CAD 045 - Investimento e Cálculo Financeiro

Notas de Aula - Versão 2022

Prof. Aureliano Bressan

Sumário

1 Programa e Metodologia da Disciplina

Pra começar, algumas perguntas

- Por que estamos aqui?
- Para vocês, qual é a relevância do cálculo financeiro na vida pessoal?E na carreira?
- Como estudar?
- Sistema de avaliação da disciplina: cumulativo
- Ferramenta de trabalho: HP12c ou BRTC FC-12.

Situações do cotidiano envolvendo cálculo financeiro

NXR 160 Bros ESDD - Condição 1					
Preço à vista	Entrada	% Entrada	Prazo	Taxa	Parcela
R$13.458,00	R$999,00	7,42%	50 meses	2,30% a.m	R$460,00
NXR 160 Bros ESDD - Condição 2					
Preço à vista	Entrada	% Entrada*	Prazo	Taxa	Parcela
R$13.458,00	R$6.433,00	47,80%	36 meses	1,60% a.m	R$299,00
*Entrada mínima para essa condição: 40%					
NXR 160 Bros ESDD - Condição 3					
Preço à vista	Entrada	% Entrada*	Prazo	Taxa	Parcela
R$13.458,00	R$2.020,00	15,00%	55 meses	1,99% a.m	R$378,00

Rentabilidade

Fundo	No mês	No ano	3 meses	6 meses	12 meses	24 meses	36 meses
XP MACRO FI	0,41%	3,75%	0,07%	4,79%	15,13%	31,38%	-%
GÁVEA MACRO	0,87%	7,92%	5,97%	8,94%	14,94%	31,05%	50,99%
BB MULTIMER	-2,53%	-2,43%	-3,60%	-1,77%	3,06%	23,63%	33,10%
MAUÁ MACRO	-1,22%	1,09%	-4,62%	2,41%	13,34%	30,91%	63,84%
MIRAE ASSET	0,22%	-2,31%	-4,22%	-1,88%	0,37%	15,47%	34,45%
SANTANDER F	-0,06%	3,81%	0,15%	4,80%	11,82%	25,95%	42,64%

Situações do cotidiano envolvendo cálculo financeiro

2 Síntese do programa da disciplina

Principais tópicos abordados no curso

- Regimes de capitalização: simples, composta e contínua
- Taxas de juros: proporcionais, equivalentes, nominais e efetivas
- Taxas de juros e inflação.
- Principais produtos financeiros que pagam juros
- Séries de pagamentos
- Sistemas de amortização
- Métodos de avaliação de fluxos de caixa

Metodologia de Ensino

- Aulas presenciais om conteúdo online para estudo prévio
- Atividades práticas em sala
- Estudos de caso
- Leituras complementares

Boa parte dos livros da bibliografia estão disponíveis no catálogo on-line da UFMG.

Sistema de Avaliação

- Atividades em sala: 5 pontos
- Avaliações: 80 pontos
- Estudos de caso: 15 pontos

3 Guia rápido das operações básicas da HP12c

3.1 Operações Básicas de Soma e Produto

Lógica RPN

- **Lógica RPN** *(Reverse Polish Notation)*:
- A HP12c utiliza a Notação Polonesa Invertida para efetuar as operações (um tipo de linguagem lógica de programação).
- Com a Lógica RPN, operações mais elaboradas podem ser processadas rapidamente.
- Exemplos:

$$3 + (2 \times 6) \Rightarrow 6 \text{ ENTER } 2 \text{ X } 3 + \Rightarrow 15$$

$$19 \div 2 - (16 \times 8) \Rightarrow 19 \text{ ENTER } 2 \div 16 \text{ ENTER } 8 \text{ X } - \Rightarrow -118,5$$

$$(19 \div 2 - 16) \times 8 \Rightarrow 19 \text{ ENTER } 2 \div 16 - 8 \text{ X } \Rightarrow -52$$

3.2 Operações com Potências e Inversas

Potências e Inversas

Operadores:

- Tecla $\boxed{y^x}$: Operador de Potências
- Tecla $\boxed{1/x}$: Operador da Inversa de x.
- Exemplos

$$1,08^{12} \Rightarrow 1,08 \text{ ENTER } 12\ y^x \Rightarrow 2,51817$$

$$1/12 \Rightarrow 12 \quad 1/x \Rightarrow 0,08333$$

$$1,1275^{1/12} \Rightarrow 1,1275 \text{ ENTER } 12 \quad 1/x \quad y^x \Rightarrow 1,01005$$

3.3 Operações com Percentuais

Variação Percentual

- Operador: $\boxed{\Delta\%}$ Preço em $t = 0$: R$11,56 Preço em $t = 1$: R$12,49 Variação percentual entre $t = 0$ e $t = 1$:

$$11,56 \text{ ENTER } 12,49 \quad \Delta\% \Rightarrow 8,045\%$$

- Percentual de um total simples:

$$5\% \text{ de R\$3.190,00} \Rightarrow 3190 \text{ ENTER } 5\% \Rightarrow 159,50$$

Obtenção de subtotais

- Percentual do total de uma expressão:

  Exemplo:

  Deseja-se obter a soma dos valores de 3 cheques pré-datados (valores de R$ 1.340,00; R$ 1.876,18 e R$ 4.159,10) e a participação de cada um no total a receber:

$$1340 \text{ ENTER } 1876,18 + 4159,10+ \Rightarrow 7.375,28$$

$$1340 \quad \boxed{\%\mathbf{T}} \Rightarrow 25,44\%$$

$$\mathbf{CLx} \quad 1876,18 \quad \boxed{\%\mathbf{T}} \Rightarrow 25,44$$

$$\mathbf{CLx} \quad 4159,10 \quad \boxed{\%\mathbf{T}} \Rightarrow 56,39\%$$

3.4 Operações com Logaritmos e Antilogaritmos

Logaritmos Neperianos e Antilogaritmos

- Logaritmo Neperiano ($e = 2,718282$) de 1,55: $\ln 1,55 \Rightarrow 1,55 \quad g \quad \boxed{LN} \Rightarrow 0,43825$
- Antilog de 0,045: $e^{0,045} \Rightarrow 0,045 \quad g \quad \boxed{e^x} \Rightarrow 1,04603$
- Antilog de 6,907755279: $e^{6,907755279} \Rightarrow 6,907755279 \quad g \quad \boxed{e^x} \Rightarrow 1,00000$

3.5 Operações com Somatório e Produtório

Somatórios

- Para o somatório, podemos utilizar o operador Σ da HP12c;

  Exemplo:

  Soma dos valores de compras de matéria prima (em R$) durante a semana: 500; 500; 120; 168; 168; 168 e 540.

  $\Sigma(500 + 500 + 120 + 168 + 168 + 168 + 540) = 2.164,00$ 2 ENTER 500 $\times$ $\boxed{\Sigma+}$ $\Rightarrow$ 120 $\boxed{\Sigma+}$ $\Rightarrow$ 3 ENTER 168 $\times$ $\boxed{\Sigma+}$ $\Rightarrow$ 540 $\boxed{\Sigma+}$ $\Rightarrow$ **RCL 2** $\Rightarrow$ 2.164,00

Produtórios

- As operações de produtório são geradas pela aplicação combinada do operador de potências y^x e do operador de produto x:

  Exemplo 1:

  $\prod$ (1,05 x 1,05 x 1,05 x 1,08 x 1,08 x 1,06)

  1,05 ENTER 3 y^x $1,08$ ENTER 2 y^x $1,06 \times \times \Rightarrow 1,43127$

  Exemplo 2:

  $\prod$ (1,53 x 1,5 x 1,5 x 1,89 x 1,8)

  1,53 ENTER 1,5 ENTER 2 $y^x \times 1,89 \times 1,8 \times \Rightarrow 11,7114$

3.6 Operações envolvendo Datas

Operações possíveis

A HP12c permite realizar as seguintes operações envolvendo datas:

- Número real de dias entre duas datas (e número de dias utilizando como base o ano de 360 dias);
- Data futura ou passada com base em uma data pré-estabelecida e um número de dias;
- Dia da semana correspondente a uma data futura ou passada.

Para estas operações, utilizaremos as funções **D.MY,** Δ **DYS** e **DATE**

Configuração e operações básicas

- De início, vamos configurar a calculadora para o formato dia/mês/ano com o comando ***g*** **D.MY**;
- Para sabermos o número de dias entre duas datas (01/12/2006 e 01/03/2012):
  - 1,122006 ENTER 1,032012 ***g*** Δ **DYS** $\Rightarrow$ 1.917
  - Se quisermos saber o número de dias com base no ano comercial (360 dias) pressionamos a tecla $x \gtrless y \Rightarrow 1890$.

- Data futura ou passada com base em uma data pré-estabelecida e um número de dias:
  - Dia correspondente a 184 dias à frente da data de 02/03/2010:
  - 2,032010 ENTER 184 ***g*** **DATE** ⇒ **2.09.2010 4**
- Dia da semana correspondente a uma data futura ou passada:
  - No primeiro exemplo, podemos usar a data final e o resultado para encontrar o dia da semana na data-base:
  - 1,032012 ENTER 1917 **CHS** **g** **DATE** ⇒ **1.12.2006 5**

3.7 Bibliografia

Leitura sugerida

- Bibliografia Básica:
  - BERTUCCI, L.A. Manual de operação da calculadora HP 12c. Belo Horizonte: UFMG, 2004. mimeo.
- Bibliografia Complementar:
  - VIEIRA SOBRINHO, J. D. Manual de Aplicações Financeiras HP-12C. São Paulo: Atlas, 2008. Capítulo 1.

4 Regimes de Capitalização

4.1 Principais variáveis e simbologia

Representações e Simbologia

- Diagramas de Fluxos de Caixa
- Nomenclatura das Variáveis
  - **P** ou **PV**: Principal ou Valor Presente;
  - **S** ou **FV**: Montante ou Valor Futuro;
  - **R** ou **PMT**: Valor de um Aporte ou Pagamento;
  - **n**: prazo da operação ou número de parcelas;
  - **J**: juros ganhos ou pagos (em $) em uma operação;
  - **i**: taxa de juros da operação;
  - **d**: taxa de desconto;
  - **r**: taxa real de juros (também usada nesta aula para taxa contínua de juros).

Fatores que afetam a taxa de juros:

- Risco;
- Despesas operacionais, contratuais e tributárias;
- Inflação;
- Remuneração Real (custo de oportunidade).

Formas de representação da taxa de juros

- Decimal;
- Percentual.

Formas de cotação dos prazos:

- As formas mais comuns no mercado são as seguintes
  - Ano Comercial: base 360 dias (12 meses de 30 dias);
  - Dias úteis: base 252 dias (12 meses de 21 dias úteis).
- Além destas formas, também são utilizadas as cotações com base no ano civil (365 dias). No entanto, a maior parte das operações no mercado brasileiro utiliza as duas convenções acima.

4.2 Capitalização Simples

Características:

- Os juros calculados a cada periodo incidem **sempre sobre a mesma base P**
- Os juros **J** formados a cada período são calculados então por $J = P \times i$
- Logo, o crescimento dos juros é uma função linear:

$$S_1 = P + i \cdot P = P(1+i)S_2 = (P + i \cdot P) + i \cdot P = P(1+2i) \vdots S_n = P + n \cdot i \cdot P$$

O que gera a seguinte equação básica da capitalização simples:

$$S = P(1 + n \cdot i) \tag{1}$$

$$J = n \cdot i \cdot P \tag{2}$$

Propriedades

- A equação (1) indica que os juros são diretamente proporcionais ao capital **P**, ao número de períodos **n** e à taxa de juros **i**.
- A partir da equaçao (1), temos:

$$\mathbf{P} = \frac{\mathbf{S}}{(\mathbf{1} + \mathbf{n} \cdot \mathbf{i})} \tag{3}$$

$$\mathbf{i} = \frac{(\mathbf{S}/\mathbf{P} - \mathbf{1})}{\mathbf{n}} \tag{4}$$

$$\mathbf{n} = \frac{(\mathbf{S}/\mathbf{P} - \mathbf{1})}{\mathbf{i}} \tag{5}$$

Aplicações

- O regime de juros simples é pouco utilizado na prática. Na verdade, apenas em operações de desconto e em operações com cheque especial;
- No entanto, utilizaremos os exemplos a seguir de modo a fixar as relações básicas deste regime.

Exemplos

Exemplo 1
Determinar os juros ganhos na aplicação de R$3.000 por 1 ano à taxa de 2% a.m. no regime de capitalização simples.

Exemplo 2
Determinar o montante de R$1.900 aplicados por seis meses à taxa simples de 1,5% a.m.

Exemplo 3
Determinar a taxa anual simples que transforma R$5.600 em R$8.000 em um ano.

4.3 Capitalização Composta

Características

- Regime mais comum nas operações do dia a dia;
- Consiste na incidência de juros sobre o saldo inicial em cada período:

$S_1 = P + P \cdot i = P(1+i) S_2 = P(1+i) + i \cdot P(1+i) = P(1+i)^2 \vdots S_n = P(1+i)^{n-1} + i \cdot P(1+i)^{n-1}$

o que gera a equação mais importante da matemática financeira:

$$\mathbf{S_n} = \mathbf{P}(\mathbf{1} + \mathbf{i})^{\mathbf{n}} \tag{6}$$

Características

Isolando **P**, temos:

$$\mathbf{P} = \frac{\mathbf{S_n}}{(\mathbf{1}+\mathbf{i})^{\mathbf{n}}} \tag{7}$$

- A derivação anterior considera que a taxa de juros **i** é constante ao longo do tempo;
- Neste regime, a relação entre o montante **S** e o principal **P** é uma função exponencial em **n**.
- O fator $(1+i)^n$ em (6) é denominado *fator de capitalização* ou *fator de valor futuro para capitalização única*;
- Já o fator $(1+i)^{-n}$ em (7) é denominado *fator de desconto* ou *fator de valor presente para pagamento único*.

Aplicações

- A maioria das aplicações financeiras de renda fixa e operações de empréstimo são regidas pela capitalização composta;
- Os exemplos a seguir ilustram algumas aplicações básicas.

Exemplos

Exemplo 1
À taxa de juros de 12 % a.a., determine o valor futuro de R$ 5.000 aplicados hoje, a ser resgatado em um prazo de 5 meses.

Exemplo 2
Um CDB paga taxa de 1,8% a.m. Qual é o valor a ser depositado hoje para que se obtenha R$ 25.000 após 2 anos?

Exemplo 3
Um investidor aplicou R$4.800 em um fundo de renda fixa e resgatou após 4 anos o montante de R$ 7.900. Qual foi a taxa de juros mensal desta operação?

4.4 Capitalização Continua

Características

- Nesse regime, a atualização do montante é feita *contínua* e *uniformemente* no tempo.
- Observe a relação abaixo entre o prazo de capitalização e o montante para $i = 12\% a.a.$ e $P = R\$100$:

Capitalização	**Frequência**	**Montante**
Anual	1	R$ 112,00
Semestral	2	R$ 112,36
Trimestral	4	R$ 112,55
Mensal	12	R$ 112,68
Diária	360	R$ 112,75
Horaria	8640	R$ 112,75

- No regime de juros compostos, a taxa discreta i representa a variação em um intervalo unitário de tempo n:

$$i = \frac{\Delta S}{S} \cdot \frac{1}{\Delta n} \tag{8}$$

- Já na capitalização continua, a taxa contínua r consiste na taxa de variação infinitesimal do montante em um intervalo infinitesimal de tempo:

$$r = \frac{\delta S}{S} \cdot \frac{1}{\delta n} \tag{9}$$

Derivação

- Considerando novamente a equação (6) e derivando a mesma em relação a n:

$$S = P(1+i)^n$$
$$\frac{dS}{dn} = P(1+i)^n \cdot \ln(1+i) \tag{10}$$

Dividindo ambos os lados de (10) pelo montante S obtemos:

$$\frac{dS}{dn} \cdot \frac{1}{S} = \ln(1+i) \tag{11}$$

Igualando (9) e (10) gera:

$$r = \ln(1+i) \Rightarrow (1+i) = e^r \tag{12}$$

Derivação

Substituindo (12) em (6), obtemos a fórmula básica da capitalização contínua

$$S = Pe^{rn} \tag{13}$$

Desta equação básica, obtemos:

$$P = Se^{-rn} \tag{14}$$
$$\ln \frac{S}{P} = \ln e^{rn} \tag{15}$$
$$r = \left(\frac{1}{n}\right) \ln \left(\frac{S}{P}\right) \tag{16}$$
$$n = \left(\frac{1}{r}\right) \ln \left(\frac{S}{P}\right) \tag{17}$$

Aplicações

- Regime muito utilizado em Finanças na precificação de derivativos, desgaste de equipamentos e outras situações em que os fluxos monetários se distribuem continuamente no tempo;

- Os exemplos a seguir ilustram aplicações das equações (13) a (17).

Exemplos

Exemplo 1
Determine o montante de uma aplicação de R$ 56.000 feita à taxa contínua de 2% a.m. durante 3 anos.

Exemplo 2
Qual é a taxa contínua mensal correspondente à aplicação de R$ 5.000 e resgate de R$ 8.000 após 36 meses?

Exemplo 3
Determine o número de períodos necessários para acumular R$ 500.000, considerando a um depósito único de R$ 10.000 e taxa contínua de juros de 1 % a.m.

4.5 Exercícios Sugeridos

Referências

- Capitalização Simples
  - Dal Zot e Castro, P. 21.
  - Vieira Sobrinho: p. 30, exercícios 1-12.
  - Hoji: p. 43, exercícios 1, 2, 3 e 7.
- Capitalização Composta
  - Dal Zot e Castro, P. 31.
  - Vieira Sobrinho: p. 44, exercicios 3-12.
  - Hoji: p. 66, exercícios 1 a 6.
- Capitalização Contínua
  - Samanez: p. 153, exercícios 7-9 e 14.
  - Hoji: p. 75, exercícios 1 a 4.

4.6 Bibliografia

Leitura Sugerida

- Bibliografia Básica:
  - DAL ZOT, Wili; CASTRO, Manuela Longini de. Matemática Financeira: fundamentos e aplicações. Porto Alegre: Bookman, 2015. Caps. 2 4.
  - SAMANEZ, C. P. Matemática Financeira. 5. ed. São Paulo: Prentice Hall, 2010. páginas 146-149.
- Bibliografia Complementar:
  - SECURATO, J.R. Cálculo Financeiro das Tesourarias. 3. Ed. São Paulo: Editora Saint Paul, 2005. Páginas 21-35.

5 Taxas de Juros: Parte I

5.1 Convenções no uso de taxas de juros

Convenções no uso de taxas de juros

Observação central
A taxa de juros deve sempre ser expressa, nos cálculos, na mesma unidade de tempo da variável n (prazo), podendo ser portanto uma taxa diária, mensal, trimestral, anual, etc.

- Assim, para períodos expressos em dias, devemos usar taxas diárias ou então expressar os dias como fração do mês/ano quando estamos a usar taxas mensais/anuais.

Exemplos

Exemplo 1
Determinar o valor futuro de R$ 2.500,00 aplicados hoje à taxa de 2,5% a.m. por um prazo de 25 dias.

Exemplo 2
Determinar o valor presente de uma dívida de R$14.000,00 que vence em 68 dias, sabendo que a taxa de juros é de 28% a.a.

5.2 Taxas Proporcionais

Conceito

- O conceito de taxas proporcionais está diretamente ligado ao regime de *capitalização simples*;
- Assim, duas taxas i_1 e i_2 são **proporcionais** quando, incidindo sobre um mesmo principal **P**, durante um mesmo prazo, geram o mesmo montante sob o regime de capitalização simples.
- Então, da igualdade de valores futuros, decorre

$$n_1 i_1 = n_2 i_2$$

Exemplos

Ex. 1
Determinar a taxa trimestral proporcional à taxa de 21%a.a.

Ex. 2
Determinar a taxa mensal proporcional à taxa de 36% a.a.

Ex. 3
Determinar a taxa anual proporcional à taxa de 0,053% a.d.

5.3 Taxas Equivalentes

Conceito

- O conceito de taxas equivalentes está diretamente ligado ao regime de *capitalização composta*;
- Duas taxas i_1 e i_2 expressas em unidades de tempo distintas, são ditas **equivalentes** quando, incidindo sob o mesmo principal durante o mesmo prazo, produzem o mesmo montante sob o regime de capitalização composta.
- Derivação

Exemplos

Ex. 1
Determinar a taxa anual equivalente à taxa de 2,5% a.m.

Ex. 2
Determinar a taxa diária equivalente à taxa de 4%a.m.

Ex. 3
Determinar a taxa por dia útil equivalente à taxa de 5,3% a.m. (mês com 21 dias úteis).

Ex. 4
A taxa obtida em uma operação foi de 18,7% a.p. (período com 67 dias úteis). Determine a taxa por dia útil e a taxa mensal equivalentes.

Observações

- A taxa diária equivalente, quando obtida sob a convenção de ano comercial, é conhecida no mercado como *taxa por dia corrido.*
- Esta expressão é utilizada para diferenciar esta taxa da *taxa por dia útil*, muito utilizada no mercado de renda fixa.

5.4 Taxas Nominais e Taxas Efetivas

Conceitos

- Uma taxa nominal é aquela que não é expressa na mesma unidade de tempo na qual os juros são capitalizados.
- É utilizada com frequência no mercado financeiro, embora a legislação obrigue as instituições a também divulgar a *taxa efetiva* da operação.
- A taxa efetiva é aquela que é expressa na mesma unidade de tempo da capitalização.

Derivação

- Seja i_n a taxa de juros nominal e m o número de períodos de capitalização contidos no período de um ano. A taxa efetiva será então dada pela resolução da seguinte igualdade:

$$S = P\left(1+\frac{i_n}{m}\right)^m = P(1+i_e)$$

- Onde i_e é a taxa efetiva. A equação final é dada por:

$$i_e = \left[\left(1+\frac{i_n}{m}\right)^m - 1\right]$$

Exemplos

Ex. 1
Dada a taxa de 12% a.a., capitalizada mensalmente, determine a taxa efetiva.

Ex. 2
Para a mesma taxa de 12% a.a., determine a taxa efetiva com base em uma capitalização diária e por hora.

Ex. 3
Dada a taxa de 3%a.m., capitalizada anualmente, determinar a taxa efetiva ao mês.

5.5 Exercícios Propostos

- Dal Zot e Castro, p. 42.
- Hoji: p. 66, exercícios 7 ao 10.
- Samanez, p. 65, exercícios 1 ao 22.
- Vieira Sobrinho, p. 217, exercícios 1 ao 9.
- Assaf Neto, p. 37, exercícios 1, 2, 4 e 7 e p. 73 exercícios 9 e 15.

5.6 Bibliografia

Leitura Sugerida

- Bibliografia Básica
  - SAMANEZ, C. P. Matemática Financeira. 5. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2010. páginas 36-59.
- Bibliografia Complementar
  - DAL ZOT, Wili; CASTRO, Manuela Longini de. Matemática Financeira: fundamentos e aplicações. Porto Alegre: Bookman, 2015. Cap. 5.
  - SECURATO, J.R. Cálculo Financeiro das Tesourarias. 3. Ed. São Paulo: Editora Saint Paul, 2005. Páginas 61-69.
  - VIEIRA SOBRINHO, J.D. Matemática Financeira. 7. ed. São Paulo: Atlas , 2000. Páginas 41 a 44 e capítulo 6.

6 Taxas de Juros: Parte II

6.1 Taxas de juros e inflação

Taxas aparentes e reais

- As taxas geralmente divulgadas no mercado financeiro são taxas *aparentes*, pois incorporam uma expectativa de inflação;
- Assim, para a avaliação da rentabilidade real de um investimento de renda fixa ou o custo real de um financiamento, é necessária a distinção entre *taxas aparentes* (que incorporam a inflação) e *taxas reais* (sem o efeito da inflação).

O papel da inflação

- De modo a compreender a relação entre as taxas aparente e real, considere I_0 como sendo o índice de preços no periodo 0 e I_1 o índice de preços no periodo 1. A relação entre estes dois índices é dada por:

$$\theta = \frac{I_1 - I_0}{I_0} = \frac{I_1}{I_0} - 1 \rightarrow \frac{I_1}{I_0} = (1+\theta) \tag{18}$$

- Em que θ representa a inflação observada entre os períodos 0 e 1.

Equação de Fisher

- Considerando então a inflação na composição de um valor futuro teremos, a partir da relação básica $S = P(1+i)^n$, considerando $n = 1$:

$$\begin{aligned} \frac{S}{I_1} &= \frac{P(1+r)}{I_0} \\ S &= P(1+r) \cdot \left(\frac{I_1}{I_0}\right) \\ S &= P(1+r)(1+\theta) \end{aligned} \tag{19}$$

- Sabendo então que o montante S será definido por uma taxa aparente i, temos $S = P(1+i)$.
- A igualdade deste resultado com a eq. (2) leva à Equação de Fisher:

$$(1+i) = (1+r)(1+\theta) \tag{20}$$

Equação de Fisher

- A equação anterior permite deduzir a taxa real de juros r a partir de uma taxa aparente i e da taxa de inflação θ.
- Como exemplo inicial, vamos calcular a taxa real de juros para uma taxa aparente de 10,25% a.a. e taxa esperada de inflação de 4,6% a.a.

Exemplos

Ex. 1
Qual é a taxa aparente de juros que deve ser cobrada em um empréstimo se o credor deseja uma rentabilidade real de 15,5% a.a. acrescida de correção pela inflação, esperada em 5,5% a.a.?

Ex. 2
Qual é a rentabilidade real de um investimento que, no último mês, apresentou ganho aparente/nominal de 2,5 % a.m., sabendo que a inflação *anualizada* foi de 4,6%a.a.?

Fórmula de Fisher generalizada

- A fórmula de Fisher trabalha com o conceito de *prêmios de risco*, ao incorporar à taxa exigida de juros um *prêmio pela inflação*;
- Fazendo então uma extensão do raciocínio anterior considerando outros tipos de prêmios, teremos a fórmula de Fisher generalizada:

$$(1+i) = (1+r)(1+\theta_1)(1+\theta_2)\dots(1+\theta_n) \tag{21}$$

- Em que θ_i correspondem a prêmios para diversos fatores de risco (p.ex., câmbio, crédito, entre outros).

Exemplo

Ex. 1
Uma loja de eletrodomésticos opera com vendas a prazo. A empresa considera basicamente três tipos de risco: inflação, atraso nos pagamentos e inadimplência. A sua taxa efetiva nas operações de crédito deve cobrir estes riscos. Sabe-se que:

- A taxa de inflação prevista é de 0,5%a.m.;
- A taxa de inadimplência é historicamente de 3% a.m.;
- A taxa de atraso nos pagamentos é historicamente de 2% a.m.;
- A rentabilidade real pretendida nestas operações é de 10% a.a.

Com base nestes dados, determine a taxa de juros que a empresa deve cobrar nas vendas a prazo, em termos mensais.

6.2 Taxas de juros acumuladas e taxa média

Conceitos

- A fórmula básica da capitalização composta, $S = P(1+i)^n$ pressupõe taxas constantes ao longo do tempo.
- Quando este não é o caso, temos de lançar mão de operações com *taxas acumuladas* ou *taxas médias*, que se baseiam na seguinte generalização da equação básica:

$$S = P(1+i_1)\cdot(1+i_2)\cdot(1+i_3)\dots(1+i_n) \tag{22}$$

- Esta equação nos permite definir os conceitos de taxa acumulada i_{ac} e taxa média $\bar{i}$.

Taxa Acumulada: Formalização

- A partir da relação definida em (5), podemos deduzir:
  - Taxa acumulada (ao periodo) da aplicação:

$$i_{ac} = S/P - 1 \tag{23}$$

  - Substituindo (6) em (5), temos:

$$S = P(1 + i_1) \cdot (1 + i_2) \cdot (1 + i_3) \ldots (1 + i_n)$$

$$P(1 + i_{ac}) = P(1 + i_1) \cdot (1 + i_2) \cdot (1 + i_3) \ldots (1 + i_n)$$

$$(1 + i_{ac}) = (1 + i_1) \cdot (1 + i_2) \cdot (1 + i_3) \ldots (1 + i_n) \tag{24}$$

Taxa Média

- A taxa média equivale à média geométrica das taxas no periodo.
- Assim, se considerarmos que há uma taxa constante que, incidindo sobre o mesmo principal P durante o mesmo prazo n gere o mesmo montante, teremos:

$$S = (1 + i_1) \cdot (1 + i_2) \cdot (1 + i_3) \ldots (1 + i_n) \tag{25}$$

$$S = P(1 + \bar{i})^n \tag{26}$$

- Igualando (8) e (9) derivamos a fórmula para a taxa média de juros:

$$(1 + \bar{i})^n = (1 + i_1) \cdot (1 + i_2) \cdot (1 + i_3) \ldots (1 + i_n)$$

$$\bar{i} = [(1 + i_1) \cdot (1 + i_2) \cdot (1 + i_3) \ldots (1 + i_n)]^{(1/n)} - 1 \tag{27}$$

Exemplo

Ex. 1
Um investidor aplicou R$ 50.000,00 no mercado financeiro por 3 meses, obtendo as seguintes rentabilidades mensais:

- Mês 1: 2,6%
- Mês 2: 1,7%
- Mês 3: -1,4%

Qual foi o montante resgatado? Qual foi a taxa média deste investimento em termos mensais?

6.3 Taxa over: Conceito e aplicação

Conceito de taxa *over*

- No final de 1997, o Banco Central elaborou uma nova configuração para as taxas de juros com dois objetivos:
  - indicar a continuidade da taxa, independente do mês e do efeito dos dias úteis;
  - tratar as taxas com base anual, procurando dar conotação de longo prazo.
- Uma das preocupações do BC foi mudar a forma de fixação da taxa que, ao ser fixada em termos mensais (taxa over mês), era influenciada pelo problema do número de dias úteis. Assim o BC através da Circular n. 2761 de 18 de junho de 1997 estabeleceu o ano-base em 252 dias úteis, criando a chamada taxa over ano.

Conceito de taxa *over*

- A taxa *over* é adotada como referência em operações no mercado de renda fixa;
- Entretanto, seu valor não é usado nos cálculos pois a mesma não representa uma taxa efetiva;
- Na verdade, a taxa *over* é uma taxa nominal, pois costuma ser expressa ao mês e sua capitalização é diária, utilizando a convenção de dias úteis.

Operacionalização

- Assim, o procedimento para utilizar a taxa over envolve a seguinte fórmula geral (derivada da relação entre taxas nominais e efetivas):

$$S = P\left(1 + \frac{\text{taxa over}}{30}\right)^{du} \tag{28}$$

- Vale enfatizar que, ao utilizar a taxa over, devemos sempre convertê-la para uma taxa efetiva, utilizando a eq. (11).

Exemplos

Ex. 1
Dada a taxa over de 2,7% a.m., determinar a taxa efetiva ao dia.

Ex. 2
Data a taxa over de 3,3% a.m., determinar a taxa efetiva mensal num mês de 21 dias úteis.

Ex. 3
Uma operação com duração de 35 dias corridos foi contratada a uma taxa over de 1,8%a.m. O número de dias úteis no período foi de 25 e deseja-se obter a taxa efetiva mês (21 d.u.)e o montante ao final da operação, considerando-se que foram aplicados R$100.000,00.

6.4 Exercícios

Exercícios sugeridos

- Samanez: p. 72, exercícios 33, 35, 39 e 43.
- Exemplos de Securato, p. 69-92.

6.5 Bibliografia

Leitura Sugerida

- SECURATO, J.R. Cálculo Financeiro das Tesourarias. 3. Ed. São Paulo: Editora Saint Paul, 2005. Páginas 69-92.
- SAMANEZ, C. P. Matemática Financeira: Aplicações à Análise de Investimentos. 4. ed. São Paulo: Prentice Hall, 2004. páginas 60-62.

7 Produtos do Mercado Financeiro: Prefixados

7.1 Principais Produtos Prefixados

Certificados de Depósito

- Os certificados de depósito (CD) representam a base de captação dos recursos remunerados dos bancos, divididos basicamente em:
  - Certificados de Depósito Bancário (CDB);
  - Recibo de Depósito Bancário (RDB);
  - Certificado de Depósito Interbancário (CDI).
- Criados em 1986, os CDI's ou Depósitos Interfinanceiros (DI's) são utilizados como lastro em operações interbancárias, com isenção de IOF e IR na fonte.
- A função básica destes títulos é a de transferir recursos de uma instituição financeira para outra via *Câmara de Custótia e Liquidação (CETIP)*.

Certificados de Depósito Interbancário

- A Cetip seleciona, para fins de cálculo da taxa do DI, as operações de um dia útil de prazo *(over)*, considerando apenas operações que são realizadas extragrupo;
- A taxa média encontrada para o DI é então resultante das taxas prefixadas para operações de 1 dia útil no mercado interbancário.
- As taxas DI *over* servem então de parâmetro para taxas de empréstimo de curto prazo, nas quais se utiliza a taxa do CDI como referência, acrescida de um *spread* mínimo mais os encargos.

Exemplos

Ex. 1
Uma operação interbancária, lastreada em CDI, é realizada por 3 d.u. com as seguintes taxas anualizadas:

- Dia 1: 13,25% a.a.
- Dia 2: 13,28% a.a.
- Dia 3: 13,30% a.a.

O principal envolvido é de R$ 10 milhões, e devemos determinar: (a) o montante da operação; (b) a taxa efetiva ao período e (c) a taxa over mensal média da operação.

Certificados de Depósito Bancário

- Os CDB' e RDB' são títulos utilizados para captar recursos entre investidores, com registro na Cetip.
- A diferença básica entre eles reside na negociabilidade: os CDB's são endossáveis e, portanto, negociáveis antes de seu vencimento. Os RDB's são nominativos e intransferíveis.

- **Tributação**: CDB' e RDB's são tributados na fonte no momento do resgate, com alíquotas decrescentes em função do prazo de aplicação dos recursos:
  - Até 180 dias: 22,5%
  - De 181 a 360 dias: 20%
  - De 361 a 720 dias: 17,5%
  - Mais que 720 dias: 15%

Exemplos

Ex. 2

Um investidor aplicou R$100.000 em um CDB prefixado, a uma taxa de 15,5% a.a., por um período de 35 dias, no qual estão contidos 23 dias úteis. Iremos determinar:

1. O montante bruto da operação;
2. O rendimento bruto;
3. O IR retido na fonte;
4. O montante líquido;
5. a taxa efetiva líquida ao período;
6. a taxa *over* líquida ao ano.

Exemplos

Ex. 3

Um investidor aplica R$ 100.000 em um CDB pós-fixado à taxa de TR+9,5% a.a., por um período de 240 dias. A TR do período corresponde a 2,95%. Devemos então determinar:

1. O montante bruto;
2. O rendimento bruto;
3. O IR retido na fonte;
4. O montante líquido;
5. A taxa efetiva líquida no período.

7.2 Introdução ao mercado de Títulos Públicos

Principais Títulos Governamentais

- Os principais títulos governamentais negociados no mercado financeiro brasileiro são os seguintes:
  - Tesouro prefixado (antiga Letra do Tesouro Nacional (LTN))
  - Tesouro Selic (antiga Letra Financeira do Tesouro (LFT))
  - Tesouro prefixado com juros semestrais (antiga Nota do Tesouro Nacional (NTN)).
- Os títulos adquiridos no *mercado primário* podem ser negociados com outras instituições no *open market*, ou mercado secundário.
- Discutiremos a seguir os procedimentos básicos de precificação relacionados à avaliação de LTN's.

Tesouro Prefixado (LTN)

- Para as LTN's o procedimento geral de precificação é dado por:

$$VP = PU = \frac{VF}{(1+\text{taxa})^{\frac{du}{252}}}$$

- Onde:
  - *VP* é o valor presente do título, também conhecido no mercado pela denominação Preço Unitário (PU);
  - *VF* é o valor futuro ou valor de face do título, que representa o montante a ser pago no vencimento do mesmo;
  - *Taxa* é a taxa anual de juro de negociação em mercado, na base de 252 dias úteis, e
  - *du* é o número de dias úteis a decorrer entre a data de negociação do título e a data de seu vencimento.

Exemplos

Ex. 4
Um investidor comprou uma LTN com as seguintes características:

- Prazo: 300 dias úteis;
- Taxa: 10% a.a.;
- Valor no vencimento: R$ 1.000,00

Determinar o valor pago no momento da compra da LTN.

Ex. 5
Qual o PU de uma LTN negociada com 61 d.u. a decorrer até a data de seu vencimento, e que está cotada a uma taxa de juros de 13,75% a.a.?

7.3 Exercícios

Exercícios sugeridos

- Exemplos de Securato (p.116-118) e Vieira Sobrinho (271-274).

7.4 Bibliografia

Leitura Sugerida

- SECURATO, J.R. Cálculo Financeiro das Tesourarias. 3. Ed. São Paulo: Editora Saint Paul, 2005. Páginas 95-108.
- VIEIRA SOBRINHO, J.D. Matemática Financeira. 7. ed. São Paulo: Atlas , 2000. Páginas 266-271

8 Produtos do Mercado Financeiro: Pós-Fixados

8.1 Indexação

Conceito

- Um indexador é um valor ou índice utilizado como referência para atualizar o valor de um ativo;
- Indexadores mais utilizados no Brasil:
  - Índices de Inflação
  - Taxa de câmbio US$/R$
  - Selic
  - TR

Procedimentos de cálculo

- O procedimento de cálculo de um indexador segue a forma geral dada por:

$$\text{Índice}_t = \text{Índice}_{t-1}(1 + \nu_t)$$

- Ou seja, o índice é atualizado do período $t - 1$ para o período t pela taxa de variação ν observada no período t.

Procedimentos de cálculo

- Com base no resultado anterior, é possível definir uma regra para a indexação de qualquer ativo:

$$P_c = \frac{P}{I_0} \cdot I_t$$

- Onde:
  - P_c = Principal corrigido (indexado) do ativo;
  - P = Principal inicial (data do contrato);
  - I_0 = Indexador na data do contrato;
  - I_t = Indexador na data de vencimento/atualização.

Exemplo

Ex. 1 [Excel]
Deseja-se saber o valor reajustado para agosto de 2008 de um aluguel cujo valor contratado foi de R$ 600,00 em março de 2008. Para compreender a indexação envolvida nesta operação, responderemos às seguintes perguntas:

- Qual foi a inflação neste período?
- Como relacionar este resultado à indexação?
- É possível mudar a base na tabela do Excel para março de 2008?

8.2 Principais produtos Pós-fixados

Caderneta de Poupança

Como era até 3/05/2012:

- Rentabilidade determinada pela TR + 0,5%a.m. O rendimento é creditado mensalmente na data de aniversário da aplicação.
- Isenção de IR e IOF.
- Depósitos garantidos pelo FGC até o limite de R$250 mil por CPF.

Como passou a ser a partir de 4/05/2012:

- Se a Selic for maior do que 8,5% a.a.: vale a regra anterior (TR+0,5% a.m.);
- Se a Selic for menor do que 8,5% a.a.: 70% da taxa Selic + TR

Exemplos (considerando um montante investido de R$ 1.000,00 e TR=0,2% a.a.)

Ex. 2

Com Selic a 9% a.a.:

- Montante após 1 mês: R$ 1.005,17

Com Selic a 8,5% a.a.:

- Montante após 1 mês: $R\$1.000\left[(1 + 0.7 * 8,5\%) * (1,002)\right]^{(1/12)} = 1.005,00$

Com Selic a 8% a.a.:

- Montante após 1 mês: $R\$1.000\left[(1 + 0.7 * 8\%) * (1,002)\right]^{(1/12)} = 1.004,72$

Com Selic a 7,5% a.a.:

- Montante após 1 mês: $R\$1.000\left[(1 + 0.7 * 7,5\%) * (1,002)\right]^{(1/12)} = 1.004,44$

CDB Pós-fixado

- A diferença básica com relação aos CDB's prefixados reside no prazo mínimo de emissão dos títulos, atualmente em 120 dias e no fator de correção que depende do indexador adotado.
- As alíquotas de IR e IOF são as mesmas dos papeis prefixados.

Exemplo

Ex. 3

Um investidor aplica R$ 100.000 em um CDB pós-fixado, à taxa de TR+12,7%a.a., por um período de 120 dias. O imposto de renda é retido na fonte à alíquota de 22,5%. A TR do período corresponde a 2,92%a.p. Determine:

- O montante e o rendimento bruto;
- O imposto de renda retido na fonte;
- O montante líquido e a taxa efetiva líquida no período.

8.3 Exercícios

Exercícios sugeridos

- Dal Zot e Castro, p. 73.
- Exemplos de:
  - Samanez: p. 177 (ex. 9.5) e 181 (ex. 9.12);
  - Securato: p. 100-101 e 116-118;
  - Vieira Sobrinho, p. 268-271.
  - Hoji, p. 12. Exercícios 4 e 5.

8.4 Bibliografia

Leitura Sugerida

- VIEIRA SOBRINHO, J.D. Matemática Financeira. 7. ed. São Paulo: Atlas , 2000. Páginas 266-274.
- SECURATO, J.R. Cálculo Financeiro das Tesourarias. 3. Ed. São Paulo: Editora Saint Paul, 2005. Páginas 116-118.
- DAL ZOT, Wili; CASTRO, Manuela Longini de. Matemática Financeira: fundamentos e aplicações. Porto Alegre: Bookman, 2015. Cap. 11.
- HOJI, M. Matemática financeira. Seção 1.3

9 Descontos

9.1 Definição

Definição

- Procedimento comum em operações comerciais e bancárias. Pode ser definido como a diferença entre o valor de resgate de um título e o seu valor presente na data da operação:

$$D = S - P$$

- O título mais conhecido sujeito a esta operação é o cheque pré-datado. Além deste, destacam-se também as notas promissórias, duplicatas e letras de câmbio.

Títulos sujeitos às operações de desconto

- *Notas Promissórias*: Títulos que correspondem a uma promessa de pagamento de certo valor no futuro;
- *Duplicatas*: Títulos emitidos por uma empresa contra seu cliente, pela venda a crédito;
- *Letras de Câmbio*: Títulos emitidos por financeiras em operações de crédito;
- *Cheque pré-datado*: Título mais conhecido e utilizado no mercado, embora não previsto expressamente na legislação.

Tipologia das operações

- Desconto Simples, Comercial ou Bancário
  - Também conhecido como desconto *por fora*, é o desconto que ocorre sobre o montante utilizando o regime de juros simples.
- Desconto Racional
  - Também denominado desconto *por dentro*, aplica-se para casos em que a incógnita é o valor presente da duplicata, descontada utilizando o regime de juros compostos.

9.2 Desconto Simples ou Desconto Comercial

Desconto Simples

- Muito utilizado no Brasil em operações de desconto de duplicatas.
- Equivale ao juro cobrado antecipadamente sobre o valor do título (S), a uma determinada taxa de desconto (d), pelo prazo que decorre desde a negociação até o vencimento:

$$D = S \cdot d \cdot n$$

- Onde D é o valor do desconto a ser aplicado, de forma a gerar o valor líquido creditado (P) na fórmula básica abaixo:

$$S = P + D \rightarrow P = S - D$$

  o que gera:

$$P = S - S \cdot d \cdot n = S(1 - d \cdot n)$$

Desconto Simples: Características

- O valor líquido creditado é calculado seguindo a lógica da *capitalização simples*;
- Cabe destacar que, nestas operações incidem, **além dos juros**:
  - Imposto sobre as Operações Financeiras (IOF) à alíquota de 0,38% sobre o valor P, além de um acréscimo de 0,0041% a.d., também sobre o valor P.
  - Taxa de Serviços Bancários (TSB) a qual visa cobrir despesas operacionais dos bancos.
- Ou seja, é necessário incluir, no cálculo valor líquido P, a dedução de IOF e TSB (quando esta existir), gerando então:

$$P_{liq} = S - D - TSB - IOF$$

onde:

$$IOF = 0,38\% \cdot P + 0,0041\% \cdot P \cdot n$$

Exemplo

Ex. 1
Um empresário descontou uma nota promissória (NP) no banco Delta com 46 dias antes do vencimento. Se o banco cobra 2,7%a.m. de taxa de desconto e o valor da NP é de R$70.000,00, qual é o valor do desconto e quanto é creditado para o empresário em sua conta corrente, considerando o IOF sobre a operação e uma TSB de 1,5% sobre o montante?

9.3 Taxa Efetiva de Operações de Desconto

Definição

- Procedimento útil para comparar o custo efetivo do desconto - *em termos de taxa composta* - com o custo de outras operações de financiamento;
- Deve considerar o IOF, TRC e demais taxas eventualmente incidentes;
- Compara o valor creditado com o valor da duplicata pelo prazo do desconto, utilizando o regime composto.

9.4 Desconto Composto

Desconto Racional ("por dentro") ou Composto

- No desconto composto, a taxa de desconto racional (i) incide sobre o valor presente P a juros compostos.
- O valor do desconto D pode ser obtido então por meio da seguinte equação:

$$D = S - P = S - \frac{S}{(1+i)^n} = S\left(1 - \frac{1}{(1+i)^n}\right)$$

De tal modo que:

$$D = S \cdot \left(\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n}\right)$$

Exemplo

Ex. 2
Uma loja desconta uma nota promissória com valor nominal de R$ 65.000,00 em um banco, a 8 meses do vencimento. Determine o valor recebido pela loja e o desconto aplicado, sabendo que o banco cobra uma taxa de desconto racional composto de 3% a.m.

9.5 Exercícios

Exercícios Sugeridos

- Dal Zot e Castro, p. 50.
- Vieira Sobrinho, p. 61-62, exercícios 1 a 13 (desconto simples).

9.6 Bibliografia

Leitura Sugerida

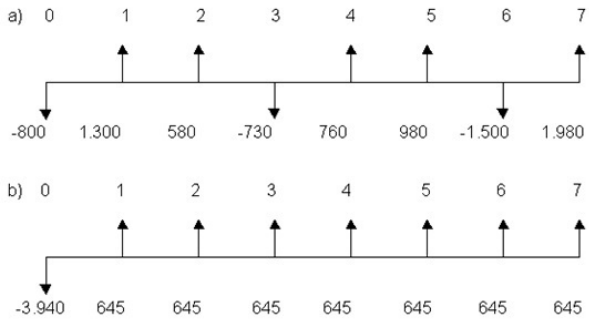
- VIEIRA SOBRINHO, J.D. Matemática Financeira. 7. ed. São Paulo: Atlas , 2000. Capítulo 3.
- DAL ZOT, Wili; CASTRO, Manuela Longini de. Matemática Financeira: fundamentos e aplicações. Porto Alegre: Bookman, 2015. Cap. 6.
- SECURATO, J.R. Cálculo Financeiro das Tesourarias. 3. Ed. São Paulo: Editora Saint Paul, 2005. Páginas 108-110.

10 Séries de Pagamentos

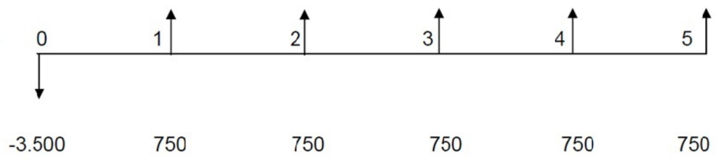
10.1 Termos Vencidos e Termos Antecipados

Conceito

Uma série de pagamentos corresponde a uma entrada ou saída de recursos, relacionada a uma sequência de pagamentos ou recebimentos ao longo do tempo.

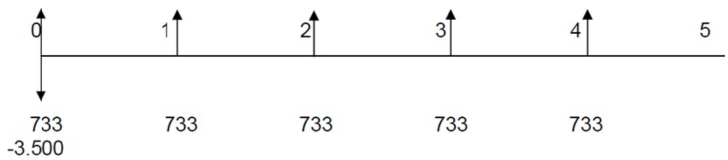


Exemplo



O conceito “termos vencidos” refere-se a fluxos de recebimento (ou pagamento) que ocorrem 1 período após o valor do débito (ou crédito).

Exemplo



Já o conceito “termos antecipados” refere-se a fluxos em que há uma “entrada”ou pagamento já no período inicial ($t = 0$). Ou seja, as prestações são pagas no início de cada período, de onde surge a expressão “termos antecipados”.

10.2 Séries de Pagamentos: Termos Vencidos

Definição

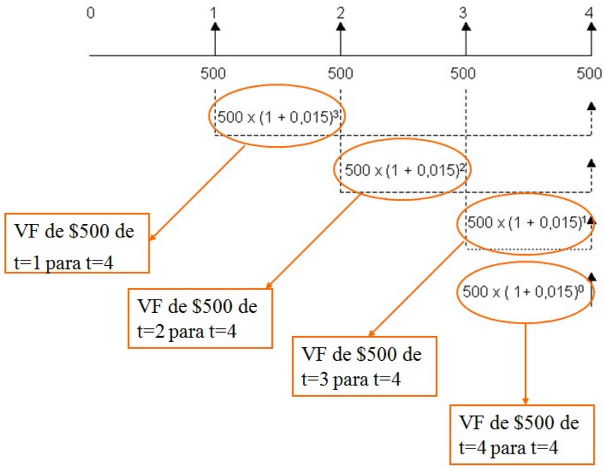
- Necessitamos de uma fórmula geral para o cálculo de prestações em séries de termos vencidos.
- O exemplo a seguir ajudará na derivação da fórmula geral.

  Ex. 1

  Um investidor deseja saber qual o montante ao final de 4 meses, se fizer aplicações mensais de R$500,00 à taxa de juros de 1,5% a.m.

- Teríamos então o seguinte fluxo de caixa:

Exemplo



Derivação

- Podemos formalizar esta representação em termos matemáticos, a partir da equação básica da capitalização composta, $S = P(1+i)^n$.
- Aplicando esta fórmula à sequência de valores do exemplo, temos:

$$F = [500 \cdot (1+0,015)^3] + [500 \cdot (1+0,015)^2] + [500 \cdot (1+0,015)^1] + [500 \cdot (1+0,015)^0]$$

Colocando o valor de \$500 em evidência e reordenando, temos:

$$F = 500 \cdot (1,015^0 + 1,015^1 + 1,015^2 + 1,015^3)$$

Os termos entre parênteses equivalem a uma progressão geométrica (P.G.) Recordando este conceito, podemos aplicá-lo para obter a equação geral de termos vencidos.

Soma dos termos de uma P.G.

Seja a seguinte sequência de números: $A = [a_1, a_2, \ldots, a_n]$ a qual constitui uma P.G. de razão q, com $q = a_k/a_{k-1}$. Então, a sequência pode ser reescrita como sendo:

$$A = \{a_1, a_1q, a_1q^2, \ldots, a_1q^{n-1}\}$$

A soma destes termos será dada por:

$$S = a_1 + a_1q + a_1q^2 + \ldots + a_1q^{n-1}$$

e, fazendo $S \cdot q$:

$$Sq = a_1q + a_1q^2 + a_1q^3 + \ldots + a_1q^n$$

Soma dos termos de uma P.G.

Subtraindo o último resultado do penúltimo gera:

$$S(q-1) = a_1 q^n - a_1$$

$$S = a_1 \left[\frac{(q^n - 1)}{(q - 1)} \right] \tag{29}$$

Se $q > 1$, a P.G. é crescente. Se $q = 1$, então a soma dos termos se reduz a $S = n \cdot a_1$. Para termos vencidos, o valor acumulado após n períodos de capitalização será:

$$S = R + R(1+i) + R(1+i)^2 + \ldots + R(1+i)^{n-1}$$

onde R representa o valor dos aportes.

Fórmula geral do montante em termos vencidos

Aplicando então a eq. (1), obtemos:

$$S = R \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i} \right] \tag{30}$$

onde o termo entre colchetes é conhecido como *fator de acumulação de capital*. Dado que $S = P(1+i)^n$, temos então que

$$P = R \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i} \right] \frac{1}{(1+i)^n} \tag{31}$$

isolando R gera

$$R = \frac{P}{\left[\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n \cdot i} \right]} \tag{32}$$

Solução do Ex. 1

A aplicação da eq. (2) aos dados do problema resulta em:

$$S = 500 \cdot \left[\frac{(1,015)^4 - 1}{0,015} \right] = R\$2.045,45$$

Na HP12c, a sequência de comandos é a seguinte:

$f\ FIN$	500 PMT	1,5 i	4 n	FV

O fundamental, em problemas deste tipo, é apagar a pilha de memória financeira da calculadora com o comando $f\ FIN$.

Determinação do montante

Ex. 2

Uma pessoa decide aplicar R$ 1.500 por mês, durante 2 anos. Sabe-se que a taxa de juros média mensal é de 1,2% a.m., qual o montante esperado ao final deste período?

Em termos matemáticos, temos:

$$F = 1.500 \cdot \left[\frac{(1,012)^{24} - 1}{0,012} \right] = R\$41.434,10$$

Na HP12c, o procedimento é similar ao do exemplo anterior:

$f\ FIN$	1500 PMT	1,2 i	24 n	FV

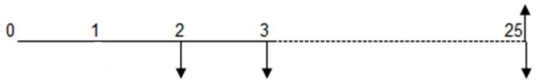
Alteração da data inicial

Ex. 3
Caso a pessoa do exemplo anterior tivesse que fazer sua primeira aplicação apenas ao final de 60 dias, de quanto seria seu montante ao final das 24 aplicações mensais?

Em termos matemáticos, continuamos a ter:

$$F = 1.500 \cdot \left[\frac{(1,012)^{24} - 1}{0,012} \right] = R\$41.434,10$$

O que cabe observar aqui é que, para termos vencidos, S "cai" junto com a última prestação:



Conceito

- Em muitas situações, é de interesse saber o valor da prestação correspondente a um determinado valor futuro almejado.
- Por exemplo, alguém deseja comprar um ativo no valor de R$300.000 e, para tal, quer saber quanto deve aplicar durante 12 meses para alcançar este valor.
- Em termos matemáticos, o problema envolve resolver para R na eq. (2):

$$R = S \cdot \left[\frac{i}{(1+i)^n - 1} \right] \tag{33}$$

Exemplos

Ex. 4
Uma empresa planeja um investimento de R$45.000 para o final de 10 meses. Os gestores pretendem aplicar parcelas mensais, com início em 30 dias a contar de hoje, à taxa de juros de 1,25% a.m. Qual o valor deste aporte mensal?

Em termos matemáticos:

$$R = S \cdot \left[\frac{i}{(1+i)^n - 1} \right] = \frac{45000 \cdot 0,0125}{1,0125^{10} - 1} = R\$4.252,64$$

Na HP12c, os comandos são os seguintes:

$f\ FIN$	45000 FV	1,25 i	10 n	PMT

Exemplos

Ex. 5
Os gestores de uma empresa desejam se preparar para quitar uma dívida de R$ 125.000 ao final de 15 meses. Para isto, eles pretendem realizar aplicações mensais, iguais e consecutivas *começando ao final do* 2^o *mês* em um fundo de renda fixa. Sendo de 1,25% a.m. a taxa de juros esperada, qual é o valor dos aportes mensais?

Em termos matemáticos:

$$R = S \cdot \left[\frac{i}{(1+i)^n - 1} \right] = \frac{125000 \cdot 0,0125}{1,0125^{14} - 1} = R\$8.225,64$$

E, na HP12c:

$f\ FIN$	125000 FV	1,25 i	14 n	PMT

Conceito

- Alguns exemplos da importância deste cálculo
  - Saldo de dívidas em negociações bancárias;
  - Negociação da prestação em financiamentos;
  - Cálculo do valor à vista de um ativo para o qual foi apresentado um plano de prestações
- Adaptando então a eq. (5), temos:

$$P = R \cdot \left[\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n \cdot i} \right] \tag{34}$$

Exemplos

Ex. 6
Um equipamento é oferecido em 36 parcelas mensais de R$ 8.500, sendo a primeira em 30 dias. A taxa de juros do financiamento é de 2,25% a.m. Caso o comprador deseje fazer o pagamento à vista, qual seria o valor justo a ser pago?

Em termos matemáticos, temos:

$$P = R \cdot \left[\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n \cdot i} \right] = \frac{8.500 \cdot [1,0225^{36} - 1]}{(1,0225)^{36} \cdot 0,0225} = R\$208.204,66$$

Na HP12c:

$f\ FIN$	8500 PMT	2,25 i	36 n	PV

Exemplos

Ex. 7
Em um caso similar ao anterior, consideremos agora que a empresa vendedora oferece um atrativo: o pagamento da primeira das 36 parcelas em 60 dias. Neste caso, qual seria o novo valor à vista (i.e, em $t = 0$) do equipamento?

$$P_{t=1} = \frac{8.500 \cdot [1,0225^{36} - 1]}{(1,0225)^{36} \cdot 0,0225} = R\$208.204,66$$

$$\rightarrow P_{t=0} = \frac{208.204,66}{1,0225^1} = 203.623,14$$

Conceito

- Os desenvolvimentos anteriores possuem importantes aplicações práticas, mas a função mais utilizada na matemática financeira - em instituições financeiras, industriais e comerciais - é aquela que definie uma prestação R a partir de um valor presente P.
- Adaptando então a equação (6):

$$R = P \cdot \left[\frac{(1+i)^n \cdot i}{(1+i)^n - 1} \right] \tag{35}$$

Exemplos

Ex. 8
Qual o valor de uma prestação mensal a ser paga por uma empresa que demanda um empréstimo de R\$ 55.500 junto a uma instituição financeira, o qual seria pago em 24 prestações mensais a uma taxa de juros de 2,75% a.m.?

Matematicamente:

$$R = P \cdot \left[\frac{(1+i)^n \cdot i}{(1+i)^n - 1} \right] = \frac{55.500 \cdot (1,0275)^{24} \cdot 0,0275}{1,0275^{24} - 1} = R\$3.189,51$$

Na HP12c o resultado é obtido com os comandos:

$f\ FIN$	55500 PV	2,75 i	24 n	PMT

Exemplos

Ex. 9
Qual seria o valor das prestações caso a primeira das 24 parcelas se desse ao final de 3 meses?

Matematicamente, a solução se dá em 2 etapas:

$$P_{t=2} = 55.500 \cdot 1,0275^2 = 58.594,47$$

$$R = \frac{58.594,47 \cdot (1,0275)^{24} \cdot 0,0275}{1,0275^{24} - 1} = R\$3.367,34$$

Pontos Importantes

- Os exemplos desta aula ilustram a importância de que o principal (valor presente) esteja sempre um período antes da primeira prestação para que se caracterize uma operação em termos vencidos;
- Caso isto não ocorra, é necessário fazer uso da equação básica da capitalização composta, $S = P(1+i)^n$ para atendermos a esta condição.
- Nosso último exemplo trabalha novamente com este conceito, agora com prazo fracionário.

Exemplos

Ex. 10

Uma rede de varejo permite o pagamento da primeira prestação em 45 dias para vendas a prazo. Sendo assim, qual o valor de cada uma das 4 parcelas mensais de um equipamento cujo valor à vista é de R$ 1.450,00, e que é financiado a uma taxa de 2,45% a.m.?

Matematicamente:

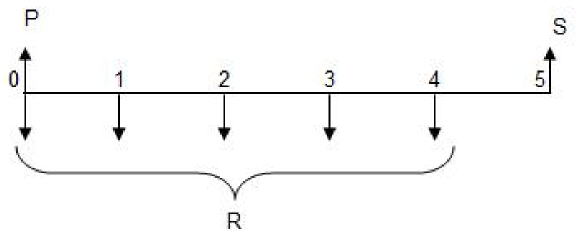
$$P_{t=15dias} = 1.450 \cdot 1,0245^{15/30} = R\$1.467,66$$

$$R = \frac{1.467,66 \cdot (1,0245)^4 \cdot 0,0245}{1,0245^4 - 1} = R\$389,66$$

10.3 Séries de Termos Antecipados

Definição

- Relembrando: ocorre quando a série conta com uma "entrada", ou seja, com um pagamento logo no período $t = 0$;
- Procedimento comum emfinanciamentos no comércio.
- Representação geral*



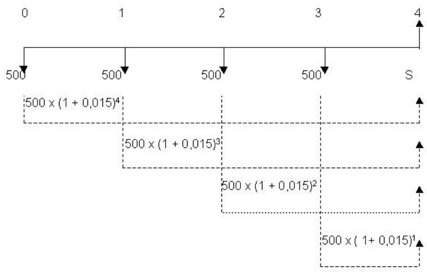
Características

Diferenças essenciais em relação a termos vencidos

	Termos Antecipados	Termos Vencidos
Valor Presente P	Junto com a 1^a prestação	Um período antes da 1^a prestação
Valor Futuro S	Um período após a última prestação	Junto com a última prestação

Derivação

- As deduções das fórmulas para termos antecipados são feitas adaptando o exemplo utilizado para termos vencidos;
- Partindo então do mesmo exemplo, considere um investidor que deseja saber quanto tera ao final de 4 meses se aplicar R$ 500 por mês, à taxa de 1,5%a.m., *com a primeira aplicação se dando hoje.*
- tem-se então o seguinte diagrama



Derivação

A soma dos quatro termos da figura anterior pode ser representada por:

$$S = 500 \cdot 1,015 \cdot (1,015^0 + 1,105^1 + 1,015^2 + 1,015^3)$$

Podemos aplicar novamente a fórmula da soma dos termos de uma P.G. Lembrando então da eq. (1) da aula anterior:

$$S = a_1 \left[\frac{(q^n - 1)}{(q - 1)} \right] = 500 \cdot (1,015) \left[\frac{(1 + 1,015)^4 - 1}{0,015} \right]$$

$$S = R(1 + i) \left[\frac{(1 + i)^n - 1}{i} \right] \tag{36}$$

Características

- A derivação anterior diverge daquela para termos vencidos pelo fator $(1+i)$, cuja presença se deve ao fato de que a série de pagamentos ocorre no início de cada período, sendo necessário então ser *capitalizado*.
- Na HP12c, a operacionalização de termos antecipados envolve a inserção do comando **g BEG** (do inglês *begin* - início).

Exemplos

Ex. 1

Um investidor decide aplicar R$ 1.500 por mês durante os próximos 24 meses, a uma taxa de juros de 1,2%a.m. Sendo que sua primeira aplicação se dará *hoje*, quanto ele terá ao final de 24 meses?

Em termos matemáticos, tem-se:

$$S = \frac{1.500 \cdot 1,012 \cdot (1,012^{24} - 1)}{0,012} = R\$41.931,31$$

Na HP12c:

g BEG	*f Fin*	1500 *CHS PMT*	24 *n*	1,2 *i*	FV

Exemplos

Ex. 2
Uma empresa planeja aplicar R$15.500 em 24 aportes, a uma taxa média mensal de 1,1%a.m. A primeira aplicação será feita apenas ao final do 3^o mês. Qual o montante a ser obtido um mês após a aplicação da 24^a parcela?

Em termos matemáticos:

$$S = \frac{15.500 \cdot 1,011 \cdot (1,011^{24} - 1)}{0,011} = R\$427.737,14$$

Na HP12c:

g BEG	f Fin	15500 CHS PMT	24 n	1,1 i	FV

Derivação

A partir da equação (1) desta aula obtemos a equação que relaciona R com S, i e n:

$$R = \frac{S \cdot i}{(1+i)[(1+i)^n - 1]} \tag{37}$$

Vale lembrar que os procedimentos operacionais continuam os mesmos, lembrando sempre do comando **g BEG**.

Exemplos

Ex. 3
Uma empresa deseja acumular R$ 105.000 para compra de equipamentos especiais ao final de 18 meses. Para tanto, os gestores se dispõem a realizar 18 aplicações mensais a partir de hoje, a uma taxa de juros média de 1,15% a.m. A partir destes dados, de quanto deverá ser o valor destas aplicações?

Matematicamente:

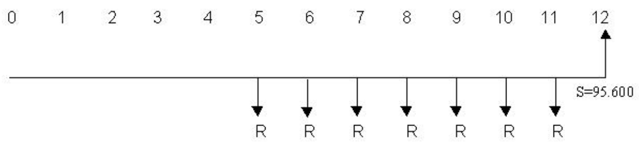
$$R = \frac{105000 \cdot 0,0115}{1,0115 \cdot (1,0115^{18} - 1)} = R\$5.223,68$$

Na HP12c:

g BEG	f Fin	105000 FV	18 n	1,15 i	PMT

Exemplos

Ex. 4
Um equipamento no valor de R$95.600 está à venda para pagamento simples ao final de 12 meses. Entretanto, possíveis compradores podem financiá-lo em 7 parcelas mensais, sendo que a primeira destas é devida ao final do 5^o mês. Qual o valor da prestação, sabendo que a taxa de juros da operação é de 2,25% a.m.?



Exemplo 4 - Continuação

Matematicamente:

$$R = \frac{95600 \cdot 0,0225}{1,0225 \cdot (1,0225^7 - 1)} = R\$12.481,78$$

Na HP12c:

g BEG	f Fin	95600 FV	7 n	2,25 i	PMT

Derivação

Procedimento importante no comércio varejista, onde é comum que a primeira prestação seja paga no ato da compra. Lembrando que:

$$S = P(1+i)^n \text{ e } S = R(1+i)\left[\tfrac{(1+i)^n - 1}{i}\right]$$

Por igualdade, obtemos:

$$P = \frac{R \cdot (1+i) \cdot [(1+i^n - 1)]}{(1+i)^n \cdot i} \tag{38}$$

Exemplos

Ex. 5

Um veículo está sendo oferecido em 36 parcelas mensais de R\$2.150. Sabe-se que a primeira prestação é devida à vista e que a taxa de juros do financiamento é de 1,75% a.m. Qual o valor à vista do veículo?

Matematicamente:

$$P = \frac{2150 \cdot 1,0175 \cdot [(1,0175^{36} - 1)]}{1,0175^{36} \cdot 0,0175} = R\$58.065,59$$

Na HP12c:

g BEG	f Fin	2150 CHS PMT	36 n	1,75 i	PV

Exemplos

Ex. 6

Se o veículo do exemplo anterior fosse oferecido nas mesmas condições, exceto pelo fato de que a primeira parcela é paga em 60 dias, ainda assim é possível obter o valor à vista utilizando fórmulas de termos antecipados? Em caso afirmativo, qual seria este valor?

Matematicamente:

$$P_{t=2} = \frac{2150 \cdot 1,0175 \cdot [(1,0175^{36} - 1)]}{1,0175^{36} \cdot 0,0175} = R\$58.065,59$$

$$\rightarrow P_{t=0} = \frac{58.065,59}{1,0175^2} = R\$56.085,42$$

Derivação

A obtenção de prestações a partir de valores presentes utilizando termos antecipados é muito comum no comércio varejista, onde é usual a prática de planos de pagamento com a primeira prestação paga à vista. A fórmula para cálculo toma por base a equação (3):

$$R = \frac{P \cdot (1+i)^n \cdot i}{(1+i)[(1+i)^n - 1]} \tag{39}$$

Esta fórmula de cálculo é muito útil na resolução de problemas com prazos de carência incomuns, tais como situações onde o primeiro pagamento se da em questão de poucos dias.

Exemplos

Ex. 7

Um equipamento cujo valor à vista é de R$22.750 é vendido em 4 prestações mensais à taxa de 2,5% a.m. e com a primeira parcela paga à vista. A par destes dados, qual o valor da prestação mensal?

Matematicamente:

$$R = \frac{22.750 \cdot 1,025^4 \cdot 0,025}{1,025 \cdot (1,025^4 - 1)} = R\$5.899,86$$

Na HP12c:

g BEG	*f Fin*	22750 *PV*	4 *n*	2,5 *i*	PMT

Exemplos

Ex. 8

Considerando os mesmos dados, qual seria o valor da prestação mensal caso o vendedor permitisse o primeiro pagamento em 10 dias?

Matematicamente:

$$P_{10dias} = S = 22.750(1,025)^{10/30} = R\$22.938,03$$

$$R = \frac{22.938,03 \cdot 1,025^4 \cdot 0,025}{1,025 \cdot (1,025^4 - 1)} = R\$5.948,62$$

10.4 Equivalência de Capitais

Conceito

- Problemas de equivalência de capitais são comuns na renegociação de dívidas e em algumas operações de financiamento, nos quais se procura adaptar o fluxo de pagamentos à capacidade do cliente.
- Princípio básico: avaliar todos os fluxos em uma mesma data-base, para então obter o fluxo equivalente.

Exemplo

Ex. 9
Um cliente tem uma dívida de R$ 3.000 para pagamento em dois meses e outra dívida de R$ 5.000 para pagamento em 5 meses com um banco. Ele deseja trocar estas duas dívidas por um pagamento único no quarto mês. Dado que o banco cobra uma taxa de 4%a.m., determine o valor deste pagamento.

- Para determinar a solução, devemos utilizar o princípio básico da equivalência de capitais. Então:
  - VP de R$3.000 a 4% por 2 meses = R$2.773,67
  - VP de R$5.000 a 4% por 5 meses = R$ 4.109,64
  - Soma dos VP's acima = R$ 6.883,31
  - Determinação do valor a pagar no 4^o mês: VF de R$6.883,31 a 4% por 4 meses = R$8.052,50

10.5 Exercícios

Exercícios Sugeridos

- Dal Zot e Castro, p. 73 e 90.
- Vieira Sobrinho:
  - Exemplos das páginas 86-124;
  - Exercícios das páginas 154-163.
- Hoji, p. 126, exercícios 1 a 4.

10.6 Bibliografia

Leitura Sugerida

- DAL ZOT, Wili; CASTRO, Manuela Longini de. Matemática Financeira: fundamentos e aplicações. Porto Alegre: Bookman, 2015.
- HOJI, M. Matemática Financeira. Cap. 8.
- VIEIRA SOBRINHO, J.D. Matemática Financeira. 7. ed. São Paulo: Atlas , 2000. Páginas 64-124.

11 Sistemas de Amortização de Empréstimos e Financiamentos

11.1 Sistemas de Amortização

Amortização de Empréstimos a longo prazo

- 3 métodos principais
  - Tabela Price: prestações constantes;
  - Sistema SAC: amortização constante;
  - Sistema Americano: juros constantes.
- **Regra Geral**: O saldo devedor no início do primeiro período é o valor do empréstimo. Os juros devidos ao cabo de cada período são iguais ao produto da taxa de juros pelo saldo devedor no início daquele período, sempre.
- A amortização depende do sistema ou método acordado entre a instituição que concede o financiamento e a empresa tomadora do empréstimo.

11.1.1 Tabela Price (Método Francês)

Procedimentos

- Método mais utilizado no Brasil;
- Pagamento em parcelas constantes usando:

$$R = P\left[\frac{(1+i)^n \cdot i}{(1+i)^n - 1}\right]$$

Amortização no período t (a_t): Diferença entre juros (J_t) e a prestação paga (R):

$$a_t = R - J_t \ J_t = S_{t-1} \cdot i$$

Exemplo - Tabela Price

Ex. 1
Considere um empréstimo de R$5.000 pelo prazo de 10 anos, a uma taxa de juros de 10%.a.a. O sistema de amortização utilizado é a tabela Price. Monte a tabela, calculando os juros, amortização e pagamentos anuais.

Matematicamente, para $t = 1$ temos:

$$R = 5000 \cdot \left[\frac{0{,}1 \cdot (1{,}1)^{10}}{(1{,}1)^{10} - 1}\right] = R\$813,73 \ J_1 = 5.000 \cdot 0,1 = R\$500,00$$
$$a_1 = (813,73 - 500) = R\$313,73 \ S_1 = S_0 - a_1 = (5.000 - 313,73) = R\$4.686,27$$

Exemplo - Tabela Price

Parcela	Pgto	Juros	Amrt.	Amrt. Ac.	Saldo Dev.
1	813,73	500,00	313,73	313,73	4.686,27
2	813,73	468,63	345,10	658,83	4.341,17
3	813,73	434,12	379,61	1.038,44	3.961,56
4	813,73	396,16	417,57	1.456,01	3.543,99
5	813,73	354,40	459,33	1.915,33	3.084,67
6	813,73	308,47	505,26	2.420,59	2.579,41
7	813,73	257,94	555,79	2.976,38	2.023,63
8	813,73	202,36	611,37	3,587.75	1.412,25
9	813,73	141,23	672,50	4.260,25	739,75
10	813,73	73,98	739,75	5.000,00	0,00
Totais	8.137,27	3.137,27	5.000,00		

11.1.2 Sistema de Amortização Constante (SAC)

Procedimentos

- **Característica**: Pelo fato da *amortização* ser constante, a série de pagamentos não é uniforme.
- O seguinte procedimento é utilizado:
  - Primeiro, são calculadas as amortizações:
    $$a_k = P/n$$
  - Em seguida, o saldo devedor em todos os anos:
    $$S_k = S_{k-1} - a_k$$
  - Então, calcula-se os juros sobre cada saldo devedor, para então compor as prestações como $J_k + a_k$:
    $$J_k = i \cdot S_{k-1}$$

Exemplo - Sistema SAC

Exemplo - SAC
Supondo agora que a mesma empresa do exemplo anterior faz um empréstimo no mesmo valor, prazo e taxa; mas agora o banco estipula o pagamento segundo o método de amortização constante. Como fica a tabela de pagamentos para cada ano?

Matematicamente, para o primeiro ano, temos:

$$\text{Amortização de cada ano: } a_i = P/n = 5.000/10 = R\$500 \text{Saldo devedor no ano 1: } S_1 = S_0 - a_1 = 5.000 - 500 = 4.500 \text{Juros incidentes no ano 1: } J_1 = i \cdot S_0 = 0,1 \cdot 5.000 = R\$500 \text{Prestação no ano 1: } R = a_1 + J_1 = 500 + 500 = R\$1.000$$

Exemplo - Tabela SAC

Parcela	Pgto	Juros	Amrt.	Amrt. Ac.	Saldo Dev.
1	1.000,00	500,00	500,00	500,00	4.500,00
2	950,00	450,00	500,00	1.000,00	4.000,00
3	900,00	400,00	500,00	1.500,00	3.500,00
4	850,00	350,00	500,00	2.000,00	3.000,00
5	800,00	300,00	500,00	2.500,00	2.500,00
6	750,00	250,00	500,00	3.000,00	2.000,00
7	700,00	200,00	500,00	3.500,00	1.500,00
8	650,00	150,00	500,00	4.000,00	1.000,00
9	600,00	100,00	500,00	4.500,00	500,00
10	550,00	50,00	500,00	5.000,00	0,00
Totais	7.750,00	2.750,00	5.000,00		

11.1.3 Sistema de Amortização Misto (SAM)

Procedimentos

- Criado pelo SFH em 1979, também é conhecido como sistema SACRE (amortizações crescentes);
- Cada prestação é a média aritmética das prestações obtidas nos sistemas Price e SAC;
- Procedimentos:
  - De início, calculam-se as prestações:

    $$R_{SAM} = (R_{Price} + R_{SAC})/2$$

  - Em seguida, os juros pelo saldo devedor:

    $$J_k = i \cdot S_{k-1}$$

    A amortização é dada pela diferença entre R e J:

    $$a_k = R_k - J_k$$

  - E o saldo devedor em k pela diferença:

    $$S_k = S_{k-1} - a_k$$

Exemplo - Sistema SAM

Exemplo - SAM
Seja novamente um empréstimo de R$ 5.000,00 pelo prazo de 10 anos, a juros de 10% a.a. Agora, a forma de amortização é o Sistema SAM. É pedido montar a tabela, calculando os juros e pagamentos anuais.

Exemplo - Tabela SAM

Parcela	Pgto	Juros	Amrt.	Amrt. Ac.	Saldo Dev.
1	906,86	500,00	406,86	406,86	4.593,14
2	881,86	459,31	422,55	829,41	4.170,59
3	856,56	417,06	439,80	1.269,22	3.730,78
4	831,86	373,08	458,79	1728,00	3.272,00
5	806,86	327,20	479,66	2.207,67	2.792,33
6	781,86	279,23	502,63	2.710,30	2.289,70
7	756,86	228,97	527,89	3.238,19	1.761,81
8	731,86	176,18	555,68	3.793,87	1.206,13
9	706,86	120,61	586,25	4.380,12	619,88
10	681,86	61,99	619,88	5.000,00	0,00
Totais	7.943,63	2.943,63	5.000,00		

11.1.4 Sistema Americano

Procedimentos

- A prestação é composta somente por juros, sem amortizações nos primeiros $n-1$ períodos;
- O principal é amortizado integralmente na última prestação.
  - A prestação periódica é igual aos juros, que são constantes;
  - No último ano, a parcela é dada por juros + principal, quitando a dívida de uma só vez.
- Sistema comum no mercado de Renda Fixa (debêntures).

Exemplo - Sist. Americano
Aplicando aos dados dos exemplos anteriores, teremos:

Parcela	Pgto	Juros	Amrt.	Amrt. Ac.	Saldo Dev.
1	500,00	500,00	0,00	0,00	5.000,00
2	500,00	500,00	0,00	0,00	5.000,00
3	500,00	500,00	0,00	0,00	5.000,00
4	500,00	500,00	0,00	0,00	5.000,00
5	500,00	500,00	0,00	0,00	5.000,00
6	500,00	500,00	0,00	0,00	5.000,00
7	500,00	500,00	0,00	0,00	5.000,00
8	500,00	500,00	0,00	0,00	5.000,00
9	500,00	500,00	0,00	0,00	5.000,00
10	5.500,00	500,00	5.000,00	5.000,00	0,00
Totais	10.000,00	5.000,00	5.000,00		

11.2 Séries com pagamentos intermediários

Características

- Em algumas operações de financiamento imobiliário, é comum o pagamento, além das prestações regulares, de valores isolados (conhecidos como "balões") ou pagamentos periódicos com prazos diferentes dos períodos das prestações.

- Nesses casos, para calcular o valor da prestação mensal, precisamos deduzir o valor destes pagamentos intermediários.

Exemplo

Ex. 1
Uma construtora vende um imóvel à vista por R\$100.000, ou a prazo com taxa de 2%a.m., nas seguintes condições:

- Entrada de R\$ 10 mil;
- Pagamento de R\$ 24 mil daqui a 12 meses;
- Oito pagamentos intermediários semestrais de R\$5.000;
- 180 prestações mensais postecipadas.

Qual o valor destas prestações?

Exemplo - Continuação
Para obter o valor das prestações, devemos utilizar o conceito de equivalência de capitais. Teremos então

- VP do pagamento balão de R\$24 mil a 2%a.m.=R\$18.923,84
- VP das parcelas semestrais à taxa equivalente semestral = R\$ 24.312,41

O valor das 180 prestações pode ser então obtido pela seguinte diferença: $VP = 100.000 - 10.000 - 18.923,84 - 24.312,41 = 46.763,76$ **PMT** $= -\$962,53$

11.3 Carência em Financiamentos

Características

- Acordo entre o tomador de empréstimo e o financiador, habilitando que, durante um certo período de tempo, apenas os juros sejam cobrados, sem pagamento de amortização.
- Quando se atinge o fim da carência, o empréstimo é quitado através de algum método pré-determinado.
- Dois tipos de carência são usualmente estabelecidos:
  - Caso 1 - Durante o prazo de carência, apenas os juros sobre o principal são pagos. Não há crescimento do saldo devedor.
  - Caso 2 - Durante o prazo de carência, não há pagamento nenhum; nem de juros sobre o saldo devedor, nem de amortização do principal. Dessa forma, os juros são somados ao saldo devedor.

Exemplo

Ex. 2
Considere o financiamento da aula anterior, ou seja, R$ 5.000 por 10 anos à taxa de 10%a.a., mas agora com 2 anos de carência pelo sistema Price. Qual é o resultado considerando as duas possibilidades de carência?

Observações importantes:

- No caso 1, há apenas pagamento de juros (R$500,00) nos dois anos de carência.
- No caso 2, o saldo devedor cresce à taxa de 10% a.a.

Exemplo - Caso 1: Carência com pagamento de juros

Parcela	Pgto	Juros	Amrt.	Amrt. Ac.	Saldo Dev.
1	500,00	500,00	0,00	0,00	5.000,00
2	500,00	500,00	0,00	0,00	5.000,00
3	937,22	500,00	437,22	437,22	4.562,78
4	937,22	456,28	480,94	918,16	4.081,84
5	937,22	408,18	529,04	1.447,20	3.552,80
6	937,22	355,28	581,94	2.029,14	2.970,86
7	937,22	297,09	640,19	2.669,27	2.330,73
8	937,22	233,07	704,15	3.373,42	1.626,58
9	937,22	162,66	774,56	4.147,98	852,02
10	937,22	85,20	852,02	5.000,00	0,00
Totais	8.497,76	3.497,76	5.000,00		

Exemplo - Caso 2: Carência total

Parcela	Pgto	Juros	Amrt.	Amrt. Ac.	Saldo Dev.
1	0,00	0,00	0,00	0,00	5.500,00
2	0,00	0,00	0,00	0,00	6.050,00
3	1.134,04	605,00	529,04	529,04	5.520,96
4	1.134,04	552,10	581,84	1.110,98	4.939,02
5	1.134,04	493,90	640,13	1.751,11	4.298,89
6	1.134,04	429,89	704,15	2.455,26	3.594,74
7	1.134,04	359,47	774,56	3.229,82	2.820,18
8	1.134,04	282,02	852,02	4.081,84	1.968,16
9	1.134,04	196,82	937,22	5.019,06	1.030,94
10	1.134,04	103,09	1.030,94	5.000,00	0,00
Totais	9.072,29	3.022,29	6.050,00		

11.4 Correção Monetária em Financiamentos

Características

- Alguns financiamentos poderão ter cláusulas de reajustamento previstas em seus contratos para compensar a perda de poder aquisitivo da moeda.
- Retornando à seção sobre inflação, aplicaremos a noção de correção monetária:

$$S_{\text{corrigido}} = P \cdot (1+\theta) + P \cdot i \cdot (1+\theta) \qquad (40)$$

- Assim, reajustando-se valores tanto de principal como de juros, podem-se calcular as novas parcelas de pagamentos. O exemplo a seguir ilustrará esta situação.

Exemplo

Ex. 3
Suponha que um empréstimo de R$ 200.000,00 foi tomado à taxa de juros de 8% a.a. pelo prazo de 5 anos, devendo ser resgatado ao final deste período. Usando a tabela Price para calcular os 5 pagamentos anuais, devemos considerar a correção monetária ano a ano, por meio do reajuste pela estimativa de inflação abaixo:

Ano	Inflação
1	20%
2	18%
3	17%
4	17%
5	16,5%

Exemplo - continuação
Passo 1: Tabela Price sem correção monetária

Parcela	Pgto	Juros	Amrt.	Amrt. Ac.	Saldo Dev.
0	0,00	0,00	0,00	0,00	200.000,00
1	50.091,29	16.000,00	34.091,29	34.091,29	165.908,71
2	50.091,29	13.272,70	36.818,59	70.909,89	129.090,11
3	50.091,29	10.327,21	39.764,08	110.673,97	89.326,03
4	50.091,29	7.146,08	42.945,21	153.619,18	46.380,82
5	50.091,29	3.710,47	46.380,82	200.000,00	0,00
Totais	250.456,45	40.456,45	200.000,00		

Exemplo - continuação
Passo 2: Aplicação da eq. (1) utilizando *a inflação acumulada até o período de interesse*

Parcela	Pgto	Juros	Amrt.	Amrt. Ac.	Saldo Dev.
0	0,00	0,00	0,00	0,00	200.000,00
1	60.109,55	19.200,00	40.909,55	40.909,55	199.090,45
2	70.929,27	18.794,14	52.135,13	100.408,40	182.791,60
3	82.987,24	17.109,29	65.877,95	183.355,77	147.988,23
4	97.095,07	13.851,70	83.243,38	297.769,63	89.902,85
5	113.115,76	8.378,95	104.736,82	451.638,44	0,00
Totais	424.236,90	77.334,08	346.902,82		

11.5 Exercícios

Exercícios Sugeridos

- Vieira Sobrinho: exercícios do cap. 8.
- Dal Zot e Castro, p. 108.
- Carvalhal: exercícios dos caps. 8 e 9.
- Hoji: exercícios da p. 139.

11.6 Bibliografia

Leitura Sugerida

- VIEIRA SOBRINHO, J.D. Matemática Financeira. 7. ed. São Paulo: Atlas, 2000. Capítulo 8.
- CARVALHAL SILVA, A.L. Matemática Financeira Aplicada. São Paulo: Atlas, 2005. Capítulos 8 e 9.
- DAL ZOT, Wili; CASTRO, Manuela Longini de. Matemática Financeira: fundamentos e aplicações. Porto Alegre: Bookman, 2015. Cap. 9.
- HOJI, M. Matemática Financeira. Cap. 9.

12 Introdução aos métodos de avaliação de fluxos de caixa

12.1 Taxa Mínima de Atratividade

Conceito

- É a taxa de retorno mínima exigida pelo investidor para aplicar seus recursos;
- Utilizada para avaliar se um determinado investimento deve ou não ser realizado;
- Geralmente, a TMA é composta pelo rendimento de uma aplicação sem risco adicionado de um prêmio de risco.

12.2 Payback ou tempo de retorno

Características

- Fornece o número de períodos requeridos para se recuperar os desembolsos de caixa;
- É uma referência inicial (e rudimentar) para julgamento de atratividade e risco;
- Corresponde ao período de tempo no qual o fluxo de caixa acumulado zera, ou seja, o tempo para o projeto "se pagar":

$$\text{Payback} = Ano_{ART} + (|Custo_{NRIA}|/FC_{Ano}) \tag{41}$$

onde: Ano_{ART} = Ano antes da recuperação total do investimento; $Custo_{NRIA}$ = custo não recuperado do investimento inicial; FC_{Ano} = Fluxo de Caixa do ano da recuperação do investimento.

Exemplo

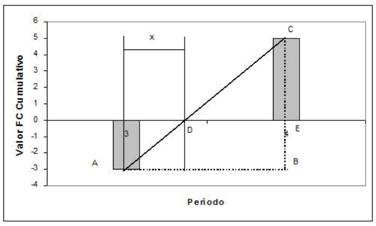
Ex. 1
A partir do fluxo de caixa abaixo, determine o payback para o investimento.

Ano	0	1	2	3	4	5	6	7
Fluxo de Caixa	-20	5	4	8	8	5	5	5

Solução: De início, precisamos calcular os fluxos acumulados como segue:

Ano	0	1	2	3	4	5	6	7
Fluxo de Caixa	-20	5	4	8	8	5	5	5
FC Acumulado	-20	-15	-11	-3	5	10	15	20

Exemplo - continuação



Por semelhança de triângulos em $t = 3$:

$$BC/AB=EC/DE \rightarrow [8/1]=[5/1\text{-}x] \therefore 8-8x=5 \Rightarrow 8x=3 \Rightarrow x=0,375.$$

- Assim, o *payback* é de 3,375 anos.
- Na equação (1), teríamos: $Payback = 3 + |-3|/8 = 3 + 0,375 = 3,375$

Vantagens e limitações

As principais vantagens estão associadas a:

- Facilidade de implementação e interpretação;
- Fornecer uma medida inicial de risco do projeto.

Já as limitações decorrem da:

- Não consideração dos fluxos que ocorrem após o período de recuperação do investimento;
- Desconsideração do princípio do valor do dinheiro no tempo.

12.3 VPL: Valor Presente Líquido

Características

- Corresponde ao valor presente de uma série de fluxos de caixa, a uma dada taxa mínima de retorno, *líquido* do investimento inicial.
- Formalmente:

$$VPL = \sum_{t=0}^{n} \frac{FC_t}{(1+i)^t} \tag{42}$$

- Regra de decisão: se o VPL > 0, então o projeto deve ser aceito, pois ele cobre o *custo de oportunidade* do investimento.

Exemplo

Ex. 2

Considere um projeto que, pelos próximos 6 anos, tem fluxos de caixa esperados iguais a $(-10.000; 2.000; 2.000; 2.000; 2.000$ e $3.000)$. Considerando uma TMA de 12%a.a., este projeto deve ser aceito?

Solução

$$VPL = -10.000 + \frac{2.000}{1,12^1} + \frac{2.000}{1,12^2} + \frac{2.000}{1,12^3} + \frac{2.000}{1,12^4} + \frac{3.000}{1,12^5} = R\$ - 2.223,02$$

O projeto não deve ser aceito, pois não cobre o custo de oportunidade de 12%a.a.

Operacionalização na HP12c

Voltando à equação que define o exemplo:

$$VPL = -10.000 + \frac{2.000}{1,12^1} + \frac{2.000}{1,12^2} + \frac{2.000}{1,12^3} + \frac{2.000}{1,12^4} + \frac{3.000}{1,12^5} = R\$ - 2.223,02$$

Na HP12c temos:

	10000	2000	4	3000	12	**f** NPV
f Fin	CHS **g** CF_0	**g** CF_j	**g** N_j	**g** CF_j	i	**-2.223,02**

Vantagens e limitações

As principais vantagens do VPL estão associadas a:

- avalia as propostas mediante o uso de uma taxa correspondente ao custo de capital ou à rentabilidade mínima exigida do investimento no mercado financeiro;
- Fornecer uma medida inicial de risco do projetoFornece uma medida do retorno em termos monetários que se espera obter em um projeto de investimento, atualizado para o momento inicial.

Já as limitações estão relacionadas a:

- o VPL por si só não revela muito sobre a rentabilidade relativa de um projeto. Dois investimentos podem ter o mesmo Valor presente de R$ 100,00 por exemplo, mas um requer um desembolso inicial de R$ 10,00 ao passo que o outro requer um desembolso de R$ 10.000,00...

12.4 TIR: Taxa Interna de Retorno

Características

- É a taxa de desconto que zera a diferença entre os valores presentes dos fluxos de entradas e de saídas de caixa de projetos sob análise (VPL=0);
- Formalmente, é a taxa que zera a seguinte equação (i.e., a raiz real positiva):

$$VPL = \sum_{t=0}^{n} \frac{FC_t}{(1+TIR)^t} = 0 \tag{43}$$

- Regra de decisão: Se a TIR > TMA, então o investimento é viável.

Exemplo

Ex. 3

Considerando novamente o projeto do Ex. 2, com fluxos iguais a ($-10.000; 2.000; 2.000; 2.000; 2.000$ e 3.000). Determinaremos a TIR para avaliar se o projeto deve ser aceito, considerando uma TMA de 12% a.a.

Solução: Para polinômios desta ordem utilizamos procedimentos iterativos tais como o algoritmo de Newton-Rhapson, que nos permite calcular a raiz real positiva utilizando a seguinte regra:

$$\lambda_{k+1} = \lambda_k - \frac{f(\lambda_k)}{f'(\lambda_k)} \tag{44}$$

Até que a raiz $\bar{\lambda}$ tenha sido encontrada, de modo que $f(\bar{\lambda}) = 0$. É este o procedimento que a HP12c utiliza na obtenção da TIR.

Operacionalização na HP12c

Voltando à equação que define o exemplo:

$$VPL = -10.000 + \frac{2.000}{(1+TIR)^1} + \frac{2.000}{(1+TIR)^2} + \frac{2.000}{(1+TIR)^3} + \frac{2.000}{(1+TIR)^4} + \frac{3.000}{(1+TIR)^5} = 0$$

Na HP12c temos:

	10000	2000	4	3000	**f** IRR
f Fin	CHS **g** CF_0	**g** CF_j	**g** N_j	**g** CF_j	**3,07%a.a.**

Vantagens e limitações

As principais vantagens da TIR são:

- Gera uma taxa de retorno para qualquer investimento;
- Permite a comparação da rentabilidade de um fluxo de caixa com outras alternativas de investimento

Já as desvantagens estão relacionadas a:

- Existência de mais de uma TIR quando os fluxos são irregulares (entradas de caixa intercaladas por saídas de caixa);
- Pressupõe que os fluxos de caixa são reinvestidos à própria TIR, o que pode não ser muito realista para investimentos em ativos reais.

Aplicabilidade da TIR

1. Quando da análise de aplicações no mercado financeiro:
    - A TIR equivale à taxa de juros do fluxo de caixa (seja de um financiamento ou de um investimento)
2. Quando da necessidade de uma taxa de retorno do investimento:
    - Que deve *sempre* ser acompanhada da mensuração do VPL

12.5 Exercícios

Exercícios Sugeridos

- Dal Zot e Castro, p. 120.
- Vieira Sobrinho:
    - Exemplos e exercícios das páginas 180-184.

12.6 Bibliografia

Leitura Sugerida

- VIEIRA SOBRINHO, J.D. Matemática Financeira. 7. ed. São Paulo: Atlas, 2000. p. 166-181.
- DAL ZOT, Wili; CASTRO, Manuela Longini de. Matemática Financeira: fundamentos e aplicações. Porto Alegre: Bookman, 2015. Cap. 10.
- HOJI, M. Matemática Financeira. Seções 11.1 e 11.2.