valores da função *fitness* por meio de análise multicritério com indicadores de desempenho.

Ngamchai e Lovel, em 2003, propuseram um método para determinar rotas e frequências, minimizando os custos totais incorridos pelo tamanho da frota e o tempo de espera, usando algoritmo genético (GUIHAIRE; HAO, 2008).

Outro método de determinação de frequências e rotas simultaneamente foi proposto por Tom e Mohan, utilizando algoritmo genético com minimização de custos operacionais e tempo de viagem (GUIHAIRE; HAO, 2008).

Por fim, o uso de algoritmos genéticos foi estudado por Fan e Machemel, (2006), com um modelo que usava demandas variáveis.

### 2.2.5 Outras abordagens

Outras abordagens também são citadas por Guihaire e Hao (2008), como um algoritmo heurístico híbrido baseado em inteligência artificial, de três fases, que foi proposto por Baaj e Mahmassani (1991; 1995), que combinava conhecimento de especialistas e algoritmo.

E outra abordagem de Fusco *et al*, em 2002 e outros apresentaram um trabalho com procedimentos sequenciais em três fases, que combinava técnicas heurísticas simples e algoritmo genético para determinar a rede de linhas com um custo total mínimo.

## 2.3 O problema de programação da rede de transporte (TNSP – *Transit network scheduling problem*)

O problema de programação da rede de transporte consiste em determinar os quadros de horários das linhas, incluindo frequências e tempos de partidas para cada linha, dado um conjunto de rotas e a demanda de passageiros.

### 2.3.1 Procedimentos heurísticos

Yan e Chen, em 2002 propuseram um modelo de programação matemática e um modelo de solução para sistemas interurbanos. O modelo utiliza técnica inteira mista e o algoritmo desenvolvido é baseado em heurística lagrangiana e algoritmo de decomposição de fluxo (GUIHAIRE; HAO, 2008).

### 2.3.2 Algoritmos evolucionários

Em 1999, Dhingra e Shrisvastava sugeriram o uso de algoritmos genéticos para um modelo de minimização de tempo de viagem, número de veículos e passageiros em espera para um sistema integrado de trem de subúrbio e ônibus, com cálculo em três estágios (GUIHAIRE; HAO, 2008).

### 2.3.3 Outros métodos

Um método híbrido para criar rotas com a programação associada foi proposto por Bachelet e Yon, em 2005. Os autores propuseram um modelo chamado “modelo de aprimoramento” que combinava método de solução de otimização matemática e simulações, além de técnicas heurísticas para lidar com as restrições. As soluções encontradas são de boa qualidade, mas sem garantia de convergência (GUIHAIRE; HAO, 2008).

### 2.3.4 Aplicativos computacionais

Há diversos aplicativos computacionais disponíveis comercialmente que lidam com o problema de planejamento de sistemas de transporte público. De forma geral, estes aplicativos são disponibilizados em pacotes que abordam a problemática global de planejamento em todas as etapas aqui apresentadas, com algumas exceções.

O aplicativo VISUM, desenvolvido com base em um trabalho publicado por Friedrich *et al* em 1999, também trabalha com simulações  incluindo algoritmos de otimização que ajudam a projetar a rede e programar as linhas do sistema de transporte analisado. Este aplicativo tem tido larga utilização no Brasil em consultorias especializadas de transporte e em órgãos de gestão de transporte público.

O aplicativo ALOC – Sistema de Programação Operacional de Linhas, desenvolvido pela consultoria Tecnotran (atualmente extinta) no final da década de 90, tem sido o aplicativo utilizado pelo órgão gestor de transporte público de São Luís para a elaboração dos quadros de horários (programação) de linhas, com horários de partida, frota e intervalo entre veículos, a partir das estimativas de demanda na rota atendida. Como limitação maior este aplicativo realiza estes cálculos de forma isolada para cada uma das linhas sem levar em conta a interação entre elas, ou realizar qualquer procedimento de otimização.

## 2.4 Caracterização do problema

O propósito do modelo proposto, como já comentado, se centra na determinação da frota ótima para realizar o deslocamento de determinada população de uma origem $i$ a um destino $j$ passando pelos percursos (rotas) $a$. Basicamente, esse é um problema de transporte de quantidades, no caso de pessoas. O problema do transporte é um dos mais tradicionais dos problemas de otimização, incluindo-se na família dos modelos de fluxo em rede. Os modelos em rede permitem uma solução de importantes problemas reais e são de extraordinária aplicação prática (GOLDBARG; LUNA, 2005).

Assim, o modelo proposto é criado a partir das funções de qualidade e custo de um sistema de transporte de passageiros e busca encontrar uma forma similar ao modelo canônico do problema de transporte. A natureza do problema é de programação linear inteira, mas o modelo permite uma aproximação com o uso de programação linear contínua, e adaptação da forma canônica do modelo de otimização do problema do transporte.

Usualmente, este dimensionamento é realizado de maneira bem simples no dia a dia do planejador de redes de transporte, utilizando fórmulas matemáticas simples e, sempre, considerando dois períodos diários: um período de pico (demanda máxima em dia útil) e um período fora de pico (demanda mínima em dia útil).

Para dimensionamento da oferta horária são necessários os seguintes dados (FERRAZ; TORRES, 2004):

- P: demanda ou fluxo de passageiros na seção crítica (pass/h);

- T: tempo de ciclo da linha (min);
- C: capacidade do veículo (pass/veic)

Os parâmetros a determinar são:

- Q: fluxo de viagens na linha ou frequência de atendimento (viagens/h);

$$Q = \frac{P}{C}, \tag{1}$$

- H: *headway* ou intervalo entre viagens (viagens/h);

$$H = \frac{60}{Q}, \tag{2}$$

- T: número de veículos necessário na frota (veículos);

$$F = \frac{T}{H}, \tag{3}$$

Podem ainda ser considerados nestes cálculos diversos fatores e variáveis como o fator de renovação (obtido em pesquisas de sobe e desce), dado por:

$$k = \frac{PV}{OTc}, \tag{4}$$

sendo, PV = volume transportado de passageiros em uma viagem (pass); OTc = ocupação máxima do veículo em uma viagem (pass);

O cálculo do tempo de ciclo da linha (tempo total de completar um percurso ida e volta) considera o tempo de viagem (TV) e os tempos de parada ( TT):

$$Tc = TV + TT\ . \tag{5}$$

Ressalte-se que estes cálculos são feitos isoladamente para cada uma das linhas, sem que de forma alguma haja o processo de otimização. Os ajustes dos resultados são feitos pelo técnico responsável pelo dimensionamento considerando seu conhecimento prévio do sistema. Também, não é feito o cálculo simultâneo global do sistema ou subsistema de interesse.

# CAPITULO 3

# MODELO DO SISTEMA DE TRANSPORTE DE PASSAGEIROS

O sistema de transportes é uma unidade conceitual ou física composto de partes interrelacionadas, intratuantes e intradependentes. O modelo matemático representativo deste sistema não é igual à realidade, mas sim suficientemente similar para que as conclusões obtidas a partir de sua análise e simulações possam ser estendidas à realidade. O modelo matemático é construído da seguinte forma (ver Figura 4):

- Definição do problema;
- Formulação e construção do modelo inicial;
- Validação do modelo (simulação);
- Reformulação do modelo;
- Aplicação.

O método utilizado remete ao método cartesiano onde inicialmente a identificação/ definição do problema fornece os subsídios para a construção do modelo matemático a ser proposto. Em seguida, o modelo passa por um processo recorrente de validação através de simulações computacionais até o seu aperfeiçoamento para a aplicação final.

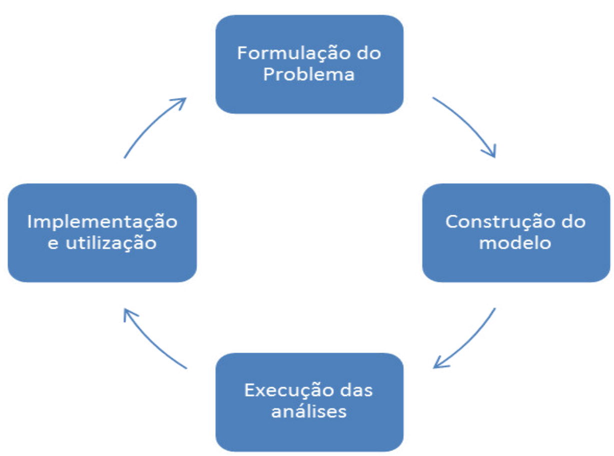


**Figura 4**: Ciclo de construção do modelo matemático

A formulação matemática que se busca (problemas de fluxo de redes) passa pelo conceito de grafos. O grafo é uma estrutura de abstração que liga diversos pontos (vértices ou nós) por meio de caminhos, ou arcos. A rede é um grafo direcionado atravessado por um fluxo $F = \{f_1, f_2,..., f_m\}$ que circula em seus arcos(GOLDBARG; LUNA, 2005).

Para chegar ao modelo clássico de transportes, considerando fluxo de redes com grafos, chega-se à formulação do problema do caminho mais curto (CMC) no grafo, ou o fluxo de custo mínimo, ver Figura 1, que é apresentado desta forma (GOLDBARG; LUNA, 2005):

$$\textbf{(CMC) MINIMIZAR Z} = \sum_{(ij)\in A} c_{ij}x_{ij} \tag{6}$$

sujeito a

$$\sum_{(ij)\in A} x_{ij} - \sum_{(ki)\in A} x_{ki} = \begin{cases} -1\text{, se } i = 0 \\ 0\text{, se } i \neq 0 \text{ e } i \neq d \\ +1\text{, se } i = d \end{cases}$$

$$xij \in \{0,1\} \quad (i,j) \in;$$

sendo, $o$ e $d$ ,os vértices de início e término do caminho; $x_{ij}$ , o fluxo que irá circular no arco $ij$; $c_{ij}$ , o custo associado ao trânsito de cada unidade de fluxo pelo arco $ij$.

Numa formulação mais restrita, tem-se que numa rede equilibrada, o problema de fluxo de custo mínimo (GOLDBARG; LUNA, 2005):

$$\textbf{MINIMIZAR } z = \sum_{(ij)\in A} c_{ij}x_{ij} \tag{7}$$

sujeito a

$$\sum_{(ij)\in A} x_{ij} - \sum_{(ki)\in A} x_{ki} = 0 \qquad i = 1,...,m$$

$$l_{ij} \leq x_{ij} \leq L_{ij} ,$$

sendo, $l_{ij}$ , limite inferior de fluxo no arco; $L_{ij}$ , limite superior de fluxo no arco.

### 3.1 O problema de otimização com restrições

A otimização é a utilização racional de recursos escassos (espaço, tempo, energia etc.), que no caso são os veículos (ônibus) responsáveis pelo deslocamento dos passageiros, a energia despendida (combustível) e o tempo de deslocamento dos usuários. Essa otimização deverá levar à melhoria dos serviços prestados, resultando em uma melhor qualidade de vida do usuário, concomitantemente a um aumento de produtividade e rentabilidade da operadora, e que também dará suporte a tomadas de decisões para os diferentes cenários previstos.

Pode se afirmar que, em termos matemáticos, otimizar é minimizar ou maximizar uma função objetivo $f(x)$, sujeito a restrições de:

- igualdade $hi(x) = 0, i = 1,2,...,n$;
- desigualdade $gi(x) \leq 0, i = 1,2,...,n;$
- factibilidade $x \in \Omega$ (restrição de conjunto),

sendo, $x = (x_1, x_2, ...,x_n)$, as variáveis de decisão.

As variáveis de decisão são aspectos essenciais do problema que estão sujeitos a otimização. Os parâmetros são variáveis do problema sob as quais se exerce o controle para otimizar o objetivo.

A função objetivo que representa a percepção de qualidade dos usuários deve levar em consideração as características do problema de otimização (SILVA; FERRAZ, 1991).

### 3.2 O problema clássico do transporte

O problema de transporte pode ser também representado como um fluxo em grafo bipartido, onde não há nós intermediários, portanto, não há transbordo, e os arcos (caminhos) não possuem limite de capacidade. Esta situação é o que se busca para o caso de dimensionamento de frota em uma linha: não se considera pontos intermediários e qualquer limitação de capacidade das vias.

O problema de transportes pode ser visto como um problema de fluxo em que o objetivo é minimizar globalmente os custos do fluxo através dos arcos (caminhos/vias).

A estrutura padrão para um modelo de transporte de quantidades pode, então, ser expressa por:

$$\min_{x_{ij}} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \tag{8}$$

sujeito a:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i ;\ \forall i = 1, 2, ..., m$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j ;\ \forall j = 1, 2, ..., n$$

$$x_{ij} \geq 0 \ ;$$

sendo, $x_{ij}$ , o número de quantidades transportadas da fonte $i$ para o destino $j$; $c_{ij}$ , o fator de ponderação associado ao transporte da origem para o destino $j$; $a_i$ , a capacidade da origem $i$; $b_j$ , a necessidade do destino $j$; $n$, o número de destinos; e $m$, o número de fontes (origens).

Lembrando que o fator de ponderação $c_{ij}$ é o custo de transporte de uma unidade de fluxo (passageiro) pelo arco $ij$ (caminho).

A partir deste modelo clássico, busca-se derivar o modelo proposto que deverá incorporar os requisitos de custo e qualidade previstos na teoria de engenharia de transportes. O modelo deverá propiciar o cálculo dos fatores $c_{ij}$ (ponderação origem-destino) da função objetivo e os coeficientes das variáveis das funções de restrições, além dos parâmetros das funções de desigualdade/ igualdade das restrições.

A formulação do modelo de otimização para a minimização do tempo de transporte será de modo tal que tenha correspondência com uma estrutura de otimização linear com restrições iniciais como apresentados na Equação (8) sendo que devemos definir $c_{ij}$ como sendo os pesos associados às diversas vias e a nossa variável de decisão como sendo a frota, sendo que para efeito de facilitar a compreensão inverte-se as denominações de número de destinos para $m$ e número de origens para $n$, que é dado por

$$\min_{x_{ij}} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} c_{ij} x_{ij} \tag{9}$$

### 3.3 As funções qualidade e custo do transporte de passageiros

O sistema de transporte de passageiros, na prática, pode gerar ineficiências do ponto de vista de custo e qualidade operacionais. Por custo, entendam-se as despesas indiretas e diretas inerentes a operação de cada linha do sistema, e que cabe ao operador (empresa de transporte coletivo); por qualidade, entenda-se a percepção do usuário quanto ao atendimento à sua necessidade de deslocamento de um ponto de origem a um ponto de destino, também chamado de nível de serviço.

O modelo proposto é a representação matemática do sistema real, que é uma simplificação da realidade com uma equivalência adequada. Este modelo irá permitir a otimização (minimizar ou maximizar) da função objetivo de forma a que se alcance a minimização do custo com a restrição do nível mínimo de serviço.

A otimização é a utilização racional de recursos escassos (espaço, tempo, energia, etc.), que no nosso caso de interesse são os veículos (ônibus) responsáveis pelo deslocamento do usuário, a energia despendida (combustível) e o tempo de deslocamento do usuário. Esta otimização leva à melhoria dos serviços prestados, resultando em uma melhor qualidade de vida, concomitantemente a um aumento de produtividade e rentabilidade da operadora e que também dará suporte a tomadas de decisões para os diferentes cenários previstos.

As variáveis de decisão são aspectos essenciais do problema que estão sujeitas a otimização. Os parâmetros são variáveis do problema sob as quais se exerce o controle para otimizar o objetivo. A função objetivo que representa a percepção de qualidade dos usuários deve levar em consideração as características de qualidade de serviços de um sistema de transporte urbano apontadas por Silva e Ferraz (1991).

### 3.3.1 A função qualidade do transporte de passageiros

A qualidade do serviço de transporte público é função da acessibilidade do usuário às linhas de ônibus, na origem e no destino, da distância percorrida da origem ao destino pelo veículo, da realização de cada viagem (ciclo) dentro do prazo estabelecido no planejamento da rota, do intervalo de chegada de cada veículo de uma linha em determinado ponto e a lotação máxima permitida no veículo, ou seja:

$$Q = f\,(a, d, c, h, l) \tag{10}$$

Sendo,

*a* : acessibilidade ( distância da origem até o ponto de embarque e do ponto de desembarque até o destino final);

*d* : direitura das rotas (razão entre a menor distância por vias entre a origem e a chegada e a distância da rota);

*c :* confiabilidade (percentagem de viagens programadas não realizadas por inteiro ou em parte, com atraso superior a 5 min) – ICV;

*h :* headway (intervalo de atendimento em uma parada);

*l* : lotação (lotação máxima/ capacidade do ônibus).

Obs.: a lotação deverá ser acrescida do índice de rotatividade (*Ir*).

Como parâmetros para estas variáveis se têm praticado:

$a$ < 250 a 300 m;

$d$ < 1,3;

$c$ > 98% (ICV);

$h$ < 15 min;

$l \leq$ 100%.

### 3.3.2 A função custo do transporte de passageiros

O custo do serviço de transporte público é função da velocidade operacional média (valor esperado) em cada linha, da frequência (*headway* e frota), da característica do veículo e da relação de passageiros transportados por quilômetro, ou seja:

$$C = f\,(Vo, f, c, i_{pk}), \tag{11}$$

sendo,

*Vo :* velocidade comercial ou operacional;

*f :* frequência do serviço (que está ligado ao headway e frota);

*c :* característica do veículo (motorização, nº de portas, capacidade etc.);

*ipk :* índice de passageiros por km (afetado pelo sobe e desce nas paradas intermediárias).

A velocidade comercial *Vo* é igual à razão da distância percorrida na rota (*d*) pelo tempo de ciclo (*Tc*) e:

$$v = f\,(t, d, c, i), \tag{12}$$

sendo,

*t :* tempo de embarque e desembarque;

*d :* distância entre paradas;

*c :* características do veículo (aceleração e frenagem);

*i :* interferências de trânsito (semáforos, congestionamentos etc.).

Caracterizadas as variáveis que se deve considerar, fica claro que o que deve ser minimizado é o tempo de deslocamento do passageiro, da origem *i* ao destino *j*. Este tempo é variável ao longo do período de operação, portanto, temos ***Tij***(t) como variável de decisão. Mas, esta variável é dependente de outras, e a variável que de fato está relacionada ao tempo, e é independente, é o tamanho da frota ***Fij***(t) disponibilizada para realizar o deslocamento dos passageiros no período *t*. Então, o modelo deverá incorporar todas as questões relativas às funções de custo e qualidade dentro de uma perspectiva de real impacto na variável de decisão.

Têm-se, então, como variáveis a serem consideradas da função qualidade:

- acessibilidade: incorporada como $\boldsymbol{d}_{w,a}$ (distância do núcleo populacional *w* para a rota *a* na função objetivo);
- *headway* - $\boldsymbol{h}_{max}$: incorporada como restrição de $\boldsymbol{T}_{ij}$;
- lotação: usada como um ponderador de cálculo da frota $\boldsymbol{C}$v (multiplicado pelo índice ***Ir***);

e, da função custo:

- velocidade comercial: $Vo_{ij,a}$ (velocidade comercial média na rota *a* da origem *i* ao destino *j* , incorporada na função objetivo;
- distância total percorrida (entre origem e destino na rota a): $\boldsymbol{D}_{ij,a}$ (com impacto no ***Ipk***) na função objetivo;
- população deslocada em uma viagem: $\boldsymbol{X}_{ij}$ (com impacto no ***Ipk***) na função objetivo, ou o somatório de $\boldsymbol{x}_{w,a}$,
- índice de passageiros por km, mínimo: $\boldsymbol{Ipk}_{min}$ como restrição de rentabilidade.

Portanto, se tem como parâmetros: $\boldsymbol{Ipk}_{min}$ e $\boldsymbol{h}_{max.}$

O sistema terá as variáveis da função objetivo variando como:

- *i* origens variando até n, $i = 1,2...,n$;
- *j* destinos variando até m, $j = 1,2,...,m$;
- *a* rotas variando até b , $a =1,2,.,b$;
- *w* núcleos populacionais na rota *a* variando até k, $w = 1,2,..., k$.

Ressalta-se que o modelo adota a premissa de que as vias (rotas) não são congestionadas, portanto, as variáveis fluxo e densidade de veículo nas vias, e que são interdependentes, não estarão explicitamente representadas apesar da variável velocidade média ser impactada por estas outras variáveis.

## 3.4 Modelo proposto de otimização de frota do sistema de transporte de passageiros

Considerando as questões essenciais para determinação da frota ótima, duas são as restrições que se apresentam mais significativas na formulação do modelo a ser construído:

- *Headway* - um valor máximo (*hmax*) deve ser adotado para o sistema sob estudo, como restrição de qualidade.

- Rentabilidade - a relação custo/benefício para a operadora da linha deve ter um valor mínimo que, aqui, será representado por um índice representativo de passageiros transportados pela frota em determinada rota, considerando todos os núcleos populacionais ao longo dela. Este parâmetro será aferido pelo índice passageiro por km, *Ipk.*

Outra restrição importante de qualidade é a capacidade (lotação do ônibus) que será incorporada na função objetivo como um ponderador *1/Cv*, multiplicado pelo de índice de rotatividade *Ir.*

A rentabilidade de uma linha e a qualidade da prestação de serviço do sistema de transporte depende diretamente da frota disponibilizada para atendimento ao usuário. Quanto maior a frota operando melhor a prestação do serviço com relação ao tempo de espera nas paradas, em contrapartida, maior tende a ser o gasto operacional, reduzindo assim a rentabilidade da frota. É esta dicotomia que tem que ser levada em conta pelo modelo.

Importante lembrar que as restrições impostas irão limitar o espaço de busca da solução do problema de otimização (factibilidade), facilitando o processo de solução numérica.

O modelo de otimização é centrado na variável de decisão relacionada à escolha do tamanho da frota que deve ser designada para cada linha em cada trajeto nos diversos horários do dia de modo a minimizar o tempo de transporte total *Tij,a* de *n* origens a *m* destinos passando pelas *b* vias e que tenha uma lucratividade bem balanceada entre as diversas linhas do sistema completo.

O modelo de otimização proposto tem a seguinte forma:

$$\min_{Fij,a} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\sum_{a=1}^{b} T_{ij,a}(F_{ij,a}(t)) = \frac{R_{ij,a}(t)}{F_{ij,a}(t)} \tag{13}$$

sujeito a,

$$\frac{1}{b \cdot m}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\sum_{a=1}^{b} T_{ij,a}(t) \leq headway_{\max}$$

$$\frac{1}{b \cdot c_r}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\sum_{a=1}^{b} \frac{D_{ij,a}}{F_{ij,a}} \geq I_{pk\,\min}$$

$$\frac{1}{F_{ij,a}} \geq 0,$$

sendo, *Rij,a(t)*, a distância da rota *a* (percurso nas vias) entre a origem *i* e destino *j*; *Fij,a(t)*, a frota (quantidade de ônibus) usada em cada rota.

Portanto, o modelo se propõe a minimizar o tempo global de deslocamento origem-destino, tendo como variável de decisão a frota (quantidade global de veículos para cada rota). O tempo total do sistema é diretamente proporcional às rotas escolhidas, e inversamente proporcional à frota. Logo, a frota de cada rota será o inverso dos valores das variáveis de decisão.

Esse tempo está sujeito à restrição ao limite do headway adotado. Na formulação, é inserida a ponderação pelo inverso do número *b* de vias e *m* destinos. Portanto, compara-se o tempo (headway) médio, com o tempo máximo adotado.

Na segunda restrição, relacionada à rentabilidade, a ponderação é feita novamente pelo número de vias *b* e por um coeficiente de rentabilidade *cr* relacionado à quantidade de passageiros pagantes em uma viagem da origem *i* ao destino *j* que também é afetado pelos passageiros que sobem e descem ao longo da rota. Então, o sistema todo tem que atender a um valor mínimo de rentabilidade. A variável *Dij* é a distância percorrida na rota *ij.*

Uma terceira restrição tem que ser acrescentada: a não negatividade da variável de decisão *Fij,a(t)* – além do significado físico óbvio, esta restrição direciona a busca da solução adequadamente.

Aqui não se deve esquecer de que o número de vagas (lotação) de passageiros disponibilizado pela frota não pode ser inferior à quantidade de pessoas a serem transportadas, considerando-se o índice de rotatividade *Ir*.

Define-se, então, a métrica usada para o cálculo da ponderação utilizada na qualificação das rotas *Rij,a* com origem *i* e destino *j* passando pela via *a*:

$$R_{ij,a}(D_{ij,a}(t), Vo_{ij,a}(t), x_{w,a}(t), d_{w,a}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\sum_{a=1}^{b} \frac{1}{Cv \cdot Ir \cdot k}\sum_{w=1}^{k}\frac{x_{w,a}(t)\cdot Vo_{ij,a}(t)}{d_{w,a}\cdot D_{ij,a}(t)} \tag{14}$$

Sabendo-se que:

$$F_{ij}(Cv, X_{ij}(t)) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\frac{X_{ij}(t)}{Cv} \tag{15}$$

Significa que a rota *Rij,a* é função da distância a ser percorrida, da velocidade operacional *Voij,a*, possível na via *a*, da distância *dw,a* dos centros populacionais a esta rota, e de um fator *xw,a* das populações destes centros.

A variável *Nfa* não foi considerada pois o número de faixas nas vias do sistema considerado é variável ao longo de todas as rotas e o impacto desta variável está adequadamente medido na velocidade operacional média do ônibus *Voij,a*.

Então, a rota *Rij,a* fica proporcional à população atendida *xw,a*, sendo ponderado pela total *k* de núcleos populacionais para obter a média, pela velocidade operacional *Voij*, e inversamente proporcional às distâncias destes núcleos populacionais até a rota e a distância total percorrida na rota *Dij,a*.

A frota *Fij* é função inversa da capacidade dos veículos *Cv* e da população a ser atendida (deslocada) em cada viagem *Xij*.

Substituindo a Equação (14) na estrutura de otimização da Equação (13) teremos o seguinte modelo:

$$\min_{F_{ij,a}} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\sum_{a=1}^{b} T_{ij,a}(F_{ij,a}(t)) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{m}\sum_{a=1}^{b} \frac{1}{Cv \cdot Ir \cdot k}\sum_{w=1}^{k}\frac{x_{w,a}(t)\cdot Vo_{ij,a}(t)}{d_{w,a}\cdot D_{ij,a}(t)\cdot F_{ij,a}(t)} \tag{16}$$

sujeito às restrições,

$$\frac{1}{b\cdot m}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\sum_{a=1}^{b} T_{ij,a}(t) \le headway_{\max}$$

$$\frac{1}{b\cdot c_r}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\sum_{a=1}^{b} \frac{D_{ij,a}}{F_{ij,a}} \ge I_{pk\,\min}$$

$$\frac{1}{F_{ij,a}} \ge 0$$

# CAPITULO 4

# MÉTODOS DE SOLUÇÃO PARA O PROBLEMA DE TRANSPORTE

A solução do problema proposto, otimização do modelo do sistema de transporte para minimização da frota operante pode ser encontrada por diversos caminhos (métodos) que serão aqui abordados e, então, justificada a escolha do método adotado.

O método de solução pela programação linear é apresentado, assim como os métodos com procedimentos aproximativos para programação inteira, e ainda a programação dinâmica é investigada para que se avalie a abordagem por este método.

## 4.1 Solução do problema proposto pelo método clássico

O modelo proposto apresenta uma situação de programação linear inteira cujos métodos de solução são heurísticos. A abordagem aqui realizada será de uma aproximação utilizando método de programação linear contínua. Considerando que os resultados são números reais para as variáveis de decisão e que se espera números inteiros para a solução, há de se verificar se os resultados estarão dentro do esperado, com as devidas aproximações.

A programação linear (PL) é uma técnica utilizada para resolver determinada classe de problemas em que se procura alocar recursos limitados a atividades ou decisões diversas, de maneira ótima. A PL pode ter uma característica continua, quando todos os valores das variáveis de decisão podem ser no campo dos números reais, ou as variáveis podem somente assumir valores de números inteiros, sendo então chamada de programação linear inteira.

O termo linear significa que todas as funções definidas no modelo matemático devem ser lineares, e tem a seguinte representação matemática:

$$\max Z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n \tag{17}$$

sujeito a,

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots + a_{1n} x_n \leq b_1$$
$$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \ldots + a_{2n} x_n \leq b_2$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \leq b_m$$

$$x_i \geq 0 \text{ para } i = 1, 2, \ldots n \;;$$

sendo *a, b e c* constantes e $x_i$ as variáveis de decisão.

Os modelos de PL devem ter as seguintes características:

1. Proporcionalidade
2. Não negatividade
3. Aditividade
4. Separabilidade

Há diversos métodos para solução de problemas de programação linear contínua. O método Simplex (descrito no Apêndice A) é o método clássico e o mais conhecido de todos, tendo excelente desempenho na convergência de simulações. Entre outros métodos de solução para problemas de natureza contínua podemos citar os métodos de solução de ponto interior. Estes métodos surgiram no final dos anos 80 e, ao contrário do método Simplex, os movimentos de busca do ponto ótimo ocorrem no interior da região factível de solução, e não nos seus limites. Os métodos de ponto interior mais populares são o *Affine Scaling* e *Log Barrier* (RARDIN,1998).

Aplicando-se o método de otimização, ao modelo matemático apresentado, com o método Simplex (tabela ou quadro do Simplex) é necessário transformar as desigualdade das restrições em igualdades, adicionando-se as variáveis residuais. Mas, no caso de se adotar a solução em softwares usais como: SPLINT, Solver (Excel), AMPL, LINDO e CPLEX, não há necessidade desta adequação, apenas se deve colocar todas as restrições como inequações com o operador menor igual (≤). Para isto, a segunda inequação do modelo proposto tem que ter os sinais de seus termos invertidos.

Inicialmente, denominam-se os termos à direita das desigualdades pela forma clássica: *bi,* com *i* variando de 1 a *m*.

$$\begin{aligned} &\frac{1}{b \cdot m} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \sum_{a=1}^{b} T_{ij,a}(t) \leq b_1 \\ &\frac{1}{b \cdot c_r} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \sum_{a=1}^{b} \frac{D_{ij,a}}{F_{ij,a}} \geq b_2 \end{aligned} \qquad (18)$$

,

sendo, $b_1$*, o headway* máximo; e $b_2$, o *Ipk* mínimo.

Agora, invertem-se os sinais da segunda desigualdade:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{b \cdot m}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\sum_{a=1}^{b} T_{ij,a}(t) \leq b_1 \\ &-\frac{1}{b \cdot c_r}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\sum_{a=1}^{b} \frac{D_{ij,a}}{F_{ij,a}} \leq -b_2 \end{aligned} \tag{19}$$

Portanto, o modelo matemático proposto toma a seguinte forma:

$$\min_{Fij,a}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\sum_{a=1}^{b} T_{ij,a}(F_{ij,a}(t)) = \min_{Fij,a}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{m}\sum_{a=1}^{b} \frac{1}{Cv \cdot Ir \cdot k}\sum_{w=1}^{k}\frac{x_{w,a}(t) \cdot Vo_{ij,a}(t)}{d_{w,a} \cdot D_{ij,a}(t) \cdot F_{ij,a}(t)} \tag{20}$$

Sujeito a,

$$\frac{1}{b \cdot m}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\sum_{a=1}^{b} T_{ij,a}(t) \leq b_1$$

$$-\frac{1}{b \cdot c_r}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\sum_{a=1}^{b} \frac{D_{ij,a}}{F_{ij,a}} \leq -b_2$$

$$\frac{1}{F_{ij,a}} \geq 0,$$

sendo, $b_1$*, o headway* máximo; e $b_2$, o *Ipk* mínimo

Uma alteração pode ainda ser realizada no modelo: a restrição de não-negatividade ser substituída por uma restrição de não-negatividade e não-nulidade, ou seja:

$$\frac{1}{F_{ij,a}} > 0 \tag{21}$$

Isto seria necessário para adequar o modelo à situação real na qual nunca se teria um valor nulo para uma variável de decisão e, ainda, como os valores procurados são o inverso das variáveis de decisão esta operação seria impossibilitada.

O modelo para ser resolvido necessita de ser aplicado com os valores das variáveis que resultarão nos valores dos coeficientes das variáveis de decisão, que nos darão a forma canônica do problema do transporte. Os valores das variáveis de decisão, que serão tantos quantos forem os pares origem-destino, nos darão o inverso dos valores que se deseja obter: a frota ótima para cada percurso de origem-destino com a qualificação da rota já estabelecida.

Como a variável de decisão é o inverso da frota para cada par origem-destino, as variáveis residuais serão variáveis com índices adicionados em uma e duas unidades além do número máximo de par existente *ij*.

O modelo agora para ser resolvido necessita de ser aplicado com os valores das variáveis que resultarão nos valores dos coeficientes das variáveis de decisão, que darão a forma canônica do método Simplex. Os valores das variáveis de decisão, que serão tantos quantos forem os pares origem-destino, e darão o inverso dos valores que desejamos obter: a frota ótima para cada percurso de origem-destino com a qualificação da rota já estabelecida.

## 4.2 Soluções com procedimentos aproximativos para programação linear inteira

Os problemas de programação linear inteira são complexos e podem ser resolvidos por meio de procedimentos aproximativos que levarão a soluções não exatas. Estes procedimentos podem ser classificados na forma da taxionomia da Figura 5.

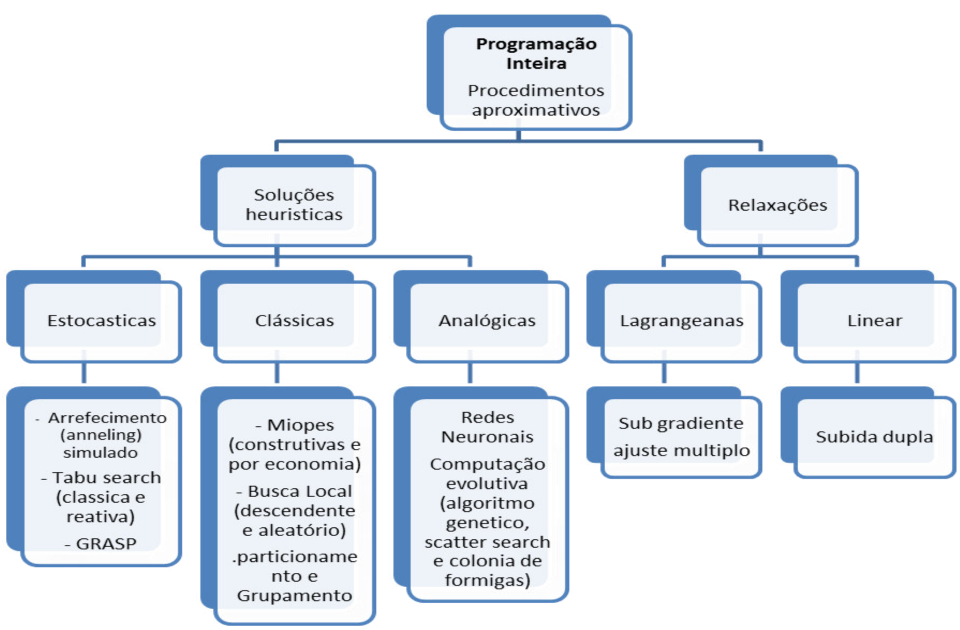


**Figura 5**: Classificação das abordagens aproximativas. Fonte: (GOLDBARG; LUNA, 2005)

Os algoritmos denominados heurísticos ou aproximativos são conjunto de técnicas e algoritmos computacionalmente muito eficientes, mas que não garantem a solução ótima para um problema de programação linear inteira.

As soluções heurísticas modernas têm se destacado pela qualidade das soluções encontradas, onde se pode destacar as que são apresentadas a seguir, (EBERHART; SHI, 2007); (GOLDBARG;LUNA, 2005) :

- Algoritmos genéticos;
- Genéticos híbridos (busca local, redes neurais, programação linear, arrefecimento simulado, B&B (*Branch & Bound*), *Tabu Search*);
- Algoritmos meméticos (utilizam o conceito de evolução cultural - técnica de busca local para aperfeiçoar o cromossomo genético);
- Arrefecimento (*annealing*) simulado - apoiada na distribuição de Bolztman, pretende simular um processo de resfriamento típico de metais;
- Nuvem de partículas (*Particles Swarm*) - técnica estocástica de otimização baseada em populações inspirada no comportamento de pássaros e cardumes de peixes;
- Colônia de formigas - segue a linha de bio-mimética social para o caso do comportamento de formigas e cupins);
- Estratégia *multistart* e GRASP - técnicas compostas de procedimentos que a partir de uma determinada solução, encontra uma nova solução viável, e então a vizinhança da nova solução gerada é examinada por um procedimento de busca local de modo a intensificar o resultado (O GRASP é uma variante *multistart* na qual as soluções viáveis são encontradas através de um procedimento quase guloso);
- Busca Tabu (*Tabu Search*) - baseada em procedimento de busca local enriquecido por estratégia de manipulação de memória de modo que se reexamine as configurações já examinadas;
- Busca em Vizinhança Variável e Decomposição em vizinhança variável;
- *Scatter Search* e *Path Relinking* - *Scatter Search* utiliza uma abordagem de algoritmo genético na utilização de boas soluções conhecidas para novas e melhores soluções. O *Path Relinking* usa procedimentos parecidos;

- Algoritmos culturais - baseados no desenvolvimento do indivíduo por regras de seleção cultural, ou seja, conjunto de conhecimentos acumulados na sociedade pela experiência de indivíduos. Dois espaços de decisão: população e conjunto de crenças;
- Algoritmos transgenéticos: replica o paradigma da simbiogênese em que criaturas de diferentes espécies trocam informações, eventualmente até material genético de modo a adaptar ao meio ambiente, ou seja, entre populações de indivíduos de diferente natureza;
- Aprendizado de reforço (*Reinforcement Learning*) - método construtivo onde as melhores soluções são bonificadas e utilizadas para guiar as novas soluções.

Os algoritmos genéticos constituem métodos de busca baseados em mecanismos de seleção e evolução natural. Os primeiros trabalhos foram realizados por John Holland em 1962 (EBERHART; SHI, 2007) que buscavam fundamentar uma teoria geral de sistemas de adaptação robusta, mas, no entanto, foi capaz de encontrar um caminho de grande e imediata aplicação prática na determinação de máximos e mínimos de funções matemáticas.

O algoritmo genético diz respeito a otimização heurística por meio de operações combinatórias de melhorias de membros de uma população de soluções individuais. Em resumo, são parte da computação evolucionária e possuem as seguintes caraterísticas gerais:

- operam um conjunto de pontos (denominado população) e não a partir de dados isolados;
- operam em um espaço de soluções decodificadas e não diretamente no espaço de busca;
- necessita como informação somente o valor da função objetivo (fitness);
- usam transições probabilísticas e não regras determinísticas.

## 4.3 A programação dinâmica (PD)

Bertsekas (1996) afirma que a técnica de programação dinâmica (DP) se apoia em uma idéia muito simples, o princípio de otimalidade. Este nome se deve a Bellman, que contribuiu de forma expressiva para a popularização da técnica e sua transformação em uma ferramenta sistemática.

A Programação Dinâmica (PD) é uma técnica utilizada com procedimento aproximativo para otimização de processos de decisão com vários estágios ou etapas sequênciais, conforme Figura 6. O objetivo é encontrar uma política (trajetória) ótima para cada etapa e, consequentemente, todo o processo.

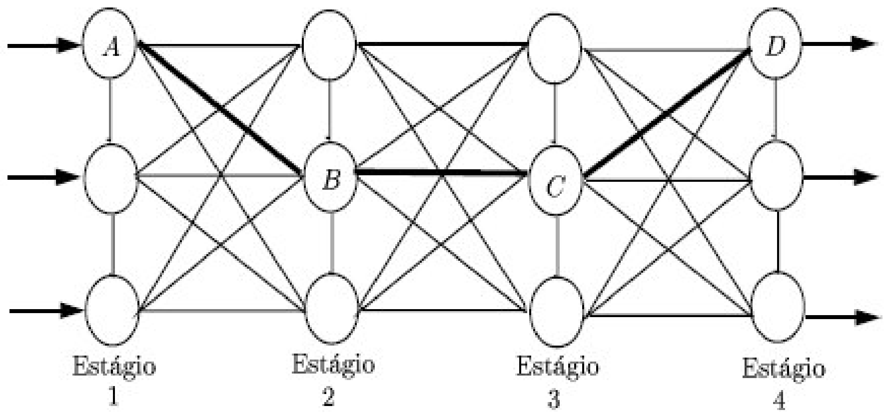


**Figura 6**: Processo de decisão com vários estágios

Fonte: (DA FONSECA NETO, 2010)

Alguns algoritmos de solução utilizados para problemas de programação dinâmica são mostrados na Figura 7.

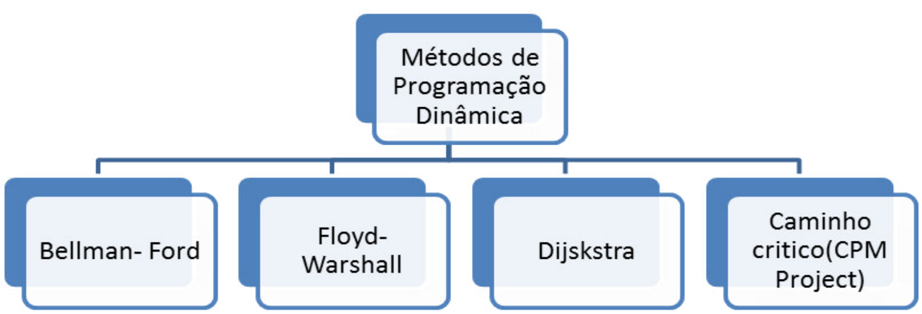


**Figura 7**: Métodos de solução de programação dinâmica

O que rege toda esta área da otimização (PD) é o princípio da otimalidade de Bellman o qual diz que se uma política apresenta a propriedade de que, a despeito das decisões tomadas em certo estágio, as decisões restantes a partir deste estágio devem constituir uma política ótima.

Calcula-se a política ótima para o último estágio e, a partir daí, de forma recursiva, sempre considerando o estado dos estágios calculados anteriormente, encontra-se a política ótima de todos os estágios, até o primeiro estágio de todos.

A equação de Hamilton-Bellman-Jacobi (HBJ) resume este conceito:

$$m_j(u) = otimo_{0 \le x \le u}\left\{ f_j(x) + m_{j+1}(u - x) \right\}, \tag{22}$$

sendo,

$u$: a variável de estado;

$m_j(u)$, o retorno ótimo para se completar o processo começando no estágio $j$ com o estado $u$;

$f_j(x)$, as funções não lineares de uma variável.

A diferença entre os modelos de otimização clássica e otimização dinâmica é que, nos primeiros, se busca, simplesmente, um vetor de componentes reais que otimize uma função; nos modelos de otimização dinâmica, procura-se uma trajetória temporal que associe, a cada ponto do tempo, o nível ótimo das variáveis.

O método de Bellman e a equação HBJ requerem grande esforço computacional e os últimos desenvolvimentos em inteligência artificial, como lógica fuzzy, redes neurais e computação evolutiva proporcionaram a abordagem ADP– *Approximate Dynamic Programming* (Programação Dinâmica Aproximada) (POWELL, 2007).

### 4.3.1 A programação dinâmica para o problema do transporte

O problema do transporte também pode ter uma abordagem pela PD, e, consequentemente, abrir caminho para utilização de redes neurais em problemas desta natureza.

Considerando que:

1. Os modelos de planejamento/programação (otimização) de sistemas de transporte podem ser estáticos ou dinâmicos;

2. Em serviços regulares de transportes (passageiros) tem-se a necessidade de planejamento tático, onde as incertezas e a dinâmica são minimizadas e/ou desconsideradas;

3. Para o transporte de cargas a natureza é eminentemente dinâmica, então a necessidade da abordagem dinâmica é imperativa. Neste caso o problema é dinâmico uma vez que os dados mudam com o tempo (curto-prazo), há interação de atividades através do tempo e os recursos são dinâmicos por se reposicionarem ao término das tarefas.

Diante destas considerações, é aceitável o uso de conceitos dinâmicos em transportes de cargas (natureza dinâmica), mas seria pouco aceitável o uso desta programação em modelos de otimização de transportes de passageiros, pois sairíamos de uso de conceitos de programação linear simplificada para modelos dinâmicos variáveis no tempo, com ganhos mínimos na qualidade da solução final. Para sistemas de transportes com comportamento dinâmico se pode utilizar a programação dinâmica estocástica aproximada e adaptativa, onde se maximiza o resultado econômico combinado com o conceito de redes de filas logísticas (LIMA; GUALDA, 2008), ver Figura 8.

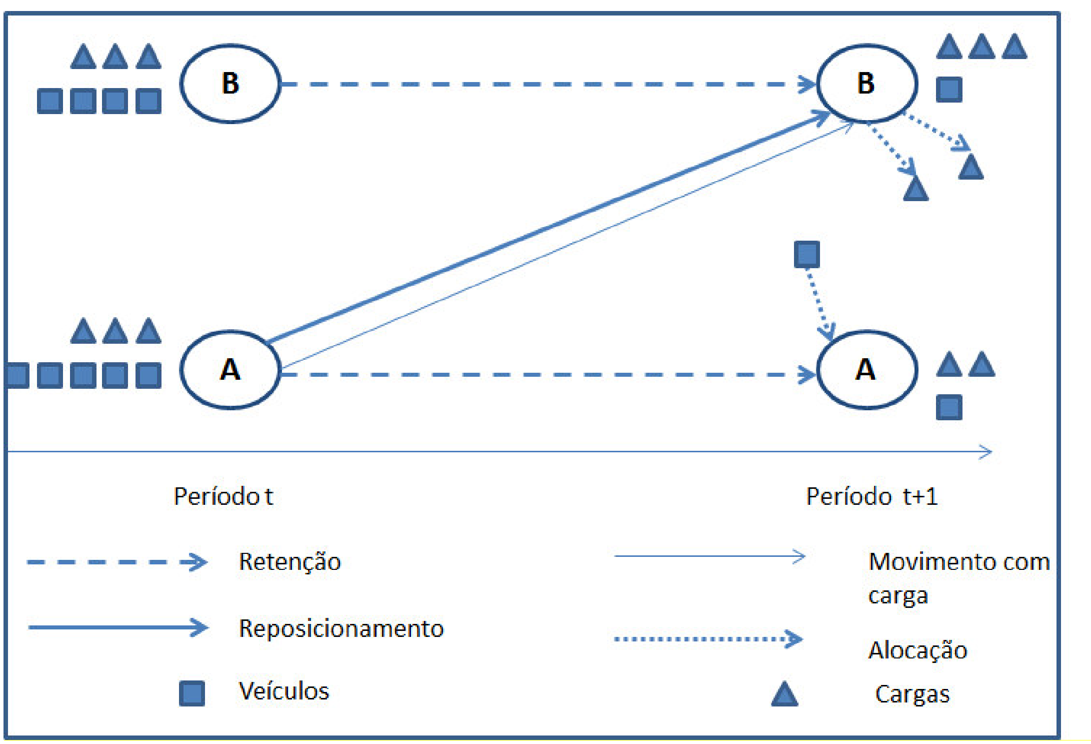


**Figura 8**: Rede de Filas Logísticas. Fonte: (LIMA; GUALDA,2008)

Neste modelo, o conceito de estágios de tempo (estados), próprio da programação dinâmica, está claramente presente, como se pode ver na Figura 9, uma rede de dois estágios nos tempos *t, t+1 e t+2*.

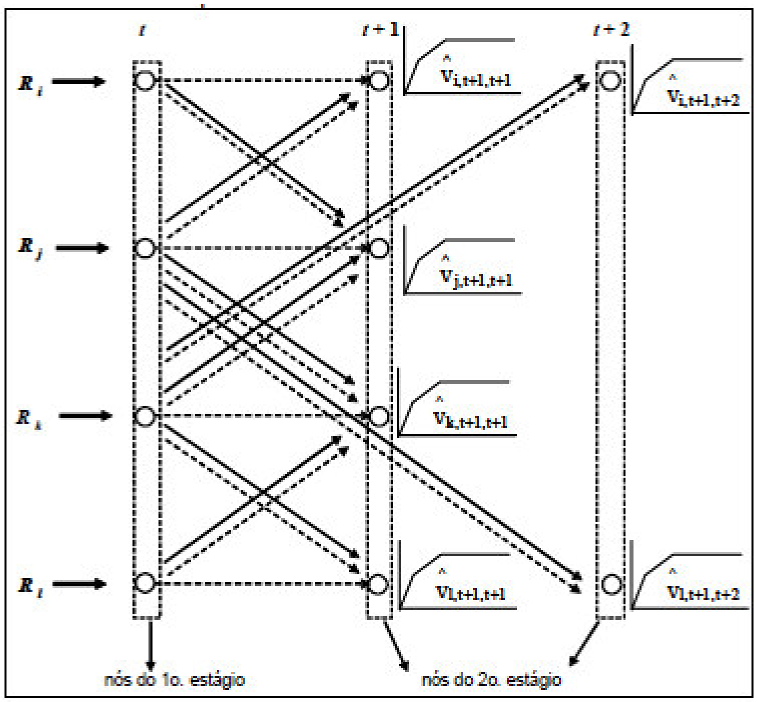


**Figura 9**: Modelo dinâmico de transporte de cargas com dois estágios

Fonte: (LIMA;GUALDA,2008)

Onde se tem a função de recompensa genérica para um partilhar período de tempo *t*:

$$g_t(x_t y_t) = \sum_{i \in J} \sum_{l \in Lit} r_{it} x_{lt} - \sum_{i \in J} \sum_{j \in J} c_{ij} y_{ijt} \qquad (23)$$

E a função objetivo, considerando todo o período do estudo, em termos de programação dinâmica estocástica, igual a:

$$\max_{xo,\, yo \in Ho} g_o(x_o y_o) + E\left\{ \sum_{l \in Lit} \max_{xt,\, yt \in Ht} g_t(x_t y_t) \right\} \qquad (24)$$

Em casos aparentados ao problema clássico, chamado de problema de transbordo não capacitado (PTNC), se pode utilizar a programação dinâmica com ganho aceitável (GOLDBARG; LUNA, 2005).

O PTNC aborda o problema do transporte com um conjunto de nós intermediários entre os pontos de origem e destino, chamados pontos de transbordo ou armazenamento.

A formulação deste problema tem a seguinte forma:

$$\min z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{s} c_{ik} x_{ik} + \sum_{k=1}^{s} \sum_{j=1}^{n} w_{kj} y_{kj} + \sum_{k=1}^{s} f_k v_k \tag{25}$$

sujeito a,

$$\sum_{k=1}^{s} x_{ik} \leq a_k v_k, k = 1, \ldots, s$$

$$\sum_{k=1}^{s} y_{kj} = d_j, \; j = 1, \ldots, n$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ik} = \sum_{j=1}^{n} x_{kj}, \; k = 1, \ldots, s$$

$$x_{ik}, y_{kj} \geq 0, v_k \in [0,1]$$

A característica intrínseca deste problema é a sua dinâmica através do tempo dado em que períodos de tempo diferentes as quantidades em cada nó se modificam.

Este problema pode ser atualmente resolvido por meio de algoritmos derivados do método Simplex, mas claramente pode adotar uma abordagem pela programação dinâmica com um algoritmo recursivo.

Uma atenção a ser dada é que para transbordo de passageiros a restrição a seguir não é válida:

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ik} = \sum_{j=1}^{n} x_{kj}, \; k = 1, \ldots, s \tag{26}$$

Portanto, é aceitável o uso de conceitos dinâmicos em transportes de cargas (natureza dinâmica), mas seria pouco aceitável o uso desta programação em modelos de otimização de transportes de passageiros, pois sairíamos de uso de conceitos de programação linear simplificada para modelos dinâmicos variáveis no tempo, com ganhos mínimos na qualidade da solução final.

A abordagem do problema de transporte, ou outro problema de otimização, por algoritmos genéticos, deve considerar que estes são algoritmos com mecanismos de seleção e evolução natural, ou algoritmos de busca probabilística inteligente, onde se pode determinar máximos e mínimos de funções matemáticas; e principalmente usam transições probabilísticas e não regras determinísticas – portanto, têm sido utilizados em solução de problemas estocásticos. Consequentemente, o uso deste tipo de método de computação evolucionária teria ganhos no caso de se ter uma abordagem das variáveis do problema do transporte como funções estocásticas com a incorporação das incertezas das situações reais. O que não é o caso do problema aqui abordado.

Como o problema do transporte também pode ter uma abordagem pela Programação Dinâmica, consequentemente se abre caminho para utilização de RNA´s em problemas desta natureza.

Fica claro que a configuração multi-estágios da programação dinâmica, aplicável em problemas PNTC remete às configurações do tipo RNAs com conexões *feedfoward* (Figura 10), onde os neurônios seriam os nós dos estágios e as sinapses seriam as transições dos estágios, o que leva até a técnica de programação neuro-dinâmica.

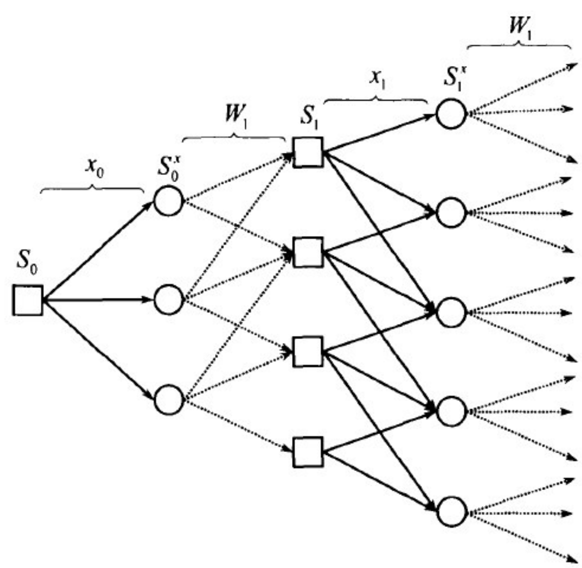


**Figura 10**: Modelo com configuração multi-estágios e conexões *feedforward*

Fonte: (POWELL, 2007)

A NPD (Neuro Dynamic Programming) é uma metodologia baseada em conhecimentos de inteligência artificial (redes neurais e aprendizado por reforço), programação dinâmica e controle ótimo estocástico. A NPD aborda decisões tomadas em estágios e objetiva formular políticas que minimizem o custo total efetivo sobre vários estágios.

As redes neurais artificiais, utilizadas para estruturas (ou arquitetura) de aproximação paramétrica de funções, são utilizadas com o objetivo de construir representações aproximadas da função "*cost-to-go*", ou seja, a função que quantifica o custo da transição entre estágios, porque é o único método possível para quebrar a maldição da dimensionalidade, tendo em vista as grandes dimensões dos espaços de estado neste tipo de problema (BERTSEKAS, 1996).

O objetivo da NPD é encontrar soluções sub-ótimas efetivas para problemas complexos de planejamento e tomada de decisão. A NPD aborda decisões tomadas em estágios e objetiva formular políticas que minimizem o custo total efetivo sobre vários estágios.

O método permite "aprender como tomar boas decisões pela observação de seus próprios comportamentos, e usando estruturas internas para melhorar as ações através de mecanismos de reforço".

Considerando-se a equação de Bellman (BERTSEKAS, 1996):

$$J^*(i) = \min_u E\left[ g(i,u,j) + J^*(j) / i,u \right] \tag{27}$$

Sendo, $J^*$ é o custo ótimo "*cost-to-go*" do estado, o que incorpora o custo total do sistema dinâmico de tempo discreto da Figura 11.

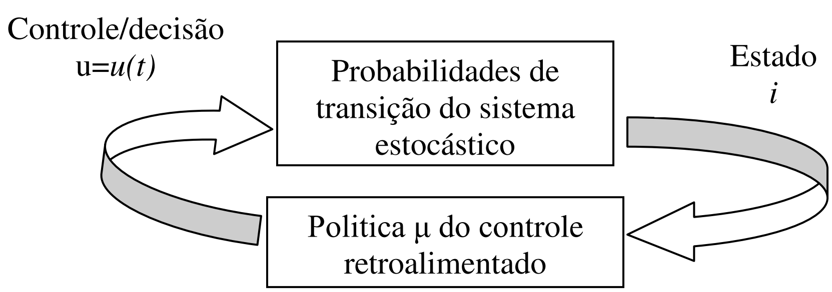


**Figura 11:** Sistema dinâmico com retroalimentação.Fonte: (BERTSEKAS, 1996)

O objetivo da PD é encontrar numericamente o custo ótimo $J^*$ , quando isto não é possível devido ao grande número de estados e controle (maldição da dimensionalidade), então se busca uma solução sub-ótima que é o objetivo deste método.

Neste caso a função $J^*$ é substituída pela função:

$$\tilde{\tilde{J}}(j,r) \tag{28}$$

Onde $r$ é um vetor de parâmetros, e a função é chamada de "cost-to-go" aproximada, ou função *scoring*, possível de se obter por simulações ou uso de redes neurais.

A expressão minimizada da equação de Bellman, se aproximada para facilitar os cálculos, é chamada de *Q-factor* ou fator Q (BERTSEKAS, 1996).

$$Q^*(i,u) = E\left[g(i,u,j) + J^*(j)/i,u\right] \tag{29}$$

O interesse deste trabalho se encontra em problemas de horizonte infinito, e entre estes os problemas de caminho mais curto estocástico, cuja equação (com α=1) é mostrada a seguir:

$$J^\pi(i) = \lim_{N\to\infty} E\left[\sum_{k=0}^{N-1} \alpha^k g\big(i_k, \mu_k(i_k), i_{k+1}\big) \;\Big|\; i_0 = i\right] \tag{30}$$

Fazer α = 1 significa fazer o custo "*cost-to-go*" significativo, e a existência de um estado final sem custos, denominado 0, isto é, onde não haverá custo adicionais neste estado. O problema é então chegar ao estado final com um custo mínimo.

No método proposto, o objetivo é construir representações aproximadas da função "cost-to-go", porque é o único método possível para quebrar a maldição da dimensionalidade, tendo em vista espaços de estados de grandes dimensões.

Lembrando-se que o termo rede neural é utilizado para estruturas (ou arquitetura) de aproximação paramétrica de funções, o método segue a seguinte sequência:

O primeiro passo da representação da aproximação é desenvolver uma arquitetura de aproximação que é uma forma funcional envolvendo um determinado número de parâmetros livres.

O processo de ajustar estes parâmetros é conhecido como treinamento ou aprendizado.

Registre-se que neste trabalho a aproximação de interesse é da função ótima *J*(i)* "*cost-to-go*", ou ainda, no treinamento do par *(i, J*(i)).* Como esta função não é conhecida e nem pode ser medida experimentalmente, a NDP tem uma dificuldade adicional, pois a aproximação necessita ser feita junto com o cálculo (via algoritmo) de *J*(i).*

A arquitetura de aproximação pode ser linear ou não linear. A forma linear é apresentada como segue:

$$\tilde{J}(i,r) = r(0) + \sum_{k=1}^{K} r(k)\Phi_k(i) \quad , \tag{31}$$

sendo, *r(k)* um vetor de parâmetros e $\phi_k$ as funções base.

Os problemas de treinamento de redes neurais são problemas de otimização quando se quer encontrar um conjunto de parâmetros ou pesos de uma arquitetura de aproximação que prevê o melhor ajuste entre a arquitetura e um dado conjunto de pares de dados (entrada/saída), que são tipicamente da forma de mínimos quadrados:

$$\begin{aligned} &\min \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m} \|gi(r)\|^2, \\ &s.a. \\ &r \in R^n \end{aligned} \tag{32}$$

Para a função custo linear, temos a forma:

$$\sum_i \left( J(i) - \sum_k r(k)\Phi_k(i) \right)^2 \tag{33}$$

Para a função custo não-linear, tem-se:

$$\sum_i \left( J(i) - \tilde{\tilde{J}}(i,r) \right)^2 \tag{34}$$

Os métodos computacionais para solução de problemas de mínimo quadrado são diversos, entre estes se tem:

- Método de decomposição de valor único;
- Algoritmo (iterativo) de filtro de Kalman;
- Métodos do gradiente (Newton);
- Método de gradiente incremental.

A programação fuzzy também tem sido testada na otimização de modelos de sistemas transportes, também utilizando restrições no modelo adotado de qualidade e custo (FENG *et al*, 2010).

# CAPÍTULO 5

# VALIDAÇÃO DO MODELO

O modelo de otimização proposto necessita ser validado para que se ajuste o modelo a dados factíveis. Posto isso, realizou-se simulações com casos simples, e compatíveis com dados de um sistema de transporte urbano real, cujos resultados permitem tirar conclusões acerca do modelo.

Na primeira fase da validação, necessitamos incluir, no modelo, os dados do caso teste, de modo que se obtenha um sistema de equações na forma canônica do problema de otimização com restrições de transporte e que este seja simulável no software MATLAB em seu Toolbox de Otimização, considerando como um caso de programação linear.

O Toolbox do MATLAB, no *Solve linprog*, permite a simulação por meio de três algoritmos diferentes: *Large Scale*, baseado no método LIPSOL de Y. Zhang, que é uma variante do método de Mehrota, sendo um método de ponto interior primal-dual e mais adequado com o espaço de variáveis de grandes dimensões; *Medium Scale*, que é uma variante do algoritmo de programação quadrática sequencial, com o termo quadrático igualado a zero; e o método Simplex. As simulações foram realizadas utilizando os três métodos para avaliar o desempenho do modelo e verificar qual o método que melhor se ajusta ao fim proposto no presente trabalho (MATLAB, 2011)

## 5.1 Simulações com dados numéricos

### 5.1.1 Caso teste 1

O exemplo testado considera: duas origens, dois destinos, duas rotas para cada par origem-destino, dois núcleos populacionais em cada rota; e veículos com capacidade de 100 passageiros e índice de renovação de 1,5, ou seja:

- $n$ = 2; (origem)
- $m$ = 2; (destino)

- $b$ = 2; (rotas)
- $k$ = 2; (núcleos populacionais)
- $Cv$ = 100. (lotação)
- $Ir$ = 1,5(renovação)

Têm-se para os parâmetros:

- $Ipk$ = 2,5 passageiros/km;
- $h$ = 15 min;
- $Cr$ = 1 (todos passageiros pagantes).

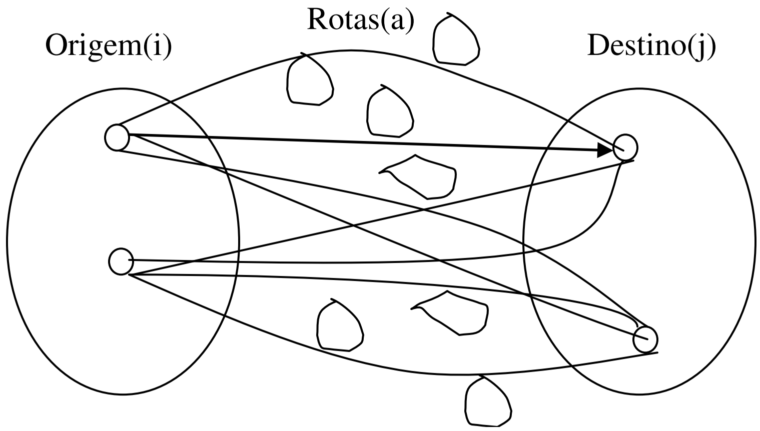


**Figura 12:** Topologia (grafo) do caso teste

Além disso, o cálculo é realizado para um horário específico (horário de pico), ou seja, a função não varia com o tempo, que é o que normalmente ocorre na programação de sistemas de transporte, são programadas faixas de operação no pico da demanda e fora do pico. O cálculo da forma das funções objetivo e as das funções de restrição estão no Apêndice C.

A tabela do Apêndice B1 mostra os valores dos coeficientes das variáveis de decisão a partir de dados do caso teste 1.

- *A função objetivo f(x)*

Da tabela do Apêndice B1, se obtém a forma final da função objetivo:

$$f(x) = 0.56 \cdot x_1 + 0,88 \cdot x_2 + 0.896x_3 + 0.96x_4$$
$$+1.18 \cdot x_5 + 0.93 \cdot x_6 + 0.65 \cdot x_7 + 0.93 \cdot x_8$$

Cujo vetor de coeficientes tem a forma:

$$C = [0.56; 0.883; 0.896; 0.96; \\ 1.18; 0.93; 0.65; 0.93]$$

*- A função de restrição $g_1(x)$*

A restrição $g_1(x)$ é, na verdade, a função objetivo, que calcula o tempo total, ponderando-se pelo número de vias, *b*, e o número de destinos*, m*. Considerando-se o parâmetro *h =15min* (0,25h), tem-se:

$$g_1(x) = 0,14x_1 + 0,220x_2 + 0,220x_3 + 0,242x_4 + \\ 0,295x_5 + 0,233x_6 + 0,164x_7 + 0,233x_8$$

*- A função de restrição $g_2(x)$*

A equação $g_2(x)$ tem a seguinte forma:

$$g_2(x) = -\frac{1}{b.c_r}(g_{2,1}(x) + g_{2,2}(x) + g_{2,3}(x) + g_{2,4}(x) + \\ g_{2,5}(x) + g_{2,6}(x) + g_{2,7}(x) + g_{2,8}(x))$$

Então, (para *b* = 2, *Cr* = 1):

$$g_2(x) = -20x_1 - 20x_2 - 23x_3 - 22x_4 \\ -18x_5 - 17.5x_6 - 30x_7 - 18x_8$$

A matriz *A* dos coeficientes das restrições é:

$$A = \begin{bmatrix} 0.14 & 0.22 & 0.22 & 0.242 & 0.295 & 0.233 & 0.164 & 0.239 \\ -20.0 & -20.0 & -23.0 & -22.0 & -18.0 & -17.5 & -30.0 & -18.0 \end{bmatrix}$$

E o vetor dos parâmetros *b*:

$$b = \begin{bmatrix} 0,25 \\ -2,5 \end{bmatrix}$$

Pode-se agora usar o MATLAB para solução de nosso problema de otimização, para encontrar os valores das variáveis de decisão *xi, i=1, 2,8.*

No Toolbox de Otimização, entra-se com os vetores e matriz que descrevem nosso problema utilizando o *Solver linprog* com os algoritmos disponíveis.

Os limites utilizados (bounds):

*Lower* = [0.1; 0.1; 0.1; 0.08; 0.05; 0.09; 0.06; 0.07]

*Upper* = [ 100; 100; 100; 100; 100; 100; 100; 100;100]

Os resultados encontrados são mostrados na Tabela 3:

| *Variável (xi)* | *Valor* |
|---|---|
| $x_1$ | 0,1 |
| $x_2$ | 0,1 |
| $x_3$ | 0,1 |
| $x_4$ | 0,08 |
| $x_5$ | 0,05 |
| $x_6$ | 0,07 |
| $x_7$ | 0,06 |
| $x_8$ | 0,07 |
| $f(x)$ | 0,5575 |

**Tabela 3**: Resultados da simulação do caso teste 1

Foram utilizados os valores default de critério de parada (*stopping criteria*), *10 x nº de variáveis*, e de tolerância entre iterações (*tolerance function*), *1 x10-6*.

Foram realizadas simulações com os três algoritmos disponíveis no *Solver Linprog* e os resultados foram absolutamente iguais, mas o algoritmo Simplex levou a vantagem no número de iterações necessárias para chegar à solução em relação aos outros (uma para oito iterações), o que mostra a sua robustez e eficiência. Considerando que o número de variáveis de decisão é pequeno, neste caso teste, isso deve ter sido determinante para o melhor desempenho do simplex em relação a outros métodos.

Os valores das variáveis que buscamos são o inverso dos valores das variáveis de decisão, portanto se inverte os valores da Tabela 3 e chega-se aos valores da Tabela 4:

| *Variável (Fi)* | *Valor* |
|---|---|
| $F_1$ | 10 |
| $F_2$ | 10 |
| $F_3$ | 10 |
| $F_4$ | 12,5 (13) |
| $F_5$ | 20 |
| $F_6$ | 14,2 (14) |
| $F_7$ | 17,7 (18) |
| $F_8$ | 14,2 (14) |

**Tabela 4**: Valores das variáveis de decisão do caso teste 1

Os resultados obtidos são coerentes com valores praticáveis em operações de sistemas reais.

### 5.1.2 Caso teste 2

Neste caso agora se variou os valores das distâncias $D_{ij,a}$ (distância entre origem e destino) do caso teste 1 para analisar a sensibilidade do modelo. Neste caso se optou por testar valores bem inferiores das distancias do caso teste 1. Os outros valores de população ($x_{w,a}$), velocidade operacional ($V_{oij,a}$) e distancia até a rota ($d_{w,a}$) permanecem os mesmo visto que na pratica estes valores não tem grande variação e o que queremos é avaliar o desempenho do modelo para valores diferenciados de distancias das rotas (origem-destino).

Os valores dos dados de entrada estão na tabela do Apêndice B2.

O vetor de coeficientes é

$$C = [1.10; 0.883; 1.797; 1.97;$$
$$2.36; 1.91; 1.36; 1.87]$$

A matriz *A* dos coeficientes das restrições é:

$$A = \begin{bmatrix} 0.28 & 0.22 & 0.449 & 0.483 & 0.5908 & 0.478 & 0.34 & 0.466 \\ -10.0 & -20.0 & -11.5 & -11.0 & -9.0 & -8.5 & -14.5 & -9.0 \end{bmatrix}$$

E o vetor dos parâmetros *b:*

$$b = \begin{bmatrix} 0,25 \\ -2,5 \end{bmatrix}$$

Foram utilizados os valores default de critério de parada (*stopping criteria*), *10 x nº de variáveis*, e de tolerância entre iterações (*tolerance function*), *1 x10-6*. As simulações foram realizadas com os três algoritmos disponíveis no MATLAB e com desempenhos similares ao do caso teste 1.

Os limites utilizados (bounds):

*Lower* = [0.1; 0.1; 0.1; 0.01; 0.01; 0.01; 0.01; 0.01]

*Upper* = [ 100; 100; 100; 100; 100; 100; 100; 100;100]

Os resultados encontrados são mostrados na Tabela 5:

| *Variável (xi)* | *Valor* |
|---|---|
| $x_1$ | 0,01 |
| $x_2$ | 0,088 |
| $x_3$ | 0,01 |
| $x_4$ | 0,01 |
| $x_5$ | 0,01 |
| $x_6$ | 0,01 |
| $x_7$ | 0,01 |
| $x_8$ | 0,01 |
| $f(x)$ | 0,2016 |

**Tabela 5**: Resultados da simulação do caso teste 2

Os valores das variáveis que se busca são o inverso dos valores das variáveis de decisão, portanto se inverte os valores da Tabela 5 e chega-se aos valores da Tabela 6:

| *Variável (Fi)* | *Valor* |
|---|---|
| $F_1$ | 100 |
| $F_2$ | 11,36 |
| $F_3$ | 100 |
| $F_4$ | 100 |
| $F_5$ | 100 |
| $F_6$ | 100 |
| $F_7$ | 100 |
| $F_8$ | 100 |

**Tabela 6**: Valores das variáveis de decisão do caso teste 2

Os valores obtidos são incoerentes com aqueles encontrados em sistemas reais, o que mostra que o modelo não tem um bom comportamento para valores pequenos de *Dij,a* , ou sistemas com distâncias de origem destino pequenas.

### 5.1.3 Caso teste 3

Agora se optou por variar os valores das distâncias $D_{ij,a}$ (distância entre origem e destino) , população ($x_{w,a}$), e distância até a rota ($d_{w,a}$) de modo que os valores dos coeficientes da função objetivo ficassem bem superiores aos dos casos testes anteriores

O vetor de coeficientes da função encontrada é:

$$C = [2.66; 7.66; 1.28; 6.07;$$
$$2.36; 1.66; 1.0; 2.77]$$

A matriz *A* dos coeficientes das restrições é:

$$A = \begin{bmatrix} 1.11 & 1.91 & 3.21 & 1.51 & 0.599 & 2.16 & 2.75 & 5.4 \\ -5.0 & -4.0 & -7.5 & -3.0 & -9.0 & -3.0 & -4.0 & -3.0 \end{bmatrix}$$

E o vetor dos parâmetros *b*:

$$b = \begin{bmatrix} 0,25 \\ -2,5 \end{bmatrix}$$

Foram utilizados os valores default de critério de parada (*stopping criteria*), *10 x nº de variáveis*, e de tolerância entre iterações (*tolerance function*), *1 x10-6*. As simulações foram realizadas com os três algoritmos disponíveis no MATLAB e com desempenhos similares ao do caso teste 1.

Os limites utilizados (bounds):

*Lower* = [0.1; 0.1; 0.1; 0.01; 0.01; 0.01; 0.01; 0.01]

*Upper* = [ 100; 100; 100; 100; 100; 100; 100; 100;100]

Os resultados encontrados, ajustando o espaço factível de solução com os limites (bounds), são mostrados na Tabela 7:

| *Variável (xi)* | *Valor* |
|---|---|
| $x_1$ | 0,0 |
| $x_2$ | 0,001 |
| $x_3$ | 0,027 |
| $x_4$ | 0,001 |
| $x_5$ | 0,254 |
| $x_6$ | 0,0 |
| $x_7$ | 0,001 |
| $x_8$ | 0,002 |
| $f(x)$ | 0,1104 |

**Tabela 7**: Resultados da simulação do caso teste 3

Os valores das variáveis que se busca são o inverso dos valores das variáveis de decisão, portanto se inverte os valores da Tabela 7 e se chega aos valores da Tabela 8:

| *Variável (Fi)* | *Valor* |
|---|---|
| $F_1$ | 0 |
| $F_2$ | 1000 |
| $F_3$ | 37,03 |
| $F_4$ | 1000 |
| $F_5$ | 3,93 |
| $F_6$ | 0 |
| $F_7$ | 1000 |
| $F_8$ | 500 |

**Tabela 8**: Valores das variáveis de decisão do caso teste 3

Observa-se que os valores das variáveis se tornam incoerentes com aqueles encontrados em sistemas reais quando os coeficientes da função objetivo crescem bastante. Para que estes valores se tornem pequenos é necessário que:

- as distâncias *Dij,a* sejam grandes, ou as distancias *dw,a*; e as populações *xw,a*, ou velocidades *Vo* sejam pequenas, ou a combinação destas resultem em coeficientes em torno de 1.0. Na prática, o modelo funciona de modo adequado para distancias *Dij,a* grandes, ou no caso de distancias *Dij,a* pequenas, com populações *xw,a*, o que mostra que o modelo não tem um bom comportamento para valores pequenos de *Dij,a* , ou sistemas com distâncias de origem destino pequenas.

Na análise da sensibilidade do modelo às variáveis de entrada, concluiu-se que:

- o modelo tem um bom desempenho para valores grandes de distâncias *Dij,a* e *dw,a* e valores pequenos de *xw,a e Vo*, que resultem conjuntamente em coeficientes da função objetivo com valores próximos e menores que a unidade;

- sendo o problema de minimização de tempo de percurso, é evidente que a função qualidade tem maior influência no resultado, e, consequentemente, com valores maiores de frota;

- as variações do parâmetro da restrição de qualidade (*headway*) não influenciaram o resultado, e as variações do parâmetro da restrição de rentabilidade (custo) só influenciam o resultado se for aumentado em grandes proporções;

- os resultados encontrados permitem dizer que o modelo tende a dimensionar com folga a frota e com valores acima dos utilizados na prática, mas que isto pode ser minimizado pela adoção de restrição mais severa relacionada com o custo (rentabilidade), como, por exemplo, ocupação mínima do veículo a partir da qual a operação se torne rentável.

# CAPÍTULO 6

# CONCLUSÕES E TRABALHO FUTUROS

A análise de sensibilidade do modelo constatou que o desempenho do modelo é satisfatório para valores de distância sempre grandes nos pares origem-destino, em escala de centros urbanos, assim como para valores de população atendida ao longo das rotas.

O uso de programação linear contínua se mostrou adequada para um problema de programação linear inteira, evitando-se buscar uma solução por método heurístico.

O modelo tende a ter uma característica marcante de valorização da função qualidade de serviço, por buscar minimizar o tempo de percurso (viagem) dos veículos, apesar da restrição de rentabilidade, com isto gerando resultados das variáveis de decisão (frota) acima do praticado em sistemas de transportes reais.

A inclusão de uma restrição de não nulidade, não encontrada no modelo canônico de transporte, nas variáveis de decisão tornou o resultado das validações coerentes com dados de sistemas reais.

Há inúmeros métodos disponíveis para problemas de otimização. A escolha do método para solução do problema, seja um método clássico ou um método heurístico, deve ser balizada pela natureza do problema e da forma do sistema de equações representativo, ou seja, da função objetivo e suas restrições.

Problemas de programação inteira, ou otimização combinatória, tendem a requerer soluções heurísticas, entre as quais se incluem os métodos bio-inspirados.

Problemas de programação linear requerem métodos clássicos já bem testados, como o método simplex e método de ponto interior. Quando as variáveis envolvidas são de natureza estocástica, os métodos clássicos tendem a ser inadequados. O uso de algoritmos genéticos nestes casos tem sido adotado com sucesso, pois se trata de algoritmo que trabalha com populações (conjunto de pontos). Como exemplo temos o software baseado em algoritmo genético *Riskoptmizer* da Palisade que é utilizado para minimização (otimização) de riscos financeiros.

No caso estudado de problema de transportes, o modelo proposto nos leva a um sistema de equações lineares cujas variáveis deveriam nos fornecer valores inteiros (frota), mas se verifica que podem ser utilizados métodos de programação linear, com arredondamento dos valores finais das variáveis, mas o modelo deve ser adequado para que se restrinja o espaço solução a valores positivos e não-negativos, maiores que zero, ou seja, valores nulos não são adequados. Isto é uma adaptação da forma canônica de não-negatividade.

O problema do caso estudado também é problema estacionário no tempo, caso se queira estudar sua variabilidade no tempo se deve adotar modelos dinâmicos.

As Redes Neurais Artificiais - RNAs e sistemas fuzzy são mais adequados para a modelagem de processos, e os algoritmos evolucionários são mais adequados para otimização de processos.

Da mesma forma que se pode combinar RNAs com outros métodos de otimização, os sistema fuzzy são bastante adequados na combinação com os algoritmos genéticos já tendo sido desenvolvidas funções para uso nos AG's na evolução de populações em operações de mutação e cruzamentos.

O uso de algoritmos genéticos e redes neurais deve crescer em um futuro próximo para problemas de programação matemática, incluído problemas de transporte. O uso de lógica fuzzy em problema de otimização deve merecer atenção especial para a construção de modelos mais representativos do modelo real.

Para a continuidade do aperfeiçoamento desta modelagem, outras restrições podem ser avaliadas no modelo, como por exemplo: a restrição de rentabilidade que hoje avalia o *Ipk* (índice de passageiros por quilômetro) poderia ser substituída por uma restrição que avalie uma ocupação mínima dos veículos.

## REFERÊNCIAS


BAZARAA, Mokthar; S., SHERALI, Hanif D.; SHETTY, C. M. **Nonlinear Programming**. Theory and Algorithms. 3. rd. New Jersey: Edition, John Wiley and Sons, 2006.

BERTSEKAS, Dimitri P. **Dynamic Programming ad Optimal Control. Two Volume Set.** Boston: Athena Scientific, 1995.

BERTSEKAS, Dimitri P. TSISTSIKLISs, John. **Neuro-Dynamic Programming.** Boston: MIT, 1996.

BIELLI, Maurizio et al. **Genetic Algorithms in bus network optimization**. Transportation Research part C 10 (2002) pp 19-36. Disponível em: http://www.google.com.br/webhp?hl=pt-BR&tab=mw#hl=pt-R&site=webhp&q=Bielli+Genetic+Algorithms+ins+bus+network+optmization&oq=Bielli+Genetic+Algorithms+ins+bus+network+optmization&aq=f&aqi=&aql=&gs_sm=e&gs_upl=1872l4378l0l4645l16l16l10l36l0l0l795l1149l6-2l2l0&bav=on.2,or.r_gc.r_pw.,cf.osb&fp=535b45f745c6b747&biw=1017&bih=397 Acesso em: 20/01/2012

BODIN, L.; GOLDEN, B.; ASSAD, A; BALL, M. **Routing and Scheduling of Vehicles and Crews: the state of art**. Journal Computer and Operations Research, 10(2): 65-211, Oxford, 1983.

BORNDORFER, Ralf. **Discrete Optimization in Public Transportation**. 1st Indo-US Symposium on "Advances in Mass Transit and Travel Behavior Research (MTTBR-08) ", Assam, 2008.

BOTTER, Rui Carlos, Douglas TACLA, Celso, HINO. **Estudo e aplicação de transporte colaborativo para cargas de grande volume**. Revista Pesquisa Operacional, v.26, n.1, p.25-49, Janeiro a Abril, 2006.

CASCETTA, Ennio. **Transportation System Analysis, Models and Applications.** New York: Springer, 2009.

CEDER, Avishai, WILSON, Nigel. **Bus network design.** Disponível em: http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0191260784900190. Acesso em: 20/01/2012.

CHAKOBORTY. **A genetical algorithm**. Disponível em: http://www.google.com.br/#hl=pt-BR&q=Chakoborty+Optmimal+fleet+size&oq=Chakoborty+Optmimal+fleet+size&aq=f&aqi=&aql=&gs_sm=s&gs_upl=3580451396218l0l3987611501411012610l0l1935l2841l4-2.8-. Acesso em: 30/01/2012

CHI- TSONG, Chen. **Linear System Theory and Design.** Orlando: Harcourt Brace College Publishers, 1984.

CIPRINANI, Ernesto et al. **A procedure for thr solution of the urban bus network design problem with elastic demand. Advanced OR and Methods in Transportation.** Disponível em**:** http://www.st.ewi.tudelft.nl. Acesso em 15/01/2012

DA FONSECA NETTO, J. V. **Programação Dinâmica Adaptativa e Controle Multi-variável - Notas de Aula – Mestrado.** São Luís: UFMA, 2010.

DANIELS, R. W. **Introduction to Numerical Methods and Optimization Techniques.** New York: Elsevier North-Holland, 1978.

DE FARIAS, Daniela P. **The linear programming approach to approximate dynamic programming: theory and application.** Dissertação de Doutorado. Stanford University: Junho, 2002.

EBERHART, R.: SHI, Y. **Computational Intelligence – Concepts and Implementations**. Elsevier, Burlington, 2007

FAN, Wei, MACHEMEL, Randy B. **Using simulated annealing algorithm to solve the transit route network design problem.** Journal of Transportation Engineering- February, 2006.

FELIZARI, L. C.; LUDERS, Ricardo. **Otimização com incerteza aplicada a problemas de produção derivados em refinarias de petróleo**. 3º Congresso Brasileiro de P&D em Petróleo e Gás, Salvador, 2005.

FENG, Xi, et al. **Optimization of Urban Bus Transportation based on Principles of Sustainable Transportation .** Journal of the Eastern Asia Society for Transportation Studies. Vol.8, 2010.

FERRAZ, Antônio C. P., TORRES, Isaac G. E. **Transporte publico urbano. 2ª ed.** São Carlos: RiMa, 2004.

GODINHO, J. C. M. **Aplicação do método de análise multicritério na escolha de traçado de linhas de ônibus de transporte público utilizando sistema de informação geográfica.** Dissertação de Mestrado do Programa de Pós-Graduação em Engenharia, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro. Disponível em: <http://petrisc.pet.coppe.ufrj.br/dissertacoes/transporte_publico/godinho_jucemara.pdf>. Acesso em: 04 de agosto de 2011.

GOLDBARG, Mário César; LUNA, Henrique Pacca L. **Otimização Combinatória e programação linear**: **modelos e algoritmos**. 2. ed. – Rio de Janeiro: Elsevier, 2005.

GORNI, Daniel. **Modelagem para operação de Bus Rapid Transit**. Dissertação de Mestrado da Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. Disponível em http://petrisc.pet.coppe.ufrj.br/dissertacoes/transporte_publico/godinho_jucemara.pdf.. Acesso em: 23 de agosto de 2011.

GUIHAIRE, Valerie, HAO, Jin-Kao. **Transit Network Design and Scheduling: a Global Review.** Université d'Angers, 2008**.** Disponível em: http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.139.5473&rep=rep1&type=pdf. Acesso em: 20 de dezembro de 2011.

KALLEHAUGE, B.; LARSEN, J.; MADSEN, O. **Lagrangian duality applied to the vehicle routing problem with time windows**. Journal Computers and Operations Research, Volume 33: Issue 5, Oxford, 2006**.** Disponível em: http://dl.acm.org/citation.cfm?id=1125443 . Acesso em: 12 de dezembro de 2011.

KOHK N. MADSEN, O. **An optimization algorithm for the vehicle routing problem with time windows based on lagrangean relaxation in public transportation**. Journal Computers and Operations Research, Volume 45: 395 – 405, Oxford, 1997.

LAPORTE, Gilbert et al**. Classical and Modern Heuristics for the vehicle routing problem.** International Transportation in Operational Research**.** Disponível em**:** http://www.google.com.br/#sclient=psy-ab&hl=pt-bR&source=hp&q=Reeves+modern+heuristic+techniques&psj=1&oq=Reeves+modern+heuristic+techniques&aq=f&aqi=&aql=&gs_sm=s&gs.Acesso em: 31/01/2012

LIMA FILHO, Antônio M.; GUALDA, Nicolau D. F. **Programação Dinâmica aplicada a alocação de recursos no transporte de cargas.** Revista dos Transportes, v. XVI, n.2, p. 41-47, dez. 2008.

MATLAB - **The Language of Technical Computing.** Disponível em: <http://www.mathworks.com>. Acesso em: 20 de janeiro de 2011.

MENG, Qinag; LIU, Guoshan; YANG, Hai. **A trust region method for the transportation network optimization problem with user equilibrium constraint.** Journal of the Eastern Asia Society for Transportation Studies, Vol. 6. Pp 1455-1470, 2005.

NOVAES, Antônio Galvão. **Métodos de Otimização: aplicações aos transportes.** São Paulo: Edgard Blucher-TRANSESP, 1978.

PIMENTA, Daniel J. **Algoritmo de otimização para o problema de roteamento de veículos no transporte conjunto de carga e de passageiros.** Dissertação de Mestrado do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, Universidade Federal de Minas Gerais, 2001.

POWELL, Warren B. **Approximatte Dynamic Programming – Solving the curses of dimensionality.** New Jersey: John Wiley & Sons, 2007.

CIPRINANI, Ernesto et al. **Bus line planning** Disponível em**:** http://www.st.ewi.tudelft.nl. Acesso em 15/01/2012

RARDIN, Ronald L. **Optimization in Operations Research.** New Jersey: Prentice-Hall, 1998.

ROCHA, Fabiano L. **Identificação de problemas lineares multi-variáveis usando redes neurais perceptron multicamadas e função .** Dissertação de Mestrado do Programa de Pós-Graduação em Engenharia, Pontifícia Universidade Católica do Paraná, 2006.

SCHOBEL, Anita. **Optimization in Public Transportation - Stop Location, Delay Management and Tariff Zone Design in a Public Transportation Network**. Series: Springer Optimization and Its Applications , Vol. 3 New York: Springer, 2006.

SHIH, Mao-Chang et al**. Planning and design model for transit route networks with coordinated operations.** Disponível em**:** **http://www.webs1.uidaho.edu/...** Acesso em**:** 20/12/2011

SILVA, Antônio Nelson Rodrigues da Silva; FERRAZ, Antônio Cloves. **Transporte Público Urbano – Operação e Administração – Notas de Aula**. São Carlos: UFSCAR, 1991.

ZHANG, Xi, et al. **Study on the simulation and optimization of integrated transport ease terminal area of raiway passenger station.** Proceedings of the Eastern Asia Society for Transportation Studies. Vol. 8, 2011.

ZHAO, Fang. **Large-Scale Transit Network Optimization by Minimizing User Cost and Transfers.** Disponivel em http://www.nctr.usf.edu/jpt/.../JPT%209-2%20Zhao.pd... Acesso em: 30/12/2012

APÊNDICES.

# APÊNDICE A
# MÉTODO SIMPLEX DE SOLUÇÃO DE MODELOS DE PROGRAMAÇÃO LINEAR CONTÍNUA

No método Simplex se consegue visualizar como é desenvolvido o processo de busca da solução. Em problemas de PL com duas variáveis, a solução pode ser facilmente obtida pelo método gráfico, que não será aqui detalhado. A partir de três variáveis, a solução não poderá ser encontrada pelo método gráfico, mas a observação deste método nos permite concluir:

- a região (solução) viável é constituída por um polígono convexo;
- o ponto ótimo está sempre localizado no contorno da região viável;
- o ponto ótimo coincide sempre com um vértice do polígono (ou ponto extremo).

O algoritmo Simplex é uma variante da busca da melhoria adaptada para explorar as propriedades da programação linear na forma padrão, que se move de solução a solução permanecendo no espaço factível e melhorando o valor da função objetivo até que o ponto local (global) ótimo seja encontrado. Todos os passos do Simplex nos levam a uma solução de ponto extremo.

O método Simplex inicia em um ponto extremo da região factível, ou seja, em uma solução básica factível para o modelo na forma padrão, ou seja, que satisfaça as restrições de não-negatividade.

A solução básica é obtida fixando suficientes variáveis no valor zero, de modo que as equações possam ser resolvidas por substituição.

Para se aplicar o método Simplex é necessário transformar as desigualdades das restrições em igualdades. Para isto se adicionam as variáveis residuais, também chamadas de variáveis de folga:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n - x_{n+1} = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n + x_{n+2} = b_2$$

Estas variáveis residuais representam as quantidades que faltam ao primeiro membro de cada desigualdade para completar os valores indicados pelo segundo membro da desigualdade.

Com esta alteração o modelo matemático se transforma na chamada forma-padrão do problema de Programação Linear.

Uma solução viável deste modelo é qualquer uma que satisfaça as restrições e que sejam não-negativas.

Uma solução básica corresponde a um ponto extremo (ou vértice) do poliedro convexo onde ficam as soluções viáveis do problema, e a solução ótima é uma solução básica para a qual o valor da função é máximo.

O método Simplex busca a determinação da solução ótima sem que seja necessário analisar todos os pontos extremos do poliedro convexo. O algoritmo parte de uma solução básica (usualmente, a origem) e por diversas iterações busca de um ponto extremo a outro até chegar a solução ótima.

Para que o método Simplex seja aplicável o problema deve estar em sua forma canônica, onde é necessário que:

- cada variável básica apareça somente numa única equação de restrição;
- e, os valores do segundo membros destas equações sejam sempre positivo ($b_i > 0$).

# APÊNDICE B
# DADOS DE ENTRADA E COEFICIENTES DAS VARIÁVEIS DE DECISÃO DAS SIMULAÇÕES DE VALIDAÇÃO

APÊNDICE B1

Dados de entrada e coeficientes das variáveis de decisão do caso teste 1

| | i | j | a | w | k | Cv | Xw,a | Ir | dw,a(km) | Voij,a(km/h) | Dij,a(km) | Ci |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| C1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 100 | 100 | 1,5 | 0,9 | 21 | 40 | 58,33 |
| C2 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 100 | 200 | 1,5 | 1 | 22 | 40 | 110,00 |
| **Co1** | | | | | | | | | | | | **168,33** |
| C3 | 1 | 1 | 2 | 1 | 2 | 100 | 300 | 1,5 | 0,8 | 21 | 40 | 196,88 |
| C4 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 100 | 150 | 1,5 | 1,2 | 22 | 40 | 68,75 |
| **Co2** | | | | | | | | | | | | **265,63** |
| C5 | 1 | 2 | 1 | 1 | 2 | 100 | 150 | 1,5 | 0,5 | 21 | 46 | 136,96 |
| C6 | 1 | 2 | 1 | 2 | 2 | 100 | 250 | 1,5 | 0,9 | 22 | 46 | 132,85 |
| **Co3** | | | | | | | | | | | | **269,81** |
| C7 | 1 | 2 | 2 | 1 | 2 | 100 | 300 | 1,5 | 0,8 | 21 | 44 | 178,98 |
| C8 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 | 100 | 200 | 1,5 | 0,9 | 22 | 44 | 111,11 |
| **Co4** | | | | | | | | | | | | **290,09** |
| C9 | 2 | 1 | 1 | 1 | 2 | 100 | 300 | 1,5 | 0,8 | 21 | 36 | 218,75 |
| C10 | 2 | 1 | 1 | 2 | 2 | 100 | 200 | 1,5 | 0,9 | 22 | 36 | 135,8024691 |
| **Co5** | | | | | | | | | | | | **354,5524691** |
| C11 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 100 | 250 | 1,5 | 0,75 | 21 | 35 | 200 |
| C12 | 2 | 1 | 2 | 2 | 2 | 100 | 100 | 1,5 | 0,8 | 22 | 35 | 78,57142857 |
| **Co6** | | | | | | | | | | | | **2,79E+02** |
| C13 | 2 | 2 | 2 | 1 | 2 | 100 | 300 | 1,5 | 0,7 | 21 | 60 | 150 |
| C14 | 2 | 2 | 1 | 2 | 2 | 100 | 130 | 1,5 | 1 | 22 | 60 | 47,66666667 |
| **Co7** | | | | | | | | | | | | **197,6666667** |
| C14 | 2 | 2 | 2 | 1 | 2 | 100 | 240 | 1,5 | 0,75 | 21 | 36 | 186,6666667 |
| C15 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 100 | 130 | 1,5 | 0,85 | 22 | 36 | 93,46405229 |
| **Co8** | | | | | | | | | | | | **280,130719** |

APÊNDICE B2
Dados de entrada e coeficientes das variáveis de decisão do caso teste 2

| | i | j | a | w | k | Cv | Xw,a | Ir | dw,a(km) | Voij,a(km/h) | Dij,a(km) | Ci |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| C1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 100 | 100 | 1,5 | 0,9 | 21 | 20 | 116,67 |
| C2 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 100 | 200 | 1,5 | 1 | 22 | 20 | 220,00 |
| **Co1** | | | | | | | | | | | | **336,67** |
| C3 | 1 | 1 | 2 | 1 | 2 | 100 | 300 | 1,5 | 0,8 | 21 | 40 | 196,88 |
| C4 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 100 | 150 | 1,5 | 1,2 | 22 | 40 | 68,75 |
| **Co2** | | | | | | | | | | | | **265,63** |
| C5 | 1 | 2 | 1 | 1 | 2 | 100 | 150 | 1,5 | 0,5 | 21 | 23 | 273,91 |
| C6 | 1 | 2 | 1 | 2 | 2 | 100 | 250 | 1,5 | 0,9 | 22 | 23 | 265,70 |
| **Co3** | | | | | | | | | | | | **539,61** |
| C7 | 1 | 2 | 2 | 1 | 2 | 100 | 300 | 1,5 | 0,8 | 21 | 22 | 357,95 |
| C8 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 | 100 | 200 | 1,5 | 0,9 | 22 | 22 | 222,22 |
| **Co4** | | | | | | | | | | | | **580,18** |
| C9 | 2 | 1 | 1 | 1 | 2 | 100 | 300 | 1,5 | 0,8 | 21 | 18 | 437,5 |
| C10 | 2 | 1 | 1 | 2 | 2 | 100 | 200 | 1,5 | 0,9 | 22 | 18 | 271,6049383 |
| **Co5** | | | | | | | | | | | | **709,1049383** |
| C11 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 100 | 250 | 1,5 | 0,75 | 21 | 17 | 411,7647059 |
| C12 | 2 | 1 | 2 | 2 | 2 | 100 | 100 | 1,5 | 0,8 | 22 | 17 | 161,7647059 |
| **Co6** | | | | | | | | | | | | **5,74E+02** |
| C13 | 2 | 2 | 2 | 1 | 2 | 100 | 300 | 1,5 | 0,7 | 21 | 29 | 310,3448276 |
| C14 | 2 | 2 | 1 | 2 | 2 | 100 | 130 | 1,5 | 1 | 22 | 29 | 98,62068966 |
| **Co7** | | | | | | | | | | | | **408,9655172** |
| C14 | 2 | 2 | 2 | 1 | 2 | 100 | 240 | 1,5 | 0,75 | 21 | 18 | 373,3333333 |
| C15 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 100 | 130 | 1,5 | 0,85 | 22 | 18 | 186,9281046 |
| **Co8** | | | | | | | | | | | | **560,2614379** |

# APÊNDICE C
# CÁLCULO DA FORMA DAS FUNÇÕES OBJETIVO E DE RESTRIÇÃO DOS CASOS TESTE

- *Cálculo da função objetivo f(x)*

1º passo *i=1; j=1; a=1; w=1*

$$f_1(x) = \frac{1}{Cv \cdot I_r \cdot k} \cdot \frac{x_{1,1} \cdot Vo_{11,1}}{d_{1,1} \cdot D_{11,1}} \cdot \frac{1}{F_{11,1}}$$

2º passo *i=1; j=1; a=1; w=2*

$$f_2(x) = \frac{1}{Cv \cdot I_r \cdot k} \cdot \frac{x_{2,1} \cdot Vo_{11,1}}{d_{2,1} \cdot D_{11,1}} \cdot \frac{1}{F_{11,1}}$$

3º passo *i=1; j=1; a=2; w=1*

$$f_3(x) = \frac{1}{Cv \cdot I_r \cdot k} \cdot \frac{x_{1,2} \cdot Vo_{11,2}}{d_{1,2} \cdot D_{11,2}} \cdot \frac{1}{F_{11,2}}$$

4º passo *i=1; j=1; a=2; w=2*

$$f_4(x) = \frac{1}{Cv \cdot I_r \cdot k} \cdot \frac{x_{2,2} \cdot Vo_{11,2}}{d_{2,2} \cdot D_{11,2}} \cdot \frac{1}{F_{11,2}}$$

5º passo *i=1; j=2; a=1; w=1*

$$f_5(x) = \frac{1}{Cv \cdot I_r \cdot k} \cdot \frac{x_{1,1} \cdot Vo_{12,1}}{d_{1,1} \cdot D_{12,1}} \cdot \frac{1}{F_{12,1}}$$

6º passo *i=1; j=2; a=1; w=2*

$$f_6(x) = \frac{1}{Cv \cdot I_r \cdot k} \cdot \frac{x_{2,1} \cdot Vo_{12,1}}{d_{2,1} \cdot D_{12,1}} \cdot \frac{1}{F_{12,1}}$$

7º passo *i=1; j=2; a=2; w=1*

$$f_7(x) = \frac{1}{Cv \cdot I_r \cdot k} \cdot \frac{x_{1,2} \cdot Vo_{12,2}}{d_{1,2} \cdot D_{12,2}} \cdot \frac{1}{F_{12,2}}$$

8º passo *i=1; j=2; a=2; w=2*

$$f_8(x) = \frac{1}{Cv \cdot I_r \cdot k} \cdot \frac{x_{2,2} \cdot Vo_{12,2}}{d_{2,2} \cdot D_{12,2}} \cdot \frac{1}{F_{12,2}}$$

9º passo *i=2; j=1; a=1; w=1*

$$f_9(x) = \frac{1}{Cv \cdot I_r \cdot k} \cdot \frac{x_{1,1} \cdot Vo_{21,1}}{d_{1,1} \cdot D_{21,1}} \cdot \frac{1}{F_{21,1}}$$

10º passo *i=2; j=1; a=1; w=2*

$$f_{10}(x) = \frac{1}{Cv \cdot I_r \cdot k} \cdot \frac{x_{2,1} \cdot Vo_{21,1}}{d_{2,1} \cdot D_{21,1}} \cdot \frac{1}{F_{21,1}}$$

<u>11º passo</u> *i=2; j=1; a=2; w=1*

$$f_{11}(x) = \frac{1}{Cv \cdot I_r \cdot k} \cdot \frac{x_{1,2} \cdot Vo_{21,2}}{d_{1,2} \cdot D_{21,2}} \cdot \frac{1}{F_{21,2}}$$

<u>12º passo</u> *i=2; j=1; a=2; w=2*

$$f_{12}(x) = \frac{1}{Cv \cdot I_r \cdot k} \cdot \frac{x_{2,2} \cdot Vo_{21,2}}{d_{2,2} \cdot D_{21,2}} \cdot \frac{1}{F_{21,2}}$$

<u>13º passo</u> *i=2; j=2; a=1; w=1*

$$f_{13}(x) = \frac{1}{Cv \cdot I_r \cdot k} \cdot \frac{x_{1,1} \cdot Vo_{22,1}}{d_{1,1} \cdot D_{22,1}} \cdot \frac{1}{F_{22,1}}$$

<u>14º passo</u> *i=2; j=2; a=1; w=2*

$$f_{14}(x) = \frac{1}{Cv \cdot I_r \cdot k} \cdot \frac{x_{2,1} \cdot Vo_{22,1}}{d_{2,1} \cdot D_{22,1}} \cdot \frac{1}{F_{22,1}}$$

<u>15º passo</u> *i=2; j=2; a=2; w=1*

$$f_{15}(x) = \frac{1}{Cv \cdot I_r \cdot k} \cdot \frac{x_{1,2} \cdot Vo_{22,2}}{d_{1,2} \cdot D_{22,2}} \cdot \frac{1}{F_{22,2}}$$

<u>16º passo</u> *i=2; j=2; a=2; w=2*

$$f_{16}(x) = \frac{1}{Cv \cdot I_r \cdot k} \cdot \frac{x_{2,2} \cdot Vo_{22,2}}{d_{2,2} \cdot D_{22,2}} \cdot \frac{1}{F_{22,2}}$$

Então *f(x)* fica:

$$\begin{aligned} f(x) = {} & f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) + f_4(x) + f_5(x) + f_6(x) + \\ & f_7(x) + f_8(x) + f_9(x) + f_{10}(x) + f_{11}(x) + f_{12}(x) + f_{13}(x) + \\ & f_{14}(x) + f_{15}(x) + f_{16}(x) \end{aligned}$$

Para simplificação das operações matemáticas se transforma as incógnitas $\frac{1}{F_{ij,a}}$ em $x_i$.

$$x_1 = \frac{1}{F_{11,1}};\; x_2 = \frac{1}{F_{11,2}};\; x_3 = \frac{1}{F_{12,1}};\; x_4 = \frac{1}{F_{12,2}};\; x_5 = \frac{1}{F_{21,1}};\; x_6 = \frac{1}{F_{21,2}};\; x_7 = \frac{1}{F_{22,1}};$$

$$x_8 = \frac{1}{F_{22,2}}$$

A função *f(x)* pode, então, ser escrita como:

$$f(x)=\frac{1}{Cv\cdot I_r\cdot k}(c_1+c_2)\cdot x_1+\frac{1}{Cv\cdot I_r\cdot k}(c_3+c_4)\cdot x_2+\frac{1}{Cv\cdot I_r\cdot k}(c_5+c_6)\cdot x_3+$$
$$\frac{1}{Cv\cdot I_r\cdot k}(c_7+c_8)\cdot x_4+\frac{1}{Cv\cdot I_r\cdot k}(c_9+c_{10})\cdot x_5+\frac{1}{Cv\cdot I_r\cdot k}(c_{11}+c_{12})\cdot x_6+$$
$$\frac{1}{Cv\cdot I_r\cdot k}(c_{13}+c_{14})\cdot x_7+\frac{1}{Cv\cdot I_r\cdot k}(c_{15}+c_{16})\cdot x_8$$

Como o termo $\frac{1}{Cv\cdot I_r\cdot k}$ é comum a todos se pode isolá-lo e chegar aos seguintes coeficientes das variáveis:

$$c_{o1}=(c_1+c_2);c_{o2}=(c_3+c_4);c_{o3}=(c_5+c_6)$$
$$c_{o4}=(c_7+c_8);c_{o5}=(c_9+c_{10});c_{o6}=(c_{11}+c_{12});$$
$$c_{o7}=(c_{13}+c_{14});c_{o8}=(c_{15}+c_{16})$$

Portanto,

$$f(x)=\frac{1}{Cv\cdot I_r\cdot k}(c_{o1}\cdot x_1+c_{o2}\cdot x_2+c_{o3}\cdot x_3+c_{o4}\cdot x_4+c_{o5}\cdot x_5+c_{o6}\cdot x_6+c_{o7}\cdot x_7+c_{o8}\cdot x_8)$$

A função pode ser escrita da forma:

$$f(x)=\frac{1}{Cv\cdot I_r\cdot k}(c_1+c_2)\cdot x_1+\frac{1}{Cv\cdot I_r\cdot k}(c_3+c_4)\cdot x_2+\frac{1}{Cv\cdot I_r\cdot k}(c_5+c_6)\cdot x_3+$$
$$\frac{1}{Cv\cdot I_r\cdot k}(c_7+c_8)\cdot x_4+\frac{1}{Cv\cdot I_r\cdot k}(c_9+c_{10})\cdot x_5+\frac{1}{Cv\cdot I_r\cdot k}(c_{11}+c_{12})\cdot x_6+$$
$$\frac{1}{Cv\cdot I_r\cdot k}(c_{13}+c_{14})\cdot x_7+\frac{1}{Cv\cdot I_r\cdot k}(c_{15}+c_{16})\cdot x_8$$

Ou ainda,

$$f(x)=\frac{1}{Cv\cdot I_r\cdot k}(c_{o1}\cdot x_1+c_{o2}\cdot x_2+c_{o3}\cdot x_3+$$
$$c_{o4}\cdot x_4+c_{o5}\cdot x_5+c_{o6}\cdot x_6+c_{o7}\cdot x_7+c_{o8}\cdot x_8)$$

- *Cálculo da função de restrição $g_2(x)$*

<u>1º passo</u> *i=1; j=1; a=1*

$$g_{2,1}(x) = \frac{D_{11,1}}{F_{11,1}}$$

<u>2º passo</u> *i=1; j=1; a=2*

$$g_{2,2}(x) = \frac{D_{11,2}}{F_{11,2}}$$

<u>3º passo</u> *i=1; j=2; a=1*

$$g_{2,3}(x) = \frac{D_{12,1}}{F_{12,1}}$$

<u>4º passo</u> *i=1; j=2; a=2*

$$g_{2,4}(x) = \frac{D_{12,2}}{F_{12,2}}$$

<u>5º passo</u> *i=2; j=1; a=1*

$$g_{2,5}(x) = \frac{D_{21,1}}{F_{21,1}}$$

<u>6º passo</u> *i=2; j=1; a=2*

$$g_{2,6}(x) = \frac{D_{21,2}}{F_{21,2}}$$

<u>7º passo</u> *i=2; j=2; a=1*

$$g_{2,7}(x) = \frac{D_{22,1}}{F_{22,1}}$$

<u>8º passo</u> *i=2; j=2; a=2*

$$g_{2,8}(x) = \frac{D_{22,2}}{F_{22,2}}$$

A equação $g_2(x)$ toma a seguinte forma:

$$g_2(x) = -\frac{1}{b.c_r}(g_{2,1}(x) + g_{2,2}(x) + g_{2,3}(x) + g_{2,4}(x) +$$
$$g_{2,5}(x) + g_{2,6}(x) + g_{2,7}(x) + g_{2,8}(x))$$