A prova contém quatros exercícios, que totalizam 10 pontos. **Serão consideradas nulas soluções sem adequada explicação do procedimento utilizado.** Boa sorte!

Nome do estudante: ______________________________

Nome do professor: Jacopo Viti

# 1 Parte A: Definições, notações, resultados úteis

Todas as coordenadas se referem à base canônica $\vec{e}_1,\ \vec{e}_2\ \vec{e}_3$ do espaço ($\mathbb{R}^3$). Supomos então $\vec{v} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3$ e $\vec{w} = x'\vec{e}_1 + y'\vec{e}_2 + z'\vec{e}_3$

- Produto escalar em coordenadas: $\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = xx' + yy' + zz'$.
- Produto vetorial em coordenadas: $\vec{v} \times \vec{w} = (yz' - zy')\vec{e}_1 - (xz' - zx')\vec{e}_2 + (xy' - yx')\vec{e}_3$
- O plano gerado por $\vec{v}$ e $\vec{w}$ contem todos os vetores da forma $x_1\vec{v} + x_2\vec{w}$

# 2 Parte B: Exercícios (cada exercício vale 2.5pts)

1. Considere no espaço um plano $\pi$ que contem os dois vetores $\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ e $\vec{w} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.
   (a) Estabeleça se o ponto $P \equiv (1, 2, 3)$ está no plano $\pi$ (1pt)
   (b) Estabeleça se o ponto $Q \equiv (2, 1, -1)$ está no plano $\pi$ (1pt)
   (c) Determine a distancia entre $P$ e $Q$ (0.5).

2. Considere no plano um sistema de referencia cartesiana com origem em $O$. Seja $A = (-2, -3)$ e considere a reta $r$ de equação cartesiana $y = -x - 5$.
   (a) Verifique que $r$ passa para $A$ e calcule a interseção $B$ de $r$ com o eixo $x$. (0.5pt)
   (b) Desenhe o triângulo $OAB$ (0.5pt)
   (c) Calcule a distancia entre $A$ e $B$ (0.5pt)
   (d) Calcule o cosseno do ângulo entre as os vetores $\vec{AO}$ e $\vec{AB}$ (1pt).

3. Responda às seguintes perguntas verdadeiro ou falso, justificando a lógica utilizada (0.5 cada resposta correta).
   (a) Se $a = -1$, os vetores $\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ a \\ 2 \end{bmatrix}$ e $\vec{w} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ são ortogonais?

(b) Resulta sempre $|\vec{u}+\vec{v}| \geq |\vec{u}-\vec{v}|$? Justifique a resposta com um exemplo.

(c) Supomos $\vec{u}$ e $\vec{v}$ não paralelos. O vetor $\vec{u}\times(\vec{u}\times\vec{v})$ está no plano que contem $\vec{u}$ e $\vec{v}$? Justifique a resposta com um exemplo.

(d) Se $\vec{v}$ é ortogonal a $\vec{u}$ e $\vec{w}$ então é ortogonal também a $\vec{u}-\vec{w}$? Justifique a resposta com um exemplo.

(e) Se $a = \frac{1}{3}$, os vetores $\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ e $\vec{w} = \begin{bmatrix} a \\ \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{bmatrix}$ são paralelos?

4. Considere no espaço os planos

- $\pi_1$ gerado pelos vetores $\vec{OA} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ e $\vec{OB} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$
- $\pi_2$ gerado pelos vetores $\vec{OA} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ e $\vec{OC} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

O ângulo entre dois planos $\pi_1$ e $\pi_2$ é o ângulo entre dois vetores $\vec{N}_1$ e $\vec{N}_2$ que são ortogonais a estes planos.

(a) Desenhe os três vetores $\vec{OA}$, $\vec{OB}$ e $\vec{OC}$ no espaço (0.5pt).

(b) Calcule um vetor $\vec{N}_1$ ortogonal ao plano $\pi_1$ (0.5pt)

(c) Calcule um vetor $\vec{N}_2$ ortogonal ao plano $\pi_2$ (0.5pt)

(d) Determine o **cosseno do ângulo** entre os dois planos $\pi_1$ e $\pi_2$ (1pt). O ângulo é maior que $90^o$?